

### 第3章课后习题及思考题(2)解答

一、教材第3章课后习题作业题1：在PC中证明下列结论。

$$(7) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

方案一：运用传递的方法

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]\} \text{ 定理 7}$$

$$2) B \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ A1}$$

$$3) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \quad 1) 2) \text{ rmp}$$

$$3) [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{习题 1. (1) 已证结论}$$

$$4) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 2) 3) + \text{定理 7}$$

方案二：考虑调用定理14来证。

$$1) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ 定理 3}$$

$$2) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad 1) + \text{定理 13 (逆否变形定理)} + \text{rmp}$$

$$3) B \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \quad 2) + \text{定理 2}$$

$$4) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 3) + \text{定理 6}$$

$$5) (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ 定理 1}$$

$$6) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 4) 5) + \text{定理 14} + \text{rmp}$$

//注意参见教材定理14后的说明//

方案三：考虑对前提进行前件交换， $A \rightarrow B$ 与 $B$ 交换，从而构造前件相同的类模式。故只需证明： $\{B \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow (B \rightarrow A)$

//构造类模式后可以用前件相同的类模式来做，但这里进一步发现直接对前件用A2打开更快，下面用后一种方案。

$$1) \{B \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow \{[B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (B \rightarrow A)\} \quad \text{A2}$$

$$2) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[B \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]] \rightarrow (B \rightarrow A)\} \quad 1) + \text{定理 6}$$

$$3) B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{A1}$$

$$4) \{B \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 2) 3) \text{ rmp}$$

////////////////////////////////////

$$(8) \vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B))$$

1)  $(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$  定理 7

2)  $A \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\}$  1) 定理 2

3)  $[A \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow \{A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\}$  2) +A2+rm

4)  $A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$  3) +A1+rm

////////////////////////////////////

$$(9) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

1)  $[\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)\}$  定理 7

2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3

3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  1) 2) rm

4)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理 8

5)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$  3) 4) 定理 7

//或也可以调用定理 14 来证：只需证  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  及  $A \rightarrow A$  即可，显然//

//或用类功能模式： $(P \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$  即  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  改为  $(P' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$  即

$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ，其中  $P \rightarrow P'$  //

////////////////////////////////////

$$(10) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)$$

方案一：直接由传递定理

1)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\}$  定理 7

2)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$  (9) 题已证

3)  $(C \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$  2) 定理 2

4)  $\{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  3) +A2+rm

5)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  1) 4) 定理 7

//对比 1) 和 5)，再加上 2) 即为类模式功能调用：

//  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p)$ ,  $p \rightarrow p'$ , 改为  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p')$

方案二:

1)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C)\}$  定理 7

2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3

3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$  1) 2) rmp

4)  $(C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg C)$  定理

5)  $\neg A \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C]$  4) + 定理 6

6)  $[(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C] \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$  定理

7)  $\neg A \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$  5) 6) + 定理 7

8)  $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow [\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$  7) + A2+rmp

9)  $[\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  A3

10)  $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  8) 9) + 定理 7

//此结论也可以直接由传递来做  $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)] //$

11)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  3) 10) + 定理 7

方案三: 调用定理 14 来证, 需证:

1)  $C \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  显然 (前件交换),

2)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  前件交换后对后面逆否变形即可。

////////////////////////////////////

(11)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

方案一: 运用**证明定理 14** 的证明方法, 即把尾件相同转化为前件相同模式。

1)  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  定理 3

2)  $A \rightarrow [\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)]$  1) 定理 2

3)  $\neg C \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow B)]$  2) 定理 6

4)  $[A \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  A<sub>2</sub>

- 5)  $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  3) 4) 定理 7
- 6)  $[(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  定理 12
- 7)  $\neg C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  5) 6) 定理 7
- 8)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$   
 //由此可以看出与证明定理 14 的方法相同//
- 9)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$  定理 12
- 10)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  9) 8) 定理 7
- 11)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  A3
- 12)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  10) 11) 定理 7

方案二：直接运用定理 14 来证。

- 1)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow C\}$  定理 14
- 2)  $\{(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow C\}$   
 $\rightarrow \{[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  定理 6
- 3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  1) 2) + 定理 7
- 4)  $(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  3) + 定理 6
- 5)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3
- 6)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  5) + 定理 13 + rmp
- 7)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  4) 6) rmp

方案三：根据定理 14 只需证明  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$

及  $C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  (显然)。

证  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ ：

- 1)  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  定理
- 2)  $A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$  1) + 定理 2

- 3)  $\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))$  2) + 定理 6
- 4)  $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  A2
- 5)  $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  3) 4) + 定理 7
- 6)  $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)]$  5) + 定理 6
- 7)  $[\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  定理
- 8)  $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  6) 7) + 定理 7
- 9)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  8) + 定理 6

////////////////////////////////////

$$(12) \vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D))$$

方案一、采用证明定理 14 的证明方法，即把尾件相同转化为前件相同模式。

- 1)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  定理 3
- 2)  $\{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  定理 13
- 3)  $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$
- 4)  $\neg D \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  3) 定理 2
- 5)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)]$  4)  $A_2 + r_{mp}$
- 6)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  已证定理
- 7)  $\neg D \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  6) 定理 2
- 8)  $[\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$
- 9)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  5) 8 定理 7
- 10)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$  定理 12
- 11)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\}$  10) 9) 定理 7
- 12)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$   $A_2$
- 13)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)] \rightarrow$

