哈工大 2009 年 秋季学期

集合论与图论试题

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 90 分-参考答案

（计算机科学与技术学院 08 级）

一、填空（本题满分 20 分，每空各 1 分）

1．设 A,B 为集合，若 $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$，则 B 等于什么？　（ $B=\phi$ ）

2．设 $f:X\to Y, A\subseteq X$，则 $f^{-1}(f(A))$ 与 A 有何关系？　（ $f^{-1}(f(A))\supseteq A$ ）

3．给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价的关系 R，此关系 R 能产生划分 $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$。　（ $\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$ ）

4．设 R,I,N 分别表示实数，整数，自然数集（包括 0），定义映射 f_1,f_2,f_3，试确定它们的性质（单射、满射、双射）。

（1）$f_1:R\to R, f_1(x)=2^x$；　（ f_1 是单射 ）

（2）$f_2:I\to N, f_2(x)=|x|$ ；　（ f_2 是满射 ）

（3）$f_3:R\to R, f_3(x)=x+2$。　（ f_3 是双射 ）

5．在集合 $A=\{1,2,\cdots,11,12\}$ 上定义的整除关系“$|$” 是 A 上的偏序关系，则极大元有几个？　（ 6 个 ）

6．设 X 是一个集合，$|X|$＝n，求 X 上对称的二元关系有多少？（ $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ ）

7．设 R 是集合 X 上的一个二元关系，则

（1）R 是传递的充分必要条件是什么？　（ $R^2\subseteq R$ ）

（2）R 是对称的充分必要条件是什么？　（ $R=R^{-1}$ ）

8．设 G 是有 p 个顶点的 $K-$正则偶图，则 p 至少是多少？　（ $p\geq 2K$ ）

9．有 n 个药箱，若每两个药箱里有一种相同的药，而每种药恰好放在两个药箱中，则

（1）每个药箱里有多少种药？　　　　　　　　　　（ $n-1$ ）

（2）n 个药箱里共有多少种药？　　　　　　　　（ $n(n-1)/2$ ）

10．设 G 是无向图，有 12 条边，6 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，则 G 至少有多少个顶点？　　　　　　（ 9 ）

11．设 T 是有 p $(p \geq 3)$ 个顶点的无向树且 T 的最大度为 $\Delta(T)$，则

（1） $\Delta(T)$ 的范围为多少？　　　　　　　　（ $2 \leq \Delta(T) \leq p-1$ ）

（2）若 $\Delta(T)=2$，则 T 中最长路的长度为多少？　　　　（ $p-1$ ）

12．设 G 是有 8 个顶点的极大平面图，则 G 的面数 f 为多少？　（ 12 ）

13．设 G 是 (p,q) 图，若 $q<p-1$，则 G 的顶点连通度 $k(G)$ 为多少？（ 0 ）

14．设 T 为任一棵正则二元树，q 为边数，$t(t \geq 2)$ 为树叶数，则 q 等于什么？

（ $q=2(t-1)$ ）

15．设 p,q 为正整数，则 p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为欧拉图？　　　　（ p,q 为偶数）

二、简答下列各题（本题满分 10 分）

1．设 A,B,C 是三个任意集合，且 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$，则 A 与 C 应满足什么关系？说明理由。（3 分）

解：$C \subseteq A$。

两边同并上 A 有：$A \cup ((A \cap B) \cup C) = A \cup [A \cap (B \cup C)] = A$，

$[A \cup (A \cap B)] \cup C = A \cup C = A$；即 $C \subseteq A$。

2．设 R 为 X 上的二元关系，若 $R \neq \phi$ 且 R 是反自反的和传递的，则 R 是

反对称的吗？说明理由。（3 分）

证：若 R 不是反对称的，则 $\exists x,y\in X$,使得(x, y), (y, x)∈R, 由 R 的传递性有：

(x, x)∈R，与 R 是反自反的矛盾。于是 R 是反对称的二元关系。

3．设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g：$N\to N$，使得 $f\circ g=I_N$，

但 $g\circ f\neq I_N$。（4 分）

解： $fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$，故 f 是满射，但 f 不是单射。于是令：

$f:N\to N, f(1)=1, f(n)=n-1, n\geq 2$，$g:N\to N,\forall n\in N, g(n)=n+1$，则

$fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$。

三、简答下列各题（本题满分 15 分）

1．何谓强连通有向图？何谓有向图的强支？（2 分）

解：设 D＝（V,A）是有向图，若 $\forall u,v\in V$，u 与 v 互达，则称 D 是强连通的有向图；有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个强支。

