Series Temporales

$$\boldsymbol{AR(1) \;=\; MA(\infty)}$$

Vamos a demostrar que el modelo autorregresivo simple, de orden uno, es equivalente a un modelo de medias móviles de infinitos retrasos con ciertas restricciones.

El modelo de medias móviles de infinitos retrasos $MA(\infty)$ toma infinitos retrasos del término de error, pero esto sólo sería un concepto teórico, en la práctica es imposible trabajar con infinitos retrasos porque nuestro dataset es **finito**, incluso aunque estemos trabajando con *big data*.

Sin embargo, podemos representar de manera teórica cómo sería un modelo $MA(\infty)$:

$$x_t = c_{MA} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \epsilon_t$$

Donde x_t es el valor de interés, del período actual, de nuestra serie de tiempo, c_{MA} es la constante, θ_1 y θ_2 son los coeficientes que debemos estimar, ϵ_t es el residuo en el período actual, y $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots$ son los valores de los errores pasados.

Por otro lado, el modelo autorregresivo simple, de orden uno $AR(1)$ es:

$$x_t = c_{AR} + \varphi x_{t-1} + \epsilon_t$$

Donde x_t es el valor de interés, del período actual, de nuestra serie de tiempo, c_{AR} es la constante, que es diferente de la constante del modelo de medias móviles, φ es el coeficiente que debemos estimar, ϵ_t es el residuo en el período actual, y x_{t-1} es el valor de la serie en el período anterior.

Por definición, con el modelo autorregresivo, podemos expresar el valor de la serie del período anterior x_{t-1} en función de x_{t-2}:

$$x_{t-1} = c_{AR} + \varphi x_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

Y si sustituimos esto dentro de la ecuación de x_t, quedaría lo siguiente:

$$x_t = c_{AR} + \varphi(c_{AR} + \varphi x_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t$$

Vamos a expandir la expresión y ordenarla:

$$x_t = c_{AR} + \varphi c_{AR} + \varphi^2 x_{t-2} + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Si ahora expresamos:

$$x_{t-2} = c_{AR} + \varphi x_{t-3} + \epsilon_{t-2}$$

Y sustituimos como antes:

$$x_t = c_{AR} + \varphi c_{AR} + \varphi^2(c_{AR} + \varphi x_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Vamos a expandir la expresión y ordenarla de nuevo:

$$x_t = c_{AR} + \varphi c_{AR} + \varphi^2 c_{AR} + \varphi^3 x_{t-3} + \varphi^2 \epsilon_{t-2} + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Podemos observar que las dos últimas expresiones para x_t, tienen un patrón:

$$x_t = (c_{AR} + \varphi c_{AR}) + \varphi^2 x_{t-2} + (\varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

$$x_t = (c_{AR} + \varphi c_{AR} + \varphi^2 c_{AR}) + \varphi^3 x_{t-3} + (\varphi^2 \epsilon_{t-2} + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Podemos generalizar esto para k períodos y obtenemos:

$$x_t = (c_{AR} + \varphi c_{AR} + \cdots + \varphi^k c_{AR}) + \varphi^k x_{t-k} + (\varphi^k \epsilon_{t-k} + \cdots + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Como c_{AR} es una constante la podemos sacar del paréntesis y la ecuación quedaría:

$$x_t = c_{AR}(1 + \varphi + \cdots + \varphi^k) + \varphi^k x_{t-k} + (\varphi^k \epsilon_{t-k} + \cdots + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Sabemos que esto se cumple cualquiera sea el valor de k, entonces si consideramos infinitos retrasos, quedaría lo siguiente:

$$x_t = c_{AR}(1 + \varphi + \cdots + \varphi^\infty) + \varphi^\infty x_{t-\infty} + (\varphi^\infty \epsilon_{t-\infty} + \cdots + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Esto es equivalente a:

$$x_t = c_{AR} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^m + \varphi^\infty x_{t-\infty} + (\varphi^\infty \epsilon_{t-\infty} + \cdots + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Como $|\varphi| < 1$ sabemos que esta suma infinita es una suma geométrica que es igual a $\frac{1}{1-\varphi}$ y lo podemos sustituir en la ecuación:

$$x_t = c_{AR} \frac{1}{1 - \varphi} + \varphi^\infty x_{t-\infty} + (\varphi^\infty \epsilon_{t-\infty} + \cdots + \varphi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Ahora, como $MA(\infty)$ no depende de valores pasados, sino solo de residuos pasados, convendría desechar la parte de la ecuación anterior $\varphi^{\infty}x_{t-\infty}$ pero por suerte para nosotros como $|\varphi| < 1$, eso significa que φ^{∞} converge a cero, por lo cual el término de valores pasados $x_{t-\infty}$ desaparece.

$$x_t = c_{AR}\frac{1}{1-\varphi} + (\varphi^{\infty}\epsilon_{t-\infty} + \cdots + \varphi\epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Casi hemos terminado, porque si nos fijamos en la ecuación anterior, tenemos que los valores presentes dependen de una constante, un residuo presente y una serie de valores residuales pasados multiplicados por ciertos coeficientes. Esto es justo lo que pasa en el modelo $MA(\infty)$. Es decir que simplemente imponiendo las restricciones $\theta_k = \varphi^k$ tendríamos que estos dos modelos son equivalentes.

$$x_t = c_{AR}\frac{1}{1-\varphi} + (\theta_{\infty}\epsilon_{t-\infty} + \cdots + \theta_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t)$$

Como $c_{AR}\frac{1}{1-\varphi}$ es simplemente una constante podemos llamarle c_{MA} y nos quedaría:

$$x_t = c_{MA} + \theta_{\infty}\epsilon_{t-\infty} + \cdots + \theta_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Ahora podemos reordenar la ecuación anterior y quedaría:

$$x_t = c_{MA} + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_{\infty}\epsilon_{t-\infty} + \epsilon_t$$

Y esto es justamente la expresión teórica que escribimos al principio, de cómo sería un modelo $MA(\infty)$.