一、求公式$(r \wedge (q \to p)) \to ((q \to r) \to \neg p)$的主合取范式和主析取范式。（10分）

真值表如下

p	q	r	$q \to p$	$q \to r$	$r \wedge (q \to p)$	$(q \to r) \to \neg p$	$(r \wedge (q \to p)) \to ((q \to r) \to \neg p)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

主合取范式：$(\neg p \vee q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

主析取范式：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

二、判定下列逻辑蕴涵和逻辑等价是否成立，其中A，B，C，D为任意命题。（10分）

$(1)(A \wedge B) \to C, \neg C \vee D, \neg D \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

反证法,假设此蕴涵式不成立,则一定存在一种指派弄真左侧的同时弄假右侧

若想弄假右侧,则必须$A = T, B = T,$此时$A \wedge B = T$

此时若想弄真$(A \wedge B) \to C,$则$C = T$

此时若想弄真$\neg C \vee D,$则$D = T$

若想弄真$\neg D,$则$D = F$

出现矛盾,假设不正确,此逻辑蕴含式成立

$(2)\neg A \to (\neg(C \wedge \neg D) \to B) \Leftrightarrow D \to (A \vee B)$

对于指派$A = T, B = F, C = T, D = F,$代入后发现弄真左侧的同时弄假右侧

故此逻辑等价式不成立

三、构造解释I使得下列谓词公式为真：（5分）

$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(x, y)))$

设论域$D = \{0, 1\}, P, Q : D \to \{T, F\}$

$P(0) = F, P(1) = F$

$Q(0, 0) = T, Q(0, 1) = T, Q(1, 0) = T, Q(1, 1) = T$

在此解释下,在x的所有取值下,全称量词内的前件恒为假,此公式结果恒真,故此谓词公式为真

四、判定下列逻辑等价是否成立，其中A，B，C为任意命题公式。（10分）

$\neg((A \to \neg B) \to \neg C) \Leftrightarrow C \to (B \to \neg A)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$A \to \neg B$	$(A \to \neg B) \to \neg C$	$\neg((A \to \neg B) \to \neg C)$	$B \to \neg A$	$C \to (B \to \neg A)$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

易得,例如指派$A = F, B = F, C = F,$弄假左侧的同时弄真右侧,故此逻辑蕴含式不成立

五、在命题演算系统PC中证明：（20分）

$(1) \vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

$1. B \to (A \to B) \quad A1$

$2. \neg(A \to B) \to \neg B \quad 1$逆否

$3. \neg B \to (B \to (A \to C))$ 定理$3.1.3$

$4. (B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ 前件互换定理

$5. \neg(A \to B) \to (B \to (A \to C)) \quad 2, 3, 4$传递

$6. C \to (B \to C) \quad A1$

$7. (A \to C) \to (A \to (B \to C)) \quad 6,$加前件定理$r_{mp}$

$8. (\neg(A \to B) \to (B \to (A \to C))) \to (((A \to C) \to (A \to (B \to C))) \to (((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))))$ 定理$3.1.14$

