Tópico

LP & MIP

Mar 2019

Autores:
Erik Alvarez
Jefferson Chávez

Universidade Estadual de Campinas
DSEE – **D**epartamento de **S**istemas de **E**nergia **E**létrica

Programación lineal: Formulación

- Cualquier PL puede ser colocado en una forma estándar

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = v \\
\text{Sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

- Las constantes c_j, b_i y a_{ij}, $i = 1,2, \ldots, m$ & $j = 1,2, \ldots, n$ describen un PL particular
- La forma estándar, $b_i \geq 0$ para $i = 1,2, \ldots, m$

Programación lineal (PL): Métodos de solución

$$Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{aligned} &Sujeto\ a \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m \\ &x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ***Método simplex primal y dual*** (SX).
  - Muchas iteraciones simples, moviéndose de un vértice a otro adyacente de la región factible con mejor función objetivo.
  - Eficiente para problemas de tamaño medio.
  - El tiempo computacional depende del número de restricciones al cubo.
- ***Método de punto interior*** (PI) primal-dual y predictor-corrector
  - Pocas iteraciones computacionalmente costosas por puntos interiores de la región factible
  - Eficiente para problemas de grande tamaño.
  - EL tiempo computacional depende casi linealmente del número de elementos no nulos de la matriz de restricciones.
- ***Para un problema convexo:*** ambos métodos encuentran una ***solución óptima*** o ***global***, no tiene problemas de convergencia.

Programación lineal: Forma gráfica

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

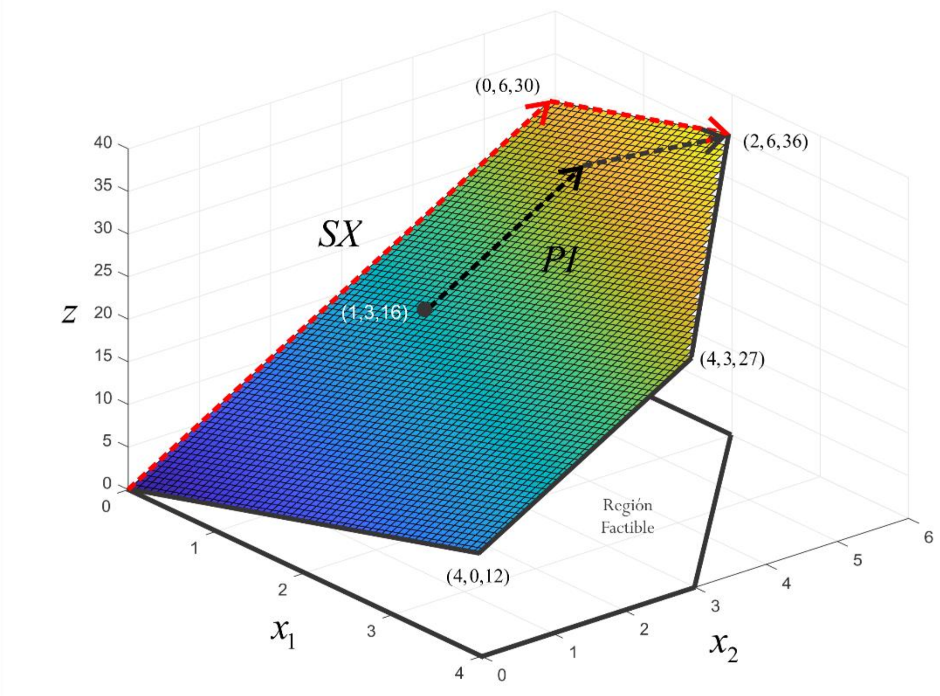
s.t.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$0 \leq x_1, x_2$$



- Ejemplo
  - Implementar el siguiente problema PL en Julia

$$\max_{x_1, x_2, x_3} \; z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -5$$

