第10章　双口网络

● 重点

1. 双口网络的参数和方程

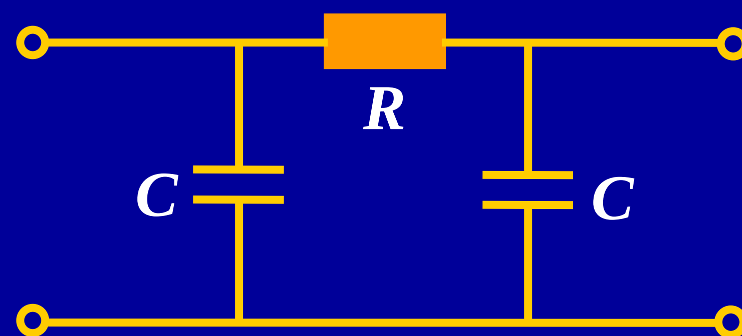
2. 双口网络的连接

3. 回转器

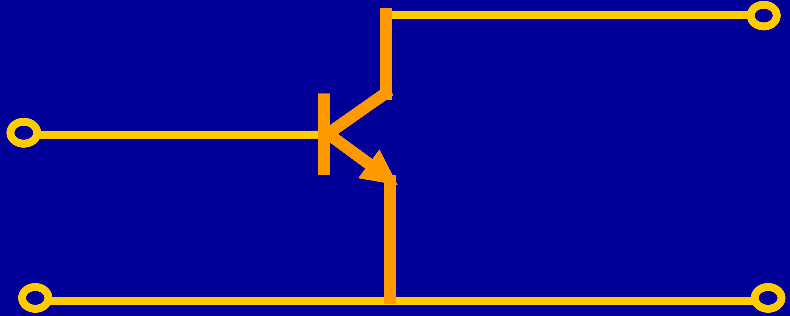
10.1　双口网络概述

在工程实际中，研究信号及能量的传输和信号变换时，经常碰到如下形式的电路。

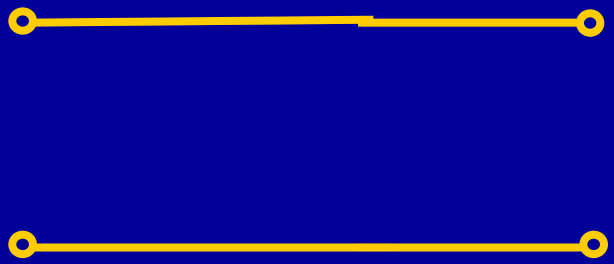
放大器



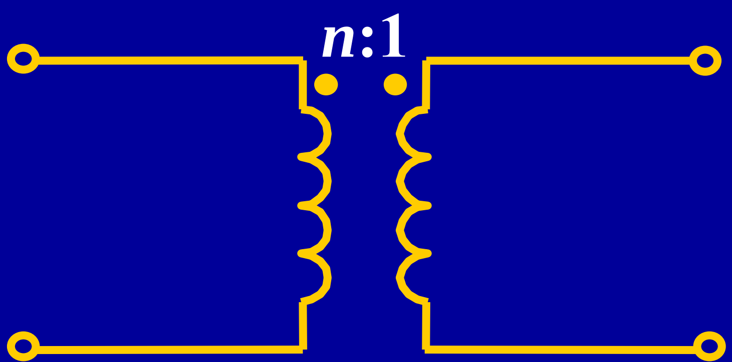
滤波器



三极管

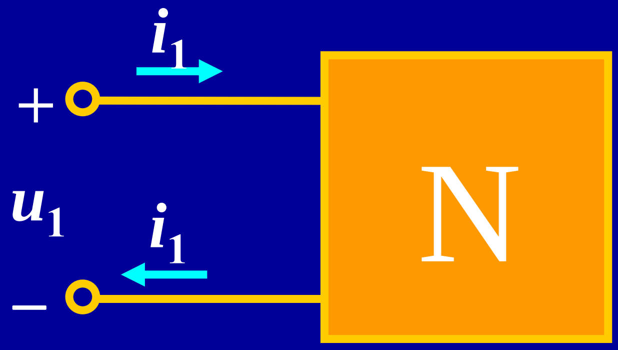


传输线



变压器

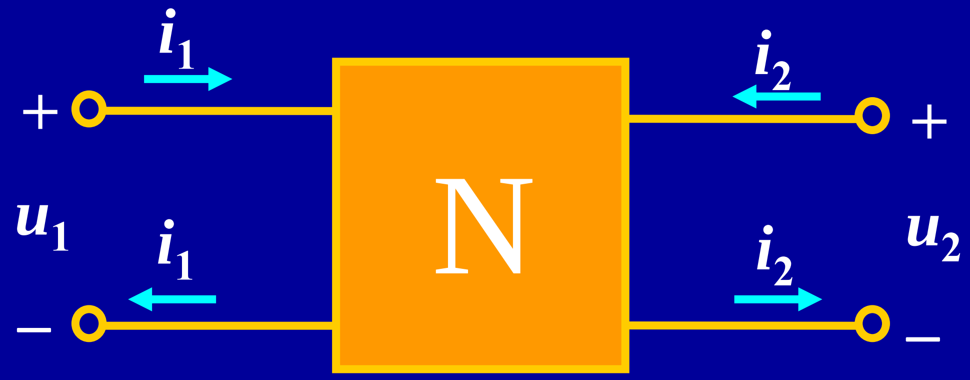
1. 端口 (port)



端口由一对端钮构成，且满足如下端口条件：从一个端钮流入的电流等于从另一个端钮流出的电流。

2. 二端口（two-port)

当一个电路与外部电路通过两个端口连接时称此电路为双口网络。



3. 研究双口网络的意义

（1）双口网络应用很广，其分析方法易推广应用于n端口网络;

（2）大网络可以分割成许多子网络（双口）进行分析;

（3）仅研究端口特性时，可以用双口网络的电路模型进行研究。

4. 分析方法

（1）分析前提：讨论初始条件为零的无源双口网络;

（2）找出两个端口的电压、电流关系的独立网络方程，这些方程通过一些参数来表示。

10.2 双口网络的参数和方程

约定

1. 讨论范围

线性 *R*、*L*、*C*、*M*与线性受控源

不含独立源

2. 参考方向如图

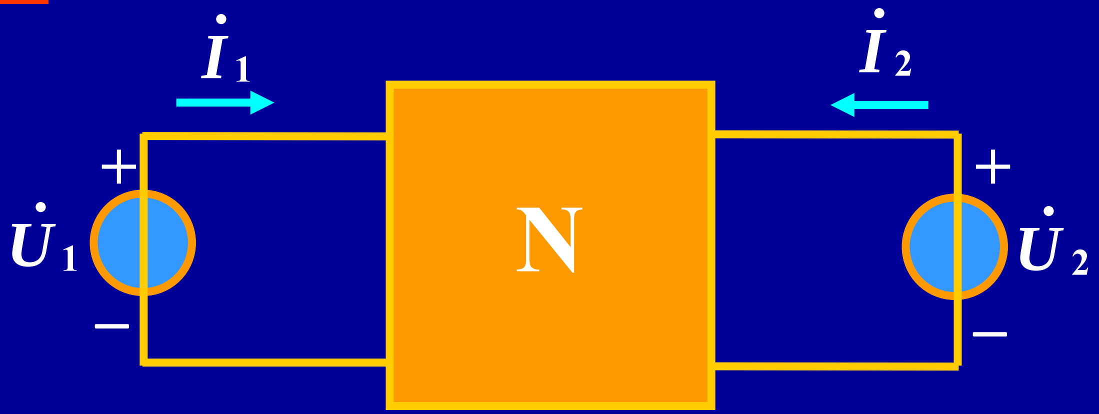
端口物理量4个 → $i_1 \quad i_2 \quad u_1 \quad u_2$

端口电压电流有六种不同的方程来表示，即可用六套参数描述双口网络。

$$\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 \\ i_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_2 \\ i_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 \\ i_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} i_1 \\ u_2 \end{matrix}$$

1. Y 参数和方程

（1）Y参数方程



采用相量形式(正弦稳态)。将两个端口各施加一电压源，则端口电流可视为这些电压源的叠加作用产生。

即：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Y 参数方程

写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \qquad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

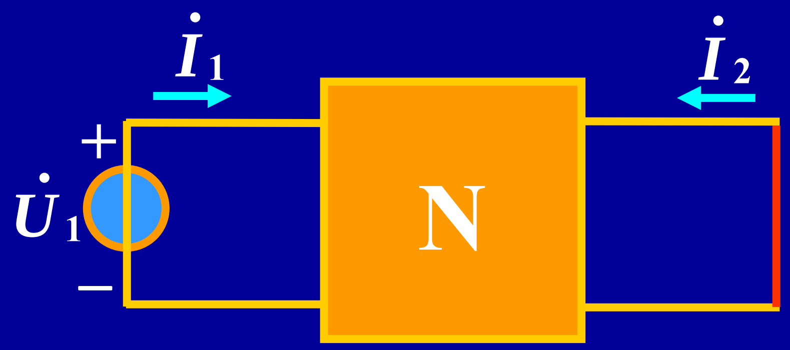
Y 参数矩阵.

Y参数值由内部参数及连接关系决定。

（2） *Y*参数的物理意义及计算和测定

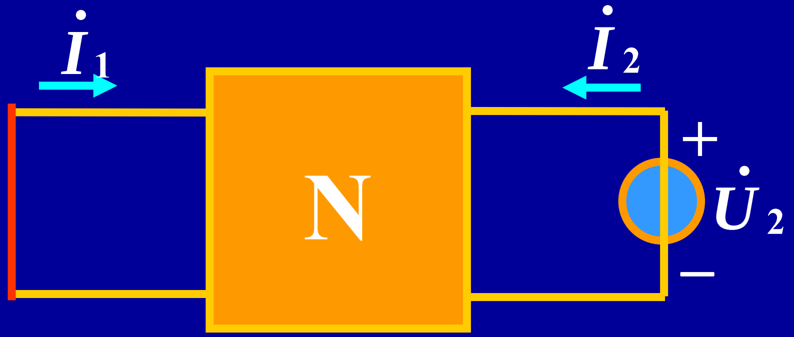
$$Y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad \text{自导纳}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad \text{转移导纳}$$



$$Y_{12}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$ 转移导纳

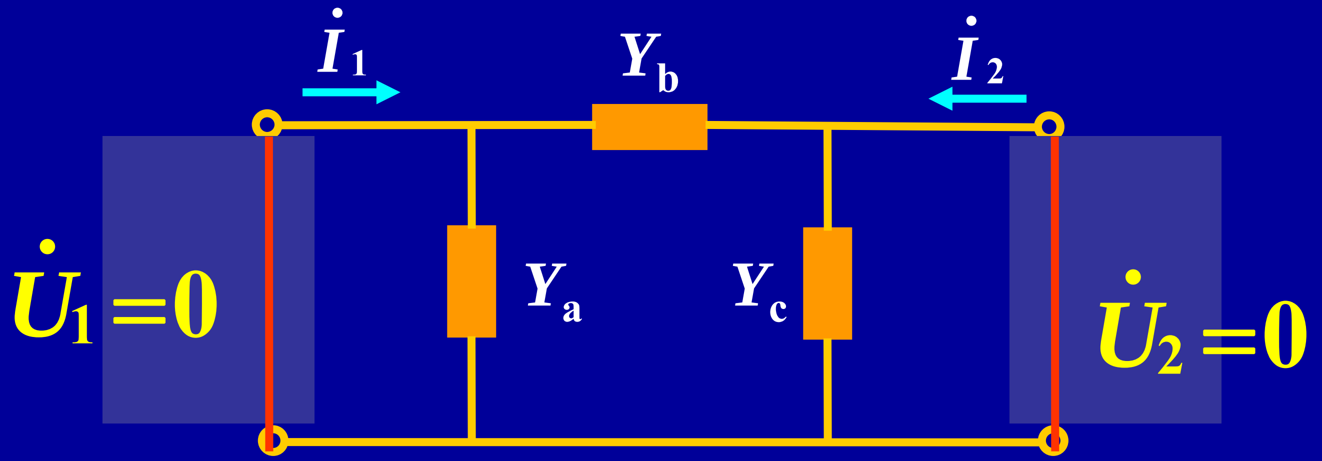
$$Y_{22}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$ 自导纳



