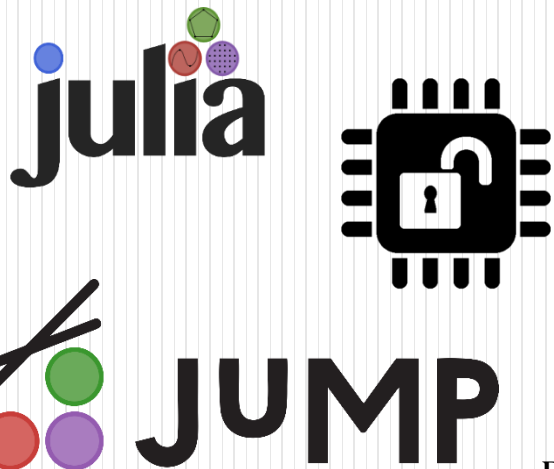


# Tópico

## POWER SYSTEM OPTIMIZATION: POWER FLOW

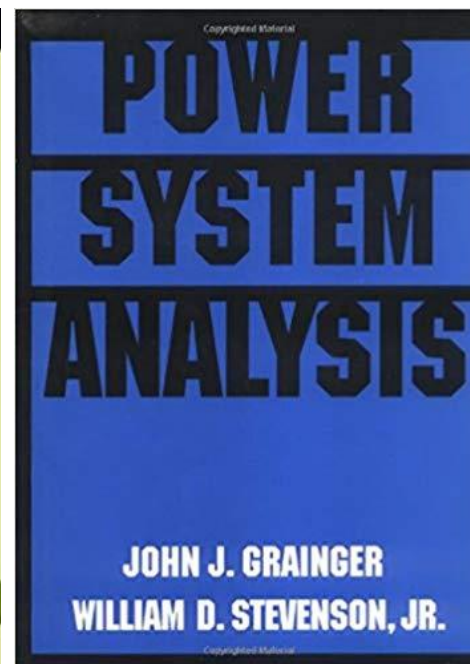
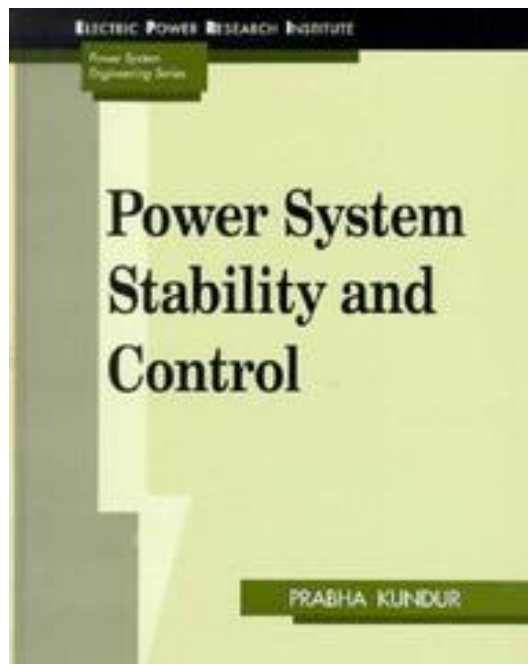
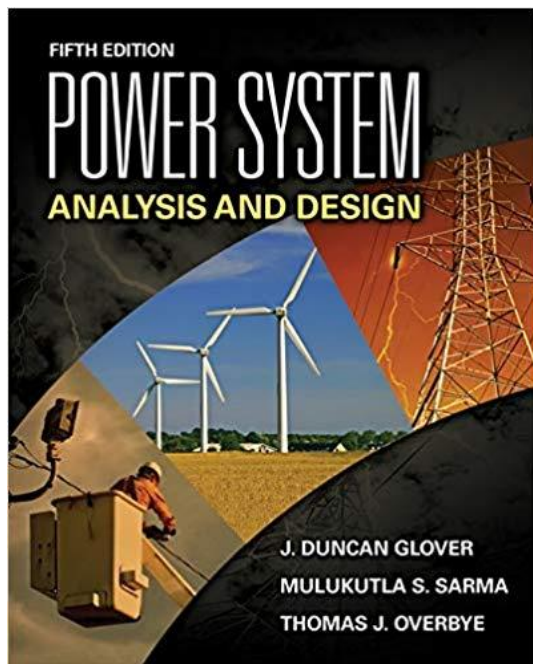
Mar 2019



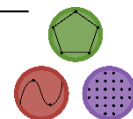
**AUTORES:**  
ERIK ALVAREZ  
JEFFERSON CHÁVEZ