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2, x_3$$

Programación entera mixta

$$Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i$$

$$Sujeto\ a$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^{l} e_{ji} y_i = b_j, \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, l$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

- Método de ramificación y limitación (***Branch & Bound***).
- Método de ramificación y corte (***Branch & Cut***)
- Método de planos de cortes
- Métodos de descomposición (***Benders & Lagrangian***)
- Método de enumeración implícita
- Problema no convexo, pueden ser transformados en problemas convexos a través de métodos de relajación
- Todos los métodos encuentran una ***solución óptima*** o ***global***
- No tiene problemas de convergencia, tiempo de procesamiento elevados

- Método de ramificación y limitación (***Branch & Bound***).
  - Es un método de resolución que se basa en la idea de desenvolver una enumeración implícita inteligente de los puntos candidatos a solución óptima entera de un problema, por medio de partición de espacio de soluciones y evaluaciones progresivas de las soluciones.
- Entrega tres procedimientos: aproximación, ramificación (***branching***) y limitación (***bouding***)
- El término Branch se refiere a las particiones hechas por el método y el término bound a las nuevas restricciones adicionadas.
- Utiliza el método simplex de forma recurrente en el proceso de obtener la solución óptima.

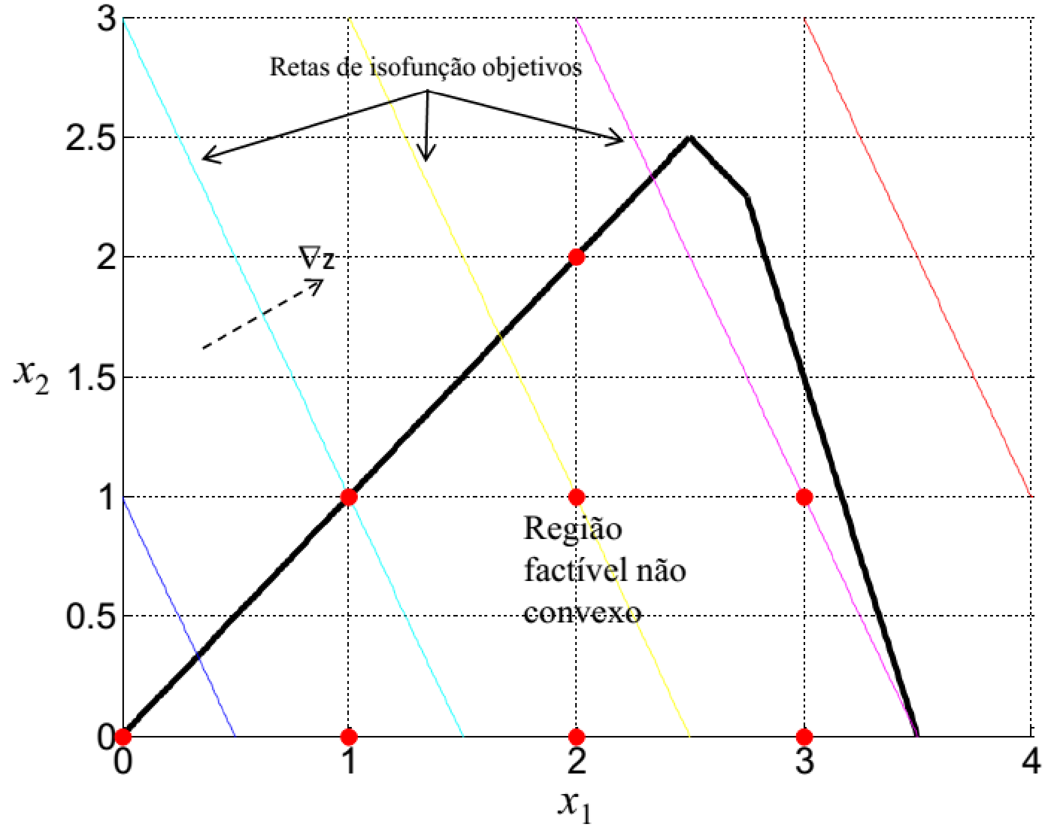
- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)

.

$$Max\ z = 2x_1 + x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



Programación entera mixta

- Ignore las restricciones de integralidad y resuelva el problema de programación lineal relajado (PLIR)
- Si la solución es óptima integral, entonces el problema entero también habrá sido resuelto. El algoritmo termina.
- Sino, el valor v encontrado se transforma en un limitante superior, LS, para el valor óptimo del problema entero.

