一、填空题（每小题 2 分，共 8 小题，满分 16 分）

1、已知函数$z=f(x,y)$连续且满足$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{f(x,y)-x+2y+2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t,0)-f(1,2t)}{t}=$____________.

2、曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方程为____________.

3、若Γ为球面$x^2+y^2+z^2=3$与平面$y=x$的交线，则$\oint_{\Gamma}\left(\sqrt{2y^2+z^2}+3zx\right)\mathrm{d}s=$____________.

4、方程$y'''-y'=0$满足条件$y|_{x=0}=3$，$y'|_{x=0}=-1$，$y''|_{x=0}=1$的特解为____________.

5、设$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ f)=$____________.

6、设函数$f(x,y)$在区域D: $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$上具有连续的二阶偏导数，$C$为顺时针椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，则$\oint_C[-3y+f_x'(x,y)]\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y=$____________.

7、已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处条件收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛半径为____________.

8、设$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，则$S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$____________.

二、（8 分）已知 $f_n(x)=\dfrac{e^x x^{n+2}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和函数.

三、（8 分）计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x$.

四、（8 分）设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看为逆时针方向，求曲线积分$\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$.

五、（8 分）设$u=u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=15(x^2+y^2+z^2)$. 又设$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=2z$的外侧，计算积分

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

六、（6 分）已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，条件C: $x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在满足条件C下的最大方向导数.

七、（6 分）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均为正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.