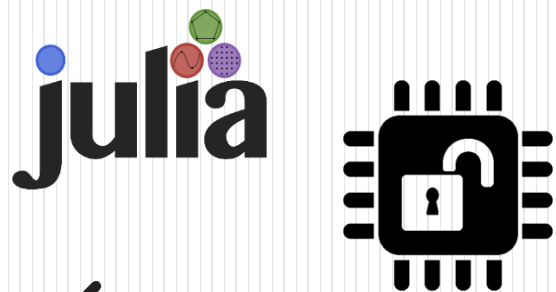


Tópico

LP & MIP

Mar 2019



AUTORES:
ERIK ALVAREZ
JEFFERSON CHÁVEZ

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
DSEE – Departamento de Sistemas de Energia Elétrica





- Cualquier PL puede ser colocado en una forma estándar

$$\text{Minimizar} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = v$$

$$\text{Sujeto a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

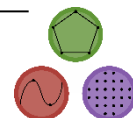
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

- Las constantes c_j, b_i y $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$ & $j = 1, 2, \dots, n$ describen un PL particular
- La forma estándar, $b_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$



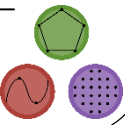
$$\text{Min} \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- **Método simplex primal y dual (SX).**
 - Muchas iteraciones simples, moviéndose de un vértice a otro adyacente de la región factible con mejor función objetivo.
 - Eficiente para problemas de tamaño medio.
 - El tiempo computacional depende del número de restricciones al cubo.
- **Método de punto interior (PI) primal-dual y predictor-corrector**
 - Pocas iteraciones computacionalmente costosas por puntos interiores de la región factible
 - Eficiente para problemas de grande tamaño.
 - EL tiempo computacional depende casi linealmente del número de elementos no nulos de la matriz de restricciones.
- **Para un problema convexo:** ambos métodos encuentran una *solución óptima* o *global*, no tiene problemas de convergencia.





$$\max_{x_1, x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

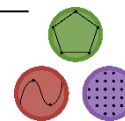
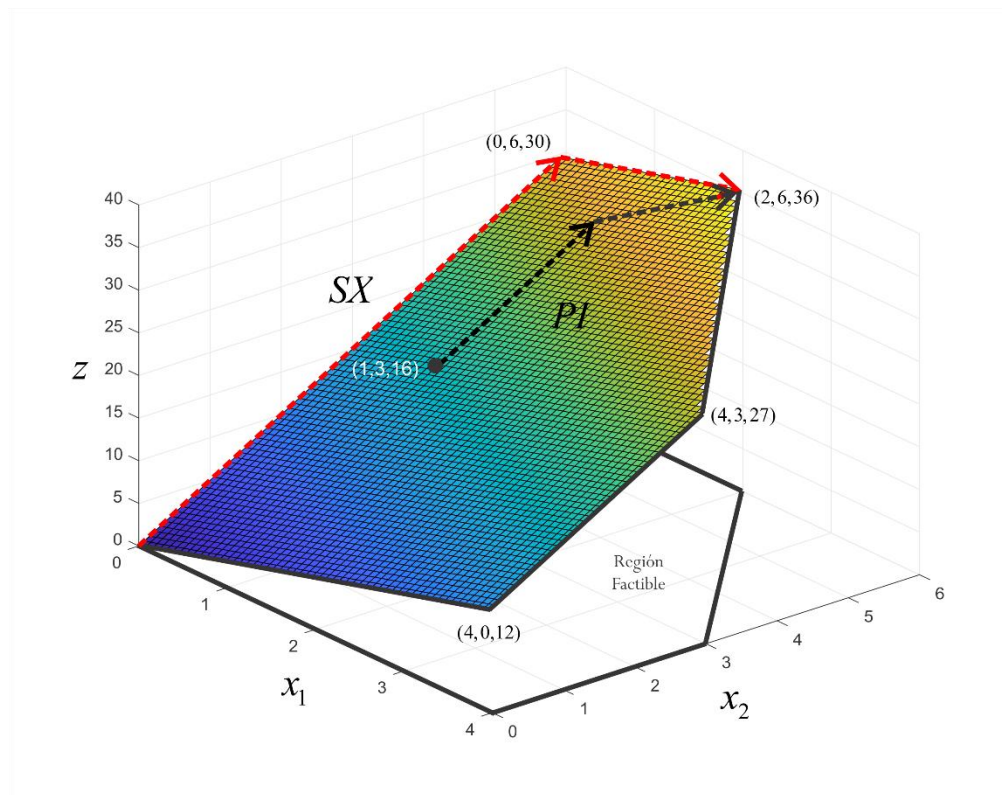
s.t.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$0 \leq x_1, x_2$$





