2017 秋概率论与数理统计 A 答案

一.选择题（每道题 3 分，共 15 分）

1.A　2.B　3.B　4.C　5.D

二.填空题（每道题 3 分，共 15 分）

1.　0.2;　2.　$\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$;　3.　10;　4.　0.95;　5.　32.917，拒绝原假设，认为各台机器生产的薄板厚度有显著差异。

三 （6 分）

解：（1）设 $B=$“主人回来树还活着”，再设 $A=$“邻居记得浇水”，则由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.9\times(1-0.1)+0.1\times(1-0.8)=0.83$$

——————3 分

（2）$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0.1\times0.8}{1-0.83}=\dfrac{8}{17}=0.471$

——————6 分

四.（9 分）**解：**（1）$S(D)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\dfrac{1}{3}$

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$$ ——————2 分

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dx=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

$$f_Y(\mathrm{y})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3dx=3(\sqrt{y}-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不相互独立.　——————5 分

（2）$Z=U+X,所以,Z\in[0,2)$，

所以，$z\le 0时,\ F(z)=P(Z\le z)=0$；

$z\ge 2时,\ F(z)=P(Z\le z)=1$；

$$0<z<1时，F(z)=P(Z\le z)=P(U=0,X\le z)+P(U=1,X\le z-1)$$
$$=P(X>Y,X\le z)+P(X\le Y,X\le z-1)$$
$$=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3dy$$
$$=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

$$1\le z<2时，F(z)=P(Z\le z)=P(U=0,X\le z)+P(U=1,X\le z-1)$$
$$=P(X>Y,X\le z)+P(X\le Y,X\le z-1)$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

——————————9 分

五.（6 分）

解：（1）由已知得 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$ ，

所以， $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}5x^3, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ————2 分

（2）， $E(X)=\int_0^1 x\cdot 5x^4dx=\frac{5}{6}$ ，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 5x^3dx=\frac{5(1-y^4)}{4} & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\frac{5(1-y^4)}{4}dy=\frac{5}{12}$$

或 $EY=\int_0^1 dx\int_0^x y5x^3dy=\frac{5}{12}$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy5x^3dy=\frac{5}{14}$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{14}-\frac{5}{6}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{504}$ ——————6 分

六.（9 分）

解：(1)参数σ 的矩估计:

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0,$$

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=2\sigma^2 \quad ,\quad \sigma=\sqrt{\frac{\mu_2}{2}} \quad ,$$

所以参数σ 的矩估计$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2}}$ 。

参数λ的极大似然估计:似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}\right)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}$$

求对数

$$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

求导数，令其为零，得似然方程

$$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \square\ 0$$

解似然方程得

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

故参数σ 的极大似然估计为$\hat{\sigma}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.　　　　——————————4 分

(2) 因为$E\hat{\sigma}_2=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\sigma$，

所以$\hat{\sigma}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$是$\sigma$ 的无偏估计。　　　　——————————6 分

(3) $\ln f(x,\sigma)=-\ln(2\sigma)-\frac{|x|}{\sigma}$ ，$\frac{\partial\ln f(x,\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x|}{\sigma^2}=\frac{|x|-\sigma}{\sigma^2}$ ，

Fisher 信息量为$I(\sigma)=E(\frac{\partial\ln f(X,\sigma)}{\partial\sigma})^2=\frac{E(|X|-\sigma)^2}{\sigma^4}=\frac{D(|X|)}{\sigma^4}$，

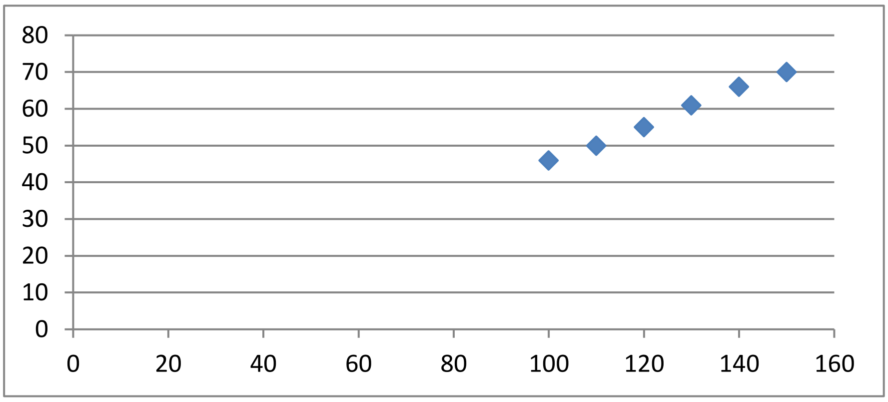
$D(|X|)=E(|X|^2)-(E|X|)^2=E(X^2)-(E|X|)^2=2\sigma^2-\sigma^2=\sigma^2$ ，

所以σ 得 C—R 方差下界为$L=\frac{1}{nI(\sigma)}=\frac{\sigma^2}{n}$

——————————9 分

七（10 分）

（1）



X 与 y 大致呈统计线性关系。　　　　——————————2 分

（2）$\bar{x}=125,\bar{y}=58,L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=1750$ ，$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=434$ ，

$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=870$ ，$\hat{b}=\frac{L_{xy}}{L_{xx}}=0.4971$ ，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=-4.1375$

所以，回归方程为$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=-4.1375+0.4971x$ ——————————4 分

（3），$U=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\hat{b}L_{xy}=432.477$ ，$Q=L_{yy}-U=1.523$ ，$n=6$

所以，$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{Q}{n-2}}=\sqrt{\dfrac{1.523}{4}}=0.617$

——————————6 分

（4）b 的置信度为 0.95 的置信区间为$(\hat{b}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{L_{xx}}},\hat{b}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{L_{xx}}})$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{L_{xx}}}=t_{0.025}(4)\times 0.617\times\sqrt{\dfrac{1}{1750}}=0.0409$，所以置信区间为（0.4562，0.538）

——————————7 分

（5）检验 $H_0:b=0,H_1:b\neq 0$

检验统计量为：$F=\dfrac{U}{Q/(n-2)}=(n-2)\dfrac{U}{Q}$ ，假设 H_0 成立时，$F\sim F(1,n-2)$ ，

拒绝域为 $K_0=\{F\geq F_{\alpha}(1,n-2)\}$ ，$\alpha=0.05,F_{\alpha}(1,\mathrm{n}-2)=F_{0.05}(1,4)=7.71$ ，

样本值代入得 $F=4\times\dfrac{432.477}{1.523}=1135.856>7.71,$

拒绝原假设 H_0 ，即回归方程回归显著。

——————————10 分