

2020 年春季学期算法设计与分析期末考试试题 (C)

1. (5 分) 欧几里德算法利用算术基本定理 (任何一个正整数去除另一个正整数, 必然产生商和余数, 且余数大于等于 0 而严格小于商) 求解正整数 m, n 的最大公因数 $\gcd(m, n)$ 。用循环不变量方法证明欧几里德算法的正确性;

```
GCD(A,B)
1   $r = a \% b$ 
2  while  $r \neq 0$ 
3      do
4           $a = b$ 
5           $b = r$ 
6           $r = a \% b$ 
7  return  $b$ 
```

2. (5 分) 证明: $\log n! = \Theta(n \log n)$
3. (5 分) 求解递归方程, 假设 $n \leq 3$ 时 $T(n)$ 为常数, $T(n) = T(n^{1/2}) + \Theta(\lg \lg n)$
4. (15 分) 给定 n 个元素 x_1, x_2, \dots, x_n , 每个元素具有正权重 w_1, w_2, \dots, w_n , 且满足 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, “权重中位数”为满足如下条件的元素:

$$\sum_{x_i < x_k} w_i < \frac{1}{2}$$

且

$$\sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2}$$

- (a) 证明当 $w_i = 1/n$ 时, x_1, x_2, \dots, x_n 的中位数是“权重中位数”;
- (b) 使用排序方法, 设计求解“权重中位数”最坏时间复杂度为 $O(n \lg n)$ 的算法;
- (c) 调用线性查找中位数的算法, 设计出求解“权重中位数”的分治算法, 要求最坏时间复杂度为 $\Theta(n)$.
5. (12 分) 如果无向图 $G = (V, E)$ 的节点集合分割成两个不相交的节点集 A 和 B , 并使图中每一条边的两个节点分属于 A 集合和 B 集合, 则 G 称为二分图。对 V 中每个节点编号为 $0, 1, 2, \dots, |V|-1$, 并用邻接表 `graph` 存储图结构。其中 `graph[i]` 为图中与节点 i 相连的所有节点编号。给定无向图 G 的邻接表, 试设计算法判定 G 是否为二分图, 输出 `True` 或 `False`。给出问题解决思路、算法伪代码并分析算法时间复杂度。

6. (15 分) 设数组 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, 其中每个元素 a_i 均互不相同。给定目标值 T , 从 A 中取出若干元素 (可以重复取出同一元素) 使得这些元素的和为 T 。给定目标值 T , 试设计动态规划算法求解可以达成上述条件需取的最少元素数目, 要求写出伪代码并分析该算法的时间复杂度。

7. (15 分) 朝阳同学准备每天吃苹果以充分保证摄入的维生素量。他想要在苹果价格较低时购买大量苹果, 但苹果如果存放时间过长会腐烂变质。假设苹果购入后的保质期为 d 天, 他在第 i 天购入的苹果, 必须在第 j 天吃完, 其中 $i \leq j < i + d$ 。他每天只吃一个苹果, 因此不能在其最低价时无节制地购买苹果。

为了控制花销, 他记录了过去 n 天的苹果价格, 记为 C_1, C_2, \dots, C_n , 其中 C_i 为第 i 天苹果的价格。他希望计算出过去 n 天购买苹果的最低价格, 来和自己的实际花销对比。

给定输入 $d, n, C_1, C_2, \dots, C_n$, 请设计算法输出以最低价格购买苹果的采购方式 B_1, B_2, \dots, B_n , 其中 B_i 表示第 i 天购买的苹果数量。要求写出伪代码并分析该算法的时间复杂度。

8. (8 分) 设计数据结构来支持整数动态多重集合 S 上的两个操作: $\text{INSERT}(S, x)$ 将 x 插入到 S 中, $\text{DELETE-LARGER-HALF}(S)$ 删除 S 中最大的 $\text{ceil}(|S|/2)$ 个元素。请说明如何实现该数据结构, 使任意 m 个操作序列在 $O(m)$ 时间内运行, 并且在 $O(|S|)$ 时间内输出 S 的元素。

9. (10 分) 给定长度为 n 的字符串 S , 希望在 S 中找到具有下述特点的前缀 pre :

1) pre 的长度为 L , $2 \leq L \leq n$;

2) 存在字符串 S' , 可将 pre 表示为 k 个 S' 拼接的形式, $k > 1$ 。

请设计算法输出所有满足上述条件的前缀对应的长度 L 和 k 值。如果同一个字符串 S' 存在多个 k 值, 取其中最大值。

例如: 字符串 S 为 "aaa", 则满足条件的前缀有 "aa" 和 "aaa"。"aa" 的 L 值为 2, 可以由 $k = 2$ 个 "a" 拼接而成; "aaa" 的 L 值为 3, 可以由 $k = 3$ 个 "a" 拼接而成。此时算法输出 $L = 3, k = 3$ 。(需要明确说明输出最大值的情况)

10. (10 分) 对于如图所示的八数码难题,

1	3	4
5		2
7	6	8

初始状态

1	2	3
8		4
7	6	5

目标状态

试设计算法搜索达成目标状态的转换方式, 说明算法思想并画出搜索树。