第5章 波 动

第五章 波动

波动：振动的传播（振动状态的传播）

- 机械波：机械振动在媒质中的传播（弹性波）（声波、水波、地震波）
- 电磁波：$E(t)$、$B(t)$ 在空间的传播（无线电波、光波、X射线）
- 概率波：描述微观粒子的波动

机械波、电磁波——经典波

各种波的本质不同，具有不同的性质，但是都具有波动的共同特征。

①波长、频率、波速；②能量的传播；
③反射、折射；④干涉、衍射

§5.1 简谐波

横波纵波

一、波的基本概念

机械波（弹性波）：一群质点，以弹性力相联系。媒质

其中一个质点在外力作用下振动，引起其他质点也相继振动。波源

①机械波传播的只是相位(或振动状态)，介质中各质元并未"随波逐流"，在自己平衡位置附近振动。

②沿波的传播方向，各质元的相位依次落后。

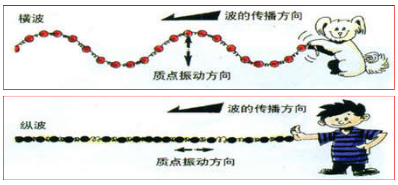
③波源振动一个周期，波向前传播一个完整波形。波动伴随着能量的传播。

电磁波既可在媒质内传播，也可在真空中传播。

简谐波：波源的简谐振动形式的传播。

横波：振动方向与传播方向（波速方向）垂直。
外形上有波峰和波谷，如：弦线上的波。

纵波：振动方向与传播方向（波速方向）一致。
纵波传播时，介质的密度发生变化，如声波。



横波纵波

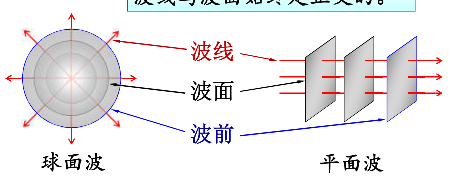
二、波的几何描述

①波线：表示波传播方向的射线。

②波面：同相位各点所组成的面（等相面）。

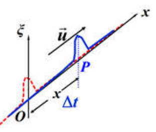
③波前：离波源最远即最前方的波面。

在均匀且各向同性的媒体中，波线与波面始终是正交的。



三、波函数

已知某点的振动情况，欲求该振动所到之处的振动情况。



波函数：各质点位移随时间与空间的变化规律用数学形式表示。

已知平衡位置在O处质元的振动函数为 $\xi_O(t,0)=f(t)$

当波沿着x轴正向传播时，因为O的振动状态传到x处要经过 $\Delta t = x/u$ 的时间

$$\xi(t,x) = f[t - x/u]$$

- 沿正向传播 $\xi(t,x)=f\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$
- 沿反向传播 $\xi(t,x)=f\left(t+\dfrac{x}{u}\right)$

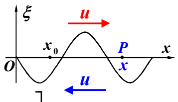
传播速度（正值）

波函数 ξ 表示x处的质元在t时刻相对于平衡位置的位移。

四、简谐波

已知x_0处质元作简谐振动并沿着x轴正向传播

$$\xi_{x_0}=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$



$$\xi(x,t)=\xi_{x_0}(t-\frac{x-x_0}{u})$$

$$\xi(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\frac{x-x_0}{u})+\varphi_0\right]$$

—沿着x轴正向传播的平面简谐波的波函数。

$$\xi(x,t)=\xi_{x_0}(t+\frac{x-x_0}{u})$$

已知x_0处的振动，反向传播求平衡位置在x处质元振动

$$\xi(x,t)=A\cos\left[\omega(t+\frac{x-x_0}{u})+\varphi_0\right]$$

为了方便，常令$x_0=0$

—沿着x轴反向传播的平面简谐波的波函数。

五、波的特征量

一、波速

在x处的质点，t时刻的相位 $\varphi=\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0$

当φ一定，确定相位所在的位置x和时间t的关系

$$x=ut-u\frac{(\varphi-\varphi_0)}{\omega}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u$$

波速—由媒质的性质决定

波速 (相速度)：某一相位沿波线方向的移动速度。

振动速度、振动加速度（区分）

$$v(x,t)=\frac{\partial\xi}{\partial t}=-A\omega\sin\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

