

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 若事件 A 、 B 满足 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$ ，且 $P(A) = p$ ，则 $P(B) =$ _____.

2. 随机向量 (X, Y) 的分布列为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且 $P(XY \neq 0) = 0.4$ ， $P(Y \leq 0 | X \leq 0) = \frac{2}{3}$ ，则其中未知参数

$(a, b, c) =$ _____.

3. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则 $E(XY) =$ _____.

4. 设随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ ，其中 $\mu_1 = 1$ ， $\mu_2 = 2$ ，

$\sigma_1^2 = 2$ ， $\sigma_2^2 = 8$ ， $\rho = 0.2$ ，则有 $X - 2Y$ 亦服从正态分布，为 $N(\text{_____}, \text{_____})$

5. 某旅行社随机访问了 25 名游客，得知其平均消费额 $\bar{x} = 80$ 元，样本标准差 $s = 12$ 元，若已知旅行者消费额服从正态分布，则评价消费额 μ 的 95% 置信区间为_____.

$(t_{0.025}(24) = 2.0639, t_{0.025}(25) = 2.0595; t_{0.05}(25) = 1.7081)$

□ 75.05 □ 84.95 □

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设 $0 < P(A) < 1$ ， $P(B) > 0$ ，且 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ ，则必有（ ）

- (A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$; (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$;
 (C) $P(AB) = P(A)P(B)$; (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

2. 下列函数可作为连续型随机变量的概率密度（ ）.

$$(A) f(x) = \begin{cases} \sin x & \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; \quad (B) g(x) = \begin{cases} -\sin x & \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

$$(C) \varphi(x) = \begin{cases} \cos x & \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; \quad (D) h(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi. \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随着 σ 的增大, 概率 $P(|X - \mu| < \sigma)$ 将()

- (A) 单调增大; (B) 单调减少;
(C) 保持不变; (D) 增减不定.

4. 假设随机变量 X 服从指数分布, $Y = \begin{cases} X, & 2 < X < 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的分布函数 ()

- (A) 是连续函数; (B) 至少有两个间断点;
(C) 是阶梯函数; (D) 恰好有一个间断点.

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 下列不是无偏估计的是 ()

- (A) \bar{X} ; (B) $\frac{2}{3}\bar{X} - \frac{1}{3}S^2$; (C) $\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}S^2$; (D) $\frac{4}{3}\bar{X} - \frac{1}{3}S^2$.

三、(8 分) 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球, 乙袋中有 3 个白球 2 个黑球, 从甲袋中取出一个放入乙袋, 再从乙袋中任取一个, 若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的, 求放入乙袋的是黑球的概率.

四、(8 分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 (1) 在 $X = x$ 条件下, Y 的条件概率密度函数; (2) 在 $0 < X < 1$ 条件下, Y 的条件分布函数; (3) $Z = Y - X$ 的概率密度函数.

五、(8 分) 设随机变量 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & (x, y) \in G; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 G 为坐标轴与直线 $x + y - 1 = 0$ 所围的三角形区域, 计算 $E(X)$, $D(X)$, 以及 X 与 Y 的相关系数 ρ .

六、(12 分) 设总体的概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 3e^{-3(x-\theta)}, & x > \theta; \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自此总体的样本, 求 1) θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计 $\hat{\theta}_2$; 2) 判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是否为无偏估计, 如果不是请相应给出修正后的无偏估计; (3) 比较 (2) 中无偏估计的有效性.

七、(4 分) 某射手的射击命中率为 $3/4$, 现对一目标连续射击, 直到第二次命中为止, 令 X 表示第二次为止所用的射击次数, 求 X 的概率分布, 并计算 X 的期望.

答案:

一、填空题 (每小题 3 分, 共 5 小题, 满分 15 分)

1. $1-p$; 2. $(0.1, 0.2, 0.1)$; 3. $\frac{1}{6}$; 4. $(-3, 30.8)$; 5. $\square 75.05 \square 84.95 \square$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 5 小题, 满分 15 分)

1. C; 2. B; 3. C; 4. D; 5. B

三、(8 分) 解: 设 $A = \{\text{从甲袋取的是黑球}\}$; $B = \{\text{从乙袋取的是黑球}\}$;

$D = \{\text{乙袋放入和取出的是同色球}\}$

$$\text{有 } P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(AB)}{P(AB + \overline{A}\overline{B})} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{6}}{\frac{3}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{6}} = \frac{9}{17}$$

四、(8 分)

解: (1) 当 $X \leq 0$ 时, $f_X(x) = 0$;

$$\text{当 } X > 0 \text{ 时, } f_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x};$$

$$\text{因此 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

当 $Y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$;

$$\text{当 } Y > 0 \text{ 时, } f_X(x) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y};$$

$$\text{因此 } f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{最终, 对 } x > 0, \text{ 有 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{-(y-x)}, & y > x \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{对 } y > 0, \text{ 有 } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x < y \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) F_{Y|X}(y|0 < x < 1) = \frac{P(0 < x < 1, Y \leq y)}{P(0 < x < 1)}$$

$$P(0 < x < 1, Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} - ye^{-y} & 0 \leq y < 1 \\ 1 - e^{-1} - e^{-y} & y \geq 1 \end{cases}$$

$$P(0 < x < 1) = 1 - e^{-1}$$

$$F_{Y|X}(y|0 < x < 1) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1 - e^{-y} - ye^{-y}}{1 - e^{-1}} & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1 - e^{-1} - e^{-y}}{1 - e^{-1}} & y \geq 1 \end{cases}$$

$$(3) F_Z(z) = P(Y - X \leq z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{x+z} e^{-y} dy \right) dx & z > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-z} & z > 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{五、(12分) 解: } EX = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x \cdot 24xy dy \right) dx = \frac{2}{5}, EX^2 = \frac{1}{5}, DX = \frac{1}{25},$$

$$EX = EY; EX^2 = EY^2, EXY = \frac{2}{15}$$

$$\text{cov}(X, Y) = -\frac{2}{75}, \rho = -\frac{2}{3}$$

六、(8分) 解:

$$(1) \text{矩估计: 由 } E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 3e^{-3(x-\theta)} dx = \frac{1}{3} + \theta \approx \bar{X}, \text{ 故 } \hat{\theta}_1 = \bar{X} - \frac{1}{3}.$$

$$\text{MLE: 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = 3^n e^{-3 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, \quad x_{(1)} \geq \theta.$$

故 MLE 为 $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$.

(2) 矩估计: $E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{X}) - \frac{1}{3} = E(X) - \frac{1}{3} = \theta$, 故 $\hat{\theta}_1$ 为无偏估计.

MLE: $x_{(1)}$ 的概率密度函数为 $f(x; \theta) = \begin{cases} 3ne^{-3n(x-\theta)}, & x > \theta; \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(1)}) = \theta + \frac{1}{3n}$, $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计, 而 $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 - \frac{1}{3n} = X_{(1)} - \frac{1}{3n}$ 为无偏估计.

(3) $D(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{9n}$, $D(\hat{\theta}_3) = \frac{1}{9n^2}$, 后者更有效.

七、(4 分) 解: $P(X = k) = C_{k-1}^1 (1/4)^{k-2} (3/4)^2 = (k-1)(1/4)^{k-2} (3/4)^2$, $k = 2, 3, \dots$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1/4)^{k-2} (3/4)^2,$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} p^2 \quad (\text{令 } p = 3/4)$$

$$= p^2 \left(\sum_{k=2}^{+\infty} q^k \right)'' = \frac{2}{p} = \frac{8}{3}$$