第一部分　初中→新高一必修第一册

第1课时　乘法公式

知识内容	初中要求	高中(新课改)要求
乘法公式	平方差公式、完全平方公式	增加立方和、立方差、完全立方、三个数和的平方公式

温故探新知

知识回顾

1. [2021·台州中考] 已知$(a+b)^2=49$，$a^2+b^2=25$，则$ab=$ （ C ）

A. 24　　B. 48

C. 12　　D. $2\sqrt{6}$

2. 计算下列各题：

(1)$(a+2)(a-2)-a(a+1)=$ $\underline{-a-4}$.

(2)$(a+1)^2+a(2-a)=$ $\underline{4a+1}$.

(3)$(y^2-1)^2-6(y^2-1)+9=(y+2)^2$ · $\underline{(y-2)^2}$.

3. 求解下列各题.

(1)将$(x+2)(x+4)+1$化为完全平方式.

解 原式 $=x^2+6x+8+1$

$=x^2+6x+9$

$=(x+3)^2$

(2)若$x^2+\frac{1}{2}mx+k$是一个完全平方式，求k的值.

$k=(\frac{1}{4}m)^2=\frac{1}{16}m^2$

4. 比较x^2+1与$2x$的大小.

(1)尝试(用"<""=""或">"填空).

①当$x=1$时，x^2+1 $\underline{=}$ $2x$；

②当$x=0$时，x^2+1 $\underline{>}$ $2x$；

③当$x=-2$时，x^2+1 $\underline{>}$ $2x$.

(2)归纳：若x取任意实数，x^2+1与$2x$有怎样的大小关系？试说明理由.

解 (1) 当 $x=1$ 时 $x^2+1=2x$

当 $x\neq1$ 时 $x^2+1>2x$

$x^2+1-2x=(x-1)^2\geq0$

$\therefore x^2+1\geq2x$

且当且仅当 $x=1$ 时 $x^2+1=2x$

新知探究

1. 立方和、立方差公式

立方和公式：由$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$，即$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.类似还可以得到下面的立方差公式：

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

2. 完全立方公式、三个数和的平方公式

完全立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

三个数和的平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

[例1] 下列应用立方和公式变形中不正确的是 （　　）

A. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)=x^3+64y^3$

B. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$

C. $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=8x^3+y^3$

D. $(x+3)(x^2-6x+9)=x^3+27$

[答案] D

[解析] A,B,C 中应用立方和公式变形均正确，D 中应为 $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+27$.

[变式] 计算：$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)^2$.

解 原式 $=(x+\frac{1}{x})^2(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^2$

$=(x^3+\frac{1}{x^3})^2$

$=x^6+\frac{1}{x^6}+2$

[例 2] 已知 $x+y=10$, $x^3+y^3=400$，求 x^2+y^2 的值.

解：$\because x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=10(x^2+y^2-xy)=400$，

$\therefore x^2+y^2-xy=40$. ①

$\because x+y=10$，

$\therefore (x+y)^2=x^2+2xy+y^2=100$. ②

①×2+②得 $2x^2+2y^2+x^2+y^2=180$，

$3(x^2+y^2)=180$，

$x^2+y^2=60$.

[变式] 已知 $a+b+c=0$，求证：$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=0$.

证明 原式 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$+c(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)$

$\because a+b+c=0$

$\therefore$ 原式 $=0$.

[例 3] [2021 · 杭十四高一] 已知 $a+b+c=8$, $ab+bc+ac=7$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

解：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=8^2-2\times7=50$.

[变式] 计算：$\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$.

解 原式 $=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^4-\frac{1}{3}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{9}$

$=x^4-2\sqrt{2}x^3+\frac{5}{3}x^2$

$-\frac{2}{3}\sqrt{2}x+\frac{1}{9}$

[例 4] 已知 $2a^2+3a-6=0$，求代数式 $3a(2a+1)-(2a+1)(2a-1)$的值.

解：原式 $=(2a+1)(3a-2a+1)=(2a+1)(a+1)=2a^2+3a+1=(2a^2+3a-6)+7=7$.

[变式] 先化简，再求值：$(x-1)^2+x(3-x)$，其中 $x=\sqrt{5}-1$.

