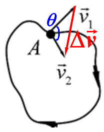
作业1-2：如图所示，物体沿闭合路径运动，经 t 时间后回到出发点，已知初速度为 v_1，末速度为 v_2，且 $v_1 = v_2$， 求 t 时间内的平均速度与平均加速度。

解：

$$\bar{\vec{a}} = \frac{2\vec{v}_1 \sin(\theta/2)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|}$$

$$|\bar{\vec{a}}| = \left|\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\theta}}{\Delta t}$$



方向如图，速度增量的方向。

作业1-6：一质点沿x轴运动，其加速度和位置的关系为 $a = 3+5x$，$t = 0$ 时在坐标轴原点处，速度为6m/s，求质点在任意位置时的速度。

解：$\frac{dv}{dt} = 3+5x \Rightarrow 3+5x = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$

$$v\,dv = (3+5x)\,dx$$

$$\int_6^v v\,dv = \int_0^x (3+5x)\,dx$$

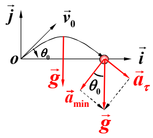
$$v = \sqrt{5x^2 + 6x + 36}\ \ (\mathrm{m/s})$$

作业2-1：一质点作半径为R的变速圆周运动，写出速率 v 加速度a和R之间的关系。

解：$a_\tau = \frac{dv}{dt}$ $\qquad a_n = \frac{v^2}{R}$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

作业2-6：一质点做抛体运动（忽略空气阻力）如图。在质点运动过程中回答下列问题： $y \ge 0$



1. 何处质点法向加速度最大？
最高点处质点法向加速度最大
$a_{max} = g \quad a_\tau = 0$
2. 何处质点法向加速度最小？
抛出点及同高度轨道上另一点法向加速度最小
$a_{min} = g\cos\theta_0 \quad a_\tau = g\sin\theta_0$
3. 何处曲率半径最大？ $a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho_{max} = \frac{v_0^2}{g\cos\theta_0}$

动量定理 $\vec{F}\,dt = d\vec{P}$

$$\underbrace{\vec{I}}_{过程量} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \underbrace{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}_{状态量}$$

内力不改变系统的总动量

动量守恒定律 $\vec{F}_{外} = 0 \Rightarrow \vec{P} =$ 常矢量

可应用于任何一个分量

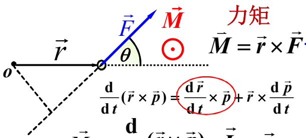
质心运动定理 $\vec{F} = m\vec{a}_c \quad \vec{P} = m\vec{v}_c$

找到质点系力变为内力

质心运动只与系统所受合外力相关

§ 2.4 角动量定理和角动量守恒定律

一、质点的角动量定理



力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

方向：右手定则

大小：$rF\sin\theta$

作用点、固定点

单位：Nm

$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})$ $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ 角动量 $\mathrm{kg\,m^2/s}$

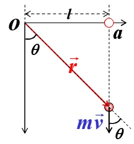
$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\vec{M}=0 \quad \vec{L}=\text{常矢量}}$$

角动量定理　力矩和角动量是对同一点的　角动量守恒定律

例1：将质量为 m 的质点由图中 a 点由静止释放。试求：任意时刻 t 质点的角动量和所受力的力矩。

解一：如图选择惯性系中的定点，

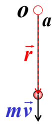


$M=rF\sin\theta=(r\sin\theta)mg=mgl$ ⊗

$L=rp\sin\theta=(r\sin\theta)mgt=mglt$ ⊗

$$\boxed{\mathrm{d}L/\mathrm{d}t=mgl=M}$$

解二：如图选择惯性系中的定点，



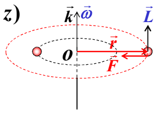
$M=rF\sin\theta=(r\sin\theta)mg\equiv 0$

$L=rp\sin\theta=(r\sin\theta)mgt\equiv 0$

$$\boxed{\mathrm{d}L/\mathrm{d}t=mgl=M}$$

例2：对于质量为 m 的质点的匀速圆周运动的情形。

解一：在惯性系中采用柱坐标 (r,θ,z)



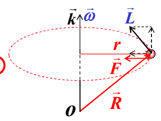
$\vec{M}=(r\vec{i}+0\vec{k})\times F(-\vec{i})\equiv 0$

