1. 求公式$((p \to r) \wedge \neg r) \to (q \wedge r)$的主合取范式，主析取范式。
   此公式真值表如下

p	q	r	$p \to r$	$\neg r$	$(p \to r) \wedge \neg r$	$q \wedge r$	$((p \to r) \wedge \neg r) \to (q \wedge r)$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1

由此可知弄假指派只有

$$\alpha = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其余均为弄真指派
因此，该公式的主合取范式为$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
主析取范式为
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

2. 用"↑"，"↓"表示公式$(\neg p \to q) \to (p \to r)$。

$$\begin{aligned} (\neg p \to q) \to (p \to r) &\iff \neg(p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \\ &\iff (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r \\ &\iff \neg p \vee r \\ &\iff (p \downarrow p) \vee r \\ &\iff ((p \downarrow p) \downarrow r) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow r) \\ &\iff \neg(p \wedge \neg r) \\ &\iff p \uparrow \neg r \\ &\iff p \uparrow (r \uparrow r) \end{aligned}$$

3. 判断下列逻辑蕴涵式是否成立，给出理由，A,B,C为命题公式。
   (1)$A \to B \vee D, B \to C \vee E \implies A \to D \vee E$
   $A \to D \vee E$的一种弄假指派为

$$\alpha = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在此指派下
$A \to B \vee D = 1, B \to C \vee E = 1$
所以存在一种指派弄真左侧，但弄假右侧
因此，此逻辑蕴含式不成立
(2)$A \to B, C \to D, E \to F \implies A \wedge C \wedge E \to B \wedge D \wedge F$
求$A \wedge C \wedge E \to B \wedge D \wedge F$的弄假指派，
令$A \wedge C \wedge E = 1, B \wedge D \wedge F = 0$,

得到$A=1,B=1,C=1,B\wedge D\wedge F=0$
在$A=1,B=1,C=1$的条件下,要想将左侧弄真,
则必须满足$D=1,E=1,F=1$
即$B\wedge D\wedge F=1$
所以弄假右侧的指派都不能弄真左侧,
即弄真左侧的指派都能弄真右侧
综上，此逻辑蕴含式成立

4. 在命题演算系统PC中证明.

(1)$\vdash_{PC}((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$
只需证$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C),A,B\vdash C$ 演绎定理
1)$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$ 前提
2)B 前提
3)$A\rightarrow B$ 定理$3.1.2$
4)$A\rightarrow C$ $1,3r_{mp}$
5)A 前提
6)C $4,5r_{mp}$

(2)$\vdash_{PC}(((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)$
1)$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B)$ 定理$3.1.1$
2)$((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow(A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B))$ 前件互换定理
3)$A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B)$ $1,2r_{mp}$
4)$(A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ 加后件定理
5)$((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ $3,4r_{mp}$

(3)$A\rightarrow B,(C\rightarrow D)\rightarrow\neg B,A\vdash_{PC}C$
1)$\neg C\rightarrow(C\rightarrow D)$ 定理$3.1.3$
2)$\neg(C\rightarrow D)\rightarrow C$ 1逆否
3)$(C\rightarrow D)\rightarrow\neg B$ 前提
4)$B\rightarrow\neg(C\rightarrow D)$ 3逆否
5)$A\rightarrow B$ 前提
6)A 前提
7)B $5,6r_{mp}$
8)$\neg(C\rightarrow D)$ $4,7r_{mp}$
9)C $2,8r_{mp}$

(4)$\vdash(A\rightarrow\neg(B\rightarrow B))\rightarrow\neg A$
1)$\neg A\rightarrow\neg A$ 定理$3.1.1$
2)$B\rightarrow B$ 定理$3.1.1$
3)$A\rightarrow(B\rightarrow B)$ 2定理$3.1.2$
4)$\neg(B\rightarrow B)\rightarrow\neg A$ 3逆否
5)$(\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow((\neg(B\rightarrow B)\rightarrow\neg A)\rightarrow((A\rightarrow\neg(B\rightarrow B))\rightarrow\neg A))$ 定理$3.1.14$
6)$(A\rightarrow\neg(B\rightarrow B))\rightarrow\neg A$ $1,4,5r_{mp}$

5. 在ND中证明。

(1)$\vdash_{ND}(A\vee B\rightarrow C)\leftrightarrow(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)$
先证$(A\vee B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)$
只需证$A\vee B\rightarrow C\vdash(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)$ 演绎定理
1)$A\vee B\rightarrow C;A\vdash A\vee B\rightarrow C$ 公理
2)$A\vee B\rightarrow C;A\vdash A$ 公理
3)$A\vee B\rightarrow C;A\vdash A\vee B$ $2\vee$引入
4)$A\vee B\rightarrow C;A\vdash C$ $1,3\rightarrow$消除
5)$A\vee B\rightarrow C\vdash A\rightarrow C$ $4\rightarrow$引入
6)$A\vee B\rightarrow C;B\vdash A\vee B\rightarrow C$ 公理
7)$A\vee B\rightarrow C;B\vdash B$ 公理
8)$A\vee B\rightarrow C;B\vdash A\vee B$ $7\vee$引入

$9) A \vee B \to C; B \vdash C \quad 6,8 \to$ 消除

$10) A \vee B \to C \vdash B \to C \quad 9 \to$ 引入

$11) A \vee B \to C \vdash (A \to C) \wedge (B \to C) \quad 5,10 \wedge$ 引入

再证 $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

只需证 $(A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$ 演绎定理

$1) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

$2) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ 公理

$3) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A \to C \quad 2 \wedge$ 消除

