第二章 电阻电路等效变换分析法

2.1 电路等效的一般概念

2.2 不含独立源的单口网络的等效

2.3 Y－△形电阻网络的等效变换

2.4 电源模型及等效变换

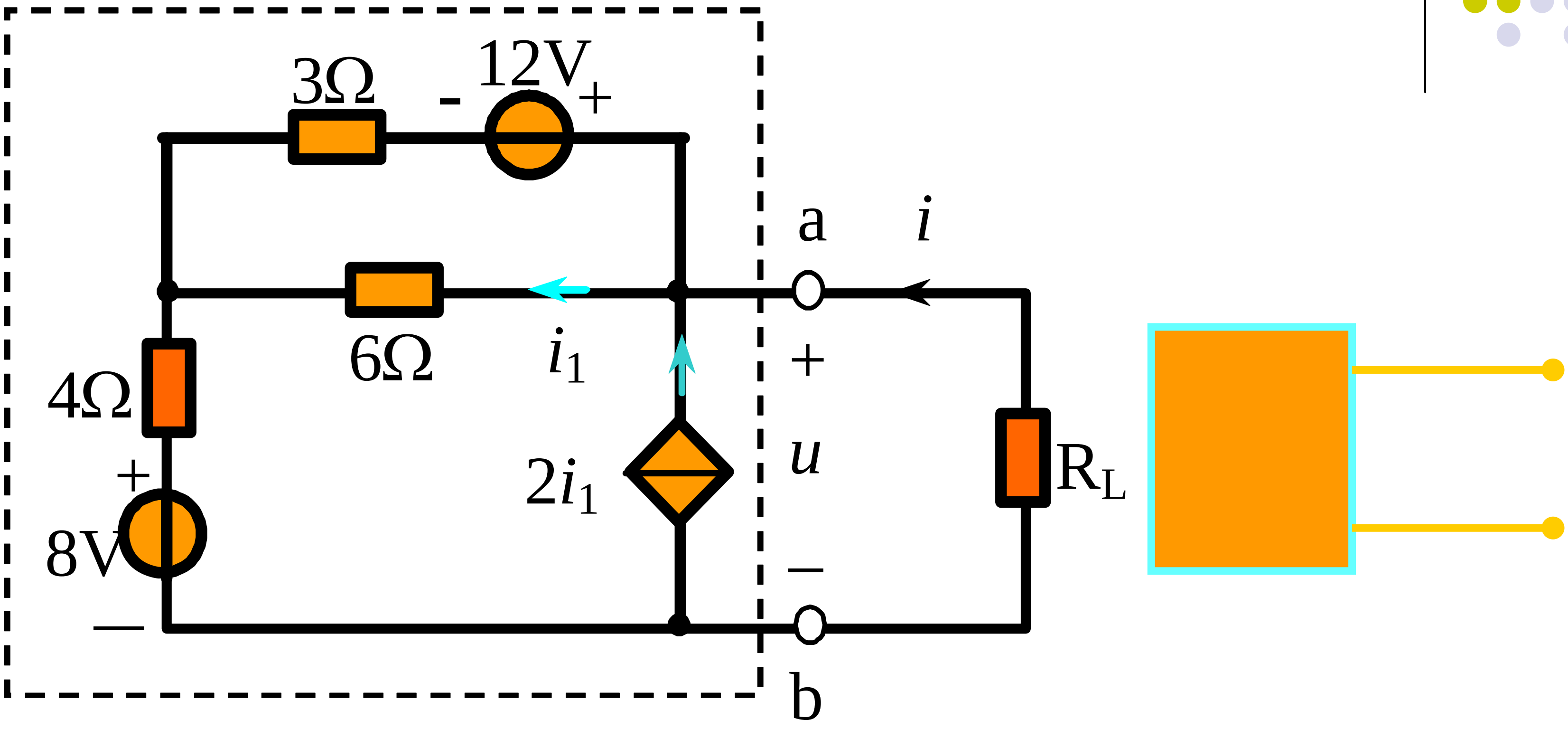
2.5 含受控源电路分析(强调)

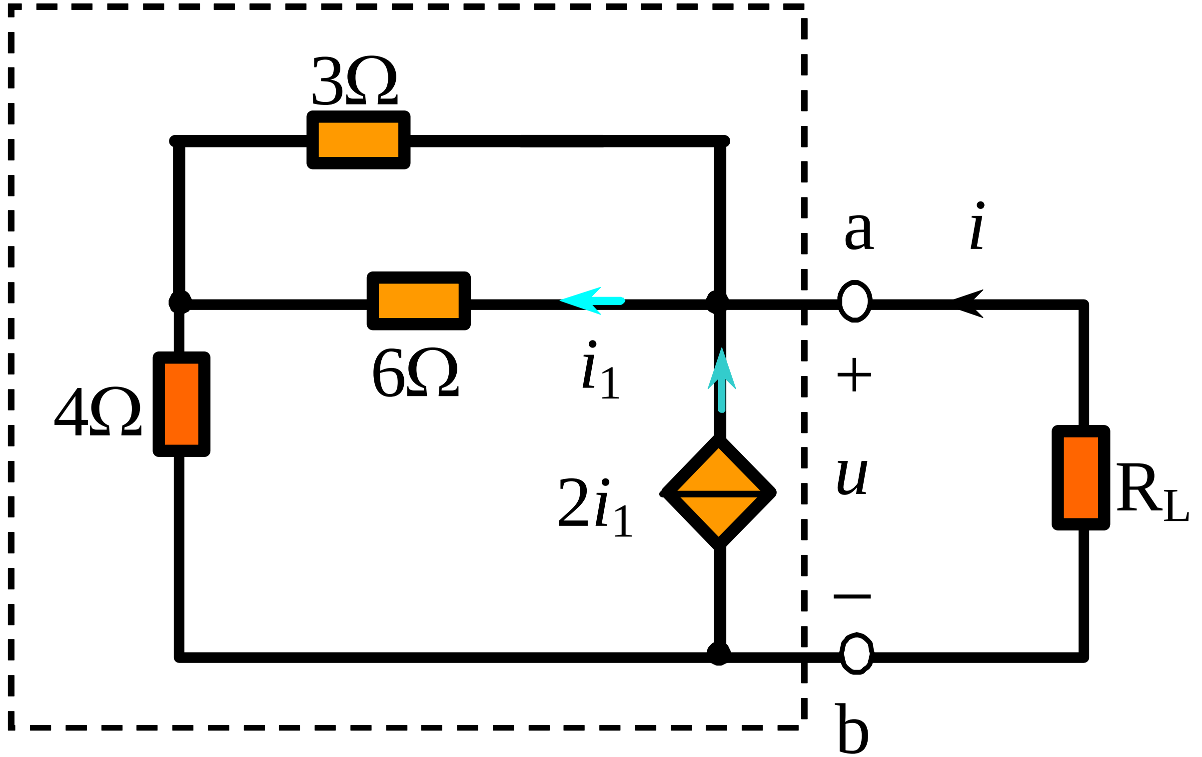
本章要点

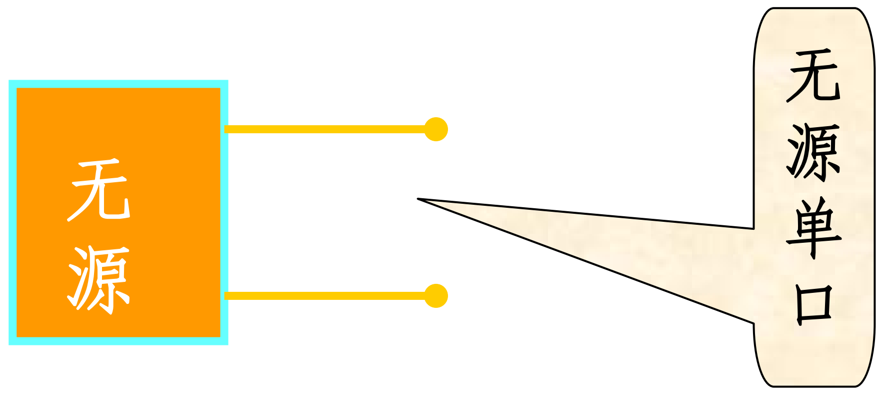
2.1　电路等效的一般概念

1. 单口网络

任何一个复杂的电路，向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为单口络网。又分为有源网单口络和无源单口网络. 如下图所示

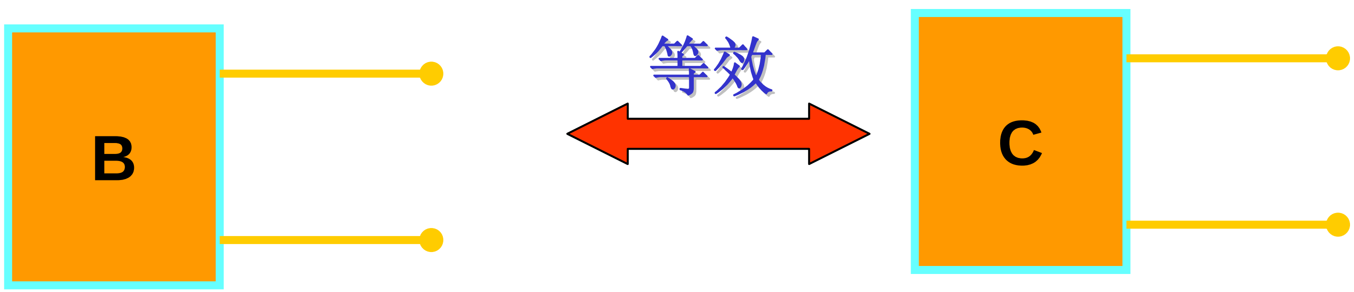

3Ω
12V
-
+
a
i
6Ω
i1
+
4Ω
u
2i1
RL
+
8V
—
—
b


3Ω
6Ω
4Ω
i_1
$2i_1$
a
i
+
u
−
b
R_L


无源
无源单口

2. 单口网络等效的概念

两个单口网络，端口具有相同的电压、电流关系,则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足

明确

（1）电路等效变换的条件　两电路具有相同的VCR

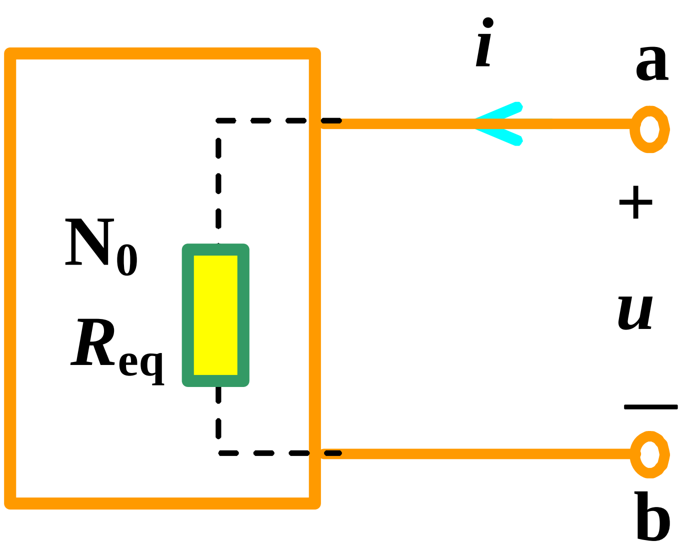
（2）电路等效变换的对象　未变化的外电路A中的电压、电流和功率

（3）电路等效变换的目的　化简电路，方便计算

2.2 不含独立源的单口网络的等效

一个不含独立电源、仅由线性电阻和线性受控源组成的单口网络N_0，如图所示，等效电路是一个电阻元件。根据欧姆定律和等效的定义，在端口电压u和电流i关联方向下，该等效电阻为

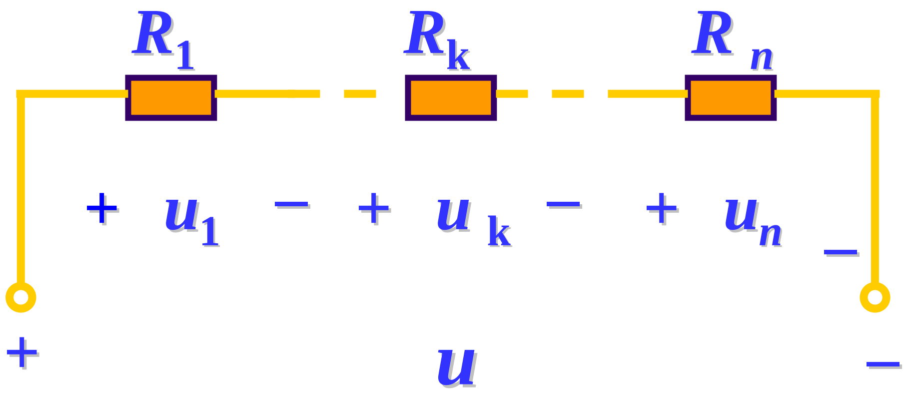
$$R_{eq}=\frac{u}{i}$$



R_{eq}又称为无源单口网络的输入电阻．

2.2.1 电阻串联（ Series Connection of Resistors ）

（1） 电路特点

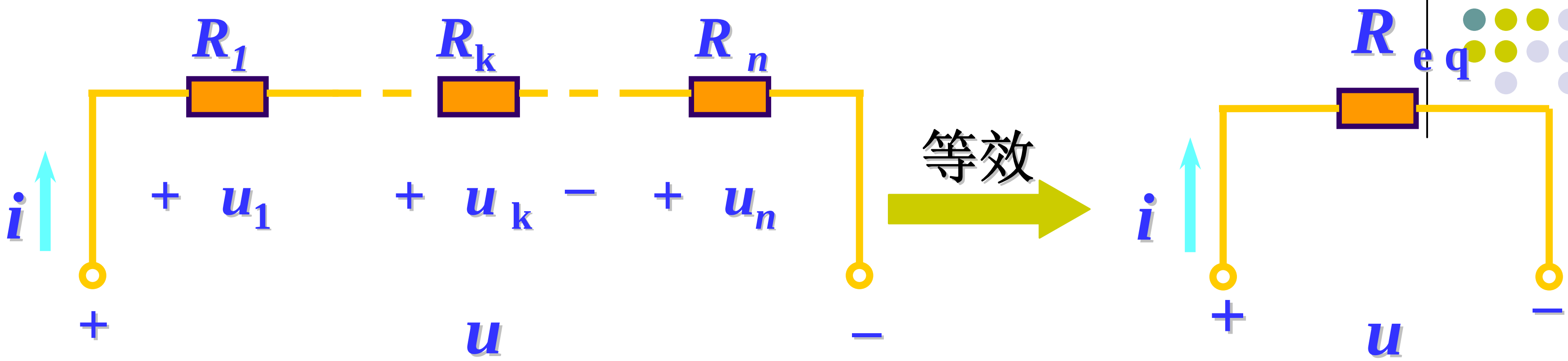


(a) 各电阻顺序连接，流过同一电流（KCL）；

(b) 总电压等于各串联电阻的电压之和（KVL）。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

(2) 等效电阻



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_K i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k > R_k$$

