# 2019秋季学期概率统计期末考试参考答案

一．填空题（3分/题，共15分）

1. 0.8    2. 5    3. 0.5 .   4. 11/12    5. (2.68, 2.72)

二．选择题（3分/题，共15分）

1. C    2.A    3.A    4.D    5.B

三．（8分）解：（1）设A表示枪已校正，B表示射击中靶，则

$$B \subset A + \bar{A}$$

利用全概率公式可得：$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

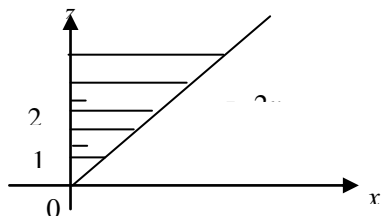$$= \frac{3}{5} \times 0.9 + \frac{2}{5} \times 0.4 = 0.7$$

4分

（2）由贝叶斯公式有

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) + P(A)P(\bar{B}|A)}$$

4分

$$= \frac{\frac{2}{5} \times 0.6}{\frac{2}{5} \times 0.6 + \frac{3}{5} \times 0.1} = 0.8$$

四、（8分）解：（1）Z 的概率密度函数为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$



使 $f(x,z-x)$ 不为 0 的区域为：$0<x<z-x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ z<2x \end{cases}$
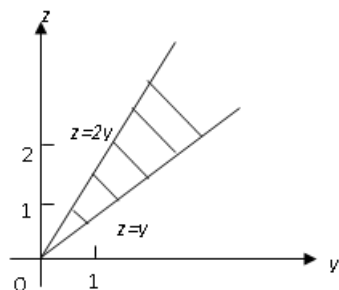
当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时 $f_Z(z)=\int_0^{z/2}xe^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^{z/2}xe^x dx$ 时

$$=e^{-z}\left[xe^x\Big|_0^{z/2}-e^x\Big|_0^{z/2}\right]=e^{-z}\left[\frac{z}{2}\cdot e^{+\frac{z}{2}}+1-e^{\frac{z}{2}}\right]=e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}$$

$$\therefore \quad f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases} \qquad\qquad 6 分$$

or 另解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$ 不为 0 区域： $0<z-y<y\begin{cases} z>y \\ z<2y \end{cases}$



$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ (\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, & z>0 \end{cases} \qquad\qquad 6 分$$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ xe^{-x}, & x>0 \end{cases}$

则 在 $X=x\ (x>0)$ 的条件下， $Y$ 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} 0, & 其他 \\ e^{-y+x}, & y>x \end{cases} \qquad\qquad 2 分$$

2

五.（8分）解：(1) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)dy = \frac{7}{6}$

由对称性知，$EY = EX = \frac{7}{6}$

$EXY = \int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}xy(x+y)dy = \frac{4}{3}$，$\text{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = -\frac{1}{36}$

$EX^2 = \int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}x^2(x+y)dy = \frac{5}{3}$，$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{11}{36}$，$DY = DX = \frac{11}{36}$

$\rho = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{11}$　　　　　　　　6 分

（2）$D(3X - Y) = 9DX + DY - 2\times 3\text{Cov}(X,Y) = \frac{29}{9}$　　　　2 分

六、（12分）解：（1）矩估计：令 $\overline{X} = EX = \frac{\theta}{2}$，则 $\theta_1 = 2\overline{X}$

极大似然估计：样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的似然函数为 $L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 \le x_1, \cdots x_n \le \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore$ 取 $\hat{\theta}_2 = \max\limits_{1\le i\le n}[x_i]$，由定义知 $\hat{\theta}_2$ 为 $\theta$ 的最大似然估计.　　　6 分

（2）$g(y) = G'(y) = nF^{n-1}(y)f(y)$，而 $X \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$

$\therefore \hat{\theta}_2 \sim g(y) = \begin{cases} n\dfrac{y^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le y \le \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy = \int_0^\theta yn\frac{y^{n-1}}{\theta^n}dy = \frac{n}{n+1}\theta \ne \theta$，

$\hat{\theta}_2 = \max\limits_{1\le i\le 0}[x_i]$ 不是 $\theta$ 的无偏估计.

$E\hat{\theta}_1 = E2\overline{X} = 2E\overline{X} = 2EX = 2\times\frac{2\theta}{2} = \theta$，所以 $\hat{\theta}_1$ 为是 $\theta$ 的无偏估计。　　　4 分

（3）若取 $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$

因为 $E(\hat{\theta}_3) = \frac{n+1}{n}E(\hat{\theta}_2) = \theta$，$\therefore \hat{\theta}_3$ 为 $\theta$ 的无偏估计量.

$$D\hat{\theta}_1 = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = 4\frac{D(X)}{n} = 4\cdot\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$E\hat{\theta}_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 g(y)dy = \int_0^\theta ny^2\frac{y^{n-1}}{\theta^n}dy = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$D(\hat{\theta}_2) = E\hat{\theta}_2^2 - (E(\hat{\theta}_2))^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1}\theta)^2 = (\frac{n}{n+2} - (\frac{n}{n+1})^2)\theta^2$，所以，$D\hat{\theta}_3 = D(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2) = (\frac{n+1}{n})^2 D\hat{\theta}_2 = (\frac{n+1}{n})^2(\frac{n}{n+2} - (\frac{n}{n+1})^2)\theta^2 = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1\right]\theta^2 = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$

则 $n \ge 1$ 时，有 $\frac{1}{n(n+2)} \le \frac{1}{3n}$，所以 $\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效。　　　　2 分

七．（4分）解：由全概率公式有

$$P(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n) P(Y=k \mid X=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

即 $Y \sim P(\lambda p)$. 　　　　　　　　　　　　4 分