

2018 年秋季学期概率论与数理统计期末考试试题及答案

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设事件 A 与 B 互斥，且 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$ ，则 $P(\bar{A} \cap \bar{B})=$ _____.

2. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，且 $X_1 \sim U(0,6), X_2 \sim E(0.5), X_3 \sim P(2)$ ，则

$Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ 的方差 $DY=$ _____.

3. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, x \in R, y \in R$$

则 $D(X + 2Y) =$ _____.

4. 设 $X \sim U(0,1), Y$ 服从两点分布 $B(1,0.5)$ ，且 X, Y 独立， $Z = X + Y$ ，则 $Z^{1/2}$ 的数学期望为_____.

5. 设由来自总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的样本的样本均值 $\bar{x} = 5$ ，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

$$t_{0.05}(9) = 1.8331, t_{0.025}(9) = 2.2622, t_{0.05}(8) = 1.8595, t_{0.025}(8) = 2.360, \Phi(1.645) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975$$

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 5 人以摸彩方式决定谁能得唯一的一张电影票，今设 A_i 表示第 i 个人摸到 ($i=1, 2, 3, 4, 5$)，则下列结果中有一个不正确，它是（ ）.

(A) $P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{4}$; (B) $P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{5}$; (C) $P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{1}{3}$; (D) $P(A_5) = \frac{1}{5}$.

2. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ ，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ ，则（ ）

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;
(B) $f_1(x) f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;
(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;
(D) $F_1(x) F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

3. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，对于常数 $k > 0$ ，则概率 $P(|X - \mu| \leq k\sigma)$ （ ）

- (A) 只与 μ 有关; (B) 只与 k 有关;
(C) 只与 σ 有关; (D) 与 μ, σ, k 均有关.

4. 设随机变量 X 概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $Y = \begin{cases} X, & 1 < X \leq 2 \\ 1, & X \leq 1 \\ 2, & X \geq 2 \end{cases}$ 的分布函数

() .

- | | |
|---------------|---------------|
| (A) 是连续函数; | (B) 恰好有一个间断点; |
| (C) 恰好有两个间断点; | (D) 恰好有三个间断点; |

5. 设随机变量 X, Y 独立同分布, $EX = 2$. $P(XY < 5) = 0.7$, $P(XY \leq 3) = 0.3$,

则由切比雪夫不等式有 DXY ()

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (A) ≤ 0.6 ; | (B) ≥ 0.4 ; | (C) ≥ 0.6 ; | (D) ≤ 0.4 . |
|------------------|------------------|------------------|------------------|

三、(8分) 甲袋中有3个白球和2个黑球, 乙袋中有4个白球和4个黑球, 从甲袋中取出2个球放入乙袋, 再从乙袋中任取一个球。(1) 求从乙袋中取出的1个球是白球的概率; (2) 若放入乙袋的2个球和从乙袋中取出的1个球是同色的, 求放入乙袋的2个球均为白球的概率。

四、(8分) 设 (X, Y) 有概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求(1) $Z = X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$; (2) 在 $X = x$ 条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

五、(8分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 为顶点的三角形区域

内服从均匀分布, 试求(1)随机变量 $Z = X - 2Y$ 的方差;(2) X 和 Y 的相关系数 ρ .

六、(12分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2x/\theta^2, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的一个简单随机样本。(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$; (2) 问 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ 是否是 θ 的无偏估计量? 并说明理由; (3) 若不是无偏估计量, 请修正为无偏估计量然后再比较两个估计量的有效性。

七、(4分) 某人向一目标反复独立地进行射击, 每次射击命中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 直到命中目标 r 次为止, X 表示射击次数, 求 (1) X 的分布列; (2) EX , DX

2018-2019 秋季学期概率统计期末考试参考答案

一. 填空题 (3 分/题, 共 15 分)

1. 0.3 2.37 3. 6.5 4. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 5.(4.412, 5.588) ((4.0, 6.0)都算对)

二. 选择题 (3 分/题, 共 15 分)

1. A 2.D 3.B 4.C 5.C

三. (8分) 解: (1) 令 A_i 表示从甲袋中取出 i 个白球 ($i=0,1,2$)

$$B \subset S = A_0 + A_1 + A_2, B = BS = \sum_{i=0}^2 A_i B$$

$$\text{利用全概率公式可得: } P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^2 \frac{C_3^i C_2^{2-i}}{C_5^2} \times \frac{(4+i)}{10} = 13/25$$

6分

(2) 设 $A = \{\text{从甲袋取的是2个白球}\}$; $B = \{\text{从乙袋取的是1个白球}\}$;

$$D = \{\text{乙袋放入和取出的是同色球}\}$$

$$\text{有 } P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(AB)}{P(\overline{AB}+AB)} = \frac{\frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}}{\frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10} + \frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \quad 2\text{分}$$

