



7.5有向无环图及其应用--关键路径

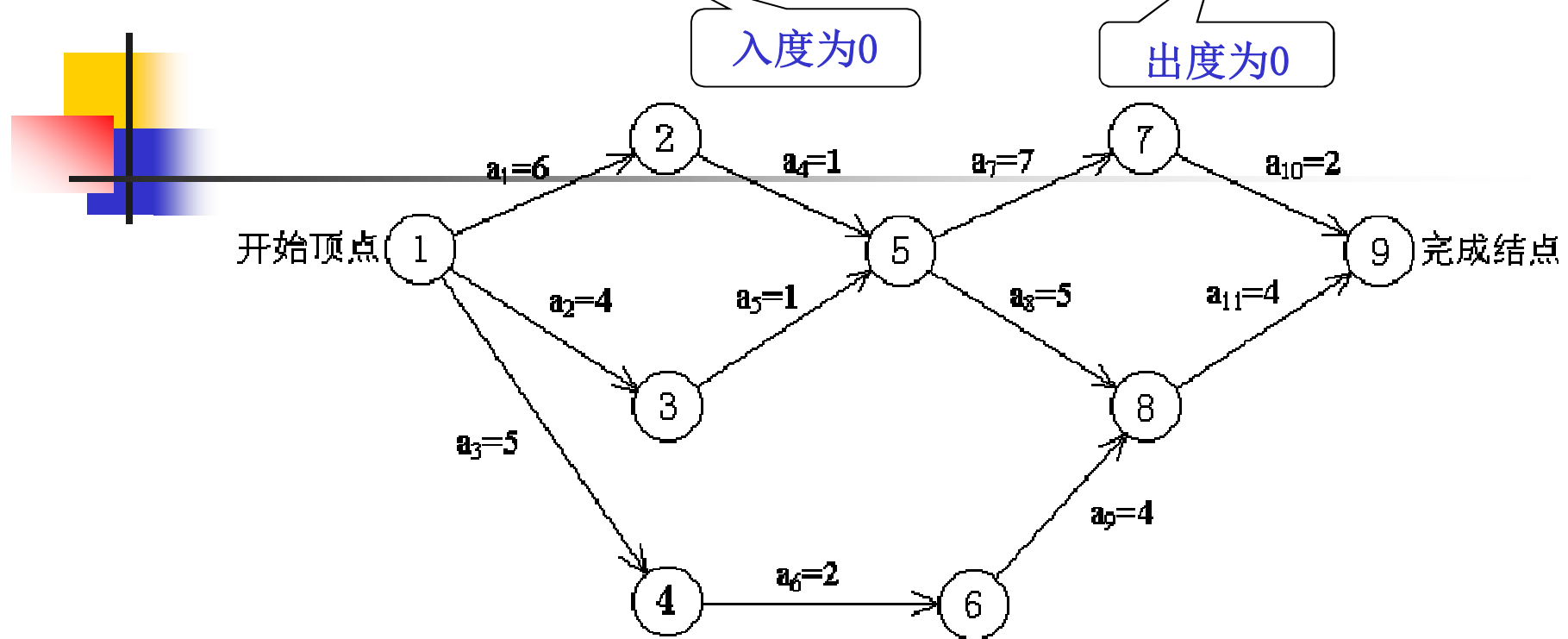
有向图表示工程计划，**顶点**表示**事件**，**弧**表示**活动**，弧上的**权值**表示完成一项活动需要的**时间**--AOE网



AOE网的性质

- 只有在某顶点代表的事件发生后，从该顶点发出去的弧所代表的各项活动才能开始
- 只有进入某顶点的各条弧所代表的活动都已经结束，该顶点所代表的事件才能发生

表示实际工程计划的AOE网应该是无环的，在正常情况下存在唯一的开始顶点（源点）和唯一的完成顶点（汇点）。



有9个事件 (v_1, v_2, \dots, v_9)、11项活动 (a_1, a_2, \dots, a_{11}) AOE网。 v_1 表示整个工程的开始， v_9 表示整个工程的结束。 v_5 表示活动 a_4 和 a_5 已经完成，活动 a_7 和 a_8 可以开始。AOE网中有些活动可以并行进行，如 a_1 、 a_2 、 a_3 。但有些活动却不能并行进行，如 a_1 和 a_4 ，只有在 a_1 活动完成之后， a_4 才可以开始。

AOE网有待研究的问题

AOE网的路径长度等于这条路径上完成各个活动所需的时间之和。

- 完成整项工程至少需要多少时间？
- 哪些活动是影响工程进度的关键？

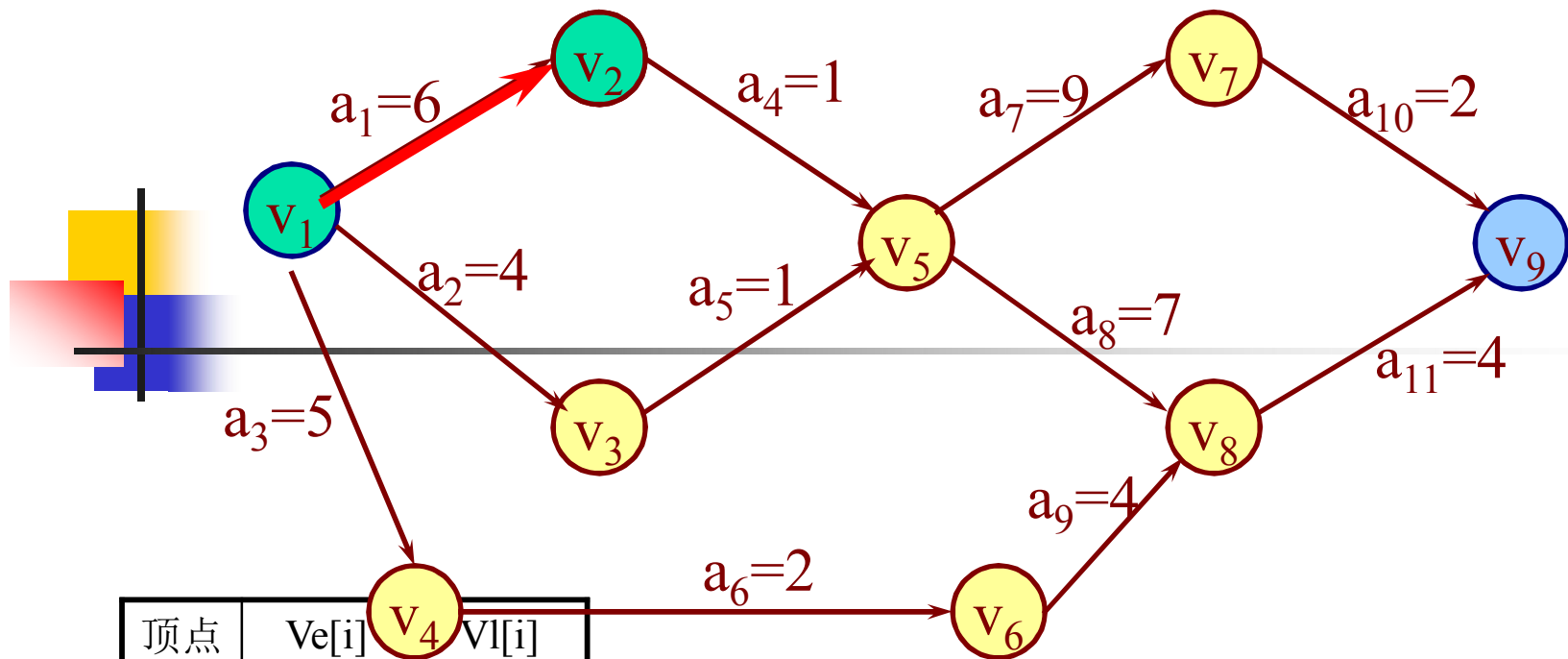
AOE网中的某些活动可以并行进行，完成工程的最短时间是从开始顶点到完成顶点的最长路径长度。路径长度最长的路径为关键路径。关键路径上所有活动都叫做关键活动。

求解关键路径和关键活动通过事件的最早、最迟发生时间、活动的最早、最迟发生时间完成。

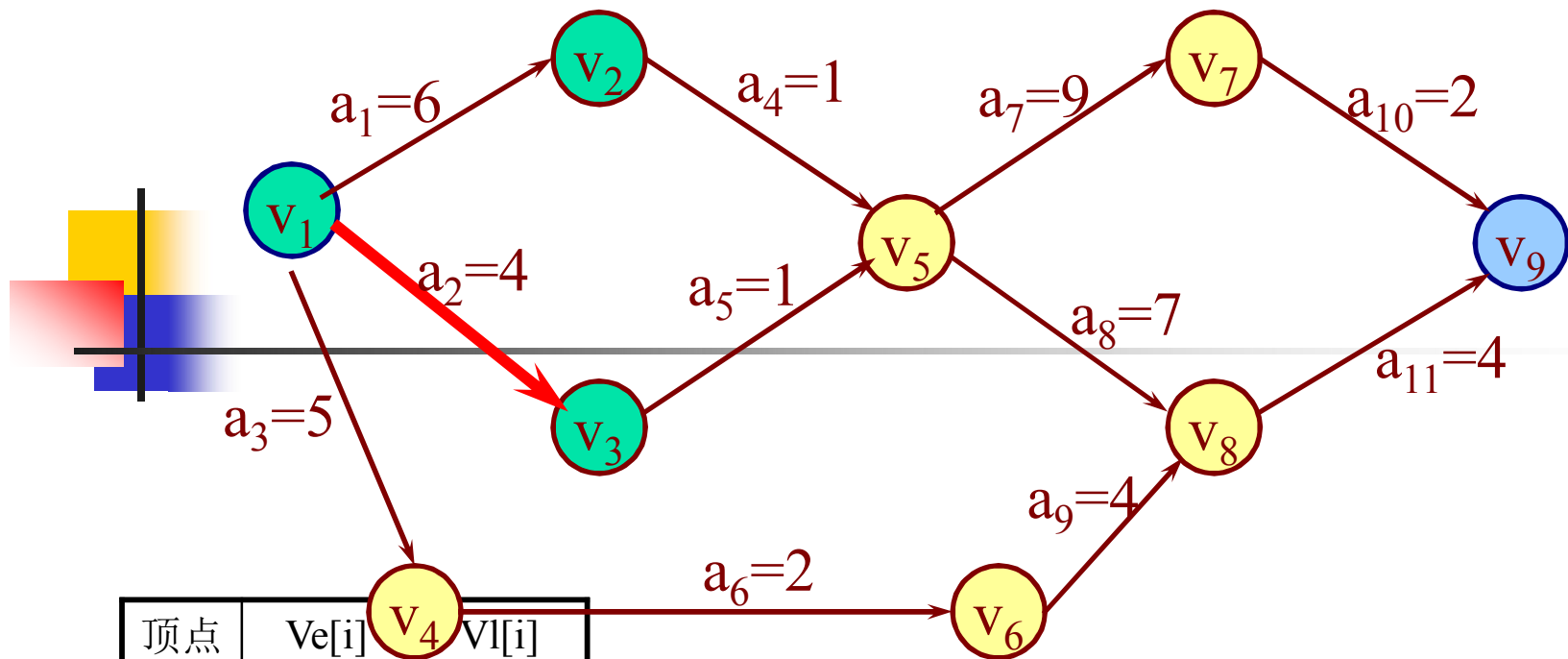


事件的最早发生时间

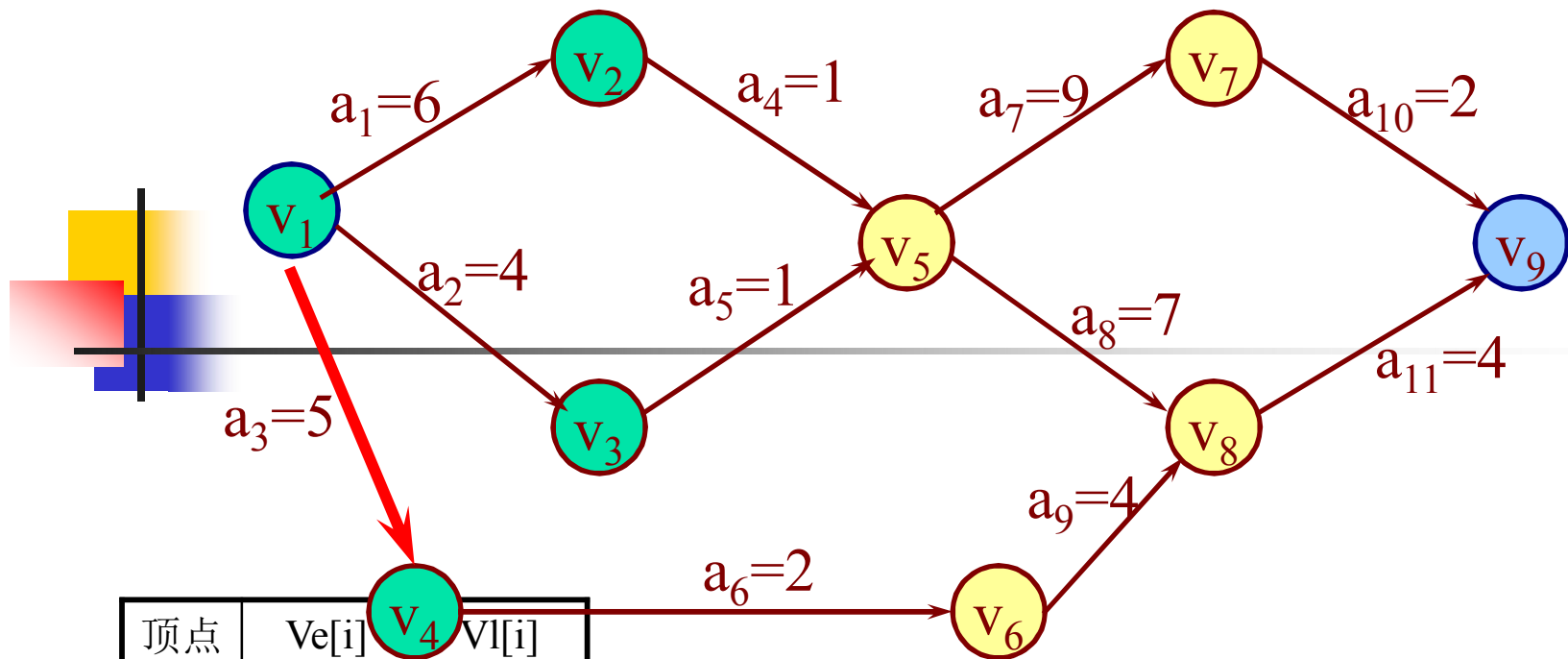
- 一维数组 $ve[]$ 保存每一事件的最早发生时间
- 事件 v_i 的最早发生时间 $ve[i]$ 是从开始顶点 v_1 到顶点 v_i 的 **最长** 路径长度。
- 各事件（顶点）最早发生时间的计算方法：
 - 从开始顶点 v_1 出发，令 $ve[1]=0$ ，按 **拓扑有序** 求其余各顶点的最早发生时间 $ve[k]$ ($2 \leq k \leq n$)
 - $$ve[k] = \max \{ ve[j] + dut(<j, k>) \}$$
 - $dut(<j, k>)$ 表示活动 $<j, k>$ 的所需的时间



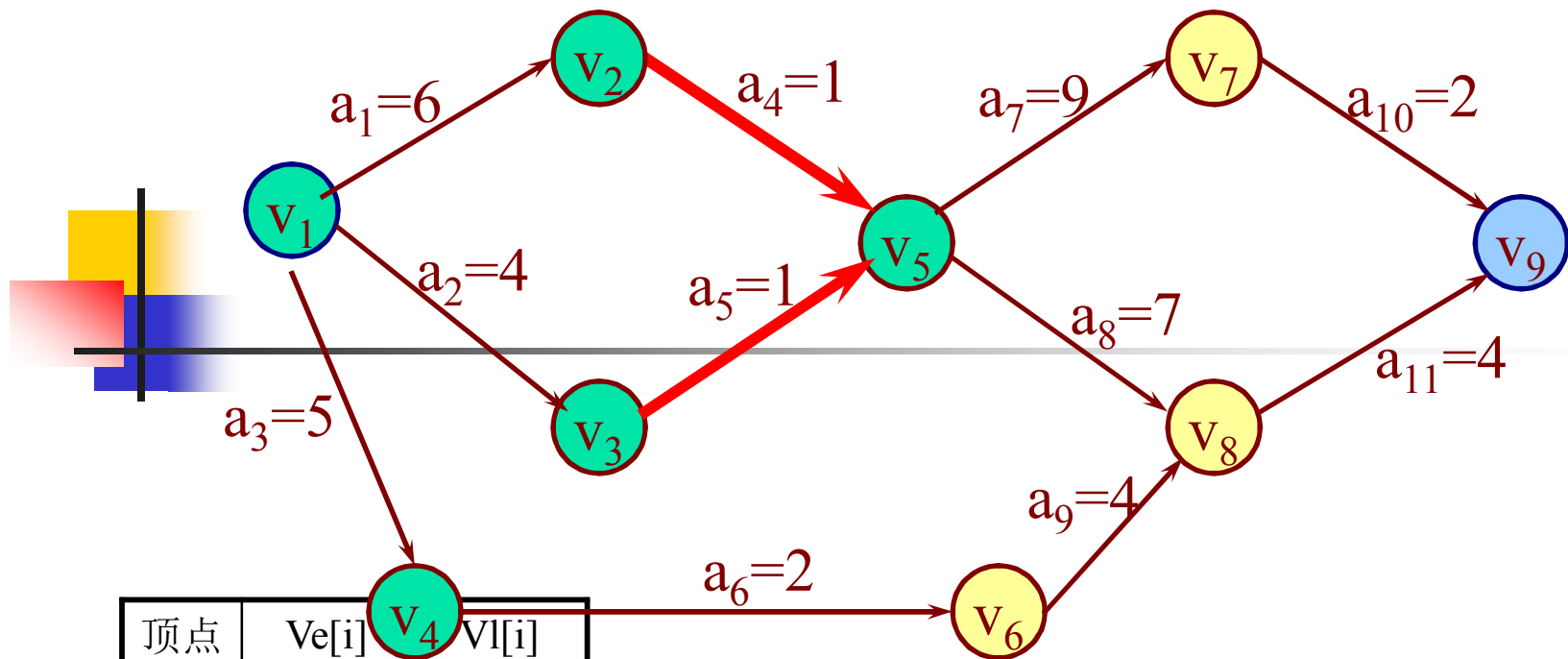
顶点	$Ve[i]$	$Vl[i]$
1	0	
2	6	
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		



