一、求公式 $(r \wedge (q \to p)) \to ((q \to r) \to \neg p)$ 的主合取范式和主析取范式。(10分)真值表如下

p	q	r	q o p	q ightarrow r	$r \wedge (q ightarrow p)$	$(q \to r) \to \neg p$	$(r \wedge (q \to p)) \to ((q \to r) \to \neg p)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

主合取范式: $(\neg p \lor q \lor \neg q) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$

主析取范式: $(\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \lor (p \land q \land \neg r)$

二、判定下列逻辑蕴涵和逻辑等价是否成立,其中A,B,C,D为任意命题。(10分)

$$(1)(A \wedge B) \rightarrow C, \neg C \vee D, \neg D \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

反证法,假设此蕴涵式不成立,则一定存在一种指派弄真左侧的同时弄假右侧

若想弄假右侧,则必须A=T,B=T,此时 $A\wedge B=T$

此时若想弄真 $(A \land B) \rightarrow C$,则C = T

此时若想弄真「 $C \lor D$,则D = T

若想弄真 $\neg D$,则D = F

出现矛盾,假设不正确,此逻辑蕴含式成立

$$(2)\neg A \rightarrow (\neg(C \land \neg D) \rightarrow B) \Leftrightarrow D \rightarrow (A \lor B)$$

对于指派A=T,B=F,C=T,D=F,代入后发现弄真左侧的同时弄假右侧

故此逻辑等价式不成立

三、构造解释I使得下列谓词公式为真: (5分)

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \land Q(x,y)))$$

设论域
$$D=\{0,1\},P,Q:D
ightarrow \{T,F\}$$

$$P(0) = F, P(1) = F$$

$$Q(0,0) = T, Q(0,1) = T, Q(1,0) = T, Q(1,1) = T$$

在此解释下,在2的所有取值下,全称量词内的前件恒为假,此公式结果恒真,故此谓词公式为真

四、判定下列逻辑等价是否成立,其中A,B,C为任意命题公式。(10分)

$$\neg((A o \neg B) o \neg C) \Leftrightarrow C o (B o \neg A)$$

A	В	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	A ightarrow eg B	(A ightarrow eg B) ightarrow eg C	$\neg((A o \neg B) o \neg C)$	B ightarrow eg A	C o (B o eg A)
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

易得,例如指派A=F,B=F,C=F,弄假左侧的同时弄真右侧,故此逻辑蕴含式不成立

五、在命题演算系统PC中证明: (20分)

$$(1) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$1.B
ightarrow (A
ightarrow B)$$
 $A1$