Y → 短路导纳参数

例1 求Y参数。

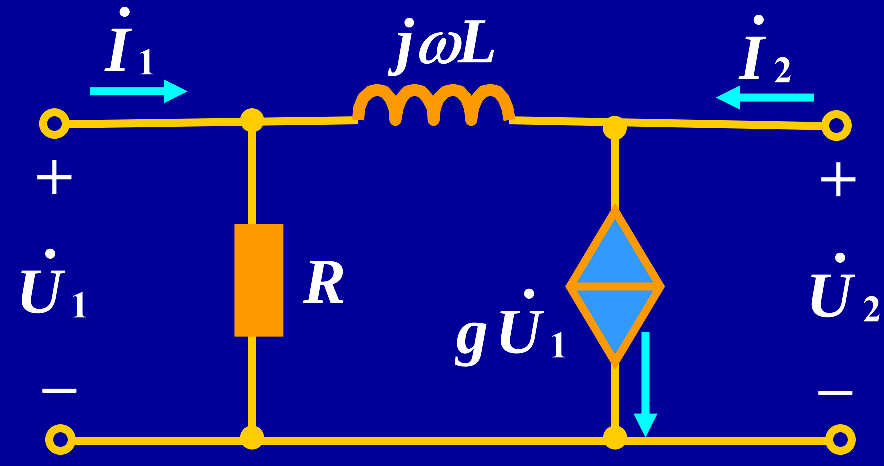
解



$$Y_{11}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=Y_a+Y_b \qquad Y_{12}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}=-Y_b$$

$$Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=-Y_b \qquad Y_{22}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=Y_b+Y_c$$

例2 求Y参数。



解 直接列方程求解

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R}+\frac{\dot{U}_1-\dot{U}_2}{j\omega L}=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}\right)\dot{U}_1-\frac{1}{j\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2=g\dot{U}_1+\frac{\dot{U}_2-\dot{U}_1}{j\omega L}=\left(g-\frac{1}{j\omega L}\right)\dot{U}_1+\frac{1}{j\omega L}\dot{U}_2$$

$$[Y]=\begin{bmatrix}\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L}\\ g-\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L}\end{bmatrix}$$

$$g=0\rightarrow$$

$$Y_{12}=Y_{21}=-\frac{1}{j\omega L}$$

（3） 互易二端口 (满足互易定理)

$$Y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0} \qquad Y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

当 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$时， $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$

$$\longrightarrow \quad \boxed{Y_{12} = Y_{21}}$$

上例中有 $Y_{12} = Y_{21} = -Y_b$

互易二端口四个参数中只有三个是独立的。

（4） 对称二端口

电路结构左右对称的一般为对称二端口。

对称二端口　　除 $\mathbf{Y}_{12}=\mathbf{Y}_{21}$外，还满足$\mathbf{Y}_{11}=\mathbf{Y}_{22}$，

上例中，$Y_a=Y_c=Y$ 时，$Y_{11}=Y_{22}=Y+Y_b$

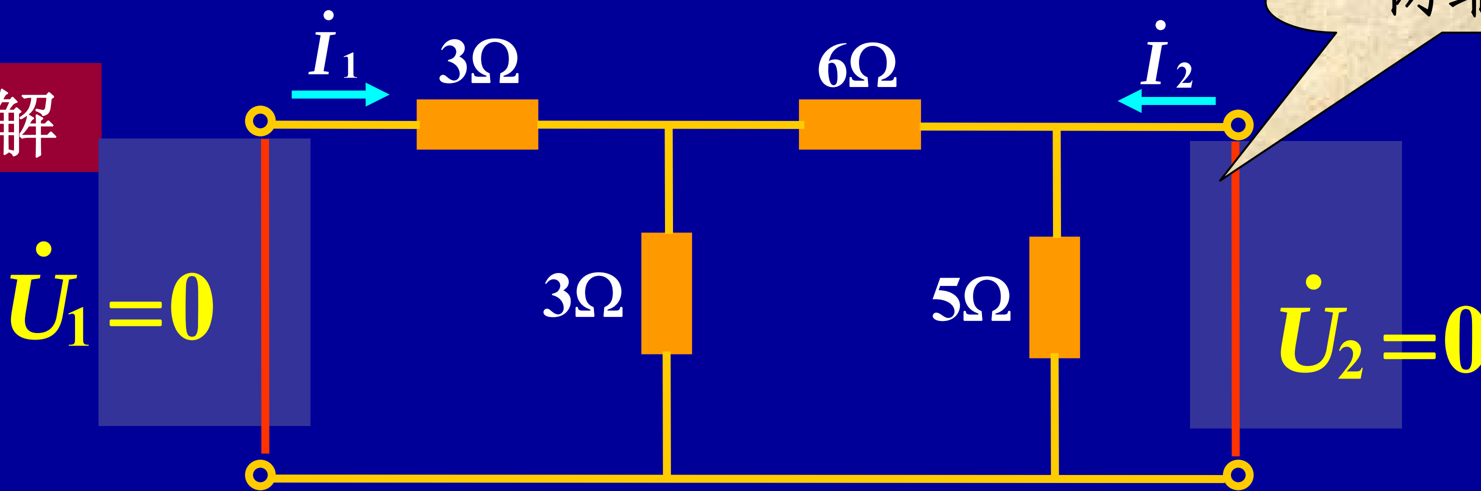
对称二端口只有两个参数是独立的。

对称二端口是指两个端口电气特性上对称。结构不对称的二端口，其电气特性可能是对称的，这样的二端口也是对称二端口。

例　求Y参数。

为互易对称两端口

解

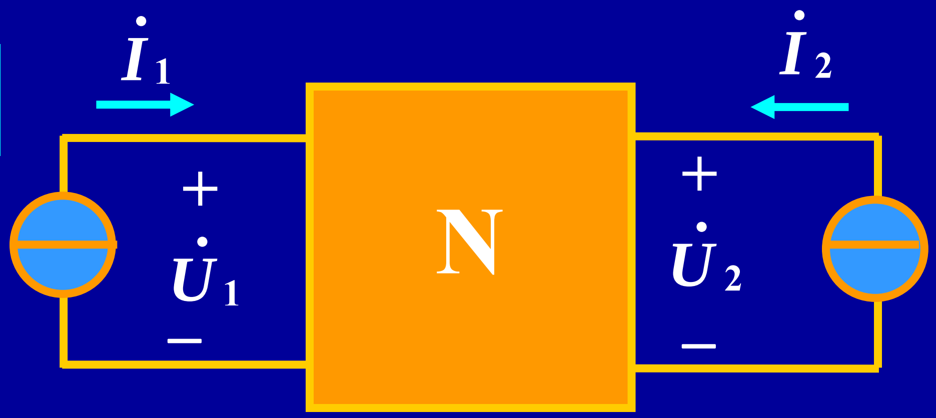


$$Y_{11}=\left.\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\right|_{\dot U_2=0}=\frac{1}{3\,//\,6+3}=0.2S \quad = \quad Y_{22}=\left.\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\right|_{\dot U_1=0}=0.2S$$

$$Y_{21}=\left.\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\right|_{\dot U_2=0}=-0.0667S \quad = \quad Y_{12}=\left.\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\right|_{\dot U_1=0}=-0.0667S$$

2. Z 参数和方程

（1）Z 参数方程



将两个端口各施加一电流源，则端口电压可视为这些电流源的叠加作用产生。

即：
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Z 参数方程

也可由Y参数方程 $\begin{cases}\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2\end{cases}$ 解出 $\dot{U}_1, \dot{U}_2$.

即：

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = \dfrac{Y_{22}}{\Delta}\dot{I}_1 + \dfrac{-Y_{12}}{\Delta}\dot{I}_2 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dfrac{-Y_{21}}{\Delta}\dot{I}_1 + \dfrac{Y_{11}}{\Delta}\dot{I}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2\end{cases}$$

得到Z参数方程。其中 $\Delta = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$

其矩阵形式为 $\begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ \dot{U}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2\end{bmatrix} = Z\begin{bmatrix}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$

$$[Z]=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

Z 参数矩阵

$$[Z]=[Y]^{-1}$$

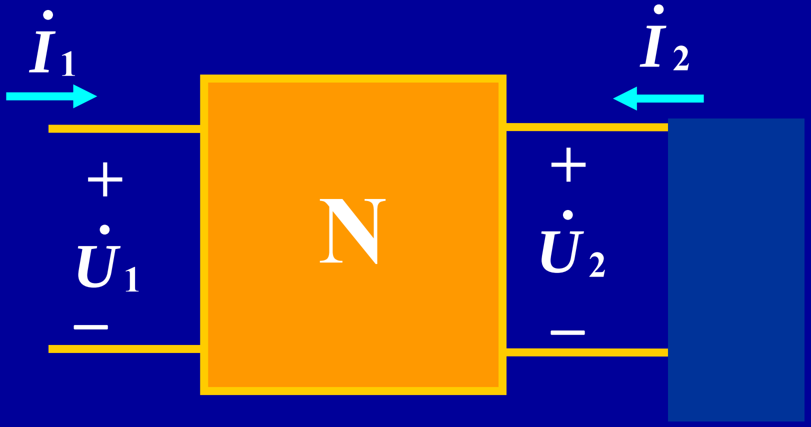
（2） Z 参数的物理意义及计算和测定

$$Z_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 入端阻抗

$$Z_{21}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 转移阻抗

$$Z_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 转移阻抗

$$Z_{22}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 入端阻抗



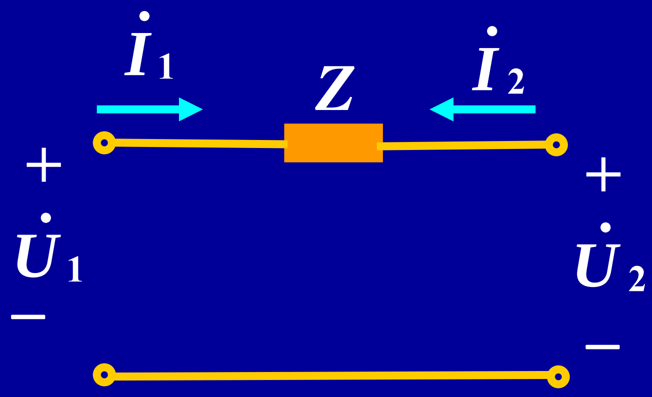
Z参数又称开路阻抗参数

（3） 互易性和对称性

互易双口网络满足: $\quad Z_{12} = Z_{21}$

对称双口网络满足: $\quad Z_{11} = Z_{22}$

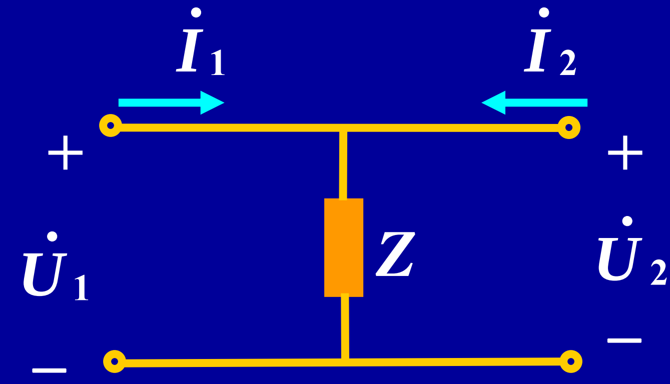
注 并非所有的双口网络均有**Z,Y** 参数。



$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{Z}$$

$$\Rightarrow \quad [Y] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z} & -\dfrac{1}{Z} \\ -\dfrac{1}{Z} & \dfrac{1}{Z} \end{bmatrix}$$

