第 3 章课后习题参考解答(1)

1.

（1） $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

1) $(A \to B) \to (A \to B)$　定理 1

2) $A \to ((A \to B) \to B)$　1)+定理 6

3) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$　2)+A2+r_{mp}

//或直接用 A2：$(A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))$，然后前件交换即可//

//

（2） $\neg A \vdash A \to B$

1) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ A3

2) $\neg A \to [(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)]$ 1)+定理 2

3) $[\neg A \to (\neg B \to \neg A)] \to [\neg A \to (A \to B)]$　2)+A2+r_{mp}

4) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$　A1

5) $\neg A \to (A \to B)$ 3)4) r_{mp} //也可以由已证定理直接来调用//

6) $\neg A$　前提

7) $(A \to B)$　5)6) r_{mp}

//

（3） $A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A \vdash A \to C$

1) $(\neg(B \to C) \to \neg A) \to (A \to (B \to C))$　A3

2) $\neg(B \to C) \to \neg A$　前提

3) $(A \to (B \to C))$　1)2) r_{mp}

4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$　A2

5) $(A \to B) \to (A \to C)$　3)4) r_{mp}

6) $A \to B$　前提

7) $(A \to C)$　5)6) r_{mp}

（4）$\vdash [A\to(B\to C)]\to\{[A\to(D\to B)]\to[A\to(D\to C)]\}$

1) $(B\to C)\to[(D\to B)\to(D\to C)]$ 定理 5

2) $A\to\{(B\to C)\to[(D\to B)\to(D\to C)]\}$ 1)加前件

3) $[A\to(B\to C)]\to\{A\to[(D\to B)\to(D\to C)]\}$ 2)+ A_2 + r_{mp}

4) $\{A\to[(D\to B)\to(D\to C)]\}\to\{[A\to(D\to B)]\to[A\to(D\to C)]\}$ A_2

5) $[A\to(B\to C)]\to\{[A\to(D\to B)]\to[A\to(D\to C)]\}$ 3)4)+定理 7+ r_{mp}

//

（5）$\vdash [A\to(B\to C)]\to\{(C\to D)\to[A\to(B\to D)]\}$

1）$(B\to C)\to[(C\to D)\to(B\to D)]$ 定理 7

2）$[A\to(B\to C)]\to\{[A\to(C\to D)]\to[A\to(B\to D)]\}$

同理上题(4)的证明

3）$[A\to(C\to D)]\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}$

2）前件交换

4）

$(C\to D)\to\{[A\to(C\to D)]\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}\}$ 3)加前件

5）$(C\to D)\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}$ 4)+ A_2 + A_1 + r_{mp}

6）$[A\to(B\to C)]\to\{(C\to D)\to[A\to(B\to D)]\}$ 5)前件交换

//

（6）$\vdash[(A\to B)\to C]\to(B\to C)$

1）$[B\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to C]\to(B\to C)\}$ 传递

2）$B\to(A\to B)$ A_1

3）$[(A\to B)\to C]\to(B\to C)$ 1）2）r_{mp}

//

（7）$\vdash [(A\to B)\to(B\to A)]\to(B\to A)$

方案一:运用传递的方法

1）$[B\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to(B\to A)]\to[B\to(B\to A)]\}$ 定理 7

