

Homologie des espaces de configurations

Université de Dschang

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques-Informatique

P.O. Box 67 Dschang, Cameroun

Rédigé et présenté par:

KEMOGNE KAMDOUM Ariel Ghislain

Matricule: CM-UDS-12SCI0116

Sous la direction de:

Dr. Calvin TCHEKA

Chargé de cours

23 juin 2018

Dédicace

Je dédie ce mémoire à ma maman **NJUIDJE ANNE-MARINETTE** et à mon papa
KAMDOUM EVARISTE.

Remerciements

Même si ce mémoire n'a qu'un seul auteur, de nombreuses personnes y ont contribué plus ou moins indirectement, et je ne serai pas arrivé là où j'en suis sans eux.

- Je voudrais tout d'abord remercier mon encadreur de mémoire, Dr. TCHEKA Calvin. Il a toujours su me donner des pistes de recherches, me laisser chercher de façon indépendante tout en m'aidant quand j'avais des difficultés, me conseiller et me guider dans mes activités mathématiques, consacrer son temps à mes questions. Il a pris sur lui la responsabilité de me faire participer à l'école CIMPA (centre international des mathématiques pures et appliquées), organisé du 09 au 20 avril 2018 à l'école polytechnique de Yaoundé, pour me permettre de mieux comprendre de manière plus approfondie et en détail les outils de la topologie algébrique. Plus encore, à travers cet école, il m'a permis de mieux cerner les contours, les enjeux et les avantages de mon travail via le cours du Pr. Pascal Lambrechts sur les espaces de configuration, que je veux remercier également de tout mon coeur, car sa simplicité, son humilité et son attention à mes questions m'ont permis de comprendre effectivement mon travail.
- Je veux à cet effet remercier infiniment toute l'école CIMPA pour l'accompagnement et cet opportunité qu'il nous offre afin d'être ouvert au monde de la recherche.
- Aussi, je remercie tout le département de mathématiques-informatique pour le suivis académique depuis mon entrée à l'université de Dschang et tous ses enseignants pour tous les cours qu'ils se sont peiné à nous dispensé depuis le niveau 1.
- Je dois également remercier tous mes camarades de promotion pour leurs soutiens, leurs patiences et surtout pour leurs collaborations car c'est grâce à cela que je suis à ce niveau aujourd'hui.
- En fin et surtout, mes parents, ma soeur NJUIDJE KAMDOUM Saurelle, et mes frères, TEGUIA KAMDOUM Thierry, TCHEGHO KAMDOUM Arthur, HOMSI KAMDOUM Aubert, me soutiennent et me supportent (dans tous les sens du terme !) depuis toujours, je leur dois beaucoup, et je les remercie pour tout.

Résumé

Les outils de la topologie algébrique que nous manipulons tous les jours ont des applications très fortes dans plusieurs domaines. L'intermédiaire entre la topologie algébrique et ces domaines dans la majeure partie des cas est l'espace de configurations. A cet effet, notre curiosité à travers ce mémoire est d'explorer ces espaces de configurations. Nous définissons explicitement ces espaces tout en faisant le lien avec les opérades, nous présentons quelques propriétés sur ces dernières, nous montrons qu'il existe un algorithme permettant de décider du calcul d'homologie des espaces de configurations sur un espace topologique, si cet espace est une variété, en fin, nous faisons une application directe des espaces de configurations à la robotique.

Mots clés : Espaces de configuration, opérades, homologie, variété.

Abstract

The tools of the algebraic topology that we handle every day have very strong applications in several fields. The intermediate between the algebraic topology and these domains in most cases is the configurations space. For this purpose, our curiosity through this memoir is to explore these configurations spaces. We explicitly define these spaces while making the link with the operads, we present some properties on the latter, and in the end we calculate the homology of the configurations spaces in \mathbb{R}^n using canonical projections and Leray-Hirsch's theorem, via a construction of one algorithm.

Keywords : Configuration spaces, operads, homology, variety.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction Générale	1
1 Préliminaires	3
Préliminaires	3
1.1 Rappels sur les modules	3
1.2 Produit tensoriel de modules	6
1.3 Dualité de module	9
1.4 Espaces topologiques et variétés différentielles	11
1.4.1 Espaces topologiques	11
1.4.2 Variétés différentielles	13
1.4.3 Groupe fondamental	14
1.5 Homologie et cohomologie	15
1.5.1 Complexes de chaines et de cochaines	15
1.5.2 Suites exactes de complexes	17
2 Espaces de configurations	19
Espaces de configurations	19
2.1 Fibrations et Cofibrations	19
2.1.1 Rappels des définitions	19
2.1.2 Quelques propriétés liées aux fibrations	19

2.2	Opérades	21
2.3	Espaces de configurations	22
2.3.1	Quelques propriétés liées aux espaces de configurations	23
2.3.2	Projections canoniques	28
2.3.3	Fibration localement triviale	29
2.3.4	Série de Poincaré d'un espace topologique	32
2.4	Homologie des espaces de configurations	35
2.4.1	(Co)homologie simpliciale	35
2.4.2	Homologie singulière	38
2.4.3	Homologie sur les espaces de configurations	41
3	Application des espaces de configurations	49
	Application des espaces de configurations	49
3.1	Un peu d'histoire sur la naissance de la robotique et la planification	49
3.1.1	Historique	49
3.1.2	Planification	50
3.2	Contexte de travail et d'application	51
3.3	Principe d'application	52
3.4	Définition de l'espace des configurations	53
3.5	Position du problème	54
3.6	Principes de résolution	56
	Conclusion Générale	59
	Bibliographie	61

Introduction Générale

En Algèbre, particulièrement en topologie algébrique, **les espaces de configurations** servent d'intermédiaire dans la majeure partie des cas, entre celle-ci et ses branches d'application. Ces espaces ont été découverts pour la première fois dans le contexte d'application de la topologie algébrique, par Lozano Perez en 1983 dans le but d'appliquer la topologie algébrique à la robotique notamment dans la planification du mouvement d'un robot. Depuis lors, ces espaces suscitent la curiosité de beaucoup de chercheurs et provoquent de plus en plus de multiples questions de recherches.

En effet, un espace de configurations à k points (entiers naturels) dans un espace topologique X noté $conf_k(X)$ ou $conf(k, X)$, est la collection de k -uplets de X^k dont ces composantes sont deux à deux distincts dans X^k , c'est-à-dire :

$$conf_k(X) = conf(k, X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \text{ tel que } x_i \neq x_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$$

Cette collection est munie d'une topologie induite de X^k . Les espaces $conf(k, X)$ sont liés (ou permettent d'étudier) à des objets tels que les opérades de petits disques, l'homologie de factorisation, l'homologie de Hochschild, la théorie des cordes et la théorie des noeuds et ont plusieurs champs d'application notamment en robotique.

Ainsi, ces espaces étant donc des espaces topologiques par définition, notre curiosité à travers ce mémoire est de les définir explicitement, donner quelques propriétés sur ces derniers et regarder comment obtenir l'homologie de ces derniers, en se servant des outils de topologie algébrique bien connus.

Pour y parvenir, nous avons structuré le travail comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires qui nous permettent de mieux cerner le contenu de ce mémoire. Ici, nous rappelons entre autre les notions de module et produit tensoriel de module, les espaces topologiques, les variétés différentielles

et la (co)homologie.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les espaces de configurations, nous faisons le lien avec les opérades, nous donnons quelques propriétés associées et nous étudions l'homologie des espaces de configurations. Plus précisément, nous faisons d'abord un rappel sur les notions de (co)homologies simpliciales et singulières en apportant quelques propriétés et théorèmes associés, nous montrons qu'il existe un algorithme permettant de décider du calcul d'homologie des espaces de configurations sur un espace topologique, si cet espace est une variété.

En fin, dans le troisième chapitre, nous présentons une application directe à la robotique. Ici, nous situons le contexte d'application des outils des espaces de configurations à la robotique via quelques exemples. Nous présentons le problème de planification de mouvement d'un robot et faisons une revue de littérature sur la naissance de la robotique, de la planification et en fin nous mettons en évidence le lien avec les espaces de configurations.

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous donnons tous les outils nécessaires qui nous permettront de mieux comprendre le travail développé dans ce mémoire.

1.1 Rappels sur les modules

Soit A un anneau.

Définition 1.1.1. (Module)

On appelle un A -module à gauche le triplet $(M, +, \cdot)$ tel que :

- i- $(M, +)$ est un groupe abélien.
- ii- $\cdot : A \times M \longrightarrow M$ est une loi de composition externe vérifiant :
 - $\forall k \in A, \forall x, y \in M, k.(x + y) = k.x + k.y$
 - $\forall k, l \in A, \forall x \in M, (k + l).x = k.x + l.x$
 - $\forall k, l \in A, \forall x \in M, k.(l.x) = (k.l).x$
 - $\forall x \in M, 1.x = x$

Remarque 1.1.1.

On peut définir de manière équivalente un A -module à droite. On dira A -module pour désigner un A -module à gauche.

Définition 1.1.2. (Application linéaire de module)

Soient M, N deux A -modules à gauche. On appelle une application A -linéaire de M dans N , une application $f : M \longrightarrow N$ vérifiant :

- i- $\forall x, y \in M, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- ii- $\forall k \in A, \forall x \in M, f(k.x) = k.f(x)$

Soient encore M_1, M_2, \dots, M_n des A -module. Une application $g : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \longrightarrow N$ est dit A -multilinéaire si elle est A -linéaire en chacune des variables.

Définition 1.1.3. (Sous-module)

Soit M un A -module et $N \subset M$ un sous-groupe de M , $N \neq \emptyset$. On dit que N est un sous-module de M si $A.N = N$

Proposition 1.1.1. [11]

Soient M, M_0 deux A -modules et $f : M \rightarrow M_0$ une application A -linéaire. Alors, $\ker f$ et $\text{im} f$ sont des sous-modules de M et M_0 respectivement.

Définition 1.1.4. (Structure de module)

Soient M un A -module et N un sous-module de M . On définit une structure de A -module sur le groupe abélien M/N avec la multiplication .

$$\begin{aligned} . : A \times M/N &\rightarrow M/N \\ (k, x + N) &\mapsto k.(x + N) := k.x + N \end{aligned}$$

pour tout $k \in A$ et pour tout $x + N \in M/N$. On appelle M/N le module quotient de M par N .

Proposition 1.1.2. [11]

Soient M, N deux A -modules, $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire et S un sous-module de M tel que $S \subset \ker f$. Alors, il existe une unique application A -linéaire

$$\bar{f} : M/S \rightarrow N$$

telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ M/S & & \end{array}$$

Définition 1.1.5. (Module finiment engendré)

On appelle A -module finiment engendré, un module M avec $m_1, \dots, m_n \in M$ tel que tout $m \in M$ s'écrit comme combinaison A -linéaire des m_i , i.e. $m = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n$ pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$.

Définition 1.1.6. (Base de module)

Soit M un A -module et $S \subset M$ un sous-ensemble non vide. On dit que S est une base de M (sur A) si :

- S engendre M ,

- les éléments de S sont A –linéairement indépendants. On dit alors que M est libre sur A .

Proposition 1.1.3. [11]

Soient M un A –module libre de base S , N un A –module et $f : S \rightarrow N$ une fonction. On a alors qu’il existe une unique application de A –modules $f' : M \rightarrow N$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow i & \nearrow \exists! f' & \\ M & & \end{array}$$

Proposition 1.1.4. [11]

Soit :

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de A –modules. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une application A –linéaire $\phi : M'' \rightarrow M$, tel que $g \circ \phi = \text{id}_{M''}$,
- il existe une application A –linéaire $\psi : M \rightarrow M'$, tel que $\psi \circ f = \text{id}_{M'}$.

Si ces conditions sont satisfaites, alors on a : $M = \text{im} f \oplus \ker \psi$, $M = \ker g \oplus \text{im} \phi$ $M \cong M'' \oplus M'$. On dit qu’une suite exacte courte se scinde si elle vérifie de telles propriétés.

Définition 1.1.7. (Suite exacte scindée)

Soit :

$$\dots \rightarrow M_q \xrightarrow{f_q} M_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} M_{q+2} \xrightarrow{f_{q+2}} \dots$$

une suite exacte de A –module. On dit que la suite se scinde si pour tout q , il existe un A –module N_q tel que $M_q = N_q \oplus \ker f_q$. On dit encore que la suite est scindée.

Proposition 1.1.5. [11]

Soit P un A –module. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i- Soient $f : P \rightarrow M''$ et $g : M \rightarrow M''$ des applications A –linéaires telle que g soit surjective. Alors il existe une application A –linéaire $h : P \rightarrow M$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow \exists h & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- ii- Toute suite exacte de la forme $0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ se scinde.
- iii- Il existe un A -module N tel que $P \oplus N$ est libre.
- iv- Le foncteur $\text{Hom}(P, -)$ est exacte, i.e. pour toute suite exacte de A -modules, $0 \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$, la suite $0 \longrightarrow \text{Hom}(P, R) \longrightarrow \text{Hom}(P, S) \longrightarrow \text{Hom}(P, T) \longrightarrow 0$ est exacte. Si ces conditions sont satisfaites, on dit que P est projectif.

1.2 Produit tensoriel de modules

On va donner ici la définition, ainsi que la construction du produit tensoriel.

A partir de maintenant, K sera un anneau commutatif.

Définition 1.2.1. (*Produit tensoriel*)

Soient E_1, \dots, E_n des K -modules. On appelle le produit tensoriel au dessus de E_1, \dots, E_n le couple (T, t) où T est un K -module et $t : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow T$ une application K - n -linéaire telle que pour tout couple (F, f) où F est un K -module et $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application K -multilinéaire, il existe une unique application K - n -linéaire

$$\bar{f} : T \rightarrow F$$

telle que

$$\bar{f} \circ t = f$$

.

En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow t & \searrow \exists! \bar{f} & \\ T & & \end{array}$$

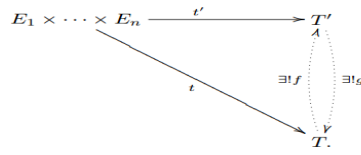
Remarque 1.2.1.

Avec les notations ci-dessus, un tel produit tensoriel existe et il est unique à isomorphisme près.

Démonstration. (Remarque)

Nous commencerons par montrer d'abord l'unicité et ensuite l'existence d'un tel produit tensoriel.

Soient (T, t) et (T', t') deux produits tensoriel de E_1, \dots, E_n . Alors, le diagramme suivant commute :

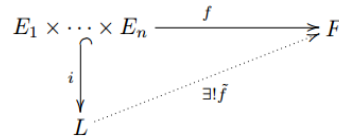


Par la propriété universelle, $id_T = gf$ et $id_{T'} = fg$.

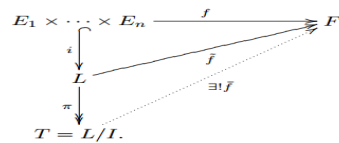
On montre maintenant l'existence d'un tel produit tensoriel. Pour cette étape, on procède à sa construction usuelle. On considère L le K -module libre de base $E_1 \times \dots \times E_n$, et on définit I le sous-module de L engendré par les éléments de la forme : $(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$ et $(x_1, \dots, kx_i, \dots, x_n) - k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ pour tout $x_i, x'_i \in E_i, k \in K, \forall i = 1, \dots, n$. On définit alors l'application K - n -linéaire.

$$t : E_1 \times \dots \times E_n \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} L/I$$

De plus, posons $T := L/I$, c'est un K -module étant un quotient de module. Il suffit maintenant de montrer que le couple (T, t) vérifie la propriété universelle. Soit (F, f) un couple où F est un K -module et $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application K - n -linéaire. Par la propriété du module libre, on a l'existence d'une unique application K -linéaire \tilde{f} telle que le diagramme ci-dessous commute :



Finalement, par la propriété universelle du module quotient, il existe une unique application K -linéaire \bar{f} telle que le diagramme suivant commute :



Ainsi (T, t) est notre produit tensoriel désiré.

□

Notation 1.2.1.

On note $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ ou $\otimes_i E_i$ pour T et $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ pour $t(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 1.2.2.

On pourrait adapter la définition du produit tensoriel à des modules, sur un anneau non commutatif, mais ceci ne nous intéresse pas, dans ce cas on perdrait la structure de module. On aurait seulement un groupe abélien.

Voici maintenant quelques propriétés du produit tensoriel qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

Proposition 1.2.1. [11]

Soient L, M, N des K -modules. On a les isomorphismes $K \otimes M \cong M \otimes K \cong M$
 $M \otimes N \cong N \otimes M$
 $(L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N).$

Proposition 1.2.2. [11]

Soient $\{A_i\}_{i \in I}$ et $\{B_j\}_{j \in J}$ deux familles non vide de K -modules. Soient M, N deux K -modules.

On a les isomorphismes de K -modules suivants :

$$M \otimes (\oplus_{i \in I} B_i) \cong \oplus_{i \in I} (M \otimes B_i)$$

$$(\oplus_{j \in J} A_j) \otimes N \cong \oplus_{j \in J} (A_j \otimes N)$$

Introduisons maintenant les notions de catégorie et de foncteur.

Définition 1.2.2. (Catégorie)

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

- i- d'une classe $Ob(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés objets,
- ii- pour deux objets X et Y , d'un ensemble $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes ou flèches de X à Y ,
- iii- pour trois objets X, Y et Z , d'une application de composition qui à un morphisme f de $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et un morphisme g de $Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ associe un morphisme $g \circ f$ de $Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$ tels que :
 - a- l'opération de composition est associative, c-à-d $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
 - b- si X est un objet, alors l'ensemble $Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$ contient un élément Id_X tel que pour tout objet Y et tout morphisme f de $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \circ Id_X = Id_Y \circ f = f$.

Exemple 1.2.1.

La catégorie des ensembles, des espaces topologiques, des variétés, des groupes abéliens, des groupes, etc...

Définition 1.2.3. [11] (Catégorie abélienne)

On dit qu'une catégorie \mathcal{C} est abélienne si :

- i- \mathcal{C} a un objet nul,

- ii- toute paire d'objets dans \mathcal{C} a un produit et un coproduit
- iii- tout morphisme de \mathcal{C} a un noyau et un conoyau,
- iv- tout monomorphisme de \mathcal{C} est un noyau d'un certain morphisme de \mathcal{C} , et tout épimorphisme de \mathcal{C} est un conoyau d'un certain morphisme de \mathcal{C} .

Définition 1.2.4. (Foncteur)

Un foncteur (covariant) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la donnée d'une application $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ et pour tous objets X et Y de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ d'une application $\mathcal{F}_{X,Y} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ telle que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ pour tous morphismes $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, et telle que $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ pour tout $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Proposition 1.2.3. [11]

Soit Mod_K la catégorie des K -modules. Soit M un K -module. Le foncteur dans $- \otimes M : \text{Mod}_K \longrightarrow \text{Mod}_K$ est exacte à droite.

Remarque 1.2.3.

Le foncteur $(-) \otimes M$ n'est généralement pas exacte à gauche. Il suffit de prendre le \mathbb{Z} -module $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puis la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ et de tensoriser.

Par contre, pour certains K -modules, $(-) \otimes M$ est exacte. Dans de tels cas, on dit que M est plat.

Proposition 1.2.4. [11]

Les K -modules avec les applications K -linéaires forment une catégorie abélienne.

Proposition 1.2.5. [11]

Soient M, N, L des K -modules. On a alors l'isomorphisme naturel $\text{Hom}(M \otimes N, L) \cong \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, L))$

Définition 1.2.5. (Module projectif)

Soit P un A -module. On dit que P est projectif lorsque, pour toute application surjective $\pi : B \longrightarrow C$ entre A -modules, et tout homomorphisme $f : P \longrightarrow C$, on peut trouver un relèvement $\bar{f} : P \longrightarrow B$ tel que $\pi \circ \bar{f} = f$

1.3 Dualité de module

Définition 1.3.1. (Dual de module et dual d'une application linéaire)

Soient M, N des K -modules et $f : M \rightarrow N$ une application K -linéaire.

i- On appelle le dual de M , le K -module $M^* := \text{Hom}(M, K)$.

ii- On appelle le dual de f , l'application K -linéaire.

$$\begin{aligned} f^* : N^* &\rightarrow M^* \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ f \end{aligned}$$

Lemme 1.1. [11]

Soit L un K -module libre et finiment engendré, alors L^* est aussi un K -module libre et finiment engendré.

Démonstration.

Comme L est un K -module libre finiment engendré, on a $L = \bigoplus_{i=1}^n K$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\text{Hom}(\bigoplus_{i=1}^n K, K) \cong \text{Hom}\left(\prod_{i=1}^n K, K\right) \cong \prod_{i=1}^n \text{Hom}(K, K) \cong \prod_{i=1}^n K \cong \bigoplus_{i=1}^n K$$

□

Proposition 1.3.1. [11]

Soit P un K -module projectif finiment engendré. Alors il existe un K -module M tel que $P \otimes M$ est libre finiment engendré.

Corollaire 1.3.1. [11]

Soit P un K -module projectif finiment engendré. Alors P^* est aussi un K -module projectif finiment engendré.

Proposition 1.3.2. [11]

Soit P un K -module projectif finiment engendré. Alors $P \cong P^{**}$.

Démonstration.

Considérons l'application de K -module

$$\begin{aligned} \lambda_L : L &\rightarrow L^{**} \\ l &\mapsto \lambda_L(l) : L^* \rightarrow K : \alpha \mapsto \alpha(l) \end{aligned}$$

Si L est libre et finiment engendré, il est facile de voir que cette application induit un isomorphisme de K -modules. De plus, c'est une transformation naturelle, i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
A & & A \xrightarrow{\lambda_A} A^{**} \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
B & & B \xrightarrow{\lambda_B} B^{**}
\end{array}$$

On le vérifie facilement. Soient $a \in A$, on montre que $f^{**} \circ (\lambda_A)(a) = \lambda_B \circ f(a)$, i.e. $\forall \beta \in B^*$ on doit avoir $f^{**} \circ (\lambda_A)(a)(\beta) = \lambda_B \circ f(a)(\beta)$. En effet, $f^{**} \circ (\lambda_A)(a)(\beta) = f^{**}(\lambda_A(a))(\beta) = \lambda_{A(a)} \circ f^*(\beta) = (\lambda_{A(a)})(\beta \circ f) = \beta \circ f(a) = \beta(f(a)) = (\lambda_B)(f(a))(\beta) = (\lambda_B \circ f(a))(\beta)$. Revenons maintenant à la proposition 1.3.1. Si P est projectif, il existe un K -module F tel que $P \otimes F$ est libre finiment engendré. Considérons alors la suite

$$P \xrightarrow{i} P \oplus F \xrightarrow{r} P$$

où i est l'injection canonique et r la retraction. Alors, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{id}_P & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
P & \xrightarrow{i} & P \oplus F & \xrightarrow{r} & P \\
\downarrow \lambda_P & & \downarrow \cong & & \downarrow \lambda_P \\
P^{**} & \xrightarrow{i^{**}} & (P \oplus F)^{**} & \xrightarrow{r^{**}} & P^{**} \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \text{id}_{P^{**}} & &
\end{array}$$

le rectangle de gauche induit que λ_P est injective et le rectangle de droite que λ_P est surjective.

□

Corollaire 1.3.2. [11]

Soient P, L des K -modules telles que P est projectif et finiment engendré. Alors $P^* \otimes L^* \cong (P \otimes L)^*$.

Démonstration.

$$P^* \otimes L^* \cong \text{Hom}(P, L^*) = \text{Hom}(P, \text{Hom}(L, K)) \cong \text{Hom}(P \otimes L, K) = (P \otimes L)^*.$$

□

1.4 Espaces topologiques et variétés différentielles

1.4.1 Espaces topologiques

Définition 1.4.1. (Espace topologique)

Une topologie sur un ensemble X est la donnée de sous-ensembles de X , que l'on appelle ouverts, qui vérifient :

- i-* l'intersection finie d'ouverts est un ouvert,

- ii- une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
- iii- l'ensemble vide et l'espace X tout entier sont ouverts.

Le complémentaire d'un ouvert est par définition un fermé.

Définition 1.4.2. (*Espace topologique connexe*)

Un espace topologique est dit connexe lorsqu'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non triviaux. Il est dit séparé lorsque pour tous éléments distincts x et y , il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Définition 1.4.3. (*Espace simplement connexe*)

Un espace topologique est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout lacet est homotope à un lacet constant.

Définition 1.4.4. (*Recouvrement d'ouvert*)

Un recouvrement d'ouverts \mathcal{U} de l'espace topologique X est un sous-ensemble d'ouverts dont la réunion vaut X . Il est dit localement fini lorsque chaque point de X possède un voisinage contenu seulement dans un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement \mathcal{U} . On dit aussi qu'un recouvrement \mathcal{V} raffine le recouvrement \mathcal{U} lorsque tout élément de \mathcal{V} est contenu dans un élément de \mathcal{U} .

Définition 1.4.5. (*Espace topologique compact*)

Un espace topologique est dit compact lorsqu'il est séparé et que tout recouvrement d'ouverts possède un sous-recouvrement fini. Il est dit paracompact lorsque tout recouvrement d'ouverts possède un raffinement localement fini.

Théorème 1.4.1. [20]

Soit X un espace topologique paracompact. Alors tout recouvrement d'ouverts \mathcal{U} de X possède une partition de l'unité subordonnée $\{f_V, V \in \mathcal{V}\}$, c'est-à-dire telle que

- i- Le recouvrement \mathcal{V} est un raffinement localement fini de \mathcal{U} ,
- ii- Pour tout ouvert V de \mathcal{V} , la fonction $f_V : X \longrightarrow [0, 1]$, est continue à support dans V ,
- iii- La somme f_V sur $V \in \mathcal{V}$ est constante égale à 1

De plus, si \mathcal{U} est localement fini, on peut choisir $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Définition 1.4.6. (*Application continue entre espaces topologiques*)

Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est une application pour laquelle la pré-image de tout ouvert est un ouvert. C'est un homéomorphisme lorsqu'elle est bijective, continue et d'inverse continue.

Définition 1.4.7. (*Applications continues homotopes*)

Deux applications continues $f_0 : X \longrightarrow Y$ et $f_1 : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'elles sont reliées par une homotopie, c'est-à-dire par une application continue $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ telle que $F|_{X \times \{0\}} = f_0$ et $F|_{X \times \{1\}} = f_1$.

Définition 1.4.8. (*Équivalence d'homotopie*)

On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe une application continue $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes à l'identité (de X et de Y respectivement). Dans ce cas les espaces topologiques X et Y sont dits homotopiquement équivalents, ou de même type d'homotopie. Un espace topologique est dit contractile lorsqu'il est homotopiquement équivalent à un singleton.

Exemple 1.4.1.

- i- L'espace vectoriel \mathbb{R}^n ou plus généralement tout sous-ensemble convexe ou étoilé est contractile.
- ii- La sphère S^{n-1} a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4.2 Variétés différentielles**Définition 1.4.9.** (*Carte*)

Soit M un espace topologique.

Une carte est la donnée d'un ouvert U de M , d'un ouvert V de \mathbb{R}^n et d'un homéomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$, on la note généralement par le couple (U, ϕ) . En effet, lorsque deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) se rencontrent, l'application de changement de cartes $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

La réunion des cartes est appelée atlas. Deux atlas sont dits compatibles lorsque leur réunion est un atlas.

Définition 1.4.10. (*Variété différentielle*)

Une variété différentielle de dimension n est un espace topologique séparé M recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes.

Définition 1.4.11. (*Variété à bord*)

Une variété différentielle à bord M de dimension n est définie comme une variété différentielle, mais en étant localement modelée sur des ouverts du demi-espace $\{(x_1, \dots, x_n) \in$

$\mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$. Le bord de M est l'ensemble des points envoyés sur l'hyperplan $\{x_n = 0\}$, il hérite d'une structure de variété différentielle de dimension $n = 1$.

1.4.3 Groupe fondamental

Définition 1.4.12.

- Une espace topologique X est dit pointé si l'on fixe un élément quelconque $x_0 \in X$ qui sera appelé point de base.
- Une application pointée $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application continue qui préserve les points de base.
- Soient f et g définies de X vers Y deux applications pointées, s'il existe une homotopie entre f et g relativement à $\{x_0\}$ alors on dit que cette homotopie est une homotopie pointée.

Définition 1.4.13. (Lacet pointé)

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Un lacet pointé dans (X, x_0) est une application continue $\alpha : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$

Définition 1.4.14.