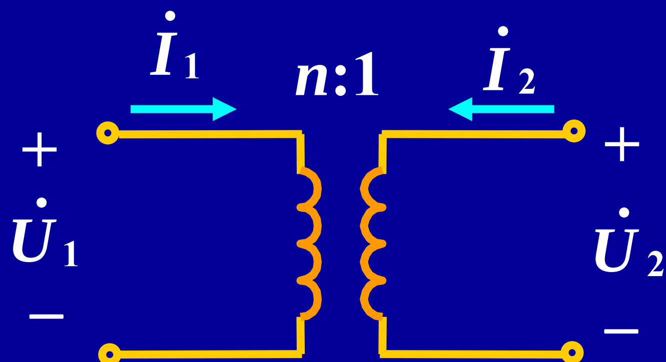
$$[Z] = [Y]^{-1}$$ 不存在



$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = Z(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\longrightarrow \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}$$

$$[Y] = [Z]^{-1}$$ 不存在

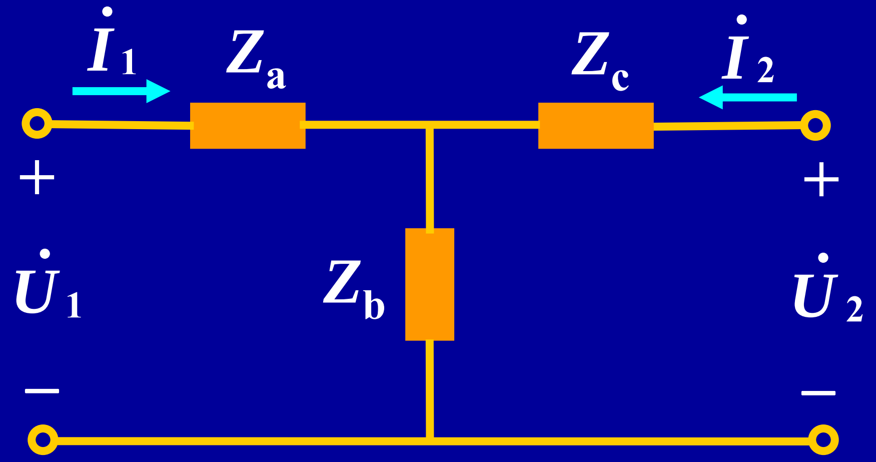


$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / n$$

$[Y]$ $[Z]$ 均不存在

例1 求Z参数



解法1

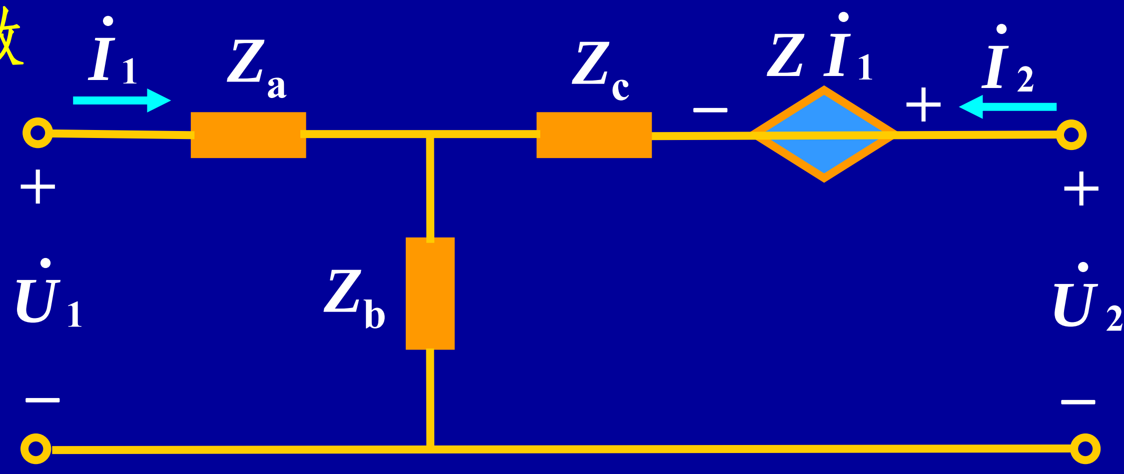
$$Z_{11}=\left.\frac{\dot U_1}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2=0}=Z_a+Z_b \qquad Z_{12}=\left.\frac{\dot U_1}{\dot I_2}\right|_{\dot I_1=0}=Z_b$$

$$Z_{21}=\left.\frac{\dot U_2}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2=0}=Z_b \qquad Z_{22}=\left.\frac{\dot U_2}{\dot I_2}\right|_{\dot I_1=0}=Z_b+Z_c$$

解法2 列KVL方程:

$$\dot U_1=Z_a\dot I_1+Z_b(\dot I_1+\dot I_2)=(Z_a+Z_b)\dot I_1+Z_b\dot I_2$$
$$\dot U_2=Z_c\dot I_2+Z_b(\dot I_1+\dot I_2)=Z_b\dot I_1+(Z_b+Z_c)\dot I_2$$

例2 求Z参数



解

列KVL方程:

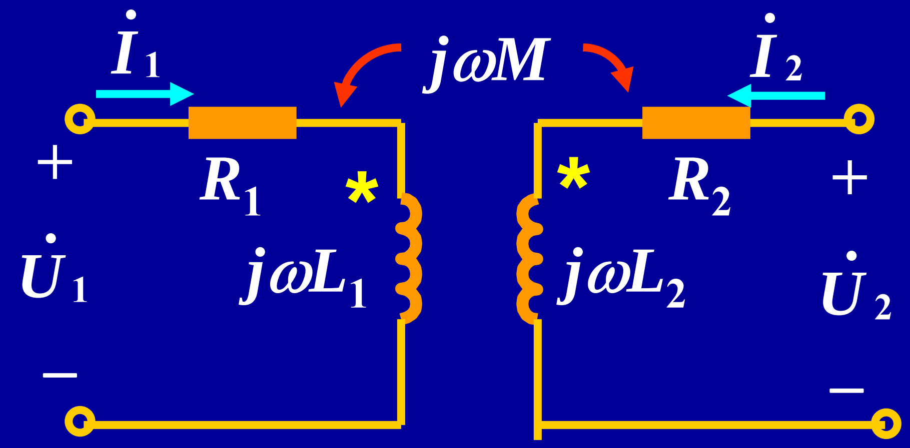
$$\dot{U}_1 = Z_a\dot{I}_1 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_a + Z_b)\dot{I}_1 + Z_b\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_c\dot{I}_2 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z\dot{I}_1$$

$$= (Z_b + Z)\dot{I}_1 + (Z_b + Z_c)\dot{I}_2$$

$$\longrightarrow \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b + Z & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

例2 求Z、Y参数



解

$$\dot U_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot I_1 + j\omega M \dot I_2$$

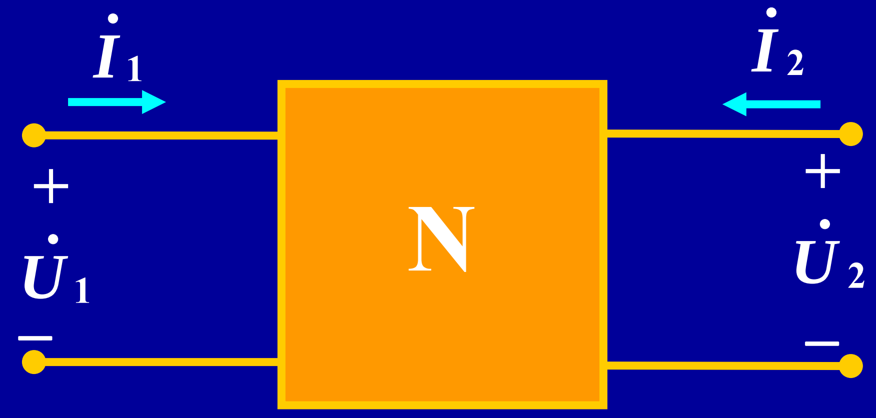
$$\dot U_2 = j\omega M \dot I_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot I_2$$

$$\Rightarrow\quad [Z]=\begin{bmatrix} R_1+j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2+j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

$$[Y]=[Z]^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix} R_1+j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2+j\omega L_2 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} R_2+j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_1+j\omega L_1 \end{bmatrix}$$

3. T 参数和方程

（1）T 参数和方程



定义：
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

注意符号

T 参数矩阵

T 参数也称为传输参数

（2） T 参数的物理意义及计算和测定

$$A = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 转移电压比

开路参数

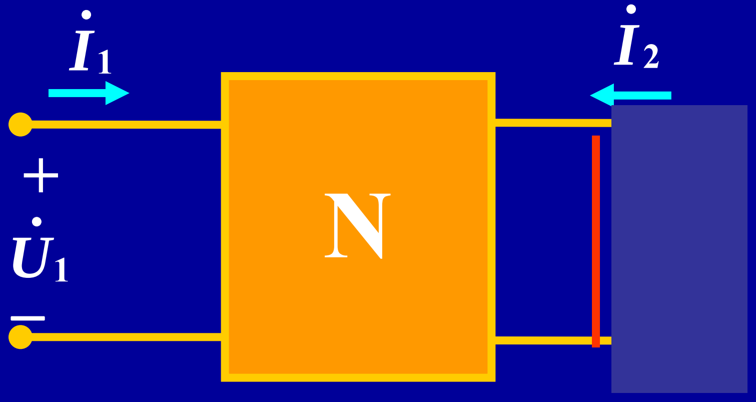
$$C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 转移导纳

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$B = \left.\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 转移阻抗

短路参数

$$D = \left.\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 转移电流比



（3） 互易性和对称性

Y 参数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 & (1) \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得:

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2 \quad (3)$$

将 (3) 代入 (1) 得:

$$\dot{I}_1 = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}\right)\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2$$

其中

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \qquad B = \frac{-1}{Y_{21}}$$

$$C = \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} \qquad D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

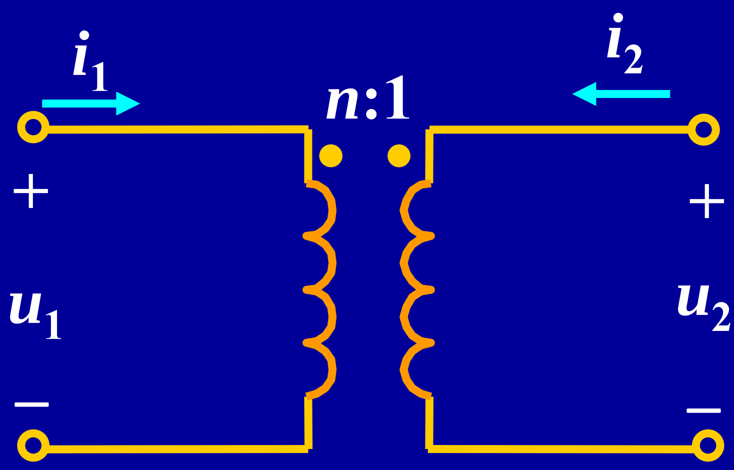
$$A=-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad B=\frac{-1}{Y_{21}} \quad C=\frac{Y_{12}Y_{21}-Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} \quad D=-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

