哈工大 2012 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院 11 级）

一、填空（本题满分 10 分）

1. 求方程：$A\Delta X = B$ 的解。 ________________

2. 设 $X = \{1,2,\cdots,m\}$，$Y = \{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。________________

3. 给定集合 $S = \{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分为 $\{1,2\}$，$\{3\}$，$\{4,5\}$。 $R =$ ______________________________

4. 在 A Ì $\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系是偏序关系，则极大元是什么。

____

5. 什么是可数集合？____

6. 图 G 是欧拉图当且仅当图 G 是____

7. 若图 G 是自补图，则它所对应的完全图的边数一定是______________数。

8. 每棵树的中心含有多少个顶点？ ________________________________

9. 把平面分成 p 个区域，每两个区域都相邻，问 p 最大为多少？ __________

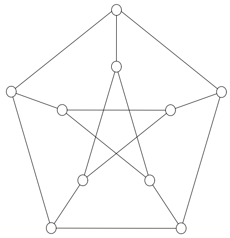
10. 若 $D = (V, A)$ 是单向连通的当且仅当 D 中有一条 ______________________

二、简答下列各题（本题满分 30 分）

1. 设 R 是复数集合 A 上的一个二元关系且满足 $xRy \Leftrightarrow x - y = a + bi$，$a,b$ 为非负整数，试确定 R 的性质。（自反、反自反、对称、反对称、传递）

2. 如图所示是彼德森图G，回答问题：

（1）图G是否是偶图？ （2）图G是否是平面图？（3）图G的色数是多少？



3.下列命题是否成立？若成立请证明之，若不成立请举反例。

(1) $(A\setminus B)\bigcup C = A\setminus(B\setminus C)$； (2) $A\bigcup(B\setminus C) = (A\bigcup B)\setminus C$；

4. 设$f: N\times N\to N, f((x,y)) = xy$。则

（1）说明f，g是否是单射、满射或双射？ （2）求$f(N\times\{1\}), f^{-1}(\{0\})$。

5.（1）根据你的理解给出二元关系R传递闭包R^+的定义；

（2）若R是集合A上的反对称关系，则R^+一定是反对称的吗？举例说明。

6. （下列两题任选一题）

（1）已知a,b,c,d,e,f,g 7 个人中，a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲汉语和日语；e会讲意大利语和德语；f会讲俄语、日语和法语；g会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

（2）今要将 6 个人分成 3 组（每组 2 个人）去完成 3 项任务，已知每个人至少与其余 5 个人中的 3 个人能相互合作，问：

(1)能否使得每组 2 个人都能相互合作？ (2)你能给出几种方案？

7. 设T是一个有n_0个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为n_2，则n_0和n_2有何关系？说明理由。

8. 设G是一个(p,q)图，若$q \ge p$，则G中一定有圈吗?说明理由。

三、证明下列各题（本题满分 60 分）

1. 设 A,B 是两个集合， $B \neq \varnothing$ ，试证：若 $A \times B = B \times A$ ，则 $A = B$ 。

2. 证明：在 52 个整数中，必有两个整数，使得这两个整数之和或差能被 100 整除。

3. 设 $f: X \to Y$ ，证明： f 是满射 $\Leftrightarrow \forall E \in 2^{Y}, f(f^{-1}(E)) = E$ 。

4. 任选一题

(1) 设 R 是集合 A 上的一个自反的和传递的关系；T 是 A 上的一个关系，使得 $(a,b)\in T \Leftrightarrow (a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$。证明：T 是 A 上的等价关系。

(2) 设 R,S 是 A 上的等价关系，证明：$R\bullet S$ 是等价关系 $\Leftrightarrow$ $R\bullet S = S\bullet R$。

5. 若 A 可数，证明：2^A 不可数。（利用康托对角线法）

6. 若 G 是一个恰有两个奇度顶点 u 和 v 的无向图，证明: G 连通 $\Leftrightarrow$ $G+uv$ 连通。

7. 任选一题

(1) 证明：任一非平凡树中至少有两个度为 1 的顶点。

(2) 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

8. 证明：若每个顶点的度数大于等于 3 时，则不存在有 7 条边的平面连通图。

9. 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10. 用数学归纳法证明:每个比赛图中必有有向哈密顿路。