

基於向量 ROF 模型的低光影像降噪

2025 / 09 ~ 2025 / 01

應數四甲 11111132 江承叡

一、背景

在數位影像處理中，低光拍攝往往伴隨著高感光度（ISO）帶來的隨機雜訊。這類雜訊在彩色影像中不僅表現為亮度的顆粒感，更伴隨著嚴重的「色度雜訊」，即影像中出現紅、綠、藍交錯的雜色斑點。傳統線性濾波雖能平滑雜訊，卻常會將屬於高頻訊號的邊緣與紋理一併抹平，導致畫面模糊。

為了解決此兩難，Rudin、Osher 與 Fatemi 於 1992 年提出了 ROF 全變差模型（Total Variation Denoising）。該模型將去噪轉化為一個能量最小化問題，利用「全變差（Total Variation, TV）」作為正則化項，允許解函數在邊緣處保留劇烈的數值跳動，從而在抹除雜訊的同時保留幾何結構。

但標準 ROF 模型是針對單通道（灰階）影像設計的。在處理彩色影像時，傳統做法是將 R、G、B 三個通道視為獨立圖片，分別進行 ROF 去噪。這種通道獨立的處理方式忽略了彩色影像在光譜上的相關性。在雜訊干擾下三個通道計算出的邊緣位置會無法精確對齊，導致還原後的影像在物體邊緣產生「偽色」或「邊緣色散」，嚴重影響視覺品質。本研究使用向量全變差（Vectorial Total Variation, VTV）模型，探討其如何透過通道耦合方法解決色彩失真與降噪問題，並比較其與傳統純量方法的去噪差異。

二、方法

1. 原始 ROF 模型 (The Standard ROF Model)

核心思想是將影像還原視為一個變分法中的能量最小化問題。對於一張灰階影像 $u: \Omega \rightarrow R$ ，原始 ROF 模型的目標是尋找一個函數 u ，使得以下能量泛函達到極小值：

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx$$

此泛函由兩部分組成，分別代表不同意思：

- 全變差正則項 (Total Variation, TV) : $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$
 - 數學意義： L^1 範數允許梯度在局部區域保持極大的數值（即允許函數不連續）。
 - 物理意義： 還原後的影像允許存在陡峭的「邊緣（Edges）」，而不會像傳統方式被迫將邊緣平滑化。讓 ROF 模型能在去除隨機雜訊的同時，能夠更好的保留物體的幾何輪廓。
- 資料保真項 (Data Fidelity) : $\int_{\Omega} (u - f)^2 dx$

採用 L^2 範數最小平方法，用於約束還原影像 u 不會偏離觀測影像 f 太遠，確保還原結果忠於原圖的亮度分佈。

2. 從純量與向量的降噪方法

原始 ROF 模型是針對單通道的灰階影像設計的。當我們將其應用於彩色影像 $u = (u_R, u_G, u_B)$ 時，最直觀的做法是採用逐通道處理的策略，將 ROF 模型獨立應用於 R、G、B 三個通道：

$$J_{scalar}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u_R| dx + \int_{\Omega} |\nabla u_G| dx + \int_{\Omega} |\nabla u_B| dx$$

這種方法被稱為純量全變差 (Scalar TV)。但這種策略存在一個致命的幾何缺陷，它假設三個色彩通道是統計獨立的。在雜訊的干擾下，各通道獨立計算出的梯度方向與邊緣位置會無法對齊，從而導致合成後的影像在邊緣處產生色彩錯位，形成人眼極為敏感的偽色或邊緣色散。

3. 向量全變差模型 (Vectorial Total Variation, VTV)

為了解決上述色彩失真問題，在這邊使用向量全變差 (Vectorial TV) 模型。我們將彩色影像視為一個向量場，並利用 Frobenius 範數來定義其全變差，使用了關鍵的「通道耦合」方法：

$$J_{vectorial}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u_R|^2 + |\nabla u_G|^2 + |\nabla u_B|^2} dx$$