解 原式 $=x^2-2x+1+3x-x^2$

$=x+1$

$\because$ 当 $x=\sqrt{5}-1$ 时

原式 $=\sqrt{5}-1+1=\sqrt{5}$

名师点拨 MING SHI DIAN BO

理解单项式、多项式的乘法原理并能熟练进行乘法运算，是进行有关计算和变形的基础. 对几个常用公式要抓住规律理解记忆，熟记公式常常可以简化计算；也要找到它们的区别和联系，从而提高代数运算能力.

自学巩固练

1. 若 $a^2-xab+yb^2$ 是完全平方式，则（ D ）
   A. $x=2y$　　B. $x=4y$
   C. $x^2=2y$　　D. $x^2=4y$

2. 无论 a,b 为何实数，$a^2+b^2-2a-8b+19$ 的值（ A ）
   A. 总是正数
   B. 总是负数
   C. 可以是零
   D. 可以是正数也可以是负数

3. 设 $x>0$，且 $x-\frac{1}{x}=1$，则 $x^3-\frac{1}{x^3}$ 等于（ B ）
   A. 3　　B. 4
   C. 5　　D. 6

4. 在括号内填上适当的代数式，使等式 $x^2-(\quad)+16y^2=(\quad)^2$ 成立，则填入的代数式正确的是（ D ）
   A. $8xy, x+4y$　　B. $-4xy, x+4y$
   C. $-4xy, x-4y$　　D. $-8xy, x+4y$

5. 下列各式变形中，正确的是（ D ）
   A. $3a^2-a=2a$
   B. $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a(a+1)}$
   C. $a^2\cdot a^3=a^6$
   D. $(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2$

6. [2022·浙江 9+1 联盟高一] 已知 $a+\frac{1}{a}=3$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的值.

解 ∵$a+\frac{1}{a}=3$

∴$a^2+\frac{1}{a^2}+2=9$

∴$a^2+\frac{1}{a^2}=7$

7. 已知 $a+b=3$，$ab=-8$，求下列各式的值.
   (1) a^2+b^2.　　(2) a^2-ab+b^2.

(1) 解 原式 $=(a+b)^2-2ab$
∵$a+b=3$，$ab=-8$ 代入
原式 $=3^2-2\times(-8)$
$=9+16$
$=25$

(2) 原式 $=(a+b)^2-3ab$
∵$a+b=3$，$ab=-8$ 代入
原式 $=3^2-3\times(-8)$
$=9+24$
$=33$

   (3) $(a-b)^2$.　　(4) b^3+a^3.

(3) 原式 $=(a+b)^2-4ab$
∵$a+b=3$，$ab=-8$ 代入
原式 $=3^2-4\times(-8)$
$=9+32$
$=41$

(4) 原式 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=3\times33$
$=99$.

8. 已知 $a+b+c=4$，$a^2+b^2+c^2=8$，求 $ab+bc+ac$ 的值.

解 $(a+b+c)^2=16=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
∴$ab+bc+ac=4$

9. 已知 $x+y=4$，$xy=-4$，求 $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$ 的值.

解 当 $x>y$ 时
原式 $=\frac{(x+y)}{(x-y)}\times\frac{(x-y)^2+3xy}{(x+y)^2-3xy}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

当 $x<y$ 时 原式 $=-\frac{7}{10}\sqrt{2}$

∴原式 $=\pm\frac{7}{10}\sqrt{2}$

10. 计算下列各式.

(1) $\left(m-\frac{1}{2}n\right)\left(m^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{4}n^2\right)$.

(1) 原式 $=(m-\frac{1}{2}n)(m+\frac{1}{2}n)^2$

$=(m^2-\frac{1}{4}n^2)(m+\frac{1}{2}n)$

$=m^3-\frac{1}{8}n^3$

(2) $(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$.

原式 $=(a^2-4)(a^2+4)^2$

$=(a^4-16)(a^2+4)$

$=a^6-64$

(3) $(a+4b-3c)(a-4b-3c)$.

原式 $=(a-3c+4b)(a-3c-4b)$

$=(a-3c)^2-(4b)^2$

$=a^2+9c^2+16b^2-6ac$

(4) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$.

原式 $=\cancel{(x^2+y^2)}(x+y)^2[(x-y)^2+xy]^2$

$=x^6+2x^3y^3+y^6$

11. 先化简,再求值:$(x-2)(x+2)-x(x-1)$,其中 $x=3$.

