

伪形心多边形形心距离计算方法

朱 钰^{1,2,3}, 王 伟³, 章传银³

(1. 兰州交通大学 测绘与地理信息学院, 兰州 730070; 2. 甘肃省地理国情监测工程实验室, 兰州 730070;
3. 中国测绘科学研究院, 北京 100830)

摘 要: 针对多边形形心距离计算过程中存在的形心位于多边形外的问题, 该文提出伪形心的概念, 通过三角剖分的方式, 计算多边形边界到多边形形心距离最小的点, 将形心合理地平移到边界上, 进而计算多边形形心距离。针对伪形心存在于邻接边的特殊情况, 又提出将形心平移到多边形主骨架线上的改进算法。该文提出的算法简单, 易于实现, 适用性强, 进一步扩展了多边形形心距离计算的思路。

关键词: 伪形心; 三角剖分; 主骨架线; 形心距离

【中图分类号】 P208

【文献标志码】 A

【文章编号】 1009-2307(2018)02-0006-04

DOI: 10.16251/j.cnki.1009-2307.2018.02.002

A centroidal distance calculation method of polygons based on assumed centroid

Abstract: Aiming at the problem that centroid located out of the polygon in the calculating process of polygons distance, the concept of assumed centroid was put forward. With the way of subdivide triangle, the centroid was translated reasonably to a point which was not only on the boundary of polygon, but also a minimum distance point to centroid before calculating centroidal distance. In order to solve the problem of assumed centroid that exists in the adjacent edge, an improved algorithm which needed to transfer the centroid to main skeleton line of polygon was put forward. The proposed algorithm was applicable, simple and easy to be implemented, which further expanded the thought of polygon centroid distance calculation.

Keywords: assumed centroid; subdivide triangle; main skeleton line; centroidal distance

ZHU Yu^{1,2,3}, WANG Wei³, ZHANG Chuanyin³ (1. Faculty of Geomatics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China; 2. Gansu Provincial Engineering Laboratory for National Geographic State Monitoring, Lanzhou 730070, China; 3. Chinese Academy of Surveying & Mapping, Beijing 100830, China)

0 引言

多边形的形心是多边形最具表征力的假设点, 在计算机图形学、机械设计、统计学、地理信息系统等于几何图形计算有关的领域中, 许多问题都可以归结为求解简单多边形间的距离。二维平面中, 关于两个多边形之间距离的描述有许多形

式, 如最大距离、最小距离、形心距离等^[1]。形心距离指两个多边形形心之间的欧式距离, 它能最大程度地描述两个多边形之间的位置关系, 对地理学中面状要素之间的空间关系研究有十分重要的意义。

关于几何对象间距离的研究, 尤其是最大距离、最小距离、形心距离, 在计算几何领域一直以来都是一个基本问题。对于多边形间距离的研究, 大多学者多着眼于最小距离算法的研究, 如基于线性时间算法求解多边形间最小距离^[2]和顾及几何形状相似性的简单多边形最近距离算法等^[3]。对于简单多边形形心距离的计算, 因其算法固定, 几乎无学者做进一步研究。

然而, 多边形之间的形心距离计算, 虽然算法固定, 但计算过程中存在问题。一般地, 多边



作者简介: 朱钰(1992—), 男, 甘肃平凉人, 硕士研究生, 主要研究方向为地图学与地理信息系统、地图制图、大地测量等。
E-mail: 844349426@qq.com

收稿日期: 2016-03-12

基金项目: 国家自然科学基金项目

(41304009, 41374081)

形的形心存在于其内部,但在实际问题中,一些较为复杂的多边形,其形心存在于多边形外,如果简单的计算此类多边形之间的形心距离,得到的形心距离对进一步的研究没有任何价值,因此,多边形形心距离计算过程中形心存在于多边形外就成了制约计算的瓶颈元素。

1 基于伪形心的多边形形心距离计算

1.1 伪形心

针对多边形之间形心距离计算过程中存在的问题,一些学者提出了解决方案。文献[4]提出将多边形进行 Delaunay 三角剖分,定义 I、II、III 类三角形,求取多边形骨架线,通过限定阈值的方式将多边形(形心位于多边形外)的形心确定在 III 类三角形的重心处或多边形骨架线中点。文献[5]基于 AutoCAD 提出了二分无限逼近法求解多边形的形心。此外,还有学者用长对角线^[6]等方法解决这一问题。

