

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

En este examen estudiaremos la propagación de ondas electromagnéticas empleando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD).

En el vacío, y considerando una onda electromagnética linealmente polarizada que se propaga en la dirección z , las ecuaciones de Maxwell se reducen a un par de ecuaciones acopladas que describen la evolución temporal del campo eléctrico E_x y del campo magnético H_y :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z}. \quad (2)$$

donde: E_x es el campo eléctrico polarizado en x ; H_y es el campo magnético polarizado en y ; y ϵ_0 , μ_0 representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, respectivamente.

La solución numérica de estas ecuaciones puede obtenerse discretizando uniformemente el espacio y el tiempo mediante diferencias centradas. Así, las derivadas se aproximan como:

$$\frac{\partial E(z, t)}{\partial t} \simeq \frac{E(z, t + \Delta t/2) - E(z, t - \Delta t/2)}{\Delta t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E(z, t)}{\partial z} \simeq \frac{E(z + \Delta z/2, t) - E(z - \Delta z/2, t)}{\Delta z}. \quad (4)$$

Para su implementación computacional conviene usar la siguiente notación discreta, tanto para el campo eléctrico como para el magnético:

$$E_x(z, t) \longrightarrow E_x(k \Delta z, n \Delta t) \longrightarrow E_x^{k,n},$$

donde k y n son enteros que indican la discretización en la dirección espacial z y temporal t , respectivamente.

Sin embargo, estas ecuaciones discretizadas directamente presentan problemas de estabilidad y errores de fase. Para solucionarlo, se emplea una malla escalonada propuesta por Yee, en la cual los campos se intercalan en espacio y tiempo de la siguiente forma:

- E_x se define en posiciones enteras k y tiempos semi-enteros $n + 1/2$.
- H_y se define en posiciones semi-enteras $k + 1/2$ y tiempos enteros n .

Este escalonamiento reduce los errores de fase y acopla naturalmente las derivadas centradas en espacio y tiempo. Así, las ecuaciones discretas para la evolución de los campos se escriben como:

$$\frac{E_x^{k,n+1/2} - E_x^{k,n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{H_y^{k+1/2,n} - H_y^{k-1/2,n}}{\epsilon_0 \Delta z}, \quad (5)$$

$$\frac{H_y^{k+1/2,n+1} - H_y^{k+1/2,n}}{\Delta t} = -\frac{E_x^{k+1,n+1/2} - E_x^{k,n+1/2}}{\mu_0 \Delta z}. \quad (6)$$

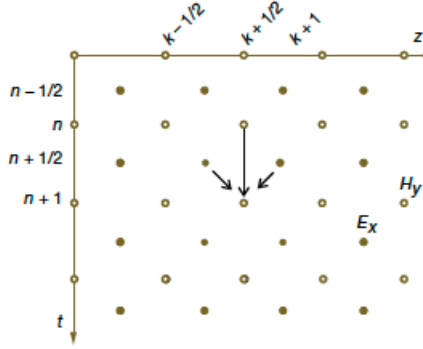
Es decir, en el método FDTD los campos eléctricos y magnéticos se calculan de forma intercalada en el tiempo: E se evalúa en pasos semi-enteros y H en pasos enteros. La evolución de uno depende de la variación espacial del otro, por lo que ambos algoritmos deben ejecutarse de manera simultánea, como si existieran dos mallas temporales entrelazadas.

Despejando cada variable, se obtiene finalmente:

$$E_x^{k,n+\frac{1}{2}} = E_x^{k,n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left(H_y^{k+\frac{1}{2},n} - H_y^{k-\frac{1}{2},n} \right), \quad (7)$$

$$H_y^{k+\frac{1}{2},n+1} = H_y^{k+\frac{1}{2},n} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} \left(E_x^{k+1,n+\frac{1}{2}} - E_x^{k,n+\frac{1}{2}} \right). \quad (8)$$

Un ejemplo de la malla de discretización se muestra en la siguiente figura:



Se puede entender mejor el algoritmo si se duplican los índices y se hace referencia a tiempos pares e impares:

- k par, impar

$$E_x^{k,n} = E_x^{k,n-2} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left(H_y^{k+1,n-1} - H_y^{k-1,n-1} \right), \quad (9)$$

- k impar, par

$$H_y^{k,n} = H_y^{k,n-2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} \left(E_x^{k+1,n-1} - E_x^{k-1,n-1} \right), \quad (10)$$

Esto deja en claro que E se determina para índices espaciales pares y tiempos impares, mientras que H se determina para índices espaciales impares y tiempos pares. El algoritmo se simplifica, y su análisis de estabilidad se hace más manejable, al renormalizar los campos eléctricos de modo que tengan las mismas dimensiones que los campos magnéticos:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E. \quad (11)$$

