2018 年秋季学期概率论与数理统计期末考试试题及答案

一、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1．设事件 A 与 B 互斥，且 $P(A)=0.2,\ P(B)=0.5$，则 $P(\overline{A}\ \overline{B})=$______.

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1 \sim U(0,6),X_2 \sim E(0.5),X_3 \sim P(2)$，则 $Y=X_1-2X_2+3X_3$ 的方差 $DY=$______.________________.

3. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},x\in R,y\in R$$

则 $D(X+2Y)=$___________.

4.设 $X\sim U(0,1),Y$ 服从两点分布 $B(1,0.5)$，且 X,Y 独立，$Z=X+Y,$ 则 $Z^{1/2}$ 的数学期望为___________.

5. 设由来自总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的样本的样本均值 $\overline{x}=5$，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_________.___________.

$t_{0.05}(9)=1.8331,\ t_{0.025}(9)=2.2622,\ t_{0.05}(8)=1.8595,\ t_{0.025}(8)=2.3.60$，Φ（1.645)=0.95，Φ（1,96)=0. 975

二、选择题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. 5人以摸彩方式决定谁能得唯一的一张电影票，今设 A_i 表示第 i 个人摸到 $(i=1,2,3,4,5)$，则下列结果中有一个不正确，它是（　　）.

（A）$P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{4}$；（B）$P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{5}$；（C）$P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{1}{3}$；（D）$P(A_5)=\dfrac{1}{5}$.

.

2．设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则（　　）

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

（B）$f_1(x)\,f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

（C）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

（D）$F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

.

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2),$ 对于常数 *k>0*，则概率 $P(|X-\mu|\le k\sigma)$（　　）

（A）只与 u 有关；　　　　（B）只与 k 有关；

（C）只与 σ 有关；　　　　（D）与 μ,σ,k 均有关.

4. 设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, 0<x<3\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，则 $Y=\begin{cases}X, \quad 1<X<2\\ 1, \quad X\le 1\\ 2, \quad X\ge 2\end{cases}$ 的分布函数（ ）.

（A）是连续函数；（B）恰好有一个间断点；

（C）恰好有两个间断点；（D 恰好有三个间断点；

5. 设随机变量 X,Y 独立同分布，$EX=2$. $P(XY<5)=0.7$， $P(XY\le 3)=0.3$，则由切比雪夫不等式有 DXY（ ）

（A）≤ 0.6；（B）≥ 0.4；（C）≥ 0.6；（D）≤ 0.4.

.

三、（8 分）甲袋中有 3 个白球和 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球和 4 个黑球，从甲袋中取出 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球。（1）求从乙袋中取出的 1 个球是白球的概率；（2）若放入乙袋的 2 个球和从乙袋中取出的 1 个球是同色的，求放入乙袋的 2 个球均为白球的概率。

四、（8 分）设 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, \quad 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，

求（1）$Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；（2）在 $X=x$ 条件下，Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

五、（8 分）设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布，试求(1))随机变量 $Z=X-2Y$ 的方差;(2) X 和 Y 的相关系数 ρ.

六、（12 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本。（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；（2）问 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 是否是 θ 的无偏估计量？并说明理由；（3）若不是无偏估计量，请修正为无偏估计量然后再比较两个估计量的有效性。

七、（4 分）某人向一目标反复独立地进行射击，每次射击命中目标的概率为 p（$0<p<1$），直到命中目标 r 次为止，X 表示射击次数，求（1）X 的分布列；（2）EX, DX

2018-2019 秋季学期概率统计期末考试参考答案

一．填空题（3 分/题，共 15 分）

1．0.3　2.37　 3.　6.5　4. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　5.(4.412, 5.588)　((4.0, 6.0)都算对)

二．选择题（3 分/题，共 15 分）

1. A　 2.D　 3.B　 4.C　 5.C

三．（8 分）解：（1）令 A_i 表示从甲袋中取出 i 个白球（i=0,1,2）

$$B \subset S = A_0 + A_1 + A_2, B = BS = \sum_{i=0} A_i B$$

利用全概率公式可得：$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{C_3^i C_2^{2-i}}{C_5^2} \times \frac{(4+i)}{10} = 13/25$

6 分

（2）设 $A = \{从甲袋取的是2个白球\}$；$B = \{从乙袋取的是1个白球\}$；

$D = \{乙袋放入和取出的是同色球\}$

有 $P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(AB)}{P(\overline{A}\overline{B} + AB)} = \frac{\frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}}{\frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10} + \frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ 2 分

四、（8 分）**解：（1）** $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx$

若 $f(x, x-z) > 0$ 必有 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < x - z < 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ z < x, \\ z > 3x - 2 \end{cases}$

当 $-2 < z < 0$ 时 $f_Z(z) = \int_0^{(z+2)/3} dz = (z+2)/3$

当 $0 < z < 1$ 时 $f_Z(z) = \int_z^{(z+2)/3} dz = 2(1-z)/3$

其它，$f_Z(z) = 0$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z+2)/3, & -2 < z < 0 \\ 2(1-z)/3, & 0 \le z < 1 \\ 0 \quad , & 其它 \end{cases}$$ 6 分

（2）$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{(2-x)/2} dy = (2-x)/2, 0 < x < 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