结论： 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

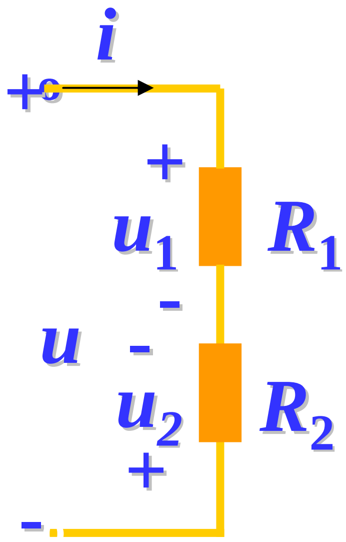
(3) 串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

说明电压与电阻成正比，因此串联电阻电路可作分压电路

例

两个电阻的分压：



$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u$$

注意方向！

(4) 功率

$$p_1=R_1 i^2,\quad p_2=R_2 i^2,\quad \ldots,\quad p_n=R_n i^2$$

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = R_1 : R_2 : \ldots : R_n$$

总功率 $p=R_{eq} i^2 = (R_1+R_2+\ldots+R_n)\, i^2$

$$=R_1 i^2+R_2 i^2+\ldots+R_n i^2$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_n$$

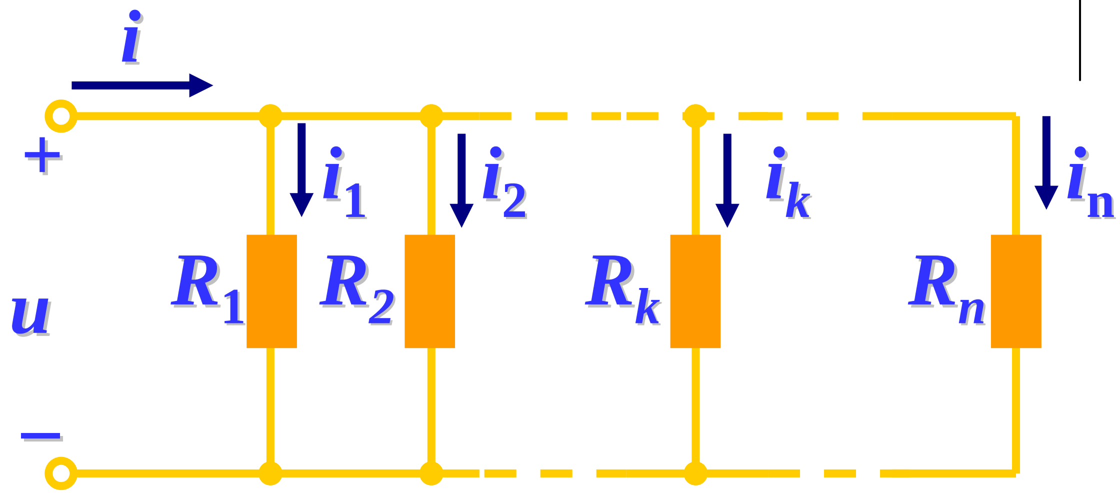
表明

（1） 电阻串联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比

（2） 等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和

2.2.2 电阻并联 (Parallel Connection)

(1) 电路特点

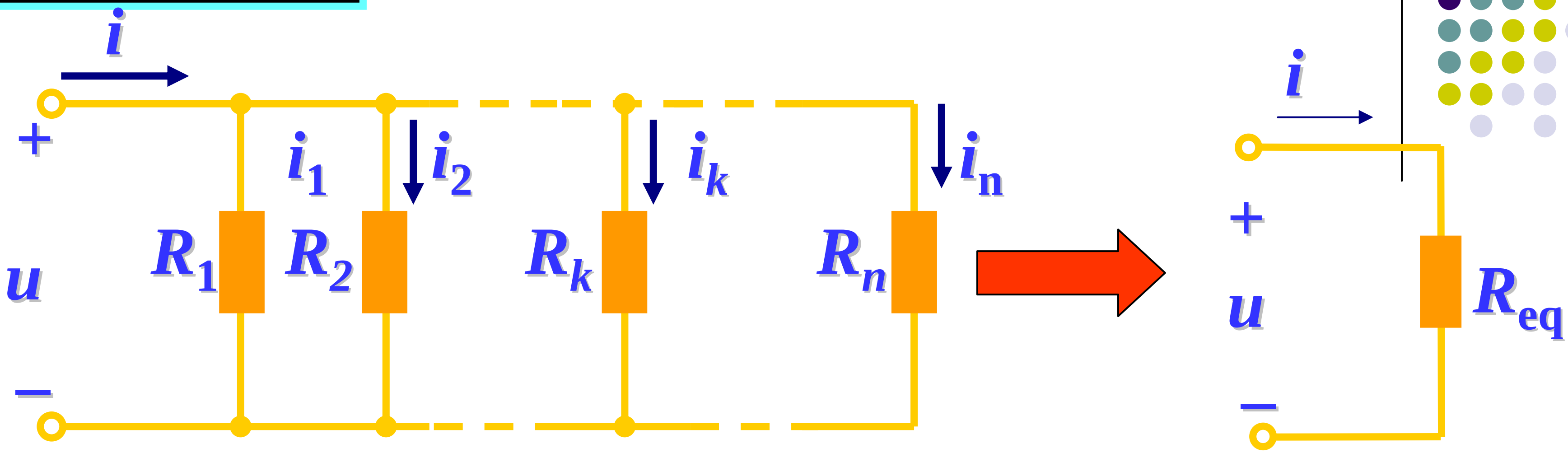


(a) 各电阻两端分别接在一起，两端为同一电压（KVL）；

(b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和（KCL）。

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$

(2) 等效电阻



由KCL:

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n$$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n = u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n) = uG_{eq}$$

$G = 1/R$ 为电导

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k > G_k$$

等效电导等于并联的各电导之和

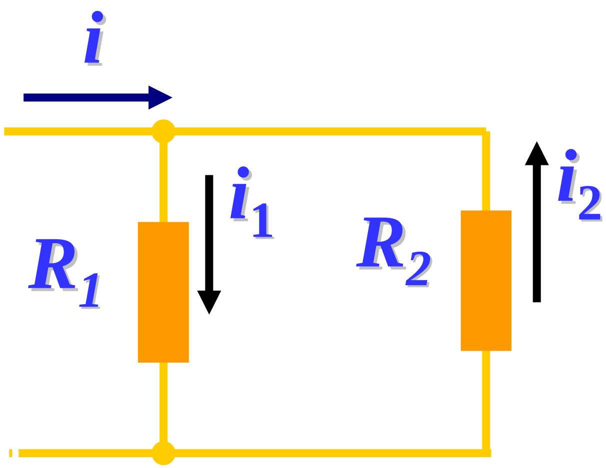
$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \text{即} \quad R_{eq} < R_k$$

（3） 并联电阻的电流分配

电流分配与电导成正比

$$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{\mathrm{eq}}}=\frac{G_k}{G_{\mathrm{eq}}} \rightarrow i_k=\frac{G_k}{G_{\mathrm{eq}}}i$$

对于两电阻并联，有：



$$R_{eq}=\frac{1/R_1\cdot 1/R_2}{1/R_1+1/R_2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_2 i}{R_1+R_2}$$

$$i_2=\frac{-1/R_2}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{-R_1 i}{R_1+R_2}=-(i-i_1)$$

（4） 功率

$$p_1=G_1u^2,\quad p_2=G_2u^2,\quad \dots,\quad p_n=G_nu^2$$

$$p_1:p_2:\dots:p_n=G_1:G_2:\dots:G_n$$

总功率 $p=G_{eq}u^2=(G_1+G_2+\dots+G_n)u^2$

$$=G_1u^2+G_2u^2+\dots+G_nu^2$$

$$=p_1+p_2+\dots+p_n$$

表明

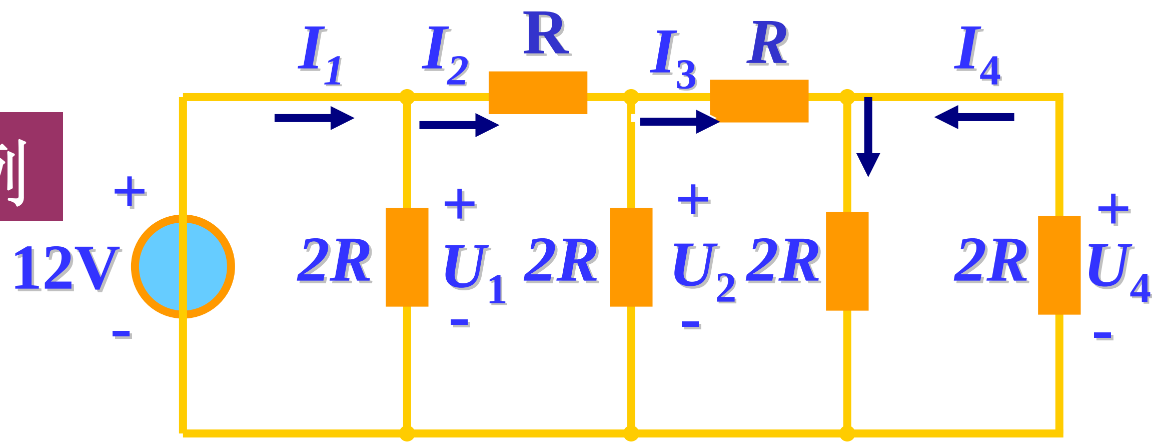
（1）电阻并联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比

（2）等效电阻消耗的功率等于各并联电阻消耗功率的总和

2.2.3. 电阻的串并联

电路中有电阻的串联，又有电阻的并联，这种连接方式称电阻的串并联。

例



求：I_1，I_4，U_4

解 ① 用分流方法做

$$I_4=-\frac{1}{2}I_3=-\frac{1}{4}I_2=-\frac{1}{8}I_1=-\frac{1}{8}\ \frac{12}{R}=-\frac{3}{2R}$$

