

2015 年哈工大概率统计试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设 $P(A) + P(B) = 0.7$ ，且 A, B 只发生一个的概率为 0.5，则 A, B 都发生的概率为

_____ .

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，则随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度为

$$f_Y(y) =$$

_____ .

3. 设随机变量 X, Y 的相关系数为 0.5， $EX = EY = 0, EX^2 = EY^2 = 2$ ，则

$$E(X + Y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 生产一个零件所需时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，观察 25 个零件的生产时间得 $\bar{x} = 5.5$ 秒，样本标准差 $s = 1.73$ 秒，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为_____.

5. 设随机变量 X, Y 相互独立，且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布，则

$$P\{\max(X, Y) \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

注：可选用的部分数值： $t_{0.05}(24) = 1.7109$ ， $t_{0.025}(24) = 2.0639$ ， $t_{0.025}(25) = 2.0595$ ，

$$\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95.$$

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设 $0 < P(B) < 1$ ， $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$ ，则

(A) A, B 互不相容. (B) A, B 互为对立事件.

(C) A, B 相互独立. (D) A, B 不独立.

【 】

2. 下列函数可作为随机变量的分布函数的是

$$(A) F(x) = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty. \quad (B) F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$$(C) F(x) = e^{-x}, -\infty < x < \infty. \quad (D) F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x, -\infty < x < \infty.$$

【 】

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(1, 2^2)$ 的一个样本，其中 \bar{X} 为样本均值，则下列结论中正确的是

- (A) $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim \chi^2(n)$. (B) $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim F(n, 1)$.
 (C) $\frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. (D) $\frac{\bar{X} - 1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$. 【 】

4. 设随机变量 $X \sim U[0, 6]$, $Y \sim B(12, \frac{1}{4})$, 且 X, Y 相互独立, 则根据切比雪夫不等式有

$$P(X - 3 < Y < X + 3) \geq \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{5}{12}$. 【 】

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X} 与 S^2 分别为其样本均值和样本方差, 则下列结论正确的是

- (A) $2X_2 - X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$. (B) $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$.
 (C) $\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. (D) $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$. 【 】

三、(9分)某人外出可以乘坐飞机,火车,轮船,汽车四种交通工具,其概率依次为0.05,0.15,0.30,0.5,而乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为0.80,0.70,0.60,0.90,求:

(1) 该人如期到达的概率; (2) 已知该人误期到达, 求他是乘坐火车的概率。

四、(9分) 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{-\frac{x+y}{3}}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) (X, Y) 的边缘概率密度, 并问 X, Y 是否相互独立? 为什么?

(2) $Z = X + Y$ 的概率密度. $f_X(x), f_Y(y)$

五、(9分) 设随机向量 (X, Y) 服从区域 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ 上二维均匀分布,

$U = |X - Y|$, 求 (1) U 的概率密度 $f_U(u)$; (2) U 的期望 EU 和方差 DU .

六、(9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本。求:

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$; (2) 讨论 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 无偏性。

七、(4 分) 设某商店每月销售某种商品的数量服从参数为 6 的泊松分布, 问在月初要库存多少此种商品才能保证当月不脱销的概率为 0.99117? (泊松分布表见下图表)

$m \backslash \lambda$	4	5	6	7	8
11	0.00284	0.01370	0.04362	0.09852	0.018411
12	0.00092	0.00545	0.02009	0.05335	0.11192
13	0.00027	0.00202	0.00883	0.02700	0.06380

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

2015 年哈工大概率统计试题及答案

一、填空题：(15 分)

1. 0.1 2. $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ \frac{1}{y^2}, & y > 1 \end{cases}$ 3. 6

4. (4.786, 6.214). 5. $\frac{1}{9}$

二、选择题：(15 分)

1C 2B 3A 4D 5B

三、解：(1) 设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示乘坐飞机, 火车, 轮船, 汽车四种交通工具, B 表示如期到达事件。

利用全概率公式：

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i) = 0.05 \times 0.80 + 0.15 \times 0.7 + 0.3 \times 0.6 + 0.5 \times 0.9 = 0.775$$

5 分

(2) 利用 Bayes 公式：

$$P(A_2|\bar{B}) = \frac{P(A_2)P(\bar{B}|A_2)}{P(\bar{B})} = \frac{0.15 \times (1-0.7)}{1-0.775} = \frac{0.045}{0.225} = 0.2$$

4 分

四、解：(1) (1) 当 $x \geq 0$ 时, $f_X(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{x-y}{2}-\frac{y}{3}} dy = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$, 所以

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时 } f_Y(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{x-y}{2}-\frac{y}{3}} dx = \frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}}, \text{ 所以 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 与 Y 相互独立.

