

算法设计与分析 样例试题

注：此试题仅供了解题型，和期末考试试题没有任何直接关系

1. (5 分) 请叙述下述算法的功能并分析时间复杂度

算法 Compute

输入：整数 n

输出：整数

$x=0$

for $i=1$ to n do

 for $j=1$ to i do

 for $k=1$ to $i+j$ do

$x=x+1$

return x

2. (5 分) 令 f , g 和 h 为定义在正整数上的正实数函数。假设 $f(n)=O(g(n))$, $g(n)=O(h(n))$, 证明 $f(n)=O(h(n))$.

3. (5 分) 求解递归方程 $T(n)=2T(n/2)+n^4$ 其中 $k>0$ 是一个常数。

4. (15 分) 设计分治算法求解下述问题：

输入：对于一个有 n 个元素的数组 A 和一个有 k 个位置集合 $S=\{p_1, \dots, p_k\}$, $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k \leq n$

输出：对于每个 $i \in \{1, \dots, k\}$, 输出 A 中第 p_i 小的元组。例如，如果 $k=1$, $S=\{i\}$ 对应元素中第 i 小的元素， $k=2$, $S=\{1, n\}$ 对应找到数组中最小和最大的元素。

设计时间复杂度为 $O(n \log k)$ 的分治算法求解此问题，要求写出伪代码并证明算法的时间复杂度。

5. (15 分) 要为即将到来的哈尔滨世界博览会设计和生产 n 个不同的展品，每一个项目首先用 CAD 软件设计，然后送到外面加工厂加工，第 i 个展品的设计时间为 d_i ，加工时间为 f_i 。加工厂能力很强，可以同时加工 n 个展品，所以对于每件展品，只要设计结束就可以立刻开始加工。但是，只有一位设计师，所以需要确定产品设计的顺序，以最快时间完成所有 n 件展品的设计和加工。

比如，完成了第一件展品的设计，可以将其交给加工厂，然后立刻开始第二件展品的加工。当完成第二件展品的设计时，可以将其交给加工厂而不需要考虑是否第一件展品已经加工完成。

设计多项式贪心算法求解此问题，分析时间复杂度，并证明其正确性。

6. (15 分) 我们考虑将数轴上的 n 个点聚成 k 类的问题。

输入: n 个从小到大的不同实数 x_1, x_2, \dots, x_n 表示 n 个不同点, 一个参数 $k \leq n$.

任务: 将 n 个点划分成 k 个不相交的非空集合 S_1, \dots, S_k 满足 $\bigcup_{i=1}^k S_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, S_i 中所有点在 S_{i+1} 中所有点左边, $1 \leq i < k$, 也就是说对于任意 $x \in S_i$, $z \in S_{i+1}$, $y < z$.

目标: 最小化 $\sum_{i=1}^k \text{cost}(S_i)$, 其中 $\text{cost}(S_i) = (\max(S_i) - \min(S_i))^2$. $\max(S_i)$ 是 S_i 中的最大元素, $\min(S_i)$ 是 S_i 中的最小元素。

例如, 如果 $S_i = \{x_j\}$, $\text{cost}(S_i) = 0$, 如果 $S_i = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+t}\}$, $x_j < x_{j+1} < \dots < x_{j+t}$, 那么 $\text{cost}(S_i) = (x_{j+t} - x_j)^2$.

设计时间复杂度为 $O(n^2k)$ 的动态规划算法, 找到最优聚类。要求写出伪代码、递归方程并分析算法的时间复杂度。

例如, 考虑将 4 个元素的集合 $\{1, 5, 8, 10\}$ 聚为两个类, 有三种可能:

1. $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{5, 8, 10\}$, 总代价是 $0^2 + 5^2 = 25$
2. $S_1 = \{1, 5\}$, $S_2 = \{8, 10\}$, 总代价是 $4^2 + 2^2 = 20$
3. $S_1 = \{1, 5, 8\}$, $S_2 = \{10\}$, 总代价是 $7^2 + 0^2 = 49$

所以, 算法的解是最优解 $S_1 = \{1, 5\}$, $S_2 = \{8, 10\}$ 。

7. (8 分) 假设我们希望不仅能使一个计数器增值, 也能使之复位至零(即, 使其中的所有位都为 0)。请说明如何将一个计数器实现为一个位数组, 使得对一个初始为零的计数器, 任一个包含 n 个 INCREMENT 和 RESET 操作的序列的时间都为 $O(n)$ 。

8. (12 分) 随着越来越多的计算机配备了双核 CPU, TinySoft 公司的首席技术官塞塔格利布决定更新他们著名的产品——SWODNIW。

这个例程由 N 个模块组成, 每个模块都应该在某个内核中运行。估计了在两个内核上执行所有例程的成本。我们把它定义为 A_i 和 B_i 。同时, M 对模块需要进行数据交换。如果它们在同一个内核上运行, 则可以忽略此操作的成本。否则, 就需要额外的费用。你应该明智地安排, 把总费用降到最低。请写出伪代码并分析算法复杂度。

9. (10 分) 设计算法并分析时间复杂度: 对于字符串 s , 寻找这样的子串: 长度为 n , 且包含最多的碱基字符。返回其包含的碱基字符个数。注: 碱基字符为 (A、G、C、T)

10. (10 分) 利用 A* 搜索计算下图中 S 到 T 的最短路径, 要求写出计算过程