$\vec{L}=(r\vec{i}+0\vec{k})\times mv\vec{j}=rmv\ \vec{k}$

若增加向心力把质点向圆心拉近，角动量仍然不变。

$\vec{L}=rmv\vec{k}=r'mv'\vec{k}\rightarrow v'=v(r/r')$ 动能有所改变。

解二：如图选择惯性系中的定点，

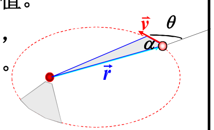


$\vec{M}=(r\vec{i}+z\vec{k})\times F(-\vec{i})=-zF\vec{j}$ ⊙

$\vec{L}=(r\vec{i}+z\vec{k})\times mv\vec{j}=rmv\vec{k}-zmv\vec{i}$

例3：证明开普勒第二定律～太阳与行星的连线在单位时间内扫过的面积是一个定值。

证明：选择惯性系的太阳为定点，位置矢量与万有引力平行、反向。



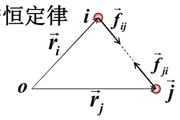
$\vec{M}=rF\sin\pi\equiv 0 \quad\rightarrow\quad \Delta\vec{L}=0$

$$L=rmv\sin\theta=rm\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\sin\theta=\frac{2m}{\Delta t}\times\frac{1}{2}r|\Delta\vec{r}|\sin\alpha$$

$$L=2m\frac{\Delta S}{\Delta t}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{L}{2m}=C$$

如果选择惯性系中其它点为定点，因力矩不为零，角动量不再守恒。

二、质点系的角动量定理及其守恒定律



1. 角动量定理：

$$\vec{M}_i=\vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}=\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}-\vec{r}_j\times\vec{f}_{ij}=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}\equiv 0$$

$$\vec{M}=\sum\vec{M}_i=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\sum\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum\vec{L}_i)=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

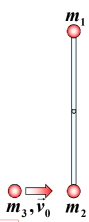
作用于质点系的诸外力对某定点的力矩和等于各质点对该点的角动量和的时间变化率。

2. 角动量守恒定律：

$$\boxed{\vec{M}=0,\quad \vec{L}=\text{常矢量}}$$

例 4：小球 m_1 和 m_2 固定在一个长为 $2a$ 的轻质硬杆的两端，杆可绕中点轴在水平面内自由转动，杆原来静止。另一小球 m_3 以水平速度 $\vec{v}_0$ 垂直于杆的方向与小球 m_2 发生碰撞并粘在一起。如果三球质量相等，求杆开始转动时的角速度。

解：选择杆的中点为定点，在碰撞过程中合外力矩为零，质点系的角动量和不变。



$m_3\vec{r}\times\vec{v}_0=m_3\vec{r}\times\vec{v}_3'+m_2\vec{r}\times\vec{v}_2'+m_1\vec{r}\times\vec{v}_1'$

$m\,r\,v_0=m\,r\,v_3'+m\,r\,v_2'+m\,r\,v_1'$

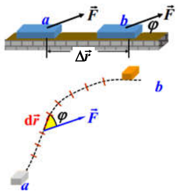
$r=a,\quad v'=v_3'=v_2'=v_1'=a\omega$

$v_0=3v'=3\times(a\omega)\Longrightarrow\boxed{\omega=\frac{v_0}{3a}}$

动量不守恒

§ 2.5 功 能 机械能守恒定律

一、功与功率



若 $\vec F$=常矢量，物体作直线运动

$$A_{ab}=|\vec F||\Delta\vec r|\cos\varphi=\vec F\cdot\Delta\vec r$$

对于变力做功

$$dA=\vec F\cdot d\vec r\qquad A_{ab}=\int_a^b\vec F\cdot d\vec r$$

功是标量，有正负之分

$$\begin{cases}0\le\varphi<\pi/2 \Rightarrow dA>0\\ \pi/2<\varphi\le\pi \Rightarrow dA<0\\ \varphi=\pi/2 \Rightarrow dA=0\end{cases}$$

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec F\cdot d\vec r}{dt}=\vec F\cdot\frac{d\vec r}{dt}=\vec F\cdot\vec v$$

