Tópico

Modelamiento & Optimización

Mar 2019

Autores:

Erik Alvarez

Jefferson Chávez

Universidade Estadual de Campinas

DSEE – **D**epartamento de **S**istemas de **E**nergia **E**létrica

Ejemplo 1: Importación de petróleo

- Una refinería puede comprar petróleo crudo ligero y petróleo crudo pesado.
- El coste por barril de estos tipos de petróleo es de 11 y 9 euros, respectivamente.
- De cada tipo de petróleo se producen por barril las siguientes cantidades de gasolina, kerosene y combustible para reactores.

	Gasolina	Kerosene	Combustible Reactores
Petróleo crudo ligero	0.40	0.20	0.35
Petróleo crudo pesado	0.32	0.40	0.20

- La refinería tiene un contrato para entregar un millón de barriles de gasolina, cuatrocientos mil barriles de kerosene, y doscientos cincuenta mil barriles de combustible para reactores.
- Determine el número de barriles de cada tipo de petróleo crudo que satisfacen la demanda y minimizan el coste.

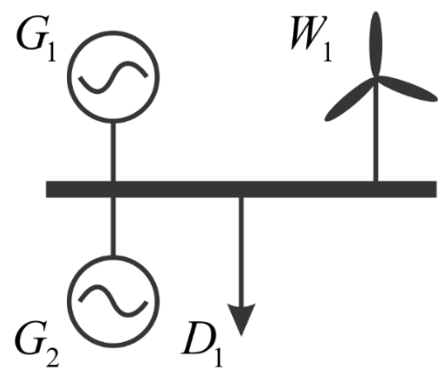
Ejemplo 2 : Modelo para fabricación

- Se desean construir mesas y sillas.
- El recurso disponible es 30 m^2 de madera por semana, 48 horas por semana.
- La demanda de las sillas es de 5 unidades y la de mesas de 10 unidades.
- La utilidad que se obtiene por las mesas es de \$10 y por las sillas de \$8, además para construir la mesa utiliza lo siguiente: 4.5 m^2 de madera por unidad, 6 horas por unidad.
- Para la silla se ocupan: 1.5 m^2 de madera por unidad y 3 horas por cada unidad fabricada.
- ¿Cuántas sillas y mesas construyo con el fin de obtener la máxima utilidad por semana?

Ejemplo 3 : Despacho económico

- Abastecer la demanda de energía eléctrica. $D = 1500$
- 2 generadores termoeléctricos.
- 1 generador eólico.
- ¿Minimizar el costo de producción de energía eléctrica?

	Max.	Min.	Costo
G1	1000	-	50
G2	1000	300	100
W1	200	.	10



Modelamiento matemático: Definición

- Definición:

  Proceso de abstracción de la realidad hacia formas matemáticas para representar partes de ella (como ejemplo, se tiene: la planificación de la política económica de un país). Este proceso es llevado a cabo para facilitar la comprensión y/o estudio de las características de dicha realidad.
- Entonces:
  - Representación simplificada de una realidad
  - Herramienta ayuda para la toma de decisiones
  - Puede necesitar un equipo interdisciplinario
- **Modelador:** desarrollo del modelo.
- **Experto:** conocimiento de la realidad del problema.

Modelamiento matemático: Riesgos

- Equilibrio entre una representación detallada y capacidad de obtener una solución.
- **Modelamiento exhaustivo:**
  - Es casi real, puede ser irresoluble.
- **Modelamiento simple:**
  - Rudimentario, muchos métodos por el que se puede ser resuelto. Sin embargo, es posible obtener una solución que no se adecue a la realidad.

- Menos datos y más hipótesis para obtención rápida de resultados.
- Definición defectuosa del problema.
- Falta de experiencia y capacitación del modelador.
- El concepto de modelo adecuado varía con el tiempo, debido a que los modelos complejos de hoy pueden ser modelos adecuado en el futuro.

La relación entre el modelo y la método de solución es relativo y depende de la tecnología de la época.