$$\max_{x_1, x_2} z = 2x_1 + x_2$$

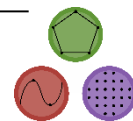
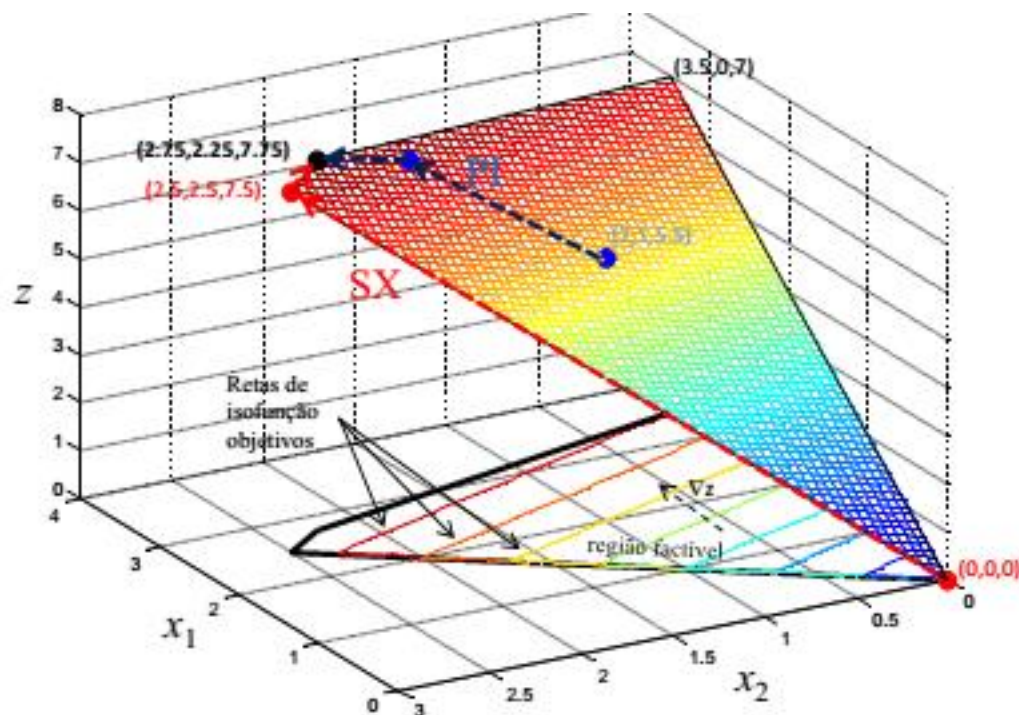
s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$0 \leq x_1, x_2$$



- Ejemplo
 - Implementar el siguiente problema PL en Julia

$$\max_{x_1, x_2, x_3} z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

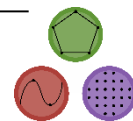
s.t.