本文异于上述方法,提出伪形心的概念,利用伪形心来解决这一问题。所谓伪形心,即将多边形(形心位于多边形外)的真实形心平移到与之距离最小的多边形边界上所得到的点,如图1。伪形心既具备形心对于多边形的表现力,又可以参与实际问题的解算。因此,本文对于多边形形心距离的计算是通过形心或者伪形心进行的。

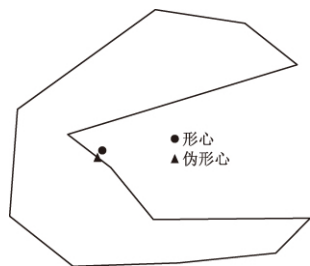


图1 多边形的伪形心

Fig. 1 Assumed Centroid of Polygon

1.2 计算过程

定义了伪形心,只是解决了距离计算过程的关键问题,整个过程中还存在一些细节性的问题,基于此,本文通过三步系统地完成多边形形心距离的计算:①分别计算两个多边形的形心;②判定形心是否在对应的多边形外,若在外,则计算其伪形心;③通过欧式距离计算形心(伪形心)间距离。

计算过程中,为方便描述,本文定义了“假高”与“假垂足”。“假高”为三角形底角为钝角

的侧边;“假垂足”为“假高”与底边的交点。

计算流程如图2所示。

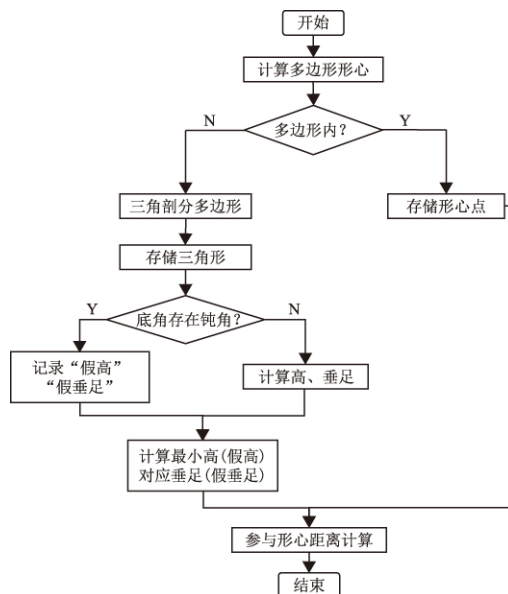


图2 多边形形心距离计算流程图

Fig. 2 Flow Chart of Polygon Centroid Distance Calculation

2 算法描述

2.1 计算两个多边形的形心

形心就是截面图形的几何中心,质心是针对实体而言的,而形心是针对抽象几何体而言的,对于密度均匀的实体,质心和形心重合。本文对于多边形形心的计算,采用经典的多边形形心计算方法,如式(1)所示。

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ C_y &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (2)$$

2.2 伪形心的求算

2.2.1 射线算法判定形心是否位于多边形外

要求解多边形的伪形心,首先需要判断多边形的形心是否位于多边形外部,若形心位于多边形外部则计算其伪形心,否则,该多边形无伪形心。

对于形心是否位于多边形外,本文采用射线算法^[7]。从目标点出发引一条射线,求算这条射线和多边形所有边的交点数目。如果有奇数个交点,则说明在内部;如果有偶数个交点,则说明在外部。

具体描述为:将测试点的 Y 坐标(屏幕坐标)与多边形的每一个点进行比较,得到一个测试点所在的行与多边形边的交点的列表。在图 3 中有 6 条边与测试点所在的行相交,而有 5 条边没有相交。如果测试点的两边点的个数都是奇数则该测试点位于多边形内,否则在多边形外。图 3 中测试点的左边有 3 个交点,右边有 3 个交点,它们都是奇数,所以点位于多边形内。

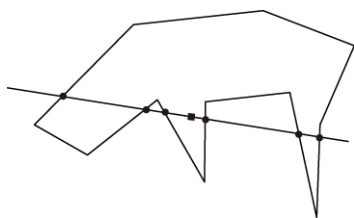


图 3 判定点是否位于多边形内

Fig 3 Whether the Determining Point inside the Polygon or Not

2.2.2 三角形剖分求算多边形的伪形心

本文通过三角剖分多边形求算伪形心,如图 4。具体分为 3 步。

1)从多边形初始点开始,按逆时针方向依此取相邻的两个点与形心构成三角形,设三角形顶点数为 n ,则将多边形剖分为 n 个三角形。

2)依此判断 n 个三角形底边是否存在钝角,若存在,则取以形心出发的两条边中得最短边(钝角所在侧边),记录该边(“假高”)以及最短边与底边的交点(记为“假垂足”);若不存在,则计算并记录该三角形以形心出发的高及其对应的垂足。

