

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

本试卷满分 90 分

(计算机科学与技术学院 09 级各专业)

一、填空(本题满分 10 分, 每空各 1 分)

1. 设 A, B 为集合, 则 $(A \setminus B) \cup B = A$ 成立的充分必要条件是什么? ($B \subseteq A$)
2. 设 $X = \{1, 2, \dots, n\}, Y = \{1, 2\}$, 则从 X 到 Y 的满射的个数为多少? ($2^n - 2$)
3. 在集合 $A = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 11\}$ 上定义的整除关系 “ $|$ ” 是 A 上的偏序关系, 则最大元是什么? (无)
4. 设 $A = \{a, b, c\}$, 给出 A 上的一个二元关系, 使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。($R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (a, c)\}$)
5. 设 Σ 为一个有限字母表, Σ 上所有字 (包括空字) 之集记为 Σ^* , 则 Σ^* 是否是可数集? (是)
6. 含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图个数为多少? (4)
7. 若 G 是一个 (p, p) 连通图, 则 G 至少有多少个生成树? (3)
8. 如图所示图 G , 回答下列问题:
 - (1) 图 G 是否是偶图? (不是)
 - (2) 图 G 是否是欧拉图? (不是)
 - (3) 图 G 的色数为多少? (4)

二、简答下列各题 (本题满分 40 分)

1. 设 A, B, C, D 为任意集合, 判断下列等式是否成立? 若成立给出证明, 若不成立举出反例。(6分)

(1) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$;

(2) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

解: (1) 不成立。例如 $A = D = \emptyset, B = C = \{a\}$ 即可。(2) 成立。 $\forall (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$, 有 $x \in A \cap B, y \in C \cap D$, 即 $x \in A, x \in B, y \in C, y \in D$ 。所以 $(x, y) \in A \times C, (x, y) \in B \times D$, 因此 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$, 从而 $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$ 。反之, $\forall (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$, 有 $x \in A, x \in B, y \in C, y \in D$ 。即注意
行为
规范遵
守
考
场
纪
律主管
领导
审核
签字

$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$, 从而 $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$ 。

因此, $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

2. 设 G 是无向图, 判断下列命题是否成立? 若成立给出证明, 若不成立举出反例。(6分)

(1) 若图 G 是连通图, 则 G 的补图 G^c 也是连通图。

(2) 若图 G 是不连通图, 则 G 的补图 G^c 是连通图。

解: (1) G^c 不一定是连通图。

(2) G^c 一定连通图。

因为 G 不连通, 故 G 至少有两个分支, 一个是 G_1 , 另外一些支构成的子图是 G_2 。

对于 G^c 中任意两个顶点 u 和 v :

(1) 若 $u \in V_1, v \in V_2$, 则 u 与 v 不在 G 中邻接。由补图的定义可知: u 与 v 必在 G^c 中邻接;

(2) 若 $u, v \in V_1$ (或 V_2), 取 $w \in V_2$ (或 V_1), 则 u 与 w , w 与 v 在 G 都不邻接, 故 u 与 w , w 与 v 在 G^c 必邻接, 于是 uwv 就是 G^c 中的一条路。

综上可知, 对 G^c 中任两个顶点 u 和 v 之间都有路连接, 故 G^c 是连通的。

3. 设集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$, A 上的关系定义如下: (6分)

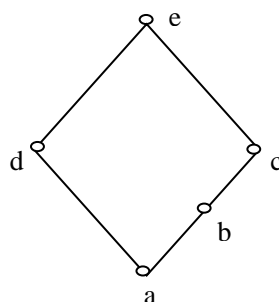
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c),$

$(b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ 。 则

(1) 写出 R 的关系矩阵; (2) 验证 (A, R) 是偏序集; (3) 画出 Hasse 图。

解: (1) R 所对应的关系矩阵为 M_R 为:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(2) 由关系矩阵可知:

对角线上的所有元素全为 1, 故 R 是自反的; $r_{ij} + r_{ji} \leq 1$, 故 R 是反对称的;

$$R^2 \text{ 对应的关系矩阵 } M_{R^2} \text{ 为: } M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_R。$$

因此 R 是传递的。

综上可知: 故 R 是 A 上的偏序关系, 从而 (A, R) 是偏序集。

(3) (A, R) 对应的 *Hasse* 图如图所示。

4. 设 A 是有限集合, $f: A \rightarrow A$ 。则 (3 分)

(1) 若 f 是单射, 则 f 必是满射吗? 反之如何?

(2) 若 A 是无限集合, 结论又如何?