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -5$$

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2, x_3$$



$$\text{Min} \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n d_i y_i$$

Sujeto a

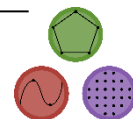
$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^l e_{ji} y_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

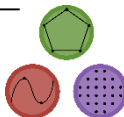
$$y_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, l$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Método de ramificación y limitación (**Branch & Bound**).
- Método de ramificación y corte (**Branch & Cut**)
- Método de planos de cortes
- Métodos de descomposición (**Benders & Lagrangian**)
- Método de enumeración implícita
- Problema no convexo, pueden ser transformados en problemas convexos a través de métodos de relajación
- Todos los métodos encuentran una **solución óptima** o **global**
- No tiene problemas de convergencia, tiempo de procesamiento elevados



- Método de ramificación y limitación (**Branch & Bound**).
 - Es un método de resolución que se basa en la idea de desenvolver una enumeración implícita inteligente de los puntos candidatos a solución óptima entera de un problema, por medio de partición de espacio de soluciones y evaluaciones progresivas de las soluciones.
- Entrega tres procedimientos: aproximación, ramificación (**branching**) y limitación (**bouding**)
- El término Branch se refiere a las particiones hechas por el método y el término bound a las nuevas restricciones adicionadas.
- Utiliza el método simplex de forma recurrente en el proceso de obtener la solución óptima.



- Método de ramificação y limitación (Branch & Bound)

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

Sujeito a

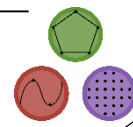
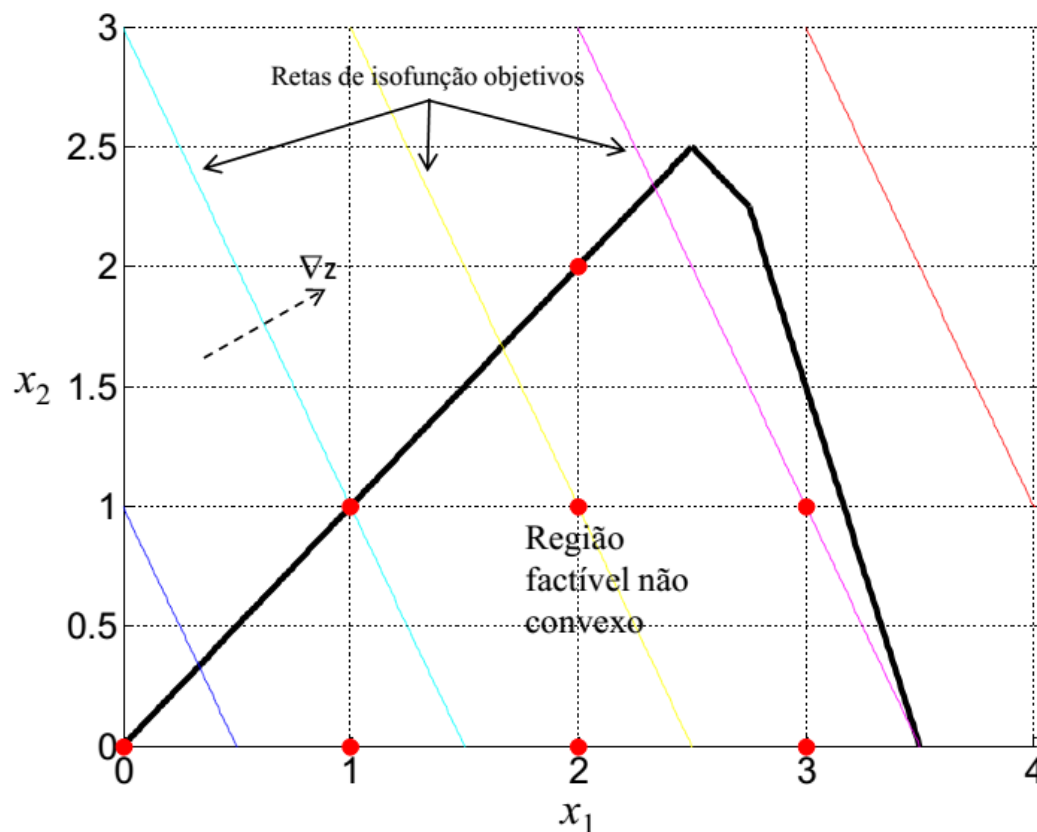
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$

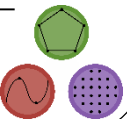
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



- Ignore las restricciones de integralidad y resuelva el problema de programación lineal relajado (PLIR)
- Si la solución es óptima integral, entonces el problema entero también habrá sido resuelto. El algoritmo termina.
- Sino, el valor v encontrado se transforma en un limitante superior, LS, para el valor óptimo del problema entero.