解 原式 $=x^2-4-x^2+1$

$=-4+1=-3$

$\because x=3$ 时

原式 $=-3$

12. 已知 $x^2-5x+1=0$,求 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值.

解 $x+\frac{1}{x}=5$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=23$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=110$

13. 已知 $a+b+c=0$,求证:$a^3+b^3+c^3=3abc$.

证 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

第 2 课时　因式分解

知识内容	初中要求	高中(新课改)要求
因式分解	提取公因式法、公式法	增加十字相乘法、分组分解法、求根公式法及两步以上的因式分解

温故探新知

知识回顾

1. 计算下列各题.

(1) $(-2xy^2)^2\cdot 3x^2y\div(-x^3y^4)$.

解 原式 $=4x^2y^4\cdot 3x^2y\div(-x^3y^4)$

$=12x^4y^5\div(-x^3y^4)$

$=-12xy$

(2) $(2x+y)(2x-3)-2y(x-1)$.

原式 $=4x^2+2xy-6x-3y-2xy+2y$

$=4x^2-6x-y$

(3) $\left(2x^2y-x^3y^2-\dfrac{1}{2}xy^3\right)\div\left(-\dfrac{1}{2}xy\right)$.

原式 $=\left(-\dfrac{2}{xy}\right)\left(2x^2y-x^3y^2-\dfrac{1}{2}xy^3\right)$

$=-4x+2x^2y+y^2$

2. 因式分解.

(1) $1+27x^3$.

解 原式 $=1^3+(3x)^3$

$=(1+3x)(1-3x+9x^2)$

(2) $3a^3b-81b^4$.

原式 $=b(3a^3-81b^3)$

$=3b(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

(3) $(a+b)^2-6(a+b)+9$.

原式 $=(a+b-3)^2$

新知探究

1. 分组分解法

对于式子 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$,反过来,就有:$ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$.这样利用分组来因式分解的方法称为分组分解法.

2. 十字相乘法

因为 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$.

所以 $a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,

我们发现,二次项系数 a 分解成 a_1a_2,常数项 c 分解成 c_1c_2,把 a_1,a_2,c_1,c_2 写成 $\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\times\begin{matrix}c_1\\c_2\end{matrix}$,这里按斜线交叉相乘,再相加,就得到 $a_1c_2+a_2c_1$,这种借助画十字交叉线分解系数,从而将二次三项式分解因式的方法,叫做十字相乘法.

3. 求根法

若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个实数根分别为 x_1,x_2,则二次三项式 ax^2+bx+c 可以因式分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$.

[例 1] 因式分解.

(1) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

(2) x^2-5x+6.

(3) $12x^2-5x-2$.

解:(1) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)$.

(2) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

(3) $12x^2-5x-2=(3x-2)(4x+1)$.

[变式] 因式分解.

(1) $x^2-2x-15$.

解 原式 $=(x-5)(x+3)$

(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$.

原式 $=(x^2+x\ \cancel{+6}-2)(x^2+x-6)$

$=(x-2)^2(x+1)\cancel{(x+2)}(x+3)$

(3) $5x^2+6xy-8y^2$.

原式 $=(x+2y)(5x-4y)$

[例 2] 因式分解.

(1) $2x^2-3x-1$.

(2) $2x^2-3x-3$.

解:(1)原式 $=2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

(2)原式 $=2\left(x-\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$.

[变式] 因式分解:$3x^2-14xy+5y^2$.

解 ~~原式=(3x−y)(x−5y)~~

原式 $=3\left(x-\frac{7+\sqrt{34}}{3}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{34}}{3}\right)$

[例 3] 因式分解:$x^2+3(x+y)+3-y^2+(x-y)$.

解:$x^2+3(x+y)+3-y^2+(x-y)=x^2-y^2+3(x+y)+3+(x-y)=(x-y)(x+y)+(x-y)+3(x+y)+3=(x-y)(x+y+1)+3(x+y+1)=(x+y+1)(x-y+3)$.

[变式 1] 下列因式分解中正确的是 (B)

A. $a^4b-6a^3b+9a^2b=a^2b(a^2-6a+9)$

B. $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

C. $x^2-2x+4=(x-2)^2$

D. $4x^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$

[变式 2] 把 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$ 因式分解.