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
DSEE – Departamento de Sistemas de Energia Elétrica





<https://www.amazon.com/Power-System-Analysis-Design-Fifth/dp/1111425779>  
<https://www.amazon.com/System-Stability-Control-Prabha-Kundur/dp/007035958X>  
<https://www.amazon.com/Analysis-Grainger-Professor-Electrical-Engineering/dp/0070612935>



*Forma rectangular*

$$X = x + \mathbf{j}y$$

*Forma polar*

$$X = |X| \angle \theta$$

*Relación*

$$X = |X| \cos \theta + \mathbf{j}|X| \sin \theta$$

*Conjugación de complejos*

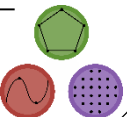
$$X = x + \mathbf{j}y ; X^* = x - \mathbf{j}y$$

*Valor absoluto*

$$XX^* = |X|^2$$

*Representación circular*

$$|X|^2 = (x + \mathbf{j}y)(x - \mathbf{j}y) = x^2 + y^2$$



Potencia activa:  $p$

Potencia reactiva:  $q$

Potencia:  $S = p + \mathbf{j}q$

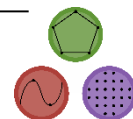
Potencia  
aparente:  $|S| = \sqrt{p^2 + q^2}$

Factor de  
potencia  $\cos \varphi = \frac{p}{|S|}$

Tensión:  $V = e + \mathbf{j}f = |V|e^{j\theta}$

Corriente:  $I = \text{Re}\{I\} + \mathbf{j}\text{Im}\{I\}$

$$S = VI^*$$



constantes

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

variables

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

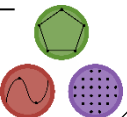
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Características:

- Algoritmos robustos
- Determinar si la solución existe
- Y, si hay una única solución



# Notaciones (4/4): Ecuaciones no lineales

Características:

- No se obtiene fácilmente una solución
- Método de Newton suele funcionar bien
- No se asegura la existencia de solución
- No se asegura que tenga solución única

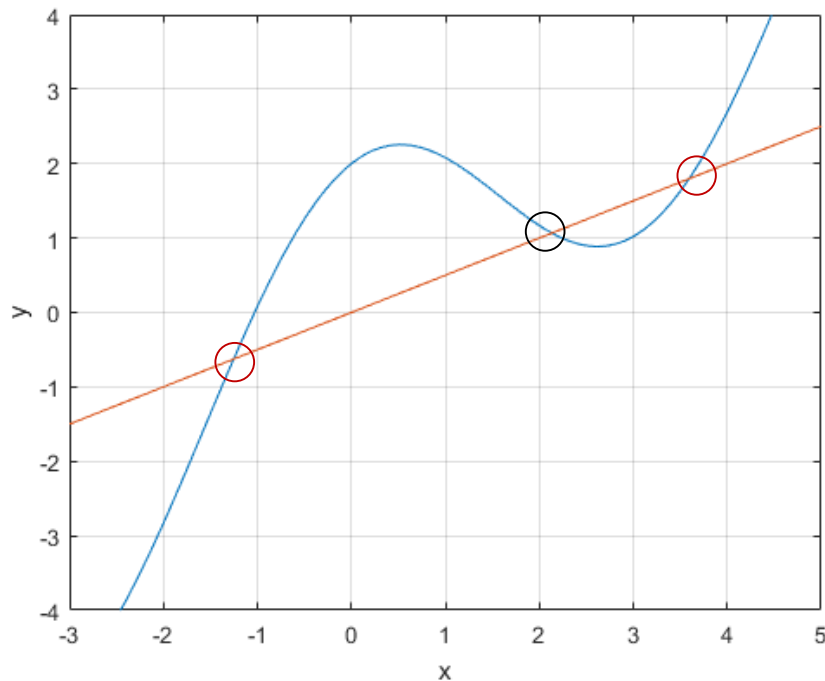
$$g_1(x) = 0$$

$$g_2(x) = 0$$

$$g_3(x) = 0$$

...

$$g_m(x) = 0$$

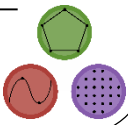


$$y = x + 2 \cos(x)$$

$$y = \frac{x}{2}$$

$$y = 2.13333$$

$$x = 1.06666$$





Especificaciones:

- Función objetivo
- Restricciones (desigualdades)

De todas las posibles soluciones que satisfacen las restricciones, selecciona la optima solución (máxima o la mínima, por ejemplo: la menos costosa)