互易双口网络: $Y_{12}=Y_{21}$ $\longrightarrow$ $AD-BC=1$

对称双口网络: $Y_{11}=Y_{22}$ $\longrightarrow$ $A=D$

例1

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

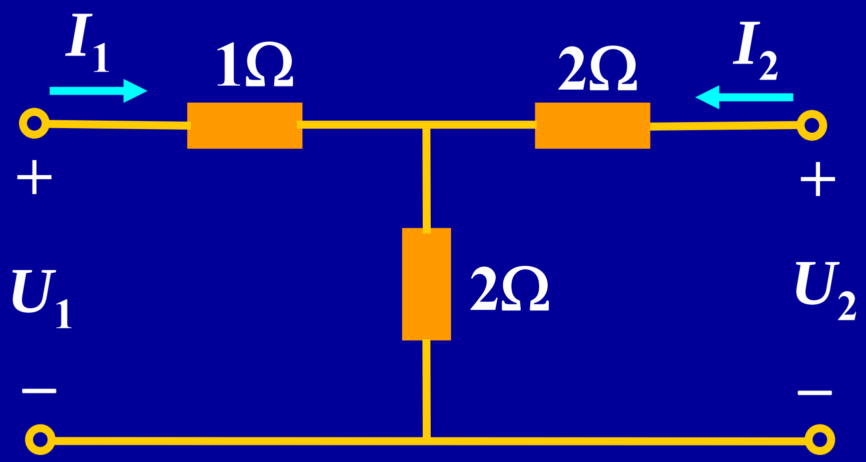


即

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \longrightarrow [T] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}$$

例2



$$A = \frac{U_1}{U_2}\bigg|_{I_2=0} = 1.5 \qquad C = \frac{I_1}{U_2}\bigg|_{I_2=0} = 0.5\,S$$

$$B = \frac{U_1}{-I_2}\bigg|_{U_2=0} = 4\Omega \qquad D = \frac{I_1}{-I_2}\bigg|_{U_2=0} = 2$$

4. *H* 参数和方程

H 参数也称为混合参数，常用于晶体管等效电路。

(1) *H* 参数和方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

（2） *H* 参数的物理意义计算与测定

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$H_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 输入阻抗

$$H_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 电流转移比

短路参数

$$H_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 电压转移比

$$H_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 入端阻抗

开路参数

（3） 互易性和对称性

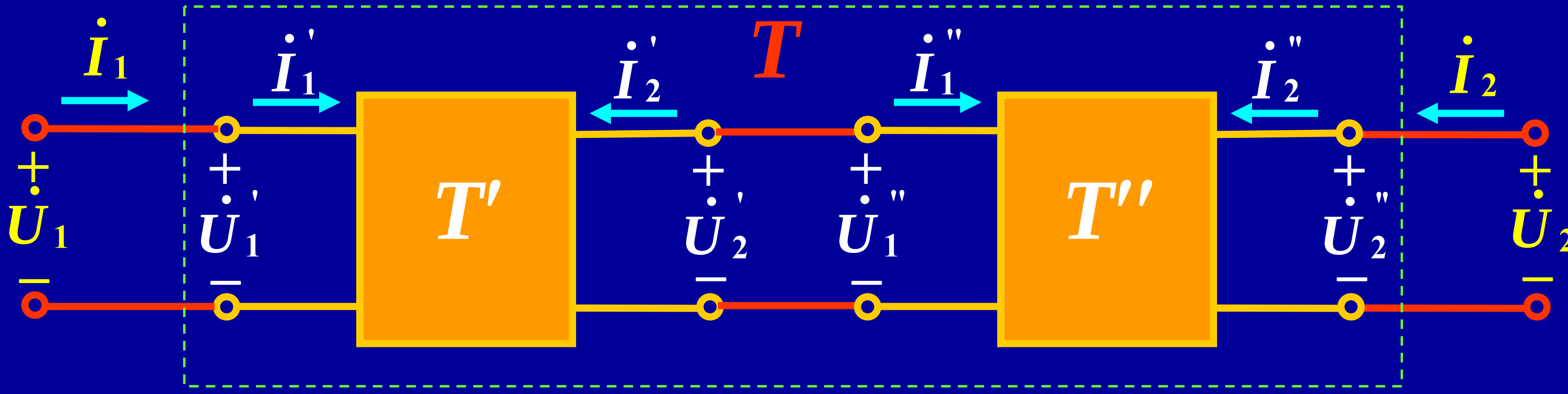
互易双口网络： $H_{12} = -H_{21}$

对称双口网络： $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$

10.4 双口网络的连接

一个复杂双口网络可以看作是由若干简单的双口 按某种方式联接而成，这将使电路分析得到简化;

1. 级联(链联)



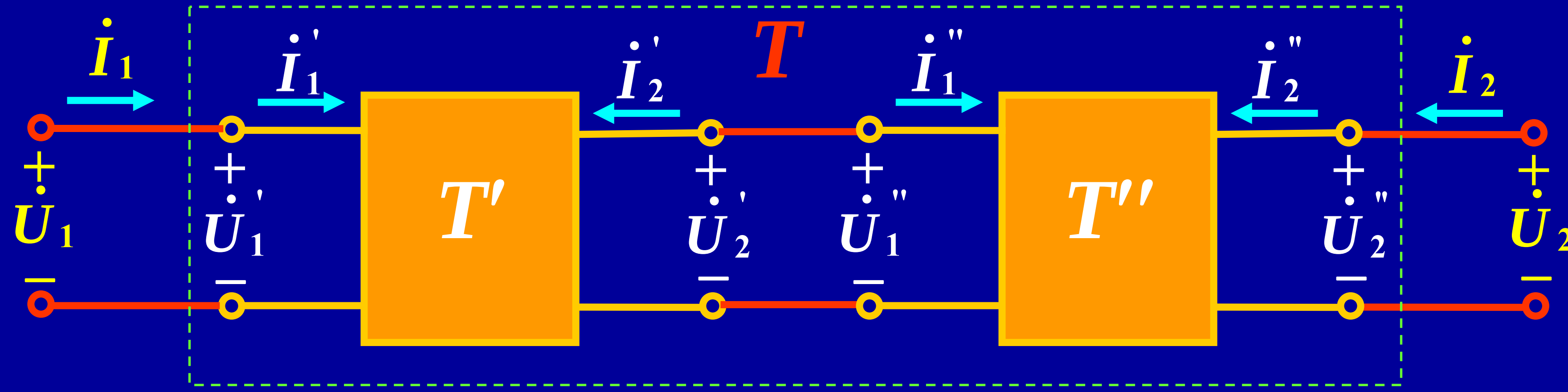
设 $[T'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ $\quad [T''] = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2'' \\ -\dot{I}_2'' \end{bmatrix}$

级联后 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_1' \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2'' \\ -\dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$



则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'A''+B'C'' & A'B''+B'D'' \\ C'A''+D'C'' & C'B''+D'D'' \end{bmatrix}$$

即： $$[T]=[T'][T'']$$

结论 级联后所得复合双口网络T参数矩阵等于级联的双口网络T参数矩阵相乘。上述结论可推广到n个双口网络级联的关系。

注意

(1) 级联时T参数是矩阵相乘的关系，不是对应元素相乘。

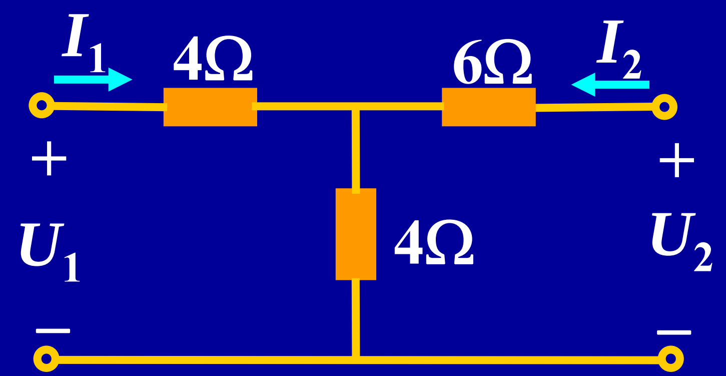
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

