Tópico

LP & MIP

Mar 2019

Autores:

Erik Alvarez

Jefferson Chávez

Universidade Estadual de Campinas

DSEE – **D**epartamento de **S**istemas de **E**nergia **E**létrica

- Cualquier PL puede ser colocado en una forma estándar

$$\begin{array}{llcccccccl}
\text{Minimizar} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & = & v \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
& a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\
& x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & \dots & & x_n \geq 0. & &
\end{array}$$

- Las constantes c_j, b_i y a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$ & $j = 1,2,\dots,n$ describen un PL particular
- La forma estándar, $b_i \geq 0$ para $i = 1,2,\dots,m$

Programación lineal (PL): Métodos de solución

$$Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$Sujeto\ a$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

- ***Método simplex primal y dual*** (SX).
  - Muchas iteraciones simples, moviéndose de un vértice a otro adyacente de la región factible con mejor función objetivo.
  - Eficiente para problemas de tamaño medio.
  - El tiempo computacional depende del número de restricciones al cubo.
- ***Método de punto interior*** (PI) primal-dual y predictor-corrector
  - Pocas iteraciones computacionalmente costosas por puntos interiores de la región factible
  - Eficiente para problemas de grande tamaño.
  - EL tiempo computacional depende casi linealmente del número de elementos no nulos de la matriz de restricciones.
- ***Para un problema convexo:*** ambos métodos encuentran una solución óptima o global, no tiene problemas de convergencia.

Programación lineal: Forma gráfica

$$\max_{x_1, x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

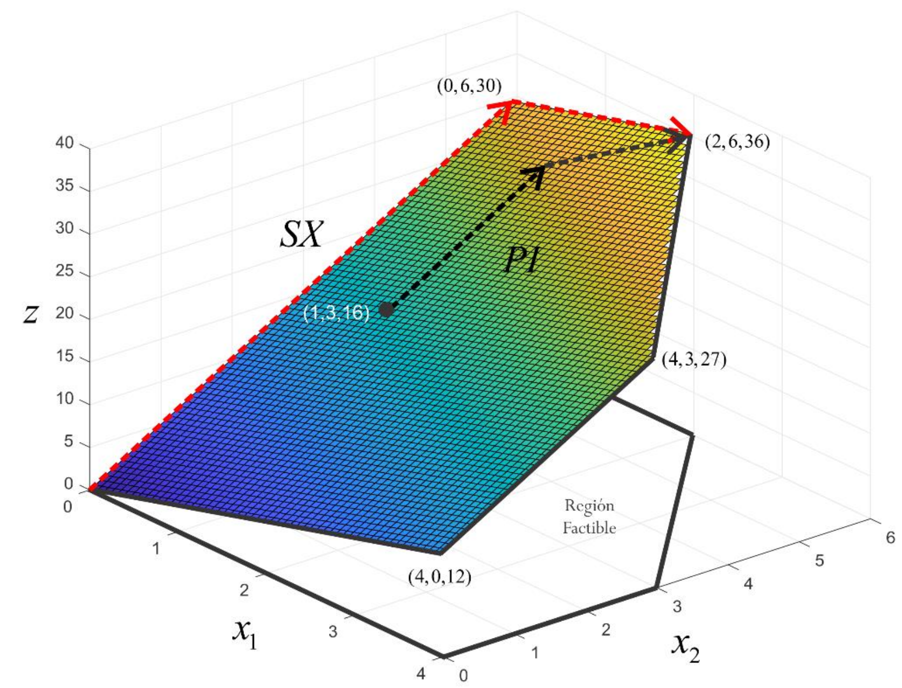
s.t.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$0 \leq x_1, x_2$$



Programación entera mixta: Formulación

- Cualquier PL puede ser colocado en una forma estándar

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{Minimizar} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & = v \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1, \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2, \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m, \\
 & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & \dots & & x_n \geq 0. &
\end{array}
$$

- Las constantes c_j, b_i y a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$ & $j = 1,2,\dots,n$ describen un PL particular
- La forma estándar, $b_i \geq 0$ para $i = 1,2,\dots,m$