## Principal diferencia:

*“La función objetivo te ayuda a seleccionar la solución de tu preferencia”*

$$\min_x f(x)$$

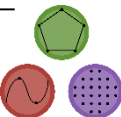
$$g_1(x) \leq 0$$

$$g_2(x) \leq 0$$

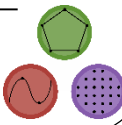
...

$$g_m(x) = 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$



- Para modelar diversos problemas de optimización en sistemas de energía eléctrica (**SEE**), es necesario modelar su estado de operación en régimen permanente.
- Si las ecuaciones que representan el estado de operación en régimen permanente de un SEE, son ecuaciones algebraicas no lineales. Entonces, los problemas de optimización serán problemas de **PNL** o **PNLIM** dependiendo de las variables de decisión (continuas o enteras).
- Las ecuaciones que representar el estado de operación en régimen permanente de un SEE son conocidas como las ecuaciones del **Flujo de Carga** (*PF: Power Flow*).
- El PF es una herramienta indispensable para análisis de redes eléctricas en régimen permanente. Muy utilizado en la operación en tiempo real y la planificación de la expansión de los SEE.
- De los estudios del **PF**, es posible determinar:
  - Las pérdidas de la red, el estado de líneas de transmisión, transformadores, generadores, reguladores de tensión y equipos de compensación reactiva.
- El objetivo del PF consiste en determinar el estado de operación en régimen permanente del SEE:
  - Magnitudes de tensión y ángulos de fase en todas las barras
  - Y sus derivados: flujo de potencia activa, reactiva y magnitudes de corriente, inyecciones de potencia activa y reactiva, etc.





Para resolver problemas de optimización no lineal, se tiene:

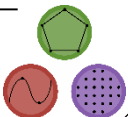
- Algoritmos: desafío muy grande; a veces irresoluble o no escalable.
- Factibilidad: Si, si el algoritmo converge.

Aproximar las ecuaciones (forma *no lineal* a *lineal*)

- Algoritmos: son numéricamente estables; rápidos y escalables.
- Factibilidad: No se garantiza la factibilidad.

Convexificar las ecuaciones (Forma elegante de resolver un problema no lineal através de relajaciones convexas, sin aproximaciones e iteraciones)

- Algoritmos: son numéricamente estables; a veces lentos y difíciles de escalar.
- Factibilidad: Garantiza la factibilidad.





# Red eléctrica: Definición

Barras (nodes, buses)

$N$

- Demanda (sink)

$$S_i^d \forall i \in N$$

- Generación (source)

$$S_i^g \forall i \in N$$

Circuito (Branch, edges, power lines)

$E$

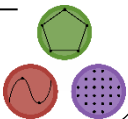
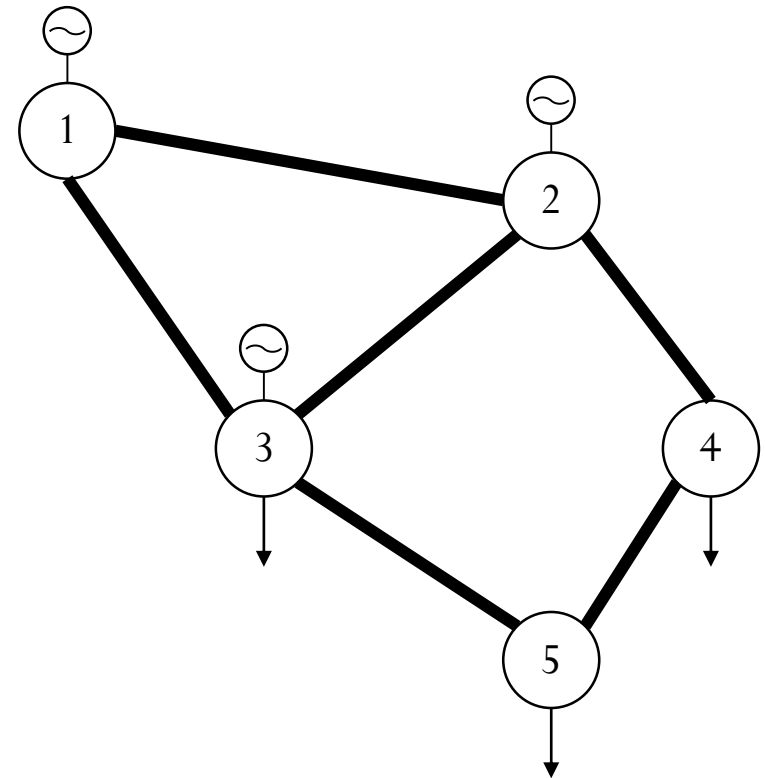
- Admittancia