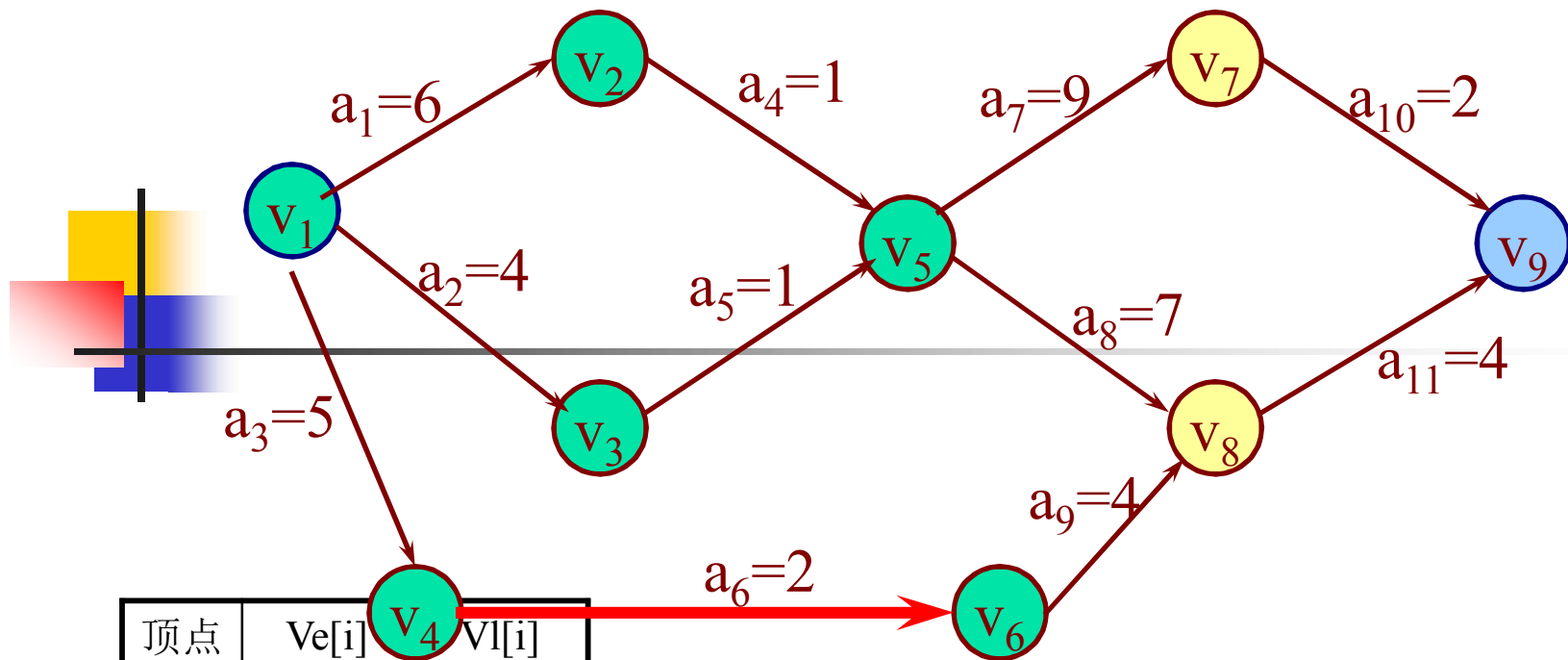
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4		
5		
6		
7		
8		
9		



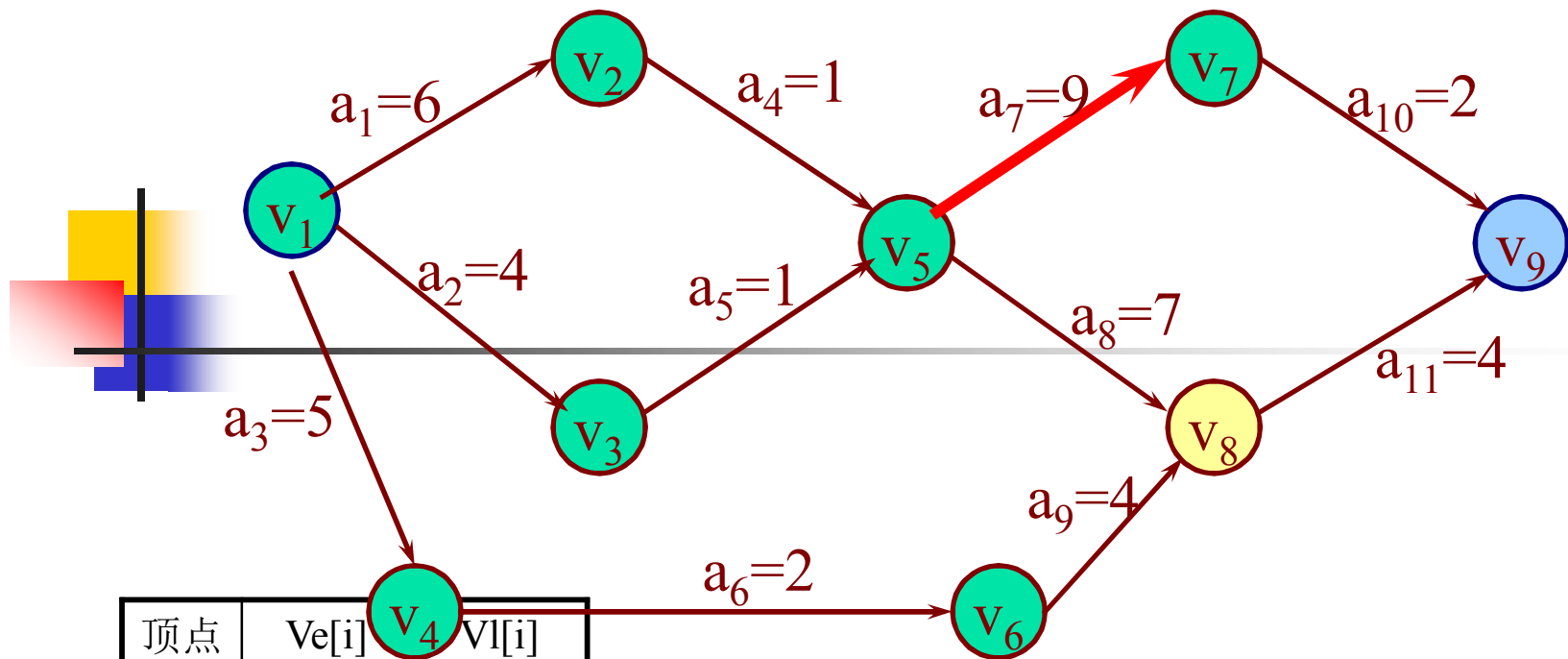
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5		
6		
7		
8		
9		



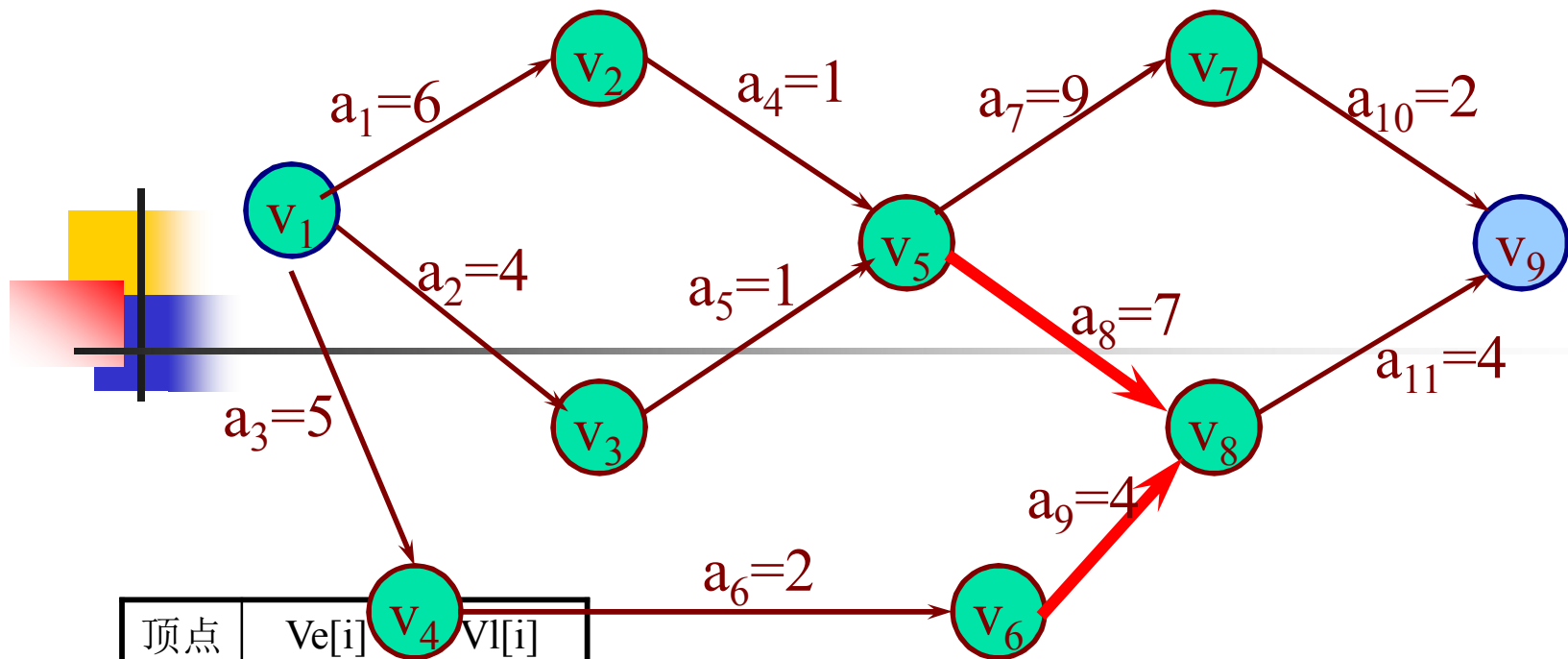
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5	7	
6		
7		
8		
9		



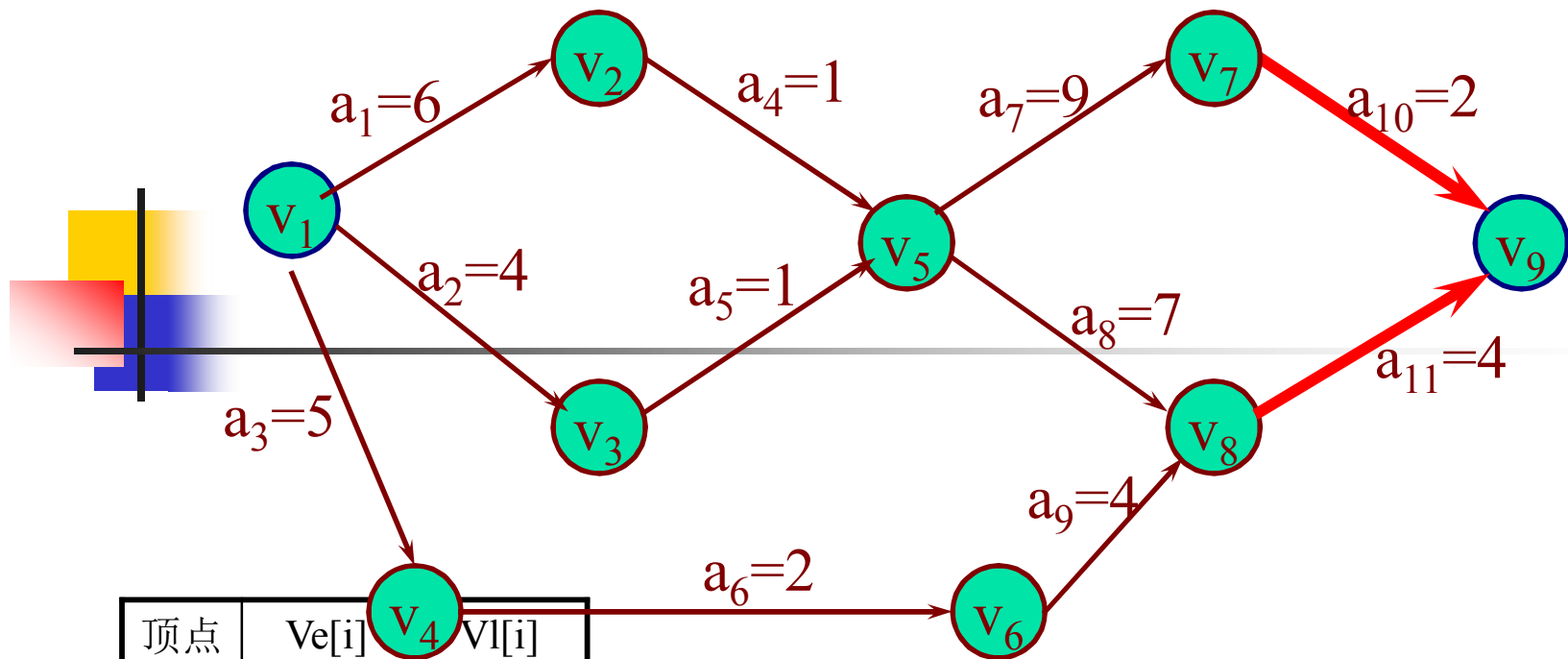
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5	7	
6	7	
7		
8		
9		



顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5	7	
6	7	
7	16	
8		
9		



顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5	7	
6	7	
7	16	
8	14	
9		

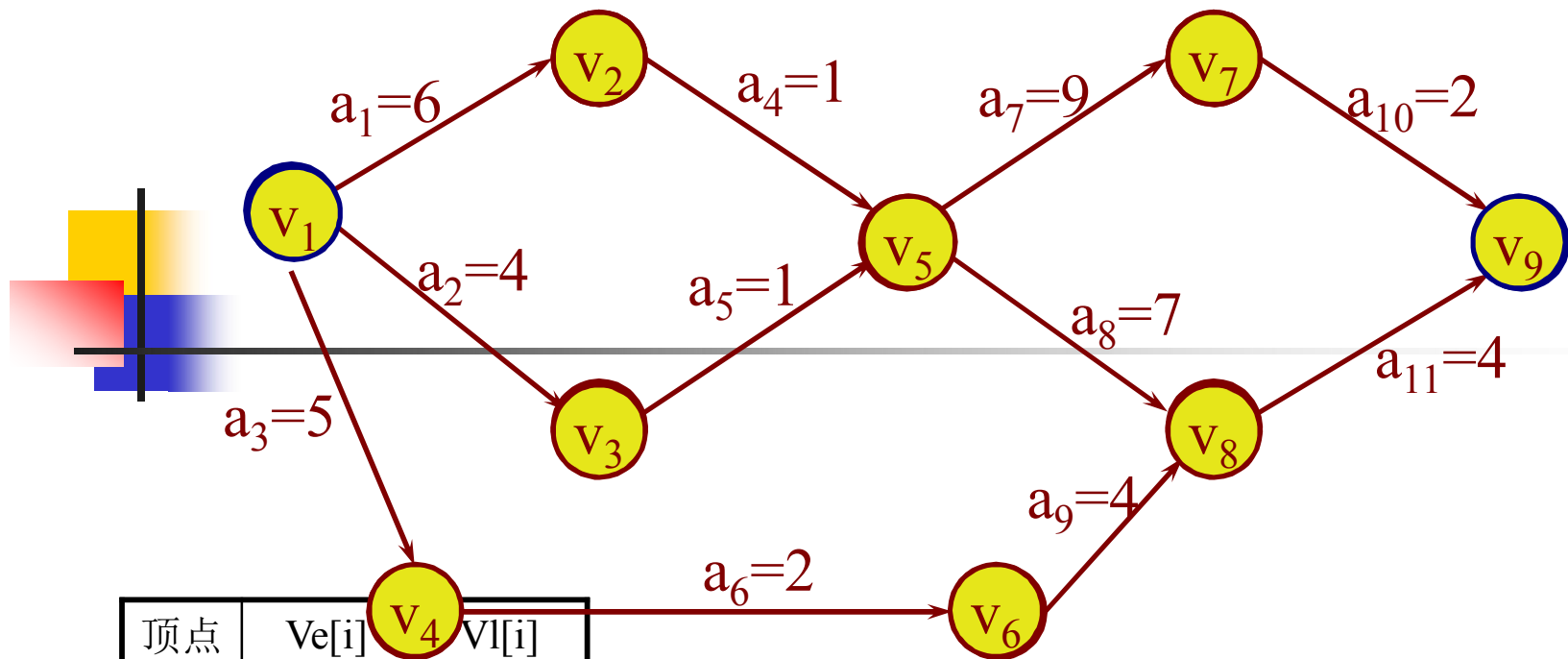


顶点	$Ve[i]$	$Vl[i]$
1	0	
2	6	
3	4	
4	5	
5	7	
6	7	
7	16	
8	14	
9	18	



事件允许的最晚发生时间

- 一维数组 $vl[]$ 保存每一事件允许的最晚发生时间
- 事件 v_i 允许的最晚发生时间 $vl[i]$ 是在保证完成顶点 v_n 在 $ve[n]$ 时刻发生的前提下，事件 v_i 允许发生的最晚时间，它等于 $ve[n]$ 减去 v_i 到 v_n 的最长路径长度。
- 事件允许的最晚发生时间的计算方法：
 - 从完成顶点 v_n 出发，令 $vl[n]=ve[n]$ ，按逆拓扑有序求其余各顶点的允许的最晚发生时间 $vl[i]$ ($n-1 \geq i \geq 1$)
 - $vl[i] = \min \{ vl[k] - dut(<i,k>): <i,k> \in S \}$
 - 其中 S 是以顶点 v_i 为弧尾的所有弧的集合。