Programación entera mixta

$$Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i$$

$$Sujeto\ a$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^{l} e_{ji} y_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, l$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound).
- Método de ramificación y corte (Branch & Cut)
- Método de planos de cortes
- Métodos de descomposición
- Método de enumeración implícita
- Problema no convexo, pueden ser transformados en problemas convexos a través de métodos de relajación
- Todos los métodos encuentran una solución óptima o global
- No tiene problemas de convergencia, tiempo de procesamiento elevados

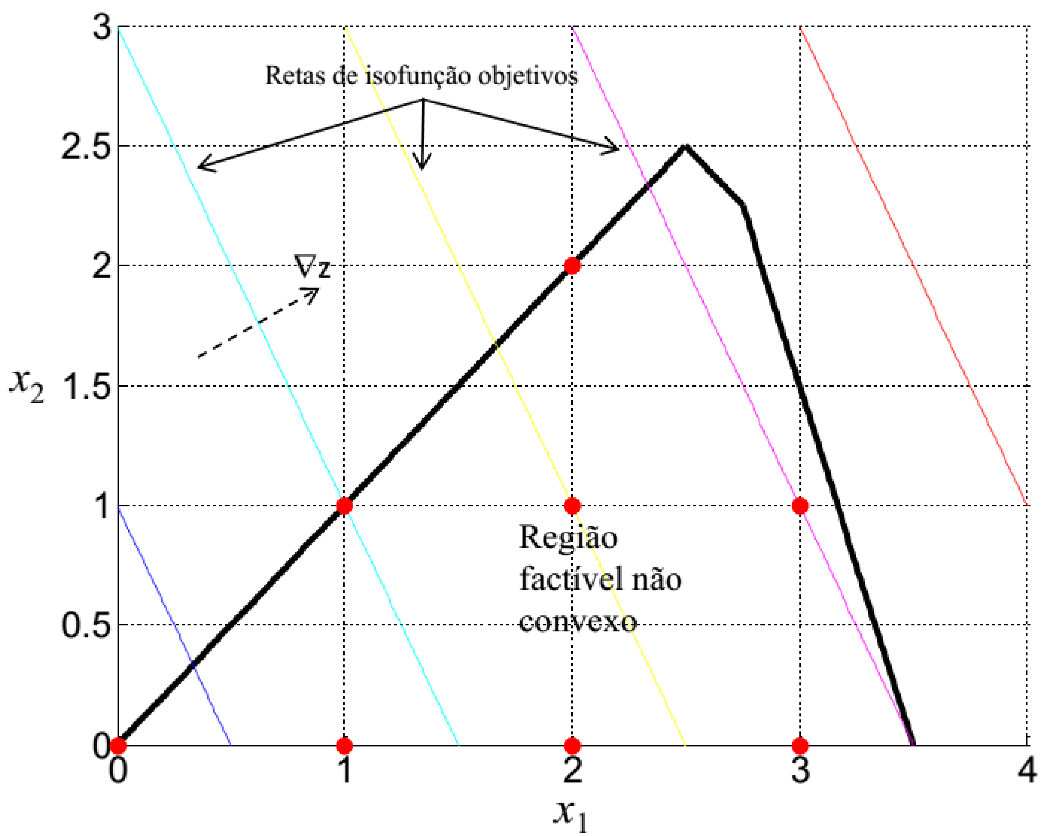
Programación entera mixta

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound).
  - Es un método de resolución que se basa en la idea de desenvolver una enumeración implícita inteligente de los puntos candidatos a solución óptima entera de un problema, por medio de partición de espacio de soluciones y evaluaciones progresivas de las soluciones.
- Entrega tres procedimientos: aproximación, ramificación (branching) y limitación (bouding)
- El término Branch se refiere a las particiones hechas por el método y el término bound a las nuevas restricciones adicionadas.
- Utiliza el método simplex de forma recurrente en el preceso de obtener la solución óptima.

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)

  .