当 $0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x)$ 时 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2(1-x)}$，

4 分

其它，$f_{Y|X}(y|x) = 0$

五.（8 分）**解：(1)**三角形区域$G=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\ge 1\}$随机变量$X$和$Y$的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 若(x,y)\in G\\ 0 & 若(x,y)\overline{\in} G\end{cases}$$

以$f_1(x)$表示X的概率密度，则当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_1(x)=0$，当$0<x<1$时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x$$

$\therefore EX=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}$　　　　　　$EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\dfrac{1}{2}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

同理可得　　$EY=\dfrac{2}{3}$，　　$DY=\dfrac{1}{18}$，

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12}$$

$$\text{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

于是　$DZ=D(X-2Y)=DX+D(2Y)-2\text{cov}(X,2Y)=\dfrac{1}{18}+4\cdot\dfrac{1}{18}+\dfrac{4}{36}=\dfrac{7}{18}$　　6 分

(2) $\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{-1/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}}=-1/2$　　2 分

六、（12 分）**解**：（1）矩估计：$EX=\mu_1=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2}{3\theta^2}x^3\Big|_0^{\theta}=\frac{2}{3}\theta,\theta=\frac{3}{2}\mu_1$

于是θ的矩估计为：$\hat{\theta}_1=\frac{3}{2}\overline{X}$

极大似然估计：样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$的似然函数为$L=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i & 0\le\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$\ln L=-2n\ln\theta+n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\quad \frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}=0\quad \text{无解}$$

$\therefore$ 取$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\le i\le 0}[x_i]$，由定义知$\hat{\theta}_2$为$\theta$的最大似然估计. 8 分

（2）$g(y)=G'(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$,而$X\sim F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{\theta^2} & 0\le x<\theta\\ 1 & x\ge\theta\end{cases}$

$\therefore\hat{\theta}_2\sim g(y)=\begin{cases}n(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2} & 0\le y<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)dy=\int_0^{\theta}ny(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}dy=\frac{2n}{2n+1}\theta\ne\theta$，$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\le i\le 0}[x_i]$不是$\theta$的无偏估计.

$E\hat{\theta}_1=E\frac{3}{2}\overline{X}=\frac{3}{2}E\overline{X}=\frac{3}{2}EX=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\theta=\theta$，所以$\hat{\theta}_1$为是$\theta$的无偏估计。 2 分

（3）若取$\hat{\theta}_3=\frac{2n+1}{2n}\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}=\frac{2n+1}{2n}\hat{\theta}_2$

因为$E(\hat{\theta}_3)=\frac{2n+1}{2n}E(\hat{\theta}_2)=\theta$，$\therefore\hat{\theta}_3$为$\theta$的无偏估计量.

$D\hat{\theta}_1=\mathrm{D}(\frac{3}{2}\overline{X})=(\frac{3}{2})^2D(\overline{X})=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot nDX=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n}(EX^2-(EX)^2)$

$=\frac{9}{4n}(\frac{1}{2}\theta^2-(\frac{2}{3}\theta)^2)=\frac{9}{4n}\cdot\frac{1}{18}\theta^2=\frac{1}{8n}\theta^2$

$E\hat{\theta}_2^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2g(y)dy=\int_0^{\theta}ny^2(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}dy=\frac{2n}{2n+2}\theta^2$

$D(\hat{\theta}_2)=E\hat{\theta}_2^2-(E(\hat{\theta}_2))^2=\frac{2n}{2n+2}\theta^2-(\frac{2n}{2n+1}\theta)^2=\frac{2n((2n+1)^2-2n(2n+2))}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2=\frac{n\theta^2}{(n+1)\ (2n+1)^2}$

所以，$D\hat{\theta}_3=D(\frac{2n+1}{2n}\hat{\theta}_2)=(\frac{2n+1}{2n})^2D\hat{\theta}_2=(\frac{2n+1}{2n})^2\frac{n\theta^2}{(n+1)\ (2n+1)^2}=\frac{\theta^2}{4n(n+1)}$

利用数学归纳法容易证明：$n>1, D\hat{\theta}_1=\frac{1}{8n}\theta^2 \geq D\hat{\theta}_3=\frac{\theta^2}{4n(n+1)}$ 2 分

所以，$\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 较有效。

七.（4 分）解：（1）由题设：若第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验，则必有 $k \geq r$，

设（$X=k)$ 表示第 r 次射击命中发生在第 k 次射击试验这一事件

于是（$X=k)$ 发生当且仅当前面 $k-1$ 次射击试验中有 $r-1$ 次命中，$k-r$ 次未命中，而第 k 次试验的结果为命中。

利用试验的独立性：

$$P(X=k)=(C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-1-(r-1)})p=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}, k=r, r+1, r+2, \cdots$$ **2 分**

（2）令 X_i 表示第 $i-1$ 次命中之后到第 i 次命中所历经的贝努里试验的次数（i=1,2，….r）于是 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 独立同分布（i.i.d），$X_1 \sim G(p)$，则有：

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_r,$$

$$EX=E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=rE(X_1)=\frac{r}{p}$$ **2 分**

$$DX=D(X_1+X_2+\cdots+X_r)=rD(X_1)=\frac{rq}{p^2}$$