第 3 章课后习题及思考题（3）解答

一、教材第 3 章课后习题作业题

3．将 PC 中公理 $A3$ 改为 $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$，记所得系统为 PC'。

证明：

（1）$\vdash_{PC} (\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

证明：

1) $\neg B \to (B \to A)$ 定理 3

2) $\neg A \to (\neg B \to (B \to A))$ 1)+定理 2

3) $(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to (B \to A))$ 2)+A2+r_{mp}

4) $(\neg A \to (B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ A2

5) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ 3)4)+定理 7

6) $(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

7) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to A) \to A)$ 6)+定理 2

8) $((\neg A \to B) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 7)+A2+r_{mp}

9) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 5)8)+定理 7

//即反证法的形式化定理描述//

（2）$\vdash_{PC'} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明：

1) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ $A3'$

2) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 1)+定理 6

3) $B \to (\neg A \to B)$ A1

4) $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 3)2)+定理 7

5) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 4)+定理 6

//由于在 PC 中证明定理 6，7 只用到了公理 A1，A2，未使用 A3，故定理 6，7 仍可以在 PC' 中直接调用。//

4．证明：对 PC 有下列导出规则：

（1）若 $\vdash A\to(B\to C)$，$\vdash B$，那么 $\vdash A\to C$

证明：

1） $A\to(B\to C)$ 假设已证定理

2) $B\to(A\to C)$ 1)+定理 6

3） B 假设已证定理

4) $(A\to C)$ 2)3) r_{mp}

///或直接用 $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ 来证明//

（2）若 $\tau;\neg A\vdash B,$ 及 $\tau;\neg A\vdash\neg B$，那么 $\tau\vdash A$

证明：

1) $\Gamma;\neg A\vdash B$ 假设

2) $\Gamma\vdash\neg A\to B$ 1)演绎定理

3) $\Gamma\vdash\neg A\to\neg B$ 由 $\Gamma;\neg A\vdash\neg B$ 同理 2)

4) $(\neg A\to B)\to((\neg A\to B)\to A)$ 上面习题已证定理

5) $\Gamma\vdash A$ ②③④ r_{mp} //此题就是我们常用的反证法一般性证明过程。

5．证明 $(\neg A\to B)\to(A\to\neg B)$ 不是 PC 的定理。（要求用 PC 的合理性来证）

证明：

若 $(\neg A\to B)\to(A\to\neg B)$ 为 PC 的定理，则根据 PC 的合理性知 $(\neg A\to B)\to(A\to\neg B)$ 应为重言式，而指派 $\alpha(A)=T,\alpha(B)=T$ 使得 $\alpha((\neg A\to B)\to(A\to\neg B))=F$，矛盾。

6．在 ND 中证明：

（1）$\vdash(\neg A\to A)\to A$

证明：

1) $\neg A\to A,\neg A\vdash\neg A$ 公理

2) $\neg A\to A,\neg A\vdash\neg A\to A$ 公理

3) $\neg A\to A,\neg A\vdash A$ 1)2) $\to$消去

4）$\neg A \to A, A \vdash A$　　　　　公理

5）$\neg A \to A \vdash A$　　3）4）假设消除

（2）$\vdash (A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$

证明：

先证 $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

只需证：$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$

1）$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A$　　公理+$\wedge$消除

2）$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A \to (B \to C)$　　公理

3）$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash B \to C$　　1）2）$\to$消去

4）$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash B$　　公理+$\wedge$消除

5）$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$　3）4）$\to$消去

再证：$\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

只需证：（$A \wedge B \to C$），$A, B \vdash C$

1）$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A$　　公理

2）$(A \wedge B \to C), A, B \vdash B$　　公理

3）$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B$　　1）2）$\wedge$引入

4）$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B \to C$　公理

5）$(A \wedge B \to C), A, B \vdash C$　　3）4）$\to$消去

（3）$\vdash (A \vee B) \to C \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

证明：

先证 $\vdash ((A \vee B) \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$

1）$((A \vee B) \to C), A \vdash A$　公理

2）$((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B$　1）$\vee$引入

3) $((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B \to C$ 公理

4) $((A \vee B) \to C), A \vdash C$ 2)3) $\to$消去

5) $((A \vee B) \to C) \vdash A \to C$ 4) $\to$引入

6) $((A \vee B) \to C) \vdash B \to C$ 同理可得

7) $((A \vee B) \to C) \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ 5)6) $\wedge$引入

再证 $\vdash A \to C) \wedge (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

只需证：$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$

1) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A$ 公理

2) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A \to C$ 公理+$\wedge$消除

3) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash C$ 1)2) $\to$消去

4) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash C$ 同理可得

5) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

6) $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$ 3)4)5) $\vee$消除

（4） $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash A \to C$

证明：见教材课后习题作业第 1 题

（5） $\vdash \neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$

证明：

先证 $\vdash \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$

1) $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A \to (A \to B)$ PC 已证定理