$$Y_{ij} \forall (i, j) \in E$$

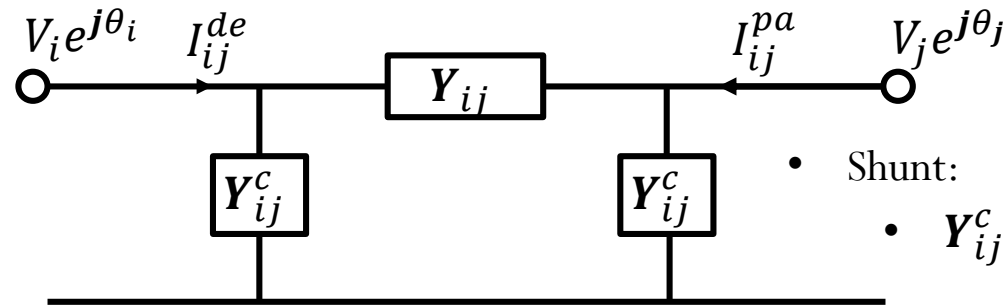
Recuerda:

$$S_i^d = p_i^d + j q_i^d$$

$$S_i^g = p_i^g + j q_i^g$$

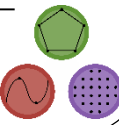


# Línea de transmisión: Modelo “Pi” (1/2)

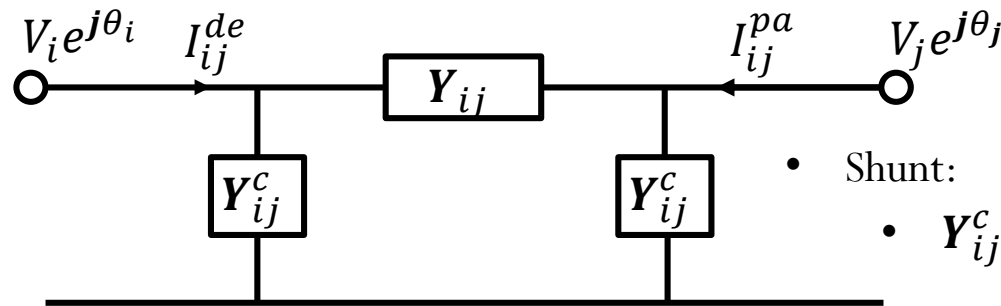


- Shunt:
- $Y_{ij}^c = g_{ij}^{shl} + j b_{ij}^{shl}$

- Impedancia serie:  $z_{ij} = r_{ij} + j x_{ij}$
- Admitancia serie:  $Y_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} = g_{ij} + j b_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} - j \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2}$
- Calculo de corrientes:
  - $I_{ij}^{de} = Y_{ij}(V_i e^{j\theta_i} - V_j e^{j\theta_j}) + j b_{ij}^{shl} V_i e^{j\theta_i}$
  - $I_{ij}^{pa} = Y_{ij}(V_j e^{j\theta_j} - V_i e^{j\theta_i}) + j b_{ij}^{shl} V_j e^{j\theta_j}$
- Ecuación de flujo de potencia:
  - $(S_{ij}^{de})^* = (V_i e^{j\theta_i})^* I_{ij}^{de}$
  - $P_{ij}^{de} - j Q_{ij}^{de} = Y_{ij} V_i e^{-j\theta_i} (V_i e^{j\theta_i} - V_j e^{j\theta_j}) + j b_{ij}^{shl} V_i^2$
- Separando parte real e imaginaria:
  - $P_{ij}^{de} = g_{ij} V_i^2 - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij}) - V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij})$
  - $Q_{ij}^{de} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) V_i^2 - V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij})$