Modelamiento matemático: Clasificación & Composición

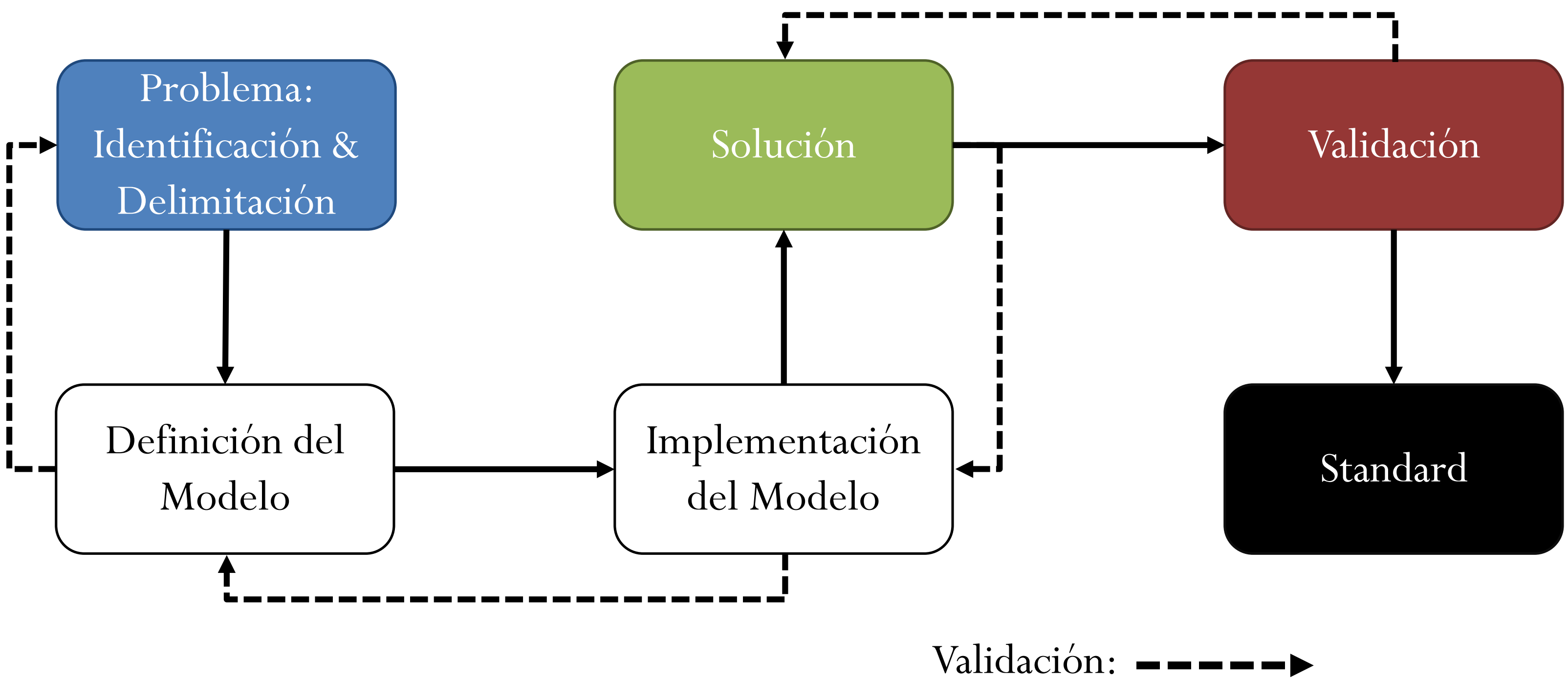
Según la disposición de información:

- Determinístico
- Estocástico
- Puramente incierto

Según la características del tiempo:

Estático

Dinámico



Problema: Identificación & delimitación

- Recolección de **información** del problema.
- Primero, la realización de un **boceto** del problema.
- Luego, se realiza una **interpretación** de la información a términos precisos para identificar las características del problema.
- La **calidad de la información** es vital, pueden ser un problema.
  - Podemos tener el mejor modelo pero no va a servir si no tenemos información de calidad (refinados).
- Establecer el **nivel de representación** del modelo acorde a los recursos computacionales disponibles.

Definición del Modelo

- Se definen cual es:
  - Función objetivo
  - Variables
  - Restricciones
  - Parámetros
- Es importante tener en cuenta la **delimitación del problema** en orden de mantener la complejidad del problema.
- Identificación del tipo de problema de optimización:
  - Programación lineal
  - Programación no lineal
  - Programación cuadrática con restricciones cuadráticas
  - Programación cónica de segundo orden
  - Programación semidefinida

Implementación del Modelo

- El espíritu del modelo es la **precisión** y **elegancia.**
- Análisis de la estructura del modelo.
  - La implementación se debe adecuar a las expectativas, necesidades y recursos del cliente (por ejemplo, tiempo real, a gran escala, etc).
- Por ejemplo, un problema de programación lineal se puede clasificar según su tamaño:

	Restricciones	**Variables**
Ejemplo demostrativo	100	100
Tamaño medio	10000	10000
Tamaño grande	500000	500000
Tamaño a gran escala	>500000	>500000

Solución

- Se necesita de un método de solución, el cual se traduce en un algoritmo.
- Existen diferentes métodos de solución (por ejemplo, para programación lineal normalmente se emplea el método simplex o método de puntos interiores).
- Existen **diferentes versiones** de un mismo método de solución o del algoritmo desarrollado que puede incluir heurística y/o meta-heurística, como ejemplo.

- Se puede obtener una **solución óptima**, **cuasi-óptima** o por lo menos, **factible** para el problema de optimización planteado.

Validación de la solución

- Primero, verificar la **codificación** del modelo matemático. Eliminar errores en la codificación.
- Comprobar las **linealizaciones**, **aproximaciones** o **simplificaciones** adoptadas mediante la representación de los resultados (comparación de la solución obtenida con una solución real conocida).
- Análisis de sensibilidad de los **datos de entrada** (parámetros).
- Modificar el modelo con nuevas necesidades.

