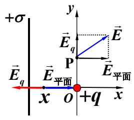
17-6：一无限大电荷面密度为+σ的均匀带电平面，另有一点电荷+q位于坐标原点。(1)在图中定性地标出P点场强的方向；(2) 计算出图中场强为零的点的具体位置。

解：(1) P点场强 $\vec{E}$ 的方向如图所示

(2) $\vec{E}_{平面}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$



$$\vec{E}_q=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_{平面}+\vec{E}_q=0$$

场强为零的点在x轴上，具体位置 $x=-\sqrt{\dfrac{q}{2\pi\sigma}}$

导体静电平衡的概念：在导体内部和导体表面都没有自由电荷的定向移动。

条件 $\begin{cases}\text{场强：导体内部 } \vec{E}_{内}\equiv 0\text{，导体 } \vec{E}_{表面}\perp\text{表面}\\ \text{电势：导体为等势体，其表面为等势面。}\end{cases}$

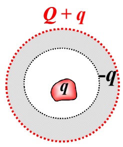
① $\vec{E}_{内}\equiv 0$ 是导体表面电荷与导体外部电荷产生的电场在导体内部叠加的总效果。

② $E_{表}=\sigma/\varepsilon_0$，当导体处于外场后，此时$\sigma$为电荷重新分布后该点的电荷面密度，$E_{表}$为电荷重新分布后该处的合场强。

③ 孤立的带电导体：外表面各处的电荷面密度与该处曲率成正比。 $\sigma\propto\dfrac{1}{R}$

静电平衡导体的电荷分布

①导体(实心)内部无净电荷。

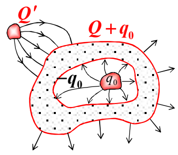


②若空腔导体内部无净电荷，导体电荷只能分布在外表面；

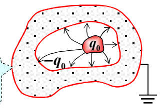
③若空腔导体内有电荷q，电荷分布在内、外两个表面上，导体的内表面电荷$-q$，外表面电荷$Q+q$。

静电屏蔽

① 对于封闭的空腔导体 腔内电场不受腔外电荷影响(不论接地与否)—屏蔽外电场。



②接地的封闭空腔导体，其外部电场不受腔内电荷影响。

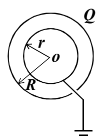


接地导体
电势为零

一个接地的空腔导体可以隔离内外电场的影响。

例6 两个同心金属球壳，它们离地球很远，内球壳用细导线穿过外球壳上的绝缘小孔与地连接，外球壳上带有正电荷Q，问：内球壳上所带电荷为何？

解：设内球壳带电 q



$$U_{内}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$q=-\frac{r}{R}Q$$

内球壳上所带电荷为负电荷。

例7 求电偶极子在外场中所具有的电势能。

解：设+q和－q所在处的电势分别为W_+和W_-

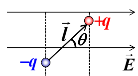
电偶极子在外场中所具有的电势能为

$$W=W_+ + W_- = qU_+ + (-q)U_- = q(U_+ - U_-)$$

$$=q\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_-^+ E\cos\theta\, dl$$

$$=-qE\cos\theta\int_-^+ dl = -qlE\cos\theta$$

$$=-pE\cos\theta$$



$\boxed{\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}}$

$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$
- 当$\vec{p}$与$\vec{E}$同向时，电势能最低，稳定平衡位置；
- 当$\vec{p}$与$\vec{E}$垂直时，其电势能为零；
- 当$\vec{p}$与$\vec{E}$反向时，电势能最大；稍有扰动，就转到稳定平衡位置。

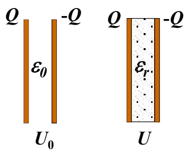
§ 7.4 静电场中的电介质

一、电介质的极化

1. 电介质对电场的影响

$$\frac{U_0}{U}=\varepsilon_r>1 \qquad \boxed{\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}}$$

实验发现



ε_r 称为电介质的相对电容率，只与电介质自身的性质有关。

① $U_0>U$ → 电介质降低了电势。

$$\left.\begin{array}{l}U_0=E_0 d\\ U=E\,d\end{array}\right\}E_0>E$$

② 电介质减弱了场强。

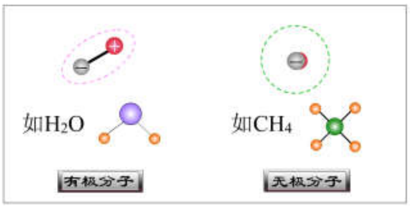
$$\left.\begin{array}{l}C_0\equiv\dfrac{Q}{U_0}\\ C\equiv\dfrac{Q}{U}\end{array}\right\}C_0<C$$