此为平衡位置在x处的质点t时刻的振动速度

$$a=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$$

振动加速度

二、周期和频率 与波源有关，与媒质无关

波的周期和频率即波源振动的周期和频率。

波动函数

周期～ $\boxed{T=2\pi/\omega}$ $\boxed{\nu=\omega/2\pi}$ ～频率

波的频率即单位时间内通过传播方向上某一点的完整波的个数——波的时间周期性。

三、波长—确定时刻的空间周期

振动状态相同的两点间的最近距离—简谐波

同一波线上相位差2π。

波长～ $\boxed{\lambda=uT=2\pi\frac{u}{\omega}}$ $\boxed{\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}}$ $\boxed{k=2\pi/\lambda}$ ～波数

波数在2π长度内波形曲线含有的“完整波”个数。

四、简谐波的不同表示式

$$\xi(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x-x_0}{u})+\varphi_0]$$ 时间

$$\xi(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t\mp\frac{x-x_0}{\lambda})+\varphi_0]$$ 频率

$$\xi(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x-x_0}{\lambda})+\varphi_0]$$ 周期

$$\xi(x,t)=A\cos[\omega t\mp k(x-x_0)+\varphi_0]$$ 相位

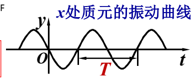
通常x_0选在O点 $x_0=0$方便

波数 $\boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{u}}$ $\boxed{\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}}$ $\boxed{\lambda=uT=2\pi\frac{u}{\omega}}$

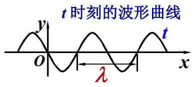
五、波函数的物理意义

波方程意F

①x不变，t可变：表示x处质点的振动方程：$\boxed{y=y(t)}$



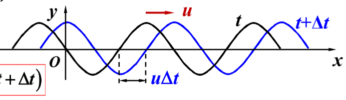
②t不变，x可变：表示t时刻，各质元离开平衡位置的位移与质元平衡位置坐标的关系：$\boxed{y=y(x)}$



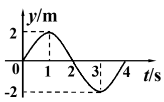
③x、t均可变，表示振动状态的传播：

$\boxed{\Delta x=u\Delta t}$

$\boxed{y(x,t)=y(x+\Delta x,t+\Delta t)}$



例1：一平面简谐波沿x轴负向传播，波速u=10m/s，x=0处质点的振动曲线如图，则波函数为(B)



A. $y=2\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{20}x+\frac{\pi}{2})$

B. $y=2\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{20}x-\frac{\pi}{2})$

C. $y=2\sin(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{20}x+\frac{\pi}{2})$

D. $y=2\sin(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{20}x-\frac{\pi}{2})$

$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, $v>0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$

负向传播取加号

$A=2$

$\omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$k=\frac{\omega}{u}=\frac{\pi}{20}$

例2 已知一个平面简谐波的波函数由下式确定～

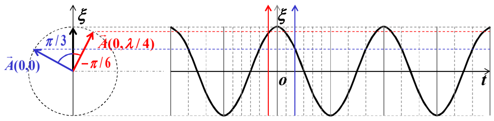
$\xi(t,x)=A\cos[\omega(t-x/u)+\pi/3]$

求：$x=\lambda/4$点的振动表达式，并画出振动曲线。

解: $\varphi=-\omega\dfrac{x}{u}+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{4}+\dfrac{\pi}{3}\ =-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$

$\xi(t,\lambda/4)=A\cos(\omega t-\pi/6)$ 纵轴向左平移$\pi/6$

$\xi(t,0)=A\cos(\omega t+\pi/3)$ 纵轴向右平移$\pi/3$



例3 已知 波函数 $\xi=0.02\cos(10\pi t+6\pi y)$ (SI)

试求：(1) T、λ、u、传播方向；

解:(1) 比较沿 y 向传播的平面简谐波标准式

$$\left.\begin{aligned}&\xi(y,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{y}{\lambda})+\varphi_0]\\&\xi(y,t)=0.02\cos(10\pi t+6\pi y)\end{aligned}\right\}$$

波沿 y 负方向传播 $A=0.02\text{m}$

$\dfrac{2\pi}{T}=10\pi \Rightarrow \boxed{T=0.2\,\text{s}}$

$\dfrac{2\pi}{\lambda}=6\pi \Rightarrow \boxed{\lambda=\dfrac{1}{3}\text{m}}$

$\Rightarrow \boxed{u=\dfrac{\lambda}{T}=1.67\text{ms}^{-1}}$

例3 已知 波函数 $\xi=0.02\cos(10\pi t+6\pi y)$ (SI)

试求：(2) 波谷经过原点的时刻;