四、(8分) 解: (1) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dx$

$$\text{若 } f(x, x-z) > 0 \text{ 必有 } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < x-z < 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ z < x, \\ z > 3x-2 \end{cases}$$

$$\text{当 } -2 < z < 0 \text{ 时 } f_Z(z) = \int_0^{(z+2)/3} dz = (z+2)/3$$

$$\text{当 } 0 < z < 1 \text{ 时 } f_Z(z) = \int_z^{(z+2)/3} dz = 2(1-z)/3$$

$$\text{其它, } f_Z(z) = 0$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z+2)/3, & -2 < z < 0 \\ 2(1-z)/3, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad 6\text{分}$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{(2-x)/2} dy = (2-x)/2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x) \text{ 时 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2(1-x)}, \quad 4\text{分}$$

$$\text{其它, } f_{Y|X}(y|x) = 0$$

五. (8 分) 解: (1) 三角形区域 $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \geq 1\}$ 随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{若 } (x, y) \in G \\ 0 & \text{若 } (x, y) \notin G \end{cases}$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度, 则当 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 时, $f_1(x) = 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{1-x}^1 2 dy = 2x$$

$$\therefore EX = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} \quad EX^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\text{同理可得} \quad EY = \frac{2}{3}, \quad DY = \frac{1}{18},$$

$$EXY = \iint_G 2xy dxdy = 2 \int_0^1 x dx \int_{1-x}^1 y dy = \frac{5}{12}$$

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36}$$

$$\text{于是} \quad DZ = D(X+Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{18} + \frac{4}{36} = \frac{7}{18} \quad 6 \text{ 分}$$

$$(2) \quad \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-1/36}{\sqrt{1/18} \sqrt{1/18}} = -1/2 \quad 2 \text{ 分}$$

六、(12分) 解: (1) 矩估计: $EX = \mu_1 = \int_0^\theta x \cdot \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{3\theta^2} x^3 \Big|_0^\theta = \frac{2}{3} \theta$, $\theta = \frac{3}{2} \mu_1$

于是 θ 的矩估计为: $\hat{\theta}_1 = \frac{3}{2} \bar{X}$

极大似然估计: 样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 的似然函数为 $L = \begin{cases} \theta^{-2n} 2^n \prod_{i=1}^n x_i & 0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \leq \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$\ln L = -2n \ln \theta + n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \frac{d \ln L}{d\theta} = -\frac{2n}{\theta} = 0 \quad \text{无解}$$

\therefore 取 $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$, 由定义知 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的最大似然估计. 8分

$$(2) g(y) = G'(y) = nF^{n-1}(y)f(y), \text{ 而 } X \sim F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{\theta^2} & 0 \leq x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

$$\therefore \hat{\theta}_2 \sim g(y) = \begin{cases} n \left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \frac{2y}{\theta^2} & 0 \leq y < \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y) dy = \int_0^\theta ny \left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \frac{2y}{\theta^2} dy = \frac{2n}{2n+1} \theta \neq \theta, \quad \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \text{ 不是 } \theta \text{ 的无偏}$$

估计.

$$E \hat{\theta}_1 = E \frac{3}{2} \bar{X} = \frac{3}{2} E \bar{X} = \frac{3}{2} EX = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \theta = \theta, \quad \text{所以 } \hat{\theta}_1 \text{ 为 } \theta \text{ 的无偏估计. 2分}$$

$$(3) \text{ 若取 } \hat{\theta}_3 = \frac{2n+1}{2n} \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} = \frac{2n+1}{2n} \hat{\theta}_2$$

因为 $E(\hat{\theta}_3) = \frac{2n+1}{2n} E(\hat{\theta}_2) = \theta$, $\therefore \hat{\theta}_3$ 为 θ 的无偏估计量.

$$D \hat{\theta}_1 = D \left(\frac{3}{2} \bar{X} \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^2 D(\bar{X}) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n DX = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{n} (EX^2 - (EX)^2)$$

$$= \frac{9}{4n} \left(\frac{1}{2} \theta^2 - \left(\frac{2}{3} \theta \right)^2 \right) = \frac{9}{4n} \cdot \frac{1}{18} \theta^2 = \frac{1}{8n} \theta^2$$

$$E \hat{\theta}_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 g(y) dy = \int_0^\theta ny^2 \left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \frac{2y}{\theta^2} dy = \frac{2n}{2n+2} \theta^2$$

$$D(\hat{\theta}_2) = E \hat{\theta}_2^2 - (E(\hat{\theta}_2))^2 = \frac{2n}{2n+2} \theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1} \theta \right)^2 = \frac{2n((2n+1)^2 - 2n(2n+2))}{(2n+2)(2n+1)^2} \theta^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

$$\text{所以, } D \hat{\theta}_3 = D \left(\frac{2n+1}{2n} \hat{\theta}_2 \right) = \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^2 D \hat{\theta}_2 = \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^2 \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2} = \frac{\theta^2}{4n(n+1)}$$

$$n > 1, D\hat{\theta}_1 = \frac{1}{8n} \theta^2 \geq D\hat{\theta}_3 = \frac{\theta^2}{4n(n+1)} \quad 2 \text{ 分}$$

利用数学归纳法容易证明：
所以， $\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 较有效。

七. (4 分) 解：(1) 由题设：若第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验，则必有 $k \geq r$ ，

设 $(X = k)$ 表示第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验这一事件

于是 $(X = k)$ 发生当且仅当前面 $k - 1$ 次射击试验中有 $r - 1$ 次命中， $k - r$ 次未命中，而第 k 次试验的结果为命中。

利用试验的独立性：

$$P(X = k) = (C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k-1-(r-1)}) p = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1, r+2, \dots \quad 2 \text{ 分}$$

(2) 令 X_i 表示第 $i - 1$ 次命中之后到第 i 次命中所历经的贝努里试验的次数 ($i = 1, 2, \dots, r$)

于是 X_1, X_2, \dots, X_r 独立同分布 (i.i.d.)， $X_1 \sim G(p)$ ，则有：

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r,$$

$$EX = E(X_1 + X_2 + \dots + X_r) = rE(X_1) = \frac{r}{p} \quad 2 \text{ 分}$$

$$DX = D(X_1 + X_2 + \dots + X_r) = rD(X_1) = \frac{rq}{p^2}$$