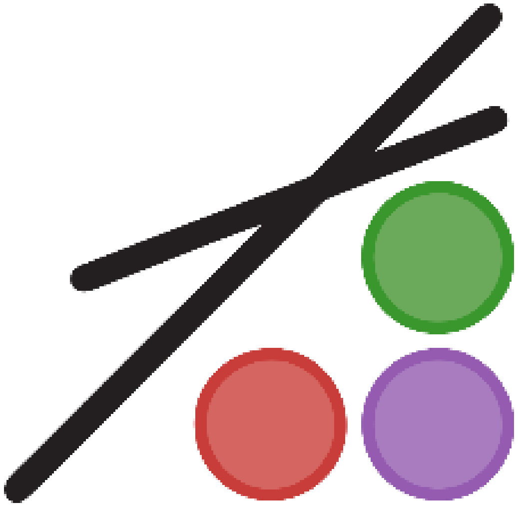
- Identificación de otras soluciones y determinar la **robustez** de la solución a través de sensibilidades. (como ejemplo, se puede adoptar salida de líneas si es un problema de planificación de la expansión de la transmisión de energía eléctrica o de salida de operación de algún generador de energía eléctrica).

- Etapa cumbre, donde un modelo alcanza el **éxito**.

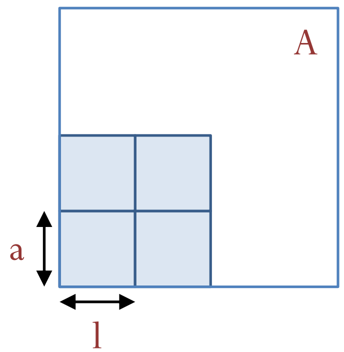
- En esta etapa se realiza la documentación sobre el modelo de forma **clara**, **precisa** y **completa**.
- Puede incluir un **manual de usuario** con especificaciones técnicas funcionales, parte del fundamento matemático e informático.

- Esto sirve, para posible capacitaciones, curso o entrenamientos a usuarios del respectivo modelo.

Optimización???



- Es un **proceso** o **metodología** para el desarrollo de algún producto (tal como, un diseño, sistema o decisión) de tipo funcional o efectivo en lo posible.
- Específicamente: los procedimientos matemáticos (como encontrar el **máximo** o **mínimo** de una función) involucrados en este.
- En la práctica: es encontrar valores (**solución**) a las **variables** de decisión que hacen óptima a una **función objetivo** y que satisfacen un conjunto de **restricciones**.
- Ejemplo: se quiere maximizar el uso de losetas cerámicas (l: longitud e a: altura en metros) en un área A. Siendo el n, el numero de losetas empleadas



$$Max\ n$$

Sujeto a:

$$n * a * l \leq A$$

$$0 \leq n$$

Optimización: Componentes

- **Variables de decisión**:

  Son aquellas que su valor son las decisiones a tomar dentro de un problema de optimización, y que afectan el valor de la función objetivo.

$$\boxed{n: numero\ de\ losetas\ cerámicas}$$

- **Función objetivo:**

  Medida cuantitativa del problema a resolver que se desea maximizar o minimizar, y que se expresa en una función basada en las variables de decisión.

$$\boxed{Max\ n}$$

- **Restricciones:**

  Son relaciones que las variables deben satisfacer, ya sea en igualdades o desigualdades.

$$\boxed{\begin{array}{c} n * a * l \leq A \\ 0 \leq n \end{array}}$$

Optimización: Realizar los ejemplos 2 & 3

Concavidad y Convexidad

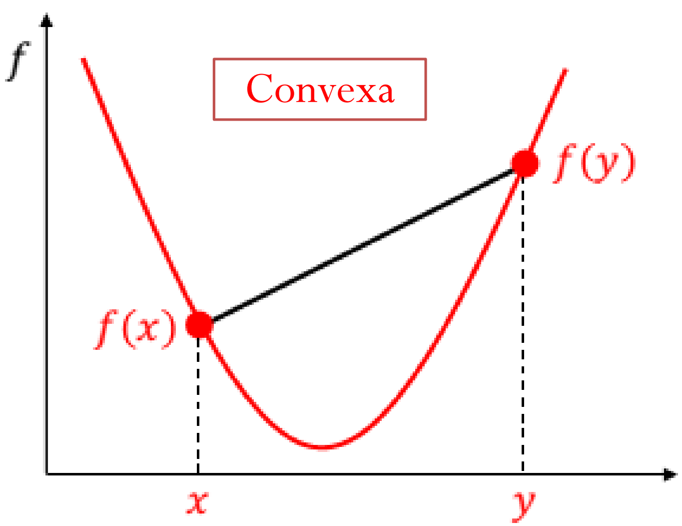
- Las nociones generales de concavidad y convexidad se utilizan ampliamente en la teoría económica y también son fundamentales para la teoría de la optimización.
- Por ejemplo, una función de una sola variable es cóncava si cada segmento de línea que une dos puntos en su gráfica no se encuentra sobre la gráfica en ningún punto. Simétricamente, una función de una sola variable es convexa si cada segmento de línea que une dos puntos en su gráfica no se encuentra debajo de la gráfica en ningún punto. Estos conceptos se ilustran en las siguientes figuras.