在此定義下，根號內的運算將三個通道的梯度綁在了一起。其數學特性帶來了兩個顯著優勢：

1. **幾何一致性：** 為了最小化能量，模型會傾向於強迫所有通道在相同的空間位置發生梯度跳變。這確保了物體邊緣的 R、G、B 分量完美對齊，消除了偽色。
2. **色度雜訊抑制：** 對於僅出現在單一通道的隨機色斑，由於缺乏其他通道的梯度支持，VTV 耦合項會更容易將其識別為異常並予以抹平，從而還原出更純淨的色彩。

4. 數值求解

由於 VTV 的泛函涉及非光滑的耦合項，傳統梯度下降法難以求解。因此採用 Primal-Dual (Chambolle-Pock) 演算法，透過轉換將問題轉變成了 Min-Max 鞍點問題，用簡單的迭代就能找出最佳解。

$$\min_u \max_{|p| \leq 1} \left(\int \langle \nabla u, p \rangle + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|^2 \right)$$

1. Dual Update (更新 p):

先算出梯度的方向，然後做一個簡單的投影，把 p 的長度限制在 1 以內解決了 TV 的非光滑性。

2. Primal Update (更新 u):

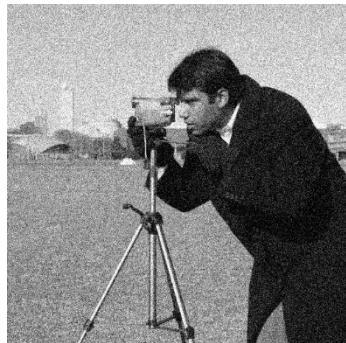
利用剛才算出的 p 來修正 u ，同時讓 u 靠近原圖（去噪）。

3. 重複上述步驟，直到收斂。

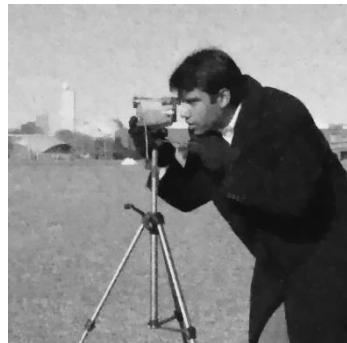
三、結果

1. 原始 ROF 模型於灰階影像之表現

為了驗證全變差 (TV) 正則項在幾何結構保留上的理論優勢，我們先使用灰階影像，並應用標準的原始 ROF 模型進行去噪測試。



▲高斯雜訊灰階影像 (1)



▲ROF 模型還原影像 (1)

從圖 1 可看出原始 ROF 模型展現了優異的去噪與保邊性能。將平坦區域的雜訊震盪完全抹平，呈現出視覺上極為乾淨的圖像。但雖然幾何結構得以完整保留，但在亮度原本呈現平滑漸變的區域（如天空），模型傾向於產生些微的「階梯效應」，這也是標準 TV 模型為了極小化全變差而衍生的已知特性。

2. 彩色影像比較：純量 VS 向量模型

再來我們測試彩色場景，比較「純量 TV」與「向量 TV」的差異。



▲高斯雜訊影像 (2)



▲使用純量模型 (2)



▲使用向量模型 (2)

