# Tópico

## Flujo de Carga: Formulación

Mar 2019


**Autores:**
Erik Alvarez
Jefferson Chávez

Universidade Estadual de Campinas
**DSEE** – **D**epartamento de **S**istemas de **E**nergia **E**létrica

# Notación

| | |
|---|---|
| $\Omega_b$ | Conjunto de barras |
| $\Omega_l$ | Conjunto de circuitos |
| $V_i$ | Magnitud de la tensión en la barra $i$ |
| $\theta_i$ | Ángulo de fase en la barra $i$ |
| $g_i^{sh}$ | Conductancia shunt en la barra $i$ |
| $b_i^{sh}$ | Susceptancia shunt en la barra $i$ |
| $P_i^g$ | Potencia activa generada en la barra $i$ |
| $Q_i^g$ | Potencia reactiva generada en la barra $i$ |
| $P_i^d$ | Potencia activa demandada en la barra $i$ |
| $Q_i^d$ | Potencia reactiva demandada en la barra $i$ |
| $P_{ij}^{de}$ | Flujo de potencia activa que sale de la barra $i$ en dirección a barra $j$ en el circuito $ij$ |
| $Q_{ij}^{de}$ | Flujo de potencia reactiva que sale de la barra $i$ en dirección a barra $j$ en el circuito $ij$ |
| $P_{ij}^{pa}$ | Flujo de potencia activa que sale de la barra $j$ en dirección a barra $i$ en el circuito $ij$ |
| $Q_{ij}^{pa}$ | Flujo de potencia reactiva que sale de la barra $j$ en dirección a barra $i$ en el circuito $ij$ |

| | |
|---|---|
| $g_{ij}$ | Conductancia serie en el circuito $ij$ |
| $b_{ij}$ | Susceptancia serie en el circuito $ij$ |
| $b_{ij}^{shl}$ | Susceptancia shunt en el circuito $ij$ |
| $a_{ij}$ | Relación de transformación en el circuito $ij$ |
| $\varphi_{ij}$ | Ángulo de desfase en el circuito $ij$ |

# Ecuaciones de Flujo de Carga AC (1/3) (Polar)

$$P_i^g - P_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} P_{ij}^{de} - \sum_{ij \in \Omega_l} P_{ij}^{pa} + g_i^{sh} V_i^2 = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$Q_i^g - Q_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} Q_{ij}^{de} - \sum_{ij \in \Omega_l} Q_{ij}^{pa} + b_i^{sh} V_i^2 = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$P_{ij}^{de} = g_{ij} a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{de} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_{ij}^{pa} = g_{ij} V_j^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{pa} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) V_j^2 + a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

# Ecuaciones de Flujo de Carga AC (2/3) (Polar)

- El sistema de ecuaciones algebraicas no lineales representa a operación en régimen permanente de un SEE.

- Si se conoce (como es asumido en el problema de Flujo de Carga):
  - Magnitud de la tensión de todos los generadores $\left(V_i^g\right)$
  - Generación de potencia activa de los generadores $\left(P_i^{g0}\right)$, a excepción del generador de referencia (***barra slack*** o ***swing***), para cerrar el balance de potencia
  - Ángulo de fase del generador de referencia $(\theta_1^0)$
- El número de ecuaciones es igual al numero de incógnitas, por lo que este sistema de ecuaciones tiene una única solución. (magnitudes de la tensión en torno a 1pu).

- Entonces, es posible calcular el punto de operación en régimen permanente de un SEE, resolviendo un problema PNL, minimizando a generación de la barra slack.

# Ecuaciones de Flujo de Carga AC (3/3) (Polar)

$$\min_{g} \sum_{i \in \Omega_b | Tb_i = 3} P_i^g$$

S.a.

$$P_i^g - P_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} P_{ij}^{de} - \sum_{ij \in \Omega_l} P_{ij}^{pa} + g_i^{sh} V_i^2 = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$Q_i^g - Q_i^d - \sum_{ij \in \Omega_l} Q_{ij}^{de} - \sum_{ij \in \Omega_l} Q_{ij}^{pa} + b_i^{sh} V_i^2 = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$P_{ij}^{de} = g_{ij} a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{de} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) a_{ij}^2 V_i^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_{ij}^{pa} = g_{ij} V_j^2 - a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{pa} = -(b_{ij} + b_{ij}^{shl}) V_j^2 + a_{ij} V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + a_{ij} V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_i^g = P_i^{g0}; \forall i \in \Omega_b | Tb_i = 2$$

$$V_i = V_i^g; \forall i \in \Omega_b | Tb_i = 2 \text{ o } Tb_i = 3$$

$$\theta_i = \theta_i^0; \forall i \in \Omega_b | Tb_i = 3$$

# Ecuaciones de Flujo de Carga AC (1/2) (Rectangular)

- Sea tensión en la barra $i$ en coordenadas rectangulares:

$$V_i e^{\boldsymbol{j}\theta_i} = V_i \cos(\theta_i) + \boldsymbol{j}\, V_i \sin(\theta_i) = e_i + \boldsymbol{j} f_i$$