解 ~~原式= abc²−abd²−a²cd+b²cd~~

原式 $=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=bc(ac+bd)-ad(bd+ac)$

$=(bc-ad)(bd+ac)$

名师点拨 MING SHI DIAN BO

一般地,把一个多项式因式分解,可以按照下列步骤进行:

(1) 如果多项式各项有公因式,那么先提取公因式;

(2) 如果各项没有公因式,那么可以尝试运用公式来分解;

(3) 如果用上述方法不能分解,那么可以尝试用分组或其他方法(如十字相乘法)来分解;

(4) 分解因式,必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

自学巩固练

1. ［2021·杭州中考］因式分解：$1-4y^2=$ （A.）

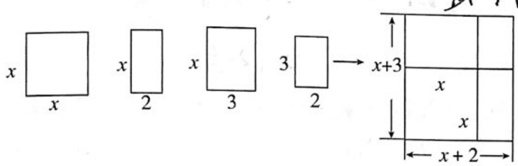
A. $(1-2y)(1+2y)$

B. $(2-y)(2+y)$

C. $(1-2y)(2+y)$

D. $(2-y)(1+2y)$

2. 下图从左到右的拼图过程中，所反映的数量关系式是 （ ）A



A. $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

B. $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

C. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

D. $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

3. 若 $2x^3+x^2-12x+k$ 有一个因式为 $2x+1$，则k 的值为 （B）

A. 0　　B. -6

C. -1　　D. 6

4. 已知 $2x^2-ax-2=0$，有下列结论：①x 的值不可能为 0；②当 $x=2$ 时，$a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$；③当 $a=1$ 时，$2x^2+\frac{2}{x^2}=6$；④当 $a=2$ 时，$x^3-4x^2+2x=-3$. 其中正确的是 ①② ④ .（填序号）

5. 若点 P 的坐标(a,b)满足 $a^2b^2+a^2+b^2+10ab+16=0$，则点 P 的坐标为 (2,-2)或(-2,2)

6. 因式分解.

(1)$x^2+37x+36$.

解 原式$=(x+1)(x+36)$

(2)$6x^2-5xy+y^2$.

原式$=(3x-y)(2x-y)$

(3)$8a^3-b^3$.

原式$=(2a)^3-b^3$

$=(2a-b)\times(4a^2+2ab+b^2)$

7. 已知 $a+b=\frac{2}{3}$，$ab=2$，求代数式 $a^2b+2a^2b^2+ab^2$ 的值.

解 原式$=ab(a+2ab+b)$

$=2(\frac{2}{3}+2\times2)$

$=2(\frac{2}{3}+4)$

$=2\times\frac{14}{3}$

$=\frac{28}{3}$

8. 因式分解.

(1)$2a^3b-8ab^3$.

解 原式$=2ab(a^2-4b^2)$

$=2ab(a-2b)(a+2b)$

(2) $x^2-y^2+ax+ay$.

原式 $=(x-y)(x+y)+a(x+y)$

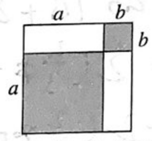
$=(x-y+a)(x+y)$

(3) $(6x^2-7x)^2-25$.

原式 $=(6x^2-7x-5)(6x^2-7x+5)$

$=(2x+1)(3x-5)(6x^2-7x+5)$

9. (1)仔细观察下面图形，利用面积关系写出一个等式：$a^2+b^2=$ $(a+b)^2-2ab$.



(2)根据(1)中的等式关系解决问题：已知 $m+n=4$，$mn=-2$，求 m^2+n^2 的值.

(3)小明根据(1)中的关系式还解决了以下问题：

"已知 $m+\frac{1}{m}=3$，求 $m^2+\frac{1}{m^2}$ 和 $m^3+\frac{1}{m^3}$ 的值".

小明的解法：

$m^2+\frac{1}{m^2}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-2=3^2-2=7$.

$\because \left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)=m^3+\frac{1}{m}+m+\frac{1}{m^3}$,

$\therefore m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)-\left(m+\frac{1}{m}\right)=3\times7-3=18$.

请你仔细理解小明的解法，并求 m^5+m^{-5} 的值.