Le groupe fondamental de l'espace pointé (X, x_0) noté $\pi_1(X, x_0)$ est l'ensemble de toutes les classes d'homotopie pointée de lacet dans (X, x_0) . On a :

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]_* : \alpha : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)\}$$

Remarque 1.4.1. [16]

Le groupe fondamental est munit d'une structure de groupe. Si $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application pointée alors elle induit le morphisme de groupe $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$

Proposition 1.4.1. [16]

Si X est un espace topologique contractile, alors son groupe fondamental $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$

Proposition 1.4.2. [16]

Soit X un espace topologique. X est simplement connexe si et seulement s'il existe un point $x \in X$ tel que $\pi_1(X, x) = \{0\}$

1.5 Homologie et cohomologie

1.5.1 Complexes de chaînes et de cochaînes

Un complexe de chaînes est la donnée d'une suite

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \longrightarrow 0$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau A , et ∂_n est un morphisme de groupes ou de A -modules tel que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Un complexe de cochaînes est la donnée d'une suite $\dots \xleftarrow{d_{n+1}} C^n \xleftarrow{d_n} C^{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} \dots \xleftarrow{d_3} C^2 \xleftarrow{d_2} C^1 \xleftarrow{} 0$ où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un groupe abélien, ou plus généralement un module sur un anneau A , et d_n est un morphisme de groupes ou de A -modules tel que $d_{n-1} \circ d_n = 0$. L'opérateur ∂_n est appelé opérateur de bord et l'opérateur d_n opérateur de cobord. Lorsque un seul nombre fini de groupes C_n ou C_n sont non triviaux, le complexe est dit borné.

Définition 1.5.1. (*Cycles-Bords et calcul d'homologie*)

Soit C un complexe de chaînes (respectivement cochaînes). Les éléments de $\text{Ker}(\partial_n) := Z_n(C)$ (respectivement $\text{Ker}(d_n) := Z_n(C)$) sont appelés cycles (respectivement cocycles). Les éléments de $\text{Imp}(\partial_{n+1}) := B_n(C)$ (respectivement $\text{Im}(d_{n-1}) := B_n(C)$) sont appelés bords (respectivement cobords) et le quotient $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ (respectivement $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$) est appelé groupe d'homologie (respectivement de cohomologie) du complexe.

Définition 1.5.2. (*Morphisme de chaînes*)

Une application de chaînes $f : C \longrightarrow D$, aussi appelée morphisme de complexes, est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme de groupes ou de A -modules $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ tel que $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \end{array}$$

Définition 1.5.3. (*Homotopie entre complexe de chaînes*)

Une homotopie $h : C \longrightarrow D$ entre deux applications de chaînes $f^1, f^2 : C \longrightarrow D$ est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme de groupes $h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ satisfaisant $f_n^1 - f_n^2 = \partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$.

Proposition 1.5.1. [16]

Soit $f : C \longrightarrow D$ une application de chaînes entre complexes. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ et $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$, de sorte qu'elle induit un morphisme $f_n : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$. De plus deux applications homotopes induisent le même morphisme en homologie.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout cycle $c \in Z_n(C)$, on a $\partial_n \circ f_n(c) = f_{n-1} \circ \partial_n(c) = f_{n-1}(0) = 0$, donc $f_n(c)$ est un cycle. Pour tout bord $b \in B_n(C)$, il existe $a \in C_{n+1}$ tel que $b = \partial_{n+1}(a)$, donc $f_n(b) = f_n \circ \partial_{n+1}(a) = \partial_{n+1} \circ f_{n+1}(a)$, de sorte que $f_n(b)$ est un bord. En particulier, si on note $\pi_n : Z_n(D) \longrightarrow H_n(D)$ la surjection canonique, l'application $\pi_n \circ f_n$ passe au quotient en un morphisme $H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ que l'on note encore f_n . Soient f^1 et f^2 deux applications de chaînes homotopes et h une homotopie entre f^1 et f^2 . Soit alors $[c] \in H_n(C)$ et $c' = c + \partial_{n+1}(\tilde{c})$ un représentant quelconque de cette classe d'homologie dans $Z_n(C)$. Alors c' est un cycle donc $\partial_{n+1} \circ h_{n+1}(c') = 0$. En notant $\tilde{c}' = h_n(c')$, on a $f_n^1(c') = f_n^2(c') + \partial_{n+1}(\tilde{c}')$ de sorte que $f_n^1([c]) = f_n^2([c])$. \square

Définition 1.5.4. (Caractéristique d'Euler-Poincaré)

On appelle caractéristique d'Euler d'un complexe borné C dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K , la quantité

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim_K(C_k)$$

Proposition 1.5.2. (Inégalités de Morse).

Soit C un complexe de chaînes borné dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps K alors,

$$\chi(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_K H_n(C)$$

De plus, les inégalités de Morse suivantes sont satisfaites :

$$\forall n \in \mathbb{Z}; \quad \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_K(C_n) \geq \sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_K H_n(C)$$

Démonstration.

Soit $N \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème du rang

$$\sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_K(C_n) = \sum_{n \leq N} (-1)^n (\dim_K Z_n(C) + \dim_K B_{n-1}(C))$$

cette égalité se réécrit

$$\sum_{n \leq N} (-1)^n \dim_K(C_n) = (-1)^N \dim_K Z_N(C) + \sum_{n \leq N-1} (-1)^n (\dim_K Z_n(C) - \dim_K B_n(C))$$

ou encore

$$\sum_{n \leq N} (-1)^{N-n} \dim_K(C_n) = \sum_{n \leq N-1} (-1)^{N-n} \dim_K H_n(C) + \dim_K B_N(C)$$

Comme la quantité $\dim_K B_N(C)$ est positive, on en déduit les inégalités de Morse. D'autre part cette quantité s'annule lorsque N est assez grand, d'où le résultat. □

1.5.2 Suites exactes de complexes

Définition 1.5.5. (*Suite exacte*)

Une suite courte de complexes $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0$ est dite exacte lorsque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, i_n est injectif, j_n est surjectif et $\text{Ker}(j_n) = \text{Im}(i_n)$

Proposition 1.5.3. [12]

Soit C un complexe de chaînes dont les éléments sont des groupe abéliens (ou des A -modules) libres et soit $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens (ou de A -modules). Alors la suite courte de complexes suivante est exacte : $0 \longrightarrow C \otimes G' \xrightarrow{id \otimes i} C \otimes G \xrightarrow{id \otimes p} C \otimes G'' \longrightarrow 0$

Définition 1.5.6. (*Homologie à coefficients dans un groupe abélien*)

L'homologie du complexe $C \otimes G$, où G est un groupe abélien (ou un A -module), est appelé homologie de C à coefficients dans G et notée $H_*(C, G)$.

Proposition 1.5.4. [16]

Soit $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes bornés d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K . Alors $\chi(C) = \chi(C') + \chi(C'')$

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate du théorème du rang, puisque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\dim_K(C_n) = \dim_K(C'_n) + \dim_K(C''_n)$ □

Théorème 1.5.1. (*Formule de Künneth*)[6]

Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit n un entier naturel et soit p, q deux entiers tel que $p, q \leq n$. Alors on a l'isomorphisme en cohomologie suivant :

$$H^n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y)$$

Définition 1.5.7. (*Cup-produit*)

Soit X un espace topologique. Soit \mathbb{K} un corps. Considérons l'application :

$$\sqcup : H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{K})$$

Soit l'application $f : H^*(X \times X) \longrightarrow H^*(X) \otimes H^*(X)$. En prenant le dual de la suite,

$$H^*(X) \xrightarrow{H^*(\Delta)} H^*(X \times X) \xrightarrow{f} H^*(X) \otimes H^*(X)$$

où $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, définie par : pour tout $x \in X$, $\Delta(x) = (x, x)$ représente la diagonale.

Nous obtenons alors les isomorphismes suivants :

$$g_1 : H^*(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(X), \mathbb{K})$$

$$g_2 : H^*(X \times X, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(X \times X), \mathbb{K})$$

$$g_3 : H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(X) \otimes H_*(X), \mathbb{K})$$

Nous définissons alors le cup-produit par :

$$\sqcup : H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{K}) \text{ par :}$$

$$\sqcup = g^{-1} \circ H_*(\Delta) \circ f^* \circ g_3$$

ESPACES DE CONFIGURATIONS

Dans ce chapitre, nous allons présenter les espaces de configurations, faire le rapprochement avec les opérades, apporter quelques propriétés associées et surtout donner quelques exemples permettant de mieux comprendre le concept via des calculs élémentaires. Tout d'abord, nous faisons des rappels sur les (co)fibrations, puis nous définissons ce qu'on entend par opérades (tiré essentiellement de [9]).

2.1 Fibrations et Cofibrations

2.1.1 Rappels des définitions

Rappelons qu'une fibration (ou fibration de Hurewicz) est une application continue $p : E \longrightarrow B$ telle que pour tout diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{f_1} & E \\ j_0 \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

où j_0 est l'inclusion, il existe une application continue $f : Y \times I \longrightarrow E$ telle que les deux triangles commutent.

De façon duale, on définit de la même manière une cofibration.

2.1.2 Quelques propriétés liées aux fibrations

Soient deux applications $p : E \longrightarrow B$ et $f : B' \longrightarrow B$, et prenons leur produit fibré standard, c'est-à-dire

$E' = B' \times_B E := \{(a, e) \in B' \times E \mid f(a) = p(e)\}$ Alors nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où p' et f' sont définies par $p'(a, e) = a$ et $f'(a, e) = e$ pour tout $(a, e) \in E'$.

Proposition 2.1.1. [19]

Si p est injective(respectivement surjective), alors p' l'est aussi. En particulier, si p est une fibration, p' l'est aussi. Ainsi, p' est appelée la fibration induite de p par f .

Remarque 2.1.1.

Pour $f : X \rightarrow Y$ une application continue quelconque, prenons $ev_0 : PY \rightarrow Y$ la fibration définie par $ev_0(\alpha) = \alpha(0)$ et prenons le produit fibré de X et PY au dessus de Y :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y PY & \xrightarrow{f'} & PY \\ p \downarrow & & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où $f'(x, \alpha) = \alpha$ et $p(x, \alpha) = x$ pour tout $(x, \alpha) \in X \times_Y PY$. Notons aussi que p est la fibration induite de ev_0 par f . En notant $c_{f(x)}$ le chemin de constante $f(x)$ dans Y , nous définissons les deux applications suivantes :

$$s : X \rightarrow X \times_Y PY$$

$$x \mapsto (x, c_{f(x)})$$

$$p_1 : X \times_Y PY \rightarrow Y$$

$$(x, \alpha) \mapsto \alpha(1)$$

Notons alors que s est une section de p , c'est-à-dire $p \circ s = Id_X$. En résumé, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y PY & \xrightarrow{f'} & PY \\ \begin{array}{c} \nearrow s \\ \downarrow p \end{array} & & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

p_1 (dotted arrow from $X \times_Y PY$ to Y)

Et par suite nous avons le résultat ci-après

Lemme 2.1. [19]

p_1 est une fibration.

Nous avons alors le théorème suivant

Théorème 2.1.1. [12]

Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s} & X \times_Y PY \\
 & \searrow f & \nearrow p_1 \\
 & Y &
 \end{array}$$

Définition 2.1.1. (*Fibration homotopique*)

La fibration p_1 construite au théorème précédent est appelée la fibration homotopique de f , et sa fibre est la fibre homotopique de f .

Maintenant introduisons la notion d'opérade et donnons un exemple d'opérade. Nous tirons cette partie essentiellement de [9].

2.2 Opérades

Définition 2.2.1. (*Opérades*)[9]

Une opérade est un objet qui gouverne la catégorie des algèbres. Plus précisément, une opérade P est une collection $P = \{P(k)\}_{k \geq 0}$ d'opérations abstraites, où k est généralement appelé arité de l'opérade P . On peut voir un élément de $P(k)$ comme une opération à k entrées et une sortie. Ainsi, les structures algébriques associées aux opérades sont celles qui peuvent être décrites en termes d'opérations avec un nombre fini d'entrées et exactement une sortie. A cet effet, les opérations que l'on définit sur ces structures sont les opérations d'insertions données par :

$$\circ_i : P(k) \otimes P(l) \longrightarrow P(k + l - 1), \quad 1 \leq i \leq k$$

qui modélisent la composition des opérations.

Parmi les opérades rencontrées, il existe une classe d'opérade particulières appelées opérades de petits n -disques. Ces opérades initialement introduites en topologie algébrique via les espaces de configuration sont d'un intérêt particulier en ce sens qu'elles fournissent des liens précis entre les complexes de chaînes singuliers et leur groupe d'homologie associés.

Exemple 2.2.1. (*Opérades des petits disques*)

Soit D^n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . Apportons une définition claire à la notion d'opérade de petits disques.

Définition 2.2.2. (*Petit disque - Configurations*)

- Un petit disque est un disque fermé B de centre $c \in \mathbb{R}^n$, de rayon $r > 0$ et tel que $B \subset D^n$
- On appelle espace de configurations de k petits disques que l'on note $D_n(k)$, l'ensemble des k -uplets (B_1, B_2, \dots, B_k) dont les composantes sont de petits disques tel que

$$\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

$$D_n(k) = \{(B_1, B_2, \dots, B_k) \text{ configurations de } k - \text{petits disques}\}$$

Remarque 2.2.1.

- Un élément de $D_n(k)$ est une configuration ordonnée de k petits n -disques aux intérieurs disjoints dans le disque unité D^n . Chaque disque de la configuration s'obtient comme l'image d'un plongement de D^n dans lui-même obtenu par la composition d'une translation et d'une homothétie. L'ensemble $D_n(k)$ est muni de la topologie compacte-ouverte des plongements.
- L'action du groupe symétrique réordonne les disques d'une configuration, et l'insertion est donnée par la composition des plongements.
- Un des résultats fondamental au sujet des opérades des petits disques est qu'elles sont formelles sur \mathbb{Q} . C'est-à-dire que l'opérade des chaînes $C_*(D_n; \mathbb{Q})$ est quasi-isomorphe à son homologie $e_n := H_*(D_n; \mathbb{Q})$

2.3 Espaces de configurations

Définition 2.3.1. (Espace de configurations)

Soient X un espace topologique et k un entier naturel

On appelle espace de configurations de k points dans X et on note $\text{conf}_k(X)$ ou $\text{conf}(k, X)$, la collection de k -uplets de X^k dont ces composantes sont deux à deux distincts c'est-à-dire

$$\text{conf}_k(X) = \text{conf}(k, X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \text{ tel que } x_i \neq x_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$$

ou

$$\text{conf}(k, X) = X^k \setminus D_k(X) \text{ où } D_k(X) = \{x \in X^k \text{ tel que } \exists i, j \ x_i = x_j\}$$

Les espaces de configurations sont intimement liés aux opérades des petits disques, en ce sens que, l'application $D_n(K) \longrightarrow \text{Conf}(k, \mathbb{R}^n)$ qui associe à une configuration de disques la configuration constituée des centres des disques est une équivalence d'homotopie.

Proposition 2.3.1. (*Action du groupe symétrique \sum_k*) [8]

\sum_k agit librement sur $\text{conf}(k, X)$ par permutation des composantes.

Démonstration. [8]

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \theta : \sum_k \times \text{conf}(k, X) &\rightarrow \text{conf}(k, X) \\ (\sigma, (x_1, \dots, x_k)) &\mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \end{aligned}$$

θ définit une action libre de \sum_k sur $\text{conf}_k(X)$.

En effet, pour toute permutation $\sigma \in \sum_k$, $\theta((\sigma, (x_1, \dots, x_k)))$ est un k -uplets de X^k dont les composantes sont distinctes. \square

Définition 2.3.2. (*Espace de configurations non ordonné*)

L'espace de configurations non ordonné d'un espace topologique X est l'espace noté $B_k(X) = \text{conf}_k(X) / \sum_k$

Exemple 2.3.1. (*Premiers exemples d'espace de configurations*)

Soit X un espace topologique.

i- $\text{conf}(0, X) = \{*\}$

ii- $\text{conf}(1, X) = X$

iii- $\text{conf}(2, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq S^{n-1}$

iv- $\text{conf}(2, S^1) = S^1 \times]0, 2\pi[$

v- $\text{conf}(k, \mathbb{R}) \cong \text{conf}(k,]0, 1[) \cong \sum_k \times \Delta^k \cong \sum_k \times \mathbb{R}^k$

2.3.1 Quelques propriétés liées aux espaces de configurations

Dans cette sous section, nous abordons quelques résultats fondamentaux et propriétés basiques relatifs aux espaces de configurations.

Proposition 2.3.2.

Soit X un espace topologique. Soit k un entier naturel. Si X est séparé au sens de Hausdorff, l'espace de configurations à k points dans X est un ouvert de X^k .

Démonstration.

Nous allons montrer que $\text{conf}(k, X)$ est voisinage de chacun de ses points.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$ des points de $\text{conf}(k, X)$ c'est-à-dire $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Ainsi, comme X est séparé, ces points admettent des voisinages disjoints. Par définition de

voisinage on peut alors construire des boules ouvertes autour de chaque points (i.e centré en chaque point) à tel enseigne que l'espace de configurations $\text{conf}(k, X)$ est recouvert par la réunion de toutes ces boules ouvertes. Ce qui nous permet de conclure que $\text{conf}(k, X)$ est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire $\text{conf}(k, X)$ est un ouvert de X^k \square

Proposition 2.3.3.

$\text{conf}(k, -) : \text{Top}^{\text{inj}} \longrightarrow \text{Top}^{\Sigma_k}$ et $B_k(-) : \text{Top}^{\text{inj}} \longrightarrow \text{Top}$ sont respectivement des foncteurs.

où Top^{inj} est une catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches sont les applications continues injectives, Top^{Σ_k} est une catégorie dont les objets sont les Σ_k -espaces topologiques et les flèches sont les applications Σ -équivariantes et Top est une catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches sont les applications continues

Démonstration.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans la catégorie Top^{inj} . On a la factorisation Σ_k -équivariante suivante

$$\begin{array}{ccc} X^k & \xrightarrow{f^k} & Y^k \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Conf}_k(X) & \xrightarrow{\text{Conf}_k(f)} & \text{Conf}_k(Y) \end{array}$$

qui induit par passage au quotient l'application

$$B_k(f) : B_k(X) \longrightarrow B_k(Y) \text{ dans la catégorie } \text{Top}.$$

On remarque bien que cette construction respecte les axiomes de composition et d'identité.

On a alors les foncteurs :

$$\text{conf}(k, -) : \text{Top}^{\text{inj}} \longrightarrow \text{Top}^{\Sigma_k} \text{ et } B_k(-) : \text{Top}^{\text{inj}} \longrightarrow \text{Top}$$

\square

Définition 2.3.3. (Plongement ouvert)

Une application continue est appelé plongement ouvert si elle est injective et ouverte.

Proposition 2.3.4.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un plongement ouvert, alors $\text{conf}_k(f) : \text{conf}_k(X) \longrightarrow \text{conf}_k(Y)$ et $B_k(f) : B_k(X) \longrightarrow B_k(Y)$ sont aussi des plongements ouverts

Démonstration.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un plongement ouvert. Alors l'application $X^k \rightarrow Y^k$ est aussi un plongement ouvert car chacune de ses composantes est égale à f . Ce qui implique $\text{conf}_k(f) : \text{conf}_k(X) \rightarrow \text{conf}_k(Y)$ est aussi un plongement ouvert comme restriction d'un plongement ouvert. De plus, $\text{conf}_k(X) \xrightarrow{\text{conf}_k(f)} \text{conf}_k(Y)$ est \sum_k -équivariant et les projections canoniques $\text{conf}_k(X) \xrightarrow{\pi_X} B_k(X)$ et $\text{conf}_k(Y) \xrightarrow{\pi_Y} B_k(Y)$ sont des applications ouvertes et donc $B_k(X) \xrightarrow{B_k(f)} B_k(Y)$ est un plongement ouvert. \square

Définition 2.3.4. *Equivalence d'isotopie*

Soit X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue injective. f est une équivalence d'isotopie si il existe une application continue injective $g : Y \rightarrow X$ et les homotopies $H : g \circ f \Rightarrow \text{id}_X$ et $H' : f \circ g \Rightarrow \text{id}_Y$ tel que H_t et H'_t sont injectives pour tout $t \in [0, 1]$.

Proposition 2.3.5.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'isotopie, alors $\text{conf}(k, f) : \text{conf}(k, X) \rightarrow \text{conf}(k, Y)$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration.

Dans le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccc}
 X^k \times [0, 1]^k & \xrightarrow{\sim} & (X \times [0, 1])^k & \xrightarrow{H^k} & X^k \\
 \uparrow \text{id}_{X^k} \times \Delta_k & & & \nearrow H^\Delta & \uparrow \\
 X^k \times [0, 1] & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 \text{Conf}_k(X) \times [0, 1] & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \text{Conf}_k(X), & &
 \end{array}$$

La diagonale composite est donné par la formule :

$$H^\Delta(x_1, \dots, x_k) = (H_t(x_1), \dots, H_t(x_k))$$

Par le fait que H_t est injective pour tout $t \in [0, 1]$, la flèche en trait interrompu existe et est continue. Par construction, cette application est restreint à $\text{conf}_k(g \circ f) = \text{conf}_k(g) \circ \text{conf}_k(f)$ en $t = 0$ et restreint à $\text{id}_{\text{conf}_k(X)}$ en $t = 1$. Le même raisonnement est établi pour H'_t . D'où le résultat \square

Corollaire 2.3.1.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'isotopie, alors $B_k(f) : B_k(X) \rightarrow B_k(Y)$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration.

Ce corollaire découle directement de la proposition 2.3.5 précédente, car il suffit de considérer les homotopies construites dans la preuve de cet proposition, qui sont \sum_k -équivariantes, ce qui nous permettra de chuter aux espaces de configurations pour avoir le résultat cherché. \square

Définition 2.3.5.

Notons par $O(Y)$ l'ensemble des sous-ensembles ouverts de Y ; On fixe \mathcal{B} une base pour la topologie définie sur X . Il existe l'inclusion

i- $\mathcal{B}_k^{\sum_k} \longrightarrow O(\text{conf}_k(X))$ des ensembles définies par :

$$U \longmapsto \text{conf}_k^\circ(U, \sigma) := \{(x_1, \dots, x_k) \in \text{conf}_k(U) : x_i \in U_{\sigma(i)}\} \subseteq \text{conf}_k(X)$$

de manière similaire on a également l'inclusion :

ii- $\mathcal{B}_k \longrightarrow O(B_k(X))$ définie par :

$$U \longmapsto B_k^\circ(U) := \{(x_1, \dots, x_k) \in B_k(U) : \{x_1, \dots, x_k\} \cap U_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq k\} \subseteq B_k(X)$$

où

- $\mathcal{B}_k = \{U \subseteq X, U \cong \coprod_{i=1}^k U_i, U_i \in \mathcal{B}\}$, sur laquelle on définit la relation d'ordre suivante

$$U \leq V \iff U \subseteq V \text{ et } \pi_0(U) \longrightarrow \pi_0(V) \text{ est surjective.}$$

- $\mathcal{B}_k^{\sum_k} = \{(U, \sigma) : U \in \mathcal{B}_k, \sigma : \{1, \dots, k\} \xrightarrow{\cong} \pi_0(X)\}$, sur laquelle on impose une relation d'ordre définie par :

$$(U, \sigma) \leq (V, \tau) \iff U \subseteq V \text{ et } \tau = \sigma \circ \pi_0(U \subseteq V)$$

Lemme 2.2.

Pour tout $U \in \mathcal{B}_k$ et $\sigma : \{1, \dots, k\} \xrightarrow{\cong} \pi_0(U)$ il existe les homéomorphismes,

$$B_k^\circ(U) \cong \text{conf}_k^\circ(U, \sigma) \cong \prod_{i=1}^k U_{\sigma(i)}$$

Démonstration.

Il est clair que les flèches en trait interrompu dans le diagramme ci-dessous existe et sont bijectives

$$\begin{array}{ccccc} X^k & \longleftarrow & \text{Conf}_k(X) & \longrightarrow & B_k(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \prod_{i=1}^k U_{\sigma(i)} & \dashleftarrow & \text{Conf}_k^\circ(U, \sigma) & \dashrightarrow & B_k^\circ(U) \end{array}$$

Comme l'application $\text{conf}_k(X) \longrightarrow X^k$ est une inclusion de sous-espace et l'application $\text{conf}_k(X) \longrightarrow B_k(X)$ est une application quotient, on a bien $B_k^\circ(U) \cong \text{conf}_k^\circ(U, \sigma) \cong \prod_{i=1}^k U_{\sigma(i)}$ \square

Corollaire 2.3.2.

Soit M une variété différentielle de dimension n . Soit k un entier naturel. Les espaces de configurations $\text{conf}(k, M)$ et $B_k(M)$ sont aussi des variétés différentielles et de dimension $n.k$

Démonstration.

On prend \mathcal{B} une base de voisinage de M . Dans ce cas,

$$B_k^\circ(U) \cong \text{conf}_k^\circ(U, \sigma) \cong \mathbb{R}^{nk}$$

pour tout $U \in \mathcal{B}_k$ et $\sigma : \{1, \dots, k\} \xrightarrow{\cong} \pi_0(U)$. D'où le résultat \square

Proposition 2.3.6.

Si M est une variété simplement connexe de dimension n avec $n \geq 3$, alors $\text{conf}_k(M)$ est simplement connexe pour $k \geq 0$.

Démonstration.

Procédons par récurrence sur k .

Le cas où $k = 0$ est trivial. Le cas $k = 1$ est notre hypothèse car il correspond à $\text{conf}(1, M) = M$ qui est bien simplement connexe par hypothèse. Aussi, comme M est une variété de dimension $n \geq 3$ il est clair que $M \setminus \{*\}$ est simplement connexe i.e $\pi_1(M \setminus \{*\}) = \{0\}$.

Supposons que le résultat est vrai à $k - 1$, c'est-à-dire $\text{conf}(k - 1, M)$ est simplement connexe i.e $\pi_1(\text{conf}(k - 1, M)) = \{0\}$

Ainsi la suite exacte suivante :

$$\pi_1(M \setminus \{*\}) \longrightarrow \pi_1(\text{conf}_k(M)) \longrightarrow \pi_1(\text{conf}_{k-1}(M))$$

devient

$$0 \longrightarrow \pi_1(\text{conf}_k(M)) \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire $\pi_1(\text{conf}(k, M)) = \{0\}$ d'où $\text{conf}(k, M)$ est simplement connexe. \square

Proposition 2.3.7.

Si M est l'intérieur d'une variété bornée, alors l'application $\pi_{k,l} : \text{conf}_l(M) \longrightarrow \text{conf}_k(M)$ admet une section à homotopie près.

Démonstration.

On a $M = \text{int}(N)$, fixons U un ouvert tel que $\partial N \subseteq U$ et l'ensemble $\{x_{k+1}, \dots, x_l\}$ des points distincts dans U . En faisant une restriction sur M on obtient le plongement $\phi : M \longrightarrow M$ isotope à l'identité. Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} s : \text{conf}_k(M) &\rightarrow \text{conf}_l(M) \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (\phi(x_1), \dots, \phi(x_k), x_{k+1}, \dots, x_l) \end{aligned}$$

définie la section cherchée i.e

$$\pi_{k,l} \circ s = \text{conf}_k(\phi) \simeq \text{id}_{\text{conf}_k(M)}$$

□

2.3.2 Projections canoniques**Projections canoniques et leurs fibres****Proposition 2.3.8.** [7]

Soit X une variété différentielle. Soit k, l deux entiers naturels. Alors, $\text{conf}(k+l, X) \cong \text{conf}(k, X) \times \text{conf}(l, X \setminus \mathcal{Q}_k)$ localement où $\mathcal{Q}_k = \{q_1, \dots, q_k\} \in \text{Conf}(k, X)$.