3)比较所有的高(包括“假高”),取最小高对应的垂足(包括“假垂足”)。该垂足点即为多边形的伪形心。

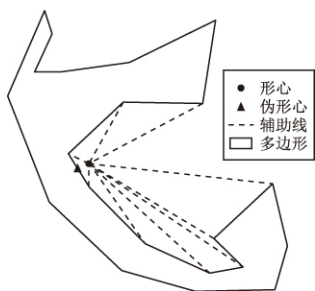


图 4 三角剖分多边形求伪形心

Fig 4 Acquiring Assumed Centroid by Triangle Subdivision

2.3 形心距离求算

欧式几何距离指在 n 维空间中两点之间的直线距离,或者向量的自然长度(即该点到原点的距离)。 n 维空间中两个点 $A = (a[1], a[2], \dots, a[n])$ 和 $B = (b[1], b[2], \dots, b[n])$ 之间的欧式

距离可以表示为

$$\rho(A, B) = (\sqrt{[\sum (a[i] - b[i])^2]}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3)$$

式中: ρ 两点之间的距离。在格网数据中,欧氏几何距离为格网单元中心到最近源对象的几何距离^[8]。

取 2.2 节中求得的形心(伪形心)坐标,利用欧式距离计算公式完成多边形形心距离的计算。

3 改进的伪形心多边形形心距离计算

尽管基于伪形心的多边形形心距离的计算较好地解决了形心位于多边形外的问题,但是该方法求解出的形心仅位于多边形的边界上,当遇到两个邻接多边形求解形心距离的情况,很难界定边界上的点是多边形的形心还是多边形内部边界上的点,如图 5 所示。这种情况多发于不同属性地理要素地图综合的过程中。设多边形 A 为地物 1,多边形 B 为地物 2,多边形 A、B 为邻接多边形且多边形 A 的形心位于多边形外。利用伪形心求解法求解出 A 多边形的伪形心恰好位于邻接边上,这样该形心既有地物 1 的属性也有地物 2 的属性,在地理综合面概括为点的过程中,形心的属性界定起来就十分困难,更不必说求解其间距离。

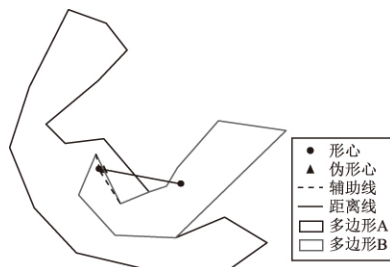


图 5 邻接多边形形心求解

Fig 5 Polygon Centroid Calculation of Contiguous Polygons

针对这种情况,本文提出改进的伪形心多边形形心距离算法。改进的形心距离算法以多边形的主骨架线为依托,计算主骨架线上与形心距离最小的点,将形心平移到该点上,以解决上述问题。

多边形的主骨架线是对多边形的主体形状的抽象描述,它反映了多边形的主延伸方向和主体形状特征^[9-10],在地理学中应用十分广泛^[4]。

对于多边形主骨架线的提取,本文采用文献[11]提出的以多边形的主延伸方向作为选取标准的提取算法,该算法在多边形 Delaunay 三角网的基础上对骨架线节点进行分类,并通过判定多边形的

主延伸方向确定主骨架线的两个端点, 然后运用回溯法顺序搜寻位于这两点间的其他主骨架线节点, 从而得到多边形主骨架线^[11]。

不同于文献[4], 本文计算出来的形心以真实的形心为标准(形心位于多边形外的情况), 根据地理学第一定律, 其更具备形心的特性, 并且, 本文算法简单, 更易于设计实现。