如圖 2 所示，儘管兩種方法均能有效去噪，但若放大局部細節，可發現純量模

型雖去除了顆粒感，卻殘留許多斑駁的色塊。相比之下向量模型在保持去噪的同時，展現了更優異的色彩還原力，整體視覺觀感更貼近自然影像。

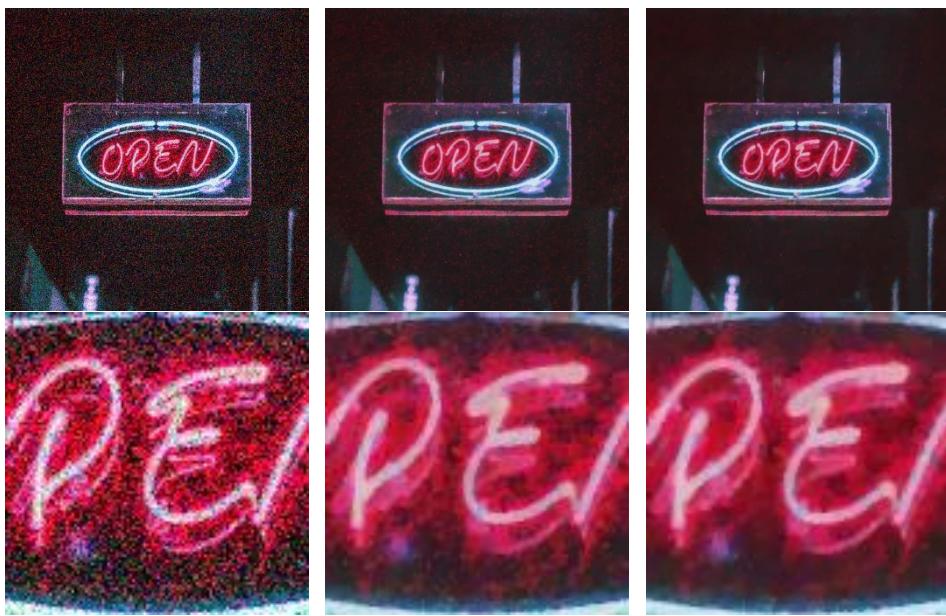


▲純量模型細節(3)

▲向量模型細節(3)

3. 低光場景的實際應用

低光場景的實際應用低光場景大多包含了高 ISO，在圖像中會看到較明顯的顆粒感，且在低光環境鏡頭捕捉的信噪比低，導致嚴重的紅綠「色度雜訊」。這類單通道雜訊極易被純量模型誤判為細節，唯有透過向量模型的通道耦合機制，才能有效抹除偽色恢復影像的色彩。



▲高斯雜訊影像 (3)

▲使用純量模型 (3)

▲使用向量模型 (3)

四、結論

本專題基於變分法架構，深入探討 ROF 模型在彩色影像處理上的應用，並比較了純量與向量兩種策略的差異。雖然純量 TV 雖然計算簡便，但因為忽略了色彩通道間的關聯性，在處理低光雜訊時容易導致邊緣出現偽色。

向量通 TV 則藉由道耦合機制，強制 RGB 三色共享邊緣結構。實驗證實這種方法不僅能有效消除頑固的色度雜訊，更能維持邊緣色彩的一致性，顯著提升了影像的視覺品質。

五、未來展望

基於本研究結果，未來可聚焦於兩個方向，一方面可探討結合 YCbCr 或 Lab 色彩空間轉換，透過分離亮度與色度來優化 VTV 的處理效率，另一方面可以引入向量廣義全變差 (Vectorial TGV) 模型，有望解決 ROF 模型固有的階梯效應，從而實現更完善的降噪品質與更細膩的色彩漸層還原。

參考資料 (References)

- [1] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259-268, 1992.
- [2] 同濟大學學報(自然科學版). "基於全變分模型的圖像去噪算法研究" CNKI 中國知網
<https://tjjb.cbpt.cnki.net/portal/journal/portal/client/paper/cd059f09558a0c2797b5a1e92eff1a7f>.
- [3] Wikipedia contributors, "Total Variation Denoising (總變差去噪)"
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%B8%BD%E8%AE%8A%E5%B7%AE%E5%8E%BB%E5%99%AA>.
- [4] "【圖像處理】ROF 模型與全變分去噪原理及實作" CSDN
https://blog.csdn.net/qq_53298558/article/details/128919855.
- [5]"變分法與圖像處理：從 ROF 到 TV 正則化"
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/10955524559>.
- [6] Pexels, "Pexels License (Open Source Image License)," Pexels.com. [Online]. Available: <https://www.pexels.com/zh-TW/license/>.