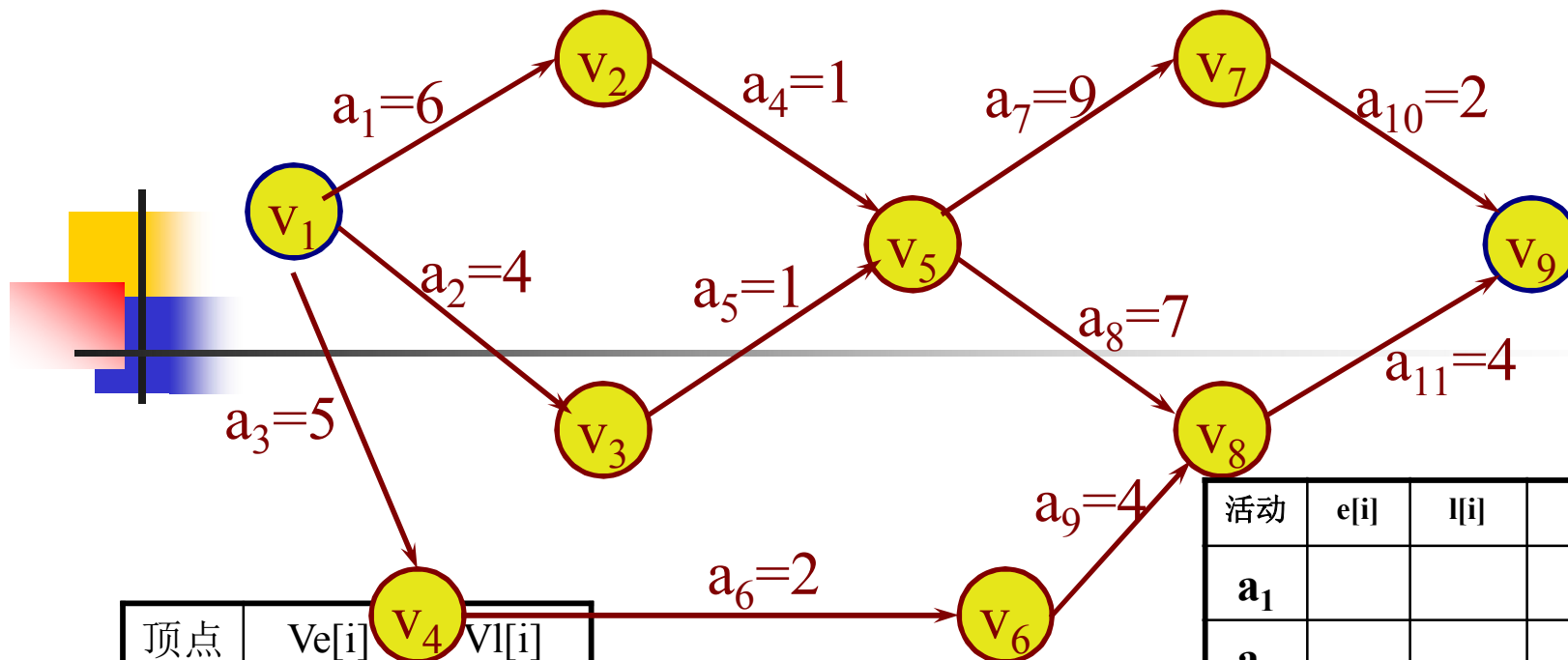


顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18



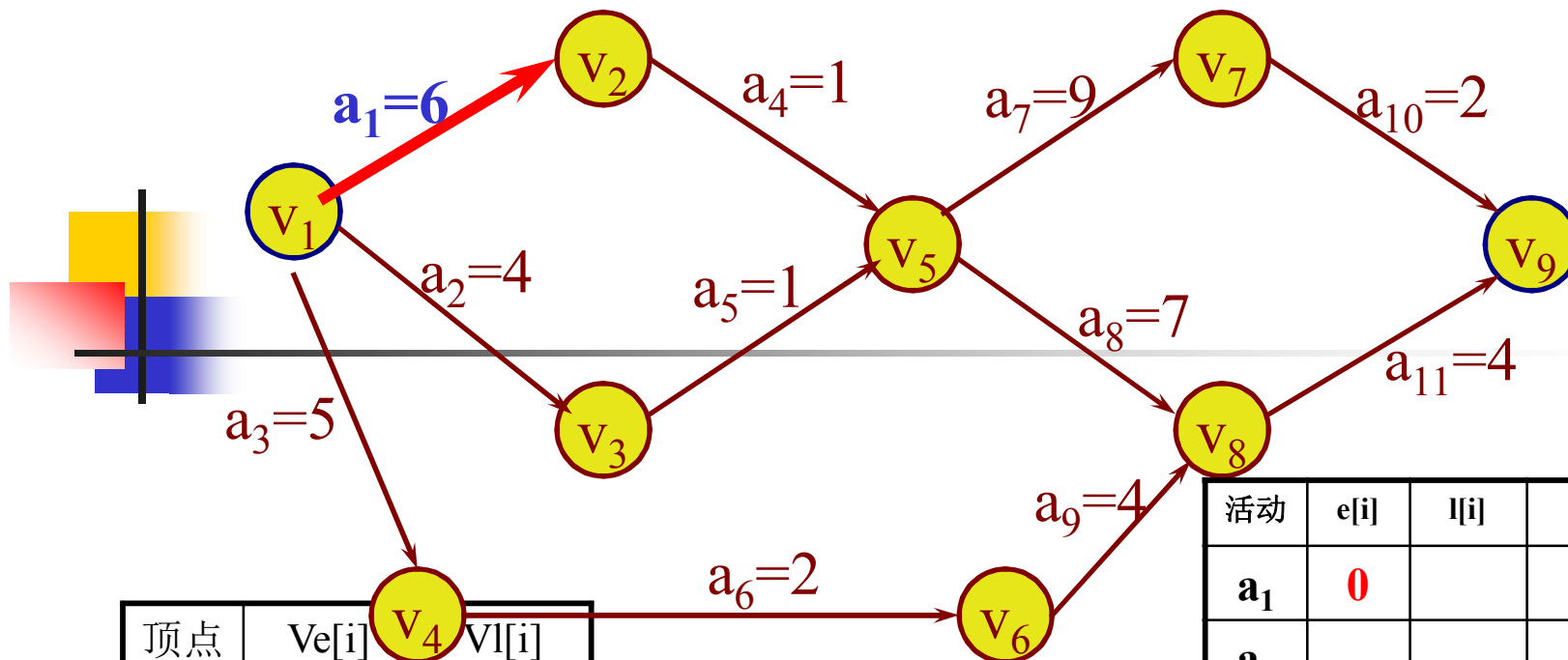
活动最早发生时间

- 一维数组 $e[]$ 保存每一活动的最早发生时间
- 设活动 a_i 用弧 $\langle v_j, v_k \rangle$ 表示, 与 a_i 相联系的权值 $\text{dut}(\langle j, k \rangle)$ 用表示, 则 a_i 的可能的最早开始时间 $e[i]$ 等于事件 v_j 可能的最早发生时间 $ve[j]$ 。



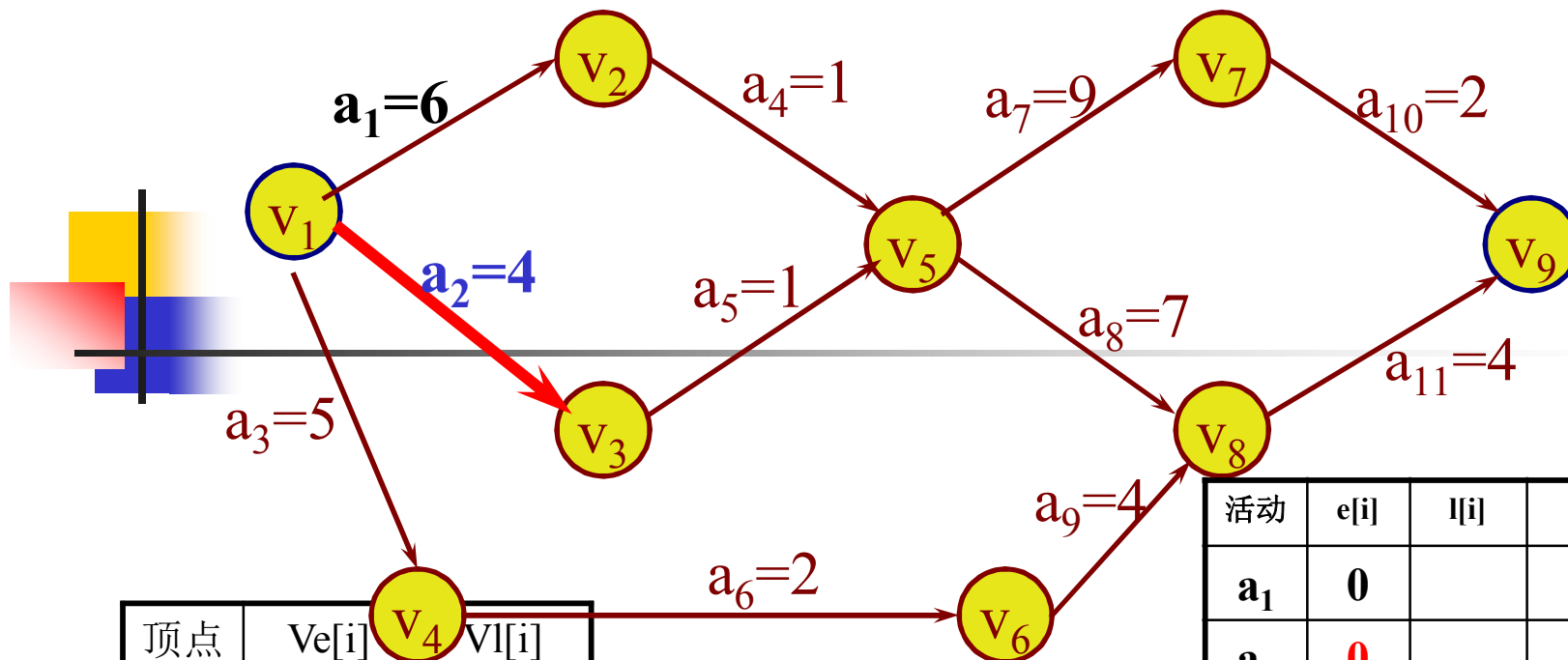
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1			
a_2			
a_3			
a_4			
a_5			
a_6			
a_7			
a_8			
a_9			
a_{10}			
a_{11}			



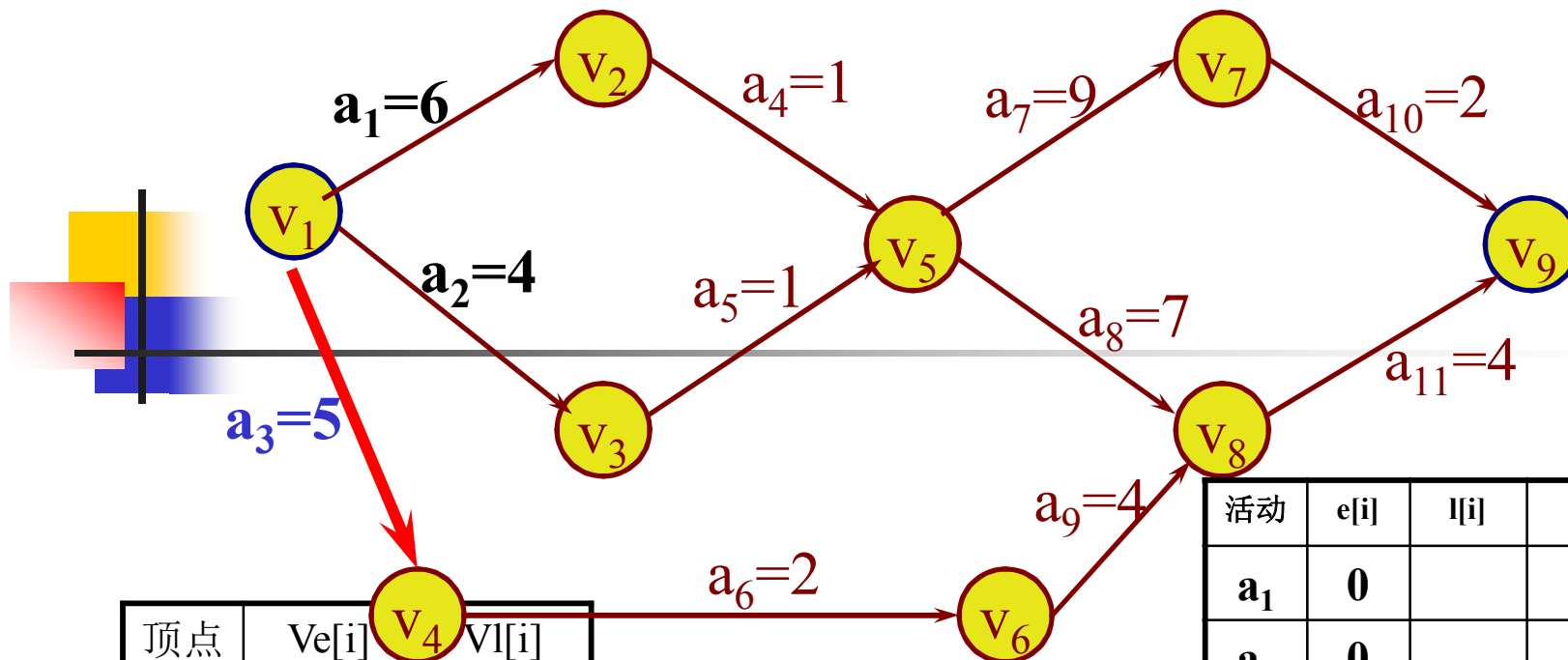
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂			
a ₃			
a ₄			
a ₅			
a ₆			
a ₇			
a ₈			
a ₉			
a ₁₀			
a ₁₁			



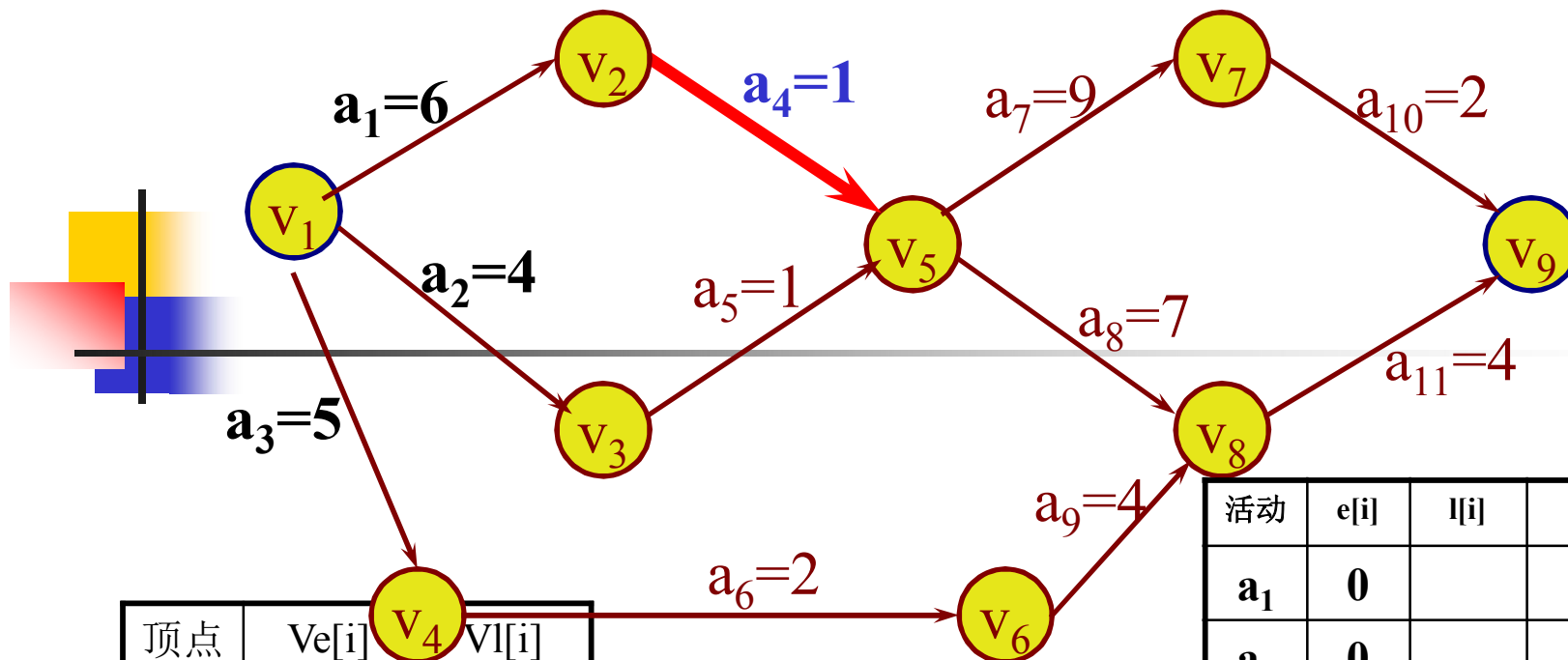
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃			
a ₄			
a ₅			
a ₆			
a ₇			
a ₈			
a ₉			
a ₁₀			
a ₁₁			



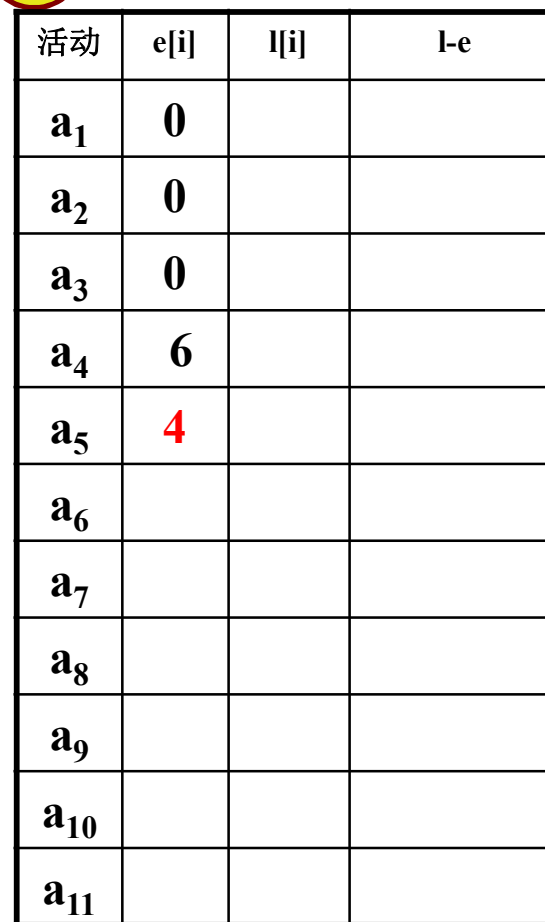
顶点	Ve[i]	VL[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

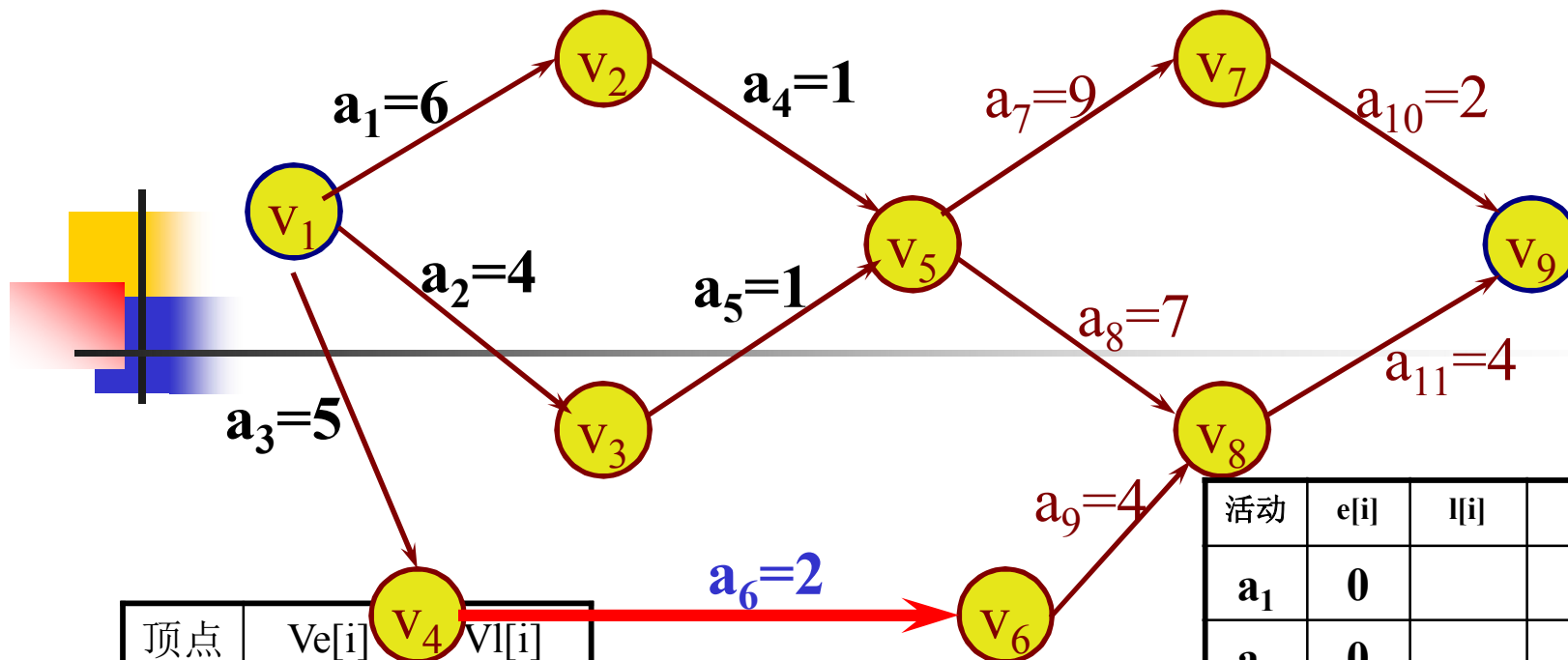
活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄			
a ₅			
a ₆			
a ₇			
a ₈			
a ₉			
a ₁₀			
a ₁₁			



顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

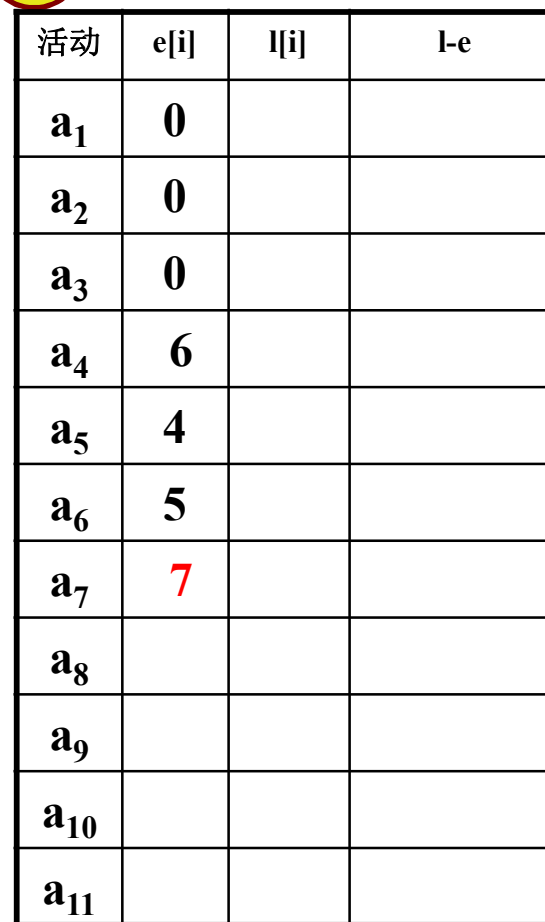
活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅			
a ₆			
a ₇			
a ₈			
a ₉			
a ₁₀			
a ₁₁			

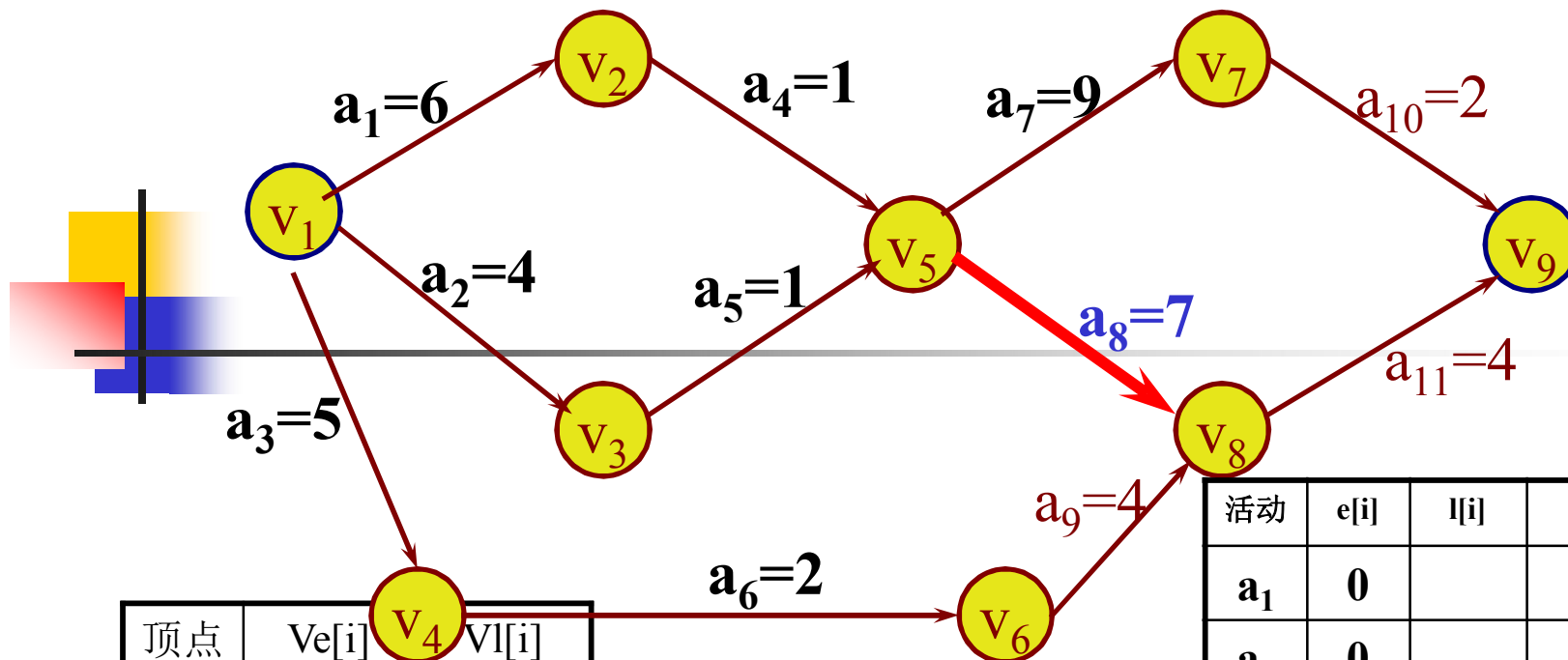




顶点	$Ve[i]$	$VL[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

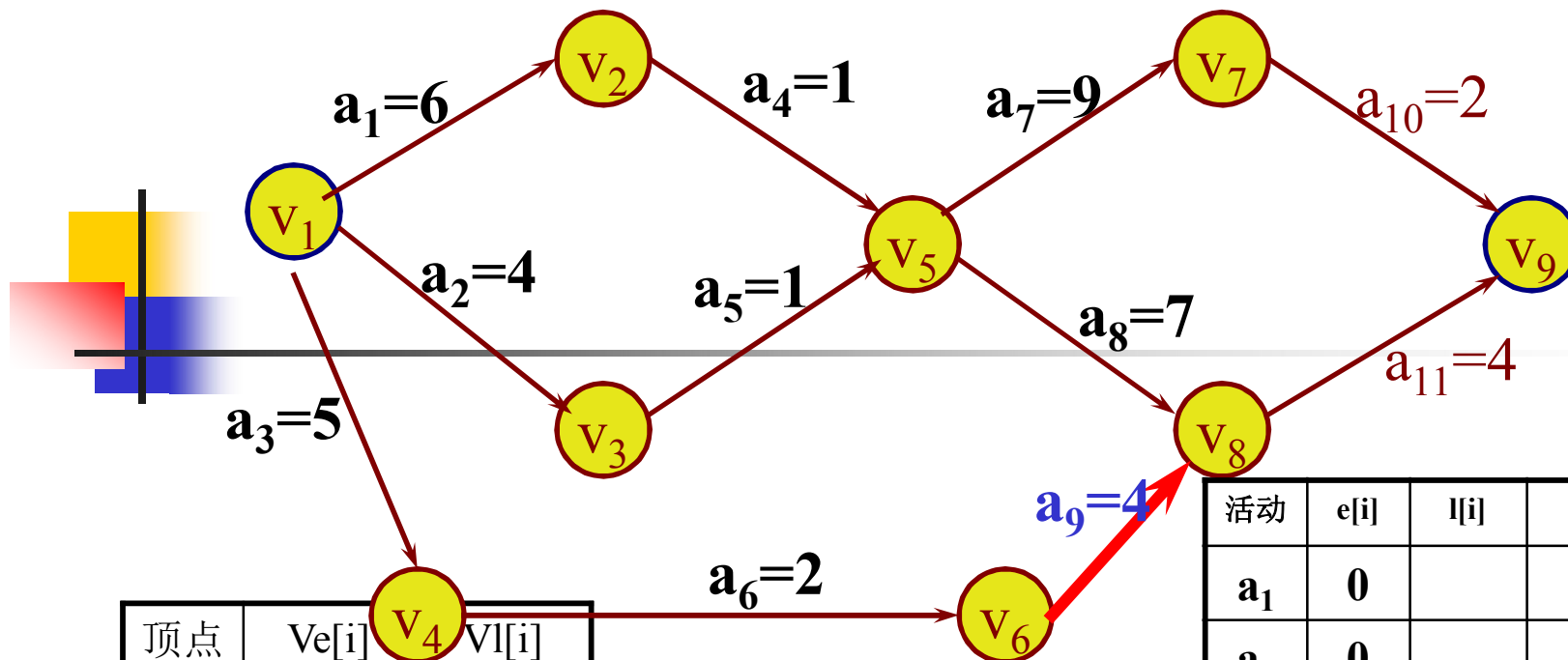
活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0		
a_3	0		
a_4	6		
a_5	4		
a_6	5		
a_7			
a_8			
a_9			
a_{10}			
a_{11}			





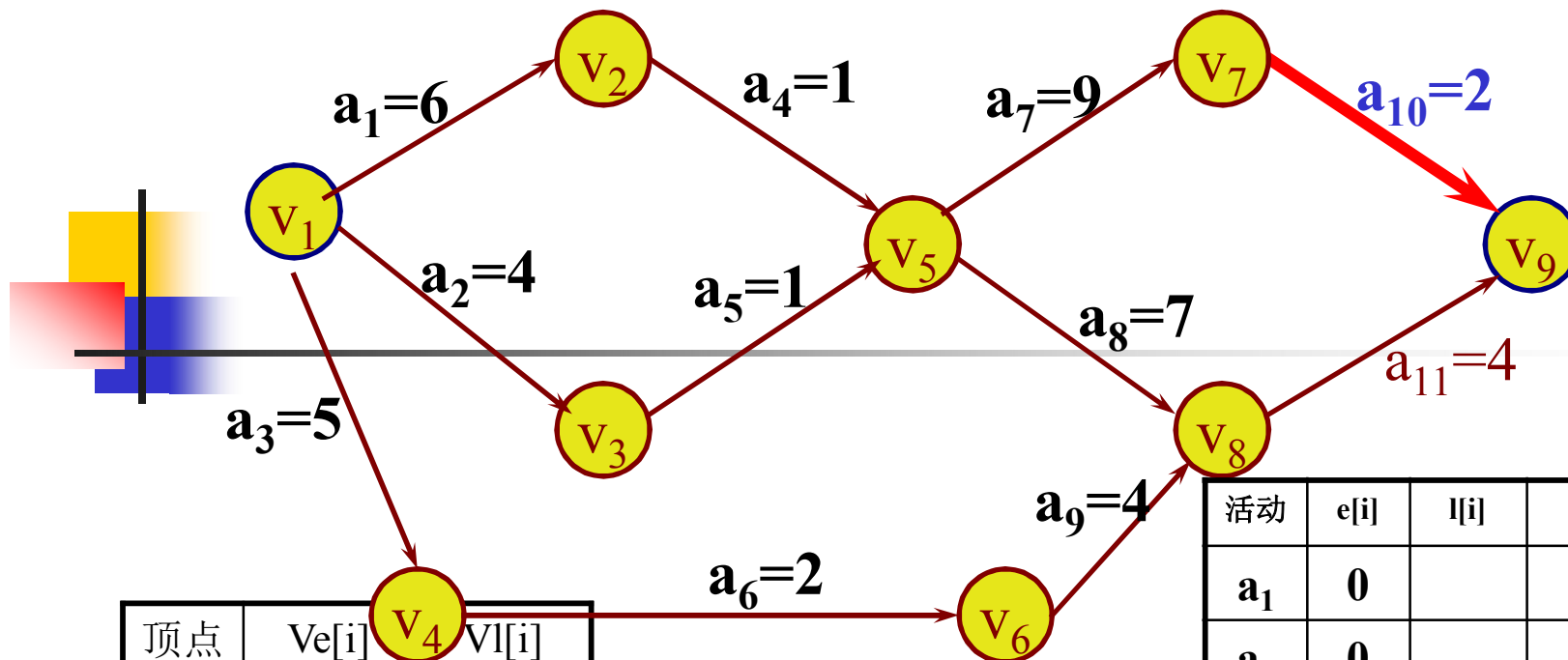
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉			
a ₁₀			
a ₁₁			



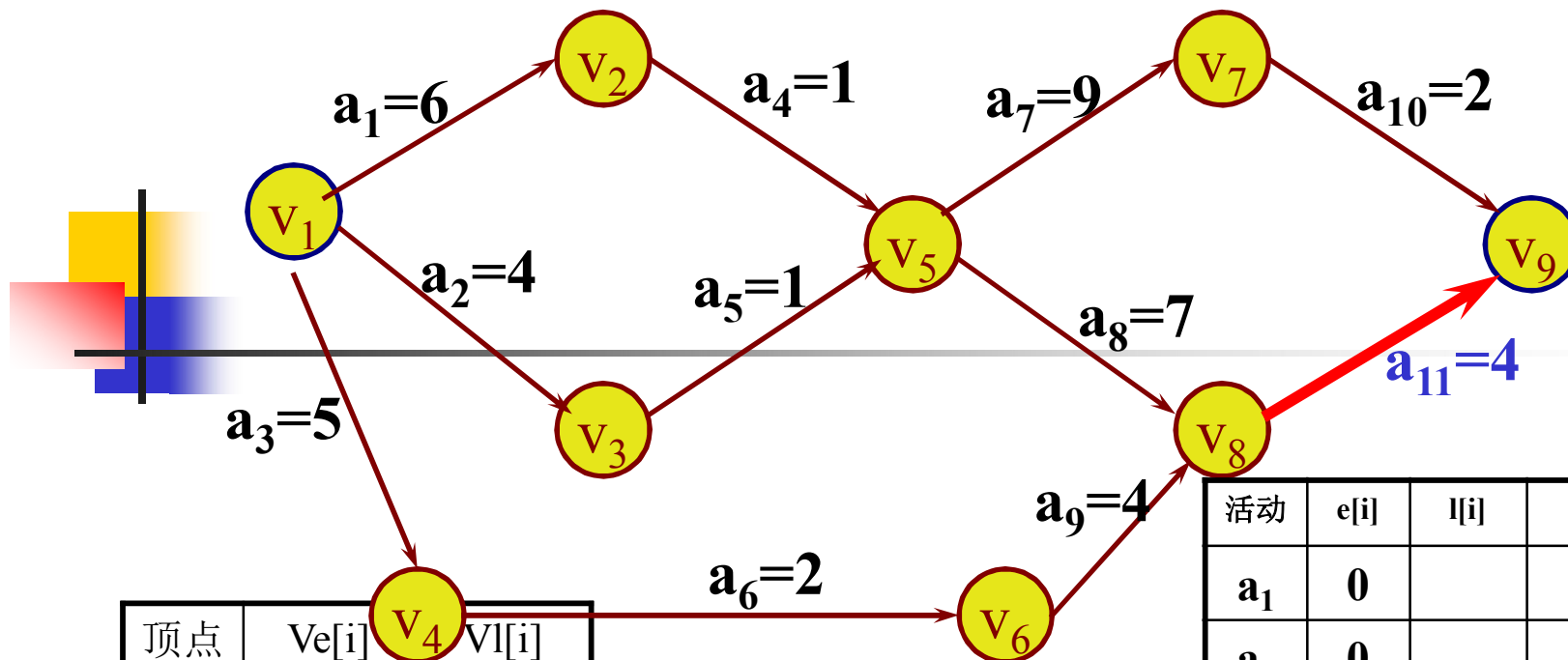
顶点	Ve[i]	VL[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀			
a ₁₁			



顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀	16		
a ₁₁			



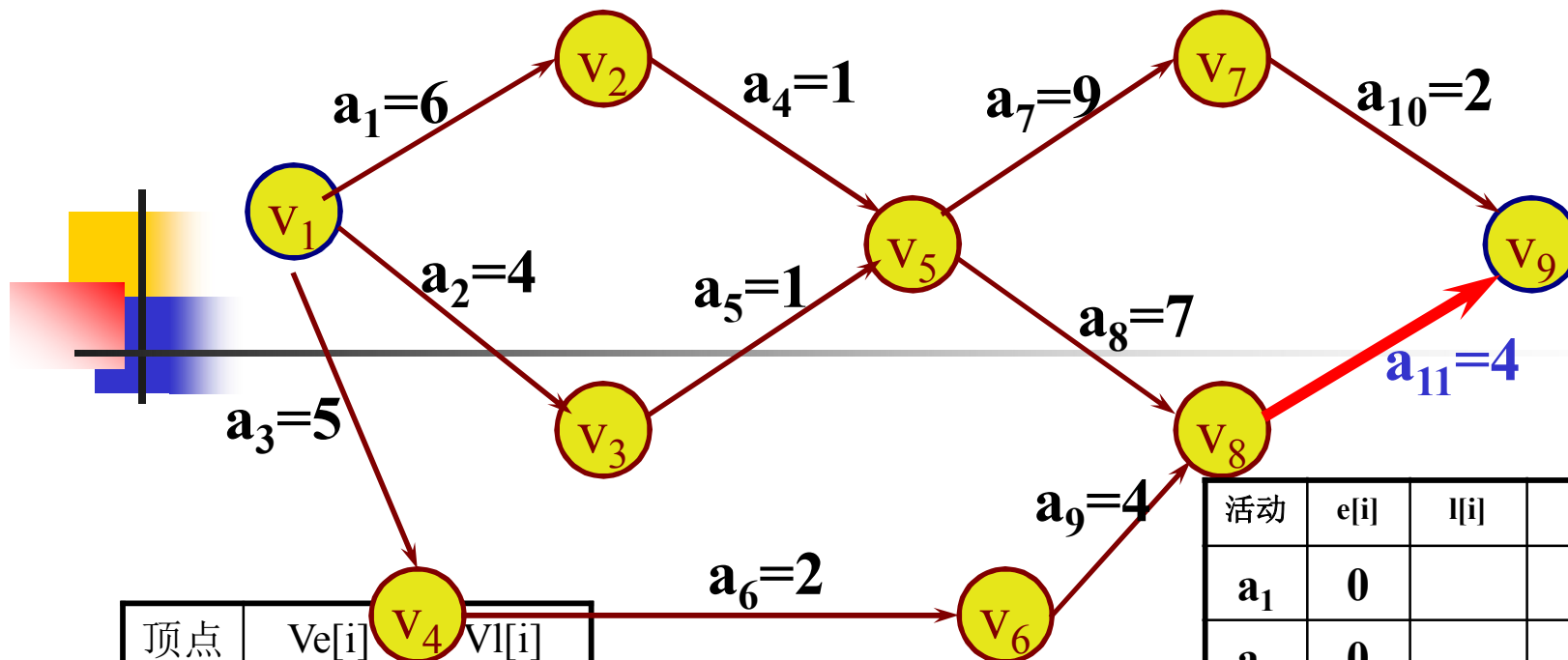
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀	16		
a ₁₁	14		