Soit X un espace topologique et $k, l \geq 0$ des entiers. On a les projections canoniques

$$\begin{aligned} p : \text{conf}(k, X) \times \text{conf}(l, X) &\rightarrow \text{conf}(k+l, X) \\ (x_1, \dots, x_k, \dots, x_{k+l}) &\mapsto (x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Fixons $b = (b_1, \dots, b_k) \in \text{Conf}(k, X)$. La fibre de p au-dessus de b est

$$p^{-1}(b) \cong \text{conf}(l, X \setminus \mathcal{Q}_k) \text{ avec } \mathcal{Q}_k = \{b_1, \dots, b_k\}$$

Proposition 2.3.9. [5]

Si X est une variété connexe alors $\text{conf}(l, X \setminus \{b_1, \dots, b_k\})$ est indépendant (à homéomorphisme près) du choix de $b = (b_1, \dots, b_k) \in \text{conf}(k, X)$

Exemples

En s'appuyant sur la définition de projection canonique donné en 2.3.2 on a les exemples suivants :

i) Si $k = l = 1$ et $X = \mathbb{R}^n$ alors on a :

$$\text{Fibre} = \text{conf}(1, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_1) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\text{Espace total} = \text{conf}(2, \mathbb{R}^n)$$

$$\text{Base} = \text{conf}(1, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$$

ii) Si $k = l = 1$ et $X = S^1$ alors on a :

$$\text{Fibre} = \text{conf}(1, S^1 \setminus \mathcal{Q}_1) \cong S^1 \setminus \mathcal{Q}_1 \cong]0, 2\pi[$$

$$\text{Espace total} = \text{conf}(2, S^1)$$

$$\text{Base} = \text{conf}(1, S^1) \cong S^1$$

iii) Si $k, l \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{Q}_k = \{1, \dots, k\}$ alors on a :

$$\text{Fibre} = \text{conf}(l, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_n) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}^l$$

$$\text{Espace total} = \text{conf}(k + l, \mathbb{R}) \cong \sum_{k+l} \times \mathbb{R}^{k+l}$$

$$\text{Base} = \text{conf}(k + l, \mathbb{R}) \cong \sum_k \times \mathbb{R}^k$$

2.3.3 Fibration localement triviale

Définition 2.3.6. (*Fibration localement triviale*)

Une application continue $p : E \longrightarrow B$ est une fibration localement triviale (ou fibré principale) si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage U de b et un homéomorphisme $h : U \times p^{-1}(b) \cong p^{-1}(U)$ tel que $p \circ h = \text{proj}$. On dit que E est l'espace total, B est la base et p la projection. Si les $p^{-1}(b)$ sont homéomorphes entre eux, pour tous les $b \in B$, on dit que $F = p^{-1}(b)$ est la fibre générique. Si F est un espace discret on dit aussi que p est un revêtement.

Exemple 2.3.2.

i- $E := B \times F$ et $p = \text{proj} : E = B \times F \longrightarrow B$. Il s'agit des fibrés triviaux.

ii- le revêtement $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto \exp(2i\pi t)$ de fibre \mathbb{Z}

Théorème 2.3.1. [2] (Page 9)

Si M est une variété sans bord, la projection naturelle

$$p : \text{conf}(k, M) \longrightarrow \text{conf}(k - 1, M)$$

est une fibration avec pour fibre $M \setminus Q_{k-1}$

Théorème 2.3.2. (Fadell-Neuwirth)[8]

Soit M une variété. Alors les projections canoniques $p : \text{Conf}(k+l, M) \longrightarrow \text{Conf}(k, M)$ sont des fibrations localement triviales. Si de plus M est connexe alors chaque fibre est homéomorphe à $\text{Conf}(l, M \setminus \mathcal{Q}_k)$ où $\mathcal{Q}_k \subset M$ est n'importe quel sous-ensemble de cardinal k .

$$\underbrace{\text{conf}(l, X \setminus \mathcal{Q}_k)}_{\text{fibre}} \rightarrow \underbrace{\text{conf}(k+l, X)}_{\text{espace total}} \rightarrow \underbrace{\text{conf}(k, X)}_{\text{base}}$$

Pour démontrer ce théorème présentons d'abord le résultat intermédiaire suivant

Lemme 2.3. [8]

On peut construire une application continue

$$\theta : \overset{\circ}{D}^m \times D^m \rightarrow D^m$$

telle que pour $x \in \overset{\circ}{D}^m$

- $\theta(x, -) : D^m \longrightarrow D^m$
- $\theta(x, -) : D^m \longrightarrow D^m$ est un homéomorphisme
- $\theta(x, -)|_{\partial D^m} = id_{\partial D^m}$
- $\theta(x, 0) = x$

Démonstration. (Lemme)

Considérons l'application suivante :

$$\alpha : \overset{\circ}{D}^m \rightarrow D^m$$

$$x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$$

on a : $\alpha^{-1}(z) = \frac{z}{1+|z|}$, $z \in D^m$

Soit ∂D^m le bord de D^m . Soit $q \in \overset{\circ}{D}^m$ fixé.

Considérons l'application

$$\gamma_q : D^m \rightarrow D^m$$

tel que

$$\gamma_q(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \partial D^m \\ \alpha^{-1}\left(\frac{y}{1-|y|} + \frac{q}{1-|q|}\right) & \text{si } y \in D^{\circ m} \end{cases}$$

On a finalement

$$\theta : D^{\circ m} \times D^m \rightarrow D^m$$

$$(q, y) \mapsto \theta(q, y) = \gamma_q(y)$$

Vérifions les axiomes :

- On a $\theta(q, y) = y$ si $y \in \partial D^m$ d'où $\theta(q, -)|_{\partial D^m} = id_{\partial D^m}$
- On a

$$\begin{aligned} \theta(q, 0) &= \gamma_q(0) = \alpha^{-1}\left(\frac{q}{1-|q|}\right) \\ &= \frac{\frac{q}{1-|q|}}{1 + \left|\frac{q}{1-|q|}\right|} \\ &= \frac{\frac{q}{1-|q|}}{1 + \frac{|q|}{1-|q|}} \\ &= \frac{q}{1-|q|+|q|} \\ &= q \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Démonstration. (Théorème)

Supposons que M est une variété connexe et de dimension ≥ 2 . Posons $\mathcal{Q}_k = \{q_1, \dots, q_k\} \subset M$ arbitraire de cardinal k et $F := Conf(l, M \setminus \mathcal{Q}_k)$. Soit $b = (b_1, \dots, b_k) \in Conf(k, M)$. Il faut trouver un voisinage ouvert U de b et un homéomorphisme $h : U \times F \cong p^{-1}(U)$ tel que $p \circ h = proj_1$. Notons D^m la boule fermée unité de \mathbb{R}^m et \mathbb{D}^m boule ouverte unité. Il existe des voisinages ouverts V_i de b_i dans M tels que $\bar{V}_i \cong D^m$ par un homéomorphisme qui envoie b_i sur 0 et tels que les \bar{V}_i sont deux à deux disjoints. Posons

$$U = \prod_{i=1}^k V_i \subset conf(k, M)$$

D'après le lemme 2.3 en conjuguant θ avec l'homéomorphisme $\bar{V}_i \cong D^m$ on obtient des applications $\theta_i : V_i \times \bar{V}_i \rightarrow \bar{V}_i$ avec des propriétés analogues à celles de θ dans le lemme, entre autre $\theta_i(x, b_i) = x$. On définit $\Theta : U \times M \rightarrow M$ par

$$\Theta(U = (x_1, \dots, x_k), y) = \begin{cases} \theta_i(X_i, y) & \text{si } y \in \overline{V_i} \\ y & \text{si } y \notin U_{i=1}^k V_i \end{cases}$$

Il existe aussi un homéomorphisme $\alpha : M \cong M$ tel que $\alpha(q_i) = b_i$ pour $i = 1, \dots, k$. On définit $h : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ par

$$h(u = (x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_l)) = (x_1, \dots, x_k, \Theta(u, \alpha(y_1)), \dots, \Theta(u, \alpha(y_l)))$$

qui donne la trivialisation locale cherchée.

□

2.3.4 Série de Poincaré d'un espace topologique

Tout groupe abélien finement engendré A est isomorphe à $\mathbb{Z}^r \otimes T$ où $r \in \mathbb{N}$ et T est un groupe abélien fini (donc de torsion). On définit le rang de A par $\text{rang}(A) := r$. La série de Poincaré d'un espace X est la série potentielle

$$P_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{rang}(H_k(X)) t^k$$

Exemple 2.3.3.

i- Prenons le cas de $X = S^1$. L'homologie de $H_k(S^1)$ est donné par :

$$H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La série de Poincaré est donné par : $P_{S^1}(t) = 1 + t$

ii- Prenons maintenant le cas du tore, c'est-à-dire pour $X = S^1 \times S^1$. Son homologie est donnée est donné par :

$$H_k(S^1 \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La série de Poincaré est donné par $P_{S^1 \times S^1}(t) = 1 + 2t + t^2$

Proposition 2.3.10. [8]

Soit M une variété différentielle. Soit k un entier naturel tel que $k \geq 2$. Alors $M \setminus \{Q_k\}$ a le même type d'homotopie du bouquet de $M \setminus Q_1$ avec le bouquet de $k-1$ copies de sphères S^{n-1} i.e

$$M \setminus Q_k \simeq (M \setminus Q_1) \vee (\vee_{k-1} S^{n-1}) \quad (2.1)$$

Lemme 2.4. [8]

Si $n \geq 2$, alors $P_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k}(t) = 1 + kt^{n-1}$

Démonstration. [8]

La preuve de ce lemme découle de l'homologie suivante :

$$H_d(\mathbb{R}^n \setminus Q_k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } d = 0 \\ \mathbb{Z}^k & \text{si } d = n-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

□

Lemme 2.5. [8]

La projection $p : \text{conf}(k+1, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{conf}(k, \mathbb{R}^n)$ vérifie la deuxième condition du théorème 2.3.4

Nous donnons des exemples de série de Poincaré sur les espaces de configurations à k points dans \mathbb{R}^n . Le théorème suivant nous sera très utile pour calculer ces différentes séries.

Théorème 2.3.3. [8]

$$P_{\text{conf}(k, \mathbb{R}^n)}(t) = (1 + t^{n-1})(1 + 2t^{n-1}) \dots (1 + (k-1)t^{n-1})$$

ou

$$P_{\text{conf}(k, \mathbb{R}^n)}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + jt^{n-1})$$

Démonstration.

La démonstration se fait grâce à une récurrence sur k .

□

Exemple 2.3.4.

- $P_{\text{conf}(1, \mathbb{R}^n)}(t) = 1$
- $P_{\text{conf}(2, \mathbb{R}^n)}(t) = 1 + t^{n-1}$
- $P_{\text{conf}(3, \mathbb{R}^n)}(t) = 1 + 3t^{n-1} + 2t^{2(n-1)}$

La démonstration de ces calculs utilise les lemmes 2.4 et 2.5.

Définition 2.3.7. (*Groupe libre engendré*)

Soit S un ensemble. On appelle groupe libre engendré par S tout couple (L, i) où L est un groupe et $i : S \rightarrow L$ une application, vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour tout couple (G, j) où G est un groupe et $j : S \rightarrow G$ est une application, il existe un unique morphisme de groupes $f : L \rightarrow G$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & L \\ & j \searrow & \downarrow f \\ & & G \end{array}$$

Nous allons maintenant présenter un théorème qui nous sera très utile dans la suite pour le calcul d'homologie des espaces de configurations. Il s'agit du théorème de Leray-Hirsch

Théorème 2.3.4. (*Leray-Hirsch*)[8]

Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration localement triviale de fibre générique $F = p^{-1}(b)$. Supposons B connexe et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et désignons par H_k le k -ième groupe l'homologie :

- i) $H_k(F)$ est un groupe abélien libre finiment engendré,
- ii) $H_k(\text{incl}) : H_k(F) \rightarrow H_k(E)$ est injective

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n(E) \cong \bigoplus_{k=0}^n H_{n-k}(B) \otimes H_k(F)$$

\otimes est le produit tensoriel des groupes abéliens ou \mathbb{Z} -modules. Si A est un groupe abélien alors

$$A \otimes \mathbb{Z}^r \cong \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_{r \text{ termes}}$$

Démonstration.

Voir (P.432 – 433, Chapitre 4 [6])

□

Proposition 2.3.11. [8]

Si une fibration localement triviale $E \rightarrow B$ vérifie la deuxième condition du théorème 2.3.4 et la fibre F est d'homologie libre alors, on a la relation suivante en série de Poincaré :

$$P_E(t) = P_B(t) \cdot P_F(t)$$

2.4 Homologie des espaces de configurations

Dans cette sous section, nous allons démontrer que l'on peut toujours trouver un algorithme permettant de décider sur le calcul d'homologie des espaces de configurations sur une variété topologique. Tout d'abord rappelons les notions de (co)homologies simpliciales, singulière et donnons quelques propriétés associées.

2.4.1 (Co)homologie simpliciale

Complexes simpliciaux

Définition 2.4.1. (*Simplexe standard*)

Le simplexe standard de dimension n est l'ensemble

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Le n -simplexe engendré par les points affinements indépendants v_0, \dots, v_n de \mathbb{R}^n est l'ensemble

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

Les points v_i sont les sommets du simplexe et on appelle face de dimension k de σ tout simplexe engendré par les sommets $\{v_j, j \in J\}$, où $J \subset \{0, \dots, n\}$ est de cardinal $k + 1$

Définition 2.4.2. (*Complexe simplicial*)

Un complexe simplicial K de \mathbb{R}^N , où $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est une réunion de simplexes telle que

- (i)- *Toute face d'un simplexe de K est dans K ,*
- (ii)- *L'intersection de deux simplexes σ_1 et σ_2 de K est soit vide, soit une face de σ_1 et de σ_2 .*

Définition 2.4.3. (*Sous-complexe*)

On appelle sous-complexe d'un complexe K , tout sous-ensemble L de K qui contient les faces de tous ses éléments. Pour tout entier naturel n , le n -squelette de K est le sous-complexe $K^{(n)}$ de K formé de la réunion de tous les simplexes de K de dimension plus petite ou égale à n .

Lemme 2.6. [3]

Soient K et L deux complexes simpliciaux et $f : K^{(0)} \longrightarrow L^{(0)}$ une application telle que lorsque $v_0, \dots, v_k \in K^{(0)}$ sont les sommets d'un k -simplexe, $f(v_0), \dots, f(v_k)$ engendrent un simplexe de L (de dimension inférieure ou égale à k). Alors f s'étend en

$$f : \left(\sum t_i v_i \right) \in K \mapsto \left(\sum t_i f(v_i) \right) \in L$$

qui est continue.

Définition 2.4.4. (*Application simpliciale*)

Une application simpliciale entre les complexes simpliciaux K et L est une application donnée par le Lemme 2.6.

Définition 2.4.5. (*Triangulation de variété*)

On appelle triangulation d'une variété M tout homéomorphisme $H : M \longrightarrow K$ où K est un complexe simplicial.

Théorème 2.4.1. [19]

Toute variété différentielle possède une triangulation.

Corollaire 2.4.1. [19]

Toute variété différentielle compacte de dimension n possède un recouvrement par un nombre fini d'ouverts dont les intersections sont vides ou difféomorphes à \mathbb{R}^n .

Démonstration.

Soit M une variété compacte équipée d'une triangulation finie τ . On définit pour tout sommet s de τ l'ouvert U_s comme l'intérieur de l'union des simplexes qui contiennent s comme sommet. C'est un ouvert de M difféomorphe à \mathbb{R}^n et l'ensemble des U_s recouvrent M . De plus, si s_1, \dots, s_k sont des sommets de la triangulation, $U_{s_1} \times \dots \times U_{s_k}$ est vide si s_1, \dots, s_k n'engendrent pas un simplexe de la triangulation et coïncide avec l'intérieur de la réunion des simplexes qui contiennent $[s_1, \dots, s_k]$ comme face sinon. En particulier, $U_{s_1} \times \dots \times U_{s_k}$ se rétracte sur $[s_1, \dots, s_k]$ et se trouve être difféomorphe à \mathbb{R}^n . Ce recouvrement convient donc. \square

Homologie et cohomologie simpliciales

Définition 2.4.6. (*Orientation de simplexe*)

Une orientation d'un p -simplexe σ est la donnée d'un ordre sur ses sommets modulo changement de l'ordre par une permutation paire. On note $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un p -simplexe orienté

de sommets v_0, \dots, v_p . Si $\theta \in \Delta_{p+1}$ est une permutation paire, $[v_0, \dots, v_p] = [v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}]$ comme simplexe orienté. Sinon $[v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}] := -\sigma \neq \sigma$.

Définition 2.4.7. (Chaînes simpliciales)

Une p -chaîne simpliciale d'un complexe K est une fonction c_p qui à tout p -simplexe orienté $[v_0, \dots, v_p]$ de K associe un entier relatif tel que :

- (i)- Pour toute permutation $\theta \in \Delta_{p+1}$, $c_p([v_0, \dots, v_p]) = \epsilon(\theta)c_p([v_{\theta(0)}, \dots, v_{\theta(p)}])$
- (ii)- Le support de c_p est fini.

On note une telle p -chaîne $c_p = \sum_{i \in I} a_i [v_0^i, \dots, v_p^i]$, où $a_i \in \mathbb{Z}$, I est fini, et v_0^i, \dots, v_p^i engendrent un p -simplexe de K .

On note $C_p(K)$ l'ensemble des p -chaînes simpliciales de K . C'est un groupe abélien libre dont une base est donnée par les p -simplexes de K , chaque simplexe étant équipé d'une orientation. On définit alors

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(K) &\rightarrow C_{p-1}(K) \\ [v_0, \dots, v_p] &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_p] \end{aligned}$$

Exemple 2.4.1. [3]

- (i)- $\partial_1[v_0v_1] = [v_1] - [v_0]$ exprime le bord d'un intervalle orienté comme la différence du sommet but et du sommet source.



- (ii)- $\partial_1[v_0v_1v_2] = [v_1v_2] - [v_0v_2] + [v_0v_1]$ exprime le bord d'un triangle orienté comme la somme de ses trois côtés munis de l'orientation induite.



En général, cette formule purement combinatoire de ∂_p exprime le bord d'un p -simplexe orienté comme la somme de ses $p+1$ faces équipées de l'orientation induite.

Lemme 2.7. [3]

Soit K un complexe simplicial. Alors pour tout entier naturel p , la composée $\partial_{p-1} \circ \partial_p$ s'annule.

Définition 2.4.8. (Homologie relative)

L'homologie de $C(K, L)$ est appelée homologie relative de K modulo L .

La suite exacte longue en homologie associée à cette suite exacte courte est très pratique pour calculer l'homologie de K , surtout lorsqu'on la combine avec le théorème d'excision suivant.

Théorème 2.4.2. [16]

Soit K un complexe simplicial et L un sous-complexe de K . Soit $M \subset L$ tel que $K \setminus M$ est un sous-complexe de K et $L \setminus M$ un sous-complexe de L . Alors $C(K, L) \simeq C(K \setminus M, L \setminus M)$ de sorte que pour tout entier naturel p , $H_p(K, L) \simeq H_p(K \setminus M, L \setminus M)$.

2.4.2 Homologie singulière

Complexes singuliers

Définition 2.4.9. (*Simplexe singulier*)

Un simplexe singulier de dimension p d'un espace topologique X est une application continue σ du simplexe standard Δ_p de dimension p dans X . Le groupe abélien libre engendré par les p -simplexes singuliers est appelé groupe des p -chaînes singulières et noté $S_p(X)$.

Le groupe $S_p(X)$ est un groupe abélien libre de rang infini. Une p -chaîne singulière s'écrit

$$\sigma = \sum_{i \in I} a_i \sigma_i$$

où I est fini, a_i est un entier et σ_i est un p -simplexe singulier de X . On note $\Delta_p = [v_0, \dots, v_p]$ le simplexe standard. Si σ est un p -simplexe singulier, on définit

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{[v_0, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_p]}$$

En identifiant la face $[v_0, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_p]$ au simplexe standard de dimension $p-1$, on obtient une $(p-1)$ -chaîne singulière. Ainsi, l'opérateur ∂ s'étend par linéarité en un morphisme $\partial_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$.

Lemme 2.8. [3]

Pour tout espace topologique X et tout entier p , on a $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

À tout espace topologique X est donc associé un complexe de chaînes singulières $\dots \longrightarrow S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X) \longrightarrow \dots$ ainsi qu'un complexe de cochaînes singulières $S^p(X) = \text{Hom}(S_p(X), Z)$

Remarquons que le morphisme ϵ défini par :

$$\epsilon : S_p(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i \in I} a_i \sigma_i \rightarrow \sum_{i \in I} a_i$$

passé au quotient en un morphisme $\epsilon : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ appelé augmentation. On peut prolonger le complexe de chaîne singulière en un complexe augmenté $\dots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ dont l'homologie est appelée homologie réduite et notée $\tilde{H}_p(X)$. On vérifie alors que le rang de $\tilde{H}_0(X)$ tel que $\tilde{H}_p(X) \simeq H_p(X)$ si $p > 0$.

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme

$$f_0 : S_0(X) \rightarrow S_0(Y)$$

$$\sum_{i \in I} a_i \sigma_i \rightarrow \sum_{i \in I} a_i f \circ \sigma_i$$

et on a ainsi obtenu un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de groupes abélien.

Si $A \subset X$, alors $S(A)$ est un sous-complexe de $S(X)$ et on note $S(X, A)$ le complexe quotient $S(X)/S(A)$. On note encore ∂_p l'application induite sur le complexe quotient.

Définition 2.4.10. (*L'homologie singulière*)

L'homologie de $S(X, A)$ est appelée homologie singulière de X relative à A .

Théorème 2.4.3. (*Excision en homologie singulière*)[16]

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ et $U \subset X$ tels que $\bar{U} \subset \text{int}(A)$. Alors l'inclusion de la paire $(X \setminus U, A \setminus U)$ dans (X, A) induit un isomorphisme en homologie singulière, de sorte que

$$H_*(X \setminus U, A \setminus U) \simeq H_*(X, A).$$

Démonstration.

Voir la démonstration dans [16]

□

Dualité de Poincaré

Ici nous énonçons juste le théorème de dualité de Poincaré qui est très utile pour la suite. La démonstration de ce théorème est dans [16].

Théorème 2.4.4. (*Dualité de Poincaré*)[17]

Soit M une variété compacte orientée de dimension n et G un groupe abélien (ou A -module). Alors, pour tout entier naturel p , on a l'isomorphisme $H^p(M, G) \simeq H_{n-p}(M, G)$. Si M n'est pas orientable, ce résultat reste valable dans le cas particulier où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démonstration.

Voir la démonstration dans [17]. □

Introduisons maintenant un outil très important dans le calcul de l'homologie.

Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soient X un espace topologique, U, V deux ouverts de X recouvrant X , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & U \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ V & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. Notons $((i_1)_*, -(i_2)_*) : C_*(U \cap V) \longrightarrow C_*(U) \times C_*(V)$ l'application $c \longmapsto ((i_1)_*c, -(i_2)_*c)$ (le signe $-$ est capital dans les calculs). Notons $(j_1)_* + (j_2)_* : C_*(U) \times C_*(V) \longrightarrow C_*(\{U, V\})$ l'application $(c, c') \longmapsto (j_1)_*c + (j_2)_*c'$. Notons $X', U', V', i'_1, i'_2, j'_1, j'_2$ une autre telle donnée, et $f : X \longrightarrow X'$ une application continue telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$.

Proposition 2.4.1. [16]

La suite,

$$0 \longrightarrow C_*(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} C_*(U) \times C_*(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} C_*(\{U, V\}) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de chaînes, et le triplet

$$((f|_{U \cap V})_*, (f|_U)_* \times (f|_V)_*, f_*)$$

est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & C_*(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & C_*(U) \times C_*(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & C_*(\{U, V\}) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* & \\ 0 \longrightarrow & C_*(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & C_*(U') \times C_*(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & C_*(\{U', V'\}) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Corollaire 2.4.2. [16]

Pour tout espace topologique X , muni d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$, il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{n+1}(X) &\xrightarrow{\delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} H_n(U) \times H_n(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} H_n(X) \xrightarrow{\delta} \\ &H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

telle que, pour tout espace topologique X' , muni d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(U) \subset U'$, $f(V) \subset V'$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots H_n(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & H_n(U) \times H_n(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U \cap V) \dots \\ \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* \\ \dots H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & H_n(U') \times H_n(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U' \cap V') \dots \end{array}$$

2.4.3 Homologie sur les espaces de configurations

Dans cette sous-section, nous étudions l'homologie des espaces de configurations. Commençons par regarder l'homologie des sphères suivante.

On note $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$

Proposition 2.4.2. [16]

On a :

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et

$$H_d(S^m) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } d = 0 \text{ ou } d = m \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Démonstration. - Calcul de $H_n(S^1)$

Nous allons utiliser la suite de Mayer-Vietoris. Prenons nos deux ouverts comme suit :

$$U = S^1 - \{(0, 1)\}$$

$$V = S^1 - \{(1, 0)\}$$

on a bien $S^1 = U \cup V$. U et V sont homéomorphes à \mathbb{R} , or \mathbb{R} étant contractile il a le même type d'homotopie qu'un point c'est-à-dire qu'on a :

$$H_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

d'où

$$H_n(U) \cong H_n(V) \cong H_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Aussi, $U \cap V = S^1 - \{(0, 1), (1, 0)\}$ c'est-à-dire

$H_0(U \cap V) = \mathbb{Z}^2$ car on a bien deux composantes connexes et pour $n \neq 0$ on a

$$H_n(U \cap V) = 0.$$

On a alors la suite de Mayer-Vietoris suivantes :

$\dots \longrightarrow H_n(U \cap V) \longrightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \longrightarrow H_n(U \cup V) \longrightarrow H_{n-1}(U \cap V) \dots$ en faisant bien les itérations sur n on obtient finalement :

$$H_n(U \cup V = S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

qui est le résultat cherché.

- Calcul de l'homologie $H_p(S^n)$ avec $p \geq 0$ et $n \geq 0$

Notons que le cas $n = 1$ correspond au cas précédent. Supposons $n \geq 2$. Nous allons également utiliser la suite de Mayer-Vietoris comme précédemment.

Prenons nos deux ouverts comme suit : $U = S^n - \{N\}$ et $V = S^n - \{S\}$ où N et S représente respectivement le pôle nord et le pôle sud de S^n . U et V sont homéomorphes à \mathbb{R}^n et $S^n = U \cup V$ d'où

$$H_p(U) \cong H_p(V) \cong H_p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

en appliquant la suite de Mayer-Vietoris on a finalement :

$$H_p(U \cup V = S^n) \cong H_{p-1}(U \cap V) \text{ pour } p \neq 0$$

Or comme S^{n-1} et $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ont même type d'homotopie, on a $H_p(S^{n-1}) \cong H_p(\mathbb{R}^n - \{0\})$ d'où

$$H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

donc $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ c'est-à-dire pour $p = n$. Le cas $p = 0$ est trivial car \mathbb{Z} à une composante connexe.

Pour $p = n + k$, $k \geq 1$

on a :

$$H_{n+k}(S^n) \cong H_{n+k-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_{k+1}(S^1) = 0$$

d'où $H_{n+k}(S^n) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et pour tout $p > n$. On a bien le résultat cherché.

□

Remarque 2.4.1.

On note e un générateur de $H_0(S^m)$ et $[S^m]$ un générateur de $H_m(S^m)$. Autrement dit, $H_*(S^m) = \mathbb{Z}.e \oplus \mathbb{Z}.[S^m]$.

Présentons maintenant un résultat très important sur le calcul d'homologie des espaces de configurations.

Théorème 2.4.5. (Kemogne-Tcheka)

Soit X un espace topologique.

Si X est une variété topologique, alors il existe un algorithme permettant de décider sur le calcul d'homologie des espaces de configurations sur X .

Démonstration.

Supposons que X est une variété topologique et montrons qu'il existe un algorithme permettant de décider sur le calcul d'homologie des espaces de configurations sur X .

NB : Notons qu'on appelle variété topologique de dimension n (n entier naturel), un espace topologique M tel que

- M est séparé
- M est à base dénombrable d'ouverts
- M est localement homéomorphe à \mathbb{R}^n

Ainsi, X est bien localement homéomorphe à \mathbb{R}^n par hypothèse, c'est-à-dire pour tout k entier naturel, $\text{conf}(k, X) \cong \text{conf}(k, \mathbb{R}^n)$. Donc, il nous suffit de chercher un algorithme qui permet de décider du calcul de l'homologie des espaces de configurations sur \mathbb{R}^n pour conclure de la validité de cet algorithme sur X .

A cet effet, nous allons écrire un algorithme qui nous permettra de calculer l'homologie des espaces de configurations à k points dans \mathbb{R}^n de manière itérative en utilisant le théorème de Leray-Hirsch.

Soit k, i deux entiers naturels non nuls. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On veut calculer l'homologie de l'espace de configurations à k points dans \mathbb{R}^n , i.e $H_n(\text{conf}(k, \mathbb{R}^n))$.