2）$[(A\to B)\to(B\to A)]\to[B\to(B\to A)]$ 1）+A1+rmp

3）$[B\to(B\to A)]\to(B\to A)$ 习题 1.(1)已证结论

6）$[(A\to B)\to(B\to A)]\to(B\to A)$ 2）3）+定理 7

方案二:考虑调用定理 14 来证。

1）$\neg A\to$（$\mathrm{A}\to\mathrm{B}$）定理 3

2）$\neg$($\mathrm{A}\to\mathrm{B}$）$\to\mathrm{A}$ 1）+定理 13+rmp

3）$B\to[\neg$($\mathrm{A}\to\mathrm{B}$）$\to\mathrm{A}]$ 2)+定理 2

4）$\neg$($\mathrm{A}\to\mathrm{B}$）$\to(B\to\mathrm{A})$ 3）+定理 6

5）$(B\to A)\to(B\to A)$ 定理 1

6）$\left[(A\to B)\to(B\to A)\right]\to(B\to A)$ 4）5）+定理 14+rmp

//注意参见定理 14 后的说明//

//

（8）$\vdash A\to\left[(A\to B)\to(C\to B)\right]$

1）$(C\to A)\to[(A\to B)\to(C\to B)]$ 定理 7

2）$A\to\{(C\to A)\to[(A\to B)\to(C\to B)]\}$ 1）定理 2

3）$[A\to(C\to A)]\to\{A\to[(A\to B)\to(C\to B)]\}$ 2）+A2+rmp

4）$A\to[(A\to B)\to(C\to B)]$ 3）+A1+rmp

//

（9）$\vdash\left[(A\to B)\to A\right]\to A$

1）$[\neg A\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to A]\to(\neg A\to A)\}$定理 7

2）$\neg A\to(A\to B)$定理 3

3）$[(A\to B)\to A]\to(\neg A\to A)$ 1）2）rmp

4）$(\neg A\to A)\to A$定理 8

5）$[(A\to B)\to A]\to A$ 3）4）定理 7

//也可以调用定理 14 来证：只需证$\neg$($\mathrm{A}\to\mathrm{B}$）$\to\mathrm{A}$及$\mathrm{A}\to\mathrm{A}$即可，显然//

//

（10）$\vdash \left[(A \to B) \to C\right] \to \left[(C \to A) \to A\right]$

方案一：直接由传递定理

1）$[(A \to B) \to C] \to \{(C \to A) \to [(A \to B) \to A]\}$ 定理 7

2）$[(A \to B) \to A] \to A$ （9）题已证

3）$(C \to A) \to \{[(A \to B) \to A] \to A\}$ 2）定理 2

4）$\{(C \to A) \to [(A \to B) \to A]\} \to [(C \to A) \to A]$ 3）+A2+rmp

5）$[(A \to B) \to C] \to [(C \to A) \to A]$ 1）4）定理 7

方案二：

1）$(\neg A \to (A \to B)) \to \{\left[(A \to B) \to C\right] \to (\neg A \to C)\}$ 定理 7

2）$\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

3）$\left[(A \to B) \to C\right] \to (\neg A \to C)$ 1）2）rmp

4）$(C \to A) \to (\neg A \to \neg C)$ 定理

5）$\neg A \to [(C \to A) \to \neg C)]$ 4）+定理 6

6）$[(C \to A) \to \neg C)] \to [C \to \neg (C \to A)]$ 定理

7）$\neg A \to [C \to \neg (C \to A)]$ 5）6）+定理 7

8）$(\neg A \to C) \to [\neg A \to \neg (C \to A)]$ 7）+A2+rmp

9）$[\neg A \to \neg (C \to A)] \to [(C \to A) \to A]$ A3

10）$(\neg A \to C) \to [(C \to A) \to A]$ 8）9）+定理 7

//此结论也可以直接由传递来做//

11）$[(A \to B) \to C] \to [(C \to A) \to A]$ 3）10）+定理 7

//此题也可以调用定理 14 来证//

//

（11）$\vdash \left[(A \to B) \to C\right] \to \left[(A \to C) \to C\right]$

方案一：**运用**证明定理 14 的证明方法。

1）$\neg C \to (C \to B)$定理 3

2） $A\rightarrow[\neg C\rightarrow(C\rightarrow B)]$ 1） 定理 2

3） $\neg C\rightarrow[A\rightarrow(C\rightarrow B)]$ 2） 定理 6

4） $[A\rightarrow(C\rightarrow B)]\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B)]$ A_2

5） $\neg C\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B)]$ 3）4）定理 7

6） $[(A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B)]\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow C)]$ 定理 12

7） $\neg C\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow C)]$ 5）6）定理 7

8） $[\neg C\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[\neg C\rightarrow\neg(A\rightarrow C)]$ 7） A_2+r_{mp}

//由此可以看出与证明定理 14 的方法相同//

9） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow[\neg C\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$ 定理 12

10） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow[\neg C\rightarrow\neg(A\rightarrow C)]$ 9）8）定理 7

