

### 第3章课后习题及思考题(1)

一、教材第3章课后习题作业题1：在PC中证明下列结论。

$$(1) \vdash \neg(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\textcircled{1} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 1}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad \textcircled{1} + \text{定理 6} + r_{mp}$$

$$\textcircled{3} (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \textcircled{2} + A2 + r_{mp}$$

(2)  $\neg A \vdash A \rightarrow B$  // 此题为演绎的证明，即带前提的证明

$$\textcircled{1} \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A1$$

$$\textcircled{2} \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{3} \neg B \rightarrow \neg A \quad \textcircled{1}\textcircled{2} r_{mp}$$

$$\textcircled{4} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A3$$

$$\textcircled{5} (A \rightarrow B) \quad \textcircled{3}\textcircled{4} r_{mp}$$

$$(3) A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

// 多前提条件的演绎证明

$$\textcircled{1} (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad A3$$

$$\textcircled{2} \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{3} A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \textcircled{1}\textcircled{2} r_{mp}$$

$$\textcircled{4} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad \textcircled{3} + A2 + r_{mp}$$

$$\textcircled{5} A \rightarrow B \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{6} A \rightarrow C \quad \textcircled{4}\textcircled{5} r_{mp}$$

$$(4) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (D \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (D \rightarrow C)))$$

// 参见下面的思考题(7)类证明

$$\textcircled{1} (B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)] \quad \text{定理 5}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{1} + \text{定理 2} // \text{加前件}$$

$$\textcircled{3} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{2} + A_2 + r_{mp}$$

$$\textcircled{4} \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad A_2$$

$$\textcircled{5} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{3}\textcircled{4} + \text{定理 7} // \text{传递定理}$$

$$\textcolor{red}{(5)} \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$$

//由上述 (4) 题，对比观察思考题 3 的类代码使用条件。

$$\textcircled{1} (B \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)] \quad \text{定理 7} // \text{传递}$$

$$\textcircled{2} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad \text{同理上题 (4) 的证明}$$

//也可参见下面思考题 (7)

$$\textcircled{3} [A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad \textcircled{2} + \text{定理 6} // \text{前件交换}$$

$$\textcircled{4} (C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}\}$$

$\textcircled{3} + \text{定理 2} // \text{加前件}$

$$\textcircled{5} (C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad \textcircled{4} + A_2 + A_1 + r_{mp}$$

$$\textcircled{6} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad \textcircled{5} + \text{定理 6} // \text{前件交换}$$

$$(6) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$$

//尾件相同，注意课堂上所提的对比定理 5 的使用方法

$$\textcircled{1} [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)\} \quad \text{定理 7} // \text{传递定理}$$

$$\textcircled{2} B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A_1$$

$$\textcircled{3} [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \textcircled{1}\textcircled{2} r_{mp}$$

//**要求 1**：以上所有证明均不允许使用演绎定理来证明。

//**要求 2**：上述第  $\textcolor{red}{(5)}$  小题需要提交作业。

二、第 3 章思考题：在 PC 中运用 PPT 讲义 2-5 中的定理 1-定理 7 完成下列证明。

$$(1) \text{ 已知 } \vdash \varepsilon \rightarrow p, \vdash p \rightarrow p', \text{ 求证 } \vdash \varepsilon \rightarrow p'.$$

(要求不使用传递定理来证明)

$$1) p \rightarrow p' \quad \text{已证}$$

//具体实参代入时得到的可能是公理、已证定理或中间结论，这里统称为“已证”

$$2) \varepsilon \rightarrow (p \rightarrow p') \quad 1) + \text{定理 2} // \text{加前件}$$

$$3) (\varepsilon \rightarrow p) \rightarrow (\varepsilon \rightarrow p') \quad 2) + A2 + r_{mp}$$

4)  $\varepsilon \rightarrow p$  已证

5)  $\varepsilon \rightarrow p'$  3) 4) rmp

(2) 已知  $\vdash p \rightarrow \varepsilon$ ,  $\vdash p' \rightarrow p$ , 求证  $\vdash p' \rightarrow \varepsilon$ 。

(要求不使用传递定理来证明)

1)  $p \rightarrow \varepsilon$  已证

2)  $p' \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon)$  1) + 定理 2 // 加前件