$\{[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]\}$  定理 7

14)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)]$  定理 12

15)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$  13) 14)  $r_{mp}$

16)  $[(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$   $A_3$

17)  $(B \rightarrow D) \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  16) 定理 2

18)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  17)  $A_2 + r_{mp}$

19)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  15) 18) 定理 7

20)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  12) 19) 定理 7

21)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  11) 20) 定理 7

方案二、三：可以仿照（11）题的二、三方法来处理，请大家自己尝试一下。其中方案二中直接运用定理 14 后，可以对照  $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow p)$ ,  $p \rightarrow p'$  模式的运用。

////////////////////////////////////

(13)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$

方案一、采用证明定理 14 的证明方法，即把尾件相同转化为前件相同模式。

1)  $[\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}$  定理 7

2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3

3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$

4)  $\neg A \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\}$  3) 定理 6

5)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  定理 12

6)  $\neg A \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  4) 5) 定理 7

7)  $\neg C \rightarrow \{\neg A \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  6) 定理 2

8)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  7)  $A_2 + r_{mp}$

9)  $\{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$

$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$   $A_2$

10)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  8) 9) 定理 7

11)  $[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow [[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]$   $A_3$

12)  $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow$

$[[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  11) 定理 2

13)  $\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$

$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  12)  $A_2 + r_{mp}$

14)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  10) 13) 定理 7

15)  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$  定理 12

16)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  14) 15) 定理 7

17)  $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  16) 定理 6

18)  $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$  定理 12

19)  $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  17) 18) 定理 7

20)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  19) 定理 6

方案二、三：可以仿照（11）题的二、三方法来处理，请大家自己尝试一下。其中方案二中直接运用定理 14 后，可以对照  $\epsilon_1 \rightarrow (\epsilon_2 \rightarrow p)$ ,  $p \rightarrow p'$  模式的运用。

////////////////////////////////////

(14)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C))$

1)  $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$

由上题（13）的已证结论

2)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$  1) + 定理 6

////////////////////////////////////

二、利用演绎定理在 PC 中证明：

(1)  $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

只需证：  $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

只需证：  $B \rightarrow A \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$  (由  $(\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$  即  $A_3$  可知)

只需证:  $B \rightarrow A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1)  $\neg\neg B$  前提

2)  $\neg\neg B \rightarrow (\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B)$  A1

3)  $\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B$  1) 2) rmp

4)  $(\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg\neg\neg B)$  A3

5)  $\neg B \rightarrow \neg\neg\neg\neg B$  3) 4) rmp

6)  $(\neg B \rightarrow \neg\neg\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow B)$  A3

7)  $\neg\neg B \rightarrow B$  5) 6) rmp //这里大家也可以直接调用定理  $\neg\neg B \rightarrow B$

8)  $B$  1) 6) rmp //此处由  $\neg\neg B$  演绎  $B$  的过程也可直接调用定理 4:  $\neg\neg B \vdash B$

8)  $B \rightarrow A$  前提

9)  $A$  7) 8) rmp

//下面不直接调用教材上定理  $A \rightarrow \neg\neg A$

10)  $(\neg\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A)$  A3

11)  $\neg\neg\neg A \rightarrow [(\neg\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A)]$  10)+定理 2

12)  $[\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)] \rightarrow [\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A)]$

11) +A2+rm

13)  $\neg\neg\neg A \rightarrow [(\neg\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)]$  A1

14)  $\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A)$  12) 13) rmp

15)  $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)$  A3

16)  $\neg\neg\neg A \rightarrow [(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)]$  15) +定理 2

17)  $[\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg A)] \rightarrow [\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)]$

16) +A2+rm

18)  $\neg\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)$  14) 17) rmp

19)  $(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)$  18) +A2+rm

20)  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$  定理 1

21)  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$  19) 20) rmp

22)  $(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$  A3

23)  $A \rightarrow \neg\neg A$  21) 22) rmp



//10-23 步主要给大家看一下只用公理和定理 1，定理 2 来证明，即尽量少的定理调用。大家在做题时，已证的定理则可以直接调用。//

24)  $\neg\neg A$  9) 23) rmp

注：上面给展示在使用演绎定理证明时，若不调用已证定理也较麻烦，一般是演绎定理+已证定理，这样能加快证明。

////////////////////////////////////

(2)  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

只需证： $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ ，显然。

////////////////////////////////////

(3)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

只需证： $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理

2)  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$  前提

3)  $\neg A \rightarrow A$  1) 2) 传递

4)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理

5)  $A$

////////////////////////////////////

(4)  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

只需证： $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

1)  $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

2)  $B$

3)  $A \rightarrow B$

4)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理

5)  $\neg(A \rightarrow B)$  前提

6)  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$  4) 5) rmp

7)  $A$  3) 6) rmp

////////////////////////////////////

三、第 3 章思考题：不使用演绎定理证明 PPT 讲义“logic2-5-网课”21/35 页中示例的第 2) 题：参见 PPT 讲义讲解。