$$U_4=-I_4\times 2R=3\ \ \mathrm{V}$$

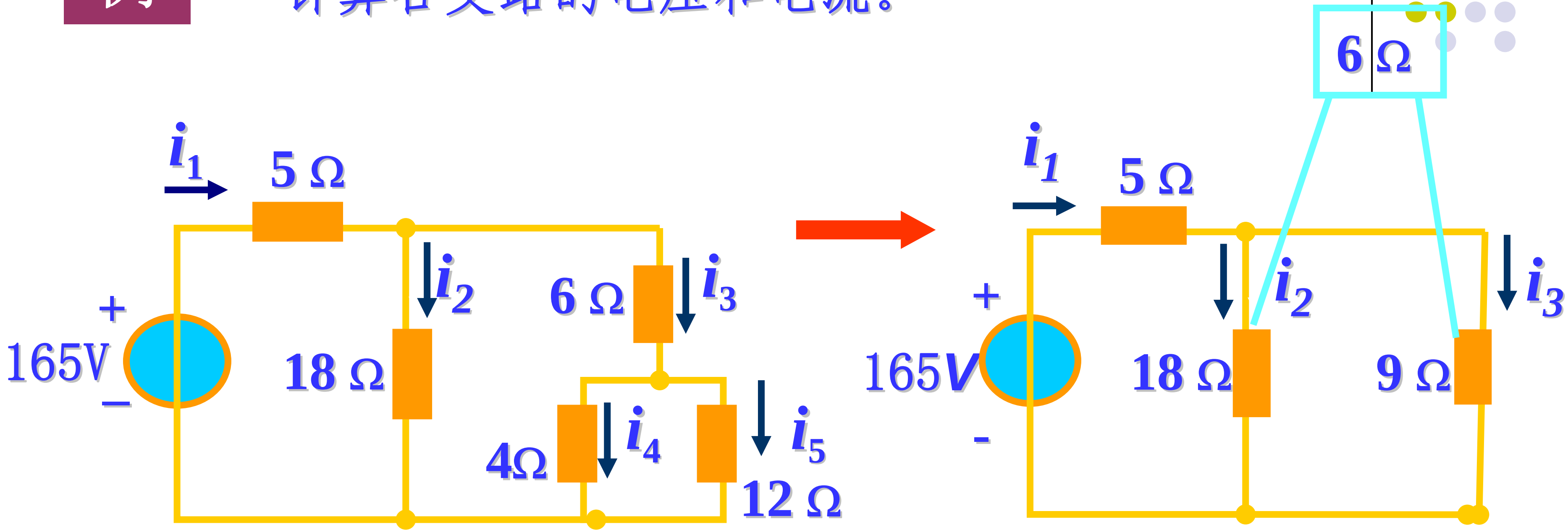
$$I_1=\frac{12}{R}$$

②用分压方法做

$$U_4=\frac{U_2}{2}=\frac{1}{4}U_1=3\ \ \mathrm{V}$$

$$I_4=-\frac{3}{2R}$$

例　计算各支路的电压和电流。



解

$$i_1 = 165/11 = 15A$$

$$i_2 = 90/18 = 5A$$

$$i_3 = 15 - 5 = 10A$$

$$i_4 = 30/4 = 7.5A$$

$$u_2 = 6i_1 = 6\times 15 = 90V$$

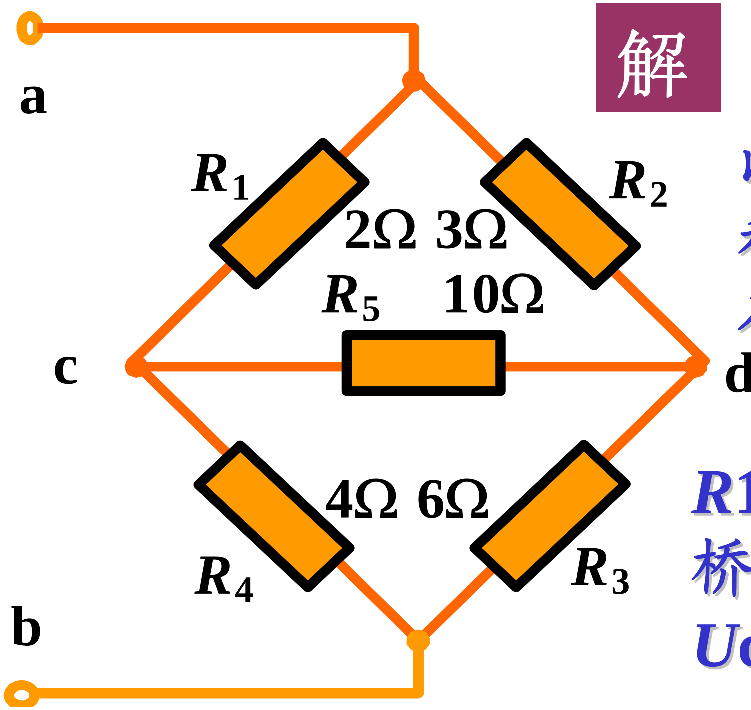
$$u_3 = 6i_3 = 6\times 10 = 60V$$

$$u_4 = 3i_3 = 30V$$

$$i_5 = 10 - 7.5 = 2.5A$$

例

计算如图所示电路的等效电阻。



解

以与ab垂直的直线cd为对称轴，会发现电阻之间存在如下关系： $R_1R_3=R_2R_4$

*R*1，*R*2，*R*3和*R*4组成平衡电桥，c，d两点电位相等，所以Ucd=0，cd之间等效为短路;

对*R*5应用欧姆定律，得*I*cd=0，所以cd之间又可等效为开路。

若cd之间开路，那么电路结构变为*R*1与*R*4串联、*R*2和*R*3串联，然后并联

$$R_{ab}=\frac{(2+4)\times(3+6)}{2+4+3+6}=3.6\Omega$$

若cd之间短路，电路结构变为R1与R2并联、R3和R4并联，然后串联。

$$R_{ab}=\frac{2\times 3}{2+3}+\frac{4\times 6}{4+6}=3.6\Omega$$

问题

图中电路不满足平衡条件又如何计算等效电阻?

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤:

（1）求出等效电阻或等效电导;

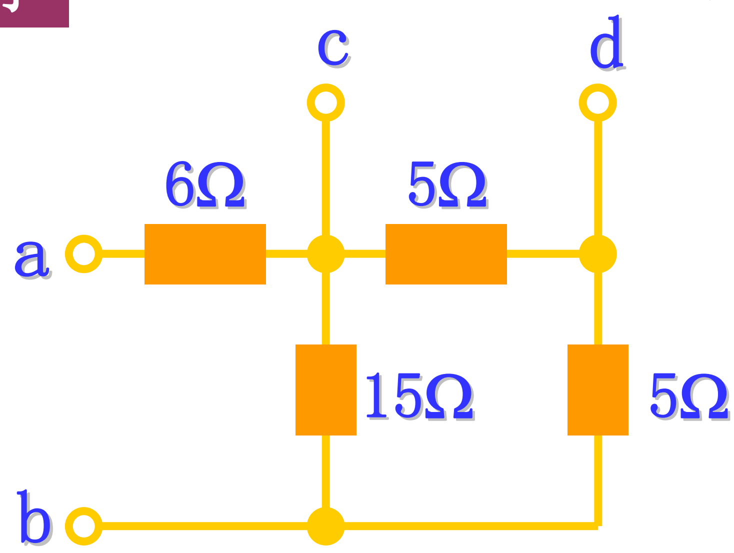
（2）应用欧姆定律求出总电压或总电流;

（3）应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例

求：R_{ab}，R_{cd}



$$R_{ab}=(5+5)//15+6=12\Omega$$

$$R_{cd}=(15+5)//5=4\Omega$$

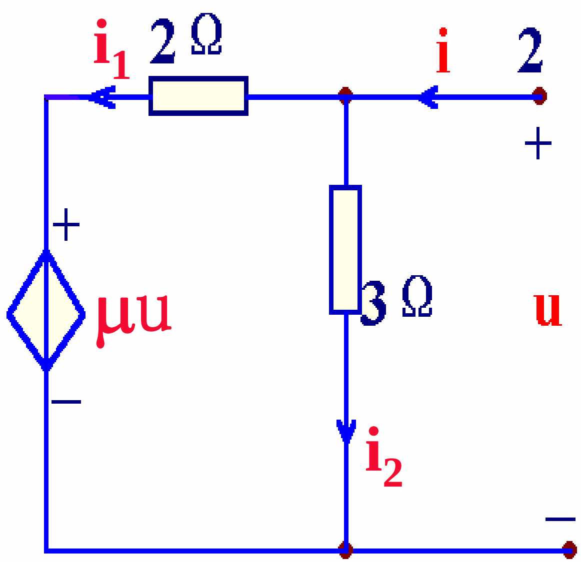
等效电阻针对电路的某两端而言，否则无意义。

2.2.4 含受控源单口网络的等效电阻

采用外施激励法

$$R_{eq}=\frac{U}{I_s}=\frac{U_s}{I}$$

例1：将图示单口网络化为最简形式。

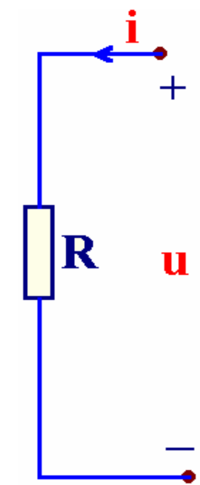


解：　外加电压u，有

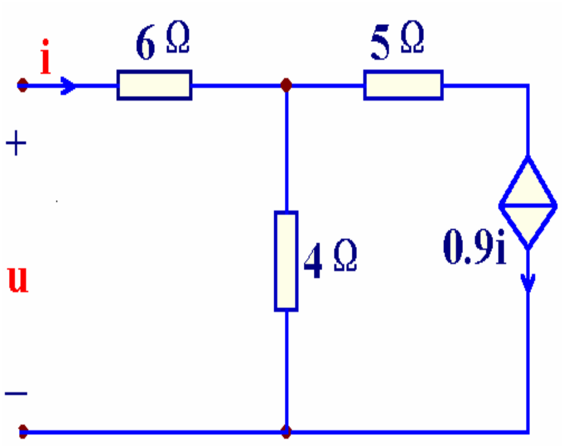
$$i_2=\frac{u}{3}\qquad i_1=\frac{u-\mu u}{2}$$

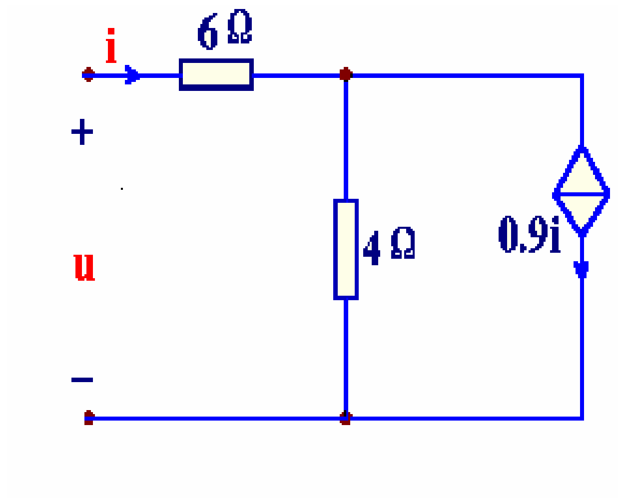
$$i=i_1+i_2=\frac{u}{3}+\frac{u-\mu u}{2}=(\frac{1}{3}+\frac{1-\mu}{2})u$$

$$R=\frac{u}{i}=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1-\mu}{2}}=\frac{6}{5-3\mu}$$



例2、将图示单口网络化为最简形式。



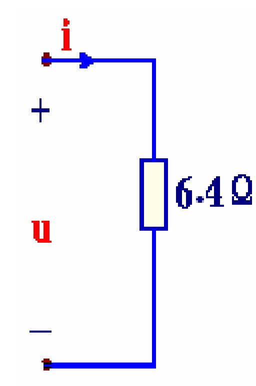


解: 单口网络等效变换为右图，有

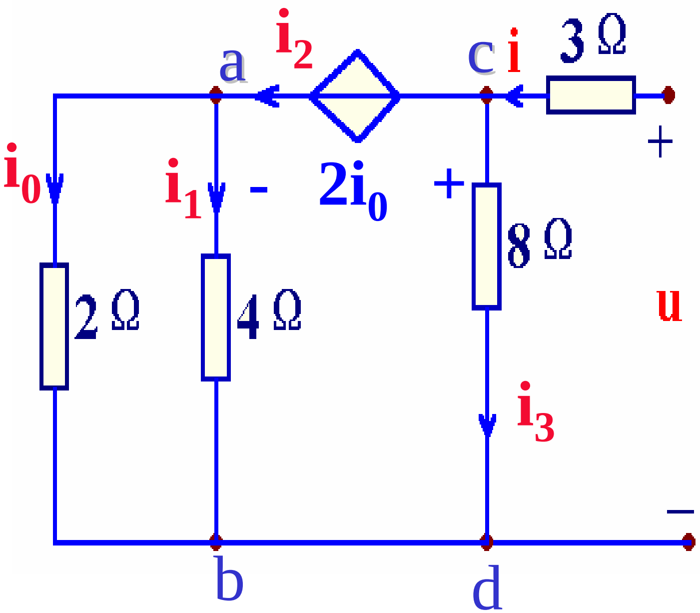
$$u = 6i + 4(i - 0.9i) = 6.4i$$

$$R = \frac{u}{i} = 6.4\Omega$$

最简形式电路为:



例3、将图示单口网络化为最简形式。



解：递推法：

设i_0=1A　　则u_{ab}=2V

i_1=0.5A

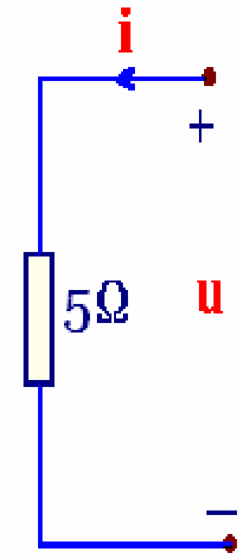
i_2=1.5A　　u_{cd}=4V

i=2A

i_3=0.5A

$u = u_{cd} + 3i = 10V$

$$\therefore \quad R = \frac{u}{i} = 5\Omega$$

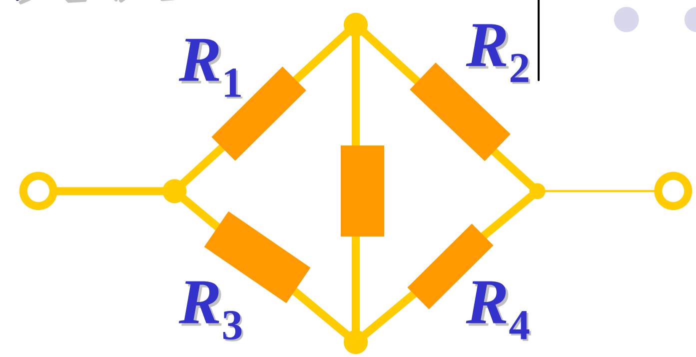


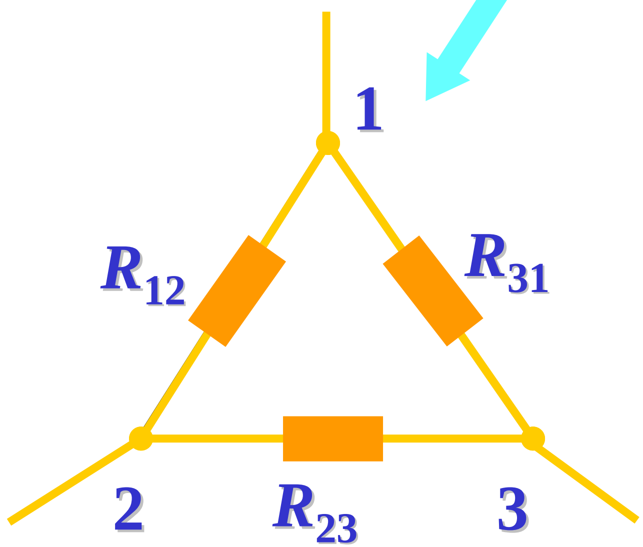
故单口网络的最简形式如右图所示。

2.3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (Δ—Y 变换)