3)  $(p' \rightarrow p) \rightarrow (p' \rightarrow \varepsilon)$  2) + A2 + rmp

4)  $p' \rightarrow p$  已证

5)  $p' \rightarrow \varepsilon$  3) 4) rmp

**(3)** 已知  $\vdash \varepsilon_1 \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_2)$ ,  $\vdash p' \rightarrow p$ , 求证  $\vdash \varepsilon_1 \rightarrow (p' \rightarrow \varepsilon_2)$ 。

// 课堂上我们证明讲义 PPT 中的定理 6, 就是该结论的一个代入实例, 请根据定理 6 的证明过程给出该定理的证明 (此过程不允许调用定理 6 本身)。

1)  $\varepsilon_1 \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_2)$  已证

2)  $(\varepsilon_1 \rightarrow p) \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2)$  1) + A2 + rmp

3)  $p \rightarrow ((\varepsilon_1 \rightarrow p) \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2))$  2) + 定理 2 // 加前件

4)  $(p \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2))$  3) + A2 + rmp

5)  $p \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow p)$  A1

6)  $p \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2)$  4) 5) rmp

7)  $p' \rightarrow p$  已证

8)  $p' \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2)$  对 6) 7) 调用上面 (2) 题功能过程

9)  $\varepsilon_1 \rightarrow (p' \rightarrow \varepsilon_2)$  对 8) 重复 1) - 6) 的功能过程。

(4) 已知  $\vdash \varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p)$ ,  $\vdash p \rightarrow p'$ , 求证  $\vdash \varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p')$ 。

1)  $p \rightarrow p'$  已证

2)  $\varepsilon_2 \rightarrow (p \rightarrow p')$  1) + 定理 2

3)  $(\varepsilon_2 \rightarrow p) \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p')$  2) + A2 + rmp

4)  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p)$  已证

5)  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p')$  4)3)+定理 7+rm

(5) 已知  $\vdash (p \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$ ,  $\vdash p \rightarrow p'$ , 求证  $\vdash (p' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$ 。

//观察  $(p' \rightarrow \varepsilon_1)$  与  $(p \rightarrow \varepsilon_1)$ , 尾件相同, 考虑定理 7 的使用方法。

1)  $(p \rightarrow p') \rightarrow ((p' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_1))$  定理 7

2)  $p \rightarrow p'$  已证

3)  $(p' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_1)$  1)2)rm

4)  $(p \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$  已证

5)  $(p' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$  3)4)+定理 7+rm

(6) 已知  $\vdash (\varepsilon_1 \rightarrow p) \rightarrow \varepsilon_2$ ,  $\vdash p' \rightarrow p$ , 求证  $\vdash (\varepsilon_1 \rightarrow p') \rightarrow \varepsilon_2$ 。

//同上分析, 考虑定理 5 的使用方法。

1)  $(p' \rightarrow p) \rightarrow ((\varepsilon_1 \rightarrow p') \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow p))$  定理 5

2)  $p' \rightarrow p$  已证

3)  $(\varepsilon_1 \rightarrow p') \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow p)$  1)2)rm//也可对 2) 加前件  $\varepsilon_1$  得到

4)  $(\varepsilon_1 \rightarrow p) \rightarrow \varepsilon_2$  已证

5)  $(\varepsilon_1 \rightarrow p') \rightarrow \varepsilon_2$  3)4)+定理 7+rm

(7) 已知  $\vdash \varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3)$ , 求证  $\vdash (p \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow ((p \rightarrow \varepsilon_2) \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_3))$ 。

(可以类推到有  $n$  个字符串  $\varepsilon_n$  的形式)

1)  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3)$  已证

2)  $p \rightarrow (\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3))$  1)+定理 2//加前件

3)  $(p \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow (p \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3))$  2)+A2+rm

4)  $(p \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3)) \rightarrow ((p \rightarrow \varepsilon_2) \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_3))$  A2

5)  $(p \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow ((p \rightarrow \varepsilon_2) \rightarrow (p \rightarrow \varepsilon_3))$  3)4)+定理 7

//**要求 1:** 以上 2, 3 题我们课堂已用过, 1, 4, 5, 6, 7 我们将在下堂课陆续运用, 这些常用功能类证明代码请大家务必亲自做一下。

//**要求 2:** 上述第 (3) 小题需要提交作业。

//以上各题大家可以尝试其他不同的证明方案。