解 (2) $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

∵ $m+n=4$

$mn=-2$

原式 $=4^2-2\times(-2)$

$=16+4=20$

(3) $\left(m^3+\frac{1}{m^3}\right)\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)$

$=m^5+\frac{1}{m^5}+\frac{1}{m}+m$

∴ $m^5+m^{-5}=7\times18-3$

$=123$

10. [2022·嘉兴一中高一] $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足 $a^2+ab-bc+2a=2c+ca$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 ~~∵ $a^2+ab-bc+2a=2c+ca$~~

$a(a-c)+b(a-c)+2(a-c)=0$

∴ $(a+b+2)(a-c)=0$ ∵ $a+b+2>0$ ∴ $a=c$

∴ 等腰△

11. a,b,c 为非零实数，$a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$. 求 $a+b+c$ 的值.

解 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+1+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+1+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+1=0$

∴ $a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

∴ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

又∵ $abc\neq0$

∴ $a+b+c=0$ 或 $ac+ab+bc=0$

又∵ $a^2+b^2+c^2=1$

∴ $a+b+c=0$ 或 ±1

第 3 课时　二次根式与分式

知识内容	初中要求	高中(新课改)要求
分式化简运算和分式恒等变形	分式的化简运算、恒等变换求值	增加复杂分式的化简运算
二次根式分母有理化	二次根式分母有理化的概念及方法	增加含有字母的二次根式分母有理化
二次根式的化简计算	二次根式的计算	增加含有字母的二次根式的计算

温故探新知

知识回顾

1. [2021·杭州中考] 下列计算中正确的是（ A ）

A. $\sqrt{2^2}=2$

B. $\sqrt{(-2)^2}=-2$

C. $\sqrt{2^2}=\pm2$

D. $\sqrt{(-2)^2}=\pm2$

2. [2021·金华中考] 二次根式 $\sqrt{x-3}$ 中，字母 x 的取值范围是 $x\geq3$.

3. 分母有理化：(1) $\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}}{12}$.

(3) $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 先化简，再求值：$\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)+\frac{4+2a}{a^2-1}$，其中 $a=-2+\sqrt{2}$.

解 原式 $=\frac{(a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)}+\frac{2(2+a)}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{2+4+2a}{(a+1)(a-1)}=\frac{2a+6}{a^2-1}$

当 $a=-2+\sqrt{2}$ 时

原式 $=\frac{2\times(-2+\sqrt{2})+6}{(-2+\sqrt{2})^2-1}$

$=\frac{-4+2\sqrt{2}+6}{4+2-4\sqrt{2}-1}$

$=\frac{2+2\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}}$

$=\frac{(5+4\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})}{5^2-(4\sqrt{2})^2}$

$=\frac{10+10\sqrt{2}+8\sqrt{2}+16}{25-32}$

$=-\frac{26+18\sqrt{2}}{7}$

5. 已知 $x=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$，求 x^2-xy+y^2 的值.

解 原式 $=(x-y)^2+xy$

$=\left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$

$=\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7}}{2}\right)^2+\frac{11-7}{4}$

$=(\sqrt{7})^2+1$

$=7+1$

$=8$

6. 计算：$\frac{10}{\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)^0-\sqrt{20}+\sqrt{\sin 30^\circ}-2\cos 60^\circ$.

解 原式 $=2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{2}}-2\times\frac{1}{2}$

$=1-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

新知探究

知识点一　复杂分式的化简运算和分式的恒等变形

1. 分式的意义：形如$\dfrac{A}{B}$的式子，若 B 中含有字母，且$B\neq0$，则称$\dfrac{A}{B}$为分式. 当 $M\neq0$ 时，分式$\dfrac{A}{B}$具有下列性质：$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times M}{B\times M}$；$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div M}{B\div M}$.

2. 繁分式：像$\dfrac{\frac{a}{b}}{c+d}$，$\dfrac{m+n+p}{\frac{2m}{n+p}}$这样的分子或分母中含有分式的分式叫做繁分式.

[例 1] 已知分式$\dfrac{1}{\frac{1-x}{x}}$有意义，求 x 的取值范围.

解：由$\dfrac{1}{\frac{1-x}{x}}$有意义可知，$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\neq0,\\ x\neq0,\end{cases}$则 $x\neq1$且$x\neq0$，∴ x 的取值范围是 $x\neq0$ 且 $x\neq1$.

[变式] 化简：$\dfrac{a}{1+\frac{a+1}{a-1}}$.