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = 2x_1 + x_2 \\
&Sujeito\ a \\
&x_1 + x_2 \le 5 \\
&-x_1 + x_2 \le 0 \\
&6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
&x_1, x_2 \ge 0 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



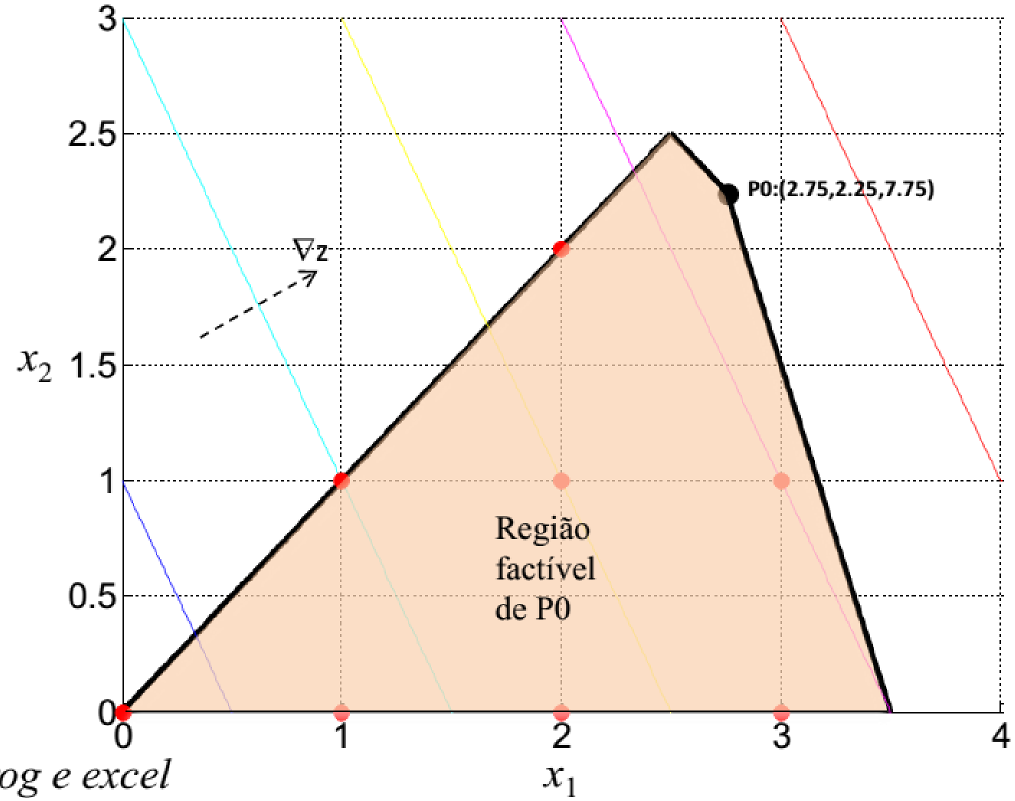
Programación entera mixta

- Ignore las restricciones de integralidad y resuelva el problema de programación lineal relajado (PLIR)
- Si la solución es óptima integral, entonces el problema entero también habrá sido resuelto. El algoritmo termina.
- Sino, el valor v encontrado se transforma en un limitante superior, LS, para el valor óptimo del problema entero.

.

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
  - Paso 1: resolver el problema de programación lineal relajado (P0)
  - .

$$P0 = \begin{cases} Max\ z^0 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Resolver usando linprog, bintprog e excel

