一、求公式$(p\to\neg r)\vee(\neg p\leftrightarrow q)$的主合取范式和主析取范式。（$10$分）
真值表如下：

p	q	r	$p\to\neg r$	$\neg p\leftrightarrow q$	$(p\to\neg r)\vee(\neg p\leftrightarrow q)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

主合取范式$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$
主析取范式$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$
二、分别用$'\uparrow'$和$'\downarrow'$等价表示公式$(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)$。（$10$分）
首先将公式化简

$$\begin{aligned}(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)&\iff\neg(p\wedge q)\vee(\neg q\wedge r)\\&\iff\neg p\vee\neg q\vee(\neg q\wedge r)\\&\iff\neg p\vee\neg q\\&\iff\neg(p\wedge q)\end{aligned}$$

用$'\uparrow'$表示

$$\begin{aligned}(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)&\iff\neg(p\wedge q)\\&\iff p\uparrow q\end{aligned}$$

用$'\downarrow'$表示

$$\begin{aligned}(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)&\iff\neg p\vee\neg q\\&\iff(p\downarrow p)\vee(q\downarrow q)\\&\iff((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q))\downarrow((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q))\end{aligned}$$

三、能否构造解释和指派使得公式$A\to\forall vA$为假？请举例说明。（5分）
设A中变元为$v,$论域$D=\{0,1\},\bar{v}=1,\bar{A}(0)=F,\bar{A}(1)=T$
在此解释下，可得$\bar{A}(\bar{v})=T,\forall v\bar{A}=F$
此时，公式$\bar{A}(\bar{v})\to\forall v\bar{A}(v)=T\to F=F$
四、判定下列逻辑蕴涵和逻辑等价是否成立。其中A,B,C,D为任意命题公式。（10分）
$(1)\neg(C\wedge D)\to(A\to B),A,\neg D\Rightarrow B$
假设不成立，那么一定存在一个指派使得左侧公式全真，右侧公式全假
那么一定有$A=T,D=F,B=F$
此时$A\to B=T\to F=F,$若想使$\neg(C\wedge D)\to(A\to B)$为真
则$C\wedge D=T,$即$D=T,$与上述条件中$D=F$矛盾
故通过反证法得，没有指派能够弄假右侧的同时弄真左侧，即所有能够弄真左侧的指派都能弄真右侧，此逻辑蕴含式成立
$(2)(A\to C)\wedge(B\to C)\Leftrightarrow\neg(A\to\neg B)\to C$
真值表如下：

A	B	C	$A\to C$	$B\to C$	$(A\to C)\wedge(B\to C)$	$A\to\neg B$	$\neg(A\to\neg B)\to C$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

由真值表可得，存在如$A=F,B=T,C=F$弄假左侧，弄真右侧的指派，故逻辑等价式不成立

五、在命题演算系统PC中证明：（20分）

(1) $\vdash \neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$

1.$B\to(A\to B)$　$A1$

2.$\neg(A\to B)\to\neg B$　1逆否

3.$\neg B\to(B\to(A\to C))$　定理3.1.3

4.$\neg(A\to B)\to(B\to(A\to C))$　2, 3三段论

5.$(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$　4前件互换定理

6.$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$　4, 5三段论

(2) $\vdash((A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))\to(\neg B\to C)$

1.$\neg B\to(A\to\neg B)$　$A1$

2.$\neg(A\to\neg B)\to B$　1逆否

3.$B\to(\neg B\to C)$　定理3.1.3

4.$\neg(A\to\neg B)\to(\neg B\to C)$　2, 3三段论

5.$\neg C\to(A\to\neg C)$　$A1$

6.$\neg(A\to\neg C)\to C$　5逆否

7.$C\to(\neg B\to C)$　$A1$

8.$\neg(A\to\neg C)\to(\neg B\to C)$　6, 7三段论

9.$(\neg(A\to\neg B)\to(\neg B\to C))\to((\neg(A\to\neg C)\to(\neg B\to C))\to(((A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))\to(\neg B\to C)))$　定理3.1.14

10.$((A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))\to(\neg B\to C)$　4, 8, 9r_{mp}