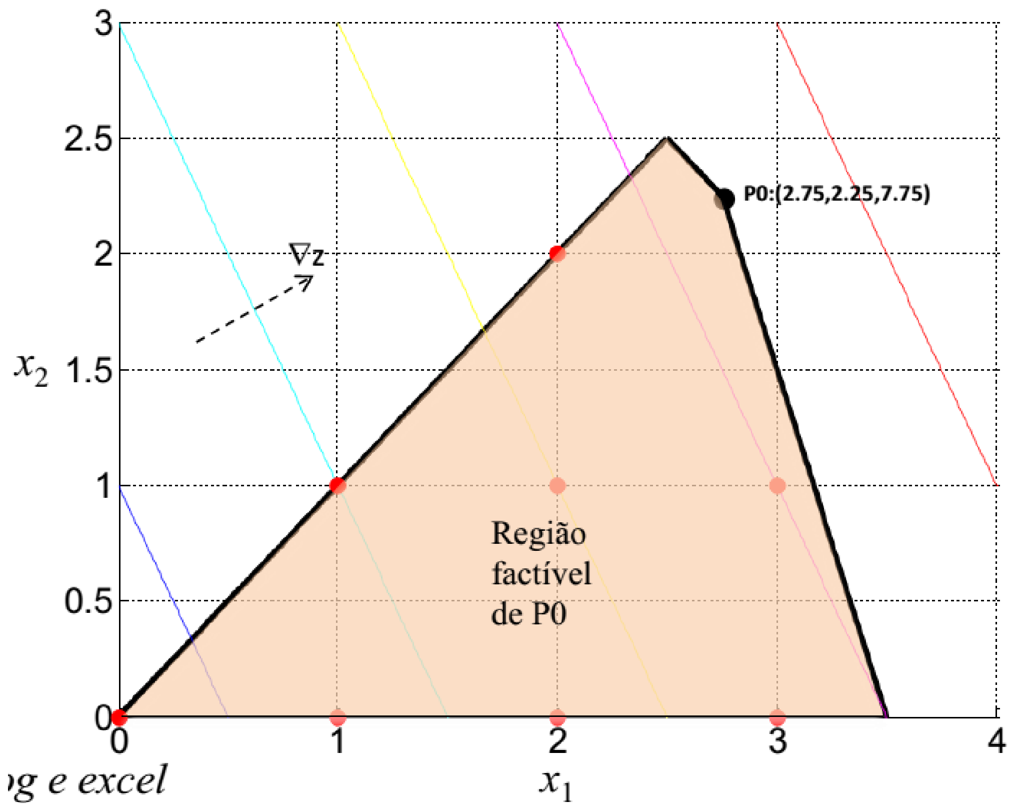
.

Programación entera mixta

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
  - Paso 1: resolver el problema de programación lineal relajado (P0)

.

P0
$$\begin{cases} Max\ z^0 = 2x_1 + x_2 \\ \textbf{\textit{Sujeto a}} \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Programación entera mixta

- Si x_j^*, por ejemplo, no es entera, entonces $i_1 \leq x_j^* \leq i_2$, i_1 y i_2 enteros no negativos consecutivos;
- Se crean dos nuevos problemas incluyendo el problema entero las restricciones $x_j \leq i_1 \; y \; i_2 \leq x_j$;
- Se elimina la solución con x_j no entera y se preserva las soluciones viables enteras del problema original;
- Si mas de una variable es no entera, se ramifica la que presenta parte fraccionaria mas próxima de 0,5.