11） $[\neg C\rightarrow\neg(A\rightarrow C)]\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C]$ A3

12） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C)]$ 10）11）定理 7

方案二：**直接调用**定理 14 来证。

1） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow\{(A\rightarrow C)\rightarrow[(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow C]\}$ 定理 14

2） $\{(A\rightarrow C)\rightarrow[(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow C]\}$

$\rightarrow\{(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C]\}$ 定理 6

3） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow\{(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C]\}$ 1）2）+定理 7

4） $(\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow\{[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C]\}$ 3）+定理 6

5） $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ 定理 3

6） $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A$ 5）+定理 13+rmp

7） $[(A\rightarrow B)\rightarrow C]\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C)]$ 4）6）rmp

方案三：根据定理 14 只需证明 $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C)]$

及 $C\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow C)]$（显然）。

证 $\neg(A\to B)\to[(A\to C)\to C)]$：

1） $\neg C\to(C\to B)$ 定理

2） $A\to(\neg C\to(C\to B))$ 1）+定理 2

3） $\neg C\to(A\to(C\to B))$ 2）+定理 6

4） $(A\to(C\to B))\to[(A\to C)\to(A\to B)]$ A2

5） $\neg C\to[(A\to C)\to(A\to B)]$ 3）4）+定理 7

6） $(A\to C)\to[\neg C\to(A\to B)]$ 5）+定理 6

7） $[\neg C\to(A\to B)]\to[\neg(A\to B)\to C]$ 定理

8） $(A\to C)\to[\neg(A\to B)\to C]$ 6）7）+定理 7

9） $\neg(A\to B)\to[(A\to C)\to C)]$ 8）+定理 6

//

（12） $\vdash [[(A\to B)\to C]\to D]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$

//采用证明定理 14 的证明方法//

1） $\neg(A\to B)\to[(A\to B)\to C)]$ 定理 3

2） $\{\neg(A\to B)\to[(A\to B)\to C)]\}\to\{\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)\}$ 定理 13

3） $\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)$ 1）2） r_{mp}

4） $\neg D\to\{\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)\}$ 3） 定理 2

5） $\{\neg D\to\neg[(A\to B)\to C]\}\to[\neg D\to(A\to B)]$ 4） A_2+r_{mp}

6） $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ 已证定理

7） $\neg D\to[(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$ 6）定理 2

8） $[\neg D\to(A\to B)]\to[\neg D\to(\neg B\to\neg A)]$ 7） A_2+r_{mp}

9） $\{\neg D\to\neg[(A\to B)\to C]\}\to[\neg D\to(\neg B\to\neg A)]$ 5）8 定理 7

10） $\{[(A\to B)\to C]\to D\}\to\{\neg D\to\neg[(A\to B)\to C]\}$ 定理 12

11）$\{[(A\to B)\to C]\to D\}\to\{\neg D\to(\neg B\to\neg A)\}$ 10）9）定理 7

12）$\{\neg D\to(\neg B\to\neg A)\}\to[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]$ A_2

13）$[(B\to D)\to(\neg D\to\neg B)]\to$

$\{[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]\to[(B\to D)\to(\neg D\to\neg A)]\}$ 定理 7

14）$[(B\to D)\to(\neg D\to\neg B)]$ 定理 12

15）$[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]\to$ $[(B\to D)\to(\neg D\to\neg A)]$ 13）14）r_{mp}

16）$[(\neg D\to\neg A)\to(A\to D)]$ A_3

17）$(B\to D)\to[(\neg D\to\neg A)\to(A\to D)]$ 16）定理 2

18）$[(B\to D)\to(\neg D\to\neg A)]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 17）A_2+r_{mp}

19）$[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 15）18）定理 7

20）$\{\neg D\to(\neg B\to\neg A)\}\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 12）19）定理 7

21）$[[(A\to B)\to C]\to D]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 11）20）定理 7

//这里也可以仿照（11）题的方法来处理。//

//

（13）$\vdash(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$

//采用证明定理 14 的证明方法//

1）$[\neg A\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to B]\to(\neg A\to B)\}$ 定理 7