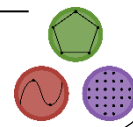
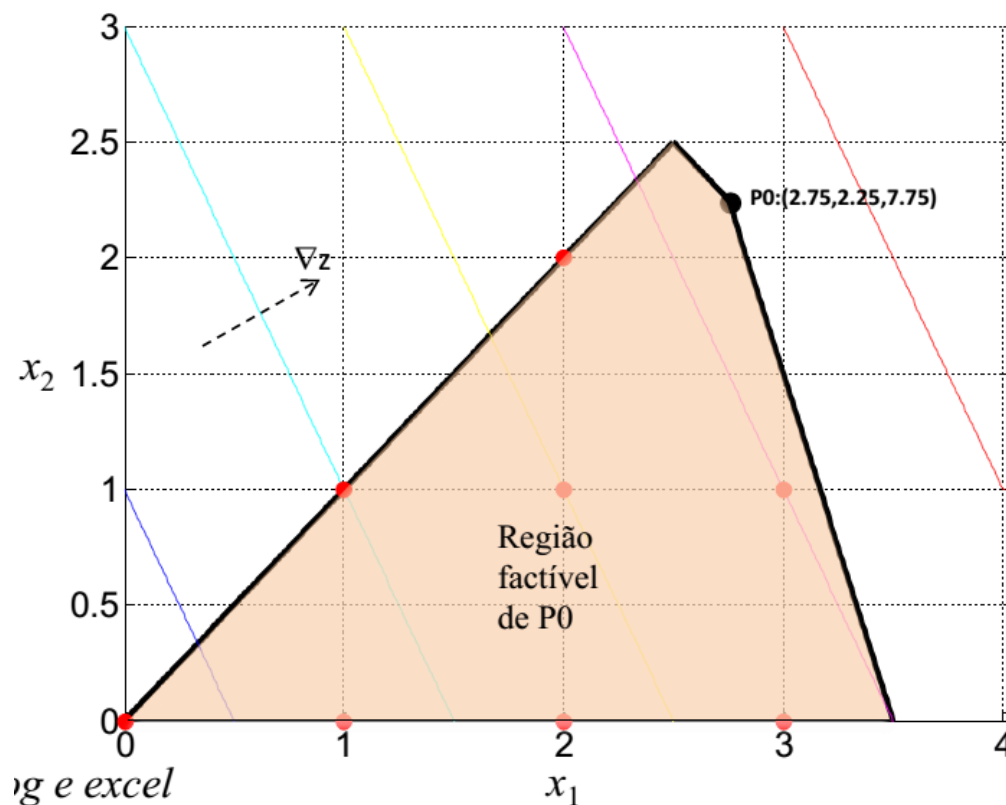
.



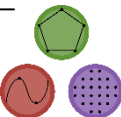
- Método de ramificação y limitación (Branch & Bound)
 - Paso 1: resolver el problema de programación lineal relajado (P0)

P0 {

$$\begin{aligned} \text{Max } z^0 &= 2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a} \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