2．至少要删除多少条边，才能使 $K_p(p>2)$ 不连通且其中有一个连通分支恰有 k

个顶点 $(0<k<p)$？（3 分）

证：要使删除边后的图边数最多，则删除的边最少。则至少应该删除的边数为：

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}-\frac{(p-k)(p-k-1)}{2}=k(p-k)。$$

3．具有奇数顶点的偶图是否是哈密顿图？说明理由。（3 分）

证：设 G 是一个具有奇数顶点的偶图，则 G 的顶点集 V 有一个二划分，

即 $V=\{V_2,V_2\}$ 且有 $|V_1|\neq|V_2|$。

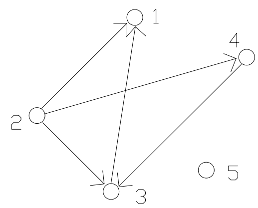
不妨设 $|V_1|<|V_2|$，则有 $W(G-V_1)=|V_2|>|V_1|$。

由哈密顿图的必要条件可知：G 不是哈密顿图。

4．设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，如图所示。写出有向图 D 邻接矩阵、可达矩阵

以及顶点 2 到 4 长度为 2 的有向通道的条数。（3 分）

解：(1) $\begin{pmatrix} 00000 \\ 10110 \\ 10000 \\ 00100 \\ 00000 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 10000 \\ 11110 \\ 10100 \\ 10110 \\ 00001 \end{pmatrix}$；0。



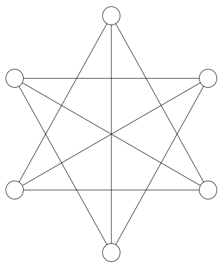
5．设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，每个顶点的度为 3。则（4 分）

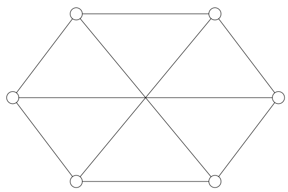
（1）若 $q=3p-6$，则 G 在同构意义下是否唯一？

（2）若 $p=6$，则 G 在同构的意义下是否唯一？说明理由。

解：（1） $p=4,q=6$， K_4 唯一。

（2） $p=6$， $q=9$， G 不唯一。如图所示。





四、证明下列各题（本题满分 25 分）

1．设 A,B,C,D 都是非空集合，若 $A\times B=C\times D$，证明： $A=C$，$B=D$。（5 分）

证：因为 A,B,C,D 非空，所以 $\forall x\in A,y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=C\times D$，即

$x\in C,y\in D$。因此 $A\subseteq C,B\subseteq D$。

同理 $C\subseteq A,D\subseteq B$。由集合相等的定义有： $A=C$，$B=D$。

2．设 $f:X\to Y$，证明： f 是满射 $\Leftrightarrow \forall E\in 2^Y, f(f^{-1}(E))=E$。（5 分）

证明：$\Rightarrow \forall y\in f(f^{-1}(E))$，则 $\exists x\in f^{-1}(E)$，使得 $f(x)=y$，于是， $y=f(x)\in E$，所以

$f(f^{-1}(E))\subseteq E$。

反过来，$\forall y \in E$，因为 f 是满射，故必有 $x \in f^{-1}(E)$，使得 $f(x)=y$。又 $x \in f^{-1}(E)$，

故 $y \in f(f^{-1}(E))$，所以 $E \subseteq f(f^{-1}(E))$。

因此 $f(f^{-1}(E))=E$。

$\Leftarrow$假设 f 不是满射，则 $\exists y_0 \in Y$，使得 $\forall x \in X$，$f(x) \neq y$。于是令 $E=\{y_0\} \in 2^Y$，

有 $f(f^{-1}(E))=f(f^{-1}(\{y_0\}))=f(\phi)=\phi$，由题意得 $\phi=E=\{y_0\}$，矛盾。

故 f 一定为满射。

3．证明：全体有理数之集 Q 是可数集。（5 分）

证：因为 $Q=Q_+ \bigcup Q_- \bigcup \{0\}$。显然，$Q_+ \sim Q_-$。因此只须证明 Q_+ 是可数集即可。

我们知道，每个正有理数均可写成 p/q 的形式，其中 p 与 q 为自然数。于是，

$\forall q \in N$，令 $A_q=\{\frac{p}{q} \mid p \in N\}$，则 A_q 是可数集，并且 $Q_+=\bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$。由定理可知，

