

1.指出下列谓词公式中的自由变元与约束变元，并说明什么样的项对这些自由变元是可代入得。

$$(1) \exists x P(x) \wedge P(y)$$

x 是约束变元

y 是自由变元,可代入不含约束变元 x 的项

$$(2) \forall x (P(x) \wedge Q(v) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge S(x)))$$

x 是约束变元

y 是约束变元

v 是自由变元,可代入不含约束变元 x 的项

3.假设论域为整数集合，确定下列语句的真值。

$$(1) \forall n \exists m (n^2 < m) = T$$

$$(2) \exists n \forall m (n < m^2) = T$$

n 为负数

$$(3) \forall n \exists m (n + m = 0) = T$$

n, m 互为相反数

$$(4) \exists n \forall m (nm = m) = T$$

$n = 1$

$$(5) \exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6) = F$$

$$(6) \forall n \forall m \exists p (p = (n + m)/2) = F$$

$n = 0, m = 1$

4.假设论域为实数集合，确定下列语句的真值。

$$(1) \forall x \exists y (x^2 = y) = T$$

$$(2) \forall x \exists y (x = y^2) = F$$

当 x 为负数时,量词内表达式为假

$$(3) \exists x \forall y (xy = 0) = T$$

$$(4) \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1)) = T$$

$$(5) \exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1) = F$$

$$(6) \forall x \exists y (x + y = 1) = T$$

$$(7) \forall x \exists y (x + y) = 2 \wedge 2x - y = 1 = F$$

只有当 $x = 1, y = 1$ 时,量词内表达式才为真

$$(8) \forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2) = T$$

5.将下列公式中的否定词等价变换到谓词中去，即否定词不在量词外边，也不在含逻辑联结词的表达式的外边。

$$(1) \neg \exists x \exists y P(x, y)$$

$$= \forall x \neg \exists y P(x, y)$$

$$= \forall x \forall y \neg P(x, y)$$

$$(2) \neg \forall x \exists y P(x, y)$$

$$= \exists x \neg \exists y P(x, y)$$

$$= \exists x \forall y \neg P(x, y)$$

$$(3) \neg \exists y (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$$

$$= \forall y \neg (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$$

$$= \forall y (\neg Q(y) \vee \neg \forall x \neg R(x, y))$$

$$= \forall y (\neg Q(y) \vee \exists x R(x, y))$$

$$(4) \neg \exists y (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$$

$$= \forall y \neg (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$$

$$= \forall y (\neg \exists x R(x, y) \wedge \neg \forall x S(x, y))$$

$$= \forall y (\forall x \neg R(x, y) \wedge \exists x \neg S(x, y))$$

$$(5) \neg \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z W(x, y, z))$$

$$= \forall y \neg (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z W(x, y, z))$$

$$= \forall y (\neg \forall x \exists z T(x, y, z) \wedge \neg \exists x \forall z W(x, y, z))$$

$$= \forall y (\exists x \neg \exists z T(x, y, z) \wedge \forall x \neg \forall z W(x, y, z))$$

$$= \forall y (\exists x \forall z \neg T(x, y, z) \wedge \forall x \exists z \neg W(x, y, z))$$

6.将下列自然语句形式化为谓词公式。

(1)所有能被2整除的整数都是偶数。

令： x 的论域为整数

谓词 $P(x)$: x 能被 2 整除

谓词 $Q(x)$: x 是偶数

则上述语句形式化为 :

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(2) 有些偶数能被 3 整除。

令 : x 的论域为偶数

谓词 $P(x)$: x 能被 3 整除

则上述语句形式化为 :

$$\exists x P(x)$$

(3) 是金子都闪光, 但闪光的并不都是金子。

令 : x 的论域为一切事物

谓词 $P(x)$: x 是金子

谓词 $Q(x)$: x 闪光

则上述语句形式化为 :

$$1) \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$2) \neg \forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$$

(4) 每个自然数都有唯一一个自然数是它的直接后继。

令 : x, y, u 的论域为自然数

谓词 $P(x, y)$: y 是 x 的直接后继

谓词 $E(x, y)$: x 和 y 相等

则上述语句形式化为 :

$$\forall x \exists y(P(x, y) \wedge \forall u(P(x, u) \rightarrow E(y, u)))$$

(5) 有些学生相信所有的教师。

任何一个学生都不相信骗子。

所以教师都不是骗子。

令 : x, y 的论域为人

谓词 $P(x)$: x 是学生

谓词 $Q(x)$: x 是教师

谓词 $R(x)$: x 是骗子

谓词 $T(x, y)$: x 信任 y

则上述语句形式化为 :

$$1) \exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow T(x, y)))$$

$$2) \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow \neg T(x, y)))$$

$$3) \forall y(Q(y) \rightarrow \neg R(y))$$

(6) 计算机系的每个研究生要么是推荐免试生要么是统考生。

所有推荐免试生的本科课程成绩都很好。

但并非所有研究生本科课成绩都很好。

所以一定有研究生是统考生。

令 : x 的论域为计算机系的研究生

谓词 $P(x)$: x 是推荐免试生

谓词 $Q(x)$: x 是统考生

谓词 $R(x)$: x 的本科课程成绩很好

则上述语句形式化为 :

$$1) \forall x(P(x) \oplus Q(x))$$

$$2) \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$3) \neg \forall x R(x)$$

$$4) \exists x Q(x)$$

(7) 一名学生想要取得硕士学位, 必须至少修满 60 个学分, 或至少修满 45 学分并通过硕士论文答辩, 并且所有必修课程的成绩不低于 B 。

令 : x 的论域为学生

谓词 $P(x)$: x 取得硕士学位

谓词 $Q(x)$: x 至少修满 60 个学分

谓词 $R(x)$: x 至少修满 45 学分并通过硕士论文答辩

谓词 $T(x)$: x 所有必修课程的成绩不低于 B

则上述语句形式化为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)) \wedge T(x))$$