2）$\neg A\to(A\to B)$ 定理 3

3）$[(A\to B)\to B]\to(\neg A\to B)$ 1）2）r_{mp}

4）$\neg A\to\{[(A\to B)\to B]\to B\}$ 3）定理 6

5）$\{[(A\to B)\to B]\to B\}\to\{\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ 定理 12

6）$\neg A\to\{\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ 4）5）定理 7

7）$\neg C\to\{\neg A\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 6）定理 2

8）$(\neg C\to\neg A)\to\{\neg C\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 7）A_2+r_{mp}

9）$\{\neg C\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}\to$

$\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ A_2

10）$(\neg C\to\neg A)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 8）9）定理 7

11）$[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\to[[(A\to B)\to B]\to C]$ A_3

12）$(\neg C\to\neg B)\to\{[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\to$

$[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 11）定理 2

13）$\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\}\to$

$\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 12）A_2+r_{mp}

14）$(\neg C\to\neg A)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 10）13）定理 7

15）$(A\to C)\to(\neg C\to\neg A)$ 定理 12

16）$(A\to C)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 14）15）定理 7

17）$(\neg C\to\neg B)\to\{(A\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 16）定理 6

18）$(B\to C)\to(\neg C\to\neg B)$ 定理 12

19）$(B\to C)\to\{(A\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 17）18）定理 7

20）$(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 19）定理 6

//这里同样可以仿照（11）题的方法来处理。//

///////////////////////////////////////

（14）$\vdash(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$

1）$(B\to C)\to\{(A\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$

由上题（13）的已证结论

2）$(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$ 1）+ 定理 6

//以上的证明仅供大家参考，证法不唯一，大家可以多尝试一下其他的方案。//

第 3 章课后部分习题参考解答(2)

2.（1）

只需证：$B \to A \vdash \neg A \to \neg B$

只需证：$B \to A \vdash \neg\neg B \to \neg\neg A$（由$(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$即 A3 可知）

只需证：$B \to A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1）$\neg\neg B$　前提
2）$\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B$ 1）+定理 2

3）$(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$ A3

4）$\neg B \to \neg\neg\neg B$ 2）3）rmp

5）$(\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$ A3

6）$\neg\neg B \to B$ 4）5）rmp
7）B 1）6）rmp

//此处由$\neg\neg B$演绎B的过程也可直接调用定理 4：$\neg\neg B \vdash B$

8）$B \to A$　前提
9）A　　7）8）rmp

10）$\neg\neg\neg A \to \neg A$ 同理 1）至 6）+演绎定理 //$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

11）$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$ A3

12）$A \to \neg\neg A$　10）11）rmp　//也可以直接调用定理
13）$\neg\neg A$ 9）12）rmp
////////////////////////////////////
（2）

只需证：$A \to B, B \to C, A \vdash C$，显然。

////////////////////////////////////
（3）

只需证：$(A \to B) \to A \vdash A$

1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

2) $(A \to B) \to A$ 前提

3) $\neg A \to A$　　1)2)传递

4) $(\neg A \to A) \to A$ 定理

5) A
////////////////////////////////////

（4）

只需证：$\neg(A \to B), B \vdash A$

1）$B \to (A \to B)$

2）B
3）$A \to B$

4）$\neg(A \to B) \to ((A \to B) \to A)$ 定理

5）$\neg(A \to B)$ 前提

6）A
////////////////////////////////////
3.(1)

1）$\neg B \to (B \to A)$ 定理 3

2）$\neg A \to (\neg B \to (B \to A))$ 1)+定理 2

3）$(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to (B \to A))$ 2)+A2+r_{mp}

4）$(\neg A \to (B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ A2

5）$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ 3)4)+定理 7

6）$(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

7）$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to A) \to A)$ 6)+定理 2

8）$((\neg A \to B) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 7)+A2+r_{mp}

⑨$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 5)8)+定理 7

//即反证法的形式化定理描述//
(2)

1）$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ $A3'$

2）$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 1)+定理 6

3）$B \to (\neg A \to B)$ A1

4）$B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 3)2)+定理 7

5）$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 4)+定理 6

//由于在 PC 中证明定理 6，7 只用到了公理 A1，A2，未使用 A3，故定理 6，7 仍可以在 PC' 中直接调用。//

//////////////////////////

4.