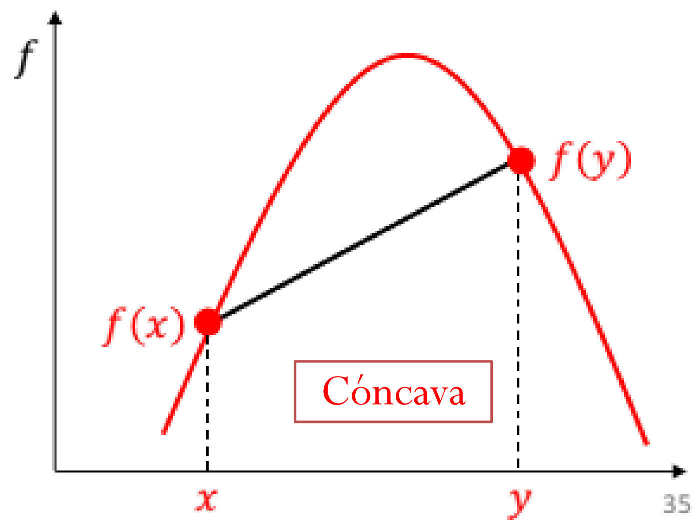
- Una función $f\colon R^n \to R$ es convexa si el dominio de f es un conjunto convexo y para todo $x, y \ \in dom\ f$, y θ con $0 \le \theta \le 1$ tendremos.

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1+\theta)f(y)$$

- Una función $f\colon R^n \to R$ es cóncava si el dominio de f es un conjunto convexo y para todo $x, y \ \in dom\ f$, y θ con $0 \le \theta \le 1$ tendremos.

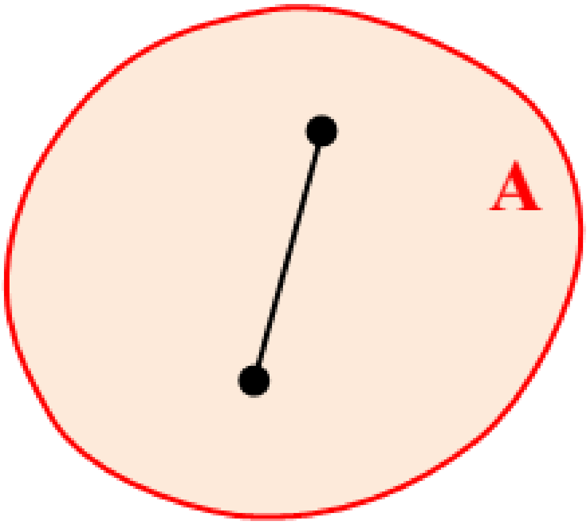
$$f(\theta x + (1-\theta)y) \ge \theta f(x) + (1+\theta)f(y)$$



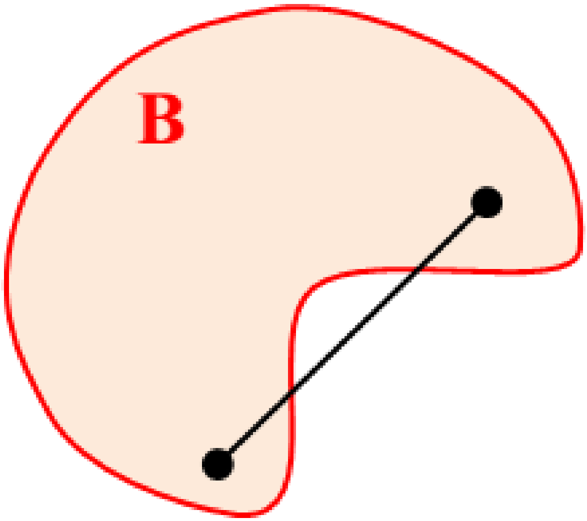


Concavidad y Convexidad: Región convexa

- Una región es llamada región convexa si, y solamente si todo segmento de recta cuyas extremidades pertenecen a la región solo tienen puntos en la misma región.



Región convexa



Región no convexa

Concavidad y Convexidad: Problemas de Optimización

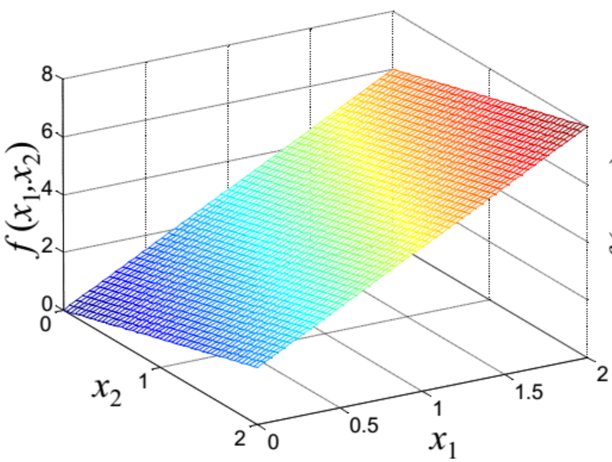
- En un problema de minimización, si la función objetivo y región factible son convexas. Entonces, es posible obtener cualquier mínimo local que resultaría ser el mínimo global del problema planteado.

- En un problema de maximización, si la función objetivo y región factible son cóncavas. Entonces, es posible obtener cualquier máximo local que resultaría ser el máximo global del problema planteado.