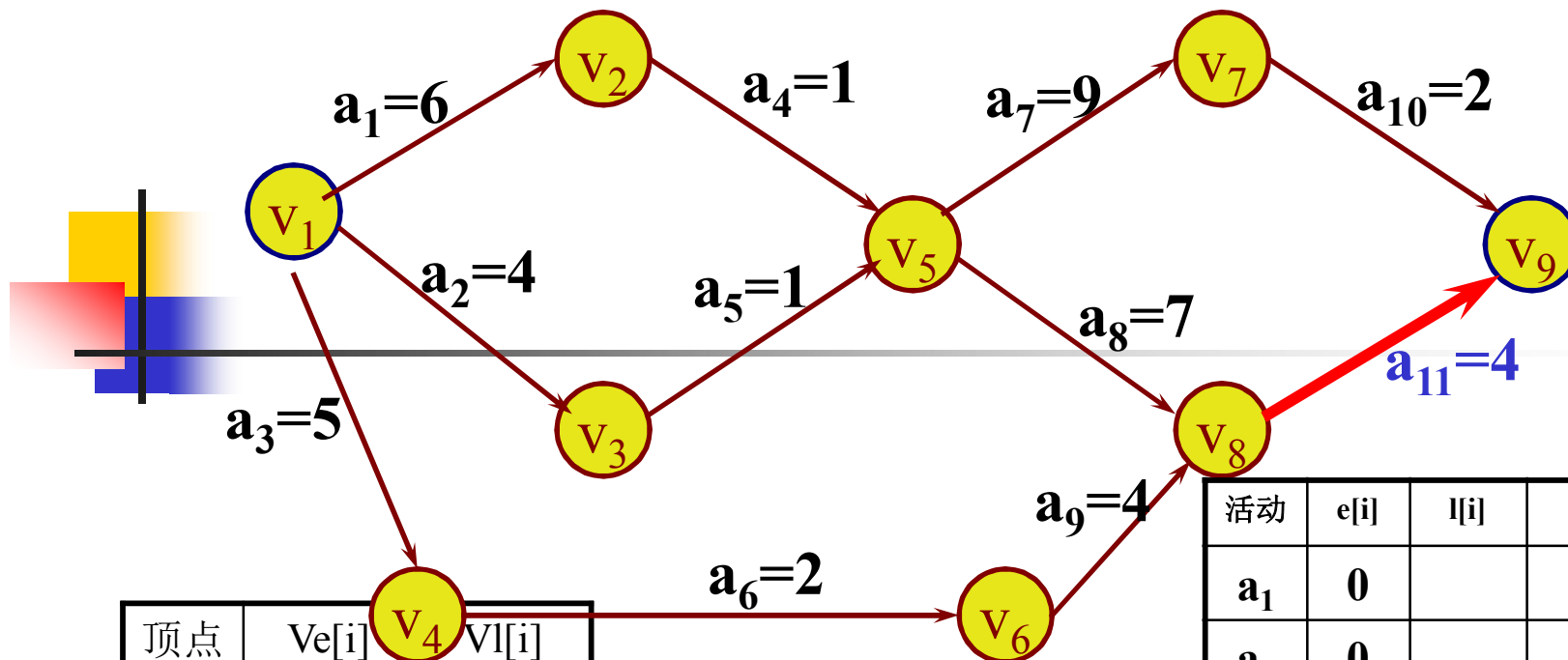
活动允许的最晚开始时间

- 设活动 a_i 用弧 $\langle v_j, v_k \rangle$ 表示，与 a_i 相联系的权值 $\text{dut}(\langle j, k \rangle)$ 用表示，则活动 a_i 允许的最晚开始时间 $l[i]$ 等于事件 v_k 允许的最晚发生时间 $v_l[k] - \text{dut}(\langle j, k \rangle)$ 。



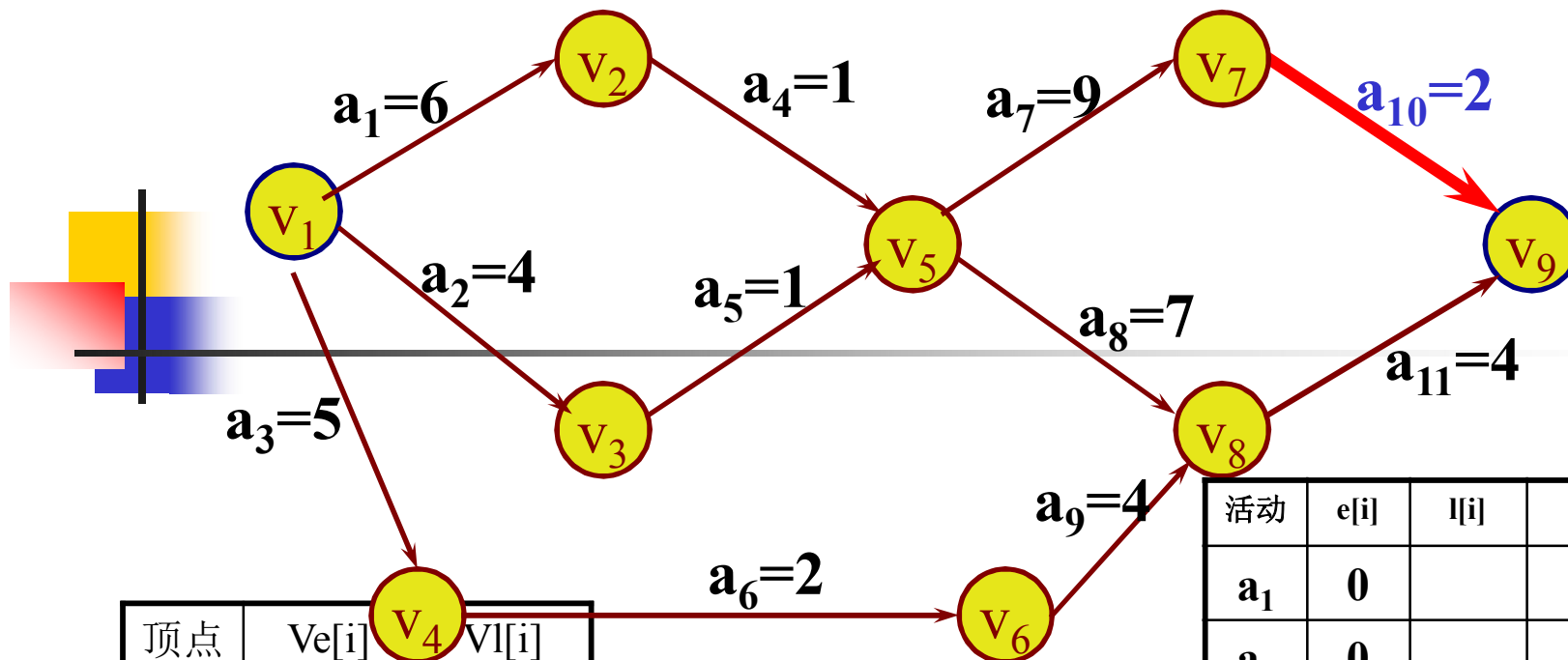
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀	16		
a ₁₁	14		



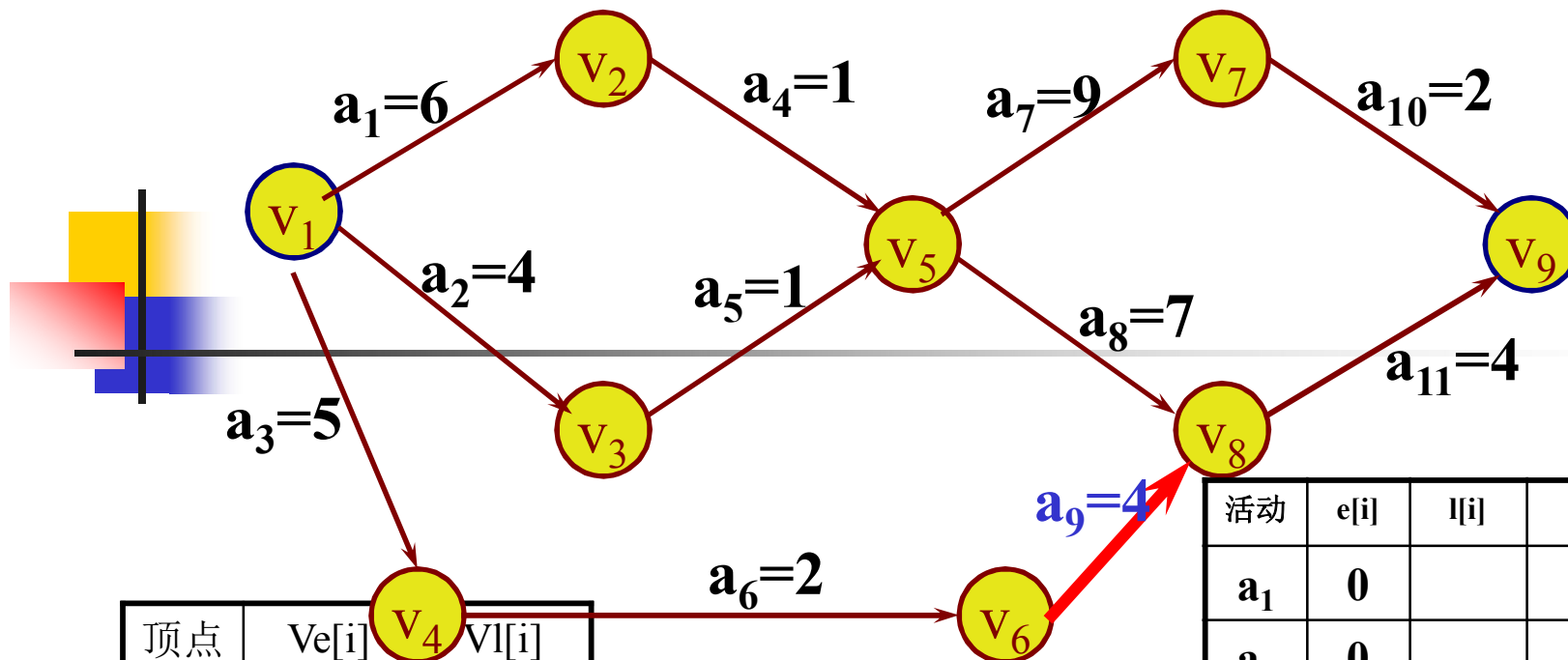
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀	16		
a ₁₁	14	14	



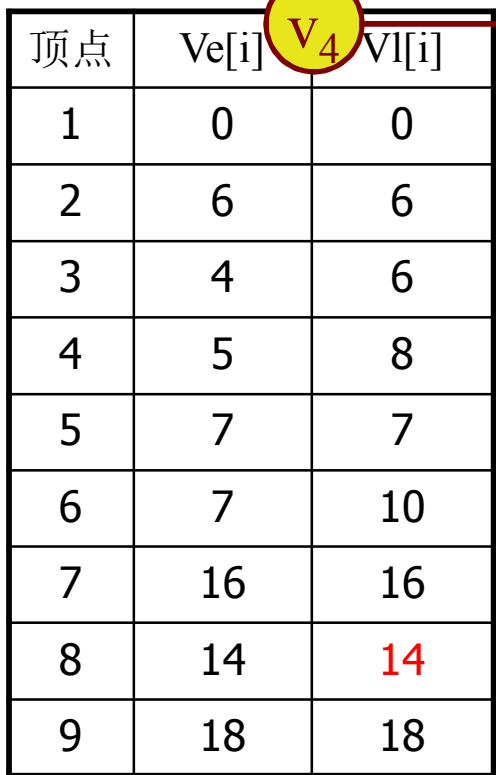
顶点	Ve[i]	VL[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7		
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	

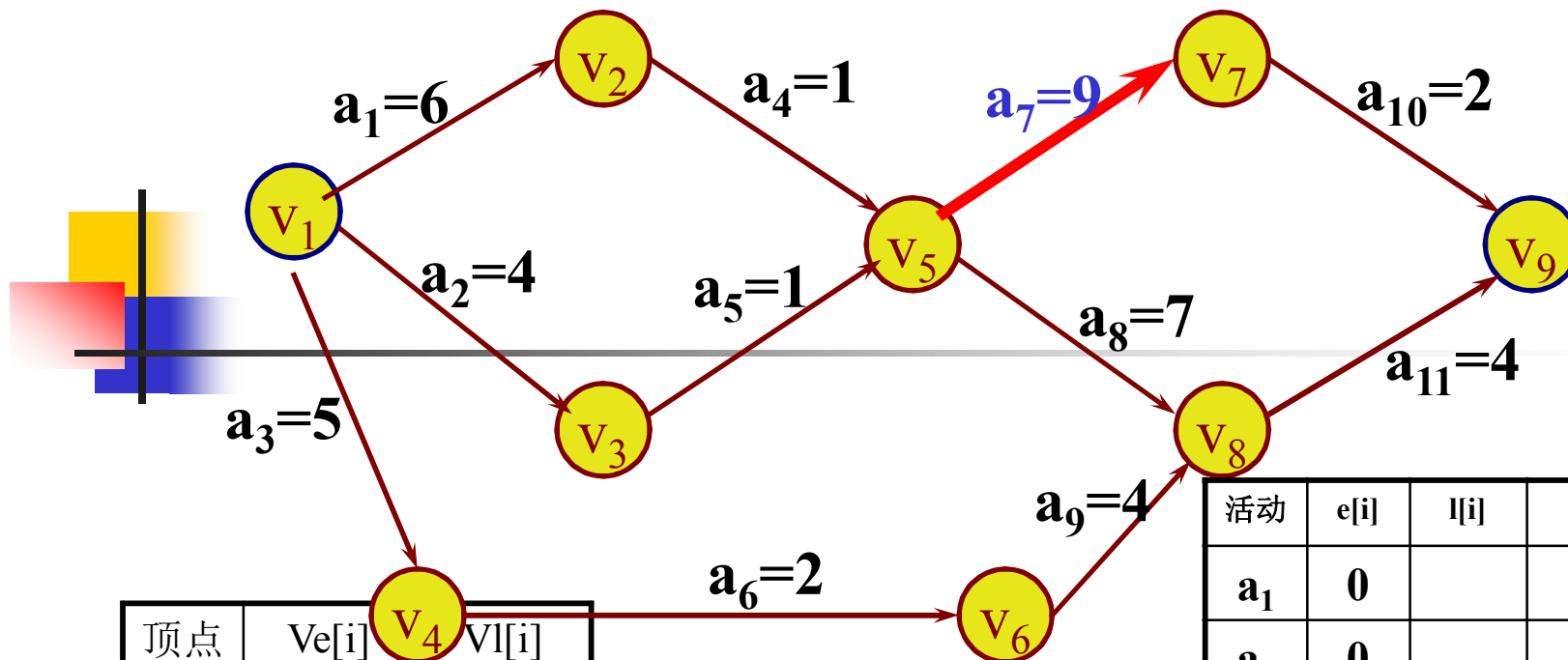


顶点	Ve[i]	VL[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5		
a ₇	7		
a ₈	7		
a ₉	7	10	
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	

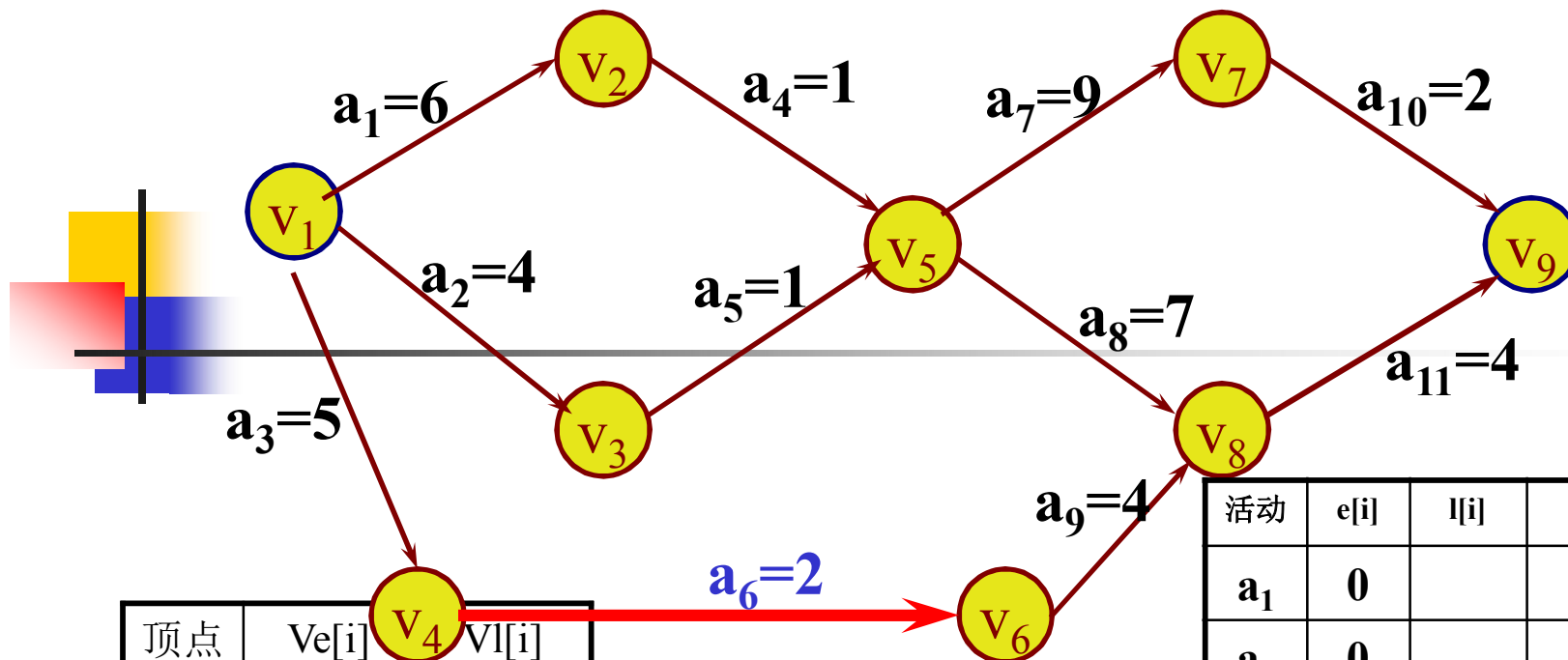


活动	e[i]	l[i]	l-e
a₁	0		
a₂	0		
a₃	0		
a₄	6		
a₅	4		
a₆	5		
a₇	7		
a₈	7	7	
a₉	7	10	
a₁₀	16	16	
a₁₁	14	14	