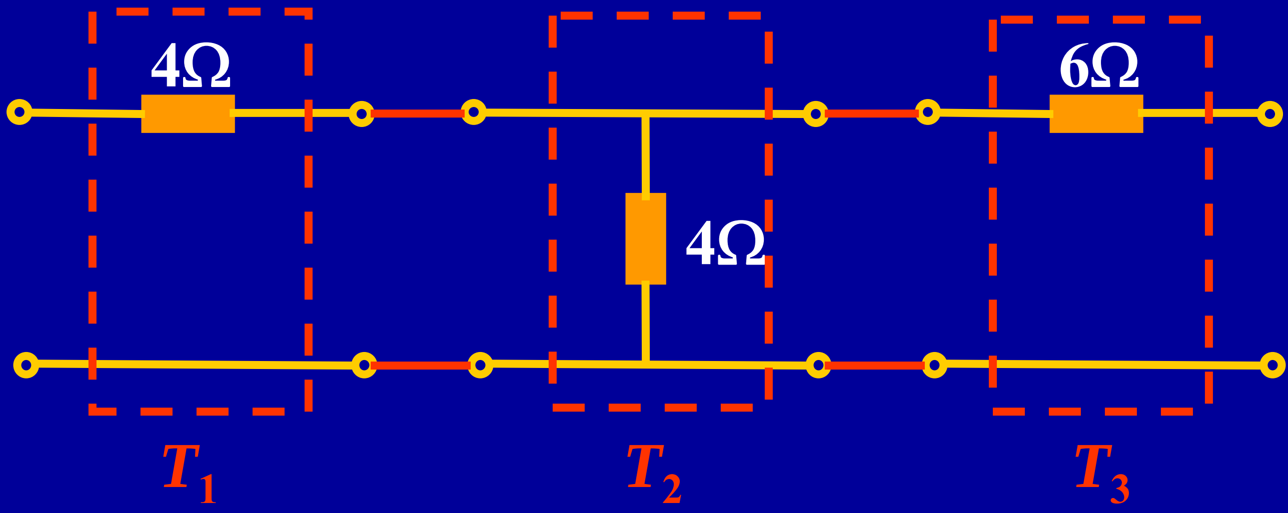
显然 $A = A'A'' + B'C'' \neq A'A''$

(2) 级联时各双口网络的端口条件不会被破坏。

例　易求出 $T_1=\begin{bmatrix}1 & 4\Omega\\ 0 & 1\end{bmatrix}$



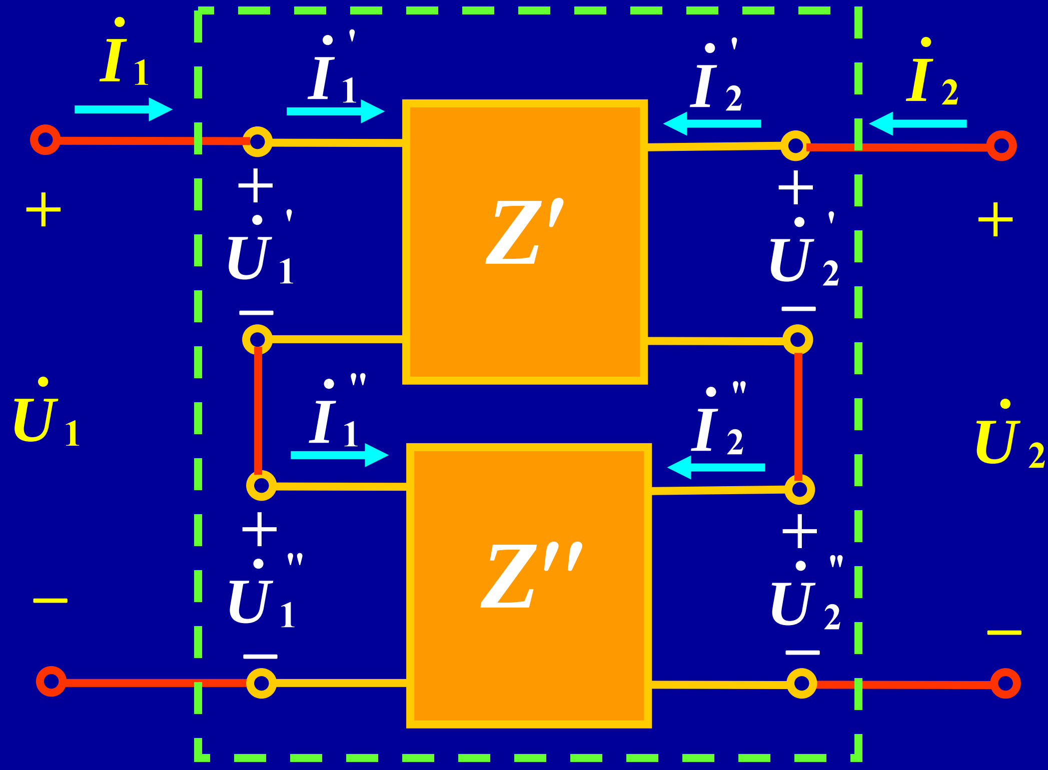
$T_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.25\ \text{S} & 1\end{bmatrix}$　　$T_3=\begin{bmatrix}1 & 6\Omega\\ 0 & 1\end{bmatrix}$



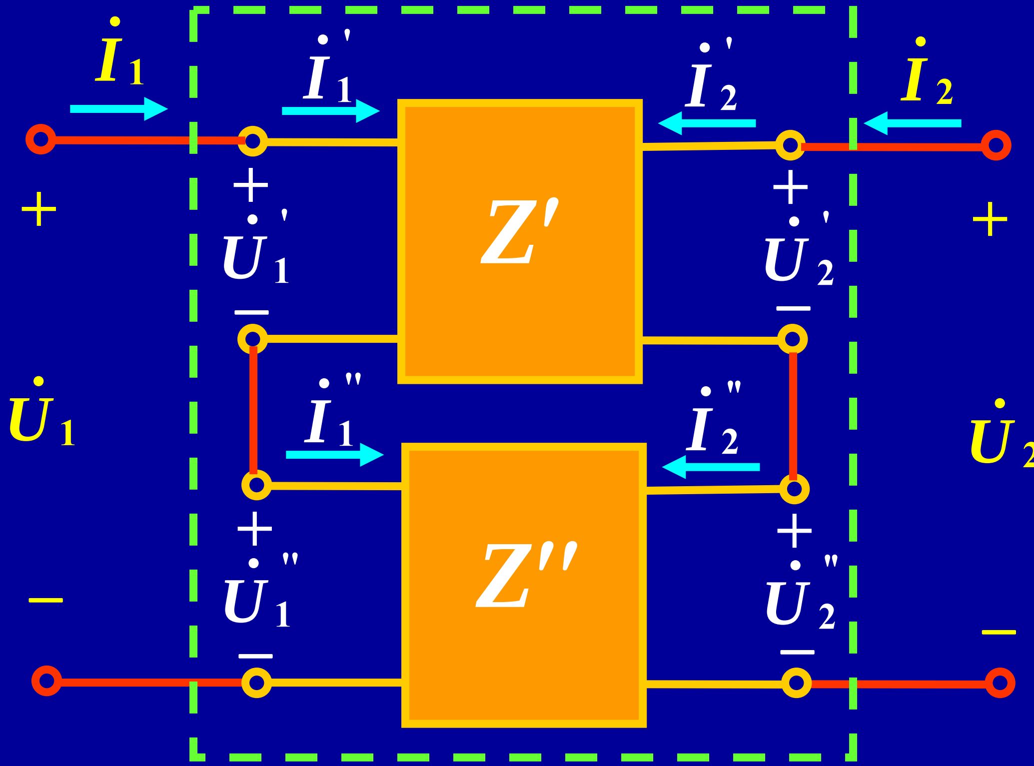
则　$[T]=[T_1][T_2][T_3]=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.25 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 16\Omega\\ 0.25\ \text{S} & 2.5\end{bmatrix}$

2. 串联

联接方式如图，采用 Z 参数方便。



$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1' \\ \dot{U}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1' \\ \dot{I}_2'\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2''\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot I_1'\\ \dot I_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot I_1''\\ \dot I_2''\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot U_1'\\ \dot U_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dot U_1''\\ \dot U_2''\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{U}_1'\\ \dot{U}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dot{U}_1''\\ \dot{U}_2''\end{bmatrix}=[Z']\begin{bmatrix}\dot{I}_1'\\ \dot{I}_2'\end{bmatrix}+[Z'']\begin{bmatrix}\dot{I}_1''\\ \dot{I}_2''\end{bmatrix}$$

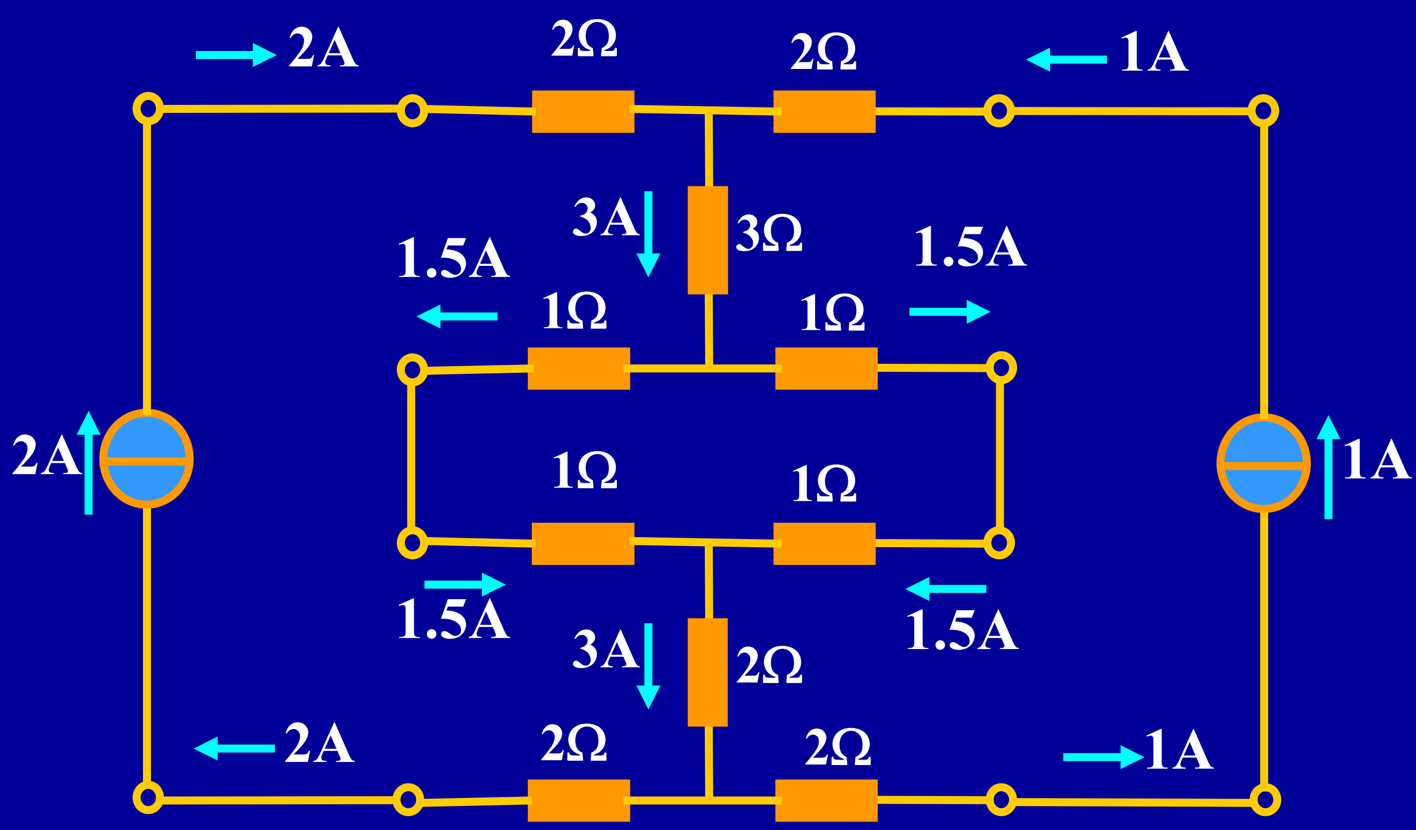
$$=\{[Z']+[Z'']\}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=[Z]\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

则 $$\boxed{[Z]=[Z']+[Z'']}$$

结论

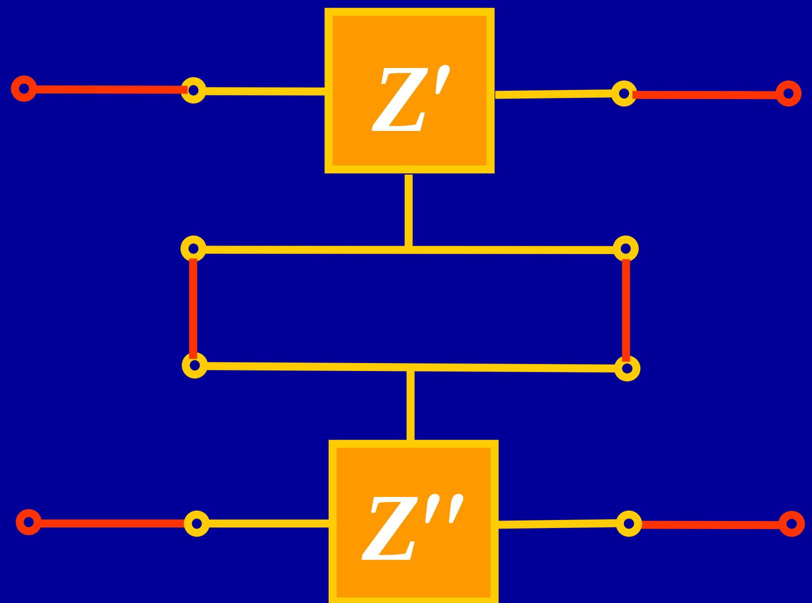
串联后复合双口网络Z 参数矩阵等于原双口网络Z 参数矩阵相加。可推广到n端口串联。