.

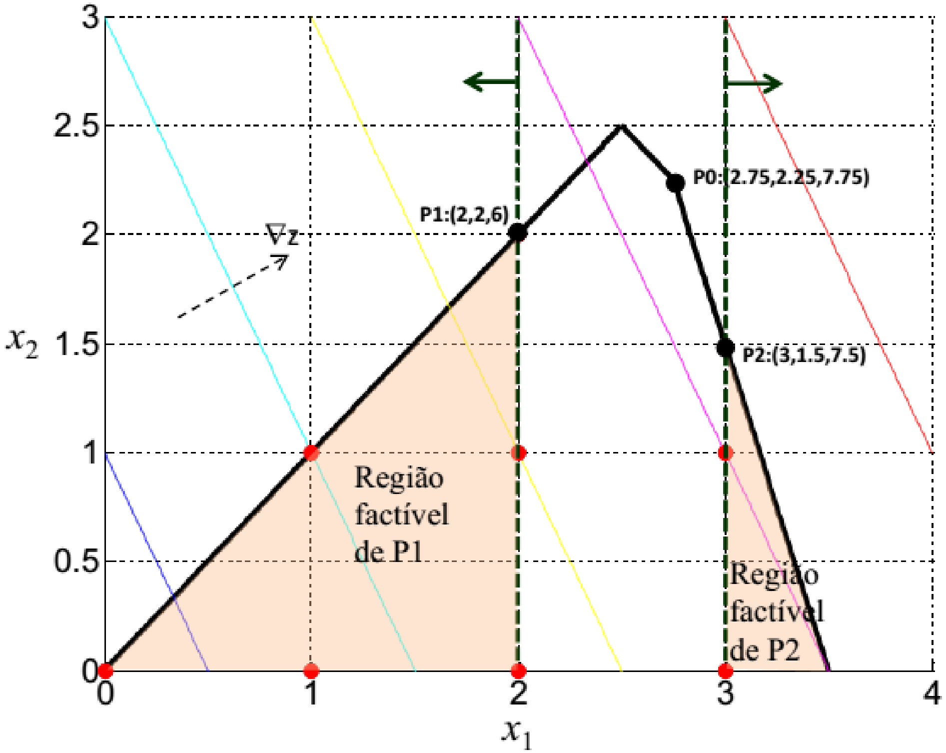
- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 2: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL: $P1\ (P0 + x_1 \leq 2)\ y\ P2(P0 + x_1 \geq 3)$.

P1

$$\begin{aligned} &Max\ z^1 = 2x_1 + x_2 \\ &\textit{Sujeto a} \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-x_1 + x_2 \leq 0 \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ &\mathbf{x_1 \leq 2} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P2

$$\begin{aligned} &Max\ z^2 = 2x_1 + x_2 \\ &\textit{Sujeto a} \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-x_1 + x_2 \leq 0 \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ &\mathbf{x_1 \geq 3} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