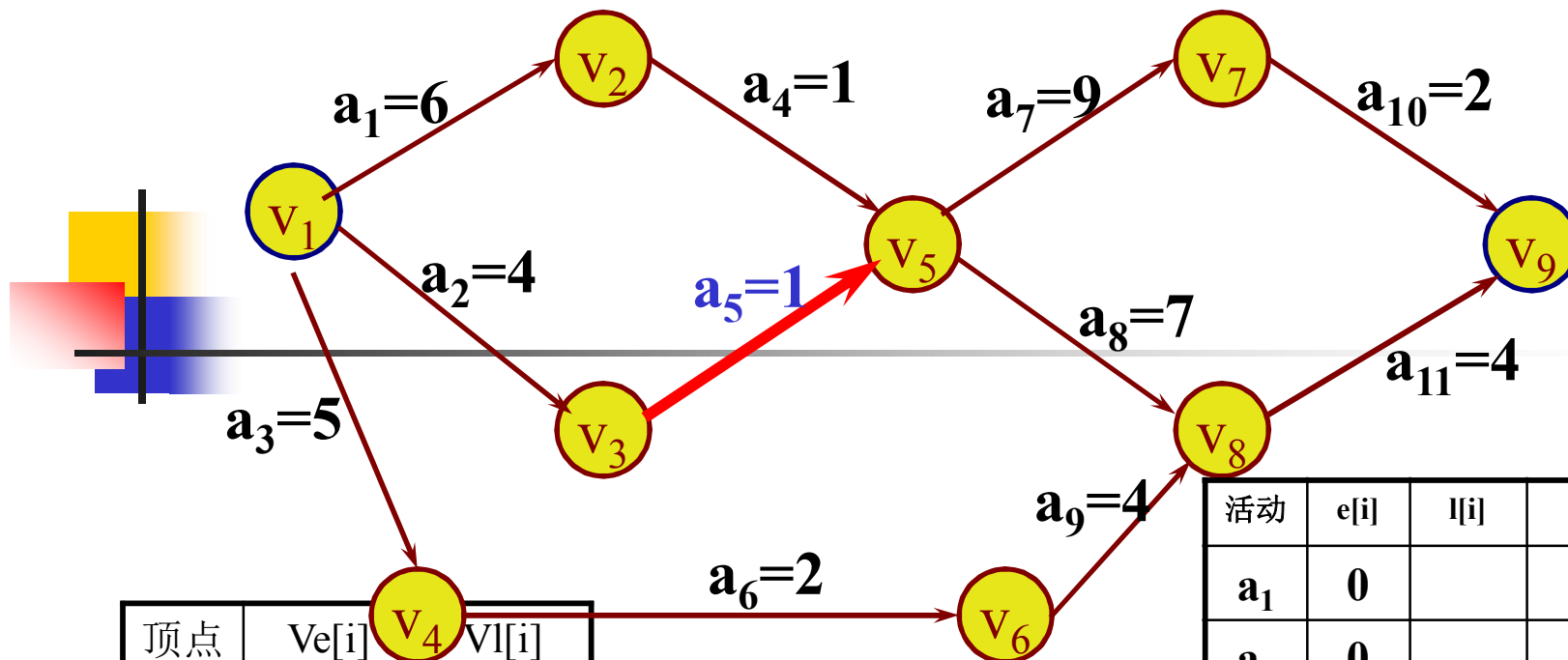
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0		
a_3	0		
a_4	6		
a_5	4		
a_6	5		
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



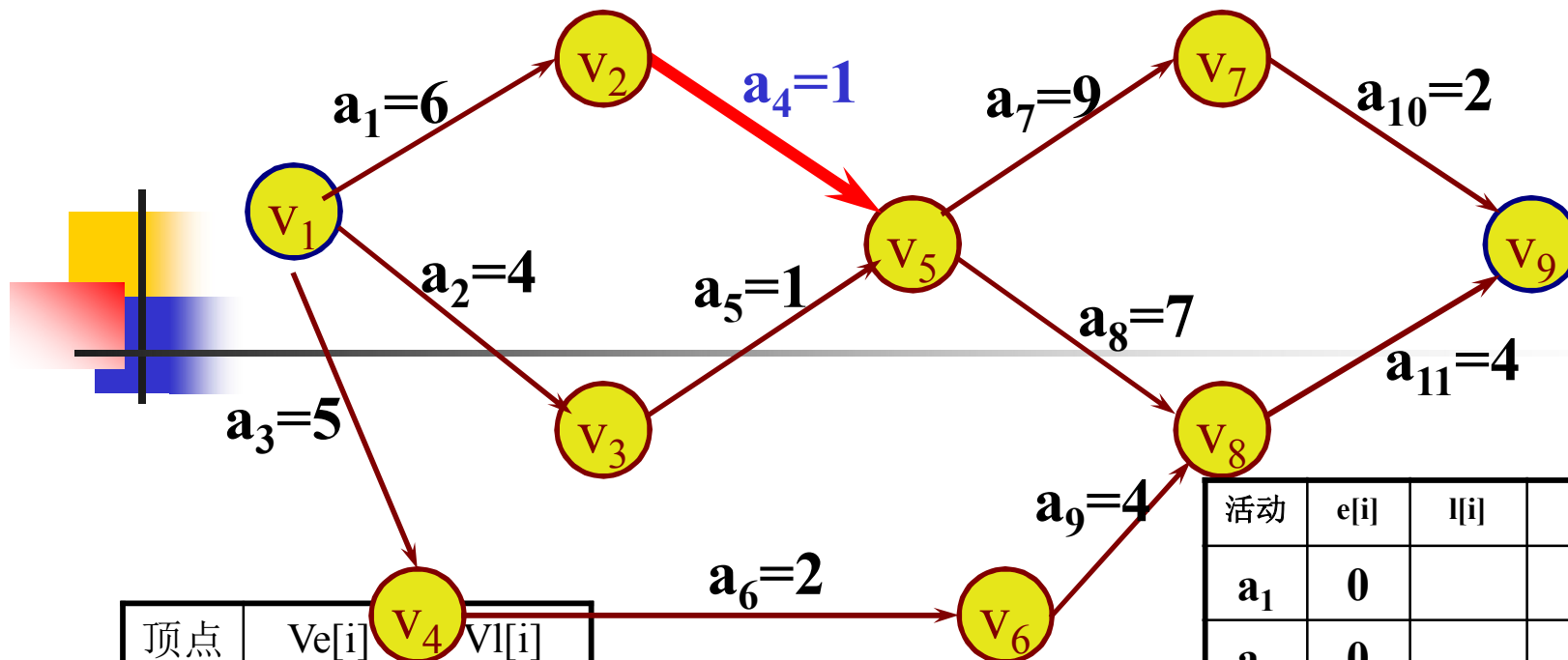
顶点	Ve[i]	VL[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0		
a ₂	0		
a ₃	0		
a ₄	6		
a ₅	4		
a ₆	5	8	
a ₇	7	7	
a ₈	7	7	
a ₉	7	10	
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	



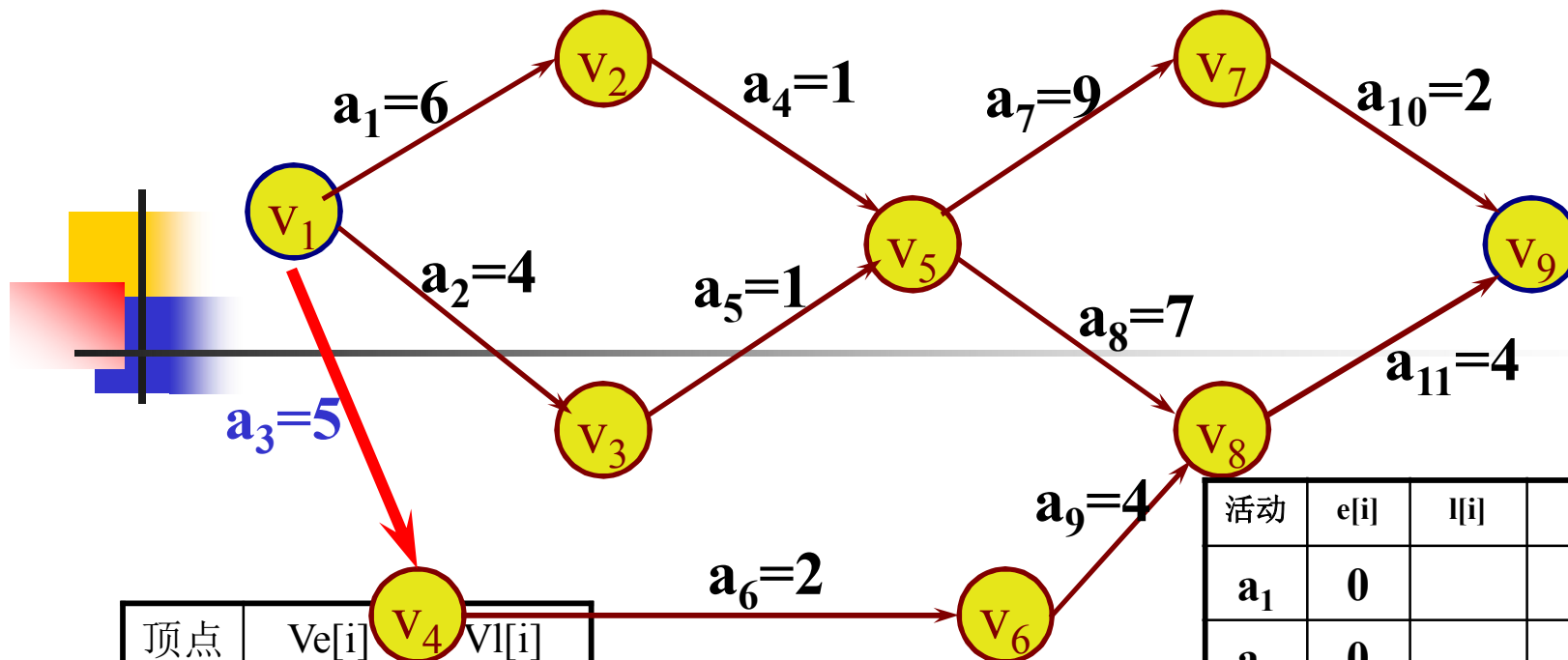
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0		
a_3	0		
a_4	6		
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



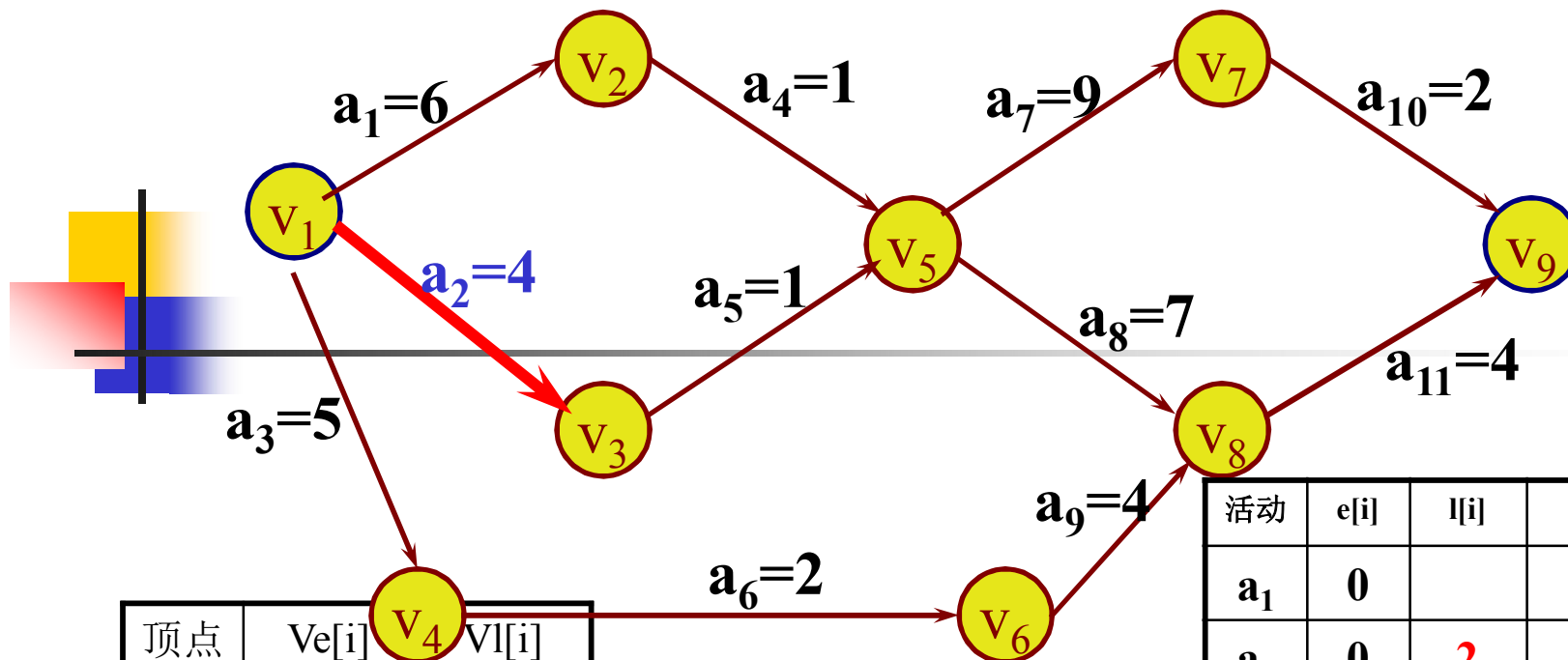
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0		
a_3	0		
a_4	6	6	
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



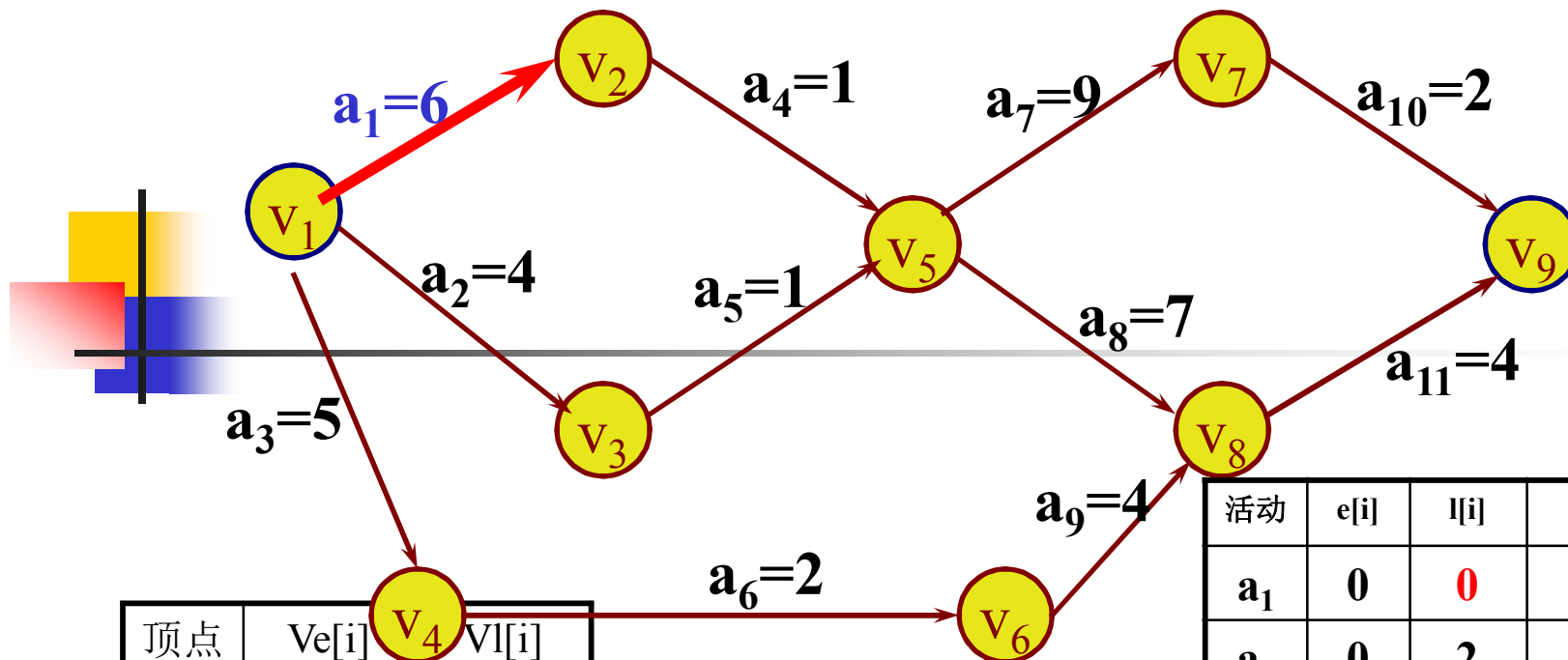
顶点	$Ve[i]$	$VL[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0		
a_3	0	3	
a_4	6	6	
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



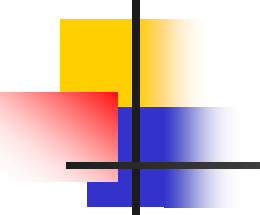
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

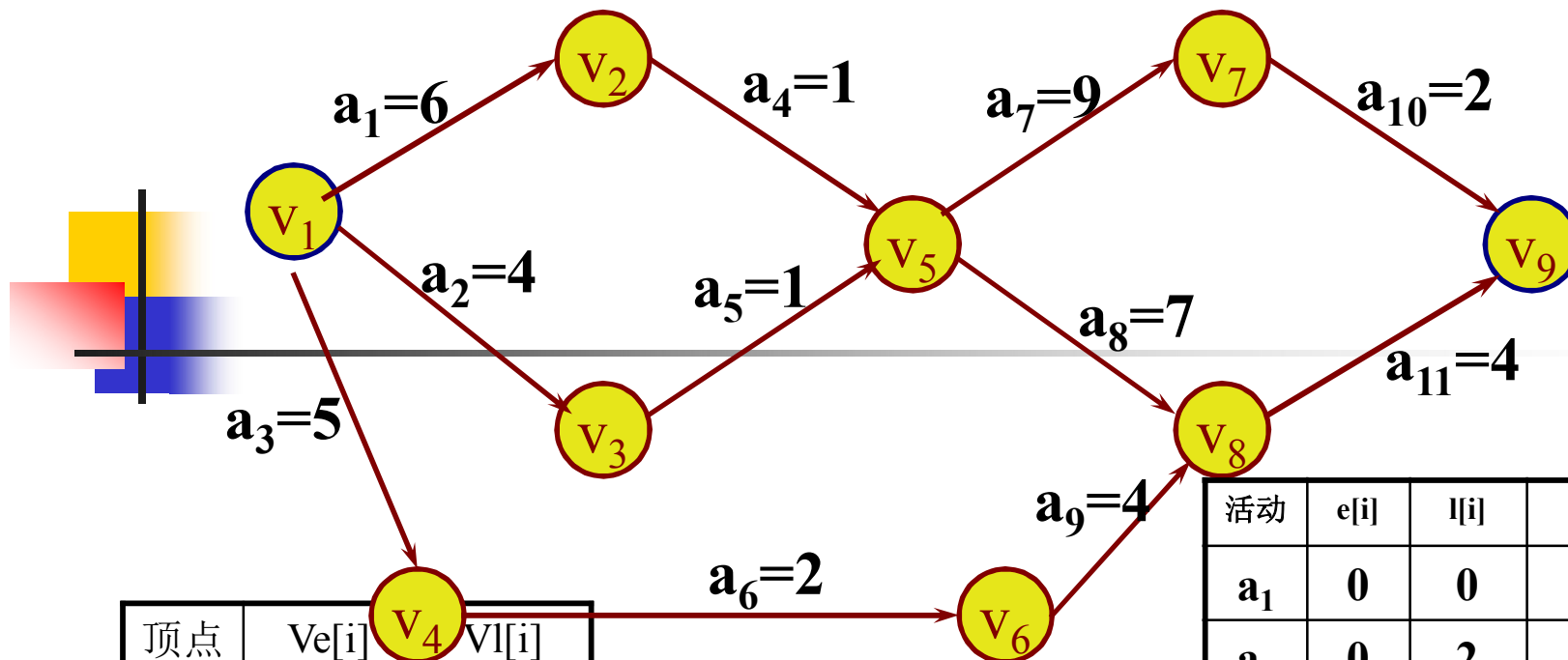
活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0		
a_2	0	2	
a_3	0	3	
a_4	6	6	
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