(1)

1） $A \to (B \to C)$ 假设已证定理

2) $B \to (A \to C)$ 1)+定理 6

3） B 假设已证定理

4) $(A \to C)$ 2)3) r_{mp}

///或直接用 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 来证明//

(2)

1) $\Gamma ; \neg A \vdash B$ 假设

2) $\Gamma \vdash \neg A \to B$ 1)演绎定理

3) $\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$ 由 $\Gamma ; \neg A \vdash \neg B$ 同理 2)

4) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 上面习题已证定理

5) $\Gamma \vdash A$ ②③④ r_{mp} //此题就是我们常用的反证法一般性证明过程。

/////////////////////////////

5.

证明：若 $(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$ 为 PC 的定理，则根据 PC 的可靠性知 $(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$ 应为重言式，而指派 $\alpha(A) = T, \alpha(B) = T$ 使得 $\alpha((\neg A \to B) \to (A \to \neg B)) = F$，矛盾。

第 3 章课后部分习题参考解答(3)

6.

(1)

1) $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A$　　公理

2) $\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A \to A$　　公理

3) $\neg A \to A, \neg A \vdash A$　　1)2) $\to$消去

4) $\neg A \to A, A \vdash A$　　公理

5) $\neg A \to A \vdash A$　　3)4)假设消除

//

(2)

先证$\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

只需证：$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$

1) $(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A$　　公理+$\wedge$消除

2) $(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A \to (B \to C)$　　公理

3)　$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash B \to C$　　1)2) $\to$消去

4) $(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash B$　　公理+$\wedge$消除

5)　$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$　3)4)　$\to$消去

再证：$\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

只需证：（$A \wedge B \to C$）$, A, B \vdash C$

1) $(A \wedge B \to C), A, B \vdash A$　　公理

2) $(A \wedge B \to C), A, B \vdash B$　　公理

3) $(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B$　　1)2) $\wedge$引入

4) $(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B \to C$　公理

5) $(A \wedge B \to C), A, B \vdash C$　　3)4) $\to$消去

(3)

先证$((A\vee B)\to C)\to(A\to C)\wedge(B\to C)$

1）$((A\vee B)\to C),A\vdash A$ 公理

2）$((A\vee B)\to C),A\vdash A\vee B$ 1）$\vee$引入

3）$((A\vee B)\to C),A\vdash A\vee B\to C$ 公理

4）$((A\vee B)\to C),A\vdash C$ 2）3）$\to$消去

5）$((A\vee B)\to C)\vdash A\to C$ 4）$\to$引入

6）$((A\vee B)\to C)\vdash B\to C$ 同理可得

7）$((A\vee B)\to C)\vdash(A\to C)\wedge(B\to C)$ 5）6）$\wedge$引入

再证$A\to C)\wedge(B\to C)\to((A\vee B)\to C)$

只需证：$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B\vdash C$

1）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B;A\vdash A$ 公理

2）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B;A\vdash A\to C$ 公理+$\wedge$消除

3）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B;A\vdash C$ 1）2）$\to$消去

4）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B;B\vdash C$ 同理可得

5）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B\vdash A\vee B$ 公理

6）$A\to C)\wedge(B\to C),A\vee B\vdash C$ 3）4）5）$\vee$消除

//

(5)