瞬时功率与外力和速度的大小成正比，与两者的夹角有关。

二、 动能定理

1. 质点的动能定理 $\vec v\cdot\vec v=v^2 \Rightarrow \vec v\cdot d\vec v=v\cdot dv$

$$\vec r\times\to\quad \vec F=\frac{d\vec p}{dt}=m\frac{d\vec v}{dt}\ \leftarrow dt\quad \leftarrow\cdot d\vec r$$

力矩　冲量　功 动能

$$\vec F\cdot d\vec r=m\vec v\cdot d\vec v \Rightarrow \int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r=\int_{\vec v_1}^{\vec v_2}m\vec v\cdot d\vec v\equiv\int_{v_1}^{v_2}mv\cdot dv$$

合力的功～ $A=\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$ ～质点动能

合力对质点做的功等于质点动能的增量

动能定理对所有的惯性系都成立,但数值各不相同。

2. 质点系的动能定理：

$$A_i=\int_{\vec r_{i1}}^{\vec r_{i2}}\vec F_i\cdot d\vec r_i+\sum_{j\neq i}\int_{\vec r_{i1}}^{\vec r_{i2}}\vec f_{ij}\cdot d\vec r_i=\frac{1}{2}m_iv_{i2}^2-\frac{1}{2}m_iv_{i1}^2$$

$$A_j=\int_{\vec r_{j1}}^{\vec r_{j2}}\vec F_j\cdot d\vec r_j+\sum_{i\neq j}\int_{\vec r_{j1}}^{\vec r_{j2}}\vec f_{ji}\cdot d\vec r_j=\frac{1}{2}m_jv_{j2}^2-\frac{1}{2}m_jv_{j1}^2$$

$$A_{ex}\ +\ A_{in}\ =\ E_{k2}\ -\ E_{k1}$$

质点系—合外力＋内力做功等于系统动能的增量。

①E_k 为状态量 。

②功是能量变化的量度。

③内力做功可以改变系统的总动能。

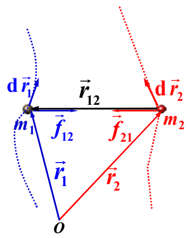
一对内力作功的和：

dt 时间质点 分别位移

$$dA_1=\vec f_{12}\cdot d\vec r_1$$

$$+)\ dA_2=\vec f_{21}\cdot d\vec r_2$$

$$\begin{aligned}dA&=\vec f_{12}\cdot d\vec r_1+\vec f_{21}\cdot d\vec r_2\\&=\vec f_{12}\cdot(d\vec r_1-d\vec r_2)\\&=\vec f_{12}\cdot d(\vec r_1-\vec r_2)\\&=\vec f_{12}\cdot d\vec r_{12}\end{aligned}$$



一对力所做的功与 参考系的选择无关，只与相对位置的变化有关。计算可简化：选一质点静止于新的座标原点，另一质点相对其受力、运动……

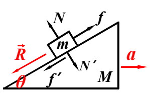
例1: 质量为m的物体, 放在倾角为θ、质量为 M 的斜面上，斜面置于光滑冰面上。物体 m和斜面间存在摩擦，当物体沿斜面下滑过程中，分析由物体和斜面组成的系统内力作的功。

解: 系统内力有两对即N、N' 和 f 、f'

由于一对内力的功只与相对位置有关，选M为坐标系，m相对M 滑动

N 、N' 一对内力在dt内做功为

$$dA_1=\vec N\cdot d\vec R \Rightarrow A_1=0$$



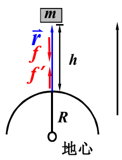
f 、f' 一对内力在 dt 内做功为

$$dA_2=\vec f\cdot d\vec R<0 \Rightarrow A_2=\int\vec f\cdot d\vec R<0$$

例2: 质量为 m 的物体在地面附近，从离地面高度为 h 的地方自由下落。将物体和地球视为一个系统，求这一对引力做的功（如图所示）。

解: 地球半径为R，f、f'是物体和地球间的一对引力。可认为地球不动，物体相对地球运动，这一对引力总功的和为

$$A=\int\vec f\cdot d\vec r=-\int_{R+h}^{R}mg\cdot dr=mgh>0$$



一对内力做功的总和可正、可负、也可为零。