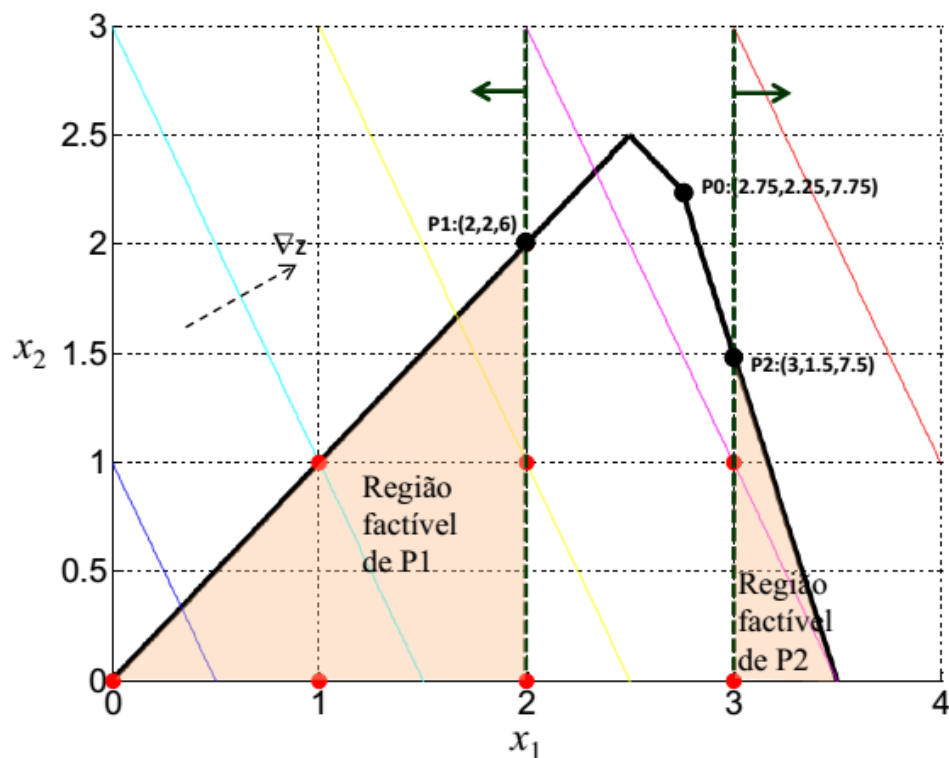
- Si x_j^* , por ejemplo, no es entera, entonces $i_1 \leq x_j^* \leq i_2$, i_1 y i_2 enteros no negativos consecutivos;
- Se crean dos nuevos problemas incluyendo el problema entero las restricciones
 $x_j \leq i_1$ y $i_2 \leq x_j$;
- Se elimina la solución con x_j no entera y se preserva las soluciones viables enteras del problema original;
- Si mas de una variable es no entera, se ramifica la que presenta parte fraccionaria mas próxima de 0,5.



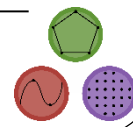
- Método de ramificação y limitación (Branch & Bound)
- Paso 2: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL:
 $P1 (P0 + x_1 \leq 2)$ y $P2(P0 + x_1 \geq 3)$.

$$\begin{aligned} & \text{Max } z^1 = 2x_1 + x_2 \\ & \text{Sujeto a} \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & \mathbf{x_1 \leq 2} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

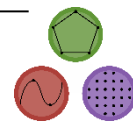
$$\begin{aligned} & \text{Max } z^2 = 2x_1 + x_2 \\ & \text{Sujeto a} \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & \mathbf{x_1 \geq 3} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