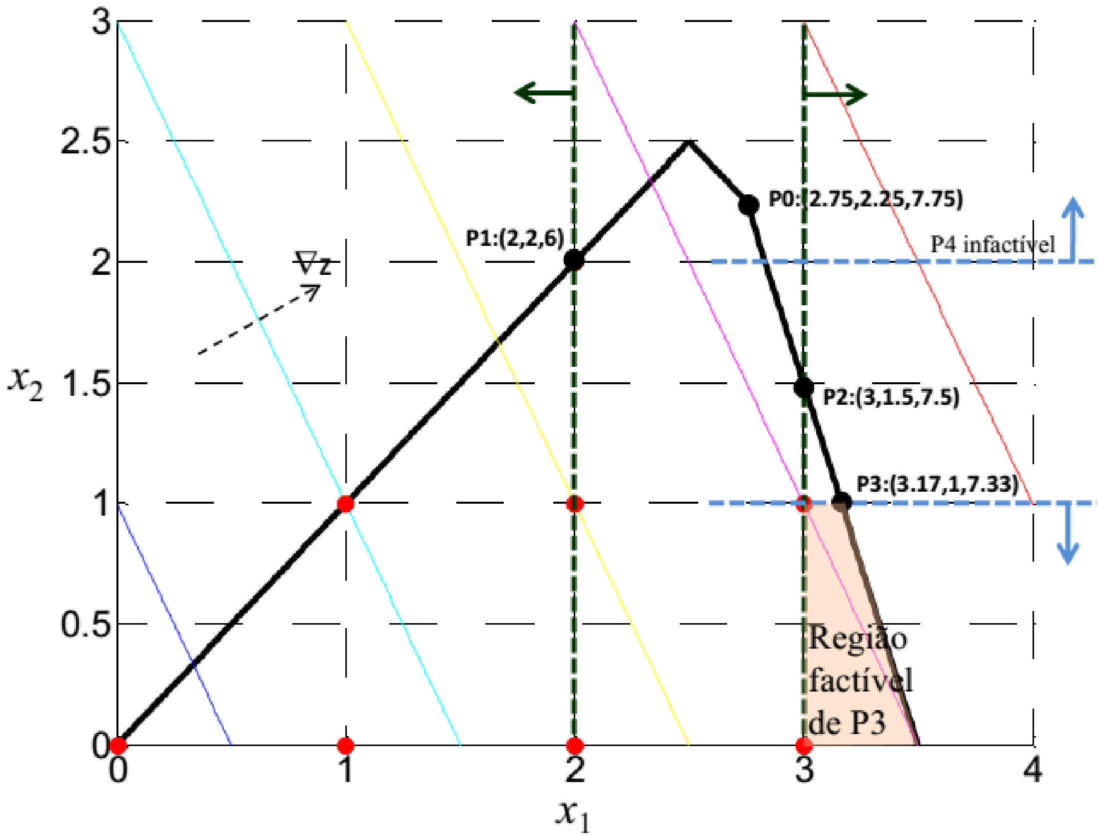
Programación entera mixta

- Las aproximaciones de (P1) y (P2) son:
  - (P1) $x_1 = 2, x_2 = 2$ y $v = 6$
  - (P2) $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$ y $v = 7{,}5$
- El proceso de ramificación prosigue hasta que una aproximación presente la solución entera.
- El valor v^* asociado a soluciones enteras se torna una limitante inferior, LI. Así LI=6.
- Los problemas cuyas aproximaciones (integrales o no) poseen valores inferiores a LI son descartados;
- Se actualiza LI siempre que una aproximación presente solución entera con v mayor;
- El método Branch & Bound termina cuando no existen mas problemas ramificados;
- En el ejemplo, la ramificación prosigue con (P2) la variable x_2, del caso $1 \leq x_2 \leq 2$

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 3: Escoger la variable x_2 para dividir y resolver los problemas de PL: $P3\ (P2 + x_2 \leq 1)\ y\ P4(P2 + x_2 \geq 2)$.

P3
$$\begin{aligned} &Max\ z^1 = 2x_1 + x_2 \\ &\textit{Sujeto a} \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-x_1 + x_2 \leq 0 \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ &\boldsymbol{x_1 \geq 3, x_2 \leq 1} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P4
$$\begin{aligned} &Max\ z^2 = 2x_1 + x_2 \\ &\textit{Sujeto a} \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-x_1 + x_2 \leq 0 \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ &\boldsymbol{x_1 \geq 3, x_2 \geq 2} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Programación entera mixta