Con esta redefinición, tenemos que:

$$\tilde{E}_{k,n+1/2}^x = \tilde{E}_{k,n-1/2}^x + \beta \left(H_{k-1/2,n}^y - H_{k+1/2,n}^y \right), \quad (12)$$

$$H_{k+1/2,n+1}^y = H_{k+1/2,n}^y + \beta \left(\tilde{E}_{k,n+1/2}^x - \tilde{E}_{k+1,n+1/2}^x \right), \quad (13)$$

$$E_x^{k,n} = E_x^{k,n-2} + \beta (H_y^{k-1,n-1} - H_y^{k+1,n-1}),$$

$$H_y^{k,n} = H_y^{k,n-2} + \beta (E_x^{k-1,n-1} - E_x^{k+1,n-1}),$$

donde los tiempos n avanzan de forma explícita (pares e impares).

donde

$$\beta = \frac{c \Delta t}{\Delta z}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (14)$$

Aquí, c es la velocidad de la luz en el vacío y β es la razón entre la velocidad de la luz y la velocidad de la malla $\Delta z / \Delta t$. Los pasos espacial Δz y temporal Δt deben elegirse de manera que garanticen la estabilidad del algoritmo.

Las escalas de espacio y tiempo están determinadas por la longitud de onda y la frecuencia de la onda en propagación, respectivamente. Como requisito mínimo, se desea que al menos 10 puntos de la malla cubran una longitud de onda:

$$\Delta z \leq \frac{\lambda}{10}. \quad (15)$$

El paso temporal se determina entonces mediante la condición de estabilidad de Courant:

$$\beta = \frac{c \Delta t}{\Delta z} \leq \frac{1}{2}. \quad (16)$$

1 Problemas de Examen

1.1 Simulación de propagación de onda sinusoidal con FDTD

Implemente el algoritmo FDTD en una red unidimensional de z con 200 nodos para simular una onda electromagnética con condiciones iniciales:

$$E_x(z, t = 0) = 0.1 \sin\left(\frac{2\pi z}{100}\right), \quad H_y(z, t = 0) = 0.1 \sin\left(\frac{2\pi z}{100}\right), \quad (17)$$

para $0 \leq z \leq 200$. Simule la evolución temporal de los campos E_x y H_y durante un número suficiente de pasos de tiempo y compare los resultados obtenidos con las condiciones iniciales. Emplen python para ver los campos. Explique cómo la condición de estabilidad de Courant afecta la elección de los pasos Δz y Δt .

El algoritmo avanza en el tiempo tanto como el usuario lo desee. La forma discreta de las ecuaciones de Maxwell utilizadas viene dada por :

$$E_x[k][1] = E_x[k][0] + \beta (H_y[k-1][0] - H_y[k+1][0]), \quad (18)$$

$$H_y[k][1] = H_y[k][0] + \beta (E_x[k-1][0] - E_x[k+1][0]), \quad (19)$$

donde $1 \leq k \leq 200$, y β es una constante. El segundo índice toma los valores 0 y 1, correspondiendo 0 al tiempo *viejo* y 1 al tiempo *nuevo*. Al final de cada iteración, los valores *nuevos* se copian en los *viejos* y se procede al siguiente paso temporal.

Con este algoritmo, los extremos espaciales ($k = 0$ y $k = x_{\max} - 1$) quedarían indefinidos. Para resolverlo, se imponen **condiciones de frontera periódicas**:

$$E_x[0][1] = E_x[0][0] + \beta (H_y[x_{\max} - 2][0] - H_y[1][0]), \quad (20)$$

$$E_x[x_{\max} - 1][1] = E_x[x_{\max} - 1][0] + \beta (H_y[x_{\max} - 2][0] - H_y[1][0]), \quad (21)$$

$$H_y[0][1] = H_y[0][0] + \beta (E_x[x_{\max} - 2][0] - E_x[1][0]), \quad (22)$$

$$H_y[x_{\max} - 1][1] = H_y[x_{\max} - 1][0] + \beta (E_x[x_{\max} - 2][0] - E_x[1][0]). \quad (23)$$

1.2 Estudio de condiciones de frontera y estabilidad numérica

(a) Imponga condiciones de frontera tales que los campos se anulen en los bordes del dominio ($E = H = 0$ en $z = 0$ y $z = 200$). Compare los resultados obtenidos con los de la simulación sin condiciones explícitas de frontera, analizando lo que ocurre antes y después de que los pulsos alcancen las paredes.

(b) Analice la estabilidad de la simulación para distintos valores de Δz y Δt . Verifique experimentalmente la condición de Courant y discuta qué ocurre cuando se viola esta condición.

Requisitos de entrega y Organización del código

1. Estructura del repositorio (GitHub obligatorio)

El examen debe entregarse a través del Github con la siguiente estructura :

```
include/
  fdtd.hpp
src/
  fdtd.h
Makefile
main.cpp
python/
  sim_fdtd.py
  AnalisisRespuestas.ipynb
docs/
  README.md
```

2 Referencia bibliográfica:

Rubin H. Landau, Manuel J. Páez y Cristian C. Bordeianu. *Computational Physics: Problem Solving with Python*, 3^a edición. Wiley-VCH, 2015.

Texto traducido y adaptado del capítulo 22 — “E&M Waves: Finite-Difference Time Domain (FDTD)” (páginas aprox. 525–)