Tipos de problemas de optimización

- La función objetivo puede ser:

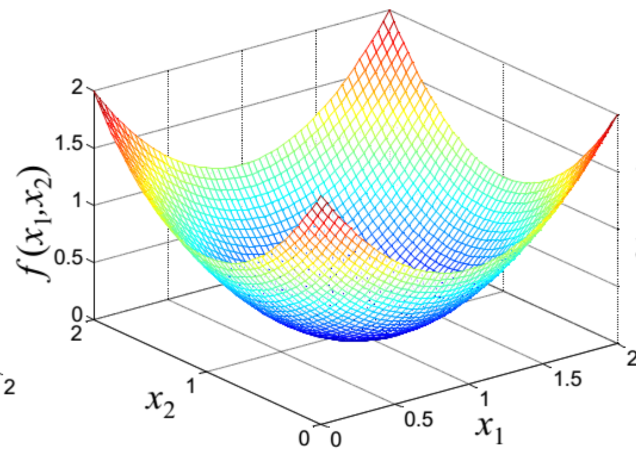
Lineal



$$f(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2$$

$$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i}$$

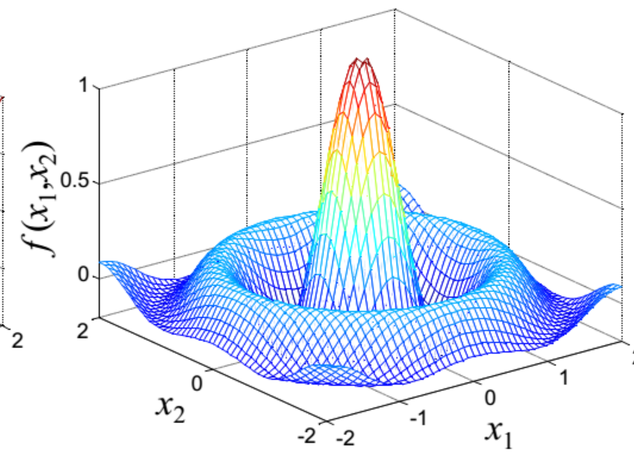
Cuadrático



$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_i x_j}$$

No lineal



$$f(x_1,x_2) = \frac{sen(\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}})}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}}$$

$$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

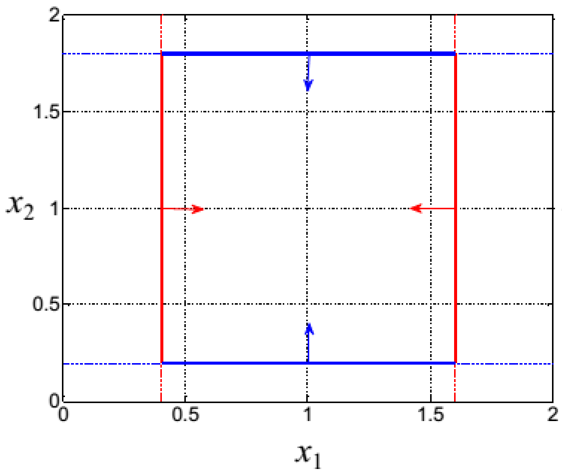
Tipos de problemas de optimización

- Las restricciones pueden ser:

$$\underbrace{\text{Acotado} \qquad\qquad \text{Forma general}}_{\text{Lineales}}$$

Lineales

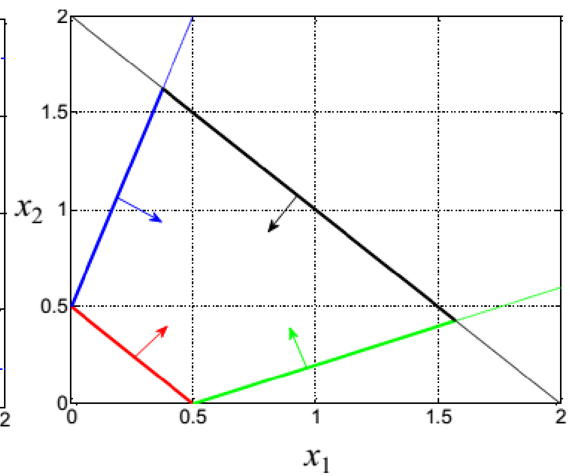
Acotado



$$0.4 \le x_1 \le 1.6$$
$$0.2 \le x_2 \le 1.8$$

$$\boxed{\underline{x} \le x_i \le \overline{x}, \quad \forall i = 1,\ldots,n}$$

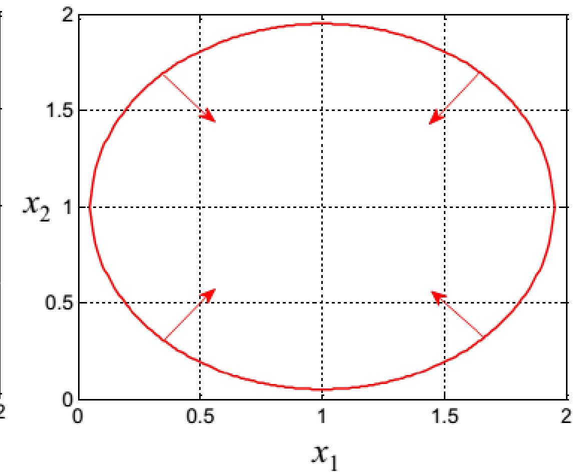
Forma general



$$2x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$1 \le 2x_1 + 2x_2$$
$$-6x_1 + 2x_2 \le 1$$
$$10 \le -x_1 + 20x_2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \quad \forall j = 1,\ldots,p}$$