③ 电介质增大了电容。

2. 电介质的分子：微弱电性的显现与两种分子有关。

①有极分子：分子结构不对称，分子的正、负电荷重心不重合，存在固有的电偶极矩。HCl, H_2O, CO

②无极分子：分子结构呈对称，分子的正、负电荷重心重合，不存在固有的电偶极矩。He, H_2, O_2, CO_2

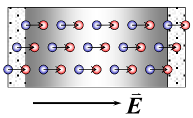


3. 电介质的极化：在外电场作用下，电介质内部所有分子的电偶极矩的矢量和不再为零的现象，或者说介质表面产生电荷的现象称为电介质的极化。

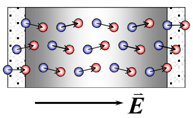
①取向极化：在外电场的作用下，有极分子的固有电矩趋向电场方向，电偶极矩的矢量和不为零。

②位移极化：在外电场的作用下，无极分子的感生电矩沿着电场方向，电偶极矩的矢量和不为零。

无极分子的位移极化



有极分子的取向极化



二、极化强度

1. 极化电荷：电介质被极化后，内部任意区域仍表现为电中性，但在表面附近区域却出现了非电中性的电荷薄层，称为面极化电荷或面束缚电荷。

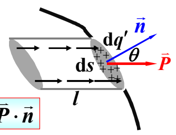
2. 极化强度：单位体积内分子的电偶极矩的矢量和。

$$\boxed{\vec{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\left(\sum\vec{p}_i/\Delta V\right)}$$ 单位：$C\cdot m^{-2}$

3. 实验表明：当电介质中的电场强度不太强时，对各向同性的均匀电介质，其任一点的电极化强度与该点的场强成正比。$\boxed{\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}}$ χ_e 电介质的电极化率

电极化率χ_e与电场强度E无关，取决于电介质的种类。

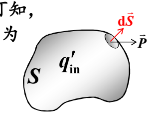
4. 极化强度与极化电荷的关系：



在均匀的电介质中 $P=\dfrac{\mathrm{d}q'\cdot l}{\mathrm{d}S\cdot l\cos\theta}=\dfrac{\sigma'}{\cos\theta}$

$\sigma'=\mathrm{d}q'/\mathrm{d}S=P\cos\theta=P_n$ $\boxed{\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}}$

设S为电介质内部任一闭合曲面，由上式可知，由于电极化穿过$\mathrm{d}S$而移出闭合曲面的电荷为



$$\mathrm{d}q'_{out}=\sigma'\mathrm{d}S=P\cos\theta\,\mathrm{d}S=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

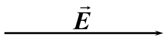
$$q'_{out}=\oiint_S\mathrm{d}q'_{out}=\oiint_S\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

根据电荷守恒定律，由于极化而留在闭合曲面内的多余的电荷即体束缚电荷量为

$$\boxed{q'_{in}=-q'_{out}=-\oiint_S\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

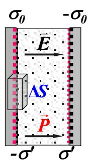
闭合曲面内的体束缚电荷等于通过该闭合曲面的电极化强度通量的负值。

电介质的极化与导体的静电感应宏观特点对比



介质上的极化电荷	导体上的感应电荷
相对较少	相对较多
内部一小体积可含净电荷	电荷只分布在表面
分离后撤去电场，呈电中性。	分离后撤去电场，一般都带电。

三、电位移　电介质中静电场的高斯定理



介质中的静电场E $\begin{cases}\text{自由电荷}Q_0 \\ \text{束缚电荷}Q'\end{cases}$ 共同作用产生。 $\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'}$

在有介质存在时，计算电场强度电通量

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Big(\sum_{in} q_0+\sum_{in} q'\Big) \qquad \boxed{\sum_{in} q'=-\oint\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}}$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Big(\sum_{in} q_0-\oint\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}\Big)$$

电位移矢量

$$\oint\!\!\oint_S (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=\sum_{in} q_0 \qquad \text{令}\ \vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

电介质中静电场的高斯定理 $\boxed{\Phi_D=\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{in} q_0}$

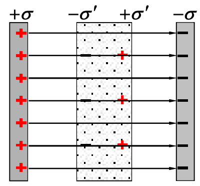
在静电场中通过任一闭合曲面S的电位移通量Φ_D等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\vec{E} \qquad \boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$