" Veuillez entrez la valeur de k "

Posons $E_k = \text{conf}(k, \mathbb{R}^n)$

Algorithm 1 Calcul d'homologie des espaces $conf(k, \mathbb{R}^n)$

Entrée : La valeur d'entrée est k , "l'utilisateur entre la valeur de k ".

Sortie : La valeur de sortie dans cette algorithme est l'homologie $H_*(E_k)$, "le but est de calculer l'homologie de l'espace $conf(k, \mathbb{R}^n)$ ".

Si $k = 1$ **alors**

$$conf(k, \mathbb{R}^n) = \{\{1\} \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n : j \text{ injectif}\} = \mathbb{R}^n$$

et \mathbb{R}^n étant contractile, il a le même type d'homotopie qu'un point c'est-à-dire

$$H_*(conf(k, \mathbb{R}^n)) = H_*(\mathbb{R}^n) = H_*(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

Retournez $H_*(E_1)$

Sinon

Si $k = 2$ **alors**

Posons $E_2 = conf(k, \mathbb{R}^n)$

$$conf(k, \mathbb{R}^n) = \{\{1, 2\} \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n : j \text{ injectif}\} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

d'où $conf(k, \mathbb{R}^n) \simeq S^{n-1}$

Ainsi,

$$H_*(conf(k, \mathbb{R}^n)) = H_*(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0 \text{ ou } * = n - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Retournez $H_*(E_2)$

Sinon

Posons $i := 3$

Tantque $i \leq k$ **faire**

Posons $E_i = \text{conf}(i, \mathbb{R}^n)$

– Considérer la projection p_i définie par :

$$p_i : E_i \longrightarrow B_i, \text{ avec } B_i = \text{conf}(i-1, \mathbb{R}^n).$$

Posons $F_i = \mathbb{R}^n \setminus Q_{i-1}$

D'après le théorème 2.3.1, p_i est une fibration, admettant F_i comme fibre

i.e on a l'inclusion suivante :

$$F_i \xrightarrow{\text{incl}} E_i \xrightarrow{p_i} B_i$$

Si $H_*(F_i)$ est un groupe abélien libre finiment engendré et $H_*(\text{incl}) : H_*(F_i) \longrightarrow$

$H_*(E_i)$ est injective **alors**

– Appliquer le théorème de Leray-Hirsch sur la fibration p_i pour avoir l'homologie $H_*(E_i)$ i.e

$$H_*(E_i) := \bigoplus_{k=0}^* H_{*-k}(B_i) \otimes H_k(F_i)$$

Conservez $H_*(E_i)$

Sinon

Affichez " Il est impossible d'obtenir l'homologie $H_*(E_i)$ cherchée via le théorème de Leray-Hirsch "

Fin Si

$$B_i := E_i$$

$$i := i + 1$$

Fin Tanque

Retournez $H_*(E_k)$

Fin Si

Fin Si

Maintenant, il nous reste juste à implémenter cet algorithme pour vérification.

Calculons explicitement l'homologie de l'espace de configurations à trois points dans \mathbb{R}^n en exploitant l'algorithme écrit ci-dessus.

Implémentons maintenant notre algorithme et calculons l'homologie de l'espace $conf(3, \mathbb{R}^n)$. La valeur de k ici est 3 car on veut calculer l'homologie de l'espace $conf(3, \mathbb{R}^n)$, donc nous prenons $i := 3$ et nous entrons directement dans la boucle "Tantque" de l'algorithme c'est-à-dire nous testons : $(i = 3) \leq (k = 3)$, ce qui est bien le cas.

Posons $E_3 = Conf(3, \mathbb{R}^n)$

Considérons la projection canonique :

$$p_3 : E_3 \longrightarrow B_3$$

avec $B_3 = Conf(3 - 1 = 2, \mathbb{R}^n)$. Prenons $F_3 = \mathbb{R}^n \setminus Q_2$.

donc on a finalement,

$$p_3 : Conf(3, \mathbb{R}^n) \longrightarrow Conf(2, \mathbb{R}^n), (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2).$$

Fixons $(q_1, q_2) \in Conf(2, \mathbb{R}^n)$, $Q_2 = \{q_1, q_2\}$ et notons $incl : \mathbb{R}^n - Q_2 \hookrightarrow Conf(3, \mathbb{R}^n)$ l'inclusion de la fibre au-dessus de (q_1, q_2) tel que $incl(x) = (q_1, q_2, x)$, avec $x \in \mathbb{R}^n - Q_2$.

En utilisant l'homologie donnée à la preuve du lemme 2.4 on a bien l'homologie de $\mathbb{R}^n - Q_2$ (Car ici il s'agit du cas $k = 2$) donc on a :

$$H_d(\mathbb{R}^n \setminus Q_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } d = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } d = n - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.2)$$

Plus explicitement, d'après la remarque 2.4.1, on peut alors écrire

$$H_d(\mathbb{R}^n \setminus Q_2) = \mathbb{Z}.e'_1 \oplus \mathbb{Z}.e''_2 \oplus \mathbb{Z}.e'''_3$$

où e'_1 est un générateur de $H_0(\mathbb{R}^n \setminus Q_2)$ et e''_2 et e'''_3 sont respectivement des générateurs de $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus Q_2)$. Donc,

$$H_d(\mathbb{R}^n \setminus Q_2) \text{ est un groupe abélien libre finiment engendré.} \quad (2.3)$$

$$\text{Également, Il est clair que } H_*(\text{incl}) \text{ est bien injective.} \quad (2.4)$$

Aussi, comme par définition, $\text{conf}(2, \mathbb{R}^n) \simeq S^{n-1}$ alors $\text{conf}(2, \mathbb{R}^n)$ et S^{n-1} sont égaux en homologie i.e on a

$$H_d(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n)) = H_d(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } d = 0 \text{ ou } d = n - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.5)$$

d'après la proposition 2.4.2

Également, d'après la remarque 2.4.1, on peut alors écrire

$$H_d(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z}.e_1 \oplus \mathbb{Z}.e_2$$

où e_1 est un générateur de $H_0(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n))$ et e_2 est un générateur de $H_{n-1}(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n))$

Maintenant, d'après 2.4 et 2.3 appliquons le théorème de Leray-Hirsch, i.e :

$$H_*(\text{conf}(3, \mathbb{R}^n)) \cong H_*(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n)) \otimes H_*(\mathbb{R}^n - Q_2)$$

où $H_*(\text{conf}(2, \mathbb{R}^n))$ et $H_*(\mathbb{R}^n - Q_2)$ sont calculées en 2.2 et 2.5

c'est-à-dire

$$H_*(\text{conf}(3, \mathbb{R}^n)) \cong (\mathbb{Z}.e_1 \oplus \mathbb{Z}.e_2) \otimes (\mathbb{Z}.e'_1 \oplus \mathbb{Z}.e''_2 \oplus \mathbb{Z}.e'''_3)$$

Plus explicitement, et en s'appuyant sur la proposition 1.2.2, on a pour tout d entier naturel :

$$\begin{aligned}
H_d(\text{conf}(3, \mathbb{R}^n)) &\cong (\mathbb{Z}.e_1 \oplus \mathbb{Z}.e_2) \otimes (\mathbb{Z}.e'_1 \oplus \mathbb{Z}.e''_2 \oplus \mathbb{Z}.e'''_3) \\
&\cong \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e'_1 \succ}_{d=0} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e''_2 \succ}_{d=n-1} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e'''_3 \succ}_{d=n-1} \\
&\quad \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e'_1 \succ}_{d=n-1} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e''_2 \succ}_{d=2n-2} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e'''_3 \succ}_{d=2n-2} \\
&\cong \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e'_1 \succ}_{d=0} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e''_2 \succ}_{d=n-1} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_1 \otimes e'''_3 \succ}_{d=n-1} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e'_1 \succ}_{d=n-1} \\
&\quad \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e''_2 \succ}_{d=2n-2} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. \prec e_2 \otimes e'''_3 \succ}_{d=2n-2} \\
&\cong \underbrace{\mathbb{Z}. (\prec e_1 \otimes e'_1 \succ)}_{1 \text{ générateur pour } d=0} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. (\prec e_1 \otimes e''_2 \succ, \prec e_1 \otimes e'''_3 \succ, \prec e_2 \otimes e'_1 \succ)}_{3 \text{ générateurs pour } d=n-1} \\
&\quad \oplus \underbrace{\mathbb{Z}. (\prec e_2 \otimes e''_2 \succ, \prec e_2 \otimes e'''_3 \succ)}_{2 \text{ générateurs pour } d=2n-2}
\end{aligned}$$

d'où,

$$H_d(\text{conf}(3, \mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } d = 0 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si } d = n - 1 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } d = 2n - 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.6)$$

Conclusion : On conclut que cet algorithme calcule bien l'homologie des espaces de configurations sur \mathbb{R}^n . Ainsi, il nous suffit de prendre cet algorithme comme notre algorithme cherché sur X (variété topologique) car $\text{conf}(k, X) \cong \text{conf}(k, \mathbb{R}^n)$;

d'où le résultat

□

Remarque 2.4.2.

Il est à noter que via ce théorème 2.4.5, il n'existe pas d'algorithme permettant de décider du calcul d'homologie des espaces de configurations sur un espace topologique quelconque (i.e un espace topologique qui n'est pas une variété).

APPLICATION DES ESPACES DE CONFIGURATIONS

Ce chapitre, nous renseigne sur le contexte d'application et les approches de résolution du problème de planification du mouvement en robotique, en utilisant les outils de topologie algébriques.

3.1 Un peu d'historique sur la naissance de la robotique et la planification

3.1.1 Historique

Le mythe fascinant de la machine créée par l'homme qui effectuerait toutes les tâches, a nourri pendant longtemps l'imaginaire du grand public. Ce mythe symbolise la volonté de l'homme de faire exécuter des tâches fastidieuses par des machines appelés "robots". L'évolution de ces machines (robots) est généralement classifiée suivant des générations reflétant les potentialités offertes par ces dernières. Les robots de première génération exécutent uniquement une suite de mouvement pré-enregistrés (chariot filoguidé). Ceux de la deuxième génération sont dotés de fonctions élémentaires de perception leur permettant de se diriger de manière simple dans leur environnement.

Les développements récents de la robotique visent à accroître l'autonomie de ces systèmes. Cette notion d'autonomie représente une composante importante caractéristique des robots de la troisième génération.

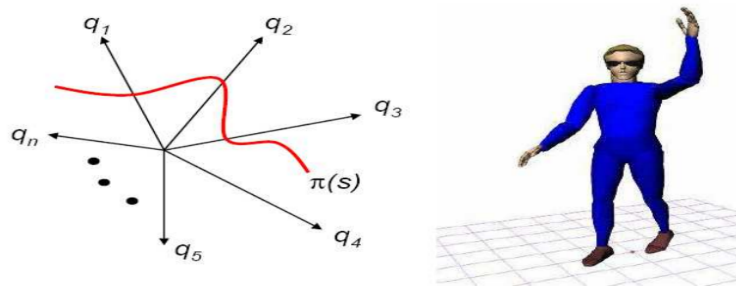
Un système robotique agit par le mouvement dans un monde physique. Sa capacité de planification de mouvement apparaît ainsi comme une composante essentielle de l'autonomie d'un robot.

3.1.2 Planification

Dans sa version la plus simple la planification de mouvement s'intéresse au calcul automatique de chemins sans collision pour un système mécanique (robot mobile, bras manipulateur, personnage animé, ...) évoluant dans un environnement encombré d'obstacles.

La solution de ce problème appelée trajectoire, se présente comme une suite continue de situations géométriques successivement occupées par le robot durant son déplacement.

L'ensemble des positions possibles qu'occupe un robot est appelé espace de configurations. En pratique c'est l'ensemble des états qu'un système mécanique peut atteindre. L'on peut également le regarder comme l'ensemble de toutes les configurations du robot (via les degrés de liberté associés). Une configuration regroupe l'ensemble des paramètres permettant de localiser un système mécanique dans son environnement.



La planification de mouvement pour un système est alors ramenée au problème de la planification de mouvement d'un point dans cet espace des configurations.

Le problème de planification de mouvement est sans conteste celui qui a suscité le plus de travaux durant ces dernières années. Dans sa forme la plus simple, il est intrinsèquement difficile. La plupart des problèmes de planification de mouvement résistent aux approches algorithmiques exactes. Il est donc nécessaire de concevoir des approches de nature différente, permettant par exemple de calculer des solutions approchées ou basées sur des techniques d'exploration non-déterministes.

Le problème de planification de mouvement consiste à calculer une trajectoire pour un robot entre une position initiale et une autre finale. Il peut être sommairement posé de la manière suivante :

Étant donné un robot évoluant dans un environnement parsemé d'obstacles, trouver s'il existe un mouvement amenant ce robot d'une position à une autre respectant ses contraintes ciné-

matiques, tout en évitant les obstacles.

L'algorithme de planification de mouvement débute avec l'introduction de la notion d'espace de configurations par Lozano-Pérez dans son article intitulé "Spatial planning". Il a substitué la recherche d'un chemin sans collision pour un robot évoluant parmi des obstacles par la recherche de chemin d'un point évoluant dans l'espace de configurations du robot.

La planification de mouvement devient rapidement un domaine de recherche très actif, se focalisant sur quatre approches principales :

- La décomposition cellulaires présenté par schwartz
- Les champs de potentiels présenté par Khalib
- Les méthodes de retraction présenté par O'Dùnlaing
- La construction de graphe présenté par Nilson

Dans sa version la plus simple le problème est intrinsèquement difficile, sa complexité croit exponentiellement avec le nombre de degré de liberté du robot.

3.2 Contexte de travail et d'application

Le but principal de la robotique est la création de robots autonomes (Latombe, 1991). De tels robots doivent être en mesure d'exécuter (output) des tâches (input) très précises sans « aucune » intervention humaine. Le robot décide de la manière d'exécuter la tâche. Le mot robot a été utilisé pour la première en 1921 par Karel Capek dans sa pièce «Possum de Universal Robots ». « La robotique » comme mot a été inventé par Isaac Asimov en 1940 dans son livre "I, robot".

Ce qui lie la robotique à la topologie est la notion de l'espace de configurations : les états possibles d'un système mécanique. On peut prédire le degré d'instabilités du mouvement du robot si on dispose d'informations suffisantes sur la topologie et géométrie l'algèbre de l'espace de configuration.

La théorie de la complexité topologique pour la planification du mouvement d'un robot a été inventée par Michael Farber (2003, 2004). Elle s'inspire de travaux précédents de Schwarz (1966), Smale (1987) et Vassiliev (1988) sur la notion de complexité topologique d'un algorithme. Depuis alors, cette notion a connu un essor international et un intérêt continue et des applications dans d'autres domaines.

En robotique, lorsque l'on veut planifier les mouvements d'un système mécanique, on doit

être capable de décrire à l'avance le mouvement que devra effectuer le système afin de passer d'une position initiale donnée à une position finale donnée. En considérant l'espace de toutes les positions possibles, c'est-à-dire l'espace appelé "espace des configurations" du système, un mouvement n'est rien d'autre qu'un chemin dans cet espace allant d'un point initial à un point final.

Ainsi une planification complète des mouvements consiste d'une fonction qui associe à chaque couple (point initial, point final) un chemin liant les deux points donnés. On peut vite se rendre compte qu'en général une telle fonction ne pourra pas être donnée par une unique formule ou, plus exactement, qu'elle ne sera pas continue. Il faudra alors admettre de la définir par plusieurs formules ou, plus exactement, à partir de plusieurs fonctions continues mais définies seulement localement. La complexité topologique du système, définie par Michael Farber au début des années 2000, correspond au nombre minimal de formules (fonctions locales) nécessaires pour décrire une planification complète des mouvements.

Ce nombre se révèle être un invariant du type d'homotopie de l'espace des configurations et peut être calculé, ou tout au moins estimé, à l'aide d'outils de topologie algébrique tels que la cohomologie ou les modèles issus de la théorie de l'homotopie rationnelle.

3.3 Principe d'application

Considérons un mobile (rigide ou non) dans un environnement connu encombré d'objets qui sont tous considérés comme obstacles. L'environnement est géométriquement décrit dans un référentiel absolu ; il est supposé statique. Étant donné une position de départ et une position finale, le problème consiste à trouver un "chemin" pour le mobile, tel que celui-ci n'entre pas en collision avec les obstacles.

Toutes les méthodes de résolution consiste à transformer le problème initial de recherche de chemin pour le mobile dans l'environnement ($2D$ ou $3D$, mais pas plus!), en un problème de recherche de chemin pour un point (ce qui est nettement plus facile) dans un "certain" espace caractéristique du problème (qui, lui, est nettement moins sympathique que l'environnement).

3.4 Définition de l'espace des configurations

Mathématiquement, l'espace d'évolution d'un système robotique est un domaine de l'espace euclidien E^k , avec $k = 3$ (ou $k = 2$ si on se restreint à des problèmes plans). On appelle placement dans E^k toute transformation sur E^k , composée d'une translation et d'une rotation. L'espace P des placements forme un groupe de dimension 3 dans E^2 et de dimension 6 dans E^3 .

Par exemple, si $c = (transl(x, y), rot(\theta))$ et $p = (a, b)$ sont respectivement un placement et un point de E^2 , on a : $c(p) = (x + a\cos(\theta) - b\sin(\theta), y + a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$.

Un corps rigide est un sous-espace compact et connexe de E^k . Un robot est une paire (R, A) où (R_1, R_2, \dots, R_m) est un m-uplet de corps rigides et A un sous ensemble de P^m . Un placement c de R est un m-uplet (c_1, c_2, \dots, c_m) de P^m . $c(R) = \bigcup_i c_i(R_i)$

On appelle placement valide un placement appartenant à A

Un robot mobile par exemple est constitué d'un seul corps rigide et $A = P$

Un bras manipulateur est un ensemble de m corps rigides articulés. A traduit dans ce cas les contraintes physiques du système (butées articulaire, non-collision entre corps) et celles des liaisons holonomes (une articulation sphérique entre deux corps impose par exemple que les deux corps possède un point confondu). On vérifie alors que la dimension de A est égale à la dimension de P^m moins le nombre d'équations d'holonomie. Dans ce cas la formulation de A comme sous ensemble de l'espace des placements n'est pas la mieux adaptée. Il vaut mieux utiliser les coordonnées généralisées du manipulateur qui représente les degrés de liberté sur lesquels il est possible d'agir pour faire bouger le robot ; elles constituent des paramètres directement accessibles, nécessaires et suffisants pour caractériser l'ensemble des placements valides.

D'une manière générale nous appellerons configurations d'un robot R donné, un p-uplet de paramètres in dépendants caractérisant un placement valide de ce robot. De manière classique chaque élément du p-uplet appartient à \mathbb{R} (ensemble des réels) ou S^1 (cercle unité). On notera EC l'espace des configurations de R . Si c est une configurations de R , $c(R)$ désigne le placement correspondant de R dans E^k . Nous n'essayerons pas de donner une méthode générale de paramétrisation "minimale" de A . Elle est clairement donnée pour chaque cas particulier comme nous le verrons dans les exemples dans ce travail.

Un environnement est sous ensemble fermé E de E^k . Les composantes connexes de E sont supposées en nombre fini et sont appelées obstacles. Un robot R et un environnement E étant donnés, une configuration c est dite :

- admissible si $c(R) \cap \text{int}(E) = \emptyset$
- libre si $c(R) \cap E = \emptyset$
- de contact si $c(R) \cap \text{int}(E) = \emptyset$ et $c(R) \cap E \neq \emptyset$
- de collision si $c(R) \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$

Les espaces des configurations admissibles, libres, de contact et de collision sont respectivement notés ADMISSIBLE, LIBRE, CONTACT et COLLISION. On vérifie aisément les relations suivantes :

- $EC = \text{ADMISSIBLE} \cup \text{COLLISION}$
- $\text{ADMISSIBLE} = \text{LIBRE} \cup \text{CONTACT}$
- $\text{ADMISSIBLE} = \text{cpl}(\text{COLLISION})$

3.5 Position du problème

Soit EC l'espace des configurations d'un robot R . Puisque E^k est un espace métrique on peut doter EC de la métrique induite par la distance de Hausdorff sur les ensembles fermés de E^k . En clair la distance entre deux configurations c et c' se définit comme la distance de Hausdorff entre $c(R)$ et $c'(R)$. On suppose dans toute la suite que EC est muni de la topologie induite par cette métrique. Un mouvement de R dans E^k entre deux placements est un chemin dans EC entre les deux configurations correspondantes c et c' , c'est-à-dire une fonction continue m de l'intervalle $[0, 1]$ dans EC telle que $m(0) = c$ et $m(1) = c'$. Noter que cette définition ne recouvre que la seule dimension géométrique du problème du mouvement. Elle évacue la cinématique et la dynamique du système.

Le problème général de la planification de mouvement sans collision, connu sous le nom évocateur du problème du déménageur de piano, se définit alors comme suit :

- (P) Étant donné un robot R , un environnement E , une configuration initiale c et une configuration finale c' , trouver un chemin dans ADMISSIBLE entre c et c' , ou à défaut prouver qu'il n'en existe pas.

Ce problème de planification de mouvement contient le problème de décision suivant :

(D) Étant donné un robot, un environnement E , une configuration initiale c et une configuration finale c' , existe-t-il un chemin dans ADMISSIBLE entre c et c' ?

Ces problème reviennent à déterminer l'existence d'une composante connexe par arcs dans ADMISSIBLE, contenant c et c' (problème (D)) et à déterminer un chemin dans cette composante (problème (P)). Par abus de langage, et parce qu'il ne peut avoir de confusion dans la mesure où les obstacles sont en nombre fini, on parlera de composante connexe pour désigner une composante connexe par arcs. Notons que dans le cas où l'on impose des mouvements sans contact, la recherche doit s'effectuer dans LIBRE. Les deux grandes étapes dans la résolution de ces problèmes sont : représenter ADMISSIBLE (ou LIBRE) et l'explorer.

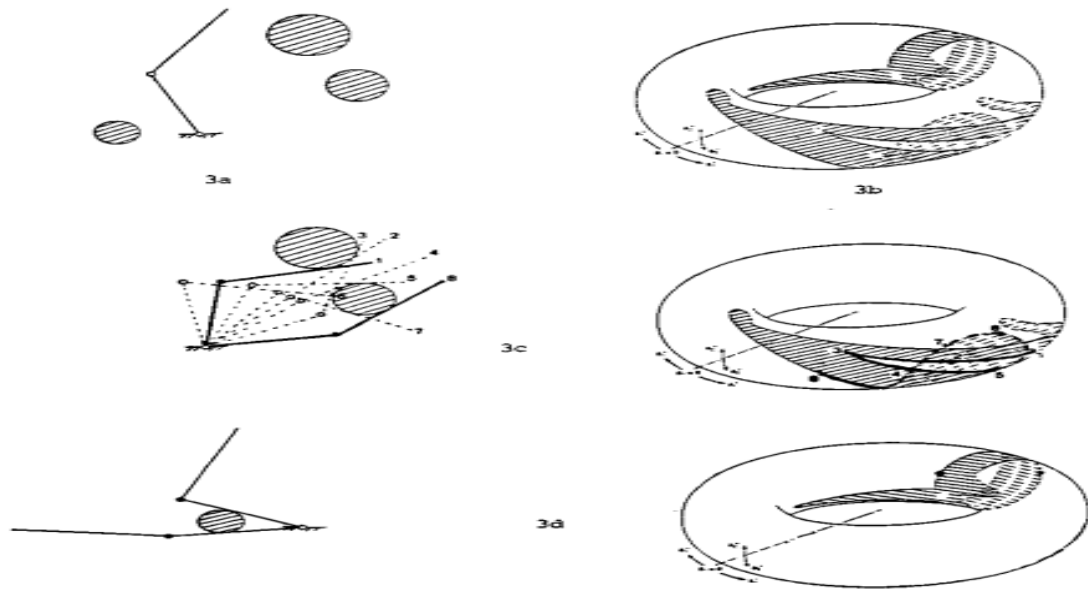
C'est Lozano-Pérez [14] qui fut le premier à introduire la notion d'espace des configurations. Illustrons ceci par un exemple.

Exemple 3.5.1. *(Le manipulateur plan a deux barres)*

Considérons le mécanisme plan dans l'environnement de la figure 3a (exemple tiré de Lumelski [10]). R est composé de deux barres pouvant tourner suivant des axes orthogonaux au plan de la feuille. L'axe de rotation d'une des barres est fixe ; l'axe de rotation de l'autre passe par l'extrémité de la précédente. Il est clair que l'ensemble des placements de R est caractérisé par deux paramètres angulaires donnant l'orientation des deux barres. L'espace des configurations de R est ainsi $S^1 \times S^1$ et peut être représenté par la surface d'un tore. Les trois obstacles de l'environnement sont des disques ; ils se transforment en deux "obstacles" dans EC (parties hachurées de la figure 3b) dont l'intérieure représente COLLISION.

Remarque 3.5.1.

- 1- *L'environnement a trois composantes connexes alors que COLLISION n'en a que deux. Le disque de gauche se transforme en l'"anneau" ; les deux autres disques se transforment en une seule "nappe".*
- 2- *La figure 3c illustre un mouvement entre deux configuration de contact, durant lequel le robot est toujours en contact avec l'un des deux disques. Par contre il est clair qu'il n'existe pas un tel mouvement au contact entre les deux configurations de la figure 3d (le vérifier sur la figure 3b)*



3.6 Principes de résolution

Définition 3.6.1. (Chemins au contact)

Venons en maintenant à l'étude de l'expérience de chemin de contact et à l'"anomalie" rencontrée dans l'exemple précédent. Hopcroft et Wilfong donne une condition suffisante d'existence de tels chemins, que nous allons exposer. Nous verrons qu'elle a des conséquences à la fois théorique et pratiques intéressantes.

L'étude utilise des concepts et méthodes issus de la topologie algébrique, et en particulier la suite exacte de Mayer-Vietoris. La topologie algébrique décrit la structure d'un espace à partir d'un ensemble de groupes appelés d'homologie. Sans entrer dans le détail, pour l'usage que nous en ferons, il suffit de savoir que le 0-ième groupe d'homologie H_0 d'un espace fournit des informations sur la connectivité par arcs de cet espace : pour un espace à k composantes connexes, H_0 est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k fois), où \oplus désigne la somme directe entre groupe et \mathbb{Z} le groupe additif des entiers naturels. Le premier groupe d'homologie H_1 donne des informations sur le nombre de "creux" dans l'espace. Pour un espace à k "creux", $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$, k fois. Ainsi si un espace est contractile en un point, H_1 est réduit à $\{0\}$. Pour le plan, le cylindre ou le tore H_0 vaut \mathbb{Z} , tandis que H_1 vaut respectivement $\{0\}$, \mathbb{Z} et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Une suite exacte d'homomorphismes de groupe est une suite dans laquelle l'image d'un

homomorphisme est égale au noyau du suivant. Posons $A = \text{COLLISION} \cup \text{CONTACT}$ et $B = \text{ADMISSIBLE}$. Notons que $A \cup B = EC$ et que $A \cap B = \text{CONTACT}$. A et B sont tous deux fermés. Le théorème de Mayer- Vietoris établit un lien entre les groupes d'homologie de A , B , $A \cup B$, $A \cap B$. En particulier il montre que la suite :

$$H_1(A \cup B) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(A \cup B) \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte (dans laquelle les trois premiers homomorphismes sont les homomorphismes "naturels", respectivement bord, projection et inclusion et le quatrième l'homomorphisme nul). Supposons de plus que $A \cup B$ soit contractile en un point, on a $H_1(A \cup B) = \{0\}$. Supposons enfin que A soit connexe (i.e un seul "obstacle" dans EC et pas nécessairement dans l'environnement), on a $H_0(A) = \mathbb{Z}$. Sous ces hypothèses la suite précédente s'écrit :

$$\{0\} \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus H_0(B) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

Par la suite l'homomorphisme $H_0(A \cap B) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus H_0(B)$ est injectif et $\mathbb{Z} \oplus H_0(B) \longrightarrow \mathbb{Z}$ surjectif. On en déduit que $H_0(A \cap B)$ et $H_0(B)$ sont isomorphes. Il y a donc une bijection entre les composantes connexes de CONTACT et celles de ADMISSIBLE d'où :

Proposition 3.6.1. [10]

Si EC est contractile en un point et $\text{COLLISION} \cup \text{CONTACT}$ est connexe, il existe un chemin dans CONTACT entre deux configuration de CONTACT si et seulement si il existe un chemin dans ADMISSIBLE entre ces deux configurations

Dans le cas d'un environnement en disposition générale, puisque $\text{ADMISSIBLE} = \text{fer}(\text{LIBRE})$, on en déduit :

Corollaire 3.6.1. [10]

Si E est en disposition générale, EC contractile en un point et $\text{COLLISION} \cup \text{CONTACT}$ est connexe, alors il existe un chemin dans CONTACT entre deux configuration de CONTACT si et seulement si il existe un chemin dans LIBRE entre ces deux configurations (i.e un chemin sans contact, sauf aux extrémités).