9.$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$　$5,6,8r_{mp}$
(2)$\vdash B\to((B\to C)\to(\neg A\to C))$
1.$C\to(\neg A\to C)$　$A1$
2.$(B\to C)\to(B\to(\neg A\to C))$　1,加前件定理r_{mp}
3.$B\to((B\to C)\to(\neg A\to C))$　2,前件互换定理r_{mp}
(3)$\vdash(A\to B)\to(\neg B\to(A\to\neg A))$
1.$\neg B\to(B\to\neg A)$　定理3.1.3
2.$(B\to\neg A)\to((A\to B)\to(A\to\neg A))$　加前件定理
3.$\neg B\to((A\to B)\to(A\to\neg A))$　1,2三段论
4.$(A\to B)\to(\neg B\to(A\to\neg A))$　3,前件互换定理r_{mp}
(4)$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)),A\vdash B$
1.$\neg(A\to B)\to((A\to B)\to\neg(B\to A))$　定理3.1.3
2.$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))\to(A\to B)$　1逆否
3.$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)),A\vdash\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$　前提
4.$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)),A\vdash A\to B$　$2,3r_{mp}$
5.$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)),A\vdash A$　前提
6.$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)),A\vdash B$　$4,5r_{mp}$
六、在ND中证明：（10分）
(1)$\vdash((A\to B)\to C)\to(B\to C)$
只需证$(A\to B)\to C,B\vdash C$　演绎定理
1.$(A\to B)\to C,B;A\vdash B$　公理
2.$(A\to B)\to C,B\vdash A\to B$　$1\to$引入
3.$(A\to B)\to C,B\vdash(A\to B)\to C$　公理
4.$(A\to B)\to C,B\vdash C$　$2,3\to$消除
(2)$\vdash(B\to\neg C)\to(\neg A\to(B\to\neg(\neg A\to C)))$
只需证$B\to\neg C,\neg A,B\vdash\neg(\neg A\to C)$　演绎定理
1.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash\neg A\to C$　公理
2.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash\neg A$　公理
3.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash C$　$1,2\to$消除
4.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash B\to\neg C$　公理
5.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash B$　公理
6.$B\to\neg C,\neg A,B;\neg A\to C\vdash\neg C$　$4,5\to$消除
7.$B\to\neg C,\neg A,B;\vdash\neg(\neg A\to C)$　$3,6\neg$引入
七、在FC中证明：（20分
(1)$\vdash(\exists xA\to\forall x\neg B)\to\forall x(A\to\neg B)$
根据全程推广定理及演绎定理，只需证$\exists xA\to\forall x\neg B\vdash A\to\neg B$
1.$\exists xA\to\forall x\neg B$　前提
2.$\forall x\neg B\to\neg B$　定理5.1.1
3.$\exists A\to\neg B$　1,2三段论
4.$A\to\exists xA$　定理5.2.2
5.$A\to\neg B$　3,4三段论
6.$\forall x(A\to\neg B)$　5全称推广
(2)$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x))\vdash\exists x\neg(Q(x)\to\neg R(x))$
方法1：
因为$\exists x\neg(Q(x)\to\neg R(x))\iff\neg\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$，使用反证法
1.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$　前提
2.$\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\to(Q(x)\to\neg R(x))$　定理5.1.1
3.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash Q(x)\to\neg R(x)$　$1,2r_{mp}$
4.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash\forall x(P(x)\to Q(x))$　前提
5.$\forall x(P(x)\to Q(x))\to(P(x)\to Q(x))$　定理5.1.1
6.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash P(x)\to Q(x)$　$5,6r_{mp}$
7.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash P(x)\to\neg R(x)$　3,6三段论
8.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash\forall x(P(x)\to\neg R(x))$　7定理5.2.5
9.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x));\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$　前提
10.$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to\neg R(x))\vdash\neg\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$　8,9反证法
八、“大学里的学生不是本科生就是研究生，有的学生是高材生，$John$不是研究生，但是高材生，则如果$John$是大学里的学生必是本科生。”请将上述逻辑推理用谓词公式表示出来，并在FC中证明其推理的正确性。（15分）
令：谓词$S(x):x$是大学里的学生
谓词$B(x):x$是本科生
谓词$G(x):x$是研究生
谓词$P(x):x$是高材生
则上述语句形式化为：
(1)$\forall x(S(x)\to B(x)\oplus G(x))$

$(2)\exists xP(x)$

$(3)\neg G(John) \wedge P(John)$

$(4)S(John) \to B(John)$

令公式集$\Gamma = \{\forall x(S(x) \to B(x) \oplus G(x)), \exists xP(x), \neg G(John) \wedge P(John), S(John)\}$

只需证$\Gamma \vdash B(John)$　演绎定理

使用反证法

$1.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John) \wedge P(John)$　前提

$2.\neg G(John) \wedge P(John) \to \neg G(John)$　定理3.1.16

$3.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John)$　$1, 2r_{mp}$

$4.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg B(John) \to \neg G(John)$　定理3.1.2

$5.\Gamma; \neg B(John) \vdash G(John) \to B(John)$　4逆否

$6.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg B(John)$　前提

$7.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John) \to \neg B(John)$　定理3.1.2

$8.\Gamma; \neg B(John) \vdash B(John) \to G(John)$　7逆否

$9.\Gamma; \neg B(John) \vdash B(John) \leftrightarrow G(John)$　由5, 8可得

$10.\Gamma; \neg B(John) \vdash \forall x(S(x) \to B(x) \oplus G(x))$　前提

$11.\forall x(S(x) \to B(x) \oplus G(x)) \to (S(John) \to B(John) \oplus G(John))$　定理5.2.1

$12.\Gamma; \neg B(John) \vdash S(John) \to B(John) \oplus G(John)$

$13.\Gamma; \neg B(John) \vdash S(John)$　前提

$14.\Gamma; \neg B(John) \vdash B(John) \oplus G(John)$　$12, 13r_{mp}$

$15.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg(B(John) \leftrightarrow G(John))$　14异或同或转换

$16.\Gamma \vdash B(John)$　9, 15反证法