Q_+ 是可数集。因此，Q 是可数集。

4．设 R,S 是集合 X 上的等价关系，且 $R \circ S=S \circ R$，则（10 分）

（1）证明：$R \circ S$ 是 X 上的等价关系；

（2）证明：$(R \bigcup S)^+=R \circ S$。

证：（1）由 R,S 是等价关系得到 $R \circ S$ 自反的；

又由 $(R \circ S)^{-1}=S^{-1} \circ R^{-1}=S \circ R=R \circ S$，故 $R \circ S$ 是对称的；

而 $(R \circ S)^2=(R \circ S) \circ (R \circ S)=R \circ (S \circ R) \circ S=R \circ (R \circ S) \circ S=R^2 S^2 \subseteq R \circ S$。

从而 $R \circ S$ 是传递的，因此，$R \circ S$ 是等价关系。

（2）因为 $R \circ S$ 是 X 上的等价关系，所以 $R \circ S$ 是 X 上的传递关系；

又 $\forall (x,y) \in R \bigcup S$，有 $(x,y) \in R$ 或 $(x,y) \in S$。

若 $(x,y) \in R$，因为 $(y,y) \in S$，所以 $(x,y) \in R \circ S$；

若$(x,y)\in S$，因为$(x,x)\in R$，所以$(x,y)\in R\circ S$。

两种情况下都有$(x,y)\in R\circ S$，故$R\bigcup S\subseteq R\circ S$。

对于X上的任一等价关系R''且$R\bigcup S\subseteq R''$，有

$\forall(x,y)\in R\circ S$，$\exists z\in X$，使得$(x,z)\in R$或$(z,y)\in S$。

若$(x,z)\in R$，有$(x,z)\in R\bigcup S\subseteq R''$；

若$(z,y)\in S$，有$(z,y)\in R\bigcup S\subseteq R''$。

由R''的传递性，有$(x,y)\in R''$，故$R\circ S\subseteq R''$。

因此$R\circ S$是包含$R\bigcup S$的最小传递关系。

从而$(R\bigcup S)^{+}=R\circ S$。

五、证明下列各题（本题满分 20 分，每小题各 5 分）

1．证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

证：设T是一棵具有两个顶点度数为 1 的(p,q)树，则

$$q=p-1\text{且}\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)\text{。}$$

又T除两个顶点度数为 1 外，其他顶点度均大于等于 2，故

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2+\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-1)\text{，即}$$

$$\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-2)\text{。}$$

因此$p-2$个分支点的度数都恰为 2，即T为一条通路。

2．设G是一个(p,q)图，$p\geq 3$，证明：若$q\geq p$，则G中必有圈。

证：（1）设G是连通的，若G无圈，则G是树，因此$q=p-1$与$q\geq p$矛盾。

故G中必有圈。

（2）设G不连通，则G中有$k(k\geq 2)$个分支，$G_1,G_2,\cdots,G_k$。

若G中无圈，则G的各个分支$G_i(i=1,2,\cdots,k)$中也无圈，于是各个分支都是树，所以有：$q_i=p_i-1$，$i=1,2,\cdots,k$。相加得：

$q=p-k(k\geq 2)$与$q\geq p$矛盾，故 G 中必有圈。

综上所述，图G中必有圈。

3．设G是一个(p,q)图，且$q>(p-1)(p-2)/2$，证明：G是连通图。

证：用反证法。假设图G是不连通的，则图G至少存在两个连通分支，一个支为G_1是(p_1,q_1)图，另外一些支构成的子图为G_2是(p_2,q_2)。而G的最大可能边数$q=q_1+q_2\leq p_1(p_1-1)/2+p_2(p_2-1)/2$，其中$1\leq p_1\leq p-1$，$1\leq p_2\leq p-1$，所以$q\leq(p-1)(p-2)/2$，与题设矛盾。所以$G$是连通的。

4．设G是边数$q<30$的平面图，证明：G中存在顶点v，使得$\deg v\leq 4$。

证：不妨设G是连通的，否则因为它的每个连通分支的边数都应小于 30，因此可对它的每个连通分支进行讨论，所以可设G是连通的。

若G中无圈，则G必为树，结论显然成立；

若G中有圈，因而G中每个面至少由 3 条边围成，于是

$$q\leq 3p-6 \qquad (1)$$

假设G中所有顶点的度数均大于等于 5，由握手定理可知：

$$2q=\sum_{i=1}^{p}\deg v_i\geq 5p\text{，即 } p\leq 2q/5 \qquad (2)$$

由（1），（2）得：$q\geq 30$。

这与题设$q<30$矛盾，故一定存在顶点v，使得$\deg v\leq 4$。