Dans notre exemple, EC (Un tore) n'est pas contractile en un point . Il est clair qu'il n'existe pas de chemin au contact entre les deux configurations de la figure 3d, alors qu'il existe clairement un chemin dans ADMISSIBLE . Notons que l'"anneau" représentant le transformé de l'obstacle dans EC a deux "bords" alors que ADMISSIBLE n'a qu'une composante connexe. Par contre il existe bien un chemin au contact entre deux configurations

de la figure 3c. La propriété précédente peut, contrairement aux apparences, s'appliquer : il suffit pour s'en convaincre de restreindre EC à un domaine englobant le "nappe" associé aux deux disques et qui soit contractile en un point (on constatera que c'est possible dans ce cas et pas dans l'autre)

En fait Hopcroft et Wilfong établissent un résultat plus générale que celui de la proposition précédente. Ils montrent que la proposition tient en changeant l'hypothèse de contractibilité de EC par l'hypothèse que les placements ne sont pas réduit aux seules rotations. Ce qui rend compte du cas de la figure 4 ; une barre dont l'extrémité est contrainte à rester sur l'axe peut tourner autour de cette extrémité. L'espace des configurations est ainsi $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$, qui est un cylindre, donc non contractile en un point. (Il est clair que si l'extrémité de la barre ne bouge pas sur l'axe ($EC = \mathcal{S}^1$ - non contractile -) il n'existe pas de chemin au contact entre les deux configurations indiquées ; on est dans un cas semblable à celui de la figure 3d). Le disque de l'environnement se transforme en une sorte d'"anneau" dans EC . On peut constater que les composantes connexes de $ADMISSIBLE$ sont en bijection avec celles de $CONTACT$. Il existe un chemin dans $ADMISSIBLE$ entre les deux configurations et il existe bien également un chemin qui maintient tout au long un contact entre la barre et le disque . Une démonstration analogue à celle que nous avons présenté pourrait être utilisée dans cet exemple en considérant que $H_1(A \cup B) = \mathbb{Z}$. Il serait intéressant de voir si elle se généralise à des espaces du type $\mathbb{R}^m \times (\mathcal{S}^1)^n$ avec $m > 0$, ce qui donnerait une démonstration alternative à celle, assez proche, de Hopcroft et Wilfong.

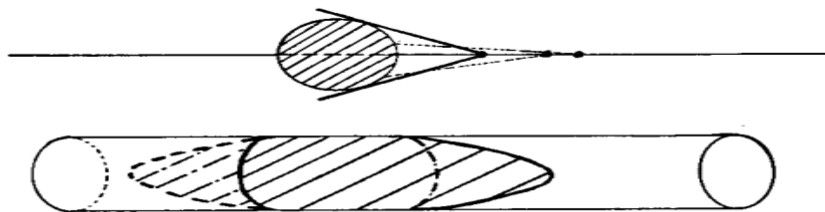


Figure 4

Conclusion Générale

Parvenu au terme de ce travail, nous notons que les outils de la topologie algébrique ont une très grande portée ou une importance énorme dans les espaces de configurations, nous dirons même qu'ils sont étroitement liés. Notre objectif dans ce travail était dans un premier temps de présenter les espaces de configurations avec leurs propriétés primaires, donner des exemples et faire quelques calculs qui permettent de mieux comprendre ces derniers. Dans une seconde partie, nous étudions l'homologie des espaces de configurations, plus précisément nous montrons qu'il existe un algorithme permettant de décider du calcul d'homologie des espaces de configurations sur un espace topologique, si cet espace est une variété. En fin, Dans le troisième chapitre, nous présentons une application directe à la robotique. Ici, nous situons le contexte d'application des outils des espaces de configurations à la robotique via quelques exemples. Nous présentons le problème de planification de mouvement d'un robot et faisons une revue de littérature sur la naissance de la robotique, de la planification et en fin nous mettons en évidence le lien avec les espaces de configurations. Au regard de ces grands résultats que nous avons obtenus, grande est notre motivation à approfondir davantage les recherches dans ce domaine. Ainsi, notre prochaine curiosité sera d'explorer une autre branche des espaces de configurations notamment l'homotopie rationnelle des espaces de configurations, en étudiant les indices de coïncidence. En effet, la question est de savoir : est-ce que étant donné deux variétés M et N , deux applications f et g entre ces deux variétés, il existe deux applications f' et g' entre M et N , tel que $f' \simeq f$ et $g' \simeq g$ à tel enseigne que f' et g' n'ont pas de coïncidence c'est-à-dire pour tout $x \in M : f'(x) \neq g'(x)$. Notons qu'un travail a déjà été fait dans ce sens par Dacilberg, mais il est question pour nous de le regarder avec les espaces de configurations. Nous procéderons comme suit :

- Regarder des exemples d'algèbre différentielle graduée commutative A , à dualité de Poincaré, d'algèbre différentielle graduée commutative B , et de morphisme $\phi, \psi : A \longrightarrow B$ tel que pour
 - $\phi \otimes \psi \longleftarrow B \otimes B$,
 - $A \otimes A \longrightarrow (A \otimes A)/(\Delta)$,

– $multi : B \longleftarrow B \otimes B$ et $(A \otimes A) \xrightarrow{\simeq} A \otimes A \otimes \wedge V$

il n'existe pas une application μ définie de $A \otimes A \otimes \wedge V \dashrightarrow B$

- Puis trouver les obstructions en homotopie rationnelle à la non coïncidence.

Bibliographie

- [1] **FR. Cohen and R. Taylor**, *The cohomology of configuration spaces*, 1978
- [2] **FR. Cohen**, *Introduction to configuration spaces and their applications*, Berlin January 2013
- [3] **V. Cristina**, *Cours école CIMPA*, ENSP Cameroun avril 2018
- [4] **Y. Félix and Daniel Tanré**, *The cohomology algebra of unordered configuration spaces*, 2005
- [5] **Y. Félix and Jean-Claude Thomas**, *Configuration spaces and Massey products*, 2004
- [6] **A. Hatcher**, *Algebraic Topology version july 2017*, New York 2001
- [7] **R. Longoni and Paolo Salvatore**, *Configuration spaces are not homotopy invariant*, 2005
- [8] **P. Lambrechts**, *Cours école CIMPA*, ENSP Cameroun avril 2018
- [9] **P. Lambrechts and V. Ismar**, *Formality of the little N -disks operad*, 2014
- [10] **J. Louis Boimond**, *Robotique*, Université Angers
- [11] **B. Koguep**, *cours de anneaux et modules master 1*, Université de Dschang 2017
- [12] **R. Munkres**, *Elements of algebraic topology*, 1984
- [13] **F. Patras**, *Cours école CIMPA*, ENSP Cameroun avril 2018
- [14] **L. Pérez**, *spacial planning : a configuration space approach*, 1983
- [15] **A. Sahbani**, *planification de taches de manipulation en robotique par des approches probabilistes* thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de toulouse 2003
- [16] **C. Tcheka**, *Cours Master 2 en Méthodes homologiques*, Université de Dschang 2018
- [17] **C. Tcheka**, *Cours Master 2 en Méthodes homotopiques*, Université de Dschang 2018
- [18] **C. Tcheka**, *Cours Master 1 en Géométrie différentielle*, Université de Dschang 2017
- [19] **C. Weibel**, *Introduction to homological algebra*, 1994
- [20] **J. Woukeng**, *Cours Licence 3 en Topologie générale*, Université de Dschang 2016

Abelian extension and crossed modules for Lie Algebras

Ariel Ghislain KEMOGNE KAMDOUM (ariel.g.k.kamdoum@aims-senegal.org)
African Institute for Mathematical Sciences (AIMS), Senegal

Supervised by: Andre Saint Eudes MIALEBAMA BOUESSO
Marien Ngouabi University, Brazzaville, Congo

May 28, 2019

Submitted in partial fulfilment of the requirements for the award of Master of Science in Mathematical Sciences at AIMS Senegal



AIMS

African Institute for
Mathematical Sciences
SENEGAL

DECLARATION

This work was carried out at AIMS Senegal in partial fulfilment of the requirements for a Master of Science Degree.

I hereby declare that except where due acknowledgement is made, this work has never been presented wholly or in part for the award of a degree at AIMS Senegal or any other University.

Student: Ariel Ghislain KEMOGNE KAMDOUM (scan) student's signature

Supervisor: Andre Saint Eudes MIALEBAMA BOUESSO



Tutor: Michel SECK (scan) tutor's signature

ACKNOWLEDGEMENTS

Although this work has only one author, many people have contributed more or less indirectly, and I will not have reached where I am without them.

I would first like to thank my supervisor Andre Saint Eudes MIALEBAMA BOUESSO. He always knew how to give me research leads, let me search independently while helping me when I had difficulties, advise me and guide me in my mathematical activities, devote his time to my questions.

Also, I thank all the AIMS Senegal Institute for its quality training through outstanding teachers from all over the world, its academic director Franck Kalala Mutombo, all tutors especially the tutor Michel Seck who accompanied me all throughout this work.

I must also thank all my classmates for their support, their patience and especially for their collaborations because it is thanks to that that I am at this level today.

Last but not least, my parents, my sister NJUIDJE KAMDOUM Sorelle, and my brothers, TEGUIA KAMDOUM Thierry, TCHEGHO KAMDOUM Arthur, HOMSI KAMDOUM Aubert, support me and support me (in every sense of the term!) Since always, I have a lot, and I thank them for everything.

DEDICATION

I dedicate this work to my family, the KAMDOUM family

Abstract

Let G be a Lie algebra and V a G -module. The Lie algebra cohomology spaces $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$ can be easily computed by direct computation. The goal of this project is to compute $H^2(G, V)$ and $H^3(G, V)$. For the second cohomology space $H^2(G, V)$, we construct the group of equivalence classes of abelian extensions with kernel V and cokernel G , and then we prove that this group is in bijection with $H^2(G, V)$. For the third cohomology space $H^3(G, V)$, we construct the group of equivalence classes of crossed-modules with kernel V and cokernel G , and then we prove that this is in bijection with $H^3(G, V)$.

Contents

Declaration	i
Acknowledgements	ii
Dedication	iii
Abstract	iv
1 Introduction	1
2 Preliminaries	3
2.1 Groups	3
2.1.1 Definitions and properties	3
2.1.2 Action on a group	5
2.1.3 Quotient groups	6
2.2 Rings and Modules	7
2.2.1 Rings	7
2.2.2 Modules	9
2.3 Categories and functors	11
2.3.1 Categories	11
2.3.2 Functors	13
2.4 Complexes, homology, cohomology	14
2.4.1 Exact sequences of modules	14
2.4.2 Complex	15
2.4.3 Long exact sequence of homology	17
3 Lie algebras cohomology	20
3.1 Theory of Lie algebras	20
3.2 Cohomology of Lie algebras	24
3.2.1 Cohomology groups: $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$	26

3.2.2	Second group of cohomology: $H^2(G, V)$	27
3.3	Abelian extension for Lie algebra	28
3.3.1	Definitions and properties	28
3.3.2	Evaluation of $H^2(G, V)$	30
4	Crossed module for Lie algebras	34
4.1	Definitions and properties	34
4.1.1	Definitions	34
4.1.2	Evaluation of $H^3(G, V)$	41
4.2	Computation of third degree cohomology space	43
4.2.1	γ is a 3-cocycle	43
4.2.2	The class of the cocycle γ in $C^3(G, V)$ does not depend on the choice of the section	44
5	Conclusion	46
	References	49

1. Introduction

In this work, our goal is to determine isomorphism near the second group and the third group of cohomology extracted on a complex constructed from a Lie algebra. In this projection, we establish these isomorphisms thanks to the equivalence classes of the abelian extensions for the second group of cohomology and the crossed modules for the third group of cohomology. Indeed, an abelian extension of a Lie algebra is a short exact sequence of Lie algebra:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0 \quad (1.0.1)$$

where A the Lie algebra is abelian and $\ker \pi = A$ and $\operatorname{coker} i = H$.

Thus, the goal is to construct from a given abelian extension as 1.0.1, a cohomology class of $H^2(H, A)$ to identify or correspond to any element of $H^2(H, A)$ an abelian extension and vice versa. The same method is established by Gerstenhaber in his article *Gerstenhaber* (1966), where he calculates isomorphism near the third group of cohomology from the equivalence class of the crossed modules. Indeed, A crossed module of Lie algebras is the data of a homomorphism of Lie algebras $\mu : M \longrightarrow N$ together with an action η of N on M by derivations, denoted $\eta : N \longrightarrow \operatorname{der}(M)$ or $m \longmapsto n.m$ for all $m \in M$ and all $n \in N$, such that:

- i- $\mu(n.m) = [n, \mu(m)]$ for all $n \in N$ and all $m \in M$,
- ii- $\mu(m).m' = [m, m']$ for all $m, m' \in m$.

In view of the diversity of these notions in algebra and even in other areas of mathematics, this work is the result of a motivation based essentially on the extent of applications of abelian extensions, crossed modules and calculation. (co)homological. Indeed, in homological algebra, the computation of the (co)homology of a sequence or a complex of given chain, makes it possible to evaluate the exactitude of the latter, which is very important notably in homological theory because abounds multiple properties. For most of the time the computation of the groups of (co)homology is not direct, it is generally done by isomorphic approach, because if one establishes a bijection between a well known space and whose properties are mastered with a group of homology one will be able to carry the properties of this space on the group of homology.

This is why this work proves to be very interesting because from the equivalence classes of an abelian extension, we identify the second group of cohomology and from the equivalence classes of the crossed modules. we identify the third group of cohomology, all this on Lie algebras, which are algebras with very interesting and applicable properties.

In order to achieve our goals, we have to split work into three main chapters presenting as follows:

- In the first chapter, we give or recall some basic notions that will allow us to better understand the substance of the work, namely the categories and functors, of the homological algebra with complex chains, exact sequences and groups of (co)homology.

Mainly based on the following authors: (*Rotman*, 2008), (*HiltonandStammbach*, 2012), (*Facchiniet al.*, 2004), (*Rotman*, 2008), (*BaezandCrans*, 2004), (*Weibel*, 1994b).

- In the second chapter, we establish the bijection between the equivalence class of an abelian extension with the second cohomology group on the Lie algebra, detailed as follows: a reminder on the groups, extension of groups and in this chapter also, we make a little bit a reminder on the theory of Lie algebras, in the end a section on the abelian extension for Lie algebras useful to evaluate the second group of cohomology. Here we rely mainly on the following authors: (*Hochschild*, 1954), (*Radul*, 1989), (*FialowskiandWagemann*, 2008), (*FeiginandFuchs*, 2000), (*FarnsteinerandStrade*, 1981), (*Bourbaki*, 2008), (*Neeb*, 2006).
- In the third chapter, we establish a bijection between the equivalence class of the crossed module and the third group of cohomology. This part is essentially drawn from Friedrien Wagemann in *Wagemann* (2006) detail as follows: a reminder of the modules and some properties and the calculation of the third group of cohomology. Here the results come mainly from the following researchers: (*Wagemann*, 2006), (*Gerstenhaber*, 1964), (*Gerstenhaber*, 1966), (*AgrebaouiandFraj*, 2003).

2. Preliminaries

This chapter is inspired and drawn mainly from the following authors:

(*Rotman*, 2008), (*HiltonandStammbach*, 2012), (*Facchiniet al.*, 2004), (*Rotman*, 2008), (*BaezandCrans*, 2004), (*Weibel*, 1994b)

2.1 Groups

2.1.1 Definitions and properties

Definition 2.1.1. (Law of internal composition on a set)

Let E be a set, we call the law of internal composition on E any application:

$$* : E \times E \longrightarrow E$$

One recalls that $E \times E = \{(x, y), x \in E, y \in E\}$.

Definition 2.1.2. (Group)

A group $(G, *)$ is the data of a non-empty set G and $*$ a law of internal composition of G such that:

- $*$ is associative
- $*$ has a neutral element

$$e : \exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$$

- Every element of G has a symmetrical element:

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$$

Remark.

We say that the group $(G, *)$ is commutative, or abelian, if $*$ is commutative. The set G is called the underlying set of the group.

Proposition 2.1.1. (Property of a group)

Let $(G, *)$ be a group, e its neutral element.

- e is unique and is its own symmetrical.
- Every element has a unique symmetrical.

- If x' is the symmetric of x , then x is the symmetric of x' .

Proof.

Suppose such an element e' exists. Uniqueness

- $e = e * e' = e'$

Symmetrical:

$$e * e = e$$

- Let $x \in G$, let y, z be two symmetric of x .

$$(y * x) * z = y * (x * z)$$

$$e * z = y * e$$

$$z = y$$

□

Definition 2.1.3. (Finite group)

Let $(G, *)$ be a group, we say that the group is finite if G is. We Call $CardG$ the order of the group, we write $|G|$.

We observe that $|G| \geq 1$ for any group $(G, *)$

Definition 2.1.4. (Image by homomorphism)

A group G' is said homomorphic image of the group G if there exists a surjective group morphism $f : G \longrightarrow G'$

Definition 2.1.5. (Subgroup)

A set $H \subseteq G$ is a subgroup of G if it satisfies the following conditions:

- H is not empty;
- H is a stable subset of $(G, *)$;
- $x^{-1} \in H$ for all $x \in H$.

Example 2.1.1.

We have $H = \{e\}$ and G are the subgroup de G .

Definition 2.1.6. (Morphism (or homomorphism) of groups)

A morphism (or homomorphism) of groups from G to G' is an application $\rho : G \longrightarrow G'$ such that

$$\rho(x.y) = \rho(x) \circ \rho(y), \text{ for all } x, y \in G. \quad (2.1.1)$$

It is said of a morphism of G towards itself that it is an endomorphism of G . We note $Hom(G, G')$ the set of morphisms from G to G' , and $End(G)$ the set of endomorphisms of G .

Proposition 2.1.2.

If $\rho : G \longrightarrow G'$ and $\psi : G' \longrightarrow G''$ are group morphisms, then:

- $\rho(e) = e'$;
- $\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1}$ for all $x \in G$;

Proof.

- We observe that $\rho(e)e' = \rho(e) = \rho(ee) = \rho(e)\rho(e)$, and therefore $\rho(e)\rho(e) = \rho(e)e'$. Multiplying on the left by the inverse of $\rho(e)$, we find $\rho(e) = e'$.
- Consider $x \in G$. We have: $\rho(x)\rho(x)^{-1} = e' = \rho(e) = \rho(xx^{-1}) = \rho(x)\rho(x)^{-1}$, which implies $\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1}$.

□

2.1.2 Action on a group

Definition 2.1.7. (Action on a group)

Let G be a group and E a set. An action (on the left) of G on E is the data of a law of external composition (on the left)

$$\begin{aligned} G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

verifying the following conditions:

- $e.x = x$, where e is the neutral element of G and $x \in E$;
- $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$ for all $g_1, g_2 \in G$ and $x \in E$.

In this case we also say that G operates (on the left) on E , or that G acts on E . The set E is called a G -set.

Example 2.1.2.

- **Translation left**

The multiplication on the left of G provides G with the structure of a G -set called translation on the left. Indeed, the law of external composition

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

check for all $x \in E$ and $g_1, g_2 \in G$ that $ex = x$ and $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ (the law of G is associative).

- **Action by conjugation**

The action by conjugation of G is defined as follows:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto g.x = gxg^{-1} \end{aligned}$$

The action by conjugation is an action because for all $x \in E$ and $g_1, g_2 \in G$ we have $e.x = exe = x$ and $(g_1g_2).x = (g_1g_2)x(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1(g_2xg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1.(g_2.x)$.

2.1.3 Quotient groups

Definition 2.1.8. (Constructing the quotient of a group)

Here, $(G, .)$ denotes a group and $(H, .)$ denotes a subgroup of G . We also consider the relation, if x and y are elements of G :

$$x\mathcal{R}y \iff x^{-1}.y \in H$$

Remark.

The relation defined by $x\mathcal{R}y \iff x^{-1}.y \in H$ is a relation of equivalence.

Definition 2.1.9. (Equivalence classes)

We denote G/H the set G/\mathcal{R} of equivalence classes of the relation \mathcal{R} on G .

Proposition 2.1.3.

Let $x \in G$. The equivalence class of x for the relation

$$x\mathcal{R}y \iff y.x^{-1} \in H$$

is the set $xH = \{xh; y \in H\}$.

Proof.

Let $y \in G$ be equivalent to x for the relation. Then there is $h \in H$ such that $x^{-1}y = h$. And so there is an element of Hx . Conversely, if there is an element xh , it is clear that $y\mathcal{R}x$. \square

Definition 2.1.10. (Class on the left)

The set xH is called class on the left of the element x of G .

Remark.

We could also have defined our relationship of equivalence by:

$$x\mathcal{R}y \iff y.x^{-1} \in H$$

In this case, the equivalence class of an element x of G would have been given by the set Hx .

Definition 2.1.11. (Class on the right)

The set Hx is called class on the right of the element x of G .

Proposition 2.1.4.

If H is a finite subgroup of G and if x and y are two elements of G then the equivalence classes (left or right) of x and y for the relation have same number of elements and this number is equal to the cardinal of H .

Proof.

Let x be an element of G . Set

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow xH \\ h &\longmapsto f(h) = xh \end{aligned}$$

f is injective because if h and h' are elements of H such that $f(h) = f(h')$ then we have the equality $x.h = x.h'$ and x being elementary of group G , this implies, by multiplying on the left each of the members of the previous equality by x^{-1} that $h = h'$. f is also surjective because if there is an element of xH , then there exists $h \in H$ such that $y = x.h$ and so $y = f(h)$. f both injective and surjective, it is bijective. This proves that H and xH have even number of elements. But if there is an element of G , yH and H will also have the same number of elements. So xH and yH have even cardinal. \square

Definition 2.1.12. (Structure of the quotient set of a group)

Note that, if x is an element of G , we will write \bar{x} the equivalence class of x in G/H . \bar{x} will then be a representative of the equivalence class \bar{x} .

We will define an internal law \perp on G/H by: If x and y are elements of G then:

$$\bar{x} \perp \bar{y} = \overline{x.y}$$

When no confusion is to be feared, we will note the internal law of G/H of the same way as that of G . This law is the one induced by G on G/H .

2.2 Rings and Modules

2.2.1 Rings

Definition 2.2.1. (Ring)

A ring $(A, +, \cdot)$ is the data of a set A and of two internal laws $+$, \cdot verifying:

- 1- $(A, +)$ is an abelian group.
- 2- The multiplication \cdot is associative and has a neutral element (noted 1).
- 3- \cdot is distributive with respect to $+$: for all $x, y, z \in A$, we have

$$x(y + z) = xy + xz \text{ and } (y + z)x = yx + zx$$

Example 2.2.1.

- 1- The null ring $\{0\}$.
- 2- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ are commutative rings. such that,
we denote $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ the quotient of \mathbb{Z} by the following equivalence relation \mathcal{R} , defined on \mathbb{Z} by:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in n\mathbb{Z}$$

Noting \bar{x} the equivalence class of x ,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{x}, x \in \mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is provided with the commutative group law:

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \overline{x + y} \end{aligned}$$

Definition 2.2.2. (Invertible elements of a ring)

We call together invertible elements of a ring to the set of $x \in A$ such that there exists $y \in A$ with $xy = yx = 1$. It is a group for multiplication, generally noted as A^* .

Example 2.2.2.

- 1- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ is the set of classes \bar{m} , with m first to n .
- 2- In a field K , we have by definition $K^* = K \setminus \{0\}$.

Definition 2.2.3. (Homomorphism (or morphism) of rings)

A homomorphism (or morphism) of rings $f : A \longrightarrow B$ is an application between two verifying rings:

- 1- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- 2- $f(xy) = f(x)f(y)$
- 3- $f(1) = 1$.

Remark.

Note that the null application is not a ring morphism because it does not verify (3).

Definition 2.2.4. (Sub-ring)

A part of B is a sub-ring if $(B, +, \cdot)$ is a ring having the same unit as A . It is equivalent to saying that $1 \in B$, and that $(B, +)$ is a subgroup of $(A, +)$ which is stable by internal multiplication.

Let denote A a commutative ring.

2.2.2 Modules

Definition 2.2.5. (A -Module)

An A -module $(M, +, \cdot)$ is a set equipped with an internal law $+$ and an external law $A \times M \longrightarrow M$, $(\alpha, m) \longmapsto \alpha m$ verifying:

- 1- $(M, +)$ is an Abelian group.
- 2- In addition, we have the following four properties:

- $\alpha(m + m') = \alpha m + \alpha m'$
- $(\alpha + \beta)m = \alpha m + \beta m$
- $(\alpha\beta)m = \alpha(\beta m)$
- $1.m = m$

for all $\alpha, \beta \in A$ and all $m, m' \in M$.

Remark.

Since A is assumed to be commutative, there is no need to distinguish between modules on the left and on the right (for non commutative A , the third axiom would be different for a module on the right).

Definition 2.2.6. (Sub-module)

Let M be an A -module. An N sub-module of M is a subgroup of $(M, +)$ which is additionally stable for external multiplication by everything from A .

In other words, a part N of M is a sub-module if and only if contains 0, and if for all x, y of N and every α of A we have: $x + y \in N$ and $\alpha x \in N$.

Example 2.2.3.

- A is an A -module, the external operation being the multiplication in A .

- Any abelian group M can be considered as a Z -module for the external law: $\alpha m = m + m + \dots + m$ (α terms) if $\alpha > 0$, $\alpha m = (-\alpha)(-m)$ if $\alpha < 0$ and $0.m = 0$.

Definition 2.2.7. (Homomorphism (or morphism) of A -modules)

A homomorphism (or morphism) of A -modules is a application $f : M \longrightarrow M'$ between two A -modules which verifies:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ and } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

for all x, y of M and any α of A . We note $\ker f := f^{-1}(\{0\})$ the kernel of f and $\text{Im} f := f(M)$ its image. Those are submodules of M, M' respectively.

Remark. There is a notion of modulus on the right:

- For every ring A , there exists a ring A^o or A^{opp} called ring opposite of A such that $A^o = A$, $+^o = +$ and $a \times^o b = ba$
- A morphism of rings AB^o is an additive application $f : A \longrightarrow B$, which sends 1 on 1 and satisfies $f(ab) = f(b)f(a)$.

We call $f : A \longrightarrow B$ an antimorphism. So we have a correspondence between the modules on the left and right.

Example 2.2.4.

The additive group $(A, +)$ of a ring A is provided with a module structure on A .

Definition 2.2.8. (Morphism of commutative groups)

- An A -module morphism between two A modules M, N is a morphism of commutative groups $f : M \longrightarrow N$ such that for all $x \in M$ and $a \in A$, $f(ax) = af(x)$.
- The $\text{Ker}(f)$ kernel (resp., $\text{Im}(f)$ image) is the kernel (resp., Image) of the group morphism f .
- An n -multilinear (alternating) application is a $f : M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow N$ such that for all i and $(x_j)_{j \neq i}$, $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)$ is A -linear (and its cancels as soon as two variables are equal).

Example 2.2.5.

If A is a commutative ring, the set $\text{hom}_A(M, N)$ of the morphisms of A -modules of M in N is provided with a natural structure of A -module.

Definition 2.2.9. (Sub- A -module of module)

A sub- A -module of a module M is a subgroup $N \subset M$ such that for all $a \in A$ and $x \in N$, $ax \in N$.

Example 2.2.6.

The sub- A -modules of A are his ideals.