解　原式$=\dfrac{a}{a^2-1+1}=\dfrac{a}{a^2}=\dfrac{1}{a}$

名师点拨 MING SHI DIAN BO

当分式是繁分式时，要考虑分式的每一部分有意义，并根据分式的基本性质进行繁分式的化简.

知识点二　含有字母的二次根式分母有理化

1. 分母有理化：将原为无理数的分母化为有理数的过程，也就是将分母中的根号化去.

2. 有理化因式：
两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，就说这两个代数式互为有理化因式. 有理化因式的确定方法如下：
①单项二次根式：利用$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ 来确定. 如：$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$，$\sqrt{a+b}$与$\sqrt{a+b}$等分别互为有理化因式.
②两项二次根式：利用平方差公式来确定. 如：$a+\sqrt{b}$与 $a-\sqrt{b}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$与 $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$分别互为有理化因式.

[例 2] 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

解：∵ $x+y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=10$，$xy=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$，

∴ $3x^2-5xy+3y^2=3(x+y)^2-11xy=3\times10^2-11=289$.

[变式] 设 $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，求 x^3+y^3 的值.

解　原式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=\left[\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right]\left[\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$

$=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}{2}\times\left[\dfrac{3+2\sqrt{3}+1-3+2\sqrt{3}-1}{2}+1\right]$

$=\dfrac{8}{2}\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{2}+1\right)$

$=4\times(2\sqrt{3}+1)$

$=8\sqrt{3}+4$

名师点拨 MING SHI DIAN BO

(1)分母有理化是分母和分子都乘分母的有理化因式,化去分母中的根号的过程;而分子有理化则是分母和分子都乘分子的有理化因式,化去分子中的根号的过程.

(2)有关代数式的求值问题:①先化简后求值;②当直接代入运算较复杂时,可根据结论的结构特点,倒推几步,再代入条件,有时整体代入可简化计算过程.

知识点三　含有字母的二次根式的计算

在二次根式的化简与运算过程中,二次根式的乘法可类比整式乘法进行,运算中要运用公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,还涉及$\sqrt{a^2}$的化简;而对于二次根式的除法,通常转化为乘法,然后通过分母有理化进行运算;二次根式的加、减法本质是合并同类二次根式的过程.

[例 3] 计算:$\sqrt{-a^3b}$.

解:原式$=|a|\sqrt{-ab}$.

[变式] [2022·萧山中学高一] 若$x<3$,则$\sqrt{9-6x+x^2}-|x-6|$的值是　(　A　)

A. -3　　B. 3

C. -9　　D. 9

[例 4] (1)化简:$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

(2)化简$\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)\div\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}$,并从 1,2,3 这三个数中选一个合适的数作为$x$的值代入求值.

解:(1)原式$=\sqrt{1^2+2\times1\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$.

(2)原式$=\dfrac{x-1}{x-2}\times\dfrac{(x-2)^2}{x-1}=x-2$.

依题意可知,$\begin{cases}x-2\neq0,\\x-1\neq0,\end{cases}$即$x\neq2$且$x\neq1$,

∴将$x=3$代入,原式$=1$.

[变式] (1)化简:$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

解 原式 $=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$=2-\sqrt{3}$

(2)先化简,再求值:$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{2a-2b}\div\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$,其中$a=\sqrt{5}+1$,$b=\sqrt{5}-1$.

原式:$\dfrac{(a-b)^2}{2a-2b}\div\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)$

$=\dfrac{(a-b)^2}{2(a-b)}\times\dfrac{ab}{a-b}$

$=\dfrac{ab}{2}$

∵ $a=\sqrt{5}+1$ $b=\sqrt{5}-1$

原式 $=\dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

名师点拨 MING SHI DIAN BO

对于二次根式的运算,不但要掌握二次根式的基本概念和运算法则,还要掌握一些特殊的方法和技巧.约分、合并是进行二次根式运算的两个重要手段,分母有理化要及时,含有字母的运算要注意隐含条件或括号里的说明.