解: (1) f 是单射, 则 f 必是满射; 反之也成立;

(2) 若 A 是无限集合, 结论不成立。

举例: 令 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, 则

(1) 设 $s: N \rightarrow N$, $\forall n \in N, s(n) = n+1$ 。显然, S 是单射, 但不是满射。

(2) 设 $t: N \rightarrow N$, $\forall n \in N, t(1) = 1, t(n) = n-1, n \geq 2$ 。显然, T 是满射, 但不是单射。

5. (4 分)

(1) 根据你的理解给出关系的传递闭包的定义;

(2) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的关系 $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$, 求关系 R 的传递闭包 R^+ 。

解: (1) 设 R 是集合 A 上的二元关系, 则 A 上包含 R 的所有传递关系的交称为关系 R 的传递闭包。

(2) $R^+ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$

6. 由 6 个顶点, 12 条边构成的平面连通图 G 中, 每个面由几条边围成? 说明理由。(4 分)

解: 每个面由 3 条边围成。

在图 G 中, $p=6$, $q=12$, 根据欧拉公式 $p-q+f=2$, 得 $f=8$ 。

因为简单平面连通图的每个面至少由 3 条边围成, 所以假设存在某个面由大于 3 条边围成, 则有: $3f < 2q$, 即 $24 < 24$, 矛盾。

故每个面至多由 3 条面围成, 于是 G 中每个面由 3 条边围成的。

7. 设 $G=(V, E)$ 是至少有一个顶点不是孤立点的图。若 $\forall v \in V, \deg v$ 为偶数, 则 G 中是否必有圈? 说明理由。(4 分)

解: G 中必有圈。

令 P 是 G 中的一条最长的路, $P: v_1 v_2 \cdots v_n$, 则由 $\deg v_1 \geq 2$ 知, 必有某个顶点 u 与 v_i 邻接。由于 P 是最长路, 所以 u 必是 v_3, v_4, \dots, v_n 中的某个 $v_i, i \geq 3$ 。于是, $v_1 v_2 \cdots v_i v_1$ 是 G 的一个回路。

8. 设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树, 出度为 2 的顶点为 n_2 , 则 n_0 与 n_2 有何关系? 说明理由。(4 分)

解: n_0 与 n_2 的关系为: $n_0 = n_2 + 1$

由 $\sum_{v \in V} id(v_i) = \sum_{v \in V} od(v_i) = q$ 且 $q = p - 1$, 得 $2 \times n_2 + 1 \times (p - n_2 - n_0) = p - 1$,

得 $n_0 = n_2 + 1$ 。

9. 已知有向图 D 的邻接矩阵 $A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$, 则 (3 分)

(1) 画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解;

(2) 写出 D 的可达矩阵 R ;

(3) 写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

解: (1) (2) $\begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00111 \end{pmatrix}$; (3) $(A^k)_{ij}$ 。

三、证明下列各题 (本题满分 40 分, 每小题各 5 分)

1. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: G 是树 $\Leftrightarrow G$ 无圈且 $p = q + 1$ 。

证: \Rightarrow 因为 G 是树, 所以 G 是无圈;

其次对 G 的顶点数 p 进行归纳证明 $p = q + 1$ 。

当 p 为 1 或 2 时, 连通图 G 中显然有 $p = q + 1$ 。

假设对一切少于 p 个顶点的树结论成立;

今设 G 是有 p 个顶点树, 从 G 中去掉任一条边 x , 则 $G - x$ 恰有两个支。由归纳假设, 每个支中顶点数与边数之间有关系式: $p_1 = q_1 + 1$, $p_2 = q_2 + 1$ 。

所以, $p = p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + 2 = (q_1 + q_2 + 1) + 1 = q + 1$ 。

\Leftarrow 只须证明 G 连通即可。

假设 G 不连通, 则必有 k 个支且 $k \geq 2$ 。由于每个支都是连通的且无回路, 故每个支都是树。于是, 对每个支都有 $p_i = q_i + 1, i = 1, 2, \dots, k$ 。于是, $p = \sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i + k = q + k$ 。

由假设 $k \geq 2$, 这与 $p = q + 1$ 相矛盾。因此, G 是连通的。即 G 是树。

2. 设 $f: X \rightarrow Y$, 证明: f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$ 。

证: (1) $\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$, 则 $f(x) \in f(F)$, 于是 F 中必存在 x_1 , 使得 $f(x) = f(x_1)$ 。因为 f 是单射, 故必有 $x = x_1$ 。即 $x \in F$, 所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$ 。
 反过来, $\forall x \in F, f(x) \in f(F)$, 从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$, 所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$ 。
 因此 $f^{-1}(f(F)) = F$ 。

\Leftarrow 假设 f 不是单射, 则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2) = y$ 。令 $F = \{x_1\}$, 于是 $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$, 故有 $\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$, 矛盾。
 即 f 一定为单射。