$$2. \neg (A o B) o \neg B$$
 1逆否

$$3. \neg B
ightarrow (B
ightarrow (A
ightarrow C))$$
 定理 $3.1.3$

$$4.(B o (A o C)) o (A o (B o C))$$
 前件互换定理

$$5. \neg (A o B) o (B o (A o C))$$
 2,3,4传递

$$6.C \rightarrow (B \rightarrow C)$$
 A1

$$7.(A o C) o (A o (B o C))$$
 6, 加前件定理 r_{mp}

$$8.(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C)))\rightarrow(((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C)))\rightarrow(((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C)))) \quad \text{$\not$$ $\exists $3.1.14$}$$

```
9.((A 
ightarrow B) 
ightarrow (A 
ightarrow C)) 
ightarrow (A 
ightarrow (B 
ightarrow C)) \quad 5,6,8 r_{mp}
(2) \vdash B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))
1.C \rightarrow (\neg A \rightarrow C) A1
2.(B 	o C) 	o (B 	o (\neg A 	o C)) 1, 加前件定理r_{mp}
3.B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)) 2,前件互换定理r_{mp}
(3) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg A))
1. \neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg A) 定理3.1.3
2.(B 	o \neg A) 	o ((A 	o B) 	o (A 	o \neg A)) 加前件定理
3. \neg B 
ightarrow ((A 
ightarrow B) 
ightarrow (A 
ightarrow 
abla A)) 1,2 复设论
4.(A	o B)	o (
eg B	o (A	o 
eg A)) 3,前件互换定理r_{mp}
(4)
eg((A	o B)	o
eg(B	o A)),Adash B
1.\neg(A \to B) \to ((A \to B) \to \neg(B \to A)) 定理3.1.3
2.\neg((A 	o B) 	o \neg(B 	o A)) 	o (A 	o B) 1逆 否
3.\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)), A \vdash \neg((A \to B) \to \neg(B \to A)) 前提
4. \neg ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg (B \rightarrow A)), A \vdash A \rightarrow B \quad 2, 3r_{mp}
5. \neg ((A 	o B) 	o \neg (B 	o A)), A \vdash A 前提
6. \neg ((A 	o B) 	o \neg (B 	o A)), A \vdash B \quad 4, 5r_{mp}
六、在ND中证明: (10分)
(1) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)
只需证(A 	o B) 	o C, B \vdash C 演绎定理
1.(A \rightarrow B) \rightarrow C, B; A \vdash B 公理
2.(A	o B)	o C, Bdash A	o B 1	o \exists 1\lambda
3.(A 	o B) 	o C, B \vdash (A 	o B) 	o C 公理
4.(A 	o B) 	o C, B \vdash C 2,3 	o 消除
(2) \vdash (B \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg (\neg A \rightarrow C)))
只需证B \to \neg C, \neg A, B \vdash \neg (\neg A \to C) 演绎定理
1.B 	o \neg C, \neg A, B; \neg A 	o C \vdash \neg A 	o C 公理
2.B \rightarrow \neg C, \neg A, B; \neg A \rightarrow C \vdash \neg A \Diamond \exists
3.B \rightarrow \neg C, \neg A, B; \neg A \rightarrow C \vdash C \quad 1, 2 \rightarrow \exists \& A \rightarrow C \vdash C
4.B \rightarrow \neg C, \neg A, B; \neg A \rightarrow C \vdash B \rightarrow \neg C \triangle  
5.B \rightarrow \neg C, \neg A, B; \neg A \rightarrow C \vdash B 公理
6.B 
ightarrow 
eg C, 
eg A, B; 
eg A 
ightarrow C dash 
eg C 4,5 
ightarrow 消除
7.B 
ightarrow 
eg C, 
eg A, B; 
eg (
eg A 
ightarrow C) 3,6 여러 \lambda
七、在FC中证明: (20分
(1) \vdash (\exists xA \to \forall x \neg B) \to \forall x(A \to \neg B)
根据全程推广定理及演绎定理,只需证 \exists xA \rightarrow \forall x \neg B \vdash A \rightarrow \neg B
1.\exists xA \rightarrow \forall x \neg B 前提
2.orall x 
eg B 
ightarrow 
eg B 定理5.1.1
3.\exists A \rightarrow \neg B 1,2三段论
4.A 