自学巩固练

1. 二次根式$\sqrt{a^2}=-a$成立的条件是(　C　)

A. $a>0$　　B. $a<0$

C. $a\leqslant0$　　D. a是任意实数

2. 化简$\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{1}{1-x}$的结果是　(　A　)

A. $x+1$　　B. $x-1$

C. x^2-1　　D. $\dfrac{x^2+1}{x-1}$

3. 若 $\sqrt{a+b+5}+|2a-b+1|=0$，则 $(b-a)^{2019}=$ （A）

A. -1　　B. 1

C. 5^{2019}　　D. -5^{2019}

4. 已知 $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，则 a 与 b 的关系是 （C）

A. $a-b=0$　　B. $a+b=0$

C. $ab=1$　　D. $a^2=b^2$

5. 若 $\sqrt{(5-x)(x-3)^2}=(x-3)\sqrt{5-x}$，则 x 的取值范围是 $3\le x\le 5$.

6. 计算：$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}=$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$.

7. 已知分式 $\dfrac{a^2-4}{1+\dfrac{1+3a}{2a}}$ 没有意义，求 a 的值.

解 由题意得 $\frac{1+3a}{2a}=-1$ 或 $a=0$

$\therefore a=-\frac{1}{5}$ 或 $a=0$.

8. 比较下列各式的大小.

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

~~解原式=~~

~~$\sqrt{11}$~~

$\sqrt{12}-\sqrt{11}=\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$

$\sqrt{11}-\sqrt{10}=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

$\because \sqrt{12}+\sqrt{11}>\sqrt{11}+\sqrt{10}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}<\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

$\therefore \sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$

(2) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 和 $\frac{10}{\sqrt{6}+4}$.

$\frac{10}{\sqrt{6}+4}=4-\sqrt{6}$

$\because 4>2\sqrt{2}$

$\therefore 4-\sqrt{6}>2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\therefore 2\sqrt{2}-\sqrt{6}<\frac{10}{\sqrt{6}+4}$

(3) $\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{11})^2=2\sqrt{15}-3$

$2\sqrt{60}-\sqrt{9}>0$

$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{3}>\sqrt{11}$

9. 设 $e=\frac{c}{a}$，且 $e>1$，$c^2-6ac+9a^2=0$，求 e 的值.

解 $(c-3a)^2=0$

$\therefore c=3a$

$\therefore e=\frac{3a}{a}=3$

10. 设 x,y 为实数，且 $xy=3$，求 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值.

解 原式 $=2\sqrt{xy}$ ~~由~~

$\because xy=3$ 得

原式 $=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

11. 先化简，再求值：$\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x}{2}$，其中 $x=2\,021$.

解 原式 $=\frac{x-1+1}{x-1}\times\frac{2}{x}$

$=\frac{x}{x-1}\times\frac{2}{x}$

$=\frac{2}{x-1}$

当 $x=2021$ 时

原式 $=\frac{2}{2020}=\frac{1}{1010}$

12. 化简：

(1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{27}}{3}+\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$.

解 原式 $=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\frac{3\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}$

$=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+\frac{2}{3}$

$=-\frac{1}{3}$

(2) $\left(\sqrt{18}-4\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)\div\frac{\sqrt{3}}{3}$.

原式 $=\sqrt{3}\,(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cancel{+}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})$

$=-3$

(3) $2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

原式 $=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

13. 先化简，再求值：

(1) $\frac{2m+n}{m^2-2mn+n^2}\cdot(m-n)$，其中 $\frac{m}{n}=2$.

解 原式 $=\frac{2m+n}{(m-n)^2}\cdot(m-n)$

$=\frac{2m+n}{m-n}$

$\because \frac{m}{n}=2$ 得 $m=2n$

$\therefore$ 原式 $=\frac{2n\times2+n}{2n-n}=\frac{4n+n}{n}=\frac{5n}{n}=5$

(2) $\left(\frac{x^2-2x+4}{x-1}+2-x\right)\div\left(\frac{x^2+4x+4}{1-x}\right)$，其中 x 满足 $x^2-4x+3=0$.

原式 $=\cancel{\frac{x-2}{x-1}}\ \frac{x^2-2x+4+(2-x)(x-1)}{x-1}\times\frac{1-x}{(x+2)^2}$

$=-\frac{x^2-2x+4+2x-2-x^2+x}{(x+2)^2}$

$=-\frac{x+2}{(x+2)^2}$

$=-\frac{1}{x+2}$

又 $\because x^2-4x+3=0$

$\therefore x=1$ 或 3 $\because x\neq1$ 且 $x\neq-2$

$\therefore x=3$ $\therefore$ 原式 $=-\frac{1}{3+2}=-\frac{1}{5}$