2.3 Categories and functors

2.3.1 Categories

Definition 2.3.1. (Categories)

A category C is the data:

- (i) a class $ob(C)$ of objects of C ;
- (ii) for any pair (X, Y) of C objects of a set noted $Hom_C(X, Y)$ whose elements are called morphisms of X in Y of C (with the notation $f : X \longrightarrow Y$ for $f \in Hom_C(X, Y)$);
- (iii) for any triplet (X, Y, Z) of C objects, an application:

$$\begin{aligned} Hom_C(X, Y) \times Hom_C(Y, Z) &\rightarrow Hom_C(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

called composition of morphisms, which is associative, and such that for any object X of C , there exists an element $1_X \in Hom_C(X, X)$, called identity of X (sometimes also noted id_X), such that $\forall f \in Hom_C(X, Y)$, we have $f \circ 1_X = f$ and $\forall f \in Hom_C(Y, X)$, we have $1_X \circ f = f$.

Example 2.3.1.

- Ens: the category of sets. Morphisms are the applications, the composition is the composition of applications.
- Top: the category of topological spaces. Morphisms are the continuous applications
- Ab: the category of abelian groups. Morphisms are the morphisms of groups
- Mod: the category of A -modules, with A a ring. Morphisms are the morphisms of A -modules

Definition 2.3.2. (Small category)

A category C is called small if $ob(C)$ is a set.

Definition 2.3.3. (Opposite category)

Let C be a category. The opposite category of C is the category, denoted C^{op} , whose objects are the same as those of C and such that if X, Y are objects of C^{op} , we have:

$$Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X).$$

Definition 2.3.4. (Subcategory)

Let C be a category. A subcategory C' of C is the data of a subclass $ob(C')$ of $ob(C)$ of objects of C' , and for all objects X, Y of C' of a subset $Hom_{C'}(X, Y)$ of $Hom_C(X, Y)$, such as

- (i) if X is an object of C' , we have $1_X \in \text{Hom}_{C'}(X, X)$;
- (ii) if X, Y, Z are objects of C' and if $f \in \text{Hom}_{C'}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{C'}(Y, Z)$, we have $g \circ f \in \text{Hom}_{C'}(X, Z)$

A subcategory C' of C is called full if for all objects X, Y of C' , we have $\text{Hom}_{C'}(X, Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$

Example 2.3.2.

Ab , the category of abelian groups, is a full subcategory of Grp

Definition 2.3.5. (Initial - final object)

Let C be a category and X an object of C . We say that X is an initial object (resp. final object) of C if for any object A of C the set $\text{Hom}_C(X, A)$ (respectively $\text{Hom}_C(A, X)$) is reduced to an element.

Example 2.3.3.

- An initial (or final) object of C is a final object (resp. initial) of C^{op}
- \mathbb{Z} is an initial object in Ann , the category of rings, while the null ring is a final object

Definition 2.3.6. (Monomorphism-Epimorphism-Isomorphism)

Let C be a category and $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$. We say that f is a:

- (i) monomorphism if $\forall g, h \in \text{Hom}_C(Z, X)$, we have:

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

- (ii) epimorphism if $\forall g, h \in \text{Hom}_C(Y, Z)$, we have

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

- (iii) isomorphism if there exists $g \in \text{Hom}_C(Y, X)$ such that $f \circ g = 1_Y$ and $g \circ f = 1_X$.

Example 2.3.4.

An initial (or final) object of a category is, if it exists, unique to isomorphism.

(Indeed: Let X and Y be initial objects of a category C , and let f, g be the unique morphisms respective of $\text{Hom}_C(X, Y)$ and $\text{Hom}_C(Y, X)$. Then we have $f \circ g = 1_Y$ and $g \circ f = 1_X$ because $\text{Hom}_C(Y, Y)$ and $\text{Hom}_C(X, X)$ are reduced to one element. The proof for the end objects is the same.)

2.3.2 Functors

Definition 2.3.7. (Functor)

A functor (covariant) F of a category C to a category C' , $F : C \longrightarrow C'$, is the data

- (i) For any object X of C of an object $F(X)$ of C' .
- (ii) For any pair of objects (X, Y) of C and any $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, of an $F(f) \in \text{Hom}_{C'}(F(X), F(Y))$ such that:
 - for every object X of C , we have $F(1_X) = 1_{F(X)}$;
 - $\forall f \in \text{Hom}_C(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_C(Y, Z)$, we have $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Example 2.3.5.

The identity functor $1_C : C \longrightarrow C$, $X \longmapsto X$, $f \longmapsto f$

If $F : C \longrightarrow C'$ and $G : C' \longrightarrow C''$ are functors, we define the compound functor $G \circ F : C \longrightarrow C''$ by $G \circ F(X) = G(F(X))$ for any object X of C , and $G \circ F(f) = G(F(f))$ for any morphism f of C .

Definition 2.3.8. (Contravariant functor)

A contravariant functor F from a category C to a category C' is a covariant functor $F : C \longrightarrow C'^{op}$.

Example 2.3.6.

Let X be an object of a category C . Then $\text{Hom}_C(-, X)$ is a contravariant functor of C in Ens , with $f : Y \longrightarrow Z$,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(-, X)(f) &= - \circ f : \text{Hom}_C(X, Z) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Y) \\ u &\mapsto u \circ f \end{aligned}$$

If $C = \text{Mod}(A)$, the functor $\text{Hom}_A(-, X)$ is a contravariant functor $\text{Mod}(A) \longrightarrow \text{Ab}$

Theorem 2.3.1.

Let $F : C \longrightarrow C'$ be a functor, and X, Y be objects of C . If X and Y are isomorphic, so $F(X)$ and $F(Y)$ are isomorphic.

Proof.

Let $f : X \longrightarrow Y$ and $g : Y \longrightarrow X$ be such that $f \circ g = 1_Y$ and $g \circ f = 1_X$. Then $1_{F(Y)} = F(1_Y) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ and $1_{F(X)} = F(1_X) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, hence $F(X)$ and $F(Y)$ are isomorphic. \square

Definition 2.3.9. (Morphisms of functors)

Let $F, G : C \longrightarrow C'$ be two functors. A morphism of functors (or natural transformation) of F in G , $\phi : F \longrightarrow G$, is the data for each object X of C of a morphism $\phi_X \in \text{Hom}_{C'}(F(X), G(X))$ such that $\forall f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, we have $G(f) \circ \phi_X = \phi_Y \circ F(f)$, that is, the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\phi_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\phi_Y} & G(Y) \end{array}$$

i.e $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$

A morphism of functors ϕ is an isomorphism if ϕ_X is an isomorphism for any object X of C .

2.4 Complexes, homology, cohomology

2.4.1 Exact sequences of modules

Definition 2.4.1. (Exact sequences)

Let $f : M \longrightarrow N$ and $g : N \longrightarrow P$ be morphisms of A -modules. The following sequence

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

is said to be exact in N if $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. A sequence of morphisms of A -modules

$$M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n+1}$$

is said to be exact if it is exact in M_1, \dots, M_n .

Example 2.4.1.

- The sequence $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ is exact (in M) if and only if f is injective.
- The sequence $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ is exact (in N) if and only if f is surjective
- The sequence $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ is exact if and only if f is injective, g is surjective and $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$

Theorem 2.4.1. (Five Lemma)

Consider the commutative diagram with exact lines of morphisms of A -modules following:

$$(2.4.1) \quad \begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5. \end{array}$$

- (i) Suppose ϕ_1 surjective, ϕ_2 injective, ϕ_4 injective. Then ϕ_3 is injective.
- (ii) Assume ϕ_2 surjective, ϕ_4 surjective and ϕ_5 injective. So ϕ_3 is surjective
- (iii) If ϕ_2 and ϕ_4 are isomorphisms, ϕ_1 is surjective and ϕ_5 is injective, then ϕ_3 is a isomorphism.

Proof.

- Let $x_3 \in M_3$ be such that $\phi_3(x_3) = 0$. Then $g_3(\phi_3(x_3)) = 0 = \phi_4(f_3(x_3))$. ϕ_4 is injective so $f_3(x_3) = 0$, and by accuracy in M_3 there exists $x_2 \in M_2$ such that $x_3 = f_2(x_2)$. We have $0 = \phi_3(x_3) = \phi_3(f_2(x_2)) = g_2(\phi_2(x_2))$, so by exactness in N_2 there exists $y_1 \in N_1$ such that $\phi_2(x_2) = g_1(y_1)$. It exists, by surjectivity of ϕ_1 , $x_1 \in M_1$ such that $y_1 = \phi_1(x_1)$, and then $g_1(y_1) = g_1(\phi_1(x_1)) = \phi_2(f_1(x_1)) = \phi_2(x_2)$. By injectivity of ϕ_2 we have $f_1(x_1) = x_2$, so $x_3 = f_2(x_2) = f_2(f_1(x_1)) = 0$. So ϕ_3 is injective.
- Let $y_3 \in N_3$. By surjectivity of ϕ_4 , there exists $x_4 \in M_4$ such that $\phi_4(x_4) = g_3(y_3)$ and we have $g_4(\phi_4(x_4)) = 0 = \phi_5(f_4(x_4))$. By injectivity of ϕ_5 , we have $f_4(x_4) = 0$, and by exactitude in M_4 there exists $x_3 \in M_3$ such that $f_3(x_3) = x_4$. Then $g_3(y_3) = \phi_4(x_4) = \phi_4(f_3(x_3)) = g_3(\phi_3(x_3))$. So for accuracy in N_3 , there is $y_2 \in N_2$ such that $y_3 - \phi_3(x_3) = g_2(y_2)$. Since ϕ_2 is surjective, there exists $x_2 \in M_2$ such that $y_2 = \phi_2(x_2)$, hence $y_3 - \phi_3(x_3) = g_2(\phi_2(x_2)) = \phi_3(f_2(x_2))$, and $y_3 = \phi_3(x_3 + f_2(x_2))$. ϕ_3 is therefore surjective. The third assertion is the combination of the first two.

□

2.4.2 Complex

Definition 2.4.2. (\mathbb{Z} -graduated A -module)

A \mathbb{Z} -graduated A -module is a sequence $M_* = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ of A -modules. If $M_* = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ and $N_* = (N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ are \mathbb{Z} -graduated A -modules, a morphism of \mathbb{Z} -graduated A -modules $M_* \rightarrow N_*$ is a sequence of A -linear applications $f_n : M_n \rightarrow N_n$, $n \in \mathbb{Z}$. The category obtained, denoted $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(A)$, is called the category of \mathbb{Z} -graduated A -modules.

Remark.

The data of a Z -graduated A -module is equivalent to the data of an A -module M equipped with a direct sum decomposition $M = \bigoplus_{n \in Z} M_n$, where the M_n are sub- A -modules of M .

Definition 2.4.3. (Linear mapping of degree k)

Let $k \in Z$. Let $M_* = (M_n)_{n \in Z}$ and $N_* = (N_n)_{n \in Z}$ be Z -graduated A -modules. A linear mapping of degree k of $M_* \in N_*$ is a sequence of A -linear applications $f_n : M_n \rightarrow N_{n+k}$, $n \in Z$.

Definition 2.4.4. (Chain complex)

A chain complex (or simply complex) of A -modules is a couple $C = (C_*, d_*)$ where C_* is a Z -graduated A -module and $d_* : C_* \rightarrow C_*$ is a linear application of degree -1 , called differential such that for all $n \in Z$, we have $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (that is to say $Im(d_{n+1}) \subset Ker(d_n)$).

$$C : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} C_{n-2} \rightarrow \dots$$

Definition 2.4.5. (Homology)

Let $C = (C_*, d_*)$ be a complex of A -modules. We ask, for all $n \in Z$,

- $Z_n(C) = Ker(d_n) \subset C_n$ is called a set of a n -cycles of C
- $B_n(C) = Im(d_{n+1}) \subset C_n$ is called a set of a n -bords of C
- $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$. $H_n(C)$ is called the n th A homology module of C (the n th homology group when $A = Z$).

Example 2.4.2.

Let $f : M \rightarrow N$ and $g : N \rightarrow P$ morphisms of A -modules such that $g \circ f = 0$. Then $\dots \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow \dots$ is a complex, by putting $M_n = 0$ if $n < 0$ or $n > 2$, $M_0 = P$, $M_1 = N$, $M_2 = M$, and $d_n = 0$ if $n > 2$ or $n \leq 0$, $d_1 = g$, $d_2 = f$. If we denote C this complex, we have $H_0(C) = P/Im(g)$, $H_1(C) = Ker(g)/Im(f)$, $H_2(C) = Ker(f)$, and $H_n(C) = 0$ if $n \neq 0, 1, 2$.

Definition 2.4.6. (Morphism of complex)

Let $C = (C_*, d^C)$ and $D = (D_*, d^D)$ be two complexes. A morphism of complex $f : C \rightarrow D$ is a linear application of degree 0 that switches to differentials:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ d_n^C \downarrow & & \downarrow d_n^D \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

i.e $f_{n-1} \circ d_n^D = d_n^C \circ f_n$

Remark.

The set of chain complex form a category, where the morphisms are the morphisms of chain complex. We denote this category by $Comp(-)$.

Proposition 2.4.1. *Weibel (1994b)*

Let $f : C \rightarrow D$ be a morphism of complexes. So for all $n \in \mathbb{Z}$, we have $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ and $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$, and f induces a morphism of A -modules

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C) &\rightarrow H_n(D) \\ [c] &\mapsto [f_n(c)] \end{aligned}$$

In addition $H_n : Comp(A) \rightarrow Mod(A)$ is a functor.

Definition 2.4.7. (Complex of cochains)

A complex of cochains (or simply complex) of A -modules is a couple $C = (C^*, d^*)$ where C^* is a \mathbb{Z} -graduated A -module and $d^* : C^* \rightarrow C^*$ is a linear application of degree $+1$ such that for all $n \in \mathbb{Z}$, we have $d^{n+1} \circ d^n = 0$ (that is $Im(d^n) \subset Ker(d^{n+1})$)

$$C : \dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \rightarrow \dots$$

Definition 2.4.8. (Cohomology)

Let $C = (C^*, d^*)$ be a complex of cochains of A -modules. We ask, for everything $n \in \mathbb{Z}$,

- $Z^n(C) = Ker(d^n) \subset C^n$ is called the set of n -cocycles
- $B^n(C) = Im(d^{n-1}) \subset C^n$ is called the set of n -cobords
- $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$. $H^n(C)$ is called the n th A -cohomology module of C (the n th group of cohomology when $A = \mathbb{Z}$).

2.4.3 Long exact sequence of homology

Definition 2.4.9. (Long exact sequence)

A sequence of complex morphism $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ is said to be exact if for all $n \in \mathbb{Z}$, the following $C_n \xrightarrow{f} D_n \xrightarrow{g} E_n$ is exact.

Proposition 2.4.2.

Let

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

an exact sequence of complexes. So for all $n \in Z$ the following sequence is exact

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

Proof.

We have $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f)$. Reciprocally, let $x \in Z_n(D)$ such that $H_n(g)([x]) = 0 = [g_n(x)]$. We thus have $g_n(x) \in B_n(E)$: there exists $y \in E_{n+1}$ such that $g_n(x) = d_{n+1}^E(y)$. By surjectivity of g_{n+1} there exists $z \in D_{n+1}$ such that $y = g_{n+1}(z)$, and so $g_n(x) = d_{n+1}^E(y) = d_{n+1}^E(g_{n+1}(z)) = g_n(d_{n+1}^D(z))$ and $x - d_{n+1}^D(z) \in \text{Ker}(g_n) = \text{Im}(f_n)$. There exists therefore $c \in C_n$ such that $x - d_{n+1}^D(z) = f_n(c)$.

We have $f_{n-1}(d_n^C(c)) = d_n^D(f_n(c)) = d_n^D(x - d_{n+1}^D(z)) = d_n^D(x) - d_n^D(d_{n+1}^D(z)) = 0$, therefore by injectivity of f_{n-1} we have $d_n^C(c) = 0$, and $c \in Z_n(C)$. Thus $[x] = [f_n(c)] = H_n(f)([c])$. \square

Theorem 2.4.2. (Long exact sequence of homology)

Let $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ an exact sequence of complexes. There exists for all $n \in Z$, a morphism of A -modules $\nabla_n : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ called connection morphism, such that the following long sequence is exact:

$$\dots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\nabla_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D) \longrightarrow \dots$$

Proof.

We have already established the exactitude in $H_n(D)$, and we must construct ∇_n . Let $z \in Z_n(E)$. We begin by associating with z an element $x \in Z_{n-1}(C)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (2.4.3) & 0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow d_{n+1}^C & & \downarrow d_{n+1}^D & & \downarrow d_{n+1}^E & & \\
 & 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow d_n^C & & \downarrow d_n^D & & \downarrow d_n^E & & \\
 & 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow d_{n-1}^C & & \downarrow d_{n-1}^D & & \downarrow d_{n-1}^E & & \\
 & 0 & \longrightarrow & C_{n-2} & \xrightarrow{f_{n-2}} & D_{n-2} & \xrightarrow{g_{n-2}} & E_{n-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Let $y \in D_n$ such that $g_n(y) = z$. We have $d_n^E(z) = 0 = d_n^E(g_n(y)) = g_{n-1}(d_n^D(y))$. There is therefore a unique $x \in C_{n-1}$ such that $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$. We have $f_{n-2}(d_{n-1}^C(x)) = d_{n-1}^D(f_{n-1}(x)) = d_{n-1}^D(d_n^D(y)) = 0$. By injectivity of f_{n-2} we have $d_{n-1}^C(x) = 0$ and so $x \in Z_{n-1}(C)$.

Let us show that $[x]$, the cohomology class of x , is independent of the choice of y . Let $y' \in D_n$ such that $g_n(y') = z = g_n(y)$. Then $y - y' \in \text{Ker}(g_n)$: there exists $a \in C_n$ such that

$y - y' = f_n(a)$. Is $x' \in C_{n-1}$ such that $f_{n-1}(x') = d_n^D(y')$. We have $f_{n-1}(x - x') = d_n^D(y - y') = d_n^D(f_n(a)) = f_{n-1}(d_n^C(a))$, where $x - x' = d_n^C(a)$ and $[x] = [x']$. So we built an application

$$\begin{aligned} \alpha_n : Z_n(E) &\rightarrow H_{n-1}(C) \\ z &\mapsto [x] \end{aligned}$$

with $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$ and $g_n(y) = z$ which is A -linear.

Let $z \in B_n(E)$, that is $z = d_{n+1}^E(c)$ for $c \in E_{n+1}$. Let $b \in D_{n+1}$ such that $g_{n+1}(b) = c$. We have $g_n(d_{n+1}^D(b)) = d_{n+1}^E(g_{n+1}(b)) = z$. So we have $\alpha_n(x) = [x]$, for x such that $f_{n-1}(x) = d_n^D(d_{n+1}^D(b)) = 0$, hence $\alpha_n([x]) = 0$. Thus α_n induces a morphism of A -modules

$$\begin{aligned} \nabla_n : H_n(E) &\rightarrow H_{n-1}(C) \\ z &\mapsto [x] \end{aligned}$$

with $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$ and $g_n(y) = z$

Let us show the accuracy in $H_n(E)$. Let $r \in Z_n(D)$. We have $\nabla_n \circ H_n(g)([r]) = \nabla_n([g_n(r)]) = [x]$ for $x \in C_{n-1}$ such that $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$ and $g_n(y) = g_n(r)$, where $f_{n-1}(x) = d_n^D(r) = 0$, and $\nabla_n \circ H_n(g)([r]) = 0$.

Conversely, let $z \in Z_n(E)$ such that $\nabla_n([z]) = 0 = [x]$, where $x \in Z_{n-1}(C)$ satisfies $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$ and $z = g_n(y)$ ($y \in D_n$). So there exists $c \in C_n$ such that $x = d_n^C(c)$, and we have $f_{n-1}(x) = f_{n-1}(d_n^C(c)) = d_n^D(f_n(c)) = d_n^D(y)$, hence $y - f_n(c) \in Z_n(D)$, with $z = g_n(y - f_n(c))$. Thus $[z] = H_n(g)([y - f_n(c)])$ for $y - f_n(c) \in Z_n(D)$, and $[z] \in \text{Im}(\nabla_n)$.

It remains to show the accuracy in $H_{n-1}(C)$. Let $z \in Z_n(E)$. We have $H_{n-1}(f)(\nabla_n([z])) = [f_{n-1}(x)]$ for $x \in C_{n-1}$ satisfying $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$, $z = g_n(y)$, $y \in D_n$. Thus $H_{n-1}(f)(\nabla_n([z])) = [d_n^D(y)] = 0$.

Reciprocally, let $c \in Z_{n-1}(C)$ such that $H_{n-1}(f)([c]) = 0 = [f_{n-1}(c)]$. So there is $r \in D_n$ such that $d_n^D(r) = f_{n-1}(c)$. Let $z = g_n(r) \in E_n$. We have $d_n^E(z) = d_n^E(g_n(r)) = g_{n-1}(d_n^D(r)) = g_{n-1}(f_{n-1}(c)) = 0$, hence $z \in Z_n(E)$, and by construction we have $[c] = \nabla_n([z])$. \square

3. Lie algebras cohomology

This chapter is inspired and drawn mainly from the following authors:

(*Hochschild, 1954*), (*Radul, 1989*), (*Fialowski and Wagemann, 2008*), (*Feigin and Fuchs, 2000*), (*Farnsteiner and Strade, 1981*), (*Bourbaki, 2008*), (*Kassel and Loday, 1982*), (*Neeb, 2006*)

3.1 Theory of Lie algebras

In this section we are going to give some basic definitions, examples and properties of Lie algebras.

Definition 3.1.1. (Lie Algebra)

A Lie algebra G over a field F is a F -vector space together with a F -bilinear map $[\cdot, \cdot] : G \times G \longrightarrow G$, the so-called Lie bracket, which satisfies the following two conditions for all $x, y, z \in G$:

- (a) **Skew-symmetry:** $[x, y] = -[y, x]$,
- (b) **Jacobi identity:** $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Remark.

In fact, if $\text{char}(F) \neq 2$ and $x, y \in G$, we have

$$[x, y] = -[y, x] \iff [x, x] = 0.$$

Indeed, for " \Leftarrow " one obtains

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x],$$

using the bilinearity of the bracket. Regarding " \Rightarrow " we set $x = y$ and immediately arrive at $[x, x] = -[x, x]$ and thus, $2[x, x] = 0$. Since we required $\text{char}(F) \neq 2$, we conclude $[x, x] = 0$. Hence, if the field is of characteristic 2, only " \Rightarrow " holds.

Example 3.1.1.

Any vector space over a field can be turned into a Lie algebra if we endow it with the trivial Lie bracket, i.e. setting $[x, y] = 0$ for all its elements. Lie algebras with this property are called **abelian**. Another example is the direct sum $G \oplus H$ of two Lie algebras G, H . Here, the vector space is simply $G \times H$ and the bracket operation is performed componentwise, that is $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2])$.

Definition 3.1.2. (Lie algebra homomorphism)

Let G, H be two Lie algebras over a field F . We define a Lie algebra homomorphism $\rho : G \longrightarrow H$ to be a linear map that preserves the bracket, that is, for $x, y \in G$ we require

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)].$$

Let K, L be two subspaces of G . Define $[K, L]$ to be the subspace generated by the brackets $[x, y]$, $x \in K, y \in L$. Thus, each element of $[K, L]$ is a linear combination of brackets $[x_i, y_i]$ for $x_i \in K, y_i \in L$. This notation allows us to give the following definition.

Definition 3.1.3. (Lie subalgebra)

A subspace K of G is called a Lie subalgebra of G if:

$$[K, K] \subseteq K$$

i.e. if it is closed under the bracket. Then K itself becomes a Lie algebra in its own right with the inherited operations.

Moreover, $I \subseteq G$ is said to be an ideal or Lie ideal of G if

$$[G, I] = [I, G] \subseteq I,$$

written $I \trianglelefteq G$. In this definition we used that the bracket of subspaces is commutative. Indeed, $[x, y] \in [K, L] = -[y, x] \in [L, K]$, hence $[K, L] \subseteq [L, K]$. Analogously one obtains $[L, K] \subseteq [K, L]$.

Let define now the quotient Lie algebra. If $I \trianglelefteq G$ we can construct the quotient algebra G/I by setting

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I$$

for two equivalence classes $x + I, y + I$. Let $x' = x + I, y' = y + I$. Then,

$$[x', y'] = [x + I, y + I] = [x, y] + [x, I] + [I, y] + [I, I]$$

applying bilinearity of the bracket. This prompts the independence of the choice of the representative since $[x, I] + [I, y] + [I, I] \in I$ by the ideal property.

Theorem 3.1.1. (Isomorphism theorems)

Let $\rho : G \longrightarrow H$ be a Lie algebra homomorphism and let I, J be two ideals of G . Then:

- (a) $G/\ker \rho \cong \text{im } \rho$.
- (b) $(G/I)/(J/I) \cong G/J$ whenever $I \subseteq J$.
- (c) $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.

Proof.

The proof is omitted since the isomorphisms are given in a canonical way and the procedure is analogous to the case of groups. \square

Lemma 3.1.1.

Let A be an associative algebra over a field F , i.e. a F -vector space with an associative, bilinear map $(x, y) \mapsto x.y$ for elements $x, y \in A$. Then $[x, y] := x.y - y.x$ defines a Lie algebra structure on A .

Proof.

By definition, $[x, y] = -[y, x]$ hence the bracket is skew-symmetric. The Jacobi identity is verified by expanding the product. \square

Definition 3.1.4. (Representation of a Lie algebra)

A representation of a Lie algebra G is defined as a F -vector space V together with a Lie algebra homomorphism $\rho : G \rightarrow GL(V)$. The representation is called faithful if ρ is injective.

Definition 3.1.5. (Adjoint endomorphism)

Let G be a Lie algebra over F . For $x \in G$ we define the adjoint endomorphism

$$\begin{aligned} ad(x) : G &\longrightarrow G, \\ ad(x)(y) &:= [x, y]. \end{aligned}$$

Then the linear mapping $ad : G \rightarrow GL(G)$ with $x \mapsto ad(x)$ defines a representation, called the adjoint representation of G . Observe that:

$$\begin{aligned} \ker(ad(x)) &= \{x \in G : ad(x)(y) = 0 \quad \forall y \in G\} \\ &= \{x \in G : [x, y] = 0 \quad \forall y \in G\} \\ &=: Z(G) \end{aligned}$$

the center of the Lie algebra G .

It is important to add that the adjoint endomorphisms are derivations of g in the sense of the following definition.

Definition 3.1.6. (Derivation)

A linear map $D : G \rightarrow G$ satisfying

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

for all $x, y \in G$ is called a derivation of the Lie algebra G . The set of all derivations of G is denoted by $der(G)$ and is easily seen to be a vector space. One actually has more structure:

Proposition 3.1.1.

Let G be a Lie algebra over F . Then the following assertions hold:

- (a) The derivations $\text{der}(G)$ form a Lie subalgebra of $GL(G)$.
- (b) For all $x \in G$ the adjoint endomorphism $\text{ad}(x) \in \text{der}(G)$.
- (c) $\text{ad}(G)$ is a Lie ideal in $\text{der}(G)$.

Proof.

- a) Regarding the first statement, we have to show that the commutator of two derivations is again a derivation. Let $D_1, D_2 \in \text{der}(G)$ and $x, y \in G$. Then one calculates

$$\begin{aligned} D_1 D_2([x, y]) - D_2 D_1([x, y]) &= D_1([D_2(x), y] + [x, D_2(y)]) - D_2([D_1(x), y] + [x, D_1(y)]) \\ &= [D_1 D_2(x), y] + [D_2(x), D_1(y)] + [D_1(x), D_2(y)] + [x, D_1 D_2(y)] \\ &\quad - [D_2 D_1(x), y] - [D_1(x), D_2(y)] - [D_2(x), D_1(y)] - [x, D_2 D_1(y)] \\ &= [D_1 D_2(x) - D_2 D_1(x), y] + [x, D_1 D_2(y) - D_2 D_1(y)]. \end{aligned}$$

- b) In order to see the second assertion, let $x, y, z \in G$ and observe

$$\begin{aligned} \text{ad}(x)([y, z]) &= [x, [y, z]] \\ &= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] \\ &= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\ &= [\text{ad}(x)(y), z] + [y, \text{ad}(x)(z)] \end{aligned}$$

- c) To prove the third item we show that for every $D \in \text{der}(G)$ we have $[D, \text{ad}(x)] = \text{ad}(D(x))$. To this end, compute

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}(x)](y) &= (D(x))(y) - (\text{ad}(x)D)(y) \\ &= D([x, y]) - [x, D(y)] \\ &= [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] \\ &= [D(x), y] \\ &= \text{ad}(D(x))(y) \end{aligned}$$

□

Remark.