(3) $\vdash(C\to\neg(A\to B))\to((C\to\neg A)\to\neg C)$

1.$\neg C\to((C\to\neg A)\to\neg C)$　$A1$

2.$\neg A\to(A\to\neg B)$　定理3.1.3

3.$\neg(A\to B)\to A$　2逆否

4.$(C\to\neg A)\to(A\to\neg C)$　逆否

5.$A\to((C\to\neg A)\to\neg C)$　4, 前件互换定理r_{mp}

6.$\neg(A\to\neg B)\to((C\to\neg A)\to\neg C)$　3, 5三段论

7.$(\neg C\to((C\to\neg A)\to\neg C))\to((\neg(A\to\neg B)\to((C\to\neg A)\to\neg C))\to((C\to\neg(A\to B))\to((C\to\neg A)\to\neg C)))$　定理3.1.14

8.$(C\to\neg(A\to B))\to((C\to\neg A)\to\neg C)$　1, 6, 7r_{mp}

(4) $\vdash((\neg A\to A)\to\neg B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$

1.$A\to(\neg A\to A)$　$A1$

2.$\neg(\neg A\to A)\to\neg A$　1逆否

3.$(\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to\neg B)$　定理3.1.1

4.$\neg A\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$　3, 前件互换定理r_{mp}

5.$\neg(\neg A\to A)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$　2, 4三段论

6.$\neg B\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$　$A1$

7.$(\neg(\neg A\to A)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B))\to((\neg B\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B))\to(((\neg A\to A)\to\neg B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)))$　定理3.1.14

8.$((\neg A\to A)\to\neg B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$　5, 6, 7r_{mp}

六、在ND中证明：（10分）

(1) $\vdash((\neg A\to B)\to\neg A)\to\neg A$

只需证$(\neg A\to B)\to\neg A\vdash\neg A$　演绎定理

1.$(\neg A\to B)\to\neg A; A;\neg A\vdash A$　公理

2.$(\neg A\to B)\to\neg A; A;\neg A\vdash\neg A$　公理

3.$(\neg A\to B)\to\neg A; A;\neg A\vdash B$　1, 2¬消除

4.$(\neg A\to B)\to\neg A; A\vdash\neg A\to B$　3 →引入

5.$(\neg A\to B)\to\neg A; A\vdash(\neg A\to B)\to\neg A$　公理

6.$(\neg A\to B)\to\neg A; A\vdash\neg A$　4, 5 →消除

7.$(\neg A\to B)\to\neg A; A\vdash A$

8.$(\neg A\to B)\to\neg A\vdash\neg A$　6, 7¬引入

(2) $\vdash(A\vee B)\wedge(A\vee C)\to A\vee(B\wedge C)$

只需证$(A\vee B)\wedge(A\vee C)\vdash A\vee(B\wedge C)$　演绎定理

1.$(A\vee B)\wedge(A\vee C); A\vdash A$　公理

2.$(A\vee B)\wedge(A\vee C); A\vdash A\vee(B\wedge C)$　1 ∨引入

3.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A\vdash(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　公理

4.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A\vdash A\vee B$　3 ∧消除

5.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash\neg A$　公理

6.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash A$　公理

7.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash B$　5, 6¬消除

8.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; B\vdash B$　公理

9.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A\vdash B$　4, 7, 8 ∨消除

10.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A\vdash A\vee C$　3 ∧消除

11.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash\neg A$　公理

12.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash A$　公理

13.$(A\vee B)\wedge(A\vee C);\neg A; A\vdash C$　11, 12¬消除

14.$(A \vee B) \wedge (A \vee C); \neg A; C \vdash C$　公理

15.$(A \vee B) \wedge (A \vee C); \neg A \vdash C$　$10, 13, 14 \vee$消除

16.$(A \vee B) \wedge (A \vee C); \neg A \vdash B \wedge C$　$9, 16 \wedge$引入

17.$(A \vee B) \wedge (A \vee C); \neg A \vdash A \vee (B \wedge C)$　$16 \vee$引入

18.$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$　$2, 17 \neg$消除