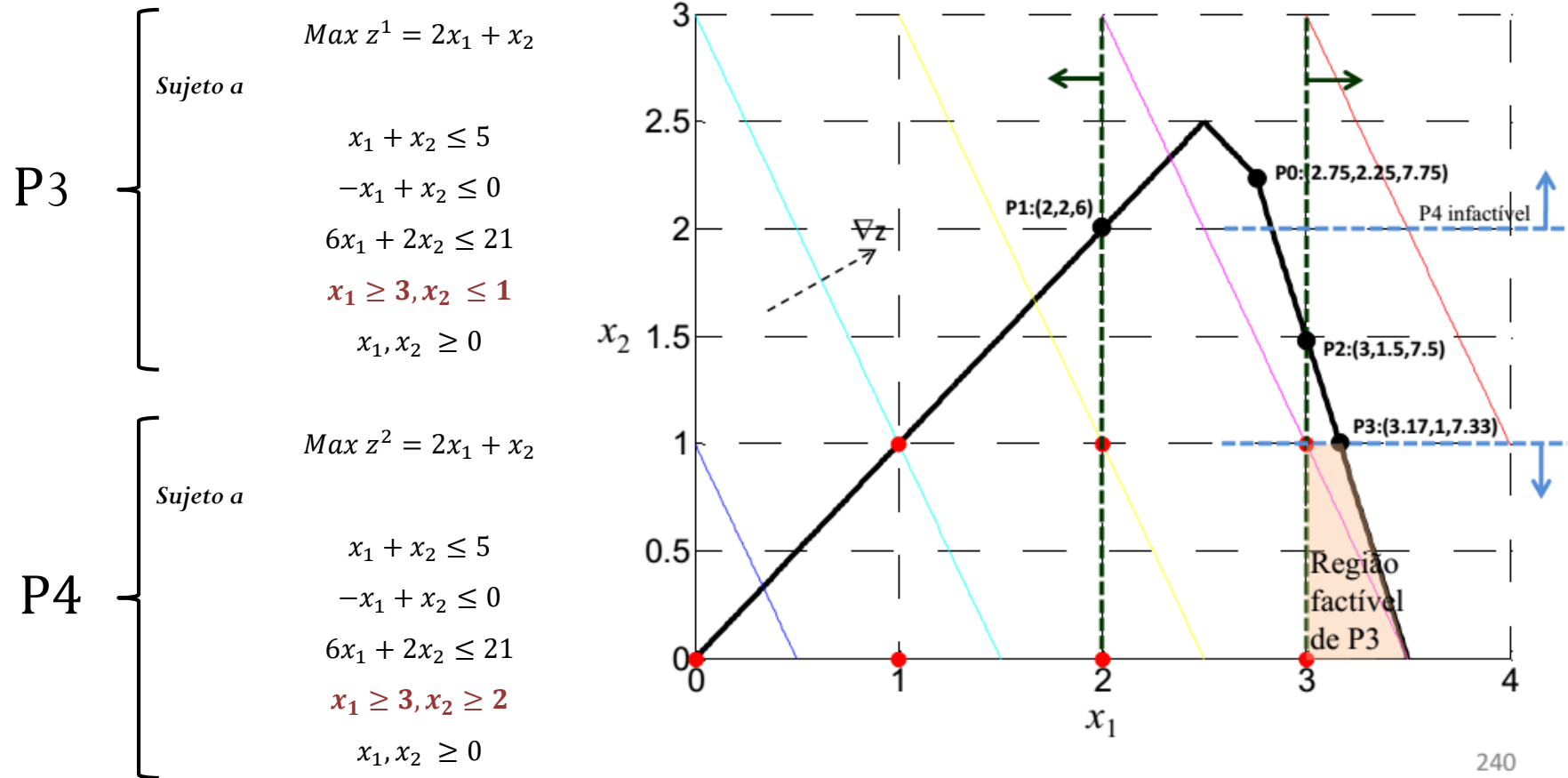
238



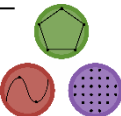
- Las aproximaciones de (P1) y (P2) son:
 - (P1) $x_1 = 2, x_2 = 2$ y $v = 6$
 - (P2) $x_1 = 3, x_2 = 1,5$ y $v = 7,5$
- El proceso de ramificación prosigue hasta que una aproximación presente la solución entera.
- El valor v^* asociado a soluciones enteras se torna una limitante inferior, LI. Así LI=6.
- Los problemas cuyas aproximaciones (integrales o no) poseen valores inferiores a LI son descartados;
- Se actualiza LI siempre que una aproximación presente solución entera con v mayor;
- El método Branch & Bound termina cuando no existen mas problemas ramificados;
- En el ejemplo, la ramificación prosigue con (P2) la variable x_2 , del caso $1 \leq x_2 \leq 2$



- Método de ramificação y limitación (Branch & Bound)
- Paso 3: Escoger la variable x_2 para dividir y resolver los problemas de PL:
 $P3 (P2 + x_2 \leq 1)$ y $P4(P2 + x_2 \geq 2)$.