Cuadráticas

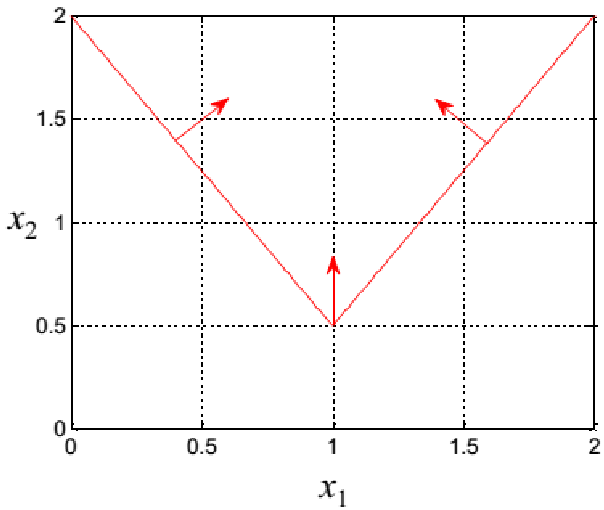


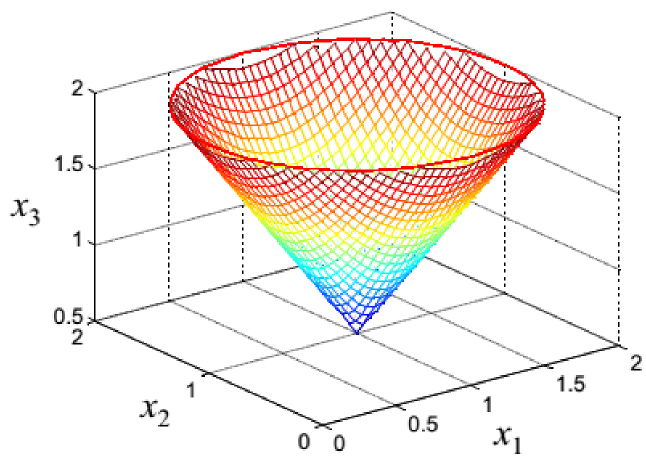
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} d_{ik} x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ijk} x_i x_j + e_k^2 \le 0, \\ \forall k = 1,\ldots,p\end{gathered}}$$

- Las restricciones pueden ser:

Cónicas de segundo orden





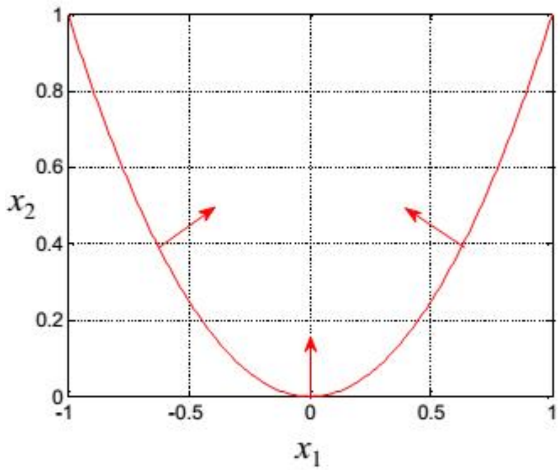
$$\|x_1 - 1\|_2 \leq \frac{2x_2}{3} - \frac{1}{3}$$

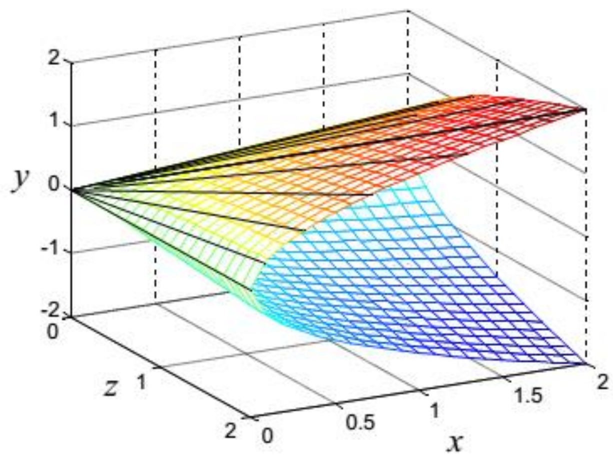
$$\sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2} \leq \frac{2x_3}{3} - \frac{1}{3}$$

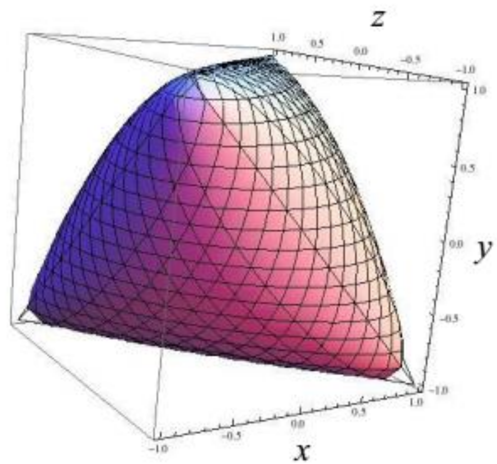
$$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{ik}x_i + d_{ik})^2} \leq \sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_i + d_k, \quad \forall k = 1,\ldots,p}$$