ightarrow \exists x A 定理5.2.2
5.A \rightarrow \neg B 3,4三段论
6. \forall x (A \rightarrow \neg B) 5全称推广
(2) orall x(P(x) 	o Q(x)), 
eg \forall x(P(x) 	o 
eg R(x)) dash \exists x 
eg (Q(x) 	o 
eg R(x))
方法1:
因为\exists x \neg (Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \iff \neg \forall x (Q(x) \rightarrow \neg R(x)),使用反证法
1. orall x(P(x) 	o Q(x)), 
eg \forall x(P(x) 	o 
eg R(x)); 
orall x(Q(x) 	o 
eg R(x)) dash orall x(Q(x) 	o 
eg R(x)) 前提
2.orall x(Q(x)
ightarrow 
eg R(x))
ightarrow (Q(x)
ightarrow 
eg R(x)) 定理5.1.1
3. orall x(P(x) 	o Q(x)), 
eg orall x(P(x) 	o 
eg R(x)); 
orall x(Q(x) 	o 
eg R(x)) dash Q(x) 	o 
eg R(x) = 1, 2r_{mp}
4. orall x(P(x) 	o Q(x)), 
eg \forall x(P(x) 	o 
eg R(x)); 
orall x(Q(x) 	o 
eg R(x)) dash ec x(P(x) 	o Q(x)) 前提
5.orall x(P(x)	o Q(x))	o (P(x)	o Q(x)) 定理5.1.1
6. orall x(P(x) 	o Q(x)), 
eg \forall x(P(x) 	o 
eg R(x)); 
orall x(Q(x) 	o 
eg R(x)) dash P(x) 	o Q(x) \quad 5, 6r_{mp}
7.orall x(P(x)	o Q(x)),
eg \forall x(P(x)	o 
eg R(x));
eg x(Q(x)	o 
eg R(x))dash P(x)	o 
eg R(x) 3,6三段论
8. \forall x (P(x) 	o Q(x)), \neg \forall x (P(x) 	o \neg R(x)); \forall x (Q(x) 	o \neg R(x)) \vdash \forall x (P(x) 	o \neg R(x)) 7\varepsilon \equiv 5.2.5
9. \forall x (P(x) 	o Q(x)), \neg \forall x (P(x) 	o \neg R(x)); \forall x (Q(x) 	o \neg R(x)) \vdash \neg \forall x (P(x) 	o Q(x)) 前提
10.orall x(P(x)	o Q(x)),
eg \forall x(P(x)	o 
eg R(x)) dash 
eg \forall x(Q(x)	o 
eg R(x)) 8, 9反证法
八、"大学里的学生不是本科生就是研究生,有的学生是高材生,John不是研究生,但是高材生,则如果John是大学里的学生必是本科生。"
请将上述逻辑推理用谓词公式表示出来,并在FC中证明其推理的正确性。(15分)
\diamond: 谓词S(x):x是大学里的学生
谓词B(x):x是本科生
谓词G(x):x是研究生
谓词P(x):x是高材生
则上述语句形式化为:
(1) \forall x (S(x) \rightarrow B(x) \oplus G(x))
```

```
(2)\exists x P(x)
(3)\neg G(John) \wedge P(John)
(4)S(John) \rightarrow B(John)
令公式集\Gamma = \{ orall x(S(x) 	o B(x) \oplus G(x)), \exists x P(x), \neg G(John) \land P(John), S(John) \}
只需证\Gamma \vdash B(John) 演绎定理
使用反证法
1.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John) \land P(John) 前提
2. \neg G(John) \wedge P(John) 
ightarrow 
abla G(John) 
ightarrow 
abla \operatorname{\mathbb{E}} \operatorname{\mathbb{E}} 3.1.16
3.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John) \quad 1, 2r_{mp}
4.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg B(John) \rightarrow \neg G(John) 定理3.1.2
5.\Gamma;
eg B(John) dash G(John) 	o B(John) 4逆 否
6.\Gamma; ¬B(John) \vdash ¬B(John) 前提
7.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg G(John) 
ightarrow \neg B(John) 定理3.1.2
8.\Gamma; 
eg B(John) \vdash B(John) 
ightarrow G(John) 7逆 否
9.\Gamma; \neg B(John) \vdash B(John) \leftrightarrow G(John) 由 5,8可得
10.\Gamma;
eg B(John) dash orall x(S(x) 	o B(x) \oplus G(x)) 前提
11. orall x(S(x) 	o B(x) \oplus G(x)) 	o (S(John) 	o B(John) \oplus G(John)) 定理5.2.1
12.\Gamma; \neg B(John) \vdash S(John) \rightarrow B(John) \oplus G(John)
13.\Gamma; \neg B(John) \vdash S(John) 前提
14.\Gamma; \neg B(John) \vdash B(John) \oplus G(John) \quad 12, 13r_{mp}
15.\Gamma; \neg B(John) \vdash \neg (B(John) \leftrightarrow G(John)) 14异或同或转换
16.\Gamma dash B(John) 9,15反证法
```