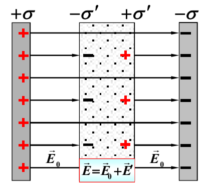
ε_r电介质的相对介电常量，ε电介质的介电常量。

电位移矢量：同时描述电场和电介质极化的复合矢量。

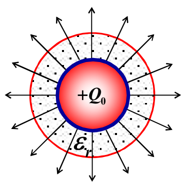
电位移线起于正自由电荷，止于负自由电荷。



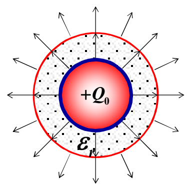
介质区域的$\vec{D}$不变。



因退极化场的存在，介质区域的$\vec{E}$变弱。



介质区域的电位移线不变。



因退极化场的存在，介质区域的场强变弱。

$\vec{D}$线 起于 正的自由电荷　止于 负的自由电荷

$\vec{E}$线 起于 正的$\begin{cases}\text{自由}\\ \text{极化}\end{cases}$电荷　止于 负的$\begin{cases}\text{自由}\\ \text{极化}\end{cases}$电荷

例1 平行板电容器充满了极化率为χ_e的均匀电介质，已知充电后金属板上的自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$

求：电介质内部的$\vec{E}$和$\vec{P}$以及电介质表面的$\pm\sigma'$

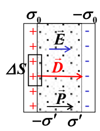
解：在电介质内应用$\vec{D}$的高斯定理和 $\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$

$$\Phi_D=\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$$

$$0+D\Delta S=\sigma_0\Delta S \Rightarrow D=\sigma_0$$

$$E=D/\varepsilon_r\varepsilon_0=\sigma_0/\varepsilon_r\varepsilon_0=\sigma_0/\varepsilon_0(1+\chi_e)$$

$$\boxed{E=E_0/\varepsilon_r}$$



$$P=\chi_e\varepsilon_0 E,\quad \sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n} \Rightarrow P=\sigma'=\chi_e\varepsilon_0\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}=\frac{\chi_e\sigma_0}{1+\chi_e}$$

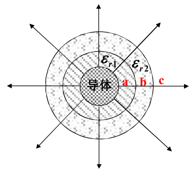
例2 均匀带电导体柱，带电量为+Q，柱外包两层同轴介质柱壳，相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}，外面为真空，其横截面如图所示。问（1）a、b、c三区域的电位移矢量是否相等；（2）三区域的电场强度是否相等；（3）在图中画出电位移线。

解：(1) $Q=\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=D\cdot 2\pi rL$

$D=\dfrac{Q}{2\pi rL}$　不相等

(2) $E=D/\varepsilon_r\varepsilon_0$　不相等

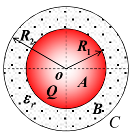
(3) 见图



例3 在半径为R_1的金属球之外有一层半径为R_2的均匀电介质，金属球带电 Q，相对介电常数ε_r。

求：空间的电位移、场强、电势分布，及介质表面极化电荷面密度。

解：由对称性分析 $\vec{E}$ 和$\vec{D}$均沿半径方向。

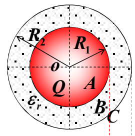


$$Q=\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

$0\le r<R_1$: $D_A=\dfrac{0}{4\pi r^2}$, $E_A=0$

$R_1<r<R_2$: $D_B=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $E_B=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}$

$R_2<r<\infty$: $D_C=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $E_C=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



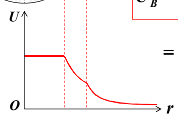
$$U_A=\int_r^{R_1}\vec{E}_A\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_B\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_C\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=0+\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}+\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

$$U_B=\int_r^{R_2}\vec{E}_B\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_C\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

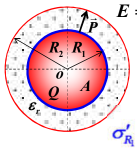
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$



$$U_C=\int_r^{\infty}\vec{E}_C\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$$

$$E=\begin{cases}0 & 0\le r<R_1\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_2<r<\infty\end{cases} \qquad P=\begin{cases}0\\ \dfrac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\\ 0\end{cases}$$



表面总极化电荷

$$\sigma'_{R_1}=\vec{P}\cdot\vec{n}=-P=-\frac{(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_1^2}Q \qquad Q'_{R_1}=\sigma'_{R_1}4\pi R_1^2$$

$$\sigma'_{R_2}=\vec{P}\cdot\vec{n}=P=\frac{(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}Q \qquad Q'_{R_2}=\sigma'_{R_2}4\pi R_2^2$$

导体与介质界面总电荷 $Q+Q'=Q-\dfrac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}Q=\dfrac{1}{\varepsilon_r}Q<Q$