Notice that we can define derivations for any F -algebra A . In fact, one simply defines a linear map $D \in \text{End}(A)$ to be a derivation of A if it satisfies

$$D(x.y) = D(x).y + x.D(y)$$

for all $x, y \in A$.

In the following example we display the procedure to compute the adjoint representation of a given Lie algebra.

Definition 3.1.7. (Lie ring)

A Lie ring is an abelian group $(G, +)$ together with a Lie bracket $[\cdot, \cdot] : G \times G \longrightarrow G$ that satisfies

- (a) \mathbb{Z} -bilinearity,
- (b) skew-symmetry,
- (c) the Jacobi identity.

Remark.

Thus, any Lie algebra is a Lie ring if we consider it over an abelian group instead of a field.

3.2 Cohomology of Lie algebras

In this part, we define cohomology of Lie algebras. To this end, we define the Chevalley-Eilenberg chain complex. Let K be a field, G a Lie algebra over K , and V a G -module. Set

$$C^n(G, V) := \text{Alt}(G^n, V), \quad n > 0, \quad C^0(G, V) := V.$$

That is, $C^n(G, V)$ is the set of alternating n -linear maps $G^n \longrightarrow V$. These are the n -cochains of the Chevalley-Eilenberg complex. We define the differential $d : C^n(G, V) \longrightarrow C^{n+1}(G, V)$ as follows:

Given $c \in C^n(G, V)$, let $dc \in C^{n+1}(G, V)$ be given by

$$dc(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

for all $x_1, \dots, x_{n+1} \in G$, where $x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ denotes the action of $x_i \in G$ on $c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \in V$ according to the G -module structure of V .

Proposition 3.2.1.

$(C^*(G, V), d)$ is a complex chain.

Proof.

We are going to show in fact that $d^2 = 0$.

We have by definition:

$$dc(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

for all $x_1, \dots, x_{n+1} \in G$. So we have:

$$d^2c(x_1, \dots, x_n) = \sum_i (-1)^{i+1} x_i dc(x_1, \hat{x}_i, x_k) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} dc([x_i, x_j], x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_j, \dots, x_k) \quad (1)$$

$$= \sum_{r < i} (-1)^{i+r} (x_i x_r) \cdot c(x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_i, x_k) + \quad (2)$$

$$+ \sum_{i < r} (-1)^{i+r+1} (x_i x_r) \cdot c(x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_r, x_k) \quad (3)$$

$$+ \sum_{r < s < i} (-1)^{i+r+s+1} x_i \cdot c([x_r, x_s] x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_s, \hat{x}_i, x_k) \quad (4)$$

$$+ \sum_{r < i < s} (-1)^{i+r+s} x_i \cdot c([x_r, x_s] x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_i, \hat{x}_s, x_k) \quad (5)$$

$$+ \sum_{i < r < s} (-1)^{i+r+s+1} x_i \cdot c([x_r, x_s] x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_r, \hat{x}_s, x_k) \quad (6)$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \cdot c(x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_j, x_k) \quad (7)$$

$$+ \sum_{r < i < j} (-1)^{i+j+r} x_r \cdot c([x_i, x_j], x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_i, \hat{x}_j, x_k) \quad (8)$$

$$+ \sum_{i < r < j} (-1)^{i+j+r+1} x_r \cdot c([x_i, x_j], x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_r, \hat{x}_j, x_k) \quad (9)$$

$$+ \sum_{i < j < r} (-1)^{i+j+r} x_r \cdot c([x_i, x_j], x_1, \hat{x}_s, \hat{x}_i, \hat{x}_j, x_k) \quad (10)$$

$$+ \sum_{s < i < j} (-1)^{i+j+s} x_r \cdot c([x_i, x_j], x_s, x_1, \hat{x}_s, \hat{x}_i, \hat{x}_j, x_k) \quad (11)$$

$$+ \sum_{i < s < j} (-1)^{i+j+s+1} c([x_i, x_j], x_s, x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_s, \hat{x}_j, x_k) \quad (12)$$

$$+ \sum_{i < j < s} (-1)^{i+j+s} c([x_i, x_j], x_s, x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_j, \hat{x}_s, x_k) \quad (13)$$

$$+ \sum_{r < s < i < j} (-1)^{i+j+r+s} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_s, \hat{x}_i, \hat{x}_j, x_k) \quad (14)$$

$$+ \sum_{r < i < s < j} (-1)^{i+j+r+s+1} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_i, \hat{x}_s, \hat{x}_j, x_k) \quad (15)$$

$$+ \sum_{r < i < j < s} (-1)^{i+j+r+s} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_r, \hat{x}_i, \hat{x}_j, \hat{x}_s, x_k) \quad (16)$$

$$+ \sum_{i < r < s < j} (-1)^{i+j+r+s+1} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_r, \hat{x}_j, \hat{x}_s, x_k) \quad (17)$$

$$+ \sum_{i < r < j < s} (-1)^{i+j+r+s+1} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_r, \hat{x}_j, \hat{x}_s, x_k) \quad (18)$$

$$+ \sum_{i < j < r < s} (-1)^{i+j+r+s} c([x_r, x_s], [x_i, x_j], x_1, \hat{x}_i, \hat{x}_j, \hat{x}_r, \hat{x}_s, x_k) \quad (19)$$

So,

Since, $[x_i, x_r] = x_i x_r - x_r x_i$ we have : (2) and (3) will cancel with (7)

– (4) will cancel with (10)

– (5) will cancel with (9)

– (6) will cancel with (8)

– Since $[[x_i, x_j], x_s] = [[x_i, x_s], x_j] - [[x_j, x_s], x_i]$
 $= [[x_i, x_s], x_j] + [[x_s, x_j], x_i]$

(11) and (8) will cancel with (12)

So we have,

$$d^2c(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Then, $(C^*(G, V), d)$ is a complex chain. □

Definition 3.2.1. (Chevalley-Eilenberg complex)

$(C^*(G, V), d)$ is called the Chevalley-Eilenberg complex of G with coefficients V , and the cohomology of G with coefficients in V , $H^*(G, V)$, is defined as the homology of the Chevalley-Eilenberg complex.

Indeed, let us evaluate the groups $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$ to see how we can use the above complex of Chevalley-Eilenberg.

3.2.1 Cohomology groups: $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$

Let consider the Chevalley-Eilenberg complex denoted by $(C^*(G, V), d)$, with the differential d given by the following:

$$dc(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

for all $x_1, \dots, x_{n+1} \in G$,

So, we are using the Chevalley-Eilenberg complex $(C^*(G, V), d)$ we can split it as follow ::

$$\dots \xrightarrow{d^{-1}} C^0(G, V) \xrightarrow{d^0} C^1(G, V) \xrightarrow{d^1} C^2(G, V) \xrightarrow{d^2} C^3(G, V) \longrightarrow \dots$$

1- Evaluation of $H^0(G, V)$

By definition we have:

$$H^0(G, V) = \frac{Z^0(G, V)}{B^0(G, V)} = \frac{\ker(d^0: C^0(G, V) \rightarrow C^1(G, V))}{\text{im}(d^{-1})}$$

since $C^0(G, V) = V$ (by definition of Chevalley-Eilenberg complex $(C^*(G, V), d)$), we have:

$$H^0(G, V) = \frac{\ker(d^0: V \rightarrow C^1(G, V))}{\text{im}(d^{-1})} = \ker\{v \in V, \text{ such that } v \mapsto (x \mapsto x.v = 0)\}, \text{ with } x \in G$$

according to the definition of the differential d of Chevalley-Eilenberg.

So, we conclude that,

$$H^0(G, V) = \frac{\ker(d^0: V \rightarrow C^1(G, V))}{\operatorname{im}(d^{-1})} = \ker\{v \in V, \text{ such that } v \mapsto (x \mapsto x.v = 0)\}, \text{ with } x \in G$$

2- Evaluation of $H^1(G, V)$

By definition we have:

$$H^1(G, V) = \frac{Z^1(G, V)}{B^1(G, V)} = \frac{\ker(d^1: C^1(G, V) \rightarrow C^2(G, V))}{\operatorname{im}(d^0: C^0(G, V) \rightarrow C^1(G, V))}$$

since $C^0(G, V) = V$ (by definition of Chevalley-Eilenberg complex $(C^*(G, V), d)$), we have:

$$H^1(G, V) = \frac{Z^1(G, V)}{B^1(G, V)} = \frac{\ker(d^1: C^1(G, V) \rightarrow C^2(G, V))}{\operatorname{im}(d^0: V \rightarrow C^1(G, V))} = \frac{c: G \rightarrow V \text{ such that } \forall x, y \in G: c[x, y] - x.c(y) + y.c(x) = 0}{\exists c: G \rightarrow V \text{ such that } \forall x \in G \text{ and } v \in V, c_v(x) := x.v}$$

according to the definition of the differential d of Chevalley-Eilenberg.

So, we conclude that,

$$H^1(G, V) = \frac{Z^1(G, V)}{B^1(G, V)} = \frac{\ker(d^1: C^1(G, V) \rightarrow C^2(G, V))}{\operatorname{im}(d^0: V \rightarrow C^1(G, V))} = \frac{c: G \rightarrow V \text{ such that } \forall x, y \in G: c[x, y] - x.c(y) + y.c(x) = 0}{\exists c: G \rightarrow V \text{ such that } \forall x \in G \text{ and } v \in V, c_v(x) := x.v}$$

Hence, denoting by $\operatorname{der}(G, V)$ the space of derivations (defined in the section of Theory of Lie algebra in this work) given as follow :

For a linear map $c : G \rightarrow V$ such that for all $x, y \in G : c[x, y] = x.c(y) - y.c(x)$.

and denoting by $\operatorname{inder}(G, V)$ the space of inner derivations given as follows:

For a linear map $c : G \rightarrow V$ which is obtained as $c_v(x) := x.v$ for some $v \in V$

we have then the cohomology group $H^1(G, V)$ given by:

$$H^1(G, V) = \frac{\operatorname{der}(G, V)}{\operatorname{inder}(G, V)}$$

As we now know the first two groups of cohomology and know how they look like, what about the second group $H^2(G, V)$?

3.2.2 Second group of cohomology: $H^2(G, V)$

Comparing to the case of $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$, by definition we have:

$$H^2(G, V) = \frac{Z^2(G, V)}{B^2(G, V)} = \frac{\ker(d^2: C^2(G, V) \rightarrow C^3(G, V))}{\operatorname{im}(d^1: C^1(G, V) \rightarrow C^2(G, V))}$$

Since $\ker(d^2 : C^2(G, V) \rightarrow C^3(G, V))$ and $\operatorname{im}(d^1 : C^1(G, V) \rightarrow C^2(G, V))$ are not known, we can not compute directly the group $H^2(G, V)$ explicitly as we did in the case of $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$ (see 3.2.1). So, we are going to introduce the notion of abelian extension which will be very helpful to find or to evaluate $H^2(G, V)$.

3.3 Abelian extension for Lie algebra

Our goal in this section is to construct the bijection between the class of abelian extension of Lie algebra and the second group of cohomology. In fact, we are going to prove the following theorem.

Theorem 3.3.1.

The set of equivalence classes of abelian extensions with fixed cokernel H and fixed kernel A is in bijection with $H^2(H, A)$.

3.3.1 Definitions and properties

Definition 3.3.1. (Extension)

Let H and A be Lie algebras. An **extension** of H by A is a short exact sequence:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

of Lie algebras.

It is called **abelian**, if A is abelian, i.e. if $[\cdot, \cdot]_A \equiv 0$.

Definition 3.3.2. (Equivalent abelian extensions)

Two abelian extensions

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{\pi'} H \longrightarrow 0,$$

such that G and G' have the same kernel A and the same cokernel H are called equivalent if there exists a morphism of Lie algebras $\Phi : G \longrightarrow G'$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(3.3.2)} & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow id_A & & \downarrow \Phi & & \downarrow id_H & & \\ & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

is commutative.

Remark.

- An extension $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$, is often denoted only by $A \longrightarrow G \longrightarrow H$ or even $G \longrightarrow H$.
- $Ext(H, A)$ denotes the set of equivalence classes of extensions of H by A vector space A
- According to the five Lemma, ϕ is bijective.

Definition 3.3.3. (G -module)

Let V be a K -vector space and G a K -Lie algebra. V is called a **G-module**, if there exists a morphism of Lie algebras $\phi : G \longrightarrow End(V)$.

In fact, let G be a Lie algebra. A G -module is a K -vector space V together with a representation $\psi : G \longrightarrow End(V)$ of G , i.e. ψ is a Lie algebra homomorphism. In other words, a G -module is a K -vector space V and a linear action of G on V , $-, - : G \times V \longrightarrow V$, satisfying

$$[X, Y].v = X.(Y.v) - Y.(X.v) \text{ for all } X, Y \in G, v \in V.$$

Example 3.3.1. (G -module)

- 1- K with the trivial action, $G \longrightarrow End(K)$ the zero map.
- 2- G itself with the adjoint action; $ad : G \longrightarrow End(G)$, $ad(x)(y) = [x, y]$.

Lemma 3.3.1.

If $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$ or $G \xrightarrow{\pi} H$ is an abelian extension of H by A , there exists a H -module structure on A .

Proof.

Let $s : H \longrightarrow G$ be a section of π i.e s is a linear map with $s \circ \pi = id_H$. It exists, as one can choose a basis on H and lift each basis vector to a vector in G .

Set

$$\alpha : H \times A \longrightarrow A$$

as $\alpha(x).a = [\alpha(x), a]_G$ for all $x \in H$, $a \in A$, where a is not distinguished from its image in G . So now, it remains to show:

- α is does not depend on the choice of the section s :
Let $g_1, g_2 \in G$ with $\pi(g_1) = \pi(g_2) \implies g_1 - g_2 \in \ker \pi \cong A \implies [g_1, a]_G - [g_2, a]_G = [g_1 - g_2, a]_G = 0$, as A is abelian.
- $[g_1, a] \in \ker \pi \cong A$:
This holds, as $\ker \pi$ is an ideal in G .

□

Corollary.

Equivalent abelian extensions of H by A , $0 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$ lead to the same module structure on A .

Proof.

Since the abelian extensions are equivalent, the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(3.3.1)} & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow id_A & & \downarrow \Phi & & \downarrow id_H & & \\ & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Choose linear sections s and s' of π and π' . Since ψ is the identity on A , it suffices to show:

$$\psi([s(x), a]) = [s'(x), a]$$

$\forall a \in A, x \in H$ as elements of A .

This holds, because $\psi([s(x), a]) = [\psi(s(x)), \psi(a)] = [\psi(s(x)), a]$ as the diagram commutes.

As shown above, the module structure does not depend on the choice of the section in a given extension, and $\psi \circ s$ defines another section of $G' \longrightarrow H$. □

3.3.2 Evaluation of $H^2(G, V)$

In fact, our vision is show that the group $H^2(G, V)$ is isomorphic with the class of equivalence of abelian extensions denoted by $Ext(G, V)$, i.e we are going to show the following theorem.

Theorem 3.3.2.

Let G be a Lie algebra and V an abelian Lie algebra. Then:

$$Ext(G, V) \cong H^2(G, V) = Z^2(G, V)/d(C^1(G, V))$$

Before trying to prove this theorem 3.3.2, let us start first with the following result.

Proposition 3.3.1.

Let $\alpha \in C^2(G, V)$. Then α leads to an abelian extension $G_\alpha = V \oplus G$ with the Lie bracket

$$[(v_1, g_1), (v_2, g_2)] = (g_1.v_2 - g_2.v_1 + \alpha(g_1, g_2), [g_1, g_2])$$

$\forall v_1, v_2 \in V, g_1, g_2 \in G$ of G by V if and only if $\alpha \in Z^2(G, V)$.

Proof.

By definition the Lie bracket is skew symmetric, but the Jacobi identity should hold, too. Writing down the first term of the Jacobi identity one gets, with $v_1, v_2, v_3 \in V$ and $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$\begin{aligned} & [[(v_1, g_1), (v_2, g_2)], (v_3, g_3)] = [g_1 \cdot v_2 - g_2 \cdot v_1 + \alpha(g_1, g_2), [g_1, g_2]], (v_3, g_3)] \\ & = ([g_1, g_2] \cdot v_3 - g_3 \cdot (g_1 \cdot v_2 - g_2 \cdot v_1 + \alpha(g_1, g_2)) + \alpha([g_1, g_2], g_3), [[g_1, g_2], g_3]) \end{aligned}$$

If one takes the sum over the permutations, as in the Jacobi identity, the second component vanishes, as the Jacobi identity holds for the Lie bracket in G . If one focuses at the first component, one gets

$$\begin{aligned} & [g_1, g_2] \cdot v_3 - g_3 \cdot (g_1 \cdot v_2 - g_2 \cdot v_1 + \alpha(g_1, g_2)) + \alpha([g_1, g_2], g_3) \\ & + (g_3, g_1) \cdot v_2 - g_2 \cdot (g_3 \cdot v_1 - g_1 \cdot v_3 + \alpha(g_3, g_1)) + \alpha([g_3, g_1], g_2) \\ & + ([g_2, g_3] \cdot v_1 - g_1 \cdot (g_2 \cdot v_3 - g_3 \cdot v_2 + \alpha(g_2, g_3)) + \alpha([g_2, g_3], g_1)) \\ & = [g_1, g_2] \cdot v_3 - g_1 \cdot g_2 \cdot v_3 + g_2 \cdot g_1 \cdot v_3 + [g_3, g_1] \cdot v_2 - g_3 \cdot g_1 \cdot v_2 + g_1 \cdot g_3 \cdot v_2 \\ & \quad + [g_2, g_3] \cdot v_1 - g_2 \cdot g_3 \cdot v_1 + g_3 \cdot g_2 \cdot v_1 \\ & + g_1 \cdot \alpha(g_2, g_3) - g_1 \cdot \alpha(g_1, g_3) + g_3 \cdot \alpha(g_1, g_2) - \alpha([g_1, g_2], g_3) + \alpha([g_1, g_3], g_2) - \alpha([g_2, g_3], g_1) \end{aligned}$$

The first two rows of terms vanish by the definition of a Lie algebra action.

The third and fourth row of terms are exactly the equation one gets as the derivative $d\alpha$ of $\alpha \in C^2(G, V)$. The Jacobi identity holds if and only if it vanishes. This equivalent to α being a cocycle. Then $G_\alpha \rightarrow G$ defines an extension of G by V . \square

Proof. (Theorem 3.3.2)

\supseteq)

Let $\alpha \in Z^2(G, V)$. As shown above, this leads to an extension of G by V .

It remains to show, that equivalent cocycles α, α' lead to equivalent extensions. Therefore one wants to define a Lie algebra homomorphism $\psi : G_\alpha \rightarrow G_{\alpha'}$, which has to be of the form $\psi : (v, g) \mapsto (v + \psi(g), g)$, as it has to be the identity on the second component, and you get the first component by linearity and Lie brackets. One computes by an similar calculation as above, that it commutes with the Lie brackets if and only if $\alpha = \alpha' + d\psi$, that means, if α and α' are in the same equivalence class.

In this part of the proof, it is only necessary to know, that equivalent cocycles are mapped to the same equivalence class of extensions, but later also the other direction is needed, i.e. if G_α and $G_{\alpha'}$ are equivalent, then α and α' are so as well via the equation between them above.

\subseteq)

Let $A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H$ be an abelian extension. One wants to show, that it is equivalent to another abelian extension $H_\alpha \longrightarrow H$, where $\alpha \in Z^2(G, V)$.

Choose a section $s : H \longrightarrow G$, such that $\pi \circ s = id_H$, as above.

Let

$$\alpha(g, h) = [s(g), s(h)] - s([g, h])$$

for all $g, h \in H$. To make sure it is a cocycle, one has to check:

- $im(\alpha) \subset A \cong i(A)$, i.e. $\pi(\alpha(g, h)) = 0$: π is a Lie algebra homomorphism, and therefore $\pi(\alpha(g, h)) = [\pi(s(g)), \pi(s(h))] - \pi(s([g, h])) = 0$
- $\alpha \in Z^2(H, A)$, i.e. $d\alpha = 0$ (via computation, using skew symmetry and Jacobi identity for the Lie brackets, and the definition of the H -action on A). In fact, we have:

Let $x \in H$ and $\alpha(y, z) \in A$.

The product $x.\alpha(y, z)$ is an action of H on A . Let us define the action as follows:

$$\begin{aligned} H \times A &\rightarrow A \\ (h, a) &\mapsto h.a \end{aligned}$$

which satisfy the following properties:

- * $e.a = a$, where e is the neutral element of H and $a \in A$;
- * $(h_1.h_2).a = h_1.(h_2.a)$ for all $h_1, h_2 \in H$ and $a \in A$.

So, in particular for all $y, z \in H$ such that $\alpha(y, z) \in A$ (with $\alpha : H \times H \longrightarrow A$), we define the following map:

$$\begin{aligned} H \times A &\rightarrow A \\ (x, \alpha(y, z)) &\mapsto x.\alpha(y, z) \end{aligned}$$

since $x \in H$ and the map $\pi : G \longrightarrow H$ is surjective (because the sequence $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$ is exact), then there exists $y \in G$ such that $x = \pi(y)$, in fact,

$$x = \pi(s(x)) \text{ and } i(\alpha(y, z)) = \alpha(y, z)$$

So, we have finally according to definition of our action, we can define the map by:

$$\begin{aligned} H \times A &\rightarrow A \\ (x, \alpha(y, z)) &\mapsto x.\alpha(y, z) = [s(x), \alpha(y, z)] \in A \end{aligned}$$

We are going to show now that for $\alpha \in Z^2(H, A)$, $d\alpha = 0$ with d the differential of Chevalley-Eilenberg. So, Let prove that $d\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
d\alpha &= -\alpha([x, y], z) - \alpha([y, z], x) - \alpha([z, x], y) + x.\alpha(y, z) + y.\alpha(z, x) + z.\alpha(x, y) = \\
&= -s[[x, y], z] + [s[x, y], s(z)] - s[[y, z], x] + [s[y, z], s(x)] - s[[z, x], y] + \\
&\quad [s[z, x], s(y)] + [s(x), s[y, z]] - [s(x), [s(y), s(z)]] + [s(y), s[z, x]] - \\
&\quad [s(y), [s(z), s(x)]] + [s(z), s[x, y]] - [s(z), [s(x), s(y)]] \\
&= [s[x, y], s(z)] + [s[y, z], s(x)] + [s[z, x], s(y)] + [s(x), s[y, z]] + [s(y), s[z, x]] + \\
&\quad [s(z), s[x, y]] = 0
\end{aligned}$$

So, $d\alpha = 0$.

Now we want to show, that $H_\alpha \longrightarrow H$ is equivalent to $A \longrightarrow G \longrightarrow H$:

Set $\psi : H_\alpha \cong V \times H \longrightarrow G$, $(v, g) \longmapsto i(v) + s(g)$. ψ is a bijective module homomorphism. ψ is as well a Lie algebra homomorphism from G_α to G as $\psi([(v, g), (v', g')]) = i(g.v') - i(g'.v) + i([s(g), s(g')]) - i(s[g, g']) + s[g, g'] = [i(v), s(g')] + [s(g), i(v')] + [s(g), s(g')]$ (use again the definition of the H -action on V) α only depends on the equivalence class of the given extension:

If two equivalent extensions lead to two different extensions H_α and $H_{\alpha'}$, these are equivalent, too. Due to the remark in the first part of the proof, then α and α' are equivalent.

□

Conclusion:

So, we have seen that the calculus of $H^0(G, V)$, $H^1(G, V)$ can be evaluated directly using the explicit definition of cohomology, but for the case of $H^2(G, V)$ we realized that we can not find it explicitly using the direct computation, so we proved that there exist a bijection between the class of equivalence abelian extensions and $H^2(G, V)$ according to the theorem 3.3.2. Now, what about the third group $H^3(G, A)$? How can we evaluate it?. That is the goal of the next chapter.

4. Crossed module for Lie algebras

This chapter is inspired and drawn mainly from the following authors:

(Wagemann, 2006), (Gerstenhaber, 1964), (Gerstenhaber, 1966), (Agrebaoui and Fraj, 2003)

Let G a Lie algebra and V a vector space. In this chapter, we are going to evaluate the third group of cohomology denoted by $H^3(G, V)$. In fact, as we have seen in the chapter 3, the computation of the two first groups $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$ is direct, but for the second group $H^2(G, V)$ it is not possible to get it by the same process using just the explicit definition of cohomology, we saw in fact that, we can make a bijection between the class of equivalence of abelian extensions denoted by $Ext(G, V)$ and itself i.e $H^2(G, V)$ (see theorem 3.3.2). Now, our goal is to see how the third group $H^3(G, V)$ look like or how we can evaluate it. By definition, using the Chevalley-Eilenberg complex $(C^*(G, V), d)$ (see proposition 3.2.1) defined as follow:

$$\dots \xrightarrow{d^{-1}} C^0(G, V) \xrightarrow{d^0} C^1(G, V) \xrightarrow{d^1} C^2(G, V) \xrightarrow{d^2} C^3(G, V) \longrightarrow C^4(G, V) \longrightarrow \dots$$

where for all n , the differential $d^n : C^n(G, V) \longrightarrow C^{n+1}(G, V)$ is define as follows:

Given $c \in C^n(G, V)$, let $d^n c \in C^{n+1}(G, V)$ be given by

$$d^n c(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

for all $x_1, \dots, x_{n+1} \in G$, where $x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ denotes the action of $x_i \in G$ on $c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \in V$ according to the G -module structure of V .

we have:

$$H^3(G, V) = \frac{Z^3(G, V)}{B^3(G, V)} = \frac{\ker(d^3 : C^3(G, V) \longrightarrow C^4(G, V))}{\operatorname{im}(d^2 : C^2(G, V) \longrightarrow C^3(G, V))}$$

Since $\ker(d^3 : C^3(G, V) \longrightarrow C^4(G, V))$ and $\operatorname{im}(d^2 : C^2(G, V) \longrightarrow C^3(G, V))$ are not known, we can not compute directly the group $H^3(G, V)$ explicitly as we did in the case of $H^0(G, V)$ and $H^1(G, V)$ (see 3.2.1). So, we are going to introduce the notion of Crossed Modules which will be very helpful to find or to evaluate $H^3(G, V)$.

4.1 Definitions and properties

4.1.1 Definitions

Definition 4.1.1. (Crossed modules)

Let M, N two Lie algebras and

$$\begin{aligned}\eta : N &\rightarrow \text{der}(M) \\ n &\mapsto \eta(n) : M \rightarrow M \\ m &\mapsto \eta(n).m = n.m\end{aligned}$$

Where $\text{der}(M)$ is a set of all derivations of M , defined in 3.1.6.

A crossed module of Lie algebras is a homomorphism of Lie algebras $\mu : M \rightarrow N$, such that:

- i- $\mu(n.m) = [n, \mu(m)]$ for all $n \in N$ and all $m \in M$,
- ii- $\mu(m).m' = [m, m']$ for all $m, m' \in M$.

Remark.

To each crossed module of Lie algebras $\mu : M \rightarrow N$, one associates a four term exact sequence:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

where $\ker \mu = V$ and $\text{coker} \mu = G$

Remark.

- According to the point i) in definition 4.1.1, $\text{im}(\mu)$ is an ideal, and thus G is a Lie algebra.
- According to the point ii) in definition 4.1.1, V is a central ideal of M , and in particular abelian

Definition 4.1.2. (Elementary equivalence)

Two crossed modules $\mu : M \rightarrow N$ (with action η) and $\mu' : M' \rightarrow N'$ (with action η') such that $\ker(\mu) = \ker(\mu') =: V$ and $\text{coker}(\mu) = \text{coker}(\mu') =: G$ are called elementary equivalent if there are morphisms of Lie algebras $\phi : M \rightarrow M'$ and $\psi : N \rightarrow N'$ which are compatible with the actions, meaning

$$\phi(\eta(n)(m)) = \eta'(\psi(n))(\phi(m)),$$

for all $n \in N$ and all $m \in M$, and such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccccccccc} \textcolor{red}{(4.1.2)} & 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \text{id}_V & & \downarrow \Phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \text{id}_G & & \\ & 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Definition 4.1.3. (Sum of crossed modules)

Consider two crossed modules $\mu : M \longrightarrow N$ and $\mu' : M' \longrightarrow N'$ with isomorphic kernel and cokernel and their corresponding four term exact sequences

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \quad (4.1.1)$$

and

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i'} M' \xrightarrow{\mu'} N' \xrightarrow{\pi'} G \longrightarrow 0 \quad (4.1.2)$$

The sum of this two crossed modules 4.1.1 and 4.1.2, denoted by $\mu \oplus \mu'$, is the following crossed module:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{(i \oplus i') \circ \Delta} \frac{M \oplus M'}{K} \xrightarrow{\mu \oplus \mu'} N \oplus_G N' \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \quad (4.1.3)$$

where, $K := \{(v, -v) \in V \oplus V\}$ is the kernel of the addition map $V \oplus V \longrightarrow V$. K can be considered as a subspace in $M \oplus M'$ via $i \oplus i'$. As V is central in M and M' , K is an ideal of $M \oplus M'$.