(3) $t=6$ s 时各波峰的位置。

解: (2) 原点O处质点的振动方程为$\xi=0.02\cos 10\pi t$

当波谷经过O点时，$-0.02=0.02\cos(10\pi t)$

质点O的相位为 $10\pi t=(2k+1)\pi\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

波谷经过O点的时刻 $\boxed{t=(2k+1)/10}$ $\boxed{k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}$

(3) $\xi(y,6)=0.02\cos(60\pi+6\pi y)$

波峰位置处应满足 $0.02=0.02\cos(6\pi y)$

$\boxed{6\pi y=2k\pi} \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{k}{3}}$ $\boxed{k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots}$

§ 5.2 波动方程与波速

一、波动方程

①一维波动方程：　$\xi(t,x)=f(t\mp x/u)$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=f''(t\mp\frac{x}{u})\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}f''(t\mp\frac{x}{u})$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$ 一维波动方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\omega^2\xi=0$$ 简谐振动方程

如果是简谐振动的传播，简谐波的波函数就是波动方程的解。

②三维波动方程：$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

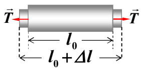
二、物质的弹性

①弹性限度：能使物体的形状、体积发生变化并能够完全复原的外力作用限度。对应弹性形变。

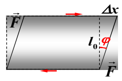
②应力：作用在截面上的力与截面面积之比。

应力＝F/S

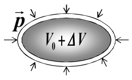
③应变：物体在应力作用下其长度、形状或体积的变化与其原始数值之比。常见类型有：



线应变 $=\frac{\Delta l}{l_0}$



切应变 $=\frac{\Delta x}{l_0}$



体应变 $=\frac{\Delta V}{V}$

三、胡克定律：在弹性限度内，应力和应变成正比。该比值称为弹性模量。

①弹性绳上的横波：$u=\sqrt{T/\eta}$　$\begin{cases}T\sim\text{绳的张力}\\ \eta\sim\text{绳的线密度}\end{cases}$

②固体棒中的纵波：$u=\sqrt{Y/\rho}$　$\begin{cases}Y\sim\text{杨氏弹性模量}\\ \rho\sim\text{体密度}\\ k\sim\text{弹性系数}\end{cases}$

$Y=(F/S)/(\Delta l/l_0)$

$F=(YS/l_0)\Delta l=k\Delta l\to k\propto(1/l_0)$

③固体内部的横波：$u=\sqrt{G/\rho}$　$\begin{cases}G\sim\text{切变弹性模量}\\ \rho\sim\text{体密度}\end{cases}$

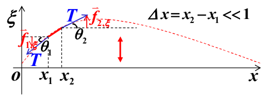
$G=(F/S)/(\Delta x/l_0)$　　$Y>G\to u_{纵}>u_{横}$

④流体内部的声波：$u=\sqrt{K/\rho_0}$　$\begin{cases}K\sim\text{体积弹性模量}\\ \rho_0\sim\text{原密度}\end{cases}$

$K=-\Delta P/(\Delta V/V_0)$

紧弦中的横波

弦中的张力为T，沿切线方向，质元竖直方向振动。设弦的总长度为1。



$$a_{\Delta x}=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\approx(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2})_1\approx(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2})_2\ \Rightarrow\ ma=(\eta\Delta x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=f_{2,\xi}-f_{1,\xi}$$

$$\eta\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{\Delta x}(T\sin\theta_2-T\sin\theta_1)\qquad \sin\theta\to\tan\theta=(\frac{\partial\xi}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{T}{\eta}\frac{(\partial\xi/\partial x)_2-(\partial\xi/\partial x)_1}{\Delta x}\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{T}{\eta}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

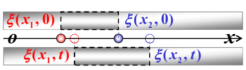
$$u=\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$ 弦上横波波速

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=u^2(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2})$$

长杆中的纵波

$\Delta x=x_2-x_1<<1$

设质心坐标为x，加速度为a，质元水平方向振动。设杆的总长度为1。



$$a_{\Delta x}=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\approx(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2})_1\approx(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2})_2\ \Rightarrow\ ma=(\rho S\Delta x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=F_2-F_1$$

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{\Delta x}(\frac{F_2}{S}-\frac{F_1}{S})\qquad \frac{F_1}{S}=Y(\frac{\partial\xi}{\partial x})_1\ ,\ \frac{F_2}{S}=Y(\frac{\partial\xi}{\partial x})_2$$

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=Y\frac{(\partial\xi/\partial x)_2-(\partial\xi/\partial x)_1}{\Delta x}\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$ 杆中纵波波速

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=u^2(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2})$$