1. 电阻的Δ ，Y连接

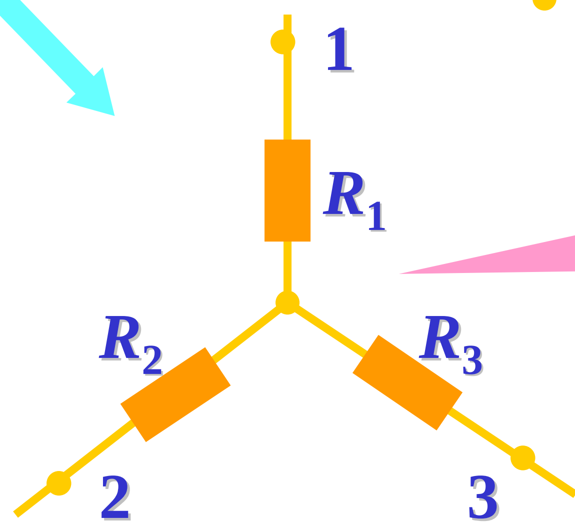
包含





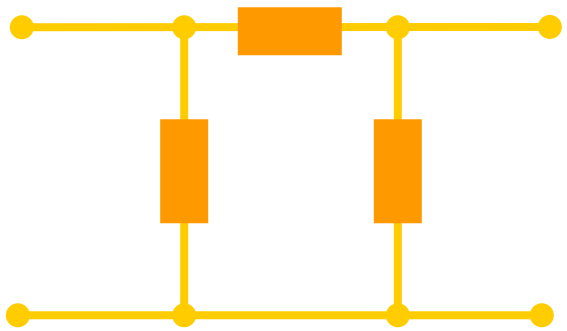
Δ型网络

三端网络

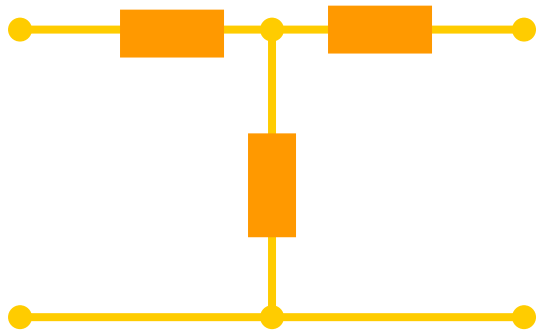


Y型网络

Δ，Y 网络的变形:



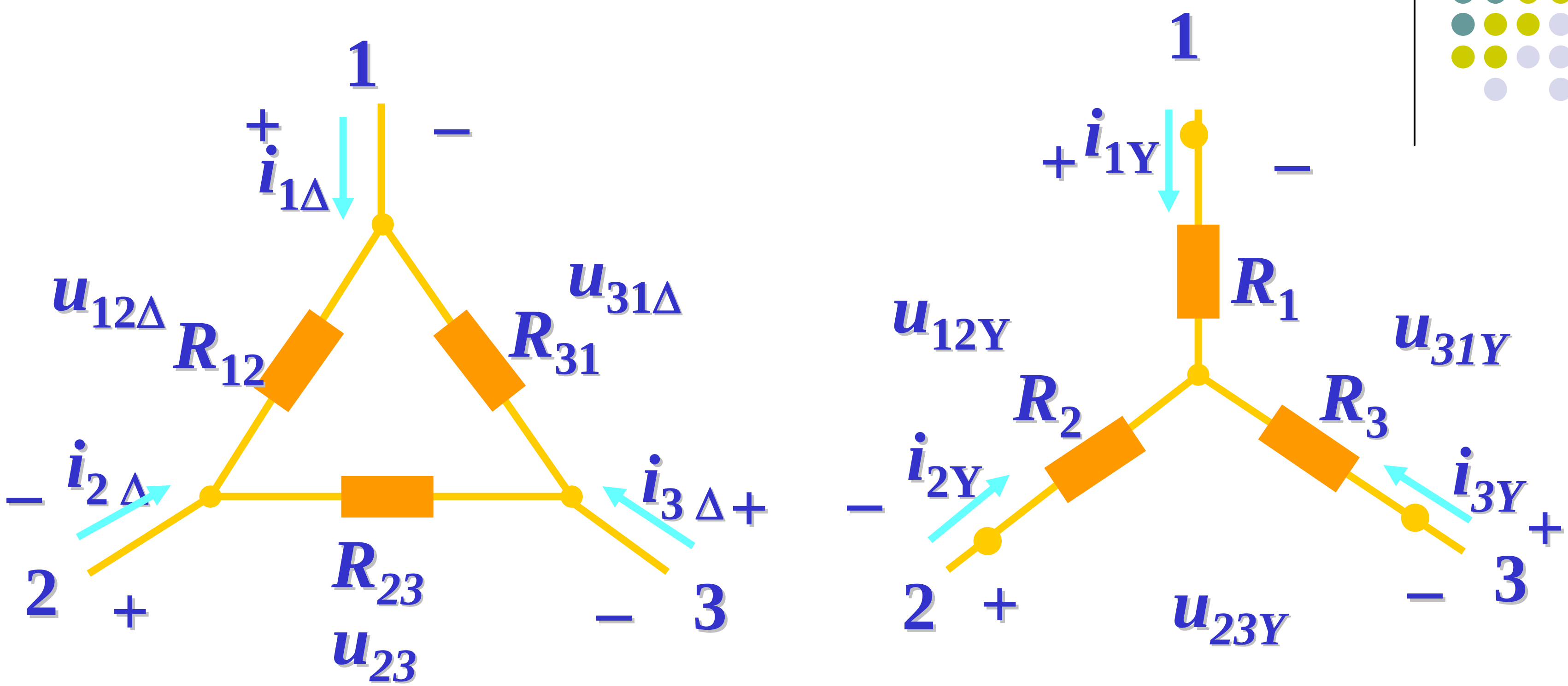
π 型电路 (Δ 型)



T 型电路 (Y、星 型)

这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效

2. Δ—Y 变换的等效条件



等效条件：

$i_{1\Delta}=i_{1Y}$， $i_{2\Delta}=i_{2Y}$， $i_{3\Delta}=i_{3Y}$，

$u_{12\Delta}=u_{12Y}$， $u_{23\Delta}=u_{23Y}$， $u_{31\Delta}=u_{31Y}$

推导方法：

如果Y形和△形电阻等效，则当两种联接都有一个对应端子开路时，剩余两端子之间的电阻必然相等。

当**1**端子开路时，得
$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

当2端子开路时，得
$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

当3端子开路时，得
$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

以上三式联立，可求得△形连接等效为Y形连接电阻的计算公式为：

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

将上式变换一下，可求得Y形连接等效为△形连接电阻的计算公式为：

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \frac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_3} \qquad \mathbf{G}_{12} = \frac{\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2}{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2+\mathbf{G}_3}$$

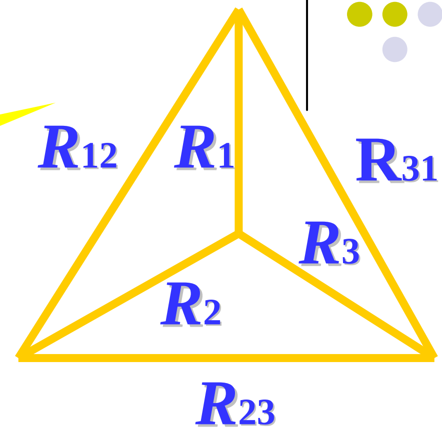
$$\mathbf{R}_{23} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \frac{\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3}{\mathbf{R}_1} \qquad \text{或} \qquad \mathbf{G}_{23} = \frac{\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3}{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2+\mathbf{G}_3}$$

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{R}_3\mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_2} \qquad \mathbf{G}_{31} = \frac{\mathbf{G}_3\mathbf{G}_1}{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2+\mathbf{G}_3}$$

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$\boxed{R_{\Delta} = 3R_Y}$$

外大内小



注意

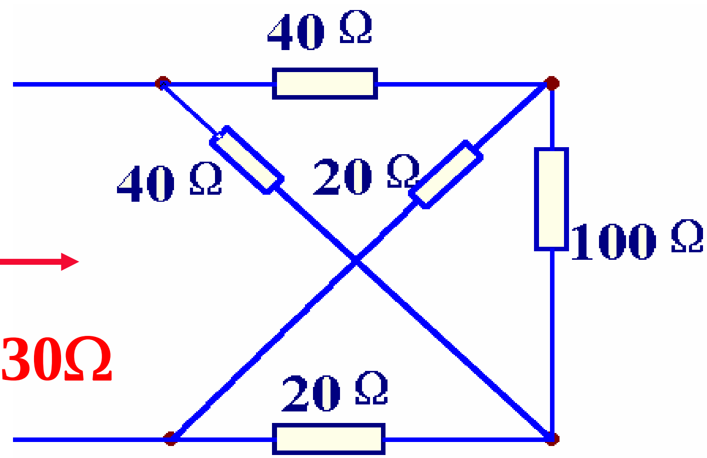
(1) 等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立。

(2) 等效电路与外部电路无关。

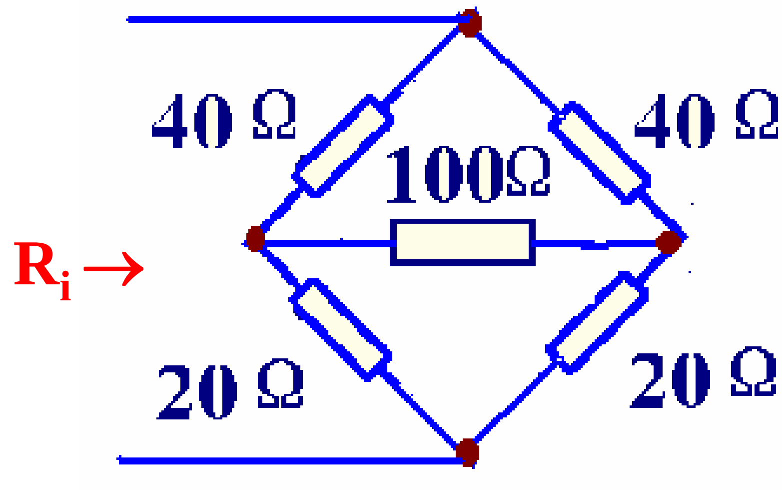
(3) 用于简化电路

练习： 求等效电阻R_i。

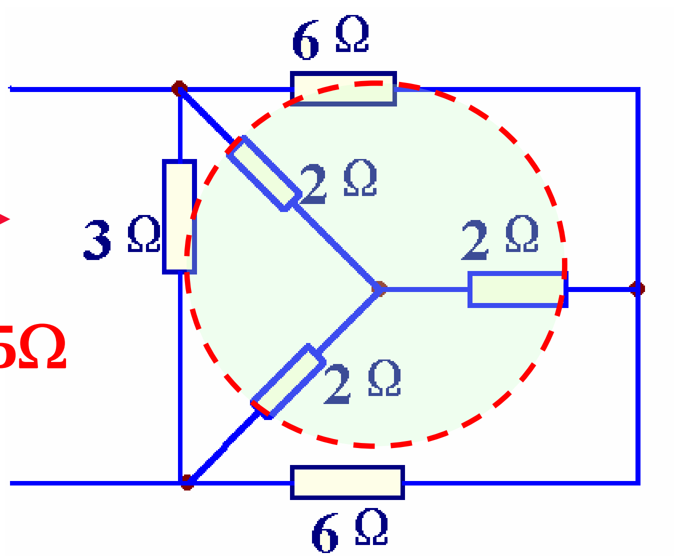
R_i →



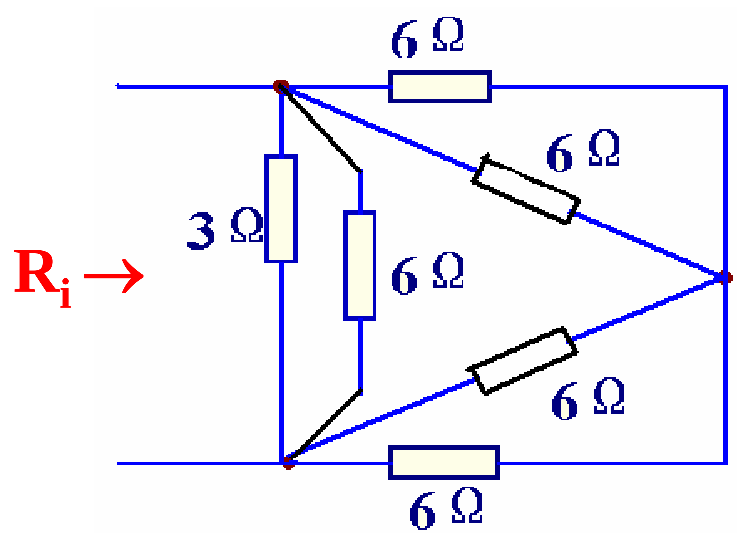
$R_i = 30\Omega$



R_i →



$R_i = 1.5\Omega$



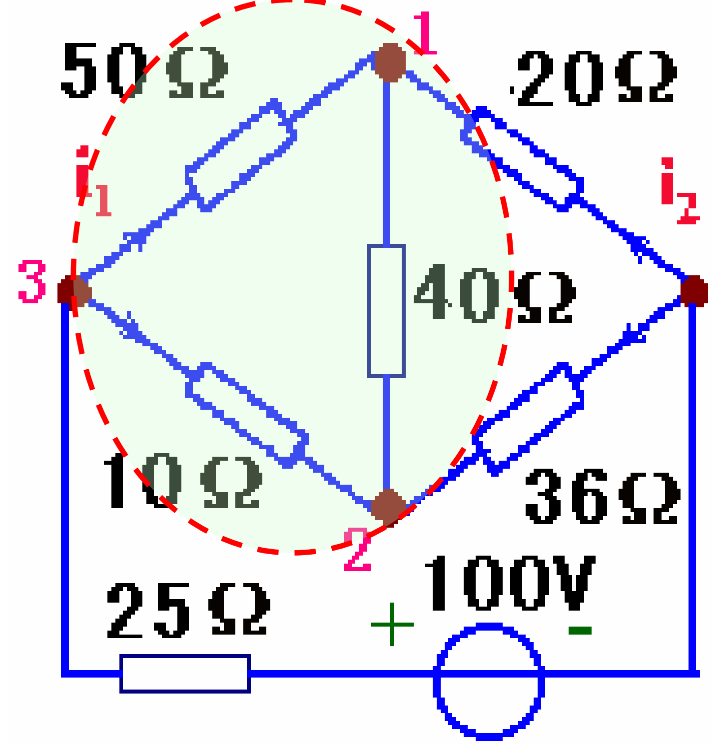
举例：图示电路，求i_1、i_2。

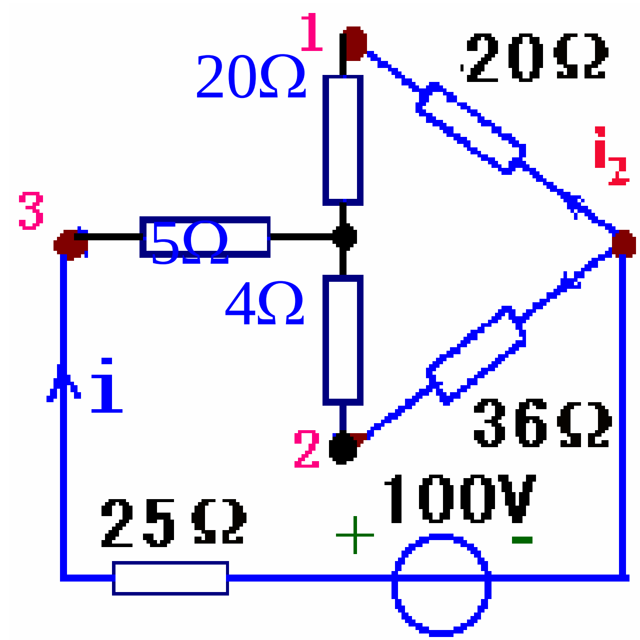
解：　将三角形连接变换为星形连接：

$$R_1=\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=\frac{50\times 40}{50+40+10}=20\ \Omega$$

$$R_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=\frac{10\times 40}{50+40+10}=4\ \Omega$$

$$R_3=\frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=\frac{50\times 10}{50+40+10}=5\ \Omega$$