注　(1)　串联后端口条件可能被破坏。需检查端口条件。



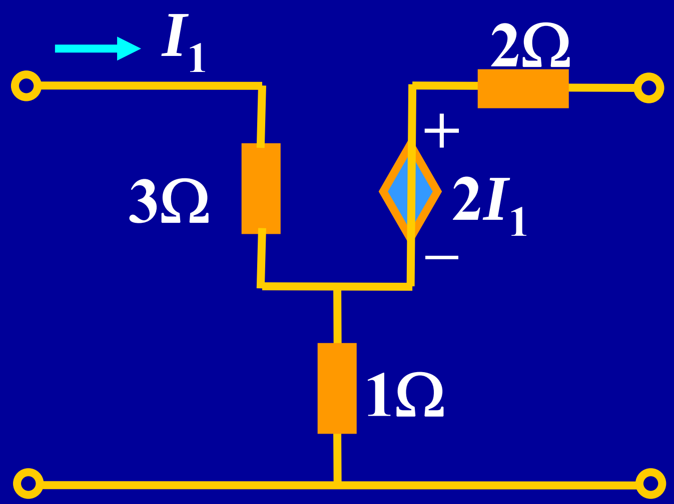
端口条件破坏！

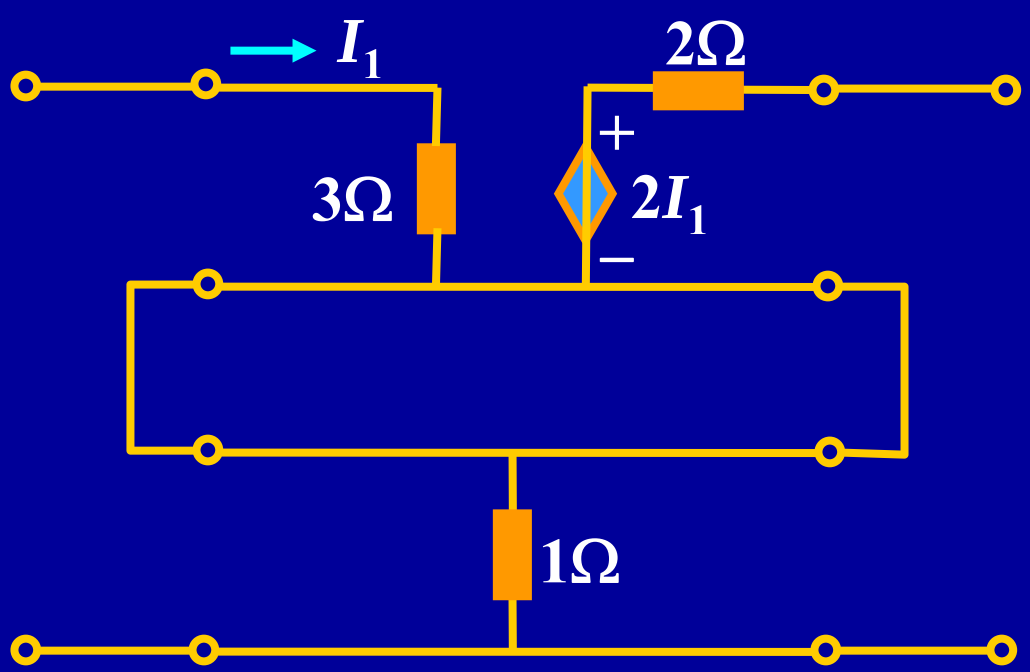
(2)　具有公共端的二端口，将公共端串联时将不会破坏端口条件。



端口条件不会破坏.

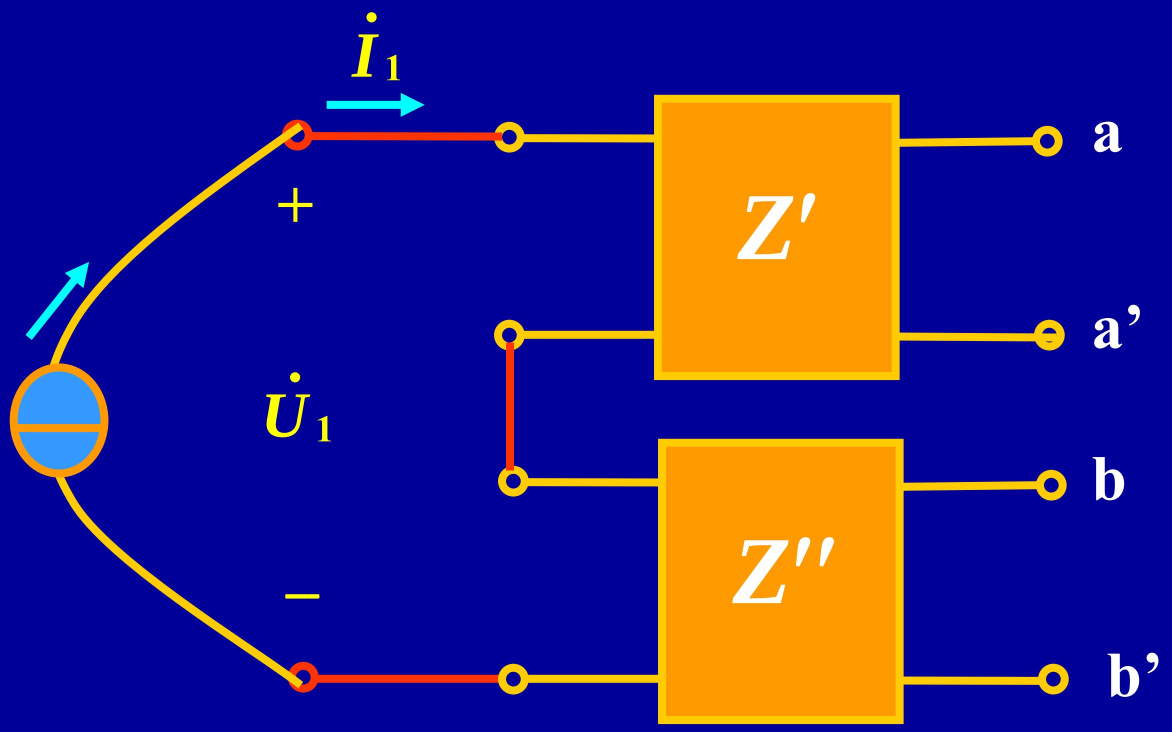
例





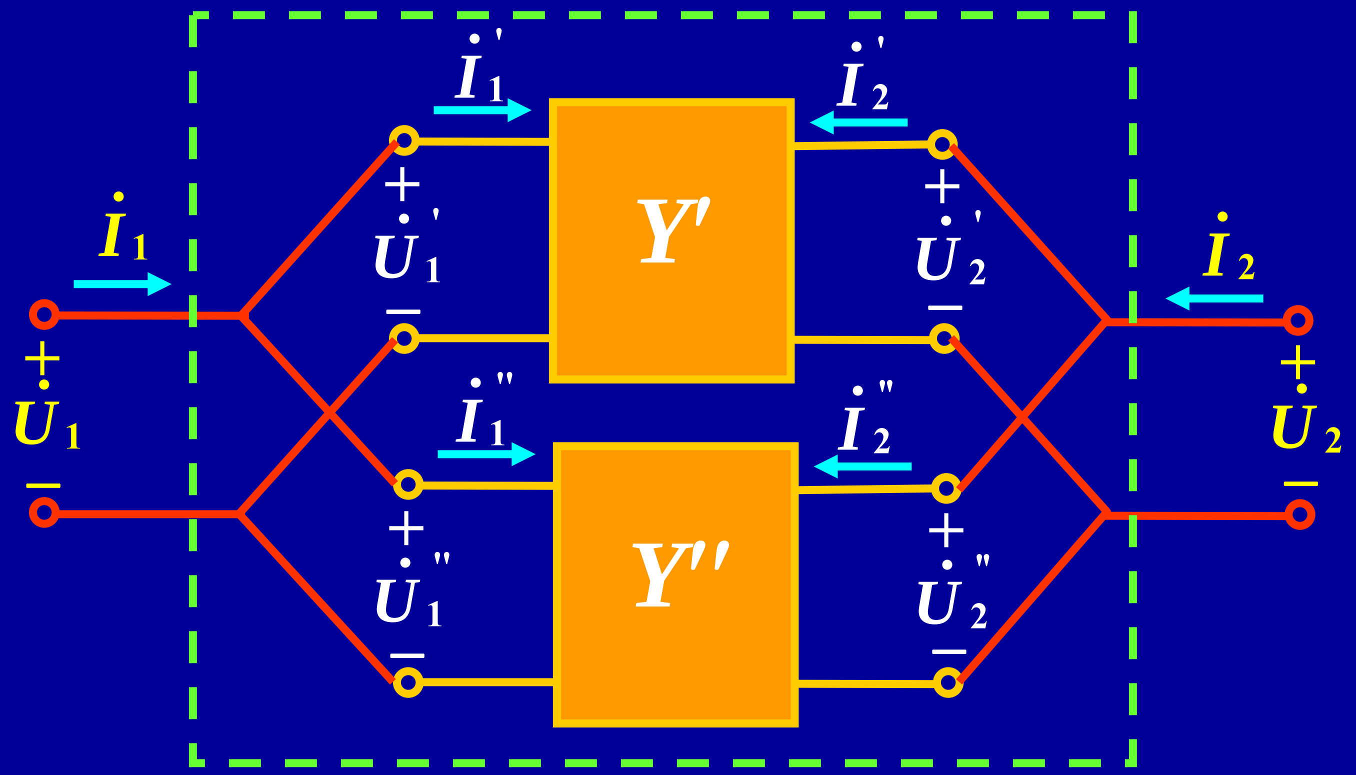
(3) 检查是否满足串联端口条件的方法:

输入串联端与电流源相连接，**a'**与**b**间的电压为零，则输出端串联后，输入端仍能满足端口条件。用类似的方法可以检查输出端是否满足端口条件。

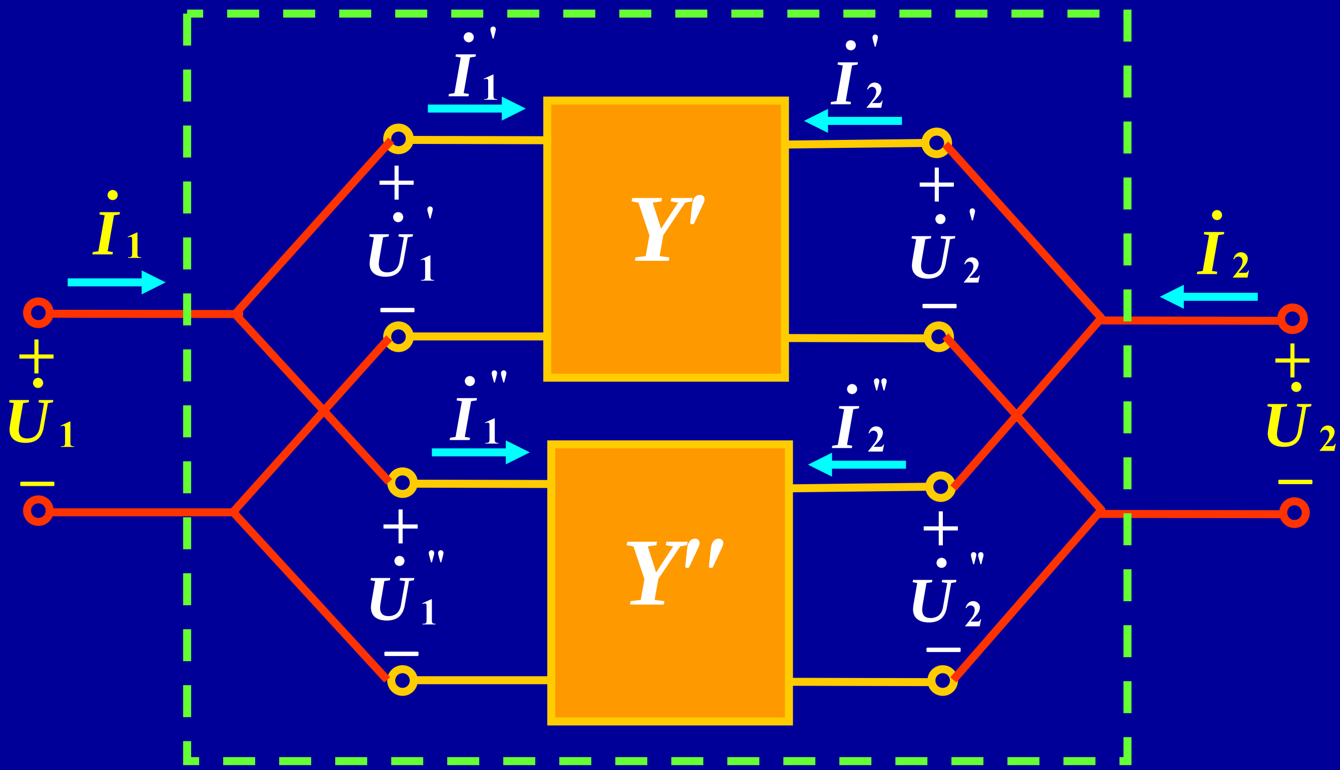


3．并联

并联联接方式如下图。并联采用*Y* 参数方便。



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix}$$



并联后 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{I}_1'\\ \dot{I}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dot{I}_1''\\ \dot{I}_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}' & Y_{12}'\\ Y_{21}' & Y_{22}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1'\\ \dot{U}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_{11}'' & Y_{12}''\\ Y_{21}'' & Y_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1''\\ \dot{U}_2''\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}Y_{11}' & Y_{12}'\\ Y_{21}' & Y_{22}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_{11}'' & Y_{12}''\\ Y_{21}'' & Y_{22}''\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

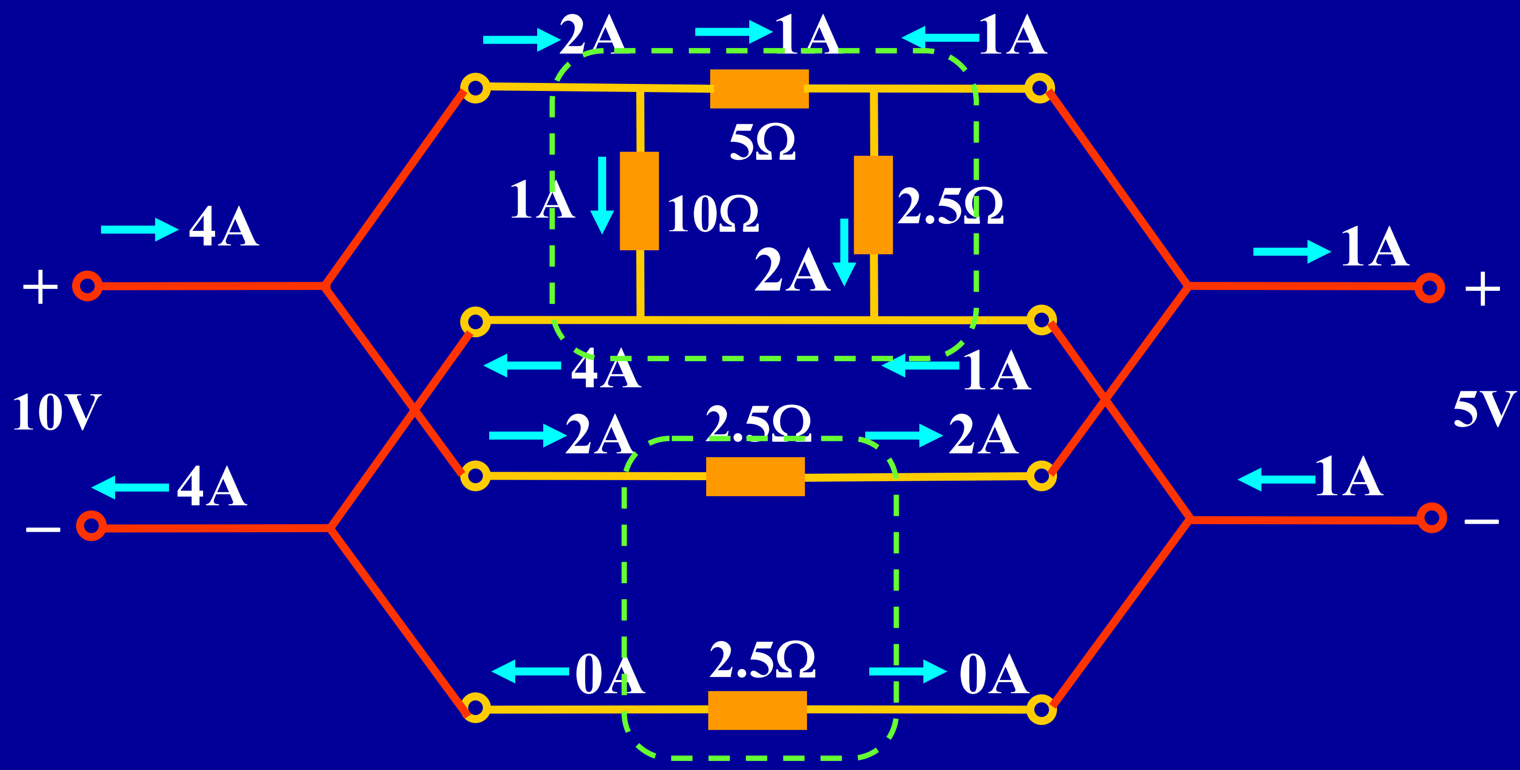
$$=\begin{bmatrix}Y_{11}'+Y_{11}'' & Y_{12}'+Y_{12}''\\ Y_{21}'+Y_{21}'' & Y_{22}'+Y_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=[Y]\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