- Las aproximaciones de (P3) y (P4) son:
 - (P3) $x_1 = 3,17, x_2 = 1$ y $v = 7,33$
 - (P4) Inviabile
- La ramificación, algún problema puede no ser viable, ramificaciones de este problema no son posibles;
- Pero todavía no es posible descartar el problema P3.
- La aproximación (P3)' no es integral. Una nueva ramificación es necesaria;
- Note que: si existen mas de una aproximación no integrales. Una nueva ramificación es necesaria; se ramifica el problema cuyo valor óptimo v este mas próximo de LS;



- Método de ramificação y limitación (Branch & Bound)
- Paso 4: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL:
 $P5 (P3 + x_1 \leq 3)$ y $P6 (P3 + x_1 \geq 4)$.

P5

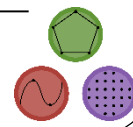
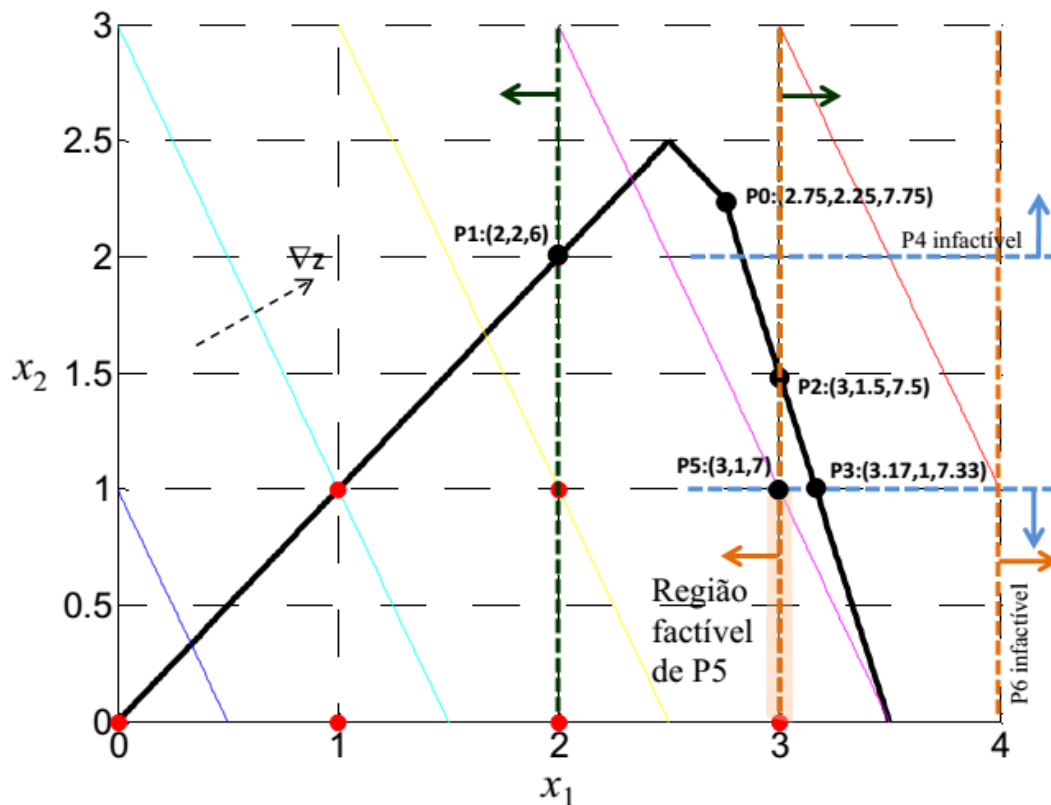
Sujeto a

$$\begin{aligned} \text{Max } z^1 &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\ x_1 &\geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

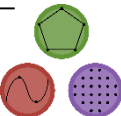
P6

Sujeto a

$$\begin{aligned} \text{Max } z^2 &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\ x_1 &\geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