解得：i=2A　　　i_2 = - 1A,

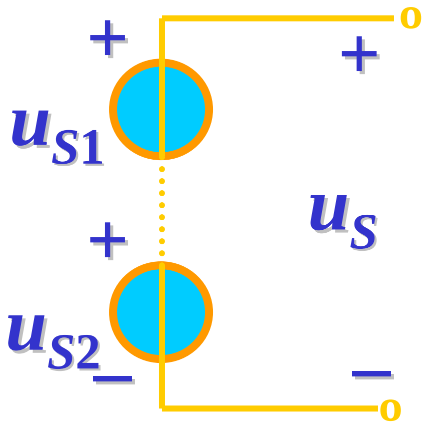
u_{31} =30V　　　i_1 =0.6A

2. 4 电源模型及等效变换

1. 理想电压源的串联和并联

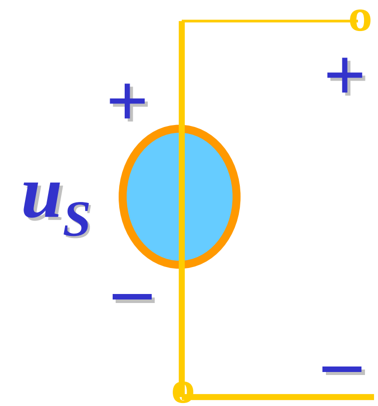
注意参考方向

● 串联

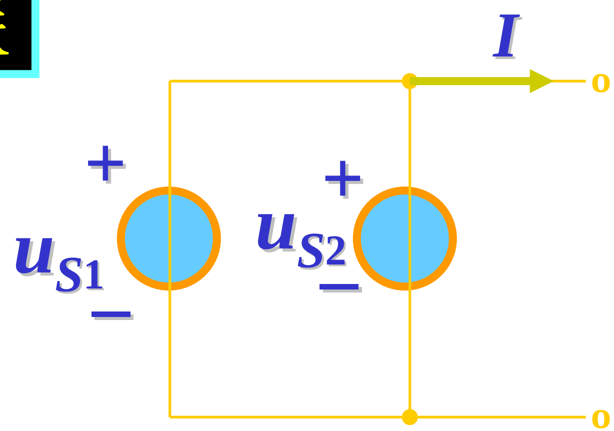


$$u_s = u_{s1} + u_{s2} = \sum u_{sk}$$

等效电路



● 并联

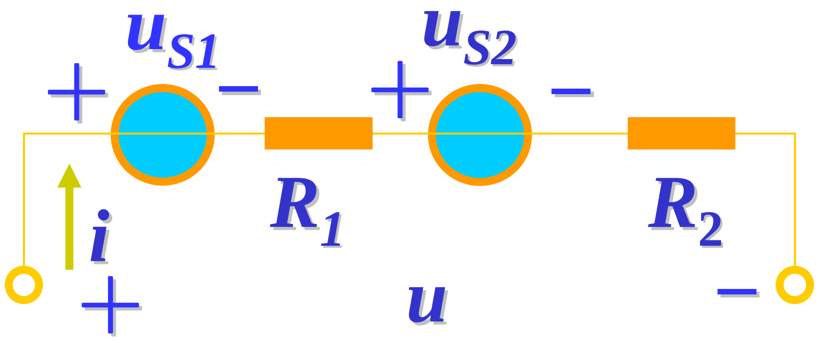


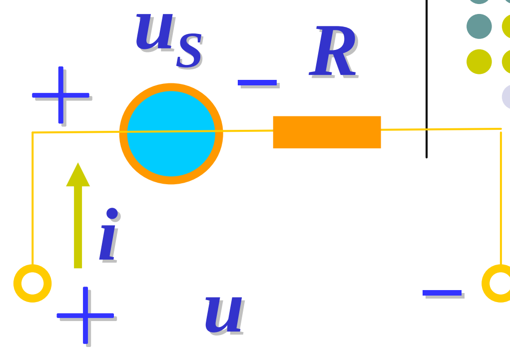
等效电路

$$u_s = u_{s1} = u_{s2}$$

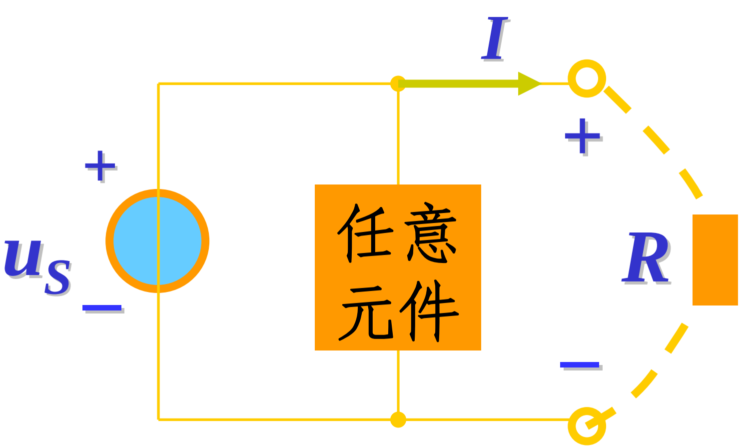
相同的电压源才能并联，电源中的电流不确定。

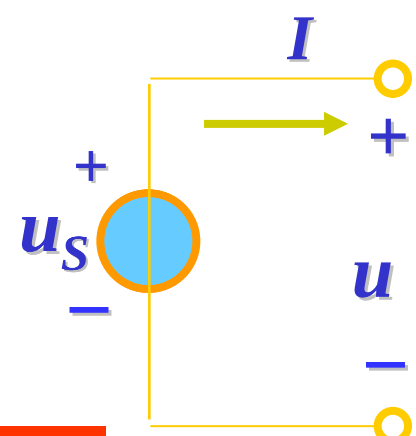
● 电压源与支路的串、并联等效





$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_S + Ri$$





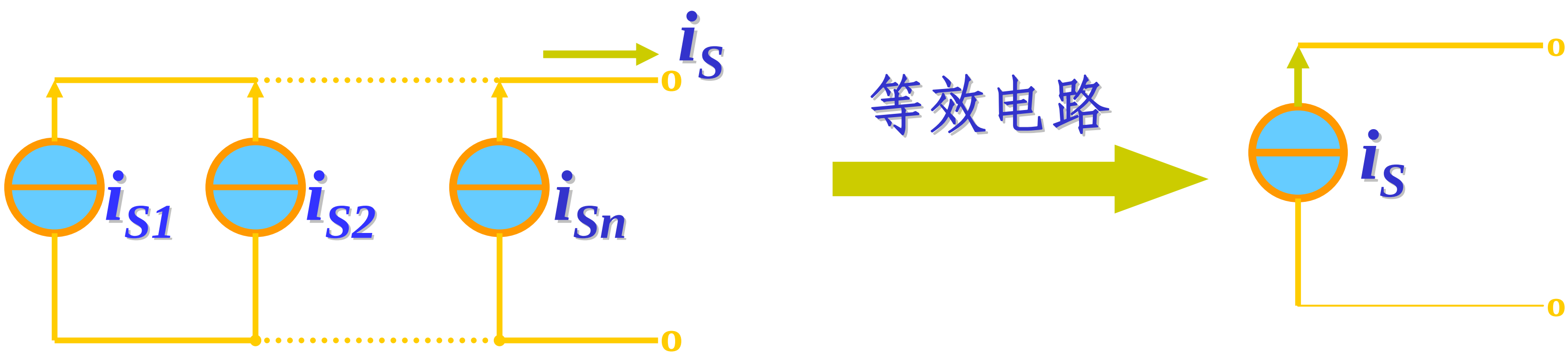
对外等效！

2. 理想电流源的串联并联

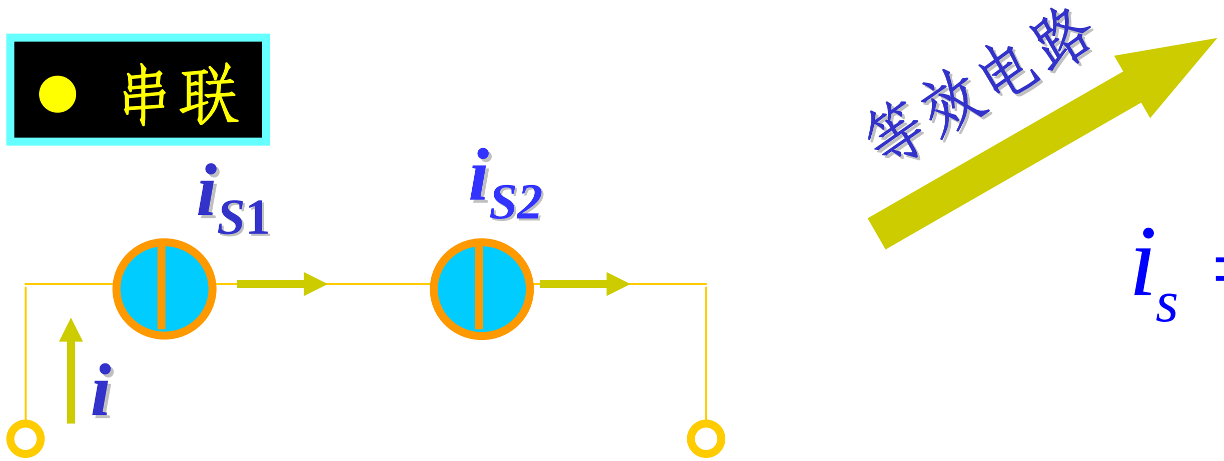
注意参考方向

● 并联

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$



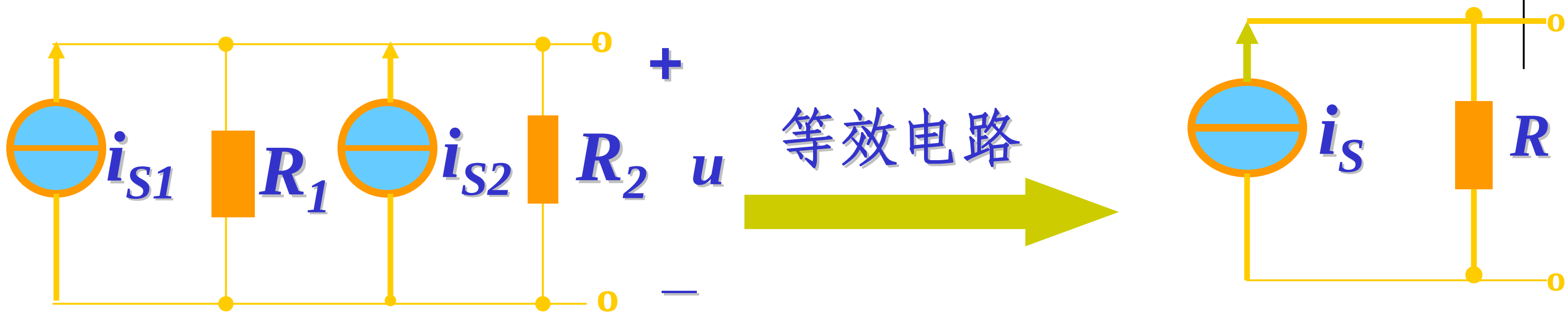
● 串联



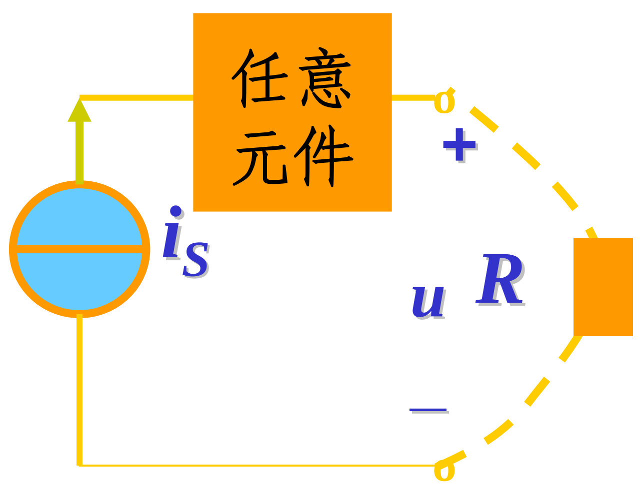
$$i_s = i_{s1} = i_{s2}$$

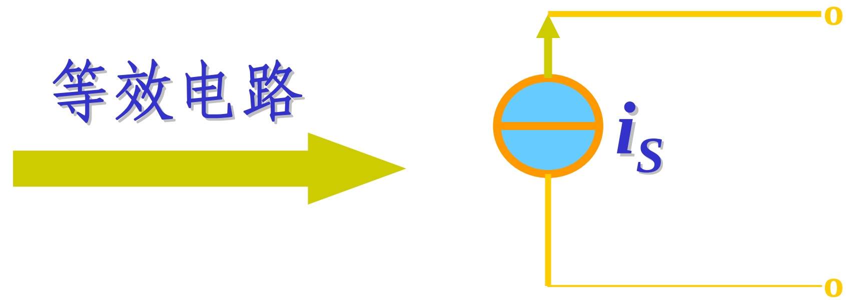
相同的理想电流源才能串联, 每个电流源的端电压不能确定

● 电流源与支路的串、并联等效



$$i=i_{s1}+u/R_1+i_{s2}+u/R_2=i_{s1}+i_{s2}+(1/R_1+1/R_2)u=i_s+u/R$$

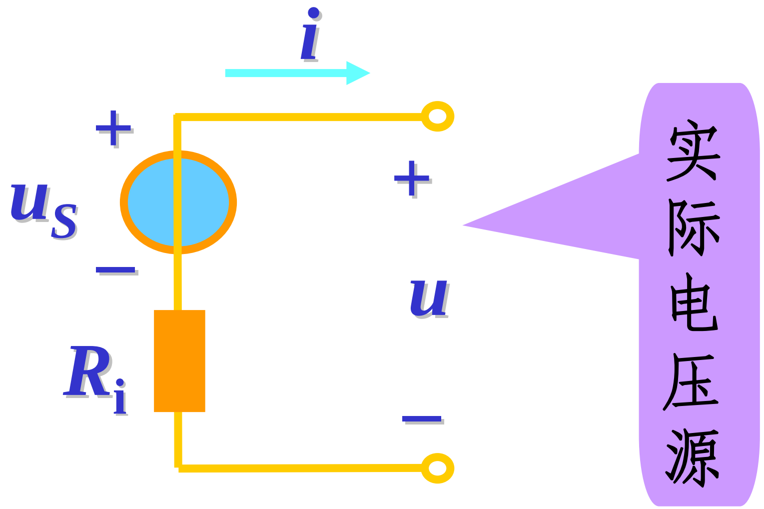


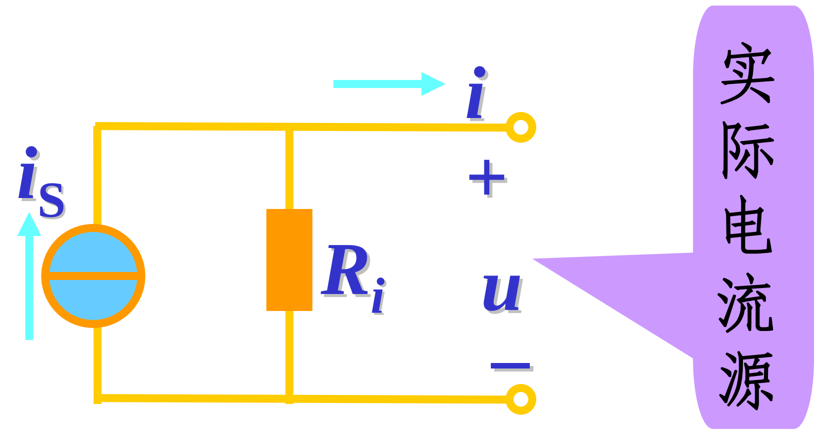


对外等效！

3．电压源和电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。





端口特性

$$u = u_S - R_i\, i$$

$$i = i_S - 1/R_i\, u$$

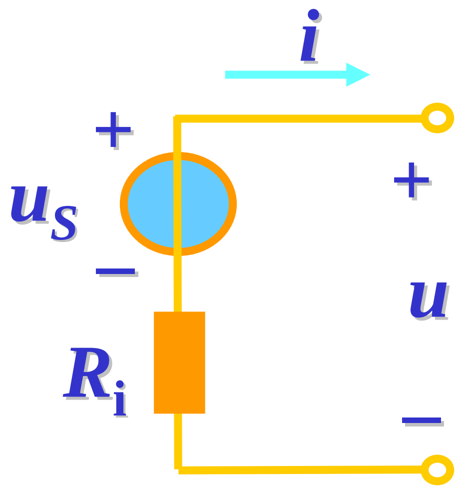
$$i = u_S/R_i - u/R_i$$

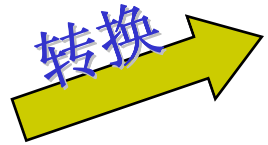
比较可得等效的条件：

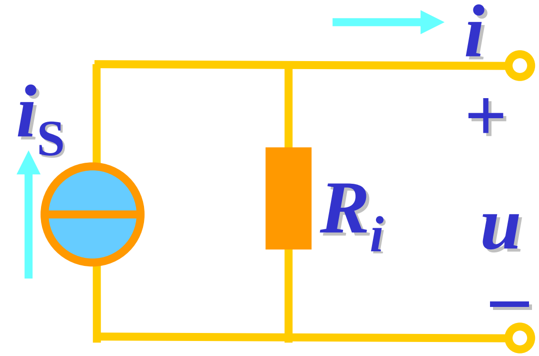
$i_S = u_S / R_i$

R_i不变

由电压源变换为电流源:

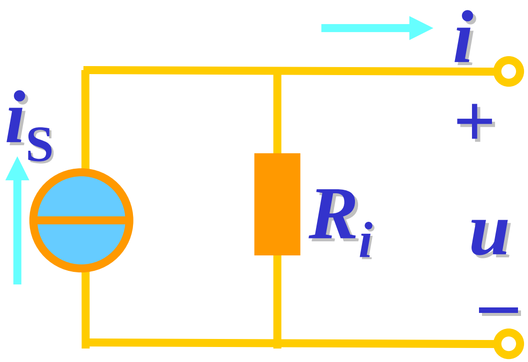


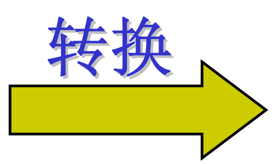


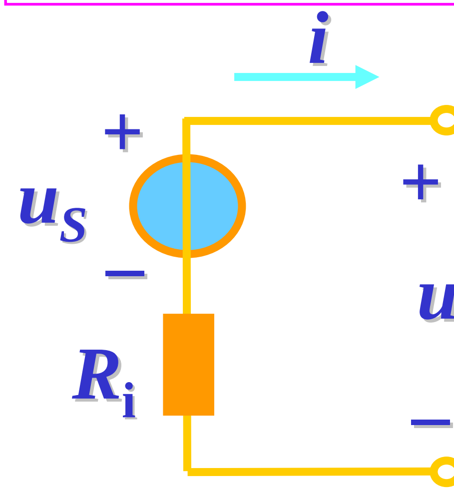


$$i_s = u_s / R_i,\quad R_i\text{不变}$$

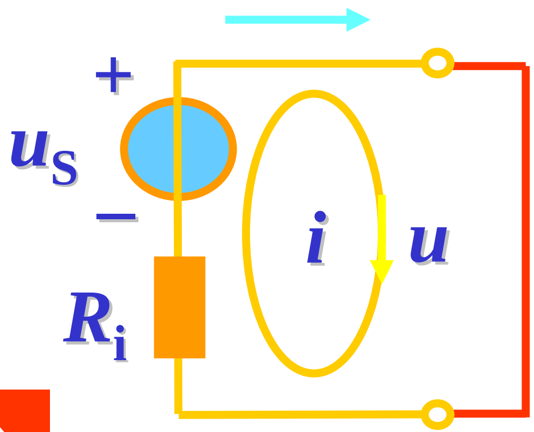
由电流源变换为电压源:

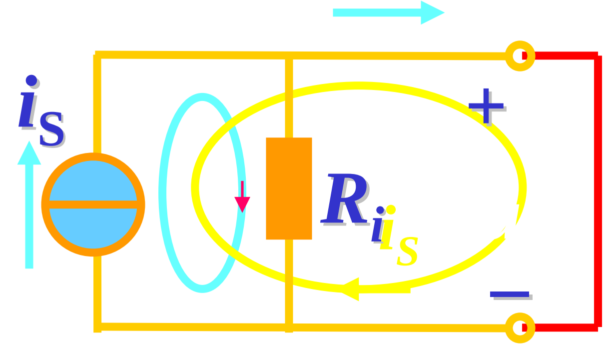






$$u_s = R_i i_s,\quad R_i\text{不变}$$





注意

(1) 变换关系

数值关系：

方向：电流源的流出端为电压源的正极。

(2) 等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

- 开路的电压源中无电流流过 R_i；

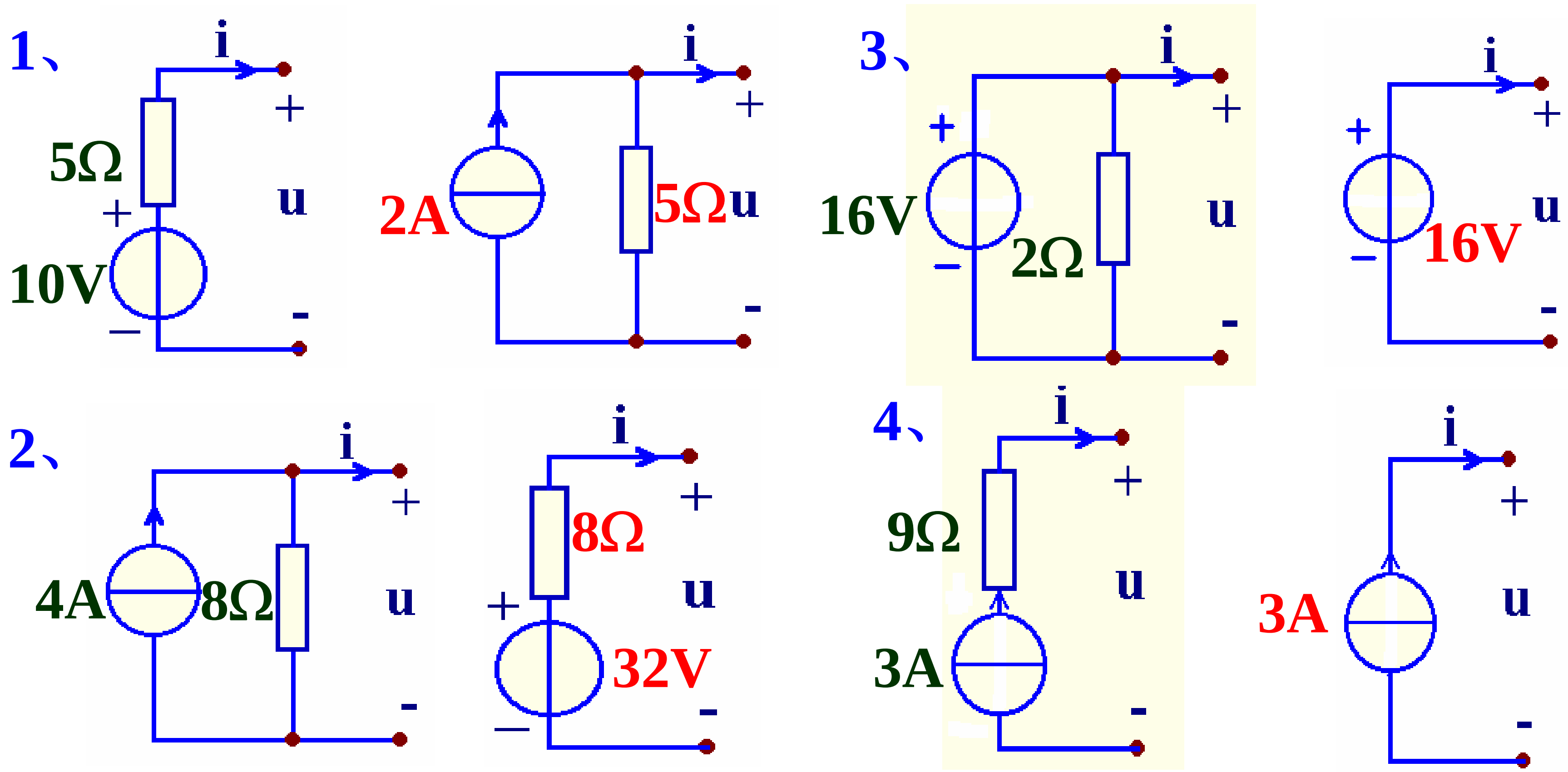
开路的电流源可以有电流流过并联电阻R_i 。

- 电压源短路时，电阻中R_i有电流；

电流源短路时， 并联并联电阻R_i中无电流。

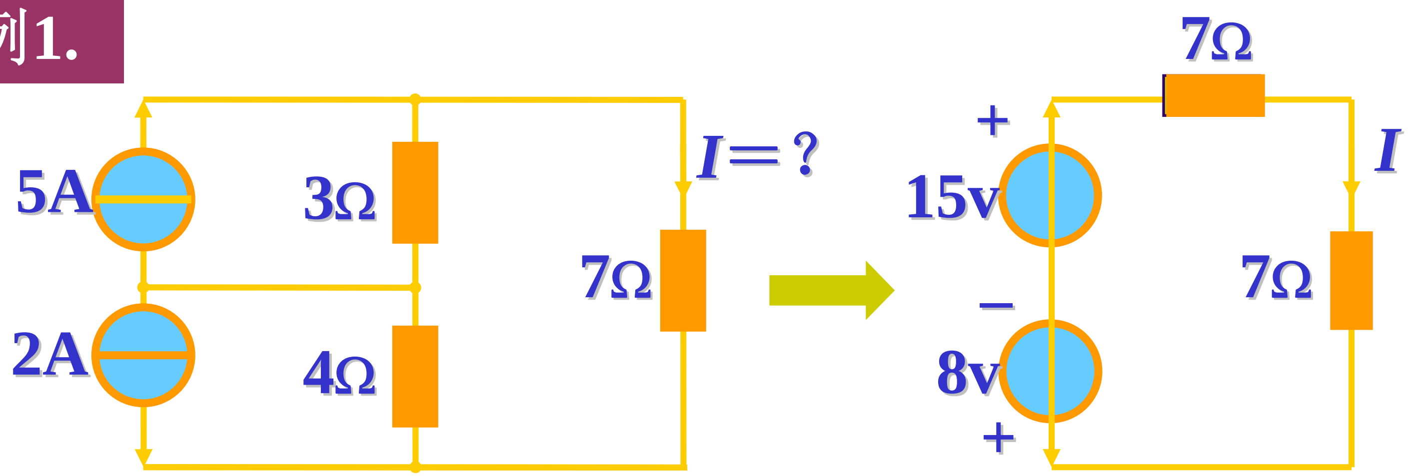
(3) 理想电压源与理想电流源不能相互转换。

练习： 利用等效变换概念化简下列电路。



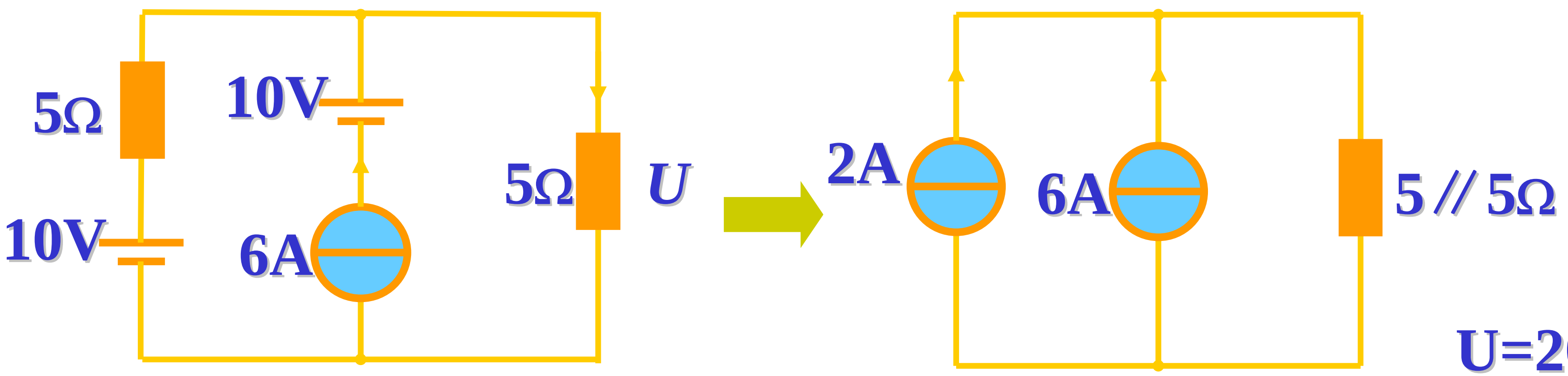
利用电源转换简化电路计算。

例1.



I=0.5A

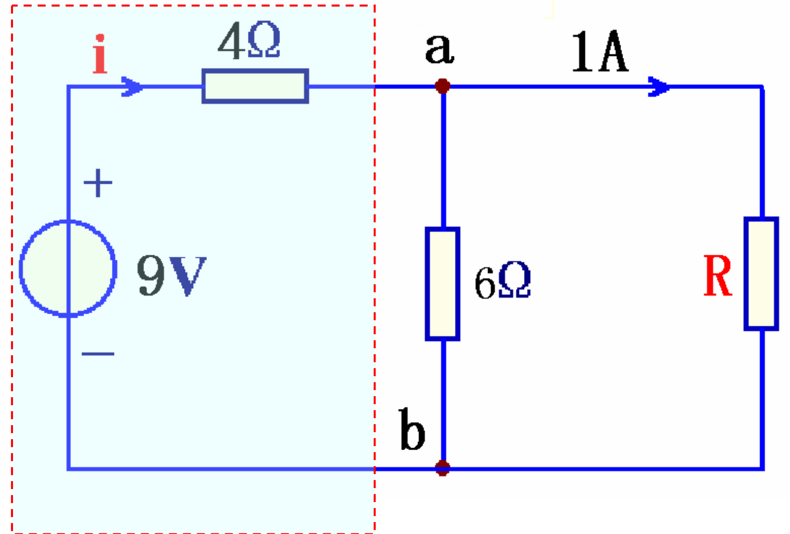
例2. *U*=?