具体的求算过程与未改进的算法一致, 仅仅在于构建三角形时, 改进的算法用主骨架线点集与形心构建三角形。改进后的多边形形心距离如图 6 所示。

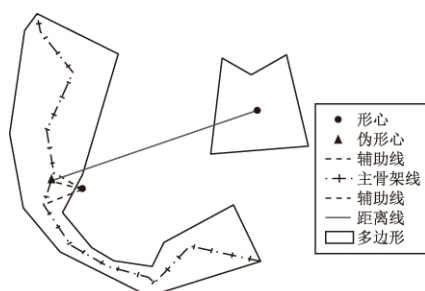


图 6 改进后的多边形形心距离

Fig 6 Improved Centroid Distance between Polygons

4 结束语

本文通过对简单多边形之间距离的分析, 提出了一种基于伪形心的多边形形心距离计算方法, 并针对具体问题对其进行了改进, 以适应具体问题的研究与应用。该方法具有以下优点: ①算法简单, 易于实现, 适用性强, 在地图综合中能很好地反映地理实体间的距离; ②提出了伪形心的概念, 为一些涉及多边形形心的算法如多边形 label 点的生成、地籍编号标注等提供一种新的思路; ③该算法在计算距离的同时, 记录了多边形的形心; ④该算法为求取多边形的内点提供了一种思路。

在求解伪形心过程中, 对于有 n 个顶点的多边形需要与形心构建 n 个多边形, 实验发现构建的许多三角形都是冗余的。存在伪形心的多边形为凹多边形, 且伪形心位于凹多边形的某一凹区域中, 若能先求取出伪形心所在的凹区域, 再进行三角形构建, 这将很大程度上提高算法的效率。一些学者对多边形的可视化以及凹多边形凸分解的算法做了研究, 如文献[12]、文献[13]等, 希望通过借鉴这些成果, 做更深入研究, 实现形心距离计算过程的改进, 提升算法效率。

参考文献

[1] 闫浩文, 王明孝, 王中辉. 计算几何: 空间数据处理方法

[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (YAN Haowen, WANG Mingxiao, WANG Zhonghui. Computation geometry: spatial data processing method [M]. Beijing: Science Press, 2012.)

- [2] 毛定山, 崔先国, 李行, 等. 求解简单多边形间最小距离的一个线性时间算法[J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(12): 2400-2408. (MAO Dingshan, CUI Xianguo, LI Xing, et al. An algorithm for computing the minimal distance between two polygons in linear time[J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13(12): 2400-2408.)
- [3] 杨春成, 张清浦, 田向春, 等. 顾及几何形状相似性的简单多边形最近距离计算方法[J]. 测绘学报, 2004, 33(4): 311-318. (YANG Chuncheng, ZHANG Qingpu, TIAN Xiangchun, et al. A closest distance computation method for simple polygons considering geometry shape similarity[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(4): 311-318.)
- [4] 陈涛, 艾廷华. 多边形骨架线与形心自动搜寻算法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(5): 443-446. (CHEN Tao, AI Tinghua. Automatic extraction of skeleton and center of area feature[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(5): 443-446.)
- [5] 田耀永, 任世霞. AutoCAD 多边形形心解算的新方法: 二分无限逼近法原理及应用[J]. 科技创新与生产力, 2012(1): 84-86. (TIAN Yaoyong, REN Shixia. New methods of AutoCAD centroid calculating of polygon: principle and application of half infinite approximation [J]. Technology Innovation and Productivity, 2012(1): 84-86.)
- [6] 姜永发, 张书亮, 兰小机, 等. 长对角线法实现 GIS 中矢量地图面状地物汉字注记的自动配置[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2005, 30(6): 544-548. (JIANG Yongfa, ZHANG Shuliang, LAN Xiaojie, et al. Automatic placement of GIS vector map annotation in area feature by long-diagonal[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2005, 30(6): 544-548.)
- [7] HEAM D D, BAKER M P. Computer graphics with OpenGL [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [8] 魏士春, 张红日, 苏奋振, 等. 基于 ArcGIS 的面状要素中轴线提取方法研究[J]. 地理空间信息, 2007, 5(2): 45-47. (WEI Shichun, ZHANG Hongri, SU Fenzhen, et al. Method for medial axis extraction based on ArcGIS [J]. Geospatial Information, 2007, 5(2): 45-47.)
- [9] CHOI H I, CHOI S W, MOON H P, et al. New algorithm for medial axis transform of plane domain[J]. Graphical Models and Image Processing, 1997, 59(6): 463-483.