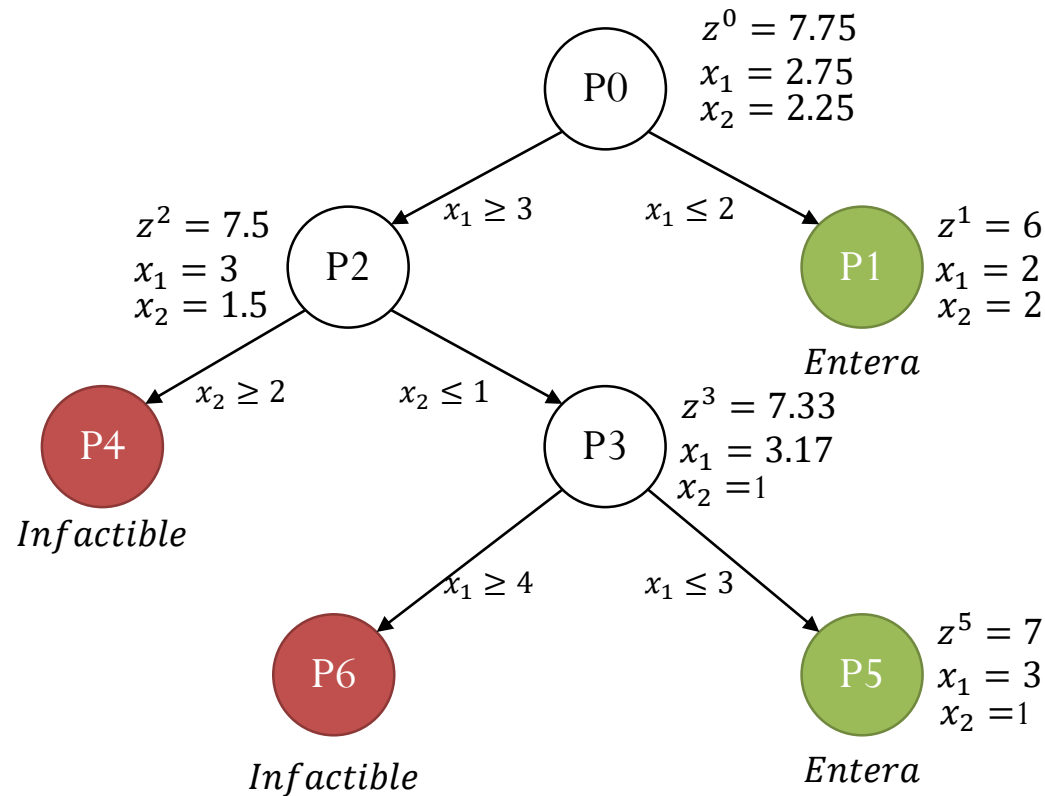


- Las aproximaciones de (P5) y (P6) son:
 - (P5) $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$
 - (P6) Inviabile
- Se actualiza el limitante inferior para $LI = 7$
- Como no existen mas problemas a ser ramificados, la solución óptima del problema es $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$



Programación entera mixta

- Árbol Branch and Bound (B&B).



- Enumeración implícita de las soluciones enteras factibles.
 - Utiliza el principio divide y vencerás.
 - Divide (ramifica) el conjunto de soluciones en subconjuntos disyuntos cada vez menores
 - Determina (limita) el valor de la mejor solución de cada subconjunto
 - Poda (elimina) la rama del árbol se acota indica que no puede contener la solución óptima

- Ejemplo
 - Implementar el siguiente problema MIP en Julia

$$\max_{x_1, x_2, x_3} z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

s.t.

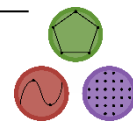
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -5$$

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2, \quad \text{integer}$$

$$x_3, \quad \text{binary}$$





“The new becomes old, and the old becomes new...a life cycle”

спасибо 谢谢
GRACIAS
THANK YOU
ありがとうございました MERCI
DANKE धन्यवाद
شُكراً OBRIGADO