Programación entera mixta

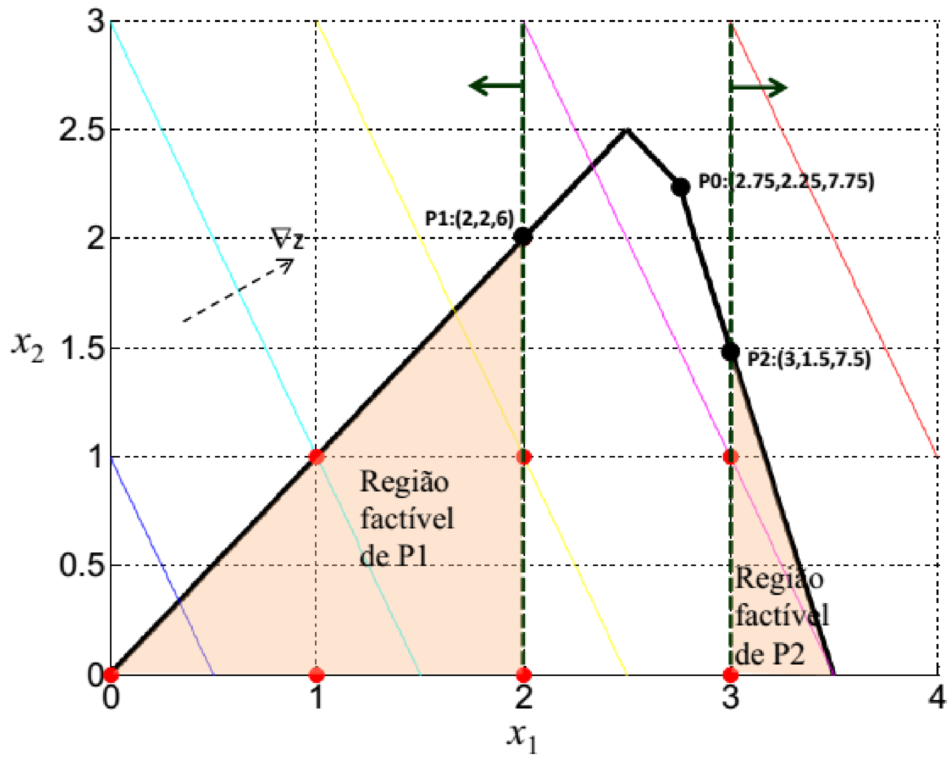
- Si x_j^*, por ejemplo, no es entera, entonces $i_1 \leq x_j^* \leq i_2$, i_1 y i_2 enteros no negativos consecutivos;
- Creanse dos nuevos problemas incluyendo el problema entero las restricciones $x_j \leq i_1 \; y \; i_2 \leq x_j$;
- Se elimina la solución con x_j no entera y se preserva las soluciones viables enteras del problema original;
- Si mas de una variable es no entera, se ramifica la que presenta parte fraccionaria mas próxima de 0,5.

.

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 2: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL: $P1\ (P0 +\ x_1 \leq 2)\ y\ P2(P0 +\ x_1 \geq 3)$.

$$P1 = \begin{cases} Max\ z^1 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P2 = \begin{cases} Max\ z^2 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