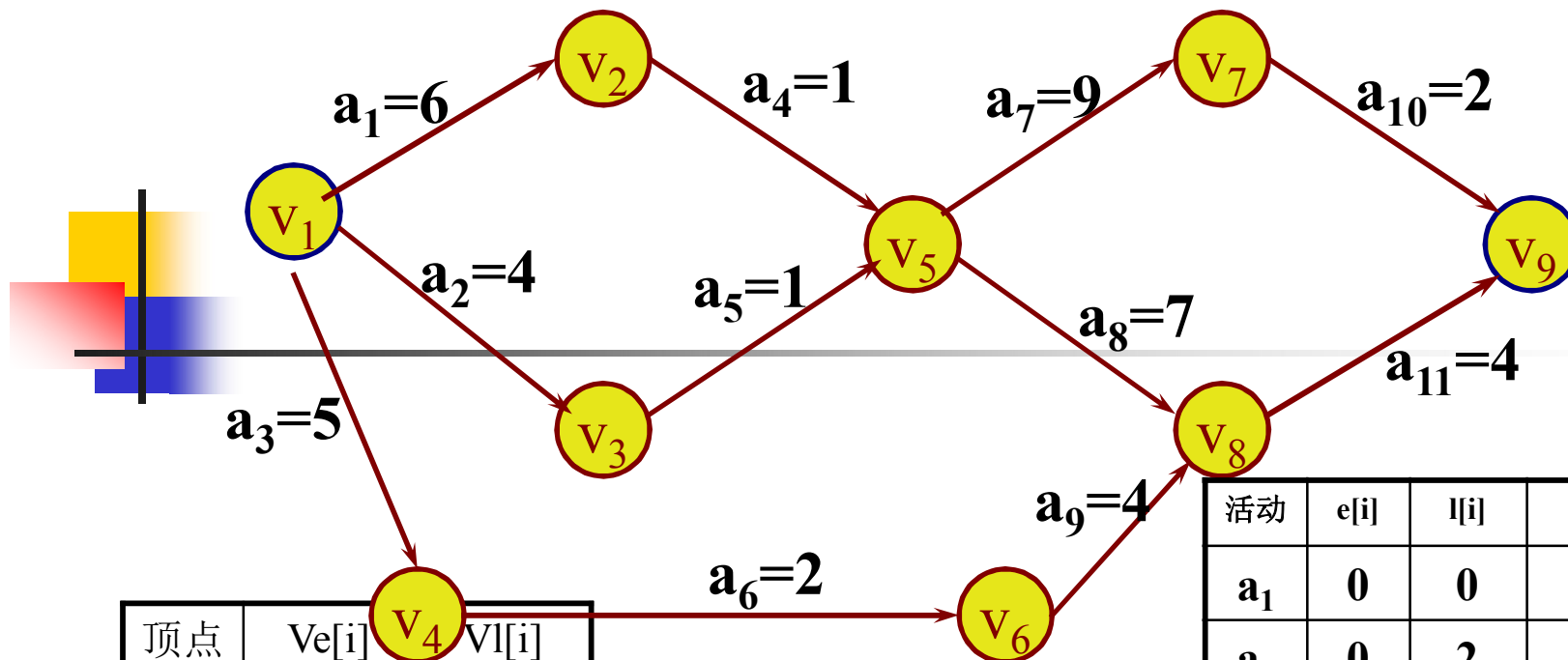
活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0	0	
a ₂	0	2	
a ₃	0	3	
a ₄	6	6	
a ₅	4	6	
a ₆	5	8	
a ₇	7	7	
a ₈	7	7	
a ₉	7	10	
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	

- 
-
- $l[i]-e[i]$ 就是在不增加完成工作所需的总时间的情况下，活动可以延迟的时间。
若 $l[i]=e[i]$ ，则活动 a_i 为**关键活动**。
 - $l[i]-e[i]>0$ 的活动不为关键活动。



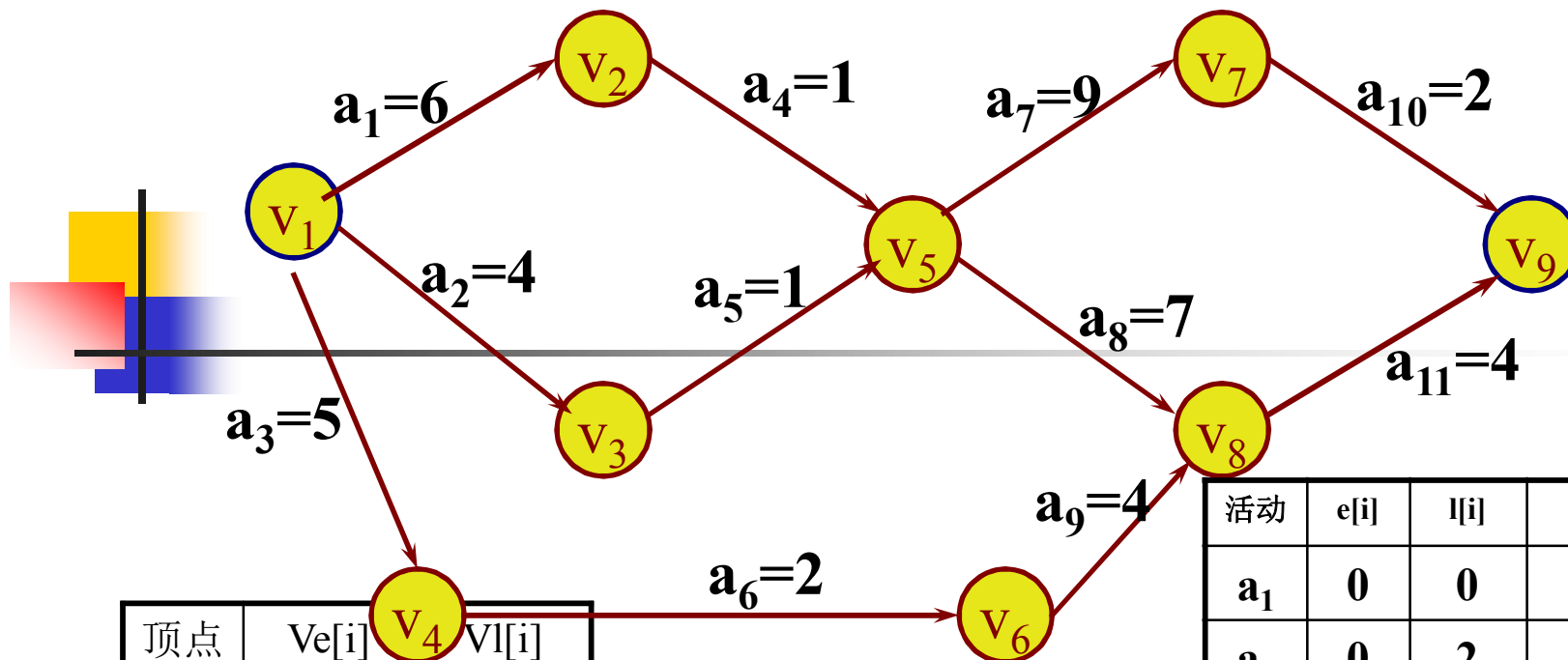
顶点	Ve[i]	Vl[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a_1	0	0	0
a_2	0	2	
a_3	0	3	
a_4	6	6	
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



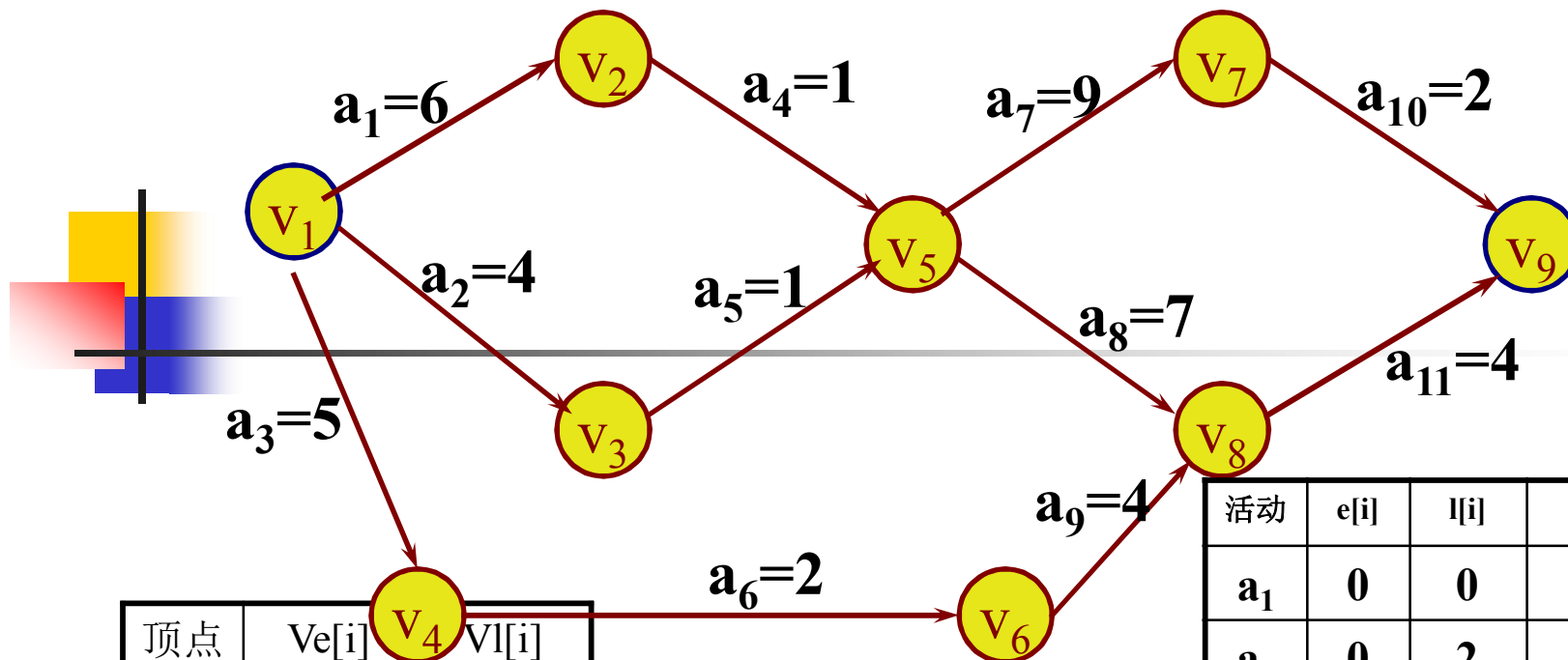
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	
a_4	6	6	
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



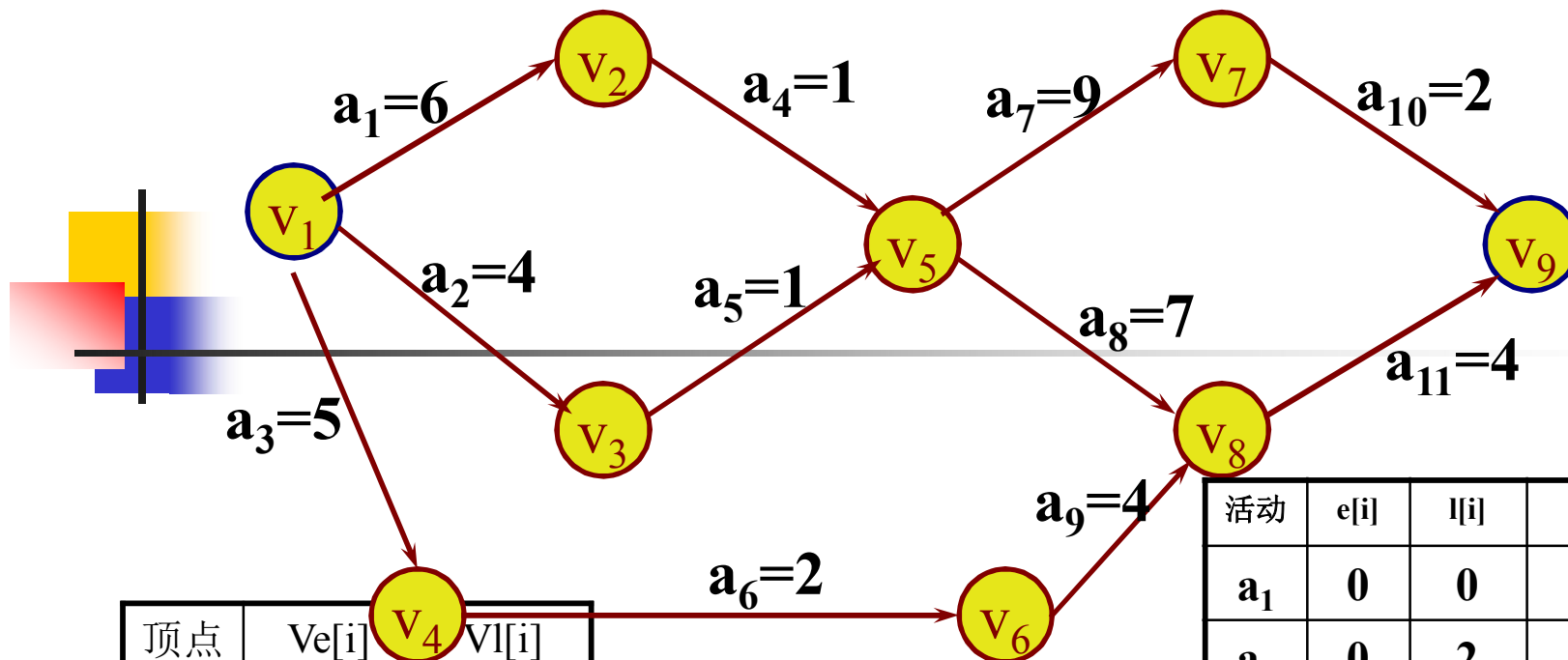
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0	0	0
a ₂	0	2	2
a ₃	0	3	3
a ₄	6	6	
a ₅	4	6	
a ₆	5	8	
a ₇	7	7	
a ₈	7	7	
a ₉	7	10	
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	



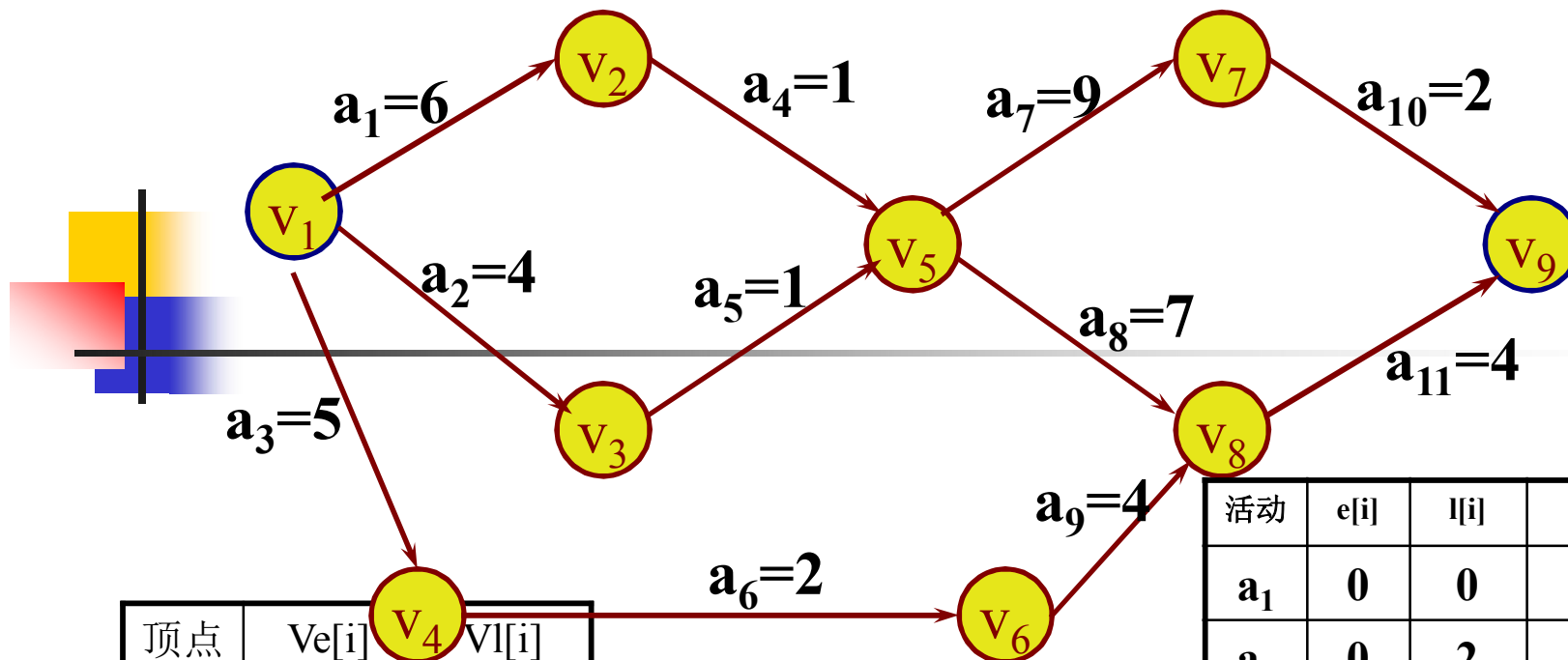
顶点	$Ve[i]$	$VL[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



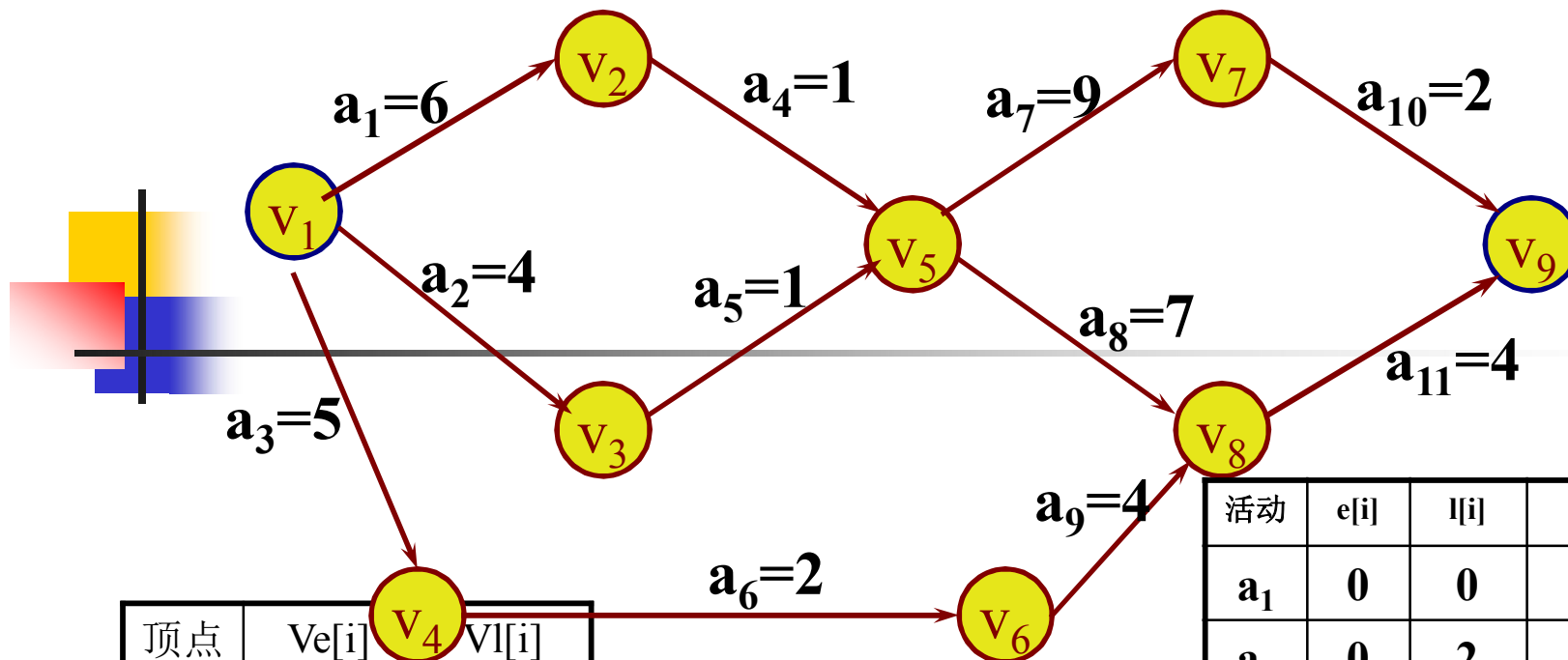
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