- Las restricciones pueden ser:

Semidefinidas positivas







$$x_2 - x_1^2 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

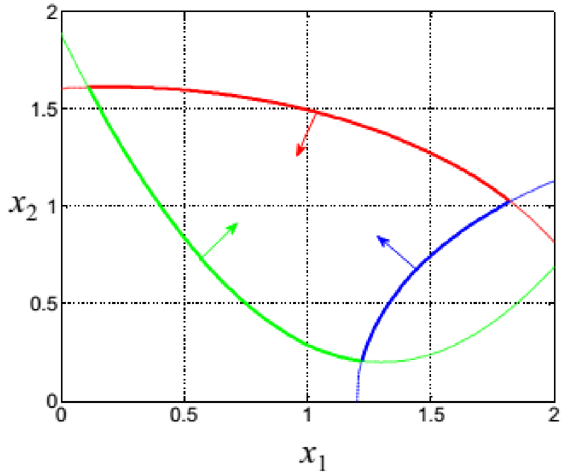
$$xz - y^2 \geq 0$$
$$x, z \geq 0$$

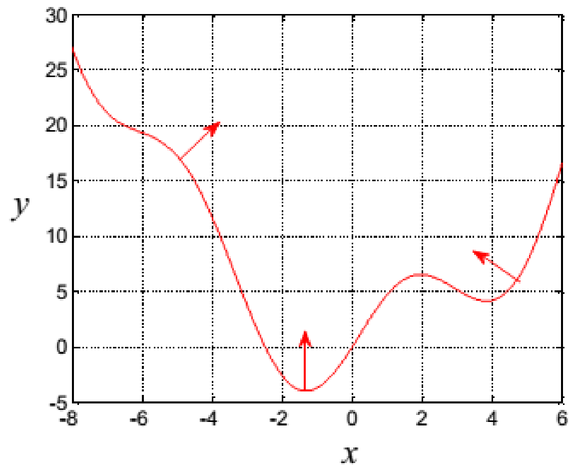
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + 2xyz$$
$$x^2, y^2, z^2 \leq 1$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

- Las restricciones pueden ser:

No lineales





$$0.5(x_1-0.2)^2+(x_2-0.2)^2 \leq 2$$
$$0.5(x_1-3.2)^2+x_2{}^2 \geq 2$$
$$(x_1-1.3)^2 \leq x_2-0.2$$

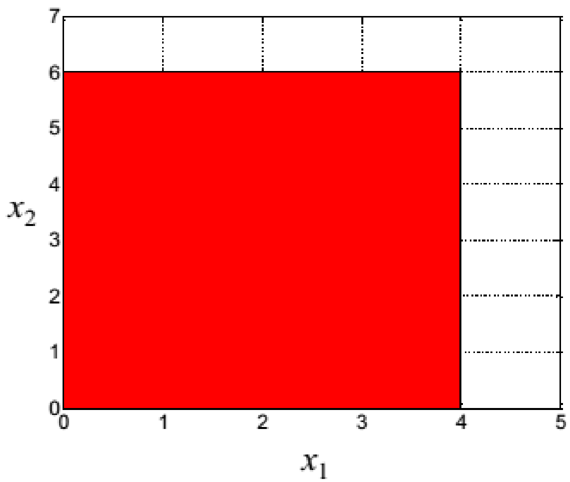
$$y \geq 0.5x^2+5\sin(x)$$

$$\boxed{g_j(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq 0, \ \forall j=1,\ldots,p}$$

Tipos de problemas de optimización

- Las variables pueden ser:

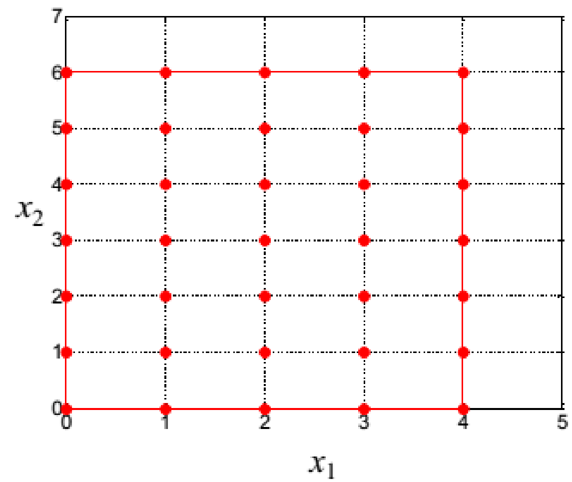
Continuas



$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 6$$

$$\boxed{x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n}$$

Discretas
(binarias o enteras)