3. 设 G 是一个 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。 u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点, 并且

$$\deg u + \deg v \geq p。$$

证明: G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G + uv$ 是哈密顿图。

证明: \Rightarrow 显然成立。

\Leftarrow 假设 G 不是哈密顿图, 则有题意知在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3 \cdots v_{p-1}v$, 令 $\deg v_1 = k, \deg v_p = 1$, 则在 G 中与 u 邻接的顶点为 $u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{ik}$, 其中 $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq p-1$ 。这时顶点 $u_{ir-1} (r=2, 3, \cdots, k)$ 不能与顶点 v_p 邻接。因为此时 G 有哈密顿回路 $uv_2 \cdots v_{ir-1}vv_{p-1} \cdots v_{ir}u$, 因此 v_p 至少与 u, v_2, \cdots, v_{p-1} 中的 k 个顶点不邻接。于是, $1 \leq p-1-k$, 从而 $k+1 \leq p-1$, 与题设矛盾, 故 G 是哈密顿图。

4. 设 R 是 A 上的一个二元关系, 证明: R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 。

证: $\Rightarrow \forall (x, y) \in R$, 由 R 的对称性有 $(y, x) \in R$, 即 $(x, y) \in R^{-1}$, 从而 $R \subseteq R^{-1}$

反之, $\forall (y, x) \in R^{-1}$, 则 $(x, y) \in R$ 。由 R 的对称性有: $(y, x) \in R$, 从而 $R^{-1} \subseteq R$
 故 $R = R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x, y \in X$, 若 $(x, y) \in R$, 由 $R = R^{-1}$, 得 $(x, y) \in R^{-1}$, 即 $(y, x) \in R$, 故 R 是对称的。

5. 设 R 是 A 上的一个二元关系, 令 $S = \{(a, b) | \exists c \in A, \text{使得 } (a, c) \in R \text{ 且 } (c, b) \in R\}$ 。

证明: 若 R 是 A 上的等价关系, 则 S 也是 A 上的等价关系;

证: 因为 R 是自反的, 所以 $\forall a \in A$, 有 $(a, a) \in R$ 。根据 S 的定义, 有 $(a, a) \in S$, 所以 S 是自反的;

若 $(a, b) \in S$, 则 $\exists c \in A$, 使得 $(a, c) \in R$ 且 $(c, b) \in R$ 。因为 R 是对称的, 所以 $(b, c) \in R$ 且 $(c, a) \in R$, 根据 S 的定义有 $(b, a) \in S$, 所以 S 是对称的;

若 $(a, b) \in S, (b, c) \in S$, 则 $\exists d \in A$, 使得 $(a, d) \in R$ 且 $(d, b) \in R$ 。因为 R 是传递的, 所以 $(a, b) \in R$ 。

则 $\exists e \in A$, 使得 $(b, e) \in R$ 且 $(e, c) \in R$ 。因为 R 是传递的, 所以 $(b, c) \in R$ 。

根据 S 的定义有 $(a, c) \in S$ 。所以 S 是传递的。

综上可知: S 是等价关系。

6. 利用康托对角线法证明: 若 A 可数, 则 2^A 不可数。

证: 因为 $2^A \sim Ch(A) = \{f | f: A \rightarrow \{0,1\}\}$, 所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。
 $\forall f \in Ch(A)$, f 可表为 0, 1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数, 则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 f_1, f_2, f_3, \dots 。每个 f_i 可表成 0, 1 的无穷序列 $f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \dots$ 。用对角线法构造一个 0, 1 序列 g_1, g_2, g_3, \dots : 若 $f_{i1} = 0$, 则 $g_1 = 1$; 若 $f_{i1} = 1$ 则 $g_1 = 0$ 。一般地, 若 $f_{ii} = 0$, 则 $g_i = 1$; 如果 $f_{ii} = 1$, 则 $g_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$, 则 g_1, g_2, \dots 确定的函数 $g \in Ch(A)$, 但 $g \neq f_i, i = 1, 2, \dots$, 矛盾。所以, 2^A 不可数。

7. 设 $G = (V, E)$ 是一个 (p, q) 图, 若 G 是一个 K -正则偶图, 证明: $p \geq 2K$ 。

证: 因为 G 中无三角形且 G 为 K -正则图, 所以 $Kp = 2q \leq 2\lfloor (p/2)^2 \rfloor = p^2/2$,

因此, $p \geq 2K$ 。

8. 设 G 是顶点 $p \geq 11$ 的平面图, 证明: G 的补图 G^c 是非平面图。

证: 反证法: 假设图 G 的补图 G^c 也是平面图, 令 $G = (p, q)$, $G^c = (p_1, q_1)$, 则 $p = p_1$, 而 $q + q_1 = p(p-1)/2 \dots\dots\dots (1)$

又因为 G 和 G^c 都是平面图, 故 $q \leq 3p-6$, $q_1 \leq 3p-6$ 。相加得:

$$q + q_1 \leq 6p - 12 \quad (2)$$

由 (1), (2) 的得: $q + q_1 = p(p-1)/2 \leq 6p - 12$, 展开有: $p^2 - 13p + 24 \leq 0$, 于是 $p < 11$ 。与题设矛盾, 所以 G^c 不是平面图。

