

1. 一个进栈序列为 $1, 2, 3, \dots, n$, 问有多少个不同的出栈序列?

由组合分析法, 在 $2n$ 位二进制数中填入 n 个 1 的序列为 $C(2n, n)$ 个, 不填 1 的其余 n 位自动填 0, 再减去其中不符合要求的序列; 可知不合要求的序列与 $n+1$ 个 0, $n-1$ 个 1 组成的排列一一对应, 则符合要求的出栈序列为 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$

2. 甲乙两人比赛乒乓球, 最后结果为 $11:11$, 问比赛过程中甲始终领先乙的计分情形的种数?

甲乙比赛, 可类比入栈与出栈, 甲得分可定义为入栈, 乙得分可定义为出栈, 由于甲始终领先乙, 则可知栈底始终有元素, 且栈底元素为第一次入栈的元素, 故可先将甲入栈; 再分析最后一分的情况, 由于甲始终领先, 故乙最后得分, 则可将这 22 分出去首尾 2 分, 其他 20 分可通过入栈与出栈来类比: 甲得分入栈, 乙得分出栈, 且这 20 次出入栈, 出栈次数不多于入栈次数, 可知, 将这 20 个数类比题 1, 用组合分析法, 这 20 个得分的计分情形为 $C(20, 10)-C(20, 11)$

3. 饭后, 姐姐洗碗, 妹妹把姐姐洗过的碗一个一个地放进碗橱擦成一摞。共有 n 个不同的碗, 洗前也是擦成一摞的, 也许因为小妹贪玩而使碗拿进碗橱不及时, 姐姐则把洗过的碗擦在旁边, 问: 小妹擦起的碗有多少种可能的方式?

将姐姐擦洗过的碗为入栈, 小妹将碗拿入碗橱为出栈, 则转换为数学模型: 入栈与出栈, 且因为小妹贪玩拿碗不及时, 出栈数一定小于入栈数, 则和题 1 相同, 可用组合分析法, 方式数为 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$

4. 一个有 n 个 1 和 n 个 -1 组成的字串, 且前 k 个数的和均不小于 0, 那这种字串的总数为多少?

将字符串随机排列, 由于前 k 个数的和均不小于 0, 故前 k 个数中 1 的个数不少于 -1 的个数, 那么从左向右遍历, 若遍历到 1, 则入栈一个 1, 若遍历到 -1, 则出栈一个 1, 且满足入栈数不少于出栈数, 同样和题 1 相同, 用组合分析法, 字符串总数为 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$

5. 在圆上选择 $2n$ 个点, 将这些点成对连接起来, 使得所得到的 n 条线段不相交的方法数?

在圆上随机选取 1 点, 编号为 1, 顺时针旋转, 则编号为 $1, 2, \dots, 2n$; 由题可得, 需要不相交的线段, 则奇数编号的点必须和偶数编号的点相连, 否则会产生相交的线段, 例如: 1 和 5 相连, 则中间剩下 2, 3, 4 三个点, 至少有一个点和这三个点以外的其他点相连, 则会和 (1, 5) 相交。故一个奇数点和一个偶数点相连会将圆分成两部分, 每个部分都保留偶数个点, 则设方法数为 b_n 。

$N=b(0)*b(2n-2)+b(2)*b(2n-4)+\dots+b(2n-4)*b(2)+b(2n-2)*b(0)$, 其中 $b(0)=1$, $b(2)=1, b(4)=2$ (每个数的意义: $b(0)*b(2n-2)$ 中 $b(0)$ 代表被 1 和 2 分开的线后, 线的右边有 0 个点剩余, 线的左边有 $2n-2$ 个点剩余), 递推表达式后可知 $N=C(2n, n)-C(2n, n+1)$, 满足二叉树计数中的递推表达式。

6. 给定 n 个结点, 能构成多少种形状不同的二叉树?

各种二叉树, 遍历二叉树的过程即入栈与出栈的过程, 每种不同形状的二叉树, 对于同一种遍历方式, 入栈与出栈顺序不相同, 则每一种二叉树对应同一种出栈与入栈的方式 (已知入

栈顺序为 $1, 2, \dots, n$), 则和题 1 相同, 二叉树的种类数是 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$

7. 凸多边形的三角划问题: 将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数?

在凸多边形里选择一条边, 再选择与这条边相关的两个点以外的另一点, 与这两个点相连构成一个三角形, 于是就能将这个凸多边形分为 2 个或者 3 个部分, (一个三角形, 一个凸多边形 or 一个三角形, 左右两边各一个凸多边形, 若只有两个部分, 设为 $b(n)=b(2)*b(n-1)$, 当有三个部分时, $b(n)=b(3)*b(n-2)+b(4)*b(n-3)+\dots+b(n-3)*b(4)+b(n-2)*b(3)$; 所以总的 $b(n)=b(2)*b(n-1)+b(3)*b(n-2)+b(4)*b(n-3)+\dots+b(n-3)*b(4)+b(n-2)*b(3)+b(n-1)*b(2)$; $b(2)=1, b(3)=1, b(4)=2$; 类比题 5, 也可得出递推表达式与卡特兰数相关

8. 一个人在住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天走 $2n$ 个街区去上班。如果从不穿越 (但可以碰到) 从家到办公室的对角线, 那么有多少条可能的道路?

设向东走为入栈, 向北走为出栈, 则由于不能穿越从家到办公室的对角线, 则出栈数不能多余入栈数, 同样类比题 1, 用组合分析法, 道路数为 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$

9. 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 5 元。其中只有 n 个人有一张 5 元钞票, 另外 n 人只有 10 元钞票, 剧院无其它钞票, 问有多少中方法使得只要有 10 元的人买票, 售票处就有 5 元的钞票找零?

建立数学模型: 将这 $2n$ 个人进行排序, 然后遍历, 有 5 元钞票的设为入栈, 只有 10 元钞票的为出栈, 且要保证有 10 元的人买票, 售票处就有 5 元的钞票找零, 故入栈的数不少于出栈的数, 同样类似于题 1, 用组合分析法, 可得方法数为 Catalan 数 $=C(2n, n)-C(2n, n+1)$