U=20V

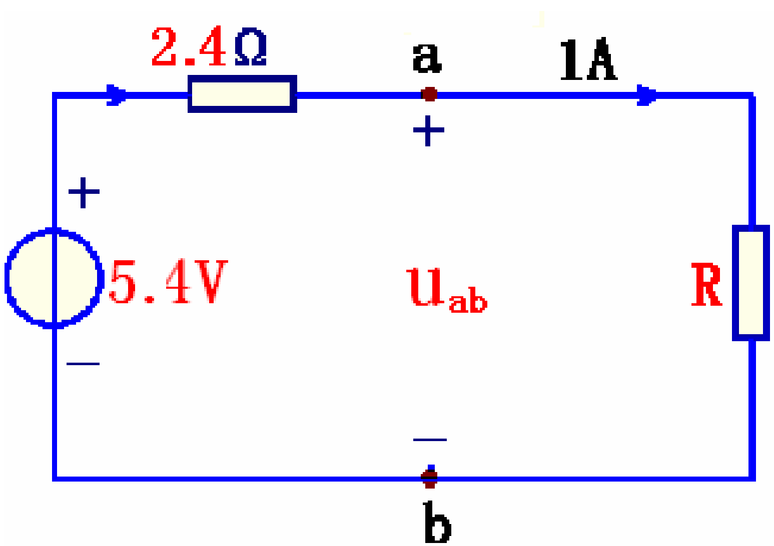
练习1：

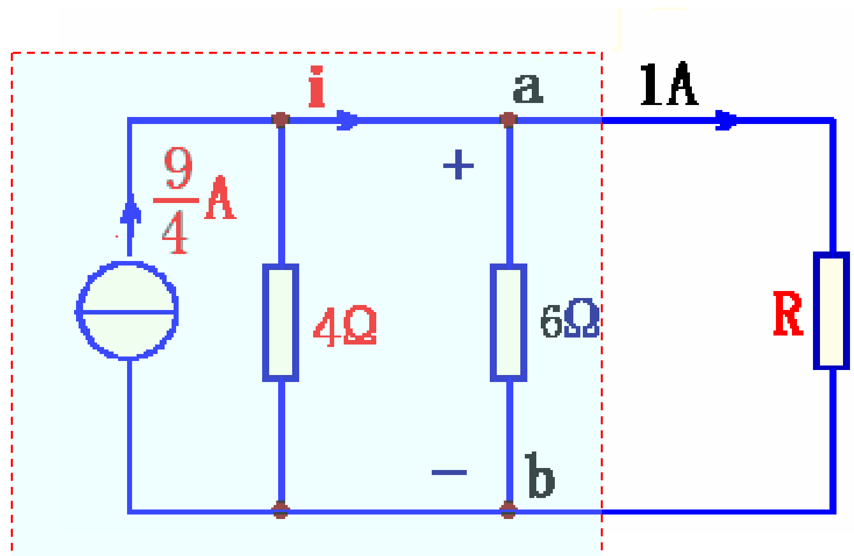
求i、电压u_{ab}以及电阻R。



解： 经等效变换，有

$u_{ab}=3V$ $i=1.5A$ $R=3\Omega$





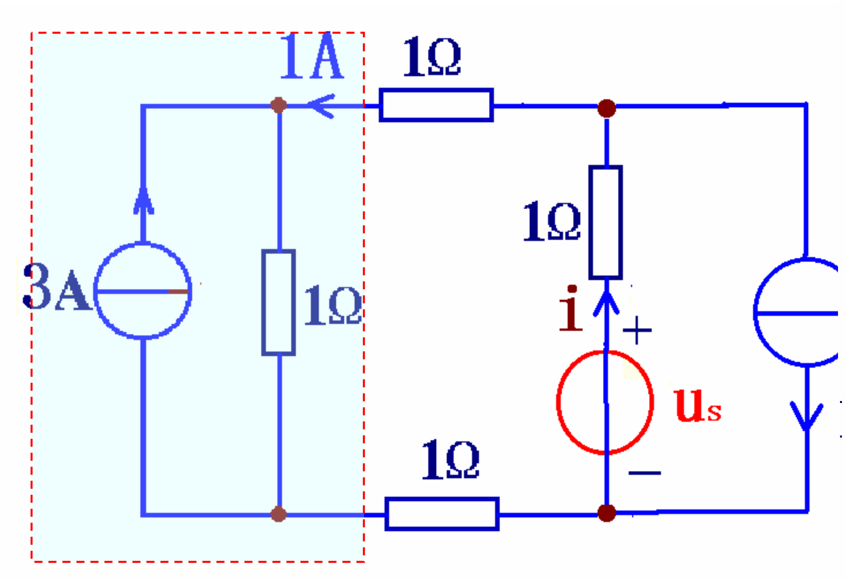
练习2：

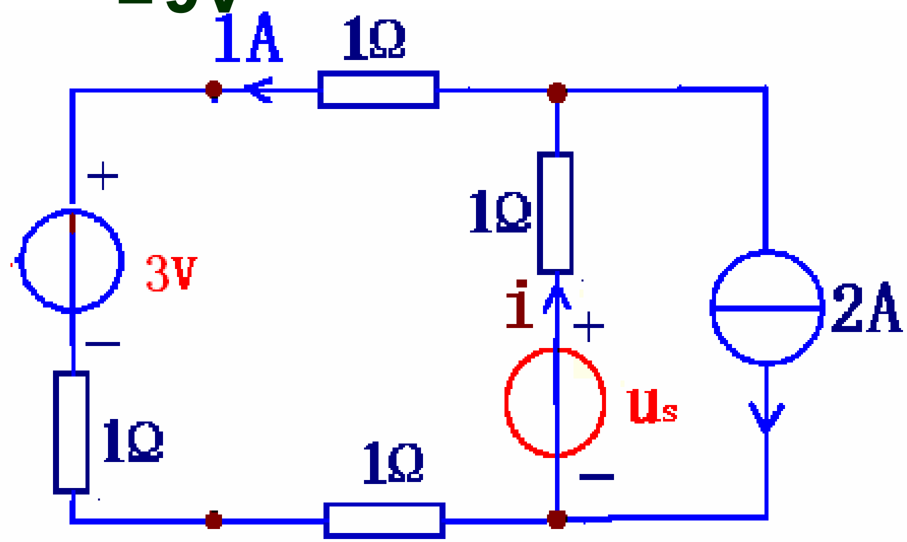
图示电路，求i、u_S。

解： i=3A　经等效变换，有

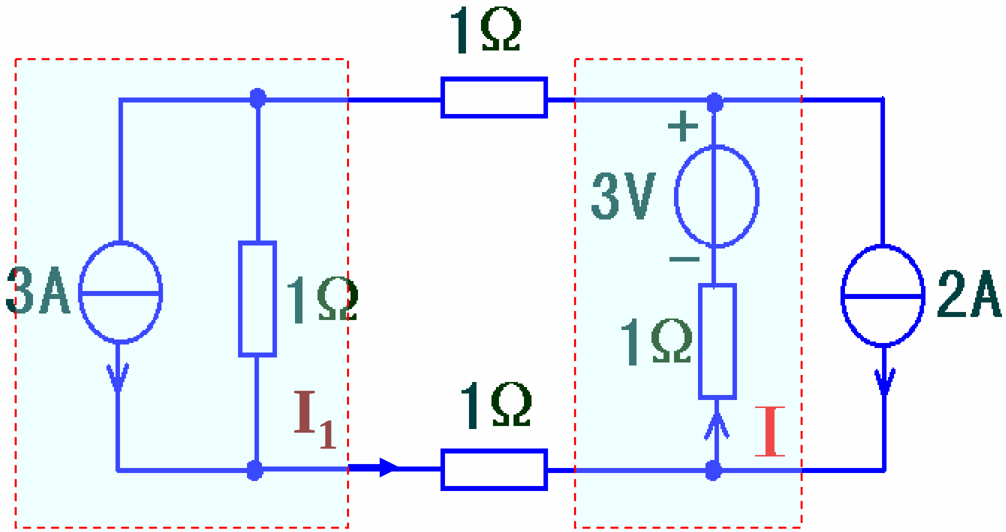
$$u_S=3x1+1x1+3+1x1+1x1$$

$$=9V$$



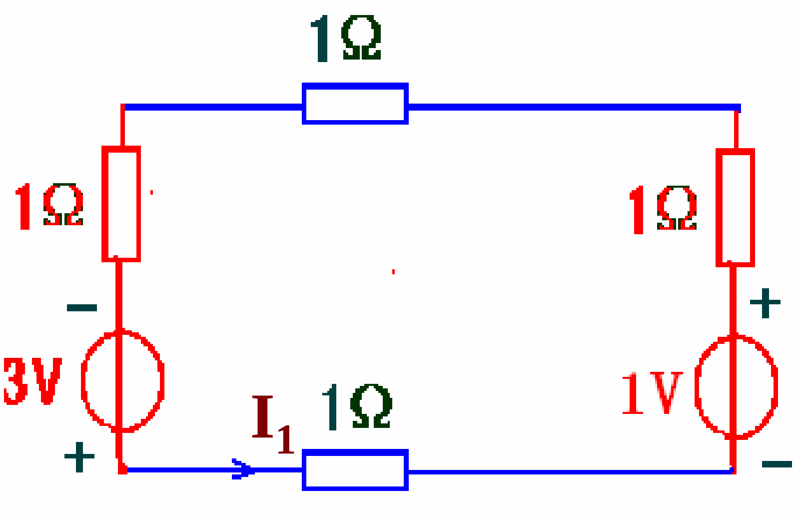


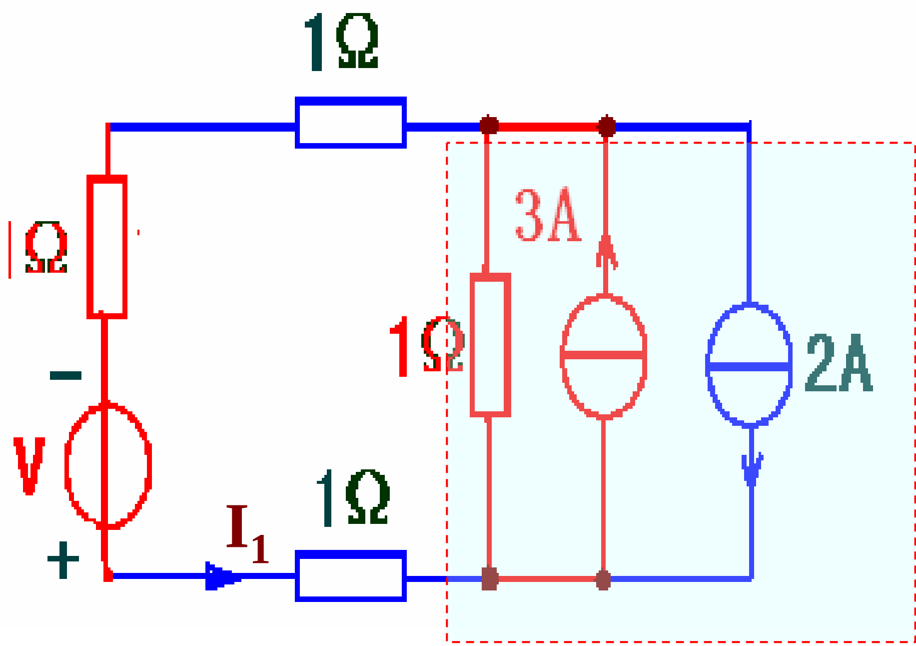
练习3：求如图所示电路中的电流I。



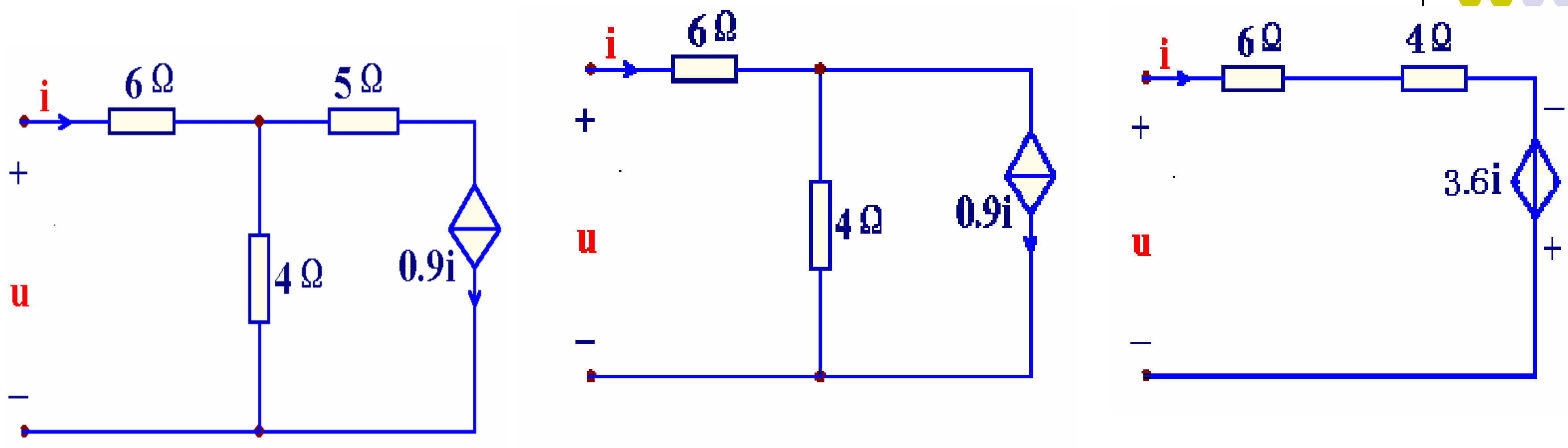
解： 经等效变换,有

$I_1 = 1A$ $I = 3A$





例2、将图示单口网络化为最简形式。(前面已讲过)

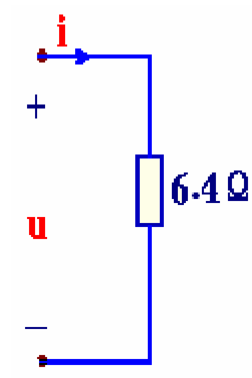


解： 单口网络等效变换可化简为右图， 由等效电路,有

$$u = 6i + 4i - 3.6i$$

$$R = \frac{u}{i} = 6.4\Omega$$

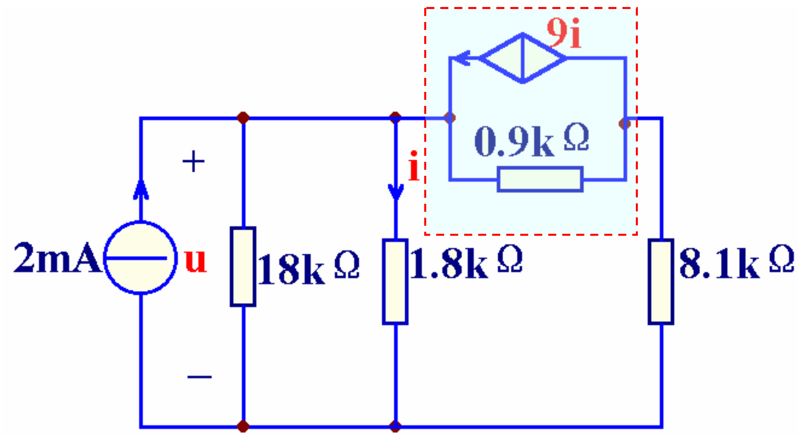