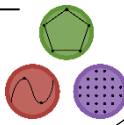


# Línea de transmisión: Modelo “Pi” (2/2)



- Shunt:
- $Y_{ij}^c = g_{ij}^{shl} + j b_{ij}^{shl}$

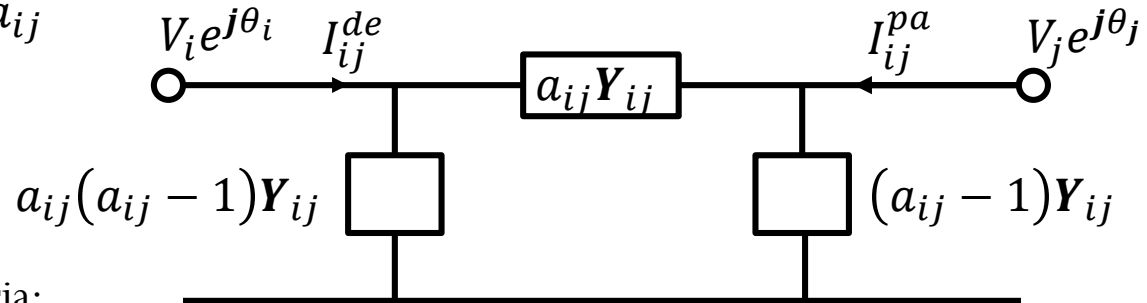
- Análogamente:
  - $P_{ij}^{pa} = g_{ij} V_j^2 - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij})$
  - $Q_{ij}^{pa} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) V_j^2 + V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij})$
- Perdas de potencia:
  - $P_{ij}^{de} + P_{ij}^{pa} = g_{ij} [V_i^2 + V_j^2 - 2 V_i V_j \cos(\theta_{ij})]$
  - $Q_{ij}^{de} + Q_{ij}^{pa} = -b_{ij}^{shl} (V_i^2 + V_j^2) - b_{ij} [V_i^2 + V_j^2 - 2 V_i V_j \cos(\theta_{ij})]$





# Transformador en fase

- Relación de transformación:  $a_{ij}$



- Calculo de corriente y potencia:

- $$I_{ij}^{de} = a_{ij} Y_{ij} (a_{ij} V_i e^{j\theta_i} - V_j e^{j\theta_j})$$
- $$(S_{ij}^{de})^* = (V_i e^{j\theta_i})^* I_{ij}^{de}$$
- $$P_{ij}^{de} - jQ_{ij}^{de} = a_{ij} Y_{ij} V_i e^{-j\theta_i} (a_{ij} V_i e^{j\theta_i} - V_j e^{j\theta_j})$$

- Separando parte real e imaginaria:

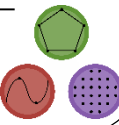
- $$P_{ij}^{de} = g_{ij} a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij}) - a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij})$$
- $$Q_{ij}^{de} = -b_{ij} a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij})$$

- Análogamente:

- $$P_{ij}^{pa} = g_{ij} V_j^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij})$$
- $$Q_{ij}^{pa} = -b_{ij} V_j^2 + a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij})$$

- Perdidas de potencia:

- $$P_{ij}^{de} + P_{ij}^{pa} = g_{ij} [a_{ij}^2 V_i^2 + V_j^2 - 2a_{ij} V_i V_j \cos(\theta_{ij})]$$
- $$Q_{ij}^{de} + Q_{ij}^{pa} = -b_{ij} [a_{ij}^2 V_i^2 + V_j^2 - 2a_{ij} V_i V_j \cos(\theta_{ij})]$$

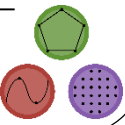




# Transformador desfasadores (Phase Shifting Transformers)



- $I_{ij}^{de}$  Puede ser escrito en funciones de las tensiones terminales, de la misma forma que los transformadores en fase:
  - $I_{ij}^{de} = Y_{ij} (V_i e^{j\theta_i} - V_j e^{j(\theta_j - \varphi_{ij})}) = Y_{ij} e^{-j\varphi_{ij}} (V_i e^{j(\theta_i + \varphi_{ij})} - V_j e^{j\theta_j})$
- Ángulo introducido por el desfasador:  $\varphi_{ij}$
- Cálculo de potencia:
  - $(S_{ij}^{de})^* = (V_i e^{j\theta_i})^* I_{ij}^{de}$
  - $P_{ij}^{de} - jQ_{ij}^{de} = Y_{ij} V_i e^{-j(\theta_i + \varphi_{ij})} (V_i e^{j(\theta_i + \varphi_{ij})} - V_j e^{j\theta_j})$
- Separando parte real e imaginaria:
  - $P_{ij}^{de} = g_{ij} V_i^2 - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$
  - $Q_{ij}^{de} = -b_{ij} V_i^2 - V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$
- Análogamente:
  - $P_{ij}^{pa} = g_{ij} V_j^2 - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$
  - $Q_{ij}^{pa} = -b_{ij} V_j^2 + V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$
- Pérdidas de potencia:
  - $P_{ij}^{de} + P_{ij}^{pa} = g_{ij} [V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})]$
  - $Q_{ij}^{de} + Q_{ij}^{pa} = -b_{ij} [V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})]$