mirider@dsee.fee.unicamp.br

238

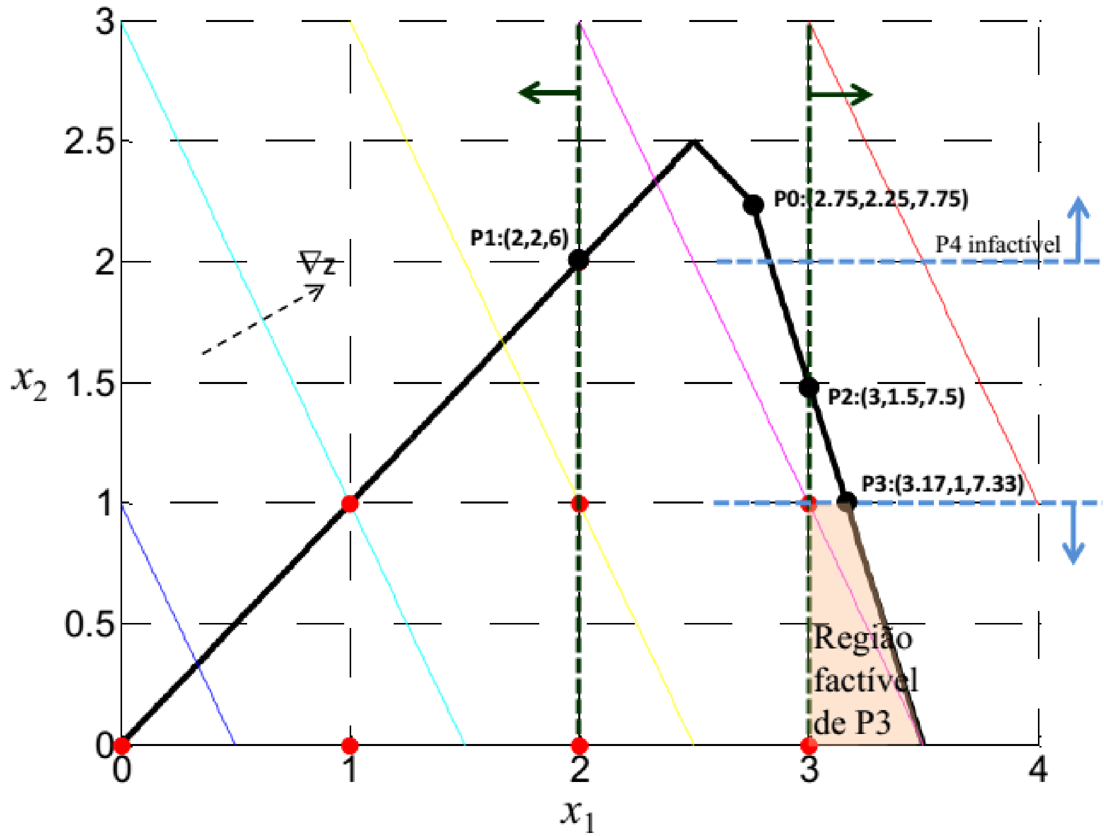
Programación entera mixta

- Las aproximaciones de (P1) y (P2) son:
  - (P1) $x_1 = 2, x_2 = 2$ y $v = 6$
  - (P2) $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$ y $v = 7{,}5$
- El proceso de ramificación prosigue hasta que una aproximación presente la solución entera.
- El valor v^* asociado a soluciones enteras se torna una limitante inferior, LI. Así LI=6.
- Los problemas cuyas aproximaciones (integrales o no) poseen valores inferiores a LI son descartados;
- Se actualiza LI siempre que una aproximación presente solución entera con v mayor;
- El método Branch & Bound termina cuando no existen mas problemas ramificados;
- En el ejemplo, la ramificación prosigue con (P2) la variable x_2, del caso $1 \leq x_2 \leq 2$

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 3: Escoger la variable x_2 para dividir y resolver los problemas de PL: $P3\ (P2 + \ x_2 \leq 1)\ y\ P4(P2 + \ x_2 \geq 2)$.

$$P3 = \begin{cases} Max\ z^3 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ x_1 + \ x_2 \ \leq 5 \\ -x_1 + \ x_2 \ \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3, x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P4 = \begin{cases} Max\ z^4 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ x_1 + \ x_2 \ \leq 5 \\ -x_1 + \ x_2 \ \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Programación entera mixta

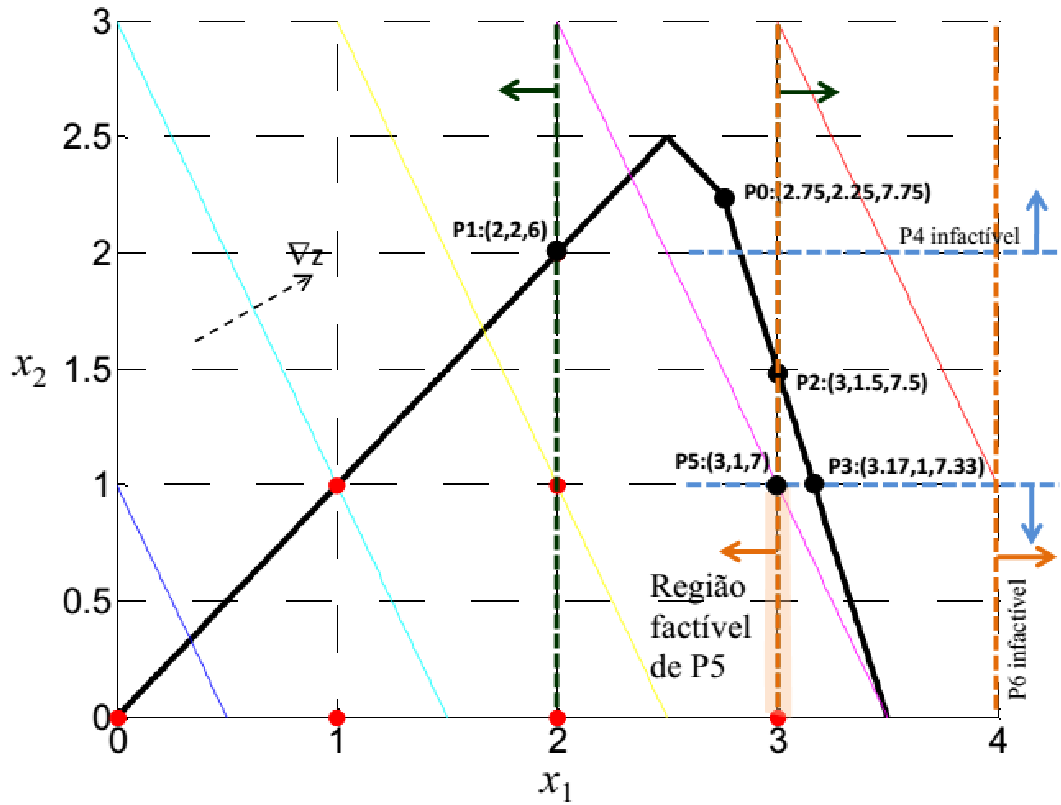
- Las aproximaciones de (P3) y (P4) son:
  - (P3) $x_1 = 3{,}17, x_2 = 1$ y $v = 7{,}33$
  - (P4) Inviable
- La ramificación, algún problema puede no ser viable, ramificaciones de este problema no son posibles;
- Pero todavía no es posible descartar el problema P3.
- La aproximación $(P3)'$no es integral. Una nueva ramificación es necesaria;
- Note que: si existen mas de una aproximación no integrales. Una nueva ramificación es necesaria; se ramifica el problema cuyo valor óptimo v este mas próximo de LS;