最简形式电路为:

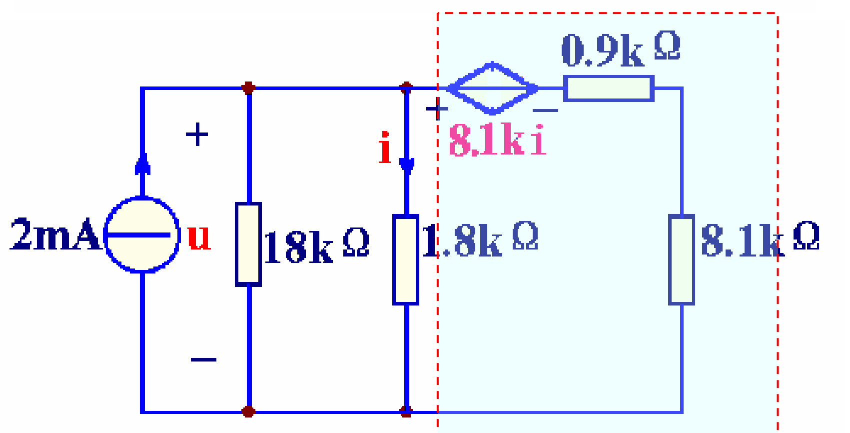


2.5 利用等效变换分析含受控源简单电路

基本分析思想： 运用等效概念将含受控源电路化简、变换为只有一个单回路或一个独立节点的最简形式，然后进行分析计算。

例：求电压u、电流i。





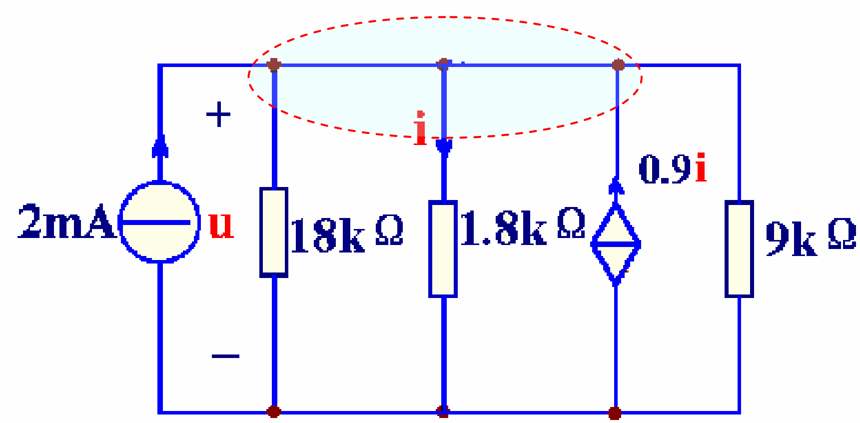
解： 由等效电路，在闭合面，有

$$2m + 0.9i = \frac{u}{18k} + \frac{u}{1.8k} + \frac{u}{9k}$$

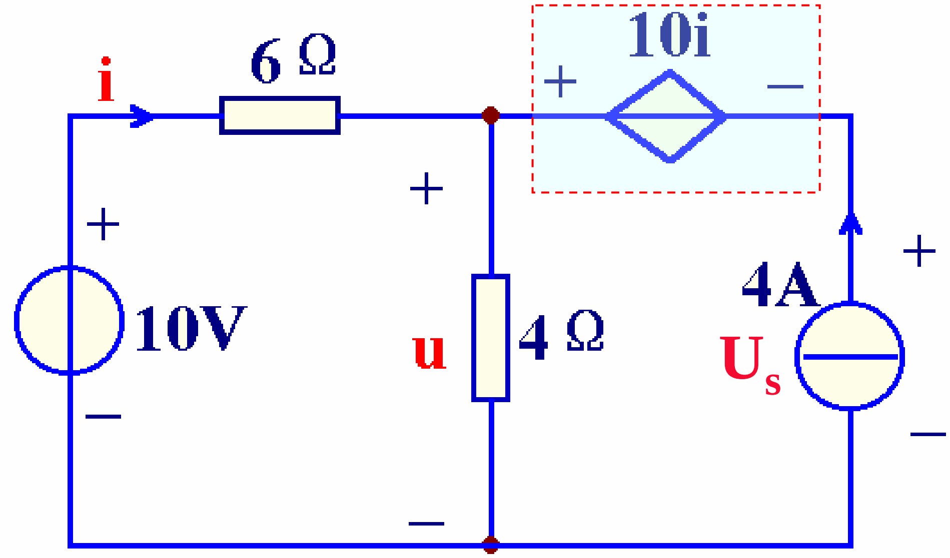
$$i = \frac{u}{1.8k}$$

$$\therefore \quad u = 9V$$

$$i = 5\,mA$$



练习：图示电路,求电压U_s。

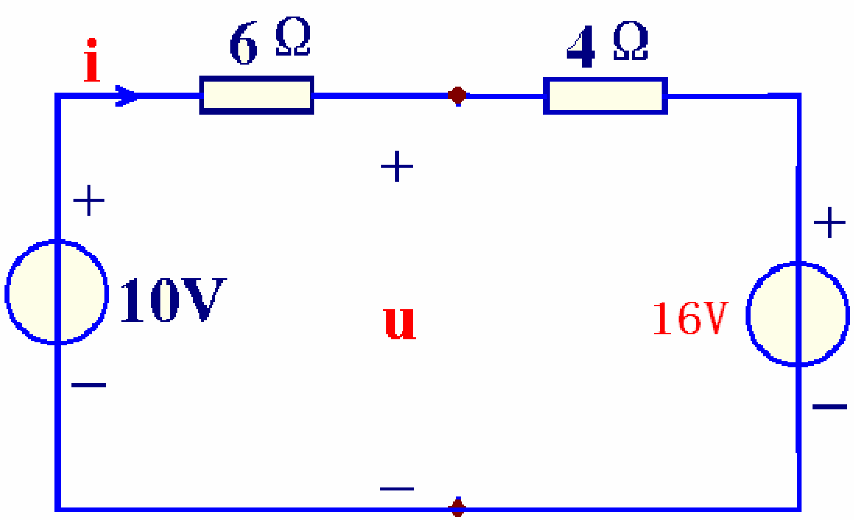


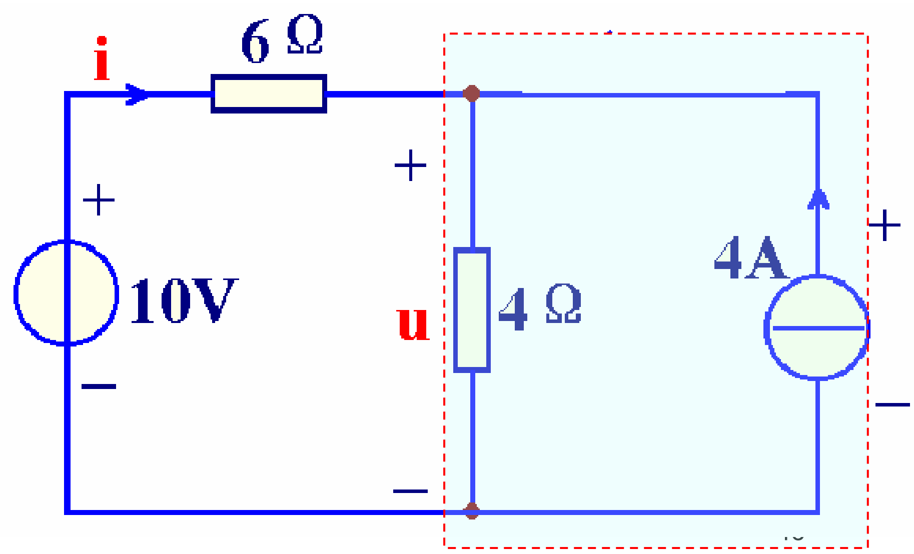
解：由等效电路,有

$$i=\frac{10-16}{6+4}=-0.6A$$

$$u=10-6i=13.6V$$

由原电路,有 $U_s=u-10i=19.6V$





本章要点：

一、等效及等效变换的概念

二、电源的连接及等效变换：

（理想电源；实际电源；实际电源间等效变换）

三、电阻的连接及等效变换：

（串联；并联；混联；星形连接与三角形连接及相互间等效变换）

四、单口网络及无源单口网络的等效变换

五、利用等效变换分析含受控源电路

（含受控源单口网络化简；含受控源简单电路分析）