可得 $[Y]=[Y']+[Y'']$

结论 双口网络并联所得复合双口网络的 Y 参数矩阵等于两个双口网络 Y 参数矩阵相加。

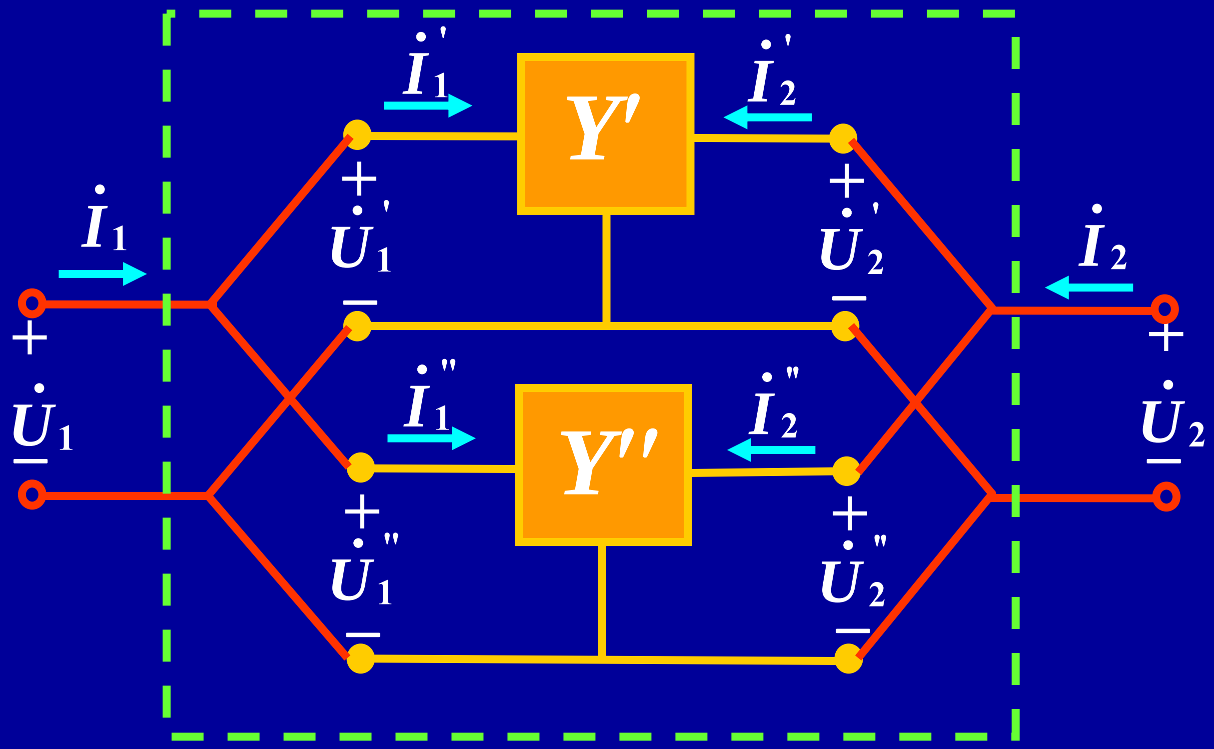
注

(1) 两个双口网络并联时，其端口条件可能被破坏此时上述关系式就不成立。

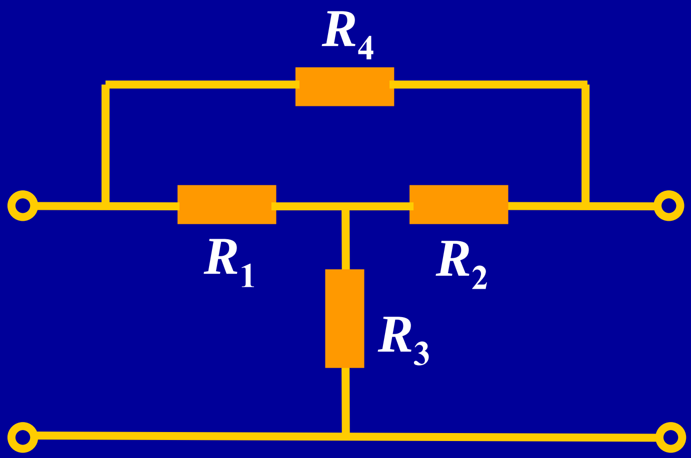


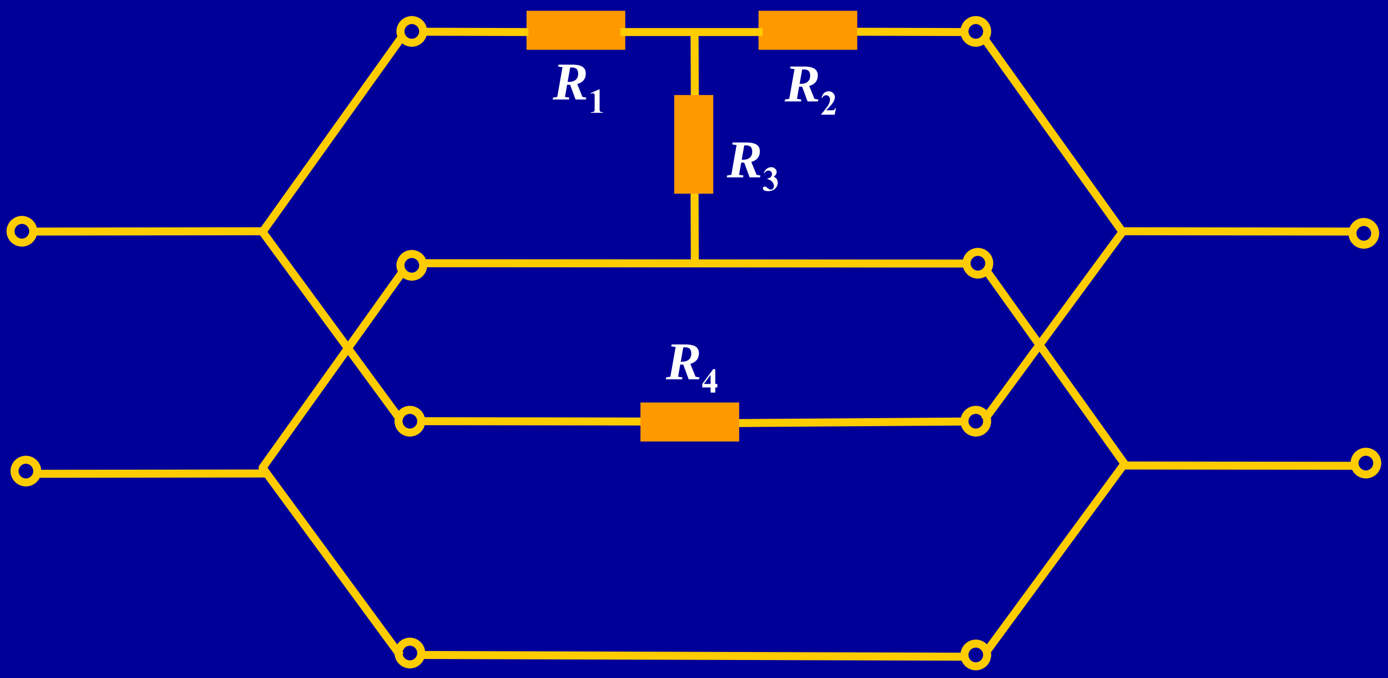
并联后端口条件破坏。

(2)　具有公共端的双口网络(三端网络形成的二端口)，将公共端并在一起将不会破坏端口条件。



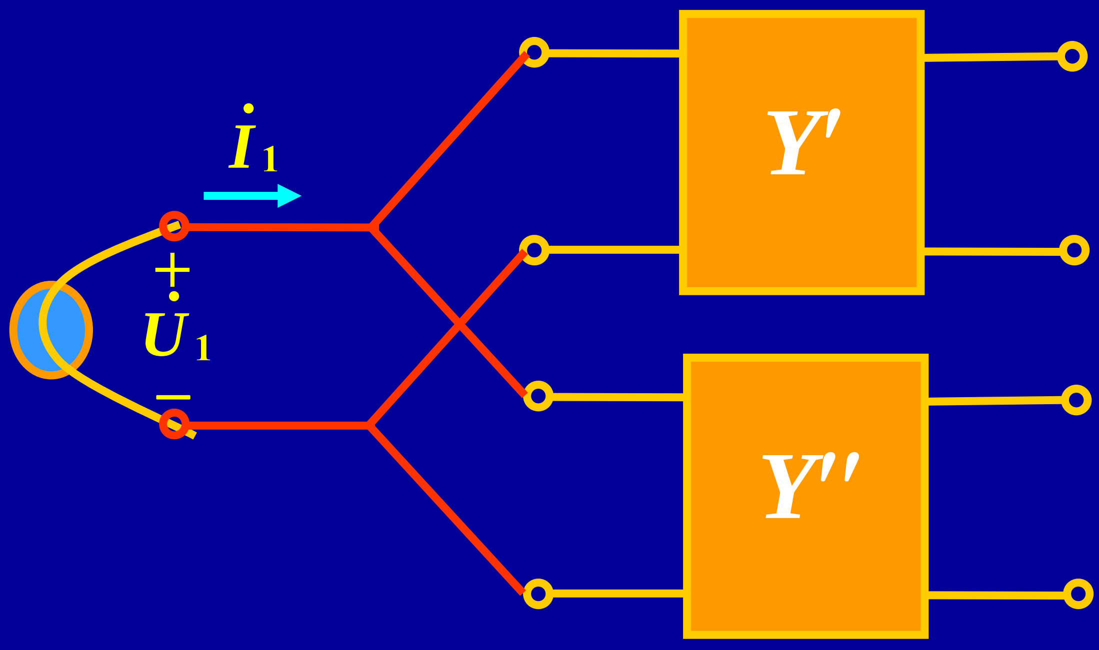
例





(3) 检查是否满足并联端口条件的方法：

输入并联端与电压源相连接，Y'、Y"的输出端各自短接，如两短接点之间的电压为零，则输出端并联后，输入端仍能满足端口条件。用类似的方法可以检查输出端是否满足端口条件。



10.5　回转器

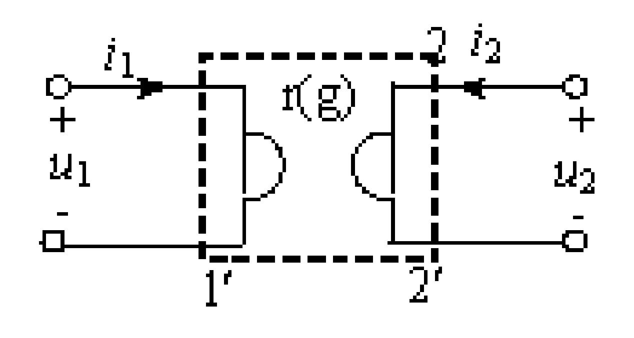
10.5.1　回转器的电路符号及定义

端口电压和电流(u_1、i_1、u_2、i_2)取标准的参考方向。

图中r称为回转电阻(单位欧姆)，g称为回转电导(单位西门子)。

其端口约束关系定义为

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -r i_2 \\
i_1 &= \frac{1}{r} u_2
\end{aligned}
$$



或

$$
\begin{cases}
u_1 = -\dfrac{1}{g} i_2 \\
i_1 = g u_2
\end{cases}
$$

在正弦稳态电路中，回转器端口的**VCR**可表示为相量形式，即

$$\dot{U}_1 = -\frac{1}{g}\dot{I}_2 \qquad \dot{I}_1 = g\dot{U}_2$$

或

$$\dot{U}_1 = -r\dot{I}_2 \qquad \dot{I}_1 = \frac{1}{r}\dot{U}_2$$

从定义过程可以看出，回转器能将一个端口的电流回转为另一个端口的电压，或将一个端口的电压回转为另一个端口的电流，这就是称该双口元件为回转器的原因。

10.5.2　回转器的特性

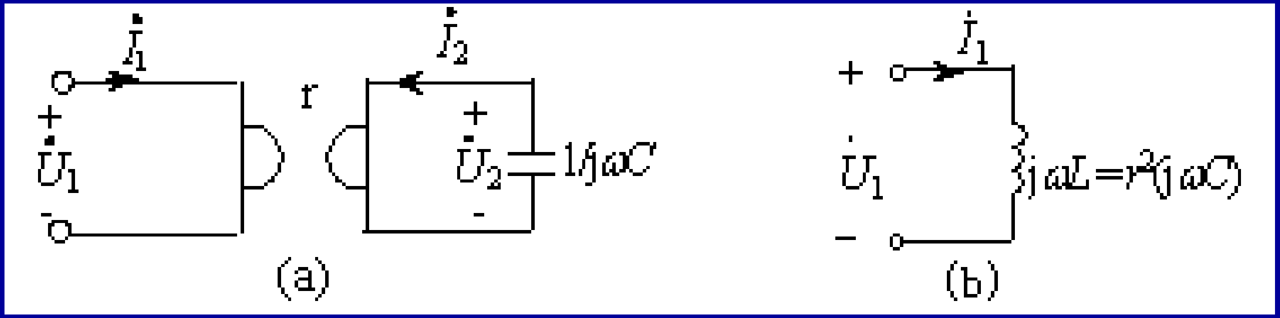
1. 回转器不具有互易性，因为

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

2.回转器是一个非记忆元件

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + r i_1 (-\frac{1}{r} u_1) = 0$$

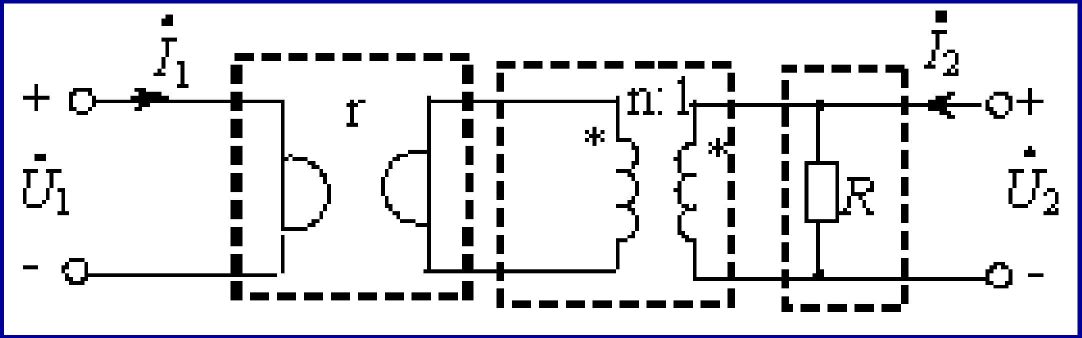
3.回转器能回转*R*、*L*、*C*与阻抗*Z*



如图 **(a)**所示,其输入阻抗为

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{-r\dot{I}_2}{\frac{1}{r}\dot{U}_2}=\frac{r^2}{(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2})}=\frac{r^2}{(\frac{1}{j\omega C})}=r^2(j\omega C)$$

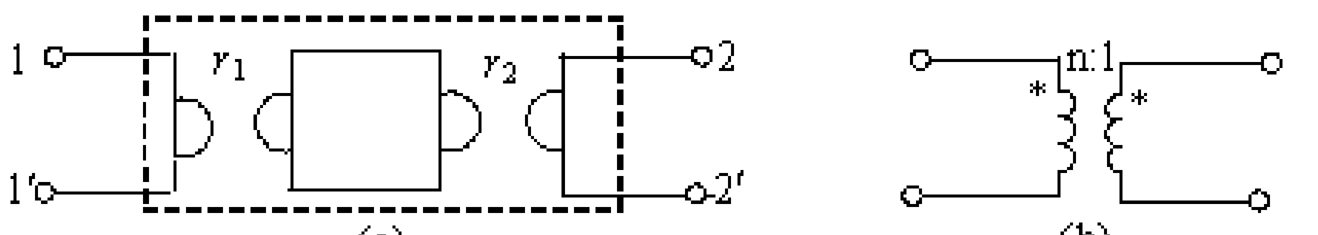
例 1　试求如图所示双口网络的T参数矩阵。



解　如图所示双口网络可看成是三个简单网络的级联。所以有

$$T=\begin{bmatrix}0 & r\\ \frac{1}{r} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \frac{1}{n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{r}{nR} & \frac{r}{n}\\ \frac{n}{r} & 0\end{bmatrix}$$

例 2 试证明两个回转器级联后如图(a)所示，可等效为一个理想变压器如图(b)所示，并求出变比n与两个回转器的回转电阻r_1和r_2的关系。



(a) (b)

证明 如图(a)所示双口网络可看成是2个回转器的级联。

所以T参数矩阵为

$$T = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ \frac{1}{r_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ \frac{1}{r_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2} & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{r_1} \end{bmatrix}$$

而变压器的T参数矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

从而，有

$$n = \frac{r_1}{r_2}$$