$4) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A$ 公理

$5) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash C \quad 3,4 \to$ 消除

$6) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ 公理

$7) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash B \to C \quad 6 \wedge$ 消除

$8) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash B$ 公理

$9) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash C \quad 7，8 \to$ 消除

$10) (A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C \quad 1,5,9 \vee$ 消除

$(A \vee B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C) \quad \leftrightarrow$ 引入

(2)$\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (B \to C) \to A \vee C$

只需证 $(A \vee B) \wedge (B \to C) \vdash A \vee C$ 演绎定理

$1) (A \vee B) \wedge (B \to C) \vdash (A \vee B) \wedge (B \to C)$ 公理

$2) (A \vee B) \wedge (B \to C) \vdash A \vee B \quad 1 \wedge$ 消除

$3) (A \vee B) \wedge (B \to C); A \vdash A$ 公理

$4) (A \vee B) \wedge (B \to C); A \vdash A \vee C \quad 3 \vee$ 引入

$5) (A \vee B) \wedge (B \to C); B \vdash (A \vee B) \wedge (B \to C)$ 公理

$6) (A \vee B) \wedge (B \to C); B \vdash B \to C \quad 5 \wedge$ 消除

$7) (A \vee B) \wedge (B \to C); B \vdash B$ 公理

$8) (A \vee B) \wedge (B \to C); B \vdash C \quad 6,7 \to$ 消除

$9) (A \vee B) \wedge (B \to C); B \vdash A \vee C \quad 8 \vee$ 引入

$10) (A \vee B) \wedge (B \to C) \vdash A \vee C \quad 1,4,9 \vee$ 消除

6. 在FC中证明。

$\vdash_{FC} \forall v(A \to B) \leftrightarrow (A \to \forall vB), v$在$A$中无自由出现

先证 $\forall v(A \to B) \to (A \to \forall vB)$

只需证 $\forall v(A \to B), A \vdash \forall vB$ 演绎定理

$1) \forall v(A \to B), A \vdash \forall v(A \to B)$ 前提

$2) \forall v(A \to B), A \vdash \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB) \quad AX3$

$3) \forall v(A \to B), A \vdash \forall vA \to \forall vB \quad 1,2 r_{mp}$

$4) \forall v(A \to B), A \vdash A$ 前提

$5) \forall v(A \to B), A \vdash \forall vA \quad 4$全称推广

$6) \forall v(A \to B), A \vdash \forall vB \quad 3,5 r_{mp}$

再证 $(A \to \forall vB) \to \forall v(A \to B)$

只需证 $A \to \forall vB \vdash \forall v(A \to B)$ 演绎定理

$1) A \to \forall vB \vdash A \to \forall vB$ 前提

$2) \forall vB \to B$ 定理5.2.1

$3) A \to \forall vB \vdash A \to B \quad 1,2$三段论

$4) A \to \forall vB \vdash \forall v(A \to B) \quad 3$全称推广

7. 找出语义指派使得$(\forall v) P(v, f(v,a)) \wedge P(v,a) \to \forall v P(v,v)$为真。

令 $U = \{1,2\}, \bar{P}: U \to \{T, F\}, \bar{a} = 1, \bar{v} = 1$

$\bar{f}(1,1) = 1, \bar{f}(1,2) = 1, \bar{f}(2,1) = 2, \bar{f}(2,2) = 2$

$\bar{P}(1,1) = F, \bar{P}(1,2) = T, \bar{P}(2,1) = T, \bar{P}(2,2) = F$

那么

$$\overline{P(v,f(v,a))\wedge P(v,a)} = \bar{P}(\bar{v},\overline{f(v,a)}\wedge\bar{P}(\bar{v},\bar{a})$$
$$= \bar{P}(1,\bar{f}(\bar{v},\bar{a}))\wedge\bar{P}(1,1)$$
$$= \bar{P}(1,\bar{f}(1,1))\wedge\bar{P}(1,1)$$
$$= \bar{P}(1,1)\wedge F$$
$$= F$$

此时$(\forall v)P(v,f(v,a))\wedge P(v,a)\to\forall vP(v,v)$为真

8. 将"班级里一定有一个人，如果她抽烟，则班级里所有同学都抽烟"形式化并证明。

用$P(x)$表示x抽烟，则公式为

$\vdash\exists v(P(v)\to\forall vP(v))$, 即$\vdash\neg\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))$

1)$\neg P(v)\to(P(v)\to\forall vP(v))$　定理3.1.3

2)$\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to P(v)$　1逆否

3)$\forall vP(v)\to(P(v)\to\forall vP(v))$　$AX1$

4)$\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to\neg\forall vP(v)$　3逆否

5)$\forall v(\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to P(v))$　2全称推广

6)$\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to\forall vP(v)$　$AX4,5r_{mp}$

7)$\forall v(\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to\neg\forall vP(v))$　4全称推广

8)$\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))\to\forall v\neg\forall vP(v)$　$AX4,7r_{mp}$

9)$\varnothing;\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))\vdash\forall vP(v)$　6演绎定理

10)$\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))\vdash\forall v\neg\forall vP(v)$　8演绎定理

11)$\forall v\neg\forall vP(v)\to\neg\forall vP(v)$　定理5.2.1

12)$\varnothing;\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))\vdash\neg\forall vP(v)$　10, 11三段论

13)$\vdash\neg\forall v\neg(P(v)\to\forall vP(v))$　10, 12反证法