先证$\vdash\neg(A\to B)\to A\wedge\neg B$

1）$\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg A\to(A\to B)$ PC 已证定理

2） $\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg A$ 公理

3）$\neg(A\to B),\neg A\vdash A\to B$ 1）2） $\to$消除

4）$\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg(A\to B)$ 公理

5) $\neg(A\to B)\vdash\neg\neg A$ 3)4) $\neg$引入

6) $\neg(A\to B)\vdash A$ 5) $\neg\neg$消除

7) $\neg(A\to B),B\vdash B\to(A\to B)$ ND 中已证定理

8) $\neg(A\to B),B\vdash B$ 公理

9) $\neg(A\to B),B\vdash A\to B$ 7)8) $\to$消除

10) $\neg(A\to B),B\vdash\neg(A\to B)$ 公理

11) $\neg(A\to B)\vdash\neg B$ 9)10) $\neg$引入

12) $\neg(A\to B)\vdash A\wedge\neg B$ 6)11) $\wedge$引入

13) $\vdash\neg(A\to B)\to A\wedge\neg B$ 12) $\to$引入

再证：$\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$

1) $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\wedge\neg B$ 公理

2) $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A$ 1) $\wedge$消除

3) $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\to B$ 公理

4) $A\wedge\neg B,A\to B\vdash B$ 2)3) $\to$消除

5) $A\wedge\neg B,A\to B\vdash\neg B$ 1) $\wedge$消除

6) $A\wedge\neg B\vdash\neg(A\to B)$ 4)5) $\neg$引入

7) $\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$ 6) $\to$引入

//

(6)

1) $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A$ 公理

2) $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A\vee C$ 1) $\vee$引入

3) $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash C$ 公理

4) $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash A\vee C$ 3) $\vee$引入

5） $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash B$ 公理

6) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash \neg B$ 公理

7) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash A \vee C$ 5)6) $\neg$ 消除

8) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ 公理

9) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash \neg B \vee C$ 8） $\wedge$ 消除

10) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$ 4)7)9） $\vee$ 消除

11) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$ 8） $\wedge$ 消除

12) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$ 2)10)11） $\vee$ 消除

13） $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$

//
(7)

先证：$\vdash (A \wedge B) \to A \wedge (\neg A \vee B)$

1) $A \wedge B \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

2) $A \wedge B \vdash B$ 公理+$\wedge$消除

3) $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$ 2) $\vee$引入

4) $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ 1)3) $\wedge$引入

再证：$\vdash A \wedge (\neg A \vee B) \to (A \wedge B)$

1) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

2) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$ 公理+$\wedge$消除

3) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$ 公理

4) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$ 2)3) $\neg$ 消除

5) $A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$

6) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$ 公理+$\wedge$消除

7) $A\wedge(\neg A\vee B)|-B$ 4)5)6) $\vee$消除

8) $A\wedge(\neg A\vee B)|-A\wedge B$ 1)7) $\wedge$引入

//////////////////////////////////////
（8）

先证$|-B\rightarrow((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)$

只需证：$B,A\leftrightarrow B|-A$及$B,A|-A\leftrightarrow B$

1） $B,A\leftrightarrow B|-B\rightarrow A$ 公理+$\leftrightarrow$消除

2） $B,A\leftrightarrow B|-B$ 公理

3） $B,A\leftrightarrow B|-A$ 1）2） $\rightarrow$消除

4） $B,A|-B\rightarrow(A\rightarrow B)$ 已证定理

5） $B,A|-B$ 公理

6） $B,A|-A\rightarrow B$ 4）5） $\rightarrow$消除

7） $B,A|-B\rightarrow A$ 同理 6）

8） $B,A|-A\leftrightarrow B$ 6）7） $\leftrightarrow$引入

再证$|-((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\rightarrow B$

1） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A$ 公理

2） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\rightarrow(A\leftrightarrow B)$ 公理+$\leftrightarrow$消除

3） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\leftrightarrow B$ 1）2） $\rightarrow$消除

4） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-A\rightarrow B$ 3） $\leftrightarrow$消除

5） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A|-B$ 1）4） $\rightarrow$消除

6） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ 定理

7） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-\neg A$ 公理

8） $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B|-A\rightarrow B$ 6）7） $\rightarrow$消除

9）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash\neg B\to(B\to A)$ 定理

10）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash\neg B$ 公理

11）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash B\to A$ 9）10）$\to$消除

12）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash A\leftrightarrow B$ 8）11）$\leftrightarrow$引入

13）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash(A\leftrightarrow B)\to A$ 公理及$\leftrightarrow$消除

14）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash A$ 12）13）$\to$消除

15）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash\neg A$ 公理

16）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A\vdash\neg\neg B$ 14）15）$\neg$引入

17）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A\vdash B$ $\neg\neg$消除

18）$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A\vdash B$ 5）17）假设消除

19）$\vdash((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\to B$ 18）$\to$引入