Programación entera mixta

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 4: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL: $P5\ (P3 + \ x_1 \leq 3)\ y\ P6(P3 + \ x_1 \geq 4)$.

$$P5 = \begin{cases} Max\ z^5 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ \quad x_1 + \ x_2 \ \leq 5 \\ \ -x_1 + \ x_2 \ \leq 0 \\ \ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \leq 3 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P6 = \begin{cases} Max\ z^6 = 2x_1 + x_2 \\ Sujeito\ a \\ \quad x_1 + \ x_2 \ \leq 5 \\ \ -x_1 + \ x_2 \ \leq 0 \\ \ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \geq 4 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

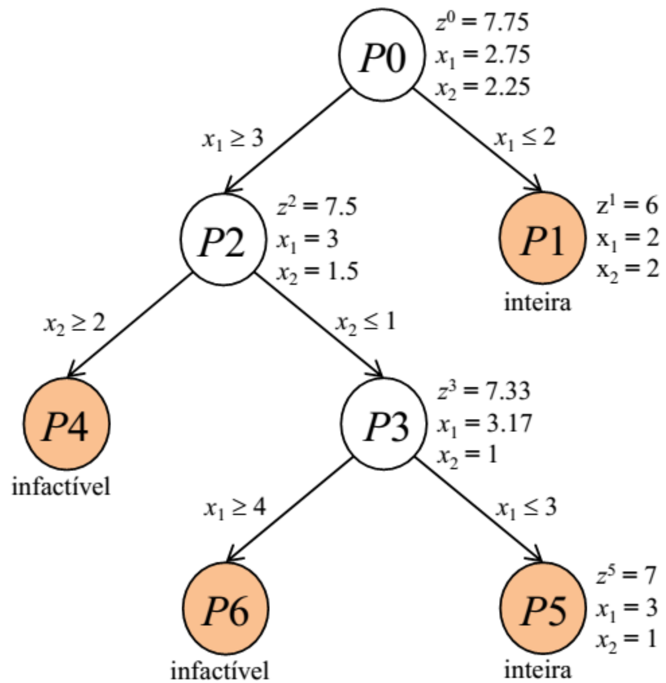


mjrider@dsee.fee.unicamp.br

Programación entera mixta

- Las aproximaciones de (P5) y (P6) son:
  - (P5) $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$
  - (P6) Inviable
- Se actualiza el limitante inferior para LI = 7
- Como no existen mas problemas a ser ramificados, la solución óptima del problema es $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$

- Árbol Branch and Bound (B&B).



- Enumeración implícita de las soluciones enteras factibles.
  - Utiliza el principio divide y venceras.
  - Divide (ramifica) el conjunto de soluciones en subconjuntos disyuntos cada vez menores
  - Determina (limita) el valor de la mejor solución de cada subconjunto
  - Poda (elimina) la rama del árbol se acota indica que no puede contener la solución óptima

"The new becomes old, and the old becomes new…a life cycle"