(下转第 44 页)

- neutral atmosphere models; development and Performance[C]//Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation. [S. l.]: [s. n.], 2006:564-573.
- [6] SAASTAMOINEN J. Atmospheric correction for the troposphere and stratosphere in radio ranging satellites [J]. American Geophysical Union, 2013, 15 (6): 247-251.
- [7] BÖHM J, MÖLLER G, SCHINDELEGGER M, et al. Development of an improved empirical model for slant delays in the troposphere(GPT2w)[J]. GPS Solutions, 2015, 19(3):1-9.
- [8] 赵静畅, 宋淑丽, 陈钦明, 等. 基于垂直剖面函数式的全球对流层天顶延迟模型的建立[J]. 地球物理学报, 2014, 57(10):3140-3153. (ZHAO Jingyang, SONG Shuli, CHEN Qinming, et al. Establishment of a new global model for zenith tropospheric delay based on functional expression for its vertical profile[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2014, 57(10):3140-3153.)
- [9] ZHANG H, YUAN Y, LI W, et al. Assessment of three tropospheric delay models(IGGtrop, EGNOS and UNB3m)based on precise point positioning in the Chinese region[J]. Sensors, 2016, 16(1):122.
- [10] CHEN Q, SONG S, HEISE S, et al. Assessment of ZTD derived from ECMWF/NCEP data with GPS ZTD over China [J]. GPS Solutions, 2011, 15(4): 415-425.
- [11] 陈猛, 陈俊平, 胡丛玮. 对流层模型评估及其在 GNSS 精密单点定位中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2016, 36(3):229-234. (CHEN Meng, CHEN Junping, HU Congwei. Performance evaluation of troposphere models and application in GNSS precise point positioning[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2016, 36(3):229-234.)
- [12] KAZMIERSKI K, SANTOS M, BOSY J. Tropospheric delay modelling for the EGNOS augmentation system [J]. Survey Review, 2017, 49(357):399-407.
- [13] 王君刚, 陈俊平, 王解先, 等. GNSS 对流层延迟映射模型分析 [J]. 天文学进展, 2014, 32(3):383-394. (WANG Jungang, CHEN Junping, WANG Jiexian, et al. Analysis of tropospheric propagation delay mapping function models in GNSS[J]. Progress in Astronomy, 2014, 32(3):383-394.)
- [14] PACE B, PACIONE R, SCARRETTA C, et al. Computation of zenith total delay correction fields using ground-based GNSS[C]//VIII Hotine-marussi Symposium on Mathematical Geodesy. Switzerland: Springer Nature, 2015:131-137.
- [15] 姚宜斌, 张豹, 严凤, 等. 两种精化的对流层延迟改正模型[J]. 地球物理学报, 2015, 58(5):1492-1501. (Yao Yibin, ZHANG Bao, YAN Feng, et al. Two new sophisticated models for tropospheric delay corrections [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(5):1492-1501.)
- [16] TAKEICHI N, SAKAI T, FUKUSHIMA S, et al. Tropospheric delay correction of GNSS signals for satellite-based augmentation system[J]. Japan Society of Aeronautical Space Sciences, 2007, 55(645):490-496.
- [17] YOUNES S A M. Improved dry tropospheric propagation delay mapping function for GPS measurements in Egypt[J]. Journal of Spatial Science, 2014, 59(2):181-190.

(责任编辑:路素军)

(上接第 9 页)

- [10] SHAKED D, BERUCKSTEIN A M. The curve axis [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1996, 63(2):367-369.
- [11] 王中辉, 闫浩文. 多边形主骨架线提取算法的设计与实现[J]. 地理与地理信息科学, 2011, 1(1):42-48. (WANG Zhonghui, YAN Haowen. Design and implementation of an algorithm for extraction the main skeleton lines of polygons[J]. Geography and Geo-Information Science, 2011, 1(1):42-48.)
- [12] 汤立东. 计算几何中 LR 可视化问题研究[D]. 大连:大连海事大学, 2010. (TANG Lidong. The research of LR visibility polygon in computational geometry[D]. Dalian: Dalian Maritime University, 2010.)
- [13] 周雅洁, 刘英, 张晶伟. 基于局部可见点进行的凹多边形凸分解算法[J]. 武汉大学学报(工学版), 2004, 37(2):85-87. (ZHOU Yajie, LIU Ying, ZHANG Jingwei. A polygon convex decomposition algorithm based on partial visible point[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2004, 37(2):85-87.)

(责任编辑:程锦)