5.2 Clase 06: Problemas físicos

Queremos resolver ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\nabla^2 u = -4\pi\rho, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pi \nabla^2 u. \tag{4}$$

Este tipo de ecuaciones puede abordarse desde su definición formal (como ecuaciones diferenciales parciales), pero también es posible resolverlas numéricamente mediante **expansiones en series de Taylor**. Esto puede hacerse tanto en una como en dos dimensiones espaciales.

En el caso unidimensional, la expansión en serie de Taylor alrededor de un punto x_0 se escribe como:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n u}{dx^n}(x - x_0)^n. \tag{5}$$

Si conservamos términos hasta segundo orden, podemos aproximar la función en sus puntos vecinos:
u(x + $\Delta x) \approx u(x) + \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(\Delta x)^2$,
$u(x - \Delta x) \approx u(x) - \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(\Delta x)^2$.
Al sumar ambas expresiones se elimina el término lineal y obtenemos:

$$u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) = 2u(x) + \frac{d^2u}{dx^2}(\Delta x)^2. \tag{6}$$

Despejando la segunda derivada, tenemos la fórmula de diferencias finitas centradas:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{(\Delta x)^2} = -4\pi\rho(x). \tag{7}$$

En dos dimensiones, el operador laplaciano se escribe como:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{8}$$

Y su discretización (si se usa una malla uniforme con $\Delta x = \Delta y$) es:

$$\frac{u(x + \Delta x, y) + u(x - \Delta x, y) - 2u(x, y)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x, y + \Delta y) + u(x, y - \Delta y) - 2u(x, y)}{(\Delta y)^2} = -4\pi\rho(x, y). \tag{9}$$

Lo que se traduce a notación discreta como:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 4\pi\rho_{i,j}(\Delta x)^2. \tag{10}$$

Esta ecuación tiene forma matricial $A\vec{u} = \vec{b}$ y se puede resolver numéricamente con métodos iterativos.

5.2.1 Ecuación del calor (difusión térmica)

Ahora consideramos la **ecuación de difusión de calor** en una dimensión:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{11}$$

donde:

- $u(x, t) = T(x, t)$: temperatura,
- K: conductividad térmica,

- c: capacidad calorífica,
- ρ: densidad del material.

Para resolver esta ecuación numéricamente, usamos la misma aproximación para la derivada espacial:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{T(x+\Delta x)+T(x-\Delta x)-2T(x)}{(\Delta x)^2}. \tag{12}$$

Y para la derivada temporal (usando diferencias finitas hacia adelante):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}. \tag{13}$$

Combinando ambas, obtenemos el esquema explícito de evolución temporal:

$$\frac{T(x+\Delta x)+T(x-\Delta x)-2T(x)}{(\Delta x)^2} = \frac{c\rho}{K}\frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}. \tag{14}$$

Despejando $T(x, t+\Delta t)$:

$$T(x,t+\Delta t) = \frac{K\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}[T(x+\Delta x)+T(x-\Delta x)-2T(x)]+T(x,t). \tag{15}$$

En forma discreta, usando $T_i^j = T(x_i, t_j)$, se tiene:

$$T_i^{j+1} = \left(\frac{K\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\right)(T_{i+1}^j + T_{i-1}^j - 2T_i^j) + T_i^j. \tag{16}$$

Este método se basa en una actualización explícita, donde para calcular T_i^{j+1} (temperatura en el siguiente tiempo), se utilizan solo tres puntos del tiempo anterior:

$$T_i^{j+1} \approx f(T_{i-1}^j, T_i^j, T_{i+1}^j). \tag{17}$$

Por tanto, debemos proporcionar condiciones iniciales (perfil de temperatura en $t = 0$) y condiciones de frontera (temperatura fija o flujo en los extremos), e iterar la expresión anterior para obtener la evolución temporal del sistema.