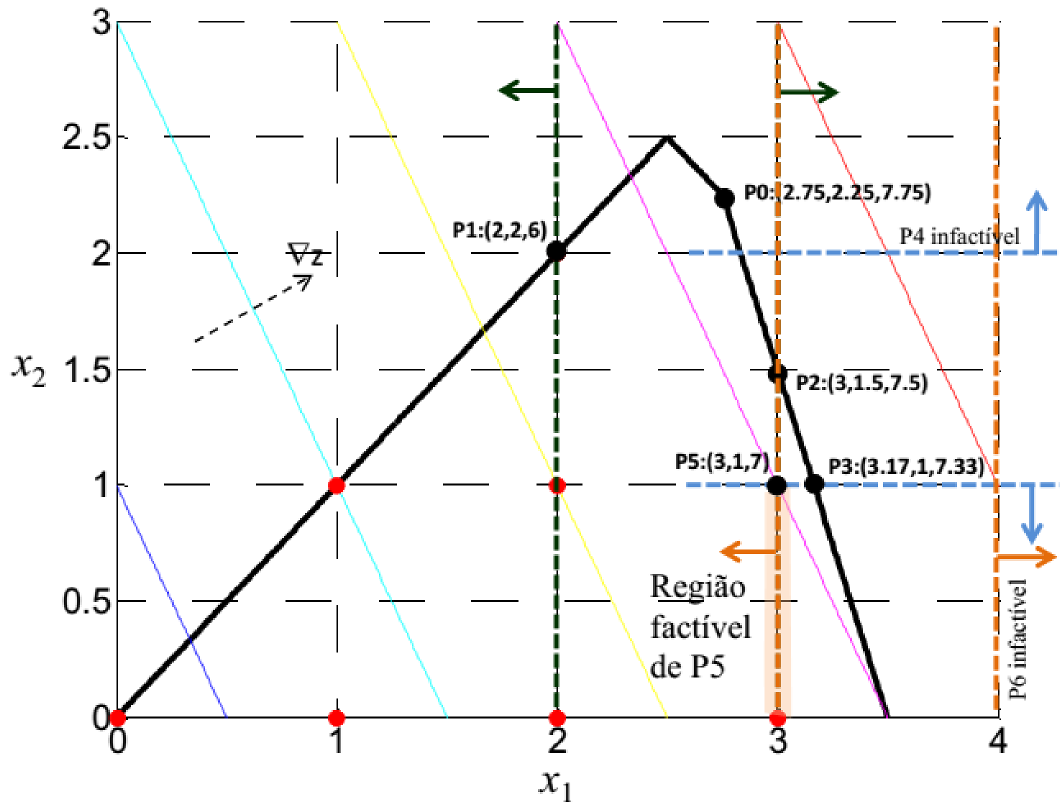
- Las aproximaciones de (P3) y (P4) son:
  - (P3) $x_1 = 3{,}17, x_2 = 1$ y $v = 7{,}33$
  - (P4) Inviable
- La ramificación, algún problema puede no ser viable, ramificaciones de este problema no son posibles;
- Pero todavía no es posible descartar el problema P3.
- La aproximación (P3)$'$no es integral. Una nueva ramificación es necesaria;
- Note que: si existen mas de una aproximación no integrales. Una nueva ramificación es necesaria; se ramifica el problema cuyo valor óptimo v este mas próximo de LS;

Programación entera mixta

- Método de ramificación y limitación (Branch & Bound)
- Paso 4: Escoger la variable x_1 para dividir y resolver los problemas de PL: $P5\ (P3 + \ x_1 \leq 3)\ y\ P6(P3 + \ x_1 \geq 4)$.