## Expresiones generales para los flujos

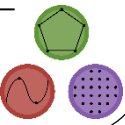
- $$P_{ij}^{de} = g_{ij}a_{ij}^2V_i^2 - a_{ij}V_iV_jg_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
  

$$-a_{ij}V_iV_jb_{ij}\sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
- $$Q_{ij}^{de} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl})a_{ij}^2V_i^2 - a_{ij}V_iV_jg_{ij}\sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
  

$$+a_{ij}V_iV_jb_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
- Para líneas de transmisión:  $a_{ij} = 1$  y  $\varphi_{ij} = 0$
- Para los transformadores en fase:  $b_{ij}^{shl} = 0$  y  $\varphi_{ij} = 0$
- Para los transformadores desfasadores:  $b_{ij}^{shl} = 0$  y  $a_{ij} = 0$
- $$P_{ij}^{pa} = g_{ij}V_j^2 - a_{ij}V_iV_jg_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
  

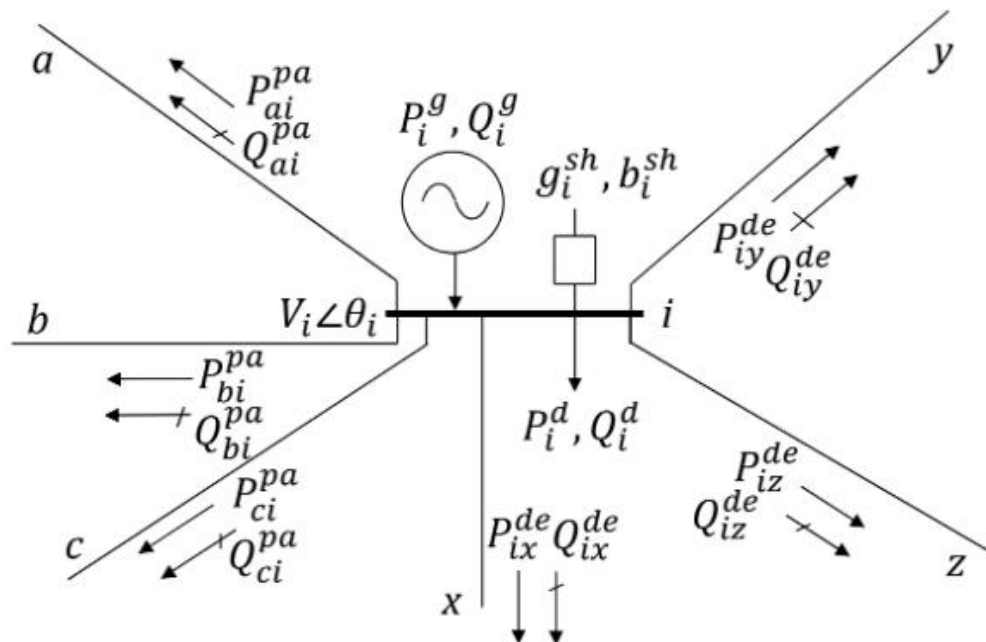
$$+a_{ij}V_iV_jb_{ij}\sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
- $$Q_{ij}^{pa} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl})V_j^2 + a_{ij}V_iV_jg_{ij}\sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
  

$$+a_{ij}V_iV_jb_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})$$
- Perdidas de potencia:
  - $$P_{ij}^{de} + P_{ij}^{pa} = g_{ij}[a_{ij}^2V_i^2 + V_j^2 - 2a_{ij}V_iV_j\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})]$$
  - $$Q_{ij}^{de} + Q_{ij}^{pa} = -b_{ij}^{shl}(a_{ij}^2V_i^2 + V_j^2) - b_{ij}[a_{ij}^2V_i^2 + V_j^2 - 2a_{ij}V_iV_j\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})]$$





# Ecuación de balance de potencia



$$P_i^g - P_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} [P_{ij}^{de}] - \sum_{ij \in \Omega_l} [P_{ij}^{pa}] + g_i^{sh} V_i^2 = 0 \quad \forall i \in \Omega_b$$

$$Q_i^g - Q_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} [Q_{ij}^{de}] - \sum_{ij \in \Omega_l} [Q_{ij}^{pa}] + b_i^{sh} V_i^2 = 0 \quad \forall i \in \Omega_b$$

