哈工大 2011 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院、英才学院 10 级）

一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1.设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ **，若** $g\circ f$ **是单射，则** f **与** g **哪个是单射？（** f **）**

2.集合 $A=\{a,b,c,d\}$ **，** A **上的关系** $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ **，则** R^+ **等于什么？**

（ $R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a)(b,c),(c,a),(c,b)\}$ **）**

3 .设 X **是集合，**$|X|$ **= n ,则反自反或对称的关系有多少？(** $2^{n^2-n}+2^{(n^2+n)/2-2^{(n^2-n)/2}}$ **)**

4. 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ **是集合 A 的划分，若** $A_i\cap B\neq\phi$ **，** $1\le i\le n$ **，则** $A\cap B$ **的划分是什么？** **（** $A_1\cap B, A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B$ **）**

5.集合 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ **上的整除关系“|”是** A **上偏序关系，画出 Hasse 图。**

（ ）

6.什么是无穷集合？

（凡能与自身真子集对等的集合都称为无穷集合 ）

7.设 G **为** p **阶简单无向图，** $p>2$ **且** p **为奇数，** G **和** G **的补图** G^c **中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？ （ 一定）**

8.已知 p **阶简单无向图** G **中有** q **条边，各顶点的度数均为 3，又** $2p=q+3$ **，则图** G **在同构的意义下是否唯一？ （ 不唯一）**

9. 若 G **是一个** (p,q) **连通图，则** G **至少有多少个圈？ （q-p+1 ）**

10. 设T是一个有n_0个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为n_2，则n_0与n_2

满足什么关系？ （n0=n2+1 ）

二、简答下列问题(本题满分 30 分，1-6 小题 3 分，7-9 小题 4 分)

1．设A,B是集合，则$A\Delta B = B$充分必要条件是什么？说明理由。（3 分）

答案： $A = \Phi$。

2．设$f: X \to Y, C, D \subseteq Y$，则$f^{-1}(C\Delta D)$与$f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$满足什么关系？说明理由。

解：相等。 $f^{-1}(C\Delta D) = f^{-1}((C \setminus D)\bigcup(D \setminus C)) = f^{-1}(C \setminus D)\bigcup f^{-1}(D \setminus C) =$

$= (f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D))\bigcup(f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)) = f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$。

3. 写出无向树的特征性质（至少 5 个）。（3 分）

（1）G 是树；
（2）G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；
（3）G 是连通的且 p=q+1；
（4）G 中无回路且 p=q+1；
（5）G 中无回路且任加一条边，得到有唯一回路的图；
（6）G 是连通的，并且若 p≥3，则 G 不是 K_p。又若 G 的任两个不邻接的顶点间加一条边，则得到一个恰有唯一的一个回路的图；
（7）G 是极小连通图。

4．设G是一个(p,q)图，若$q \ge p-1$，则$k(G) \le [2q/p]$与$k(G) \le [2p/q]$哪个正确？

说明理由。（3 分）

答案：$k(G) \le [2q/p]$。

5.K_5是否是可平面图？说明理由。（3 分）

解：K_5不是平面图。

若K_5是可平面图，则由欧拉公式成立有，5－10＋f＝2，即 f ＝7。

而每个面至少 3 条边，所以 3f≤2q ，从而 21≤20，矛盾。因此，K_5 不是可平面图。

6. 已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0111\\1010\\0001\\0000\end{pmatrix}$，则（3 分）

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R ；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

（1） **（2）** $R=\begin{pmatrix}1111\\1111\\0011\\0001\end{pmatrix}$ **（3）** $(A^k)_{ij}$ **。**

7．每个自补图有多少个顶点？说明理由。（4 分）

解：每个自补图都有 $4n$或$4n+1$个顶点

因为每个自补图 G 的对应的完全图的边数必为偶数，即 $q=p(p-1)/2$ 为偶数。而当 $p=1,2,3$时，图 G 无自补图，只有 $p\geq 4$时，图 G 才有自补图。于是 p 可写成如下形式：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，其中 n 为正整数；代入 $q=p(p-1)/2$ 中，只有 $4n,4n+1$才能使 q 为偶数，故每个自补图必有 $4n$或$4n+1$个顶点。

8. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ ，试构造两个映射 f 和 g ：$N\to N$ ，使得 $gf=I_N$ 但 $fg\neq I_N$ 。（4 分）

解： $f:N\to N,\forall n\in N,f(n)=n+1;\quad g:N\to N,\forall n\in N,g(1)=1,g(n)=n-1,n\geq 2$ **。**

9．设 $f:A\to B,H\subseteq A$ ，令 H 在 A 中的余集 $H^C=A\setminus H$ ，则（4 分）

（1）当 f 是单射时，给出 $f(H^C)$ 和 $(f(H))^C$ 之间的关系，并给予证明。

（2）当 f 是满射时，给出 $f(H^C)$ 和 $(f(H))^C$ 之间的关系，并给予证明。

[（1）、（2）任选一种情况证明即可]

解：由定理知，$(f(H^c)) = f(A \backslash H) \supseteq f(A) \backslash f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c) \supseteq (f(H))^c$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c) \subseteq (f(H))^c$。