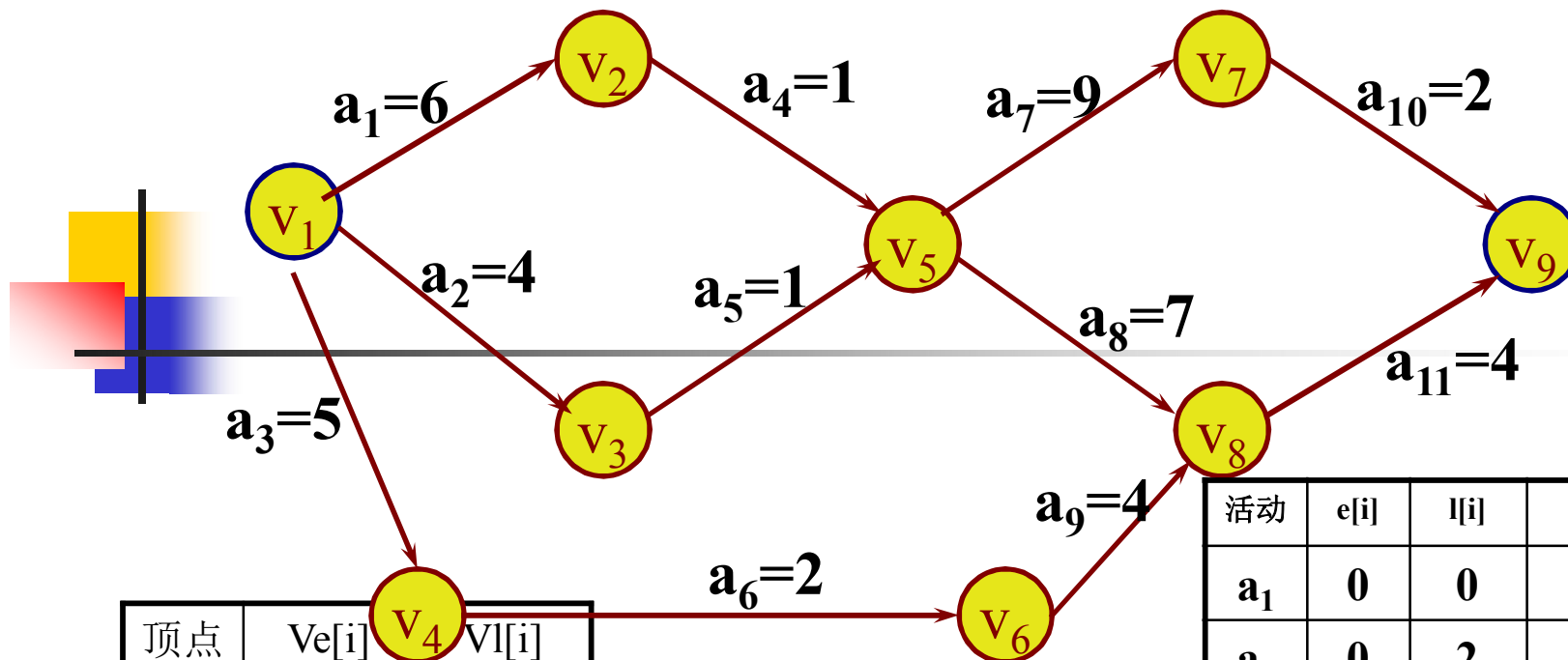
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	
a_8	7	7	
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



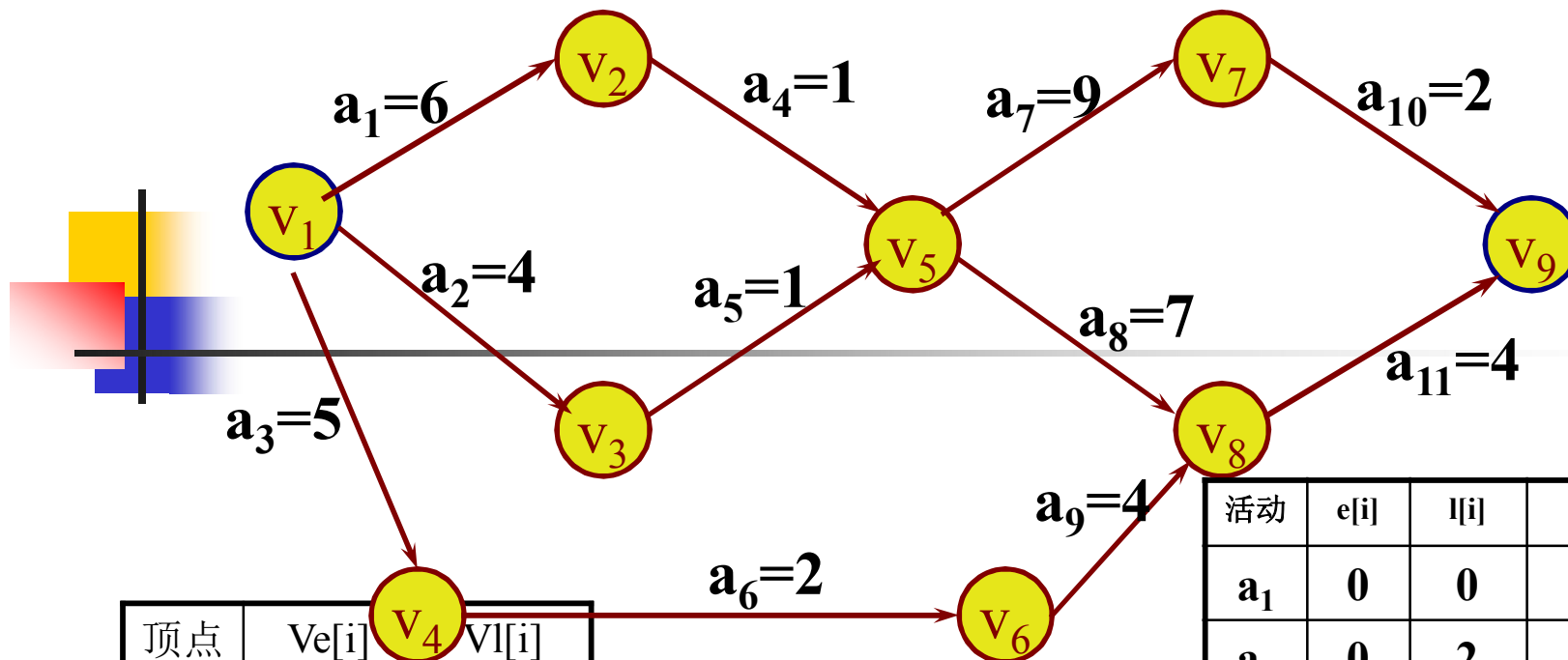
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0	0	0
a ₂	0	2	2
a ₃	0	3	3
a ₄	6	6	0
a ₅	4	6	2
a ₆	5	8	3
a ₇	7	7	0
a ₈	7	7	
a ₉	7	10	
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	



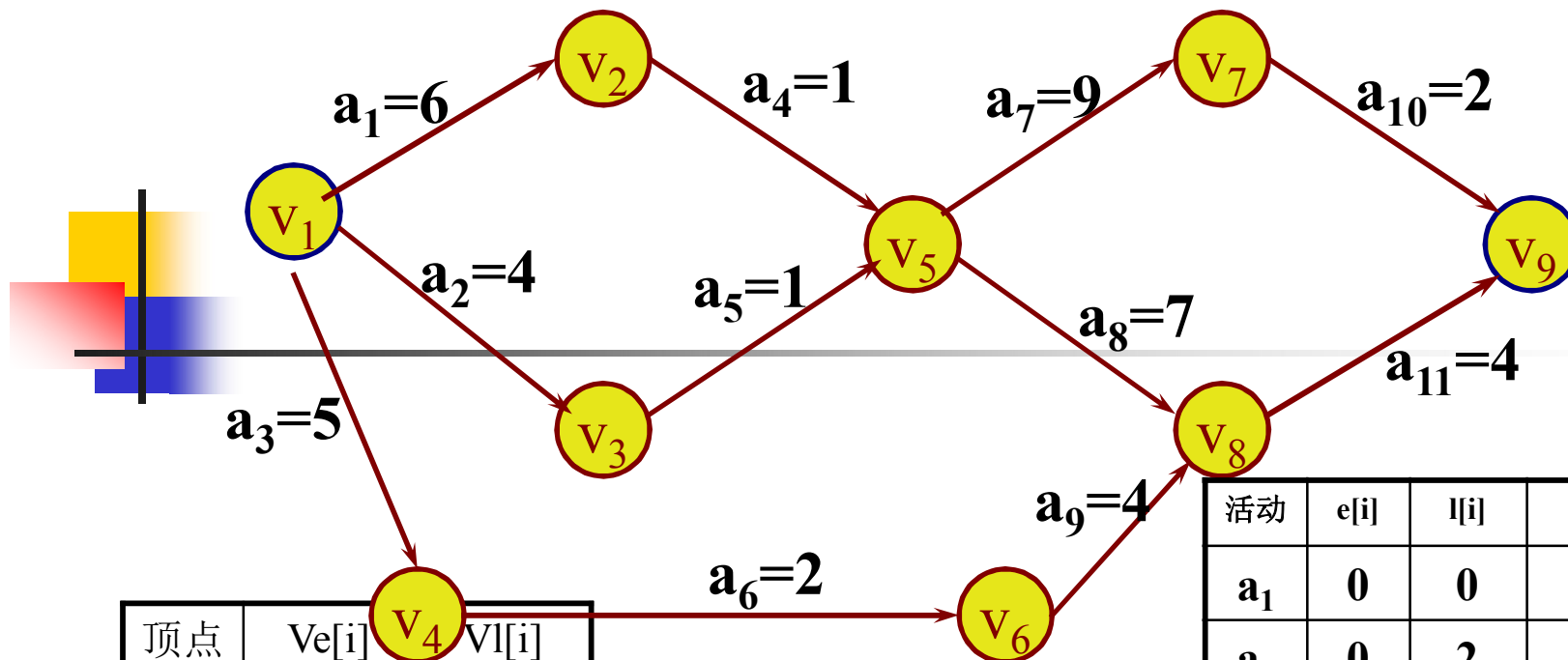
顶点	$Ve[i]$	$VI[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	0
a_8	7	7	0
a_9	7	10	
a_{10}	16	16	
a_{11}	14	14	



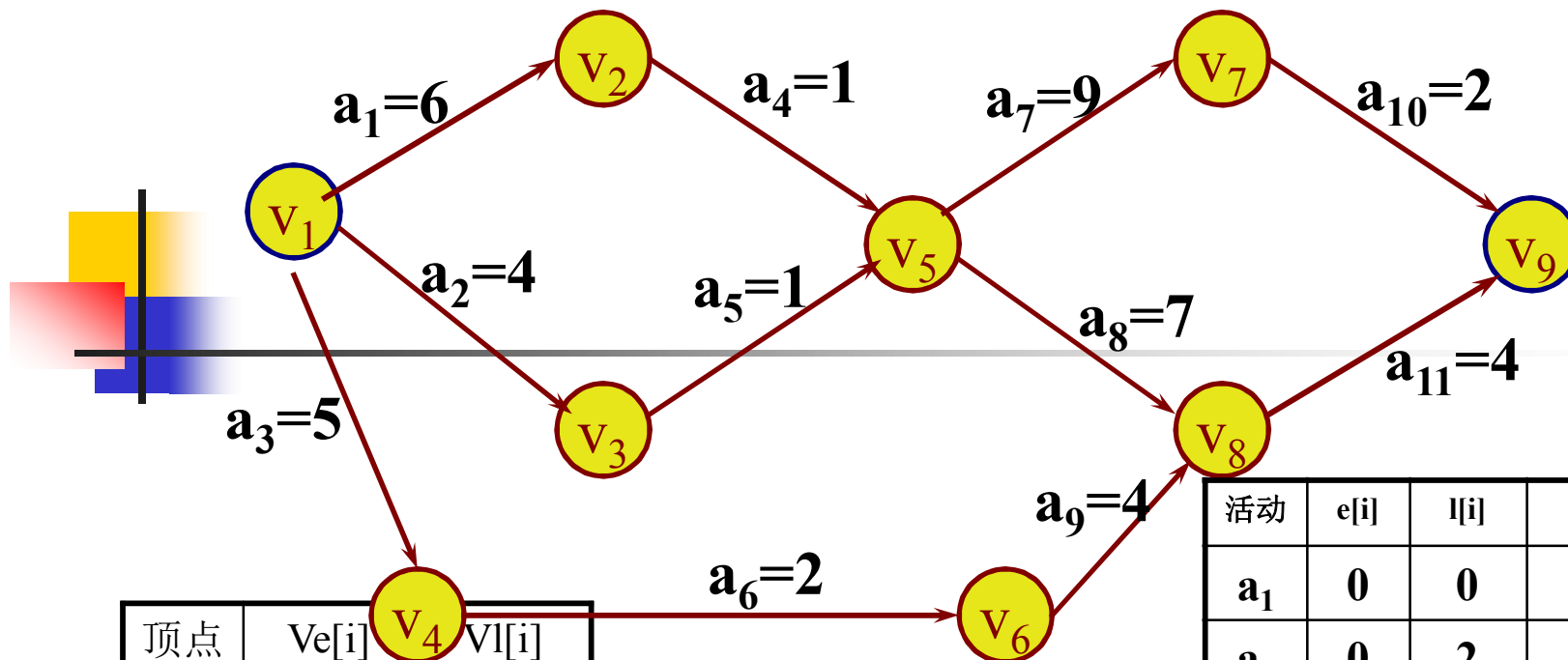
顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0	0	0
a ₂	0	2	2
a ₃	0	3	3
a ₄	6	6	0
a ₅	4	6	2
a ₆	5	8	3
a ₇	7	7	0
a ₈	7	7	0
a ₉	7	10	3
a ₁₀	16	16	
a ₁₁	14	14	



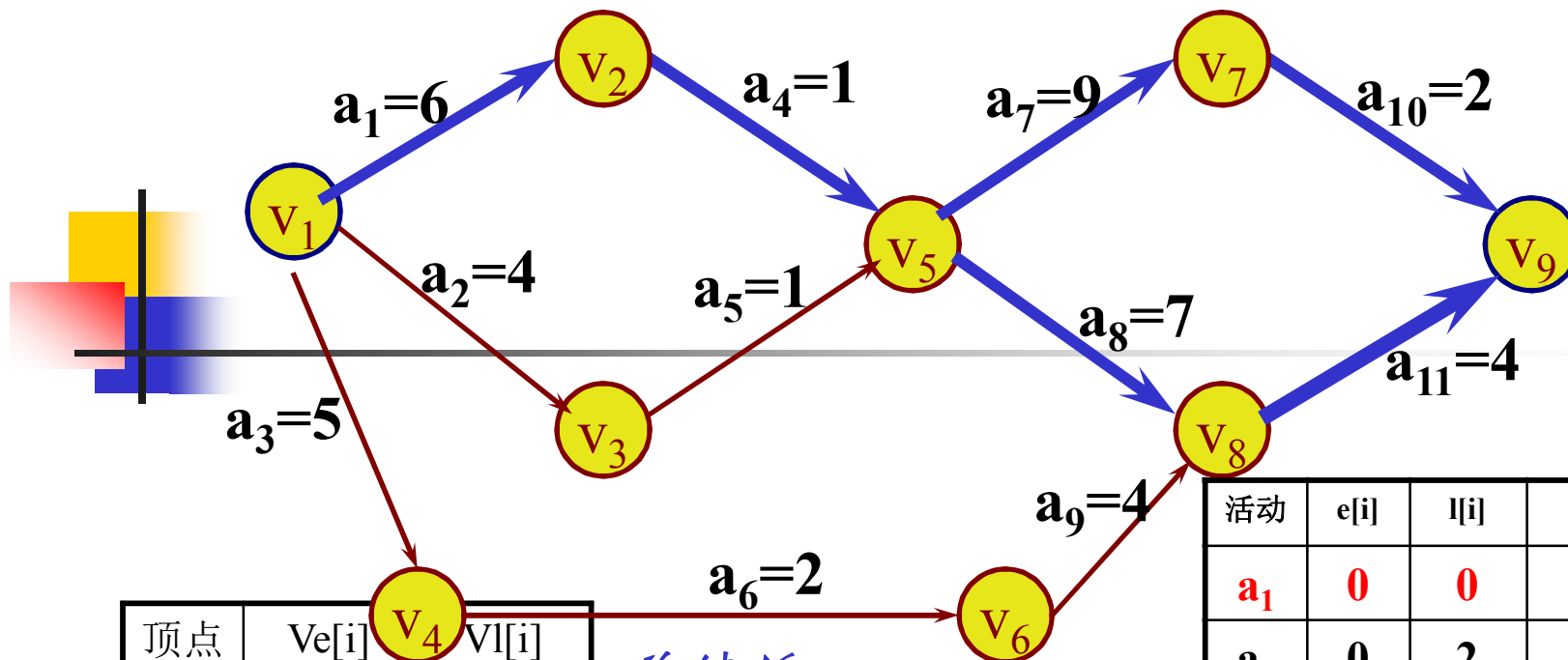
顶点	$Ve[i]$	$VL[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	0
a_8	7	7	0
a_9	7	10	3
a_{10}	16	16	0
a_{11}	14	14	



顶点	Ve[i]	VI[i]
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

活动	e[i]	l[i]	l-e
a ₁	0	0	0
a ₂	0	2	2
a ₃	0	3	3
a ₄	6	6	0
a ₅	4	6	2
a ₆	5	8	3
a ₇	7	7	0
a ₈	7	7	0
a ₉	7	10	3
a ₁₀	16	16	0
a ₁₁	14	14	0



顶点	$Ve[i]$	$VL[i]$
1	0	0
2	6	6
3	4	6
4	5	8
5	7	7
6	7	10
7	16	16
8	14	14
9	18	18

关键活

动: $a_1, a_4, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}$.

关键路径:

$(v_1, v_2, v_5, v_7, v_9)$ 和 $(v_1, v_2, v_5, v_8, v_9)$ 。

完成整个工程至少需要18

活动	$e[i]$	$l[i]$	$l-e$
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	0
a_8	7	7	0
a_9	7	10	3
a_{10}	16	16	0
a_{11}	14	14	0



说明

- (1) 关键路径上所有的活动都是关键活动。
因此提前完成非关键活动并不能加快工程的速度。

(2) 网络中的关键路径并不唯一，对于有几条关键路径的网来说，仅仅提高某一条关键路径上关键活动的速度，是不能缩短整个工程工期的，而必须同时提高几条关键路径上关键活动的速度。

所以，并不是网中任何一个关键活动的提前完成，整个工程都能提前完成。