P5
$$\begin{cases} Max\ z^1 = 2x_1 + x_2 \\ \textit{Sujeto a} \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ \mathbf{x_1 \geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \leq 3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

P6
$$\begin{cases} Max\ z^2 = 2x_1 + x_2 \\ \textit{Sujeto a} \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ \mathbf{x_1 \geq 3, x_2 \leq 1, x_1 \geq 4} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

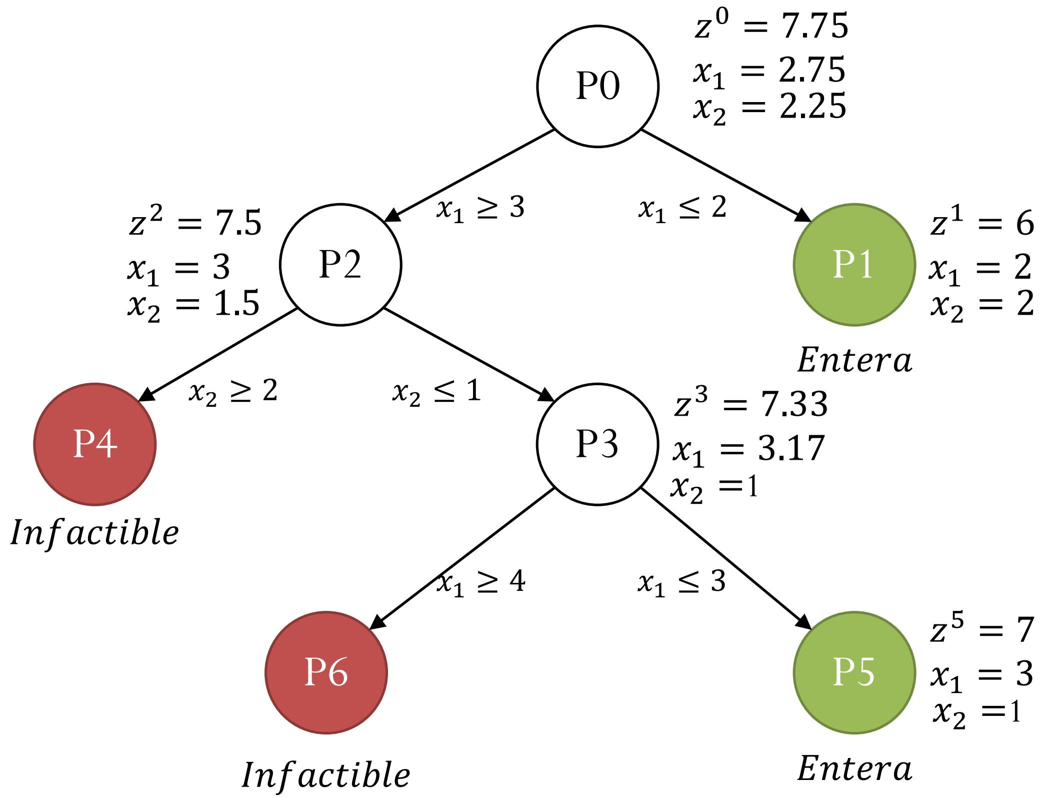


Programación entera mixta

- Las aproximaciones de (P5) y (P6) son:
  - (P5) $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$
  - (P6) Inviable
- Se actualiza el limitante inferior para LI = 7
- Como no existen mas problemas a ser ramificados, la solución óptima del problema es $x_1 = 3, x_2 = 1$ y $v = 7$

Programación entera mixta

- Árbol Branch and Bound (B&B).



- Enumeración implícita de las soluciones enteras factibles.
  - Utiliza el principio divide y vencerás.
  - Divide (ramifica) el conjunto de soluciones en subconjuntos disyuntos cada vez menores
  - Determina (limita) el valor de la mejor solución de cada subconjunto
  - Poda (elimina) la rama del árbol se acota indica que no puede contener la solución óptima

Programación entera mixta

- Ejemplo
  - Implementar el siguiente problema MIP en Julia

$$\max_{x_1, x_2, x_3} \; z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -5$$

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2, \qquad integer$$

$$x_3, \qquad binary$$

“The new becomes old, and the old becomes new…a life cycle”