2) $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A$ 公理

3) $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$ 1)2) $\to$消除

4) $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$ 公理

5) $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$ 3)4) $\neg$引入

6）$\neg(A\to B)\vdash A$　5）$\neg\neg$消除

7）$\neg(A\to B),B\vdash B\to(A\to B)$　ND 中已证定理

8）$\neg(A\to B),B\vdash B$ 公理

9）$\neg(A\to B),B\vdash A\to B$ 7）8） $\to$消除

10） $\neg(A\to B),B\vdash\neg(A\to B)$ 公理

11）$\neg(A\to B)\vdash\neg B$　9）10） $\neg$引入

12） $\neg(A\to B)\vdash A\wedge\neg B$ 6）11）$\wedge$引入

13）$\vdash\neg(A\to B)\to A\wedge\neg B$ 12） $\to$引入

再证：$\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$

1） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\wedge\neg B$ 公理

2） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A$ 1） $\wedge$消除

3） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\to B$ 公理

4）$A\wedge\neg B,A\to B\vdash B$ 2）3） $\to$消除

5）$A\wedge\neg B,A\to B\vdash\neg B$　1）$\wedge$消除

6）$A\wedge\neg B\vdash\neg(A\to B)$　4）5）$\neg$引入

7） $\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$ 6） $\to$引入

（6）$\vdash(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\to A\vee C$

证明：

1）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A$ 公理

2）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A\vee C$　1）$\vee$引入

3）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash C$　公理

4）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash A\vee C$　3）$\vee$引入

5） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;\neg B\vdash B$　公理

6) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash \neg B$ 公理

7) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash A \vee C$ 5)6) $\neg$消除

8) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ 公理

9) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash \neg B \vee C$ 8) $\wedge$消除

10) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$ 4)7)9) $\vee$消除

11) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$ 8) $\wedge$消除

12) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$ 2)10)11) $\vee$消除

13) $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$

（7）$\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$

证明：

先证：$\vdash (A \wedge B) \to A \wedge (\neg A \vee B)$

1) $A \wedge B \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

2) $A \wedge B \vdash B$ 公理+$\wedge$消除

3) $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$ 2) $\vee$引入

4) $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ 1)3) $\wedge$引入

再证：$\vdash A \wedge (\neg A \vee B) \to (A \wedge B)$

1) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

2) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

3) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$公理

4) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$ 2)3) $\neg$消除

5) $A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$

6) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$ 公理+$\wedge$消除

7) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$ 4)5)6) $\vee$消除

8) $A\wedge(\neg A\vee B)|-A\wedge B$ 1)7) $\wedge$引入

（8） $|-((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\leftrightarrow B$

证明：

先证$|-B\to((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)$

只需证：$B,A\leftrightarrow B|-A$及$B,A|-A\leftrightarrow B$

1） $B,A\leftrightarrow B|-B\to A$ 公理+$\leftrightarrow$消除

2） $B,A\leftrightarrow B|-B$ 公理

3） $B,A\leftrightarrow B|-A$ 1）2） $\to$消除

4） $B,A|-B\to(A\to B)$ 已证定理 //ND 里已证，大家可以调用，要是记不住，这种证明在 ND 里也很显然//

5） $B,A|-B$ 公理

6） $B,A|-A\to B$ 4）5） $\to$消除

7） $B,A|-B\to A$ 同理 6）

8） $B,A|-A\leftrightarrow B$ 6）7） $\leftrightarrow$引入

再证$|-((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\to B$

1） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A$ 公理

2） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\to(A\leftrightarrow B)$ 公理+$\leftrightarrow$消除

3） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\leftrightarrow B$ 1）2） $\to$消除

4） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\to B$ 3） $\leftrightarrow$消除

5） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-B$ 1）4） $\to$消除

6）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg A\to(A\to B)$ 定理//这里只是为了书写简洁些(此题的步骤已经够长了)，调用了一下，可以不用调用，其 ND 的证明很容易//

7） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg A$ 公理

8） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-A\to B$ 6）7） $\to$消除

9）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg B\to(B\to A)$ 定理 //同 6）的解释//

10）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg B$ 公理

11）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-B\to A$ 9）10）$\to$消除

12）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-A\leftrightarrow B$ 8）11）$\leftrightarrow$引入

13）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-(A\leftrightarrow B)\to A$ 公理及$\leftrightarrow$消除

14）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-A$ 12）13）$\to$消除

15）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg A$ 公理

16）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A|-\neg\neg B$ 14）15）$\neg$引入

17）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A|-B$ $\neg\neg$消除

18）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A|-B$ 5）17）假设消除

19）$|-((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\to B$ 18）$\to$引入

三、思考题：利用 PC 的一致性性质定理证明上面第 5 题。

证明:若有 $|\text{-}(\neg A\to B)\to(A\to\neg B)$, 则：

$|\text{-}(\neg A\to\neg B)\to(A\to\neg\neg B)$， $|\text{-}(\neg\neg A\to B)\to(\neg A\to\neg B)$

$|\text{-}(\neg\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to\neg\neg B)$ 均为定理

1）$(\neg A\to B)\to(A\to\neg B)$，定理

2）$A\to((\neg A\to B)\to(A\to\neg B))$，1）+定理 2//加前件

3）$(A\to(\neg A\to B))\to(A\to(A\to\neg B))$，2）+A2+rmp

4）$\neg A\to(A\to B)$ 定理

5）$A\to(\neg A\to B))$ 4）+定理 6//前件交换

6）$A\to(A\to\neg B)$ 3）5）rmp

7）$(A\to A)\to(A\to\neg B)$ 6）+A2+rmp

8）$A\to A$ 定理

9） $A \to \neg B$ 7）8）rmp

10） $A \to \neg\neg B$ 同理//由 $(\neg A \to \neg B) \to (A \to \neg\neg B)$ 为定理

11） $\neg\neg B \to B$ 定理

12） $A \to B$ 10)11)+定理 7//传递

13） $(A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A)$ 反证法定理

14） $\neg A$ 9）12）13）+rmp

15） A 同理 1）-14）

//由 $(\neg\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$，$(\neg\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$ 为定理出发所证得

由上述证明得：$\vdash \neg A$，$\vdash A$，与 PC 的一致性矛盾。