- Donde, $e_i = V_i \cos(\theta_i)$ & $f_i = V_i \sin(\theta_i)$ son las componentes real e imaginaria de la tensión en la barra $i$ en pu.
- Entonces se puede mostrar que:
  - $V_i^2 = e_i^2 + f_i^2$
  - $V_j^2 = e_j^2 + f_j^2$
  - $V_i V_i \cos(\theta_{ij}) = e_i e_j + f_i f_j$
  - $V_i V_j \sin(\theta_{ij}) = -(e_i f_j - e_j f_i)$

  Asumiendo, por simplicidad que: $\varphi_{ij} = 0$

# Ecuaciones de Flujo de Carga AC (2/2) (Rectangular)

$$\min_{g} \sum_{i\in\Omega_b|Tb_i=3} P_i^g$$

S.a.

$$P_i^g - P_i^d - \sum_{ij\in\Omega_l} P_{ij}^{de} - \sum_{ij\in\Omega_l} P_{ij}^{pa} + g_i^{sh}\left(e_i^2 + f_i^2\right) = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$Q_i^g - Q_i^d - \sum_{ij\in\Omega_l} Q_{ij}^{de} - \sum_{ij\in\Omega_l} Q_{ij}^{pa} + b_i^{sh}\left(e_i^2 + f_i^2\right) = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$P_{ij}^{de} = g_{ij}a_{ij}^2\left(e_i^2 + f_i^2\right) - a_{ij}g_{ij}\left(e_ie_j + f_if_j\right) + a_{ij}b_{ij}\left(e_if_j - e_jf_i\right) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{de} = -\left(b_{ij} + b_{ij}^{shl}\right)a_{ij}^2\left(e_i^2 + f_i^2\right) + a_{ij}g_{ij}\left(e_if_j - e_jf_i\right) + a_{ij}b_{ij}\left(e_ie_j + f_if_j\right) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_{ij}^{pa} = g_{ij}\left(e_i^2 + f_i^2\right) - a_{ij}g_{ij}\left(e_ie_j + f_if_j\right) - a_{ij}b_{ij}\left(e_if_j - e_jf_i\right) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$Q_{ij}^{pa} = -\left(b_{ij} + b_{ij}^{shl}\right)\left(e_i^2 + f_i^2\right) - a_{ij}g_{ij}\left(e_if_j - e_jf_i\right) + a_{ij}b_{ij}\left(e_ie_j + f_if_j\right) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_i^g = P_i^{g0}; \forall i \in \Omega_b|Tb_i = 2$$

$$\left(e_i^2 + f_i^2\right) = \left(V_i^g\right)^2; \forall i \in \Omega_b|Tb_i = 2 \text{ o } Tb_i = 3$$

$$f_i = e_i \tan\left(\theta_i^0\right); \forall i \in \Omega_b|Tb_i = 3$$

# Ecuaciones de Flujo de Carga DC (1/2) (Linealizado)

- Simplificaciones para linealizar el flujo de potencia:
  - Ignorar las ecuaciones de potencia reactiva
  - Asumir un perfil flat de las tensiones de todas las barras:

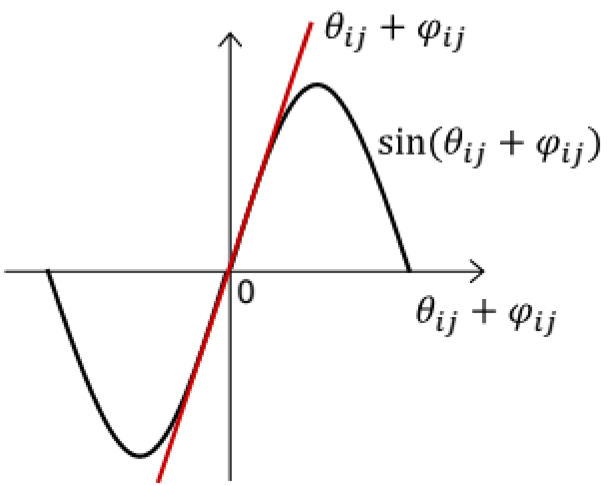
$$V_i \cong V_j \cong 1$$

  - Ignorar las pérdidas de potencia activa en las líneas

$$x_{ij} \gg r_{ij} \text{ por lo tanto } g_{ij} \cong 0$$

  - Para ángulos pequeños:

$$\sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \cong \theta_{ij} + \varphi_{ij}$$
$$\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \cong 1$$



# Ecuaciones de Flujo de Carga DC (2/2) (Lineal)

$$\min_{g} \sum_{i\in\Omega_b|Tb_i=3} P_i^g$$

S.a.

$$P_i^g - P_i^d + \sum_{ji\in\Omega_l} P_{ji} - \sum_{ij\in\Omega_l} P_{ij} = 0 \qquad \forall i \in \Omega_b$$

$$P_{ij}^{de} = -a_{ij}b_{ij}\left(\theta_i - \theta_j + \varphi_{ij}\right) \qquad \forall ij \in \Omega_l$$

$$P_i^g = P_i^{g0}; \forall i \in \Omega_b|Tb_i = 2$$

$$\theta_i = \theta_i^0; \forall i \in \Omega_b|Tb_i = 3$$