4 分

(2) 由于 X 与 Y 相互独立, 故可利用卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}} dx, & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{z}{3}} - e^{-\frac{z}{2}} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad 5 \text{ 分}$$

五、 解：（1）令 U 之 $d \cdot f$ $F(U)$

$$\forall u \in R, \quad F(U) = P(U \leq u) = P(|X - Y| \leq u)$$

$$\text{当 } U \leq 0 \text{ 时 } F(U) = 0 \quad U \geq 2 \text{ 时 } F(u) = 1$$

(X, Y) pdf 为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x, y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{当 } 0 < u < 2 \text{ 时}$$

$$F(u) = P(|X - Y| \leq u) = \frac{1}{4} [4 - (2 - u)^2]$$

$$\therefore f(u) = F'(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - u), & 0 < u < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad EU = \int_0^2 u \times \frac{1}{2}(2 - u) du = \frac{1}{2} [u^2 - \frac{1}{3}u^3] \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (4 - \frac{1}{3} \times 8) = \frac{2}{3} \quad 2 \text{ 分}$$

$$EU^2 = \int_0^2 u^2 \times \frac{1}{2}(2 - u) du = \frac{1}{2} [\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4] \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (\frac{2}{3} \times 8 - \frac{1}{4} \times 16) = \frac{8}{12} = 2/3$$

$$DU = EU^2 - (EU)^2 = 2/3 - (2/3)^2 = 2/9 \quad 2 \text{ 分}$$

六、 解：（1）1）矩估计： $EX = \int_0^1 \frac{x}{1-\theta} dx = \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1+\theta}{2}$

$$\text{令 } \frac{1+\theta}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X},$$

所以 θ 的矩估计为: $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$

3 分

2) 极大似然估计:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_i \leq 1 \\ 0, & \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)} \leq 1 \\ 0, & \end{cases},$$

利用极大似然估计的定义可得:

所以 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \dots, X_n)$

3 分

$$(2) \text{ 因为 } E\hat{\theta}_1 = E(2\bar{X} - 1) = 2E\bar{X} - 1 = 2 \times \frac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$$

所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计。

$$\text{令总体 } X \text{ 的分布函数 } F_X(z) = \begin{cases} 0, & z \leq \theta \\ \frac{z-\theta}{1-\theta}, & \theta < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

而 $\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{X_{(1)}}(z)$

则有: 因为 X_1, \dots, X_n 相互独立且与总体 X 同分布

$$\text{所以 } F_{X_{(1)}}(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = \begin{cases} 0, & z \leq \theta \\ 1 - \left(1 - \frac{z-\theta}{1-\theta}\right)^n, & \theta < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq \theta \\ 1 - \left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n, & \theta < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

则其概率密度为

$$f_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} n \frac{1}{(1-\theta)^n} (1-z)^{n-1}, & \theta < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E \hat{\theta}_2 &= \int_{\theta}^1 z \times n \times \frac{1}{(1-\theta)^n} (1-z)^{n-1} dz = \int_{\theta}^1 (1+z-1) \times n \times \frac{1}{(1-\theta)^n} (1-z)^{n-1} dz \\
&= n \int_{\theta}^1 \frac{1}{(1-\theta)^n} \times (1-z)^{n-1} dz - \int_{\theta}^1 n \frac{1}{(1-\theta)^n} \times (1-z)^n dz \\
&= \frac{n}{n-1+1} \times \frac{-1}{(1-\theta)^n} \times (1-z)^n \Big|_{\theta}^1 - \frac{n}{n+1} \times \frac{-1}{(1-\theta)^n} \times (1-z)^{n+1} \Big|_{\theta}^1 \\
&= 1 - \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{(1-\theta)^n} \times (1-\theta)^{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} \times (1-\theta) \\
&= \frac{n}{n+1} \theta + 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta + \frac{1}{n+1} \neq \theta
\end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，但为渐进无偏估计。 3 分

七. 解：令月初可储存此种商品为 m 件。

由题设可得 $P(X \leq m) = 0.99117$

于是有： $1 - P(X > m) = 0.99117$

即 $P(X \geq m+1) = 0.00883$

于是查表可得 $m+1=13$

所以 $m=12$ 即月初可储存此种商品 12 件即可。 4 分