$\Delta : V \longrightarrow V \oplus V$ is the diagonal followed by the quotient map $V \oplus V \longrightarrow (V \oplus V)/K$ identifies V and $(V \oplus V)/K$, and $N \oplus_G N' = \{(n, n') \in N \oplus N' / \pi(n) = \pi(n')\}$

Remark.

- Let $T : V \oplus V \longrightarrow V$. Since T is surjective, We have

$$T(V \oplus V) = V$$

and by the isomorphism theorem we have:

$$\frac{V \oplus V}{K} \cong V$$

- From the set $N \oplus_G N' = \{(n, n') \in N \oplus N' / \pi(n) = \pi(n')\}$ defined in 4.1.3, we have that:

$$\pi : N \oplus_G N' \longrightarrow G$$

can be identified with $\frac{1}{2}(\pi + \pi') : N \oplus_G N' \longrightarrow G$ and $\frac{1}{2}(\pi + \pi')(n, n') = \frac{1}{2}[\pi(n) + \pi'(n)] = \pi(n)$

Notation: Let us denote by $crmod(G, V)$ the set of equivalence classes of Lie algebra crossed modules with respect to fixed kernel V and fixed cokernel G .

As we did in the case of extension abelian, we can consider the following exact short sequence :

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \quad (4.1.4)$$

where, the kernel of μ is V and the cokernel of μ is G

Let ρ, ρ' the sections of π . Recall that ρ is a section of π if the following diagram is commutative:

$$(4.1.4) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & G \\ \rho \downarrow & \nearrow \pi \circ \rho = id_G & \\ G & & \end{array}$$

We are going to define the action of G on M as follow:

$$(4.1.4) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta \circ \rho} & der(M) \\ \rho \downarrow & \nearrow \eta & \\ N & & \end{array}$$

such that :

$$\begin{aligned} \eta \circ \rho : G &\rightarrow der(M) \\ g &\mapsto \eta \circ \rho(g) : M \rightarrow M \\ m &\mapsto \eta \circ \rho(g).m = g.m \end{aligned}$$

So, for ρ, ρ' the sections of π , we have $\eta \circ \rho$ and $\eta \circ \rho'$ define as follow:

$$\begin{aligned} \eta \circ \rho : G &\rightarrow der(M) \\ g &\mapsto \eta \circ \rho(g) : M \rightarrow M \\ m &\mapsto \eta \circ \rho(g)(m) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \eta \circ \rho' : G &\rightarrow der(M) \\ g &\mapsto \eta \circ \rho'(g) : M \rightarrow M \\ m &\mapsto \eta \circ \rho'(g)(m) \end{aligned}$$

We can observe by the following proposition that $\eta \circ \rho$ is an action.

Proposition 4.1.1.

Let $\lambda \in G$ and $\mu : M \rightarrow N$ a crossed module with an action η . $\eta(\rho(\lambda))$ and $\eta(\rho'(\lambda))$ differ by the inner derivation $ad_{m'}$ for some $m' \in M$

Proof.

Let $\lambda \in G$.

As ρ and ρ' are the sections of π , we have:

$$\pi \circ \rho = id_G \text{ and } \pi \circ \rho' = id_G \text{ i.e } \pi(\rho) - \pi(\rho') = 0 \implies \pi(\rho - \rho') = 0. \text{ Then, } \rho - \rho' \in \ker \pi$$

Since our sequence is exact, we have $\ker \pi = \operatorname{Im} \mu$, so $(\rho - \rho') \in \ker \pi = \operatorname{Im} \mu$ i.e $\exists m' \in M$ such that

$$\rho - \rho' = \mu(m')$$

So we have for all $m \in M$:

$$\begin{aligned} \eta(\rho(\lambda))(m) - \eta(\rho'(\lambda))(m) &= \eta((\rho - \rho')(\lambda))(m) \\ &= \eta(\mu(m'))(m) = [m', m]. \text{(according to (ii-) of the definition 4.1.1)} \end{aligned}$$

so we conclude that the expression $\eta(\rho(\lambda))$ is well-defined up to inner derivation. \square

Indeed, let us consider the failure α associated to ρ in such a way that π will be a morphism of Lie algebras. Let us consider α by the follow:

$$\forall x, y \in G \quad \alpha(x, y) = [\rho(x), \rho(y)] - \rho([x, y])$$

Remark.

1- We have $\pi(\alpha(x, y)) = 0$.

Indeed, we have:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha(x, y)) &= \pi([\rho(x), \rho(y)] - \rho([x, y])) = \pi([\rho(x), \rho(y)]) - \pi(\rho([x, y])) = [\pi(\rho(x)), \pi(\rho(y))] - \\ &\pi(\rho([x, y])) = [x, y] - [x, y] = 0, \text{ since } \rho \text{ is a section of } \pi. \text{ This implies that } \alpha(x, y) \in \\ &\ker \pi = \operatorname{Im} \mu \text{ (since the sequence is exact). Then, there exists } \beta(x, y) \in M \text{ such that} \\ &\mu(\beta(x, y)) = \alpha(x, y). \end{aligned}$$

2- We have $\eta \circ \rho$ an action also up to inner derivations. Indeed, considering $\alpha(x, y) = [\rho(x), \rho(y)] - \rho([x, y])$, and by the previous remark i.e there exists $\beta(x, y) \in M$ such that $\mu(\beta(x, y)) = \alpha(x, y)$, we have: for some $m \in M$,

$$\begin{aligned} \eta([\rho(x), \rho(y)] - \rho([x, y]))(m) &= \eta(\alpha(x, y))(m) = \eta(\mu(\beta(x, y)))(m) = [\beta(x, y), m], \\ &\text{according to the second property of the definition 4.1.1.} \end{aligned}$$

so, in this sense, an outer action is an action up to inner derivations.

Lemma 4.1.1.

$(\operatorname{cmod}(G, V), \oplus)$ is a group

Proof.

Recall that $\operatorname{cmod}(G, V)$ is a set of equivalence classes of Lie algebra crossed modules with respect to fixed kernel V and fixed cokernel G .

1) Let us show that \oplus is associative i.e

Let $\mu_1 : M_1 \rightarrow N_1$, $\mu_2 : M_2 \rightarrow N_2$ and $\mu_3 : M_3 \rightarrow N_3$ tree crossed modules in $crmod(G, V)$ it means that we can respectively associated to each of them the following sequences:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\mu_1} N_1 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow V \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\mu_2} N_2 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow V \longrightarrow M_3 \xrightarrow{\mu_3} N_3 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Our goal here is to show that:

$$(\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3 = \mu_1 \oplus (\mu_2 \oplus \mu_3)$$

Now according to definition 4.1.3, we have $(\mu_1 \oplus \mu_2)$ which correspond to the following sequence:

$$0 \longrightarrow \frac{V \oplus V}{K} \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2}{K} \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} \frac{N_1 \oplus_G N_2}{K} \longrightarrow \frac{G \oplus G}{K} \longrightarrow 0$$

i.e since $\frac{V \oplus V}{K} \cong V$ and $\frac{G \oplus G}{K} \cong G$ according to the remark 4.1.1, we have:

$0 \longrightarrow V \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2}{K} \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} \frac{N_1 \oplus_G N_2}{K} \longrightarrow G \longrightarrow 0$, so we can easily get by the same way, the sequence associated to $(\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3$, which is:

$$0 \longrightarrow \frac{V \oplus V}{K} \longrightarrow \frac{\frac{M_1 \oplus M_2}{K} \oplus M_3}{K} \xrightarrow{(\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3} \frac{\frac{N_1 \oplus_G N_2}{K} \oplus_G N_3}{K} \longrightarrow \frac{G \oplus G}{K} \longrightarrow 0$$

i.e

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2 \oplus M_3}{K} \xrightarrow{(\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3} \frac{N_1 \oplus_G N_2 \oplus_G N_3}{K} \longrightarrow G \longrightarrow 0 \quad (4.1.5)$$

By the same process, we have also for $\mu_1 \oplus (\mu_2 \oplus \mu_3)$ the following sequence:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2 \oplus M_3}{K} \xrightarrow{\mu_1 \oplus (\mu_2 \oplus \mu_3)} \frac{N_1 \oplus_G N_2 \oplus_G N_3}{K} \longrightarrow G \longrightarrow 0 \quad (4.1.6)$$

So, according to 4.1.5 and 4.1.6 we conclude that :

$$(\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3 = \mu_1 \oplus (\mu_2 \oplus \mu_3)$$

which implies that, \oplus is associative.

2) Neutral element

Let $\mu : M \rightarrow N$ the crossed module in $crmod(G, V)$ i.e we have the following sequence:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

Our goal here is to find a crossed module e in $crmod(G, V)$ such that: $\mu \oplus e = e \oplus \mu = \mu$ or such that $\mu \oplus e = e \oplus \mu$ is equivalent to μ in the sens of equivalence of crossed module, seen in the definition 4.1.2. Since we are finding e , the neutral element of $crmod(G, V)$ which is the set of equivalence classes of crossed modules with respect to the fixed kernel V and the cokernel G , we can define e by the following sequence:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{id_V} V \xrightarrow{e} G \xrightarrow{id_G} G \longrightarrow 0$$

so since the sum of the both crossed module is given by

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{(id \oplus i) \circ \Delta} \frac{M \oplus V}{K} \xrightarrow{\mu \oplus e} N \oplus_G G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

we have to show that the following diagram is commutative

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{(id \oplus i) \circ \Delta} & \frac{M \oplus V}{K} & \xrightarrow{\mu \oplus e} & N \oplus_G G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_V & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i} & M & \longrightarrow & N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0. \end{array}$$

With

$$\phi : \frac{M \oplus V}{K} \longrightarrow M \text{ such that for all } (\bar{x}, \bar{y}) \in \frac{M \oplus V}{K}, \text{ we have}$$

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = x \in M$$

and

$$\psi : N \oplus_G G \longrightarrow N \text{ such that for all } (n, g) \in N \oplus_G G, \text{ we have}$$

$$\psi(n, g) = n \in N$$

These two maps are well-defined.

Let show that the previous diagram is commutative, we have:

- $\phi \circ [(i \oplus id_V) \circ \Delta](v) = i(v) \implies \phi \circ [(i \oplus id_V) \circ \Delta] = i$
- $\mu \circ \phi(\bar{m}, v) = \mu(m)$
- $\psi(\mu \circ e)(\bar{m}, v) = \psi[\mu(m) \oplus e] = \psi(\mu(m), e) = \mu(m) \implies \mu \circ \phi(\bar{m}, v) = \psi \circ (\mu \oplus e)(\bar{m}, v).$

Also,

$$\begin{aligned} \pi \circ \psi(n, g) &= \pi(n) \\ id \circ \pi(n, g) &= \pi(n) \end{aligned}$$

So, we conclude that the diagram is commutative, then $\mu \oplus e = e \oplus \mu$ is equivalent to μ . So the neutral element of $crmod(G, V)$ is $0 \longrightarrow V \longrightarrow V \longrightarrow G \longrightarrow G \longrightarrow 0$.

3) Inverse element

By the same way as we did for the neutral element, for a given crossed module $\mu : M \longrightarrow N$ define as follow:

$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$, his inverse is $0 \longrightarrow V \xrightarrow{-i} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$,

In fact, we have to show that the sum of the both crossed μ and his inverse is equivalent to the identity crossed module e , seen previously, in the sens of equivalence of crossed modules define in 4.1.2. So, we have to show that the following diagram is commutative:

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \frac{(V \oplus M)}{(e \oplus (-i(v)))} & \longrightarrow & N \oplus_G G \longrightarrow G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_V & & \downarrow proj & & \downarrow \pi \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{id_V} & V & \xrightarrow{e} & G \longrightarrow G \longrightarrow 0. \end{array}$$

We observe by the same way than the case of neutral crossed module, this diagram is also commutative. So, we conclude that each element of $crmod(G, V)$ has an inverse.

So, according to 1), 2) and 3) we conclude that $(crmod(G, V), \oplus)$ is a group.

□

4.1.2 Evaluation of $H^3(G, V)$

Actually, our goal in this chapter is to construct the isomorphism between the third group of cohomology and the set of equivalence of crossed module. So, the objection is to prove the following theorem.

Theorem 4.1.1.

There is an isomorphism of abelian groups

$$I : crmod(G, V) \cong H^3(G, V) \quad (4.1.7)$$

According to the remark 4.1.1, we have seen by the fact that our sequence 4.1.4 is exact, that there exists $\beta(x_1, x_2) \in M$ such that

$$\mu(\beta(x_1, x_2)) = \alpha(x_1, x_2) \quad (4.1.8)$$

Choosing a linear section σ on $im(\mu)$ i.e $\sigma \circ \mu = id$, we have from 4.1.8:

$$\sigma \circ \mu(\beta(x_1, x_2)) = \sigma \circ \alpha(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2)$$

$$\text{Since } \sigma \circ \mu = id \text{ i.e } \sigma \circ \mu(\beta(x_1, x_2)) = \beta(x_1, x_2)$$

So we have,

$$\beta(x_1, x_2) = \sigma(\alpha(x_1, x_2)) \quad (4.1.9)$$

showing that we can suppose β bilinear and skewsymmetric in x_1, x_2 .

In order to prove the theorem 4.1.1, let us give the following intermediate results.

Lemma 4.1.2.

Let d the formal expression of the Lie algebra cohomology boundary operator corresponding to cohomology of G with values in M , and $x_1, x_2, x_3 \in G$, we have:

$$\mu(d\beta(x_1, x_2, x_3)) = 0.$$

Proof.

By definition of d we have for x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} d\beta(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{cycl} \beta([x_1, x_2], x_3) - \sum_{cycl} \eta(\rho(x_1))\beta(x_2, x_3) \\ \mu(d\beta(x_1, x_2, x_3)) &= \mu\left(\sum_{cycl} \beta([x_1, x_2], x_3) - \sum_{cycl} \eta(\rho(x_1))\beta(x_2, x_3)\right) \\ &= \sum_{cycl} \mu(\beta([x_1, x_2], x_3)) - \sum_{cycl} [\rho(x_1), \mu(\beta(x_2, x_3))] \\ &= \sum_{cycl} \alpha([x_1, x_2], x_3) - \sum_{cycl} [\rho(x_1), \mu(\beta(x_2, x_3))] \\ &= \sum_{cycl} \alpha([x_1, x_2], x_3) - \sum_{cycl} [\rho(x_1), \alpha(x_2, x_3)] \\ &= \sum_{cycl} [\rho([x_1, x_2]), \rho(x_3)] - \rho([x_1, x_2], x_3) \\ &\quad - \sum_{cycl} [\rho(x_1), [\rho(x_2), \rho(x_3)]] + [\rho(x_1), \rho([x_2, x_3])] = 0. \end{aligned}$$

□

Remark.

The lemma 4.1.2 means that $d\beta(x_1, x_2, x_3) \in \ker(\mu) = \text{im}(i) = i(V)$, i.e. there exists $\gamma(x_1, x_2, x_3) \in V$ such that

$$d\beta(x_1, x_2, x_3) = i(\gamma(x_1, x_2, x_3))$$

4.2 Computation of third degree cohomology space

In this section, we are going to show that γ defined in the remark 4.1.2 is a 3-cocycle of G with values in V and show the theorem 4.1.1.

4.2.1 γ is a 3-cocycle

The goal is to show that $d\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, denoting by x_1, x_2, x_3, x_4 four elements of G and by d the Lie algebra coboundary operator of G with values in V . The expression for $d\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ is the sum of "action terms" and "bracket terms". So we have only to show that

$$i(d\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0.$$

We have:

$$i(d\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)) = di(\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)) = d \circ d\beta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Since $d \circ d$ is not automatically zero, because of the fact that $\eta \circ \rho$ is not an action of G on M in general. Let us display here only some terms of it, while the other terms vanish as usual. The terms we choose are all "action terms of the action terms" and some "action terms of the bracket terms".

$$\begin{aligned} i(d\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (-1)^{i+j} \eta(\rho([x_i, x_j])) \beta(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_4) \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 (-1)^i \eta(\rho(x_i)) \sum_{l=1}^3 (-1)^l \eta(\rho(z_l)) \beta(z_1, \dots, \hat{z}_l, \dots, z_3). \end{aligned}$$

Here, we denote by z_1, z_2, z_3 the three remaining x_r after having chosen x_i from the list. Now, the difference of acting by $\eta(\rho([x, y]))$ and acting by $\eta(\rho(x))\eta(\rho(y)) - \eta(\rho(y))\eta(\rho(x))$ is just the action by $\eta(\alpha(x, y))$. Calculating the differences of the actions by the bracket and the action of the single elements gives thus terms of the form

$$\eta(\alpha(x, y))\beta(u, v) = \eta(\mu(\beta(x, y)))\beta(u, v) = [\beta(x, y), \beta(u, v)],$$

Then,

$$\begin{aligned} &[\beta(x_1, x_2), \beta(x_3, x_4)] - [\beta(x_2, x_3), \beta(x_4, x_1)] + [\beta(x_3, x_4), \beta(x_1, x_2)] - [\beta(x_4, x_1), \beta(x_2, x_3)] + \\ &\quad [\beta(x_4, x_2), \beta(x_1, x_3)] - [\beta(x_1, x_3), \beta(x_2, x_4)] \end{aligned}$$

and vanishes.

4.2.2 The class of the cocycle γ in $C^3(G, V)$ does not depend on the choice of the section

- a- Let ρ and ρ' be two sections of π . Denote by $\alpha(x, y)$ resp. $\alpha'(x, y)$, $\beta(x, y)$ resp. $\beta'(x, y)$, $\gamma(x, y, z)$ resp. $\gamma'(x, y, z)$ the elements of N , M and V constructed above with respect to ρ and ρ' . Here $x, y, z \in G$. By construction, we have:

$$\rho'(x) = \rho(x) + \delta(x),$$

for some linear map $\delta : G \longrightarrow \ker(\pi) \subset N$.

But then α' may be written

$$\begin{aligned} \alpha'(x, y) &= [\rho'(x), \rho'(y)] - \rho'([x, y]) = [(\rho + \delta)(x), (\rho + \delta)(y)] - (\rho + \delta)([x, y]) = \\ &= \alpha(x, y) + [\rho(x), \delta(y)] + [\delta(x), \rho(y)] + [\delta(x), \delta(y)] - \delta([x, y]). \end{aligned}$$

Observe that the expression $[\rho(x), \delta(y)] + [\delta(x), \rho(y)] - \delta([x, y])$ is just the formal coboundary $d\delta(x, y)$, where $\delta : G \longrightarrow N$ is considered as a cochain with values in N although lifting elements, N is in general not a G -module via the adjoint action.

As $d\delta(x, y)$ lies in the kernel of π , there exists $\epsilon(x, y) \in M$ such that $\mu \circ \epsilon = d\delta$, and as before, we may take ϵ bilinear. In the same way, as $[\delta(x), \delta(y)]$ is in $\ker(\epsilon)$, there exists $\theta(x, y) \in M$ with $\mu(\theta(x, y)) = [\delta(x), \delta(y)]$. Therefore we get

$$\mu(\beta'(x, y)) = \mu(\beta(x, y)) + \mu(\epsilon(x, y)) + \mu(\theta(x, y)),$$

and hence there exists an element in $\ker(\mu) = \text{im}(i)$, denoted $i(\zeta)$, such that

$$\beta'(x, y) = \beta(x, y) + \epsilon(x, y) + \theta(x, y) + i(\zeta)(x, y).$$

When applying in the next step d to all terms, the ζ will give a coboundary, because $d(i(\zeta)) = i(d^V \zeta)$. Let us treat the term $\epsilon(x, y)$. Observe that using the linear section σ on $\text{im}(\mu)$, we have $\epsilon = \sigma d\delta$. Actually, we have

$$\begin{aligned} &\mu \sigma d\delta(x, y) - d\sigma \delta(x, y) \\ &= \mu \sigma (\rho(x) \cdot \delta(y) - \rho(y) \cdot \delta(x) + \delta([x, y])) \\ &= -\mu(\eta(\rho(x))(\sigma \delta(y)) + \eta(\rho(y))(\sigma \delta(x)) - \sigma \delta([x, y])) \\ &= 0, \end{aligned}$$

using property i — in the definition 4.1.1 of a crossed module. This means that the difference is in the kernel of μ , thus in the image of i , and replacing ϵ by $d\sigma \delta$ adds only another coboundary in the end. A similar reasoning applies to the term $\theta(x, y)$. In conclusion, we have shown that changing the section ρ results in changing the cocycle γ by a coboundary.

- b- Now suppose that we chose two different linear sections σ and σ' of μ on $im(\mu)$, leading to different lifts $\beta = \sigma\alpha$ and $\beta' = \sigma'\alpha$. We have then $\beta - \beta' \in ker(\mu) = im(i)$, and we have already seen that this leads to the corresponding γ and γ' differing by a coboundary.
- c- Two sections τ and τ' of i have to be the same; they are both inverses of the isomorphism i on its image.

So now, Let $\mu : M \longrightarrow N$ (with action η) and $\mu' : M' \longrightarrow N'$ (with action η') such that $ker(\mu) = ker(\mu') =: V$ and $coker(\mu) = coker(\mu') =: G$ be two elementary equivalent crossed modules. Then the corresponding cohomology classes $I([\mu]) = [\gamma]$ and $I([\mu']) = [\gamma']$ coincide in $H^3(G, V)$.

In fact, let us consider the couple (Φ, Ψ) the morphism rendering the two crossed modules elementary equivalent as we have seen in the definition 4.1.2.

Let γ (resp. γ') the cocycle associated to $\mu : M \longrightarrow N$ (resp. to $\mu' : M' \longrightarrow N'$) by choosing sections ρ, σ and τ (resp. ρ', σ' and τ'). Since ρ is a section of π , then, $\tilde{\rho}' := \Psi \circ \rho$ is a section of π' . Also, we have that α' and $\tilde{\alpha}' := \Psi \circ \alpha$ give the same cohomology class $[\gamma']$ represented by γ' .

So, let \tilde{d} the formal Lie algebra coboundary operator with values in M' and with the formal action $\eta' \circ \Psi \circ \rho$. We have to compute the following expression:

$$(\tilde{d}(\sigma' \circ \Psi \circ \alpha) - \tilde{d}(\Phi \circ \beta))(x, y, z)$$

for $x, y, z \in G$ where . Let us consider $\tilde{\beta}' := \sigma' \circ \Psi \circ \alpha$. We have $(\tilde{\beta}' - \Phi \circ \beta)(x, y) \in ker(\mu')$, thus we introduce $f(x, y) \in V$ such that $(\tilde{\beta}' - \Phi \circ \beta)(x, y) = i'f(x, y)$ for all $x, y \in G$. Since (Φ, Ψ) satisfies the commutativity of the diagram given in definition 4.1.2 we have:

$$\tilde{d}(\Phi \circ \beta)(x, y, z) = \Phi(d\beta(x, y, z)).$$

By the same way we have also

$$(\tilde{d}i'f)(x, y, z) = i'(df(x, y, z)).$$

We finally obtain:

$$(\gamma' - \gamma)(x, y, z) = df(x, y, z),$$

showing that the two elementary equivalent crossed modules have the same cohomology class.

So, according to the theorem 3.3.1, we conclude that I is an isomorphism of abelian extension which is the map I associating to an equivalence class of crossed modules with kernel V and cokernel G a cohomology class in $H^3(G, V)$.

5. Conclusion

In the end, throughout this work we went to review two great results on the computation of (co)homology, especially those of the second and third group of (co)homology on Lie algebras. For us, this project aimed to establish the bijection that exists between the equivalence class of the Abelian extensions and the second (co)homology group on a Lie algebra and the isomorphism between the crossed module equivalence class and the third group of (co)homology on a Lie algebra also. To this end, we began by recalling some preliminary notions about the homological algebra and the Lie algebra theory in order to provide insight into what would be developed later. In a continuity, recalling among other things what we can remember about the Abelian extensions we have, after a considerable development and computations around are able to establish the relation that exists between the equivalence class of the Abelian extensions and the second group from (co)homology through the theorem 3.3.1. Indeed, we mean by an abelian extension of Lie algebras, a short exact sequence of Lie algebras

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0,$$

where the Lie algebra A is abelian and $\ker \pi = A$, $\operatorname{coker} i = H$

In almost identical reasoning, we have established that there is an isomorphism between the equivalence class of the crossed modules and the third (co)homology group, as present in the theorem 4.1.1. Indeed as we have seen in the definition 4.1.1, a crossed module of Lie algebras is the data of a homomorphism of Lie algebras $\mu : M \longrightarrow N$ together with an action η of N on M by derivations, denoted $\eta : N \longrightarrow \operatorname{der}(M)$ or $m \longmapsto n.m$ for all $m \in M$ and all $n \in N$, such that:

- i- $\mu(n.m) = [n, \mu(m)]$ for all $n \in N$ and all $m \in M$,
- ii- $\mu(m).m' = [m, m']$ for all $m, m' \in m$.

the idea has been to bring together an element of the crossed-module equivalence class and to show that from this element one can construct a class of (co)homology and vice versa this through well-defined actions and a particular attention on the different operations or operators used.

At the end of this work, we retain that in view of these results, their applicability in pure algebra to establish evidence of multiple theorems, is very large. In other words, they have enormous importance, especially in homological algebra, because knowing how to determine certain (co)homology groups, especially the first three groups of (co)homology, makes it possible to evaluate the accuracy of the short or long sequences, which has great utility in algebra generally. We find satisfaction after this project because knowing that for the most part the computation of groups of (co)homology is not always direct, the difficulties lie at the level of determining to the whole or to the space which will be in bijection with these groups so that we can just consider the latter and its properties in order to deport them on groups of (co)homology that we seek and

handle them with ease. Thus, our next curiosity will be to look at how to get the other groups of (co)homology and if possible seek a generalization that would allow us to achieve very applicable results.

References

- B Agrebaoui and N Ben Fraj. On the cohomology of the lie superalgebra of contact vector fields on $s_1/1$. *Bulletin de la societe Royale des Sciences de Liege*, 2003.
- John C Baez and Alissa S Crans. Higher-dimensional algebra vi: Lie 2-algebras. *Theory Appl. Categ*, 12(15):492–528, 2004.
- Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras: chapters 7-9*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2008.
- Alberto Facchini, Evan Houston, and Luigi Salce. *Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups*. CRC Press, 2004.
- Rolf Farnsteiner and Helmut Strade. Lie-algebras with faithful completely reducible representations. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 51, pages 244–251. Springer, 1981.
- BL Feigin and DB Fuchs. *Cohomologies of Lie groups and Lie algebras*. Springer, 2000.
- Alice Fialowski and Friedrich Wagemann. Cohomology and deformations of the infinite-dimensional filiform lie algebra m_2 . *Journal of Algebra*, 319(12):5125–5143, 2008.
- Murray Gerstenhaber. A uniform cohomology theory for algebras. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(4):626, 1964.
- Murray Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras: li. *Annals of Mathematics*, pages 1–19, 1966.
- Peter J Hilton and Urs Stammach. *A course in homological algebra*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2012.
- G Hochschild. Lie algebra kernels and cohomology. *American Journal of Mathematics*, 76(3): 698–716, 1954.
- Christian Kassel and Jean-Louis Loday. Extensions centrales d’algebres de lie. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 32, pages 119–142, 1982.
- Karl-Hermann Neeb. Non-abelian extensions of topological lie algebras. *Communications in Algebra*®, 34(3):991–1041, 2006.
- AO Radul. Central expansion of lie algebra of differential operators on a circle and w algebras. *JETP Lett*, 50(8), 1989.
- Joseph J Rotman. *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008.
- Friedrich Wagemann. On lie algebra crossed modules. *Communications in Algebra*®, 34(5): 1699–1722, 2006.

Charles A Weibel. Cambridge studies in advanced mathematics, 1994a.

Charles A Weibel. An introduction to homological algebra cambridge univ, 1994b.