$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_3 \ enteros$$

$$\boxed{x_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n}$$

Tipos de problemas de optimización

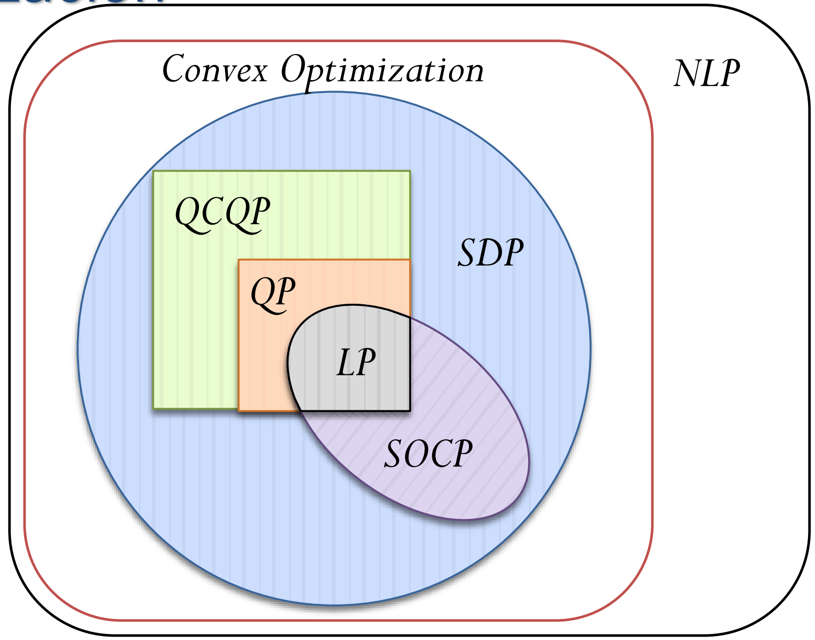
- Programación lineal (LP) (PL)
  - Estudia el caso donde la función objetivo es lineal, las variables son continuas y el conjunto de restricciones son lineales
- Programación cuadrática (QP) (PQ)
  - Estudia el caso en que la función objetivo tiene términos cuadráticos, las variables son continuas y el conjunto de restricciones son lineales.
- Programación cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP) (PQRQ)
  - Estudia el caso en que la función objetivo tiene términos cuadráticos, las variables son continuas y el conjunto de restricciones son lineales y cuadráticas.
- Programación cónica de segundo orden (SOCP) (PCSO)
  - Estudia el caso en que la función objetivo tiene términos lineales, las variables son continuas y el conjunto de restricciones son lineales y cónicas de segundo orden.

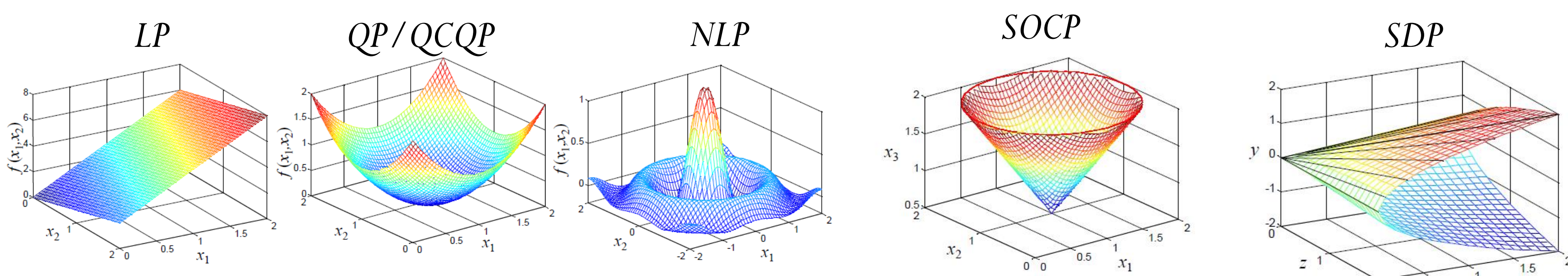
Tipos de problemas de optimización

- Programación semidefinida (SDP) (PSD)
  - Estudia el caso donde la función objetivo es una función lineal de una matriz simétrica X, la cual es optimizada sujeto a un conjunto de restricciones lineales de los elementos de la matriz X. La restricción adicional es que la solución tiene que ser semidefinida positiva
- Programación no lineal (NLP) (PNL)
  - Estudia el caso en que la función objetivo o las restricciones, o ambos, contienen términos no lineales y las variables son continuas.

Tipos de problemas de optimización

- Linear Programming (LP)
- Quadratic Programming (QP)
- Quadratically Constrained Quadratic Programming (QCQP)
- Second-Order Cone Programming (SOCP)
- Semidefinite Programming (SDP)
- Non-Linear Programming (NLP)





LP:

$f(x_1,x_2)=x_1+3x_2$

$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i}$

QP / QCQP:

$f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$

$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q_{ij}x_i x_j}$

NLP:

$f(x_1,x_2)=\frac{sen(\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$

$\boxed{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$

SOCP:

$\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}\le\frac{2x_3}{3}-\frac{1}{3}$

SDP:

$xz-y^2\ge 0$

$x,z\ge 0$

Óptimo global vs óptimo local

- Las solución x será un máximo local si $f(x) \geq f(\dot{x})$, para todo $\dot{x}$ alrededor a x.
- Las solución x será un mínimo local si $f(x) \leq f(\dot{x})$, para todo $\dot{x}$ alrededor a x.
- Las solución x será un máximo global si $f(x) \geq f(\dot{x})$, para todo $\dot{x}$ de x.
- Las solución x será un mínimo global si $f(x) \leq f(\dot{x})$, para todo $\dot{x}$ de x.