因为 $\forall y \in f(H^c)$，故存在 $x \in H^c$，使得 $y=f(x)$，从而 $x \notin H$；由 f 是单射，有 $f(x) \notin f(H)$ （否则存在 $x_1 \in H$，使 $f(x_1)=f(x)$ 矛盾），即 $y \in (f(H))^c$。于是 $f(H^c) \subseteq (f(H))^c$。

三、证明下列各题（本题满分 60 分，每小题各 6 分）

1．设 A,B 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $A \times B = B \times B$，则 $A=B$。

证：$\forall x \in A$，因为 $B \neq \varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y) \in A \times B$，因而 $(x,y) \in B \times B$，故 $x \in B$。从而 $A \subseteq B$。

反之，$\forall x \in B$，因为 $B \neq \varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y) \in B \times B$，因而 $(x,y) \in A \times B$，故 $x \in A$。从而 $B \subseteq A$。

于是 $A=B$。

2.设 $f: X \to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F))=F$。

证：$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x) \in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x=x_1$。即 $x \in F$，所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来，$\forall x \in F, f(x) \in f(F)$，从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$，所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}$，

于是 $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$，即 $\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$，矛盾。

因此，f 为单射。

3．设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：

R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$ ，则 $(b,c)\in R$ 。

证：$\Rightarrow$ R 是 A 上的等价关系。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，由 R 的对称性有：$(b,a)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，

由 R 的传递性有：$(b,c)\in R$。

$\Leftarrow$R 是自反的，故 $\forall a\in A$ 有 $(a,a)\in R$。

若 $(a,b)\in R$，由 $(a,a)\in R$ 有 $(b,a)\in R$，所以 R 是对称的。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的对称性有：

$(b,a)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，故由题意得 $(a,c)\in R$，所以 R 是传递。

因此，R 是 A 上的等价关系。

4. 设 R 是 A 上的二元关系，证明： R 是传递的 $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$ 。

$\Rightarrow \forall(a,c)\in R\circ R$，则 $\exists b\in A$，使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的传递性知：

$(a,c)\in R$，于是 $R\circ R\subseteq R$。

$\Leftarrow \forall(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，有 $(a,c)\in R\circ R\subseteq R$，故 R 是传递的。

5.令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ ，$S=\{f\,|\,f:N\to\{0,1\}\}$,利用康托对角线法证明 S 是不可数集。

证:假设从 N 到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列

$f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个函数 f_i 确定了一个 0, 1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$。构造序列

$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为

$f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。

6. 设 $G=(V,E)$ 是一个有 p 个顶点的图。若对 G 的任两个不邻接的顶点 u 和 v ，

有 $\deg u+\deg v\geq p-1$ ，证明：G 是连通的。

证:若G不连通，则G至少有两个支。设$G_1=(V_1,E_1)$是其中的一个支，其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1,$，则任意$\forall u\in V_1,v\in V_2,$，有

$$\deg u\le n_1-1,\deg v\le p-n_1-1 。$$

于是，$\deg u+\deg v\le(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

这与假设相矛盾，所以 G 是连通的。

7. 证明：完全图K_9中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿路。

证：在K_9中，$\forall v\in V,\deg v=8\ge p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路$C_1$；令$G_1$为$K_9$中删除$C_1$中全部边之后的图，则$G_1$中每个顶点的度均为$\deg v=6\ge p/2$，故$G_1$仍为哈密顿图，因而存在$G_1$中的哈密顿回路$C_2$，显然$C_1$与$C_2$无公共边。再设$G_2$为$G_1$中删除$C_2$中的全部边后所得图，则$G_2$每个顶点的度均为$\deg v=4$。又由定理可知$G_2$为半哈密顿图，因而$G_2$中存在哈密顿路。设$L$为$G_2$中的一条哈密顿路，显然$C_1,C_2,L$无公共边。

8. 设G是一棵树且Δ(G)$\ge k$，证明：G中至少有k个度为 1 的顶点。

证：设T中有p个顶点，s个树叶，则T中其余$p-s$个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于k。由握手定理可得：

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}deg(v_i)\ge 2(p-s-1)+k+s，有 s\ge k 。$$

所以T中至少有k个树叶 。

9. 证明：一个没有有向圈的有向图中至少有一个入度为零的顶点。

证：设 D=(V,A)是一个没有有向回路的有向图。考察D中任一条最长的有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v)≠0，则必有一个顶点 u 使得(u,v)∈A。于是，若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是D中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。若 u 在此最长路上，则 D 中有有向回路，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。

10. 设G是一个没有三角形的平面图，证明：G是 4-可着色的

证：（1）假设$\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 4$，则由握手定理有：$4p\le 2q$；由于G是一个没有

三角形的平面图，故$q \le 2p-4$，即$4p \le 4p-8$，矛盾。故假设不成立，即G中存在一个顶点v，使得$\deg(v) \le 3$。

(2) 对顶点p进行归纳。

当$p=1,2,3,4$时，显示成立。

假设当$p=k$时，G是 4-可着色的。

当$p=k+1$时，由于G是一个没有三角形的平面图，故由（1）可知：$\exists v \in V$，使得$\deg(v) \le 3$。于是$G-v=G_1$便是一个具有k个顶点没有三角形的平面图，由归纳假设，G_1是 4-可着色的。

由于$\deg(v) \le 3$，故在G中用不同于与v相邻接的那些顶点在G_1中着色时所用的颜色为v着色，G的其它顶点着色同G_1的 4-可着色，这就得到了G一个 4-可着色。