

## 第三章 逻辑代数基础



1

### 逻辑代数一绪言

逻辑代数是按一定的逻辑关系进行运算的代数，是分析和设计数字电路的数学工具。在逻辑代数中，只有0和1两种逻辑值，有**与**、**或**、**非**三种基本逻辑运算，还有**与或**、**与非**、**与或非**、**异或**或几种导出逻辑运算。

逻辑是指事物的因果关系，或者说条件和结果的关系，这些因果关系可以用逻辑运算来表示，也就是用逻辑代数来描述。



4

### 基本逻辑

- ◆ 最基本的逻辑关系只有三种，即：**与** 或 **非**
- ◆ 比如要办成一件事的条件：每个人都完成才算完成---与
- ◆ 任一一人完成即算完成-----或
- ◆ 完成的反面是未完成-----非



7

## 第三章 逻辑代数基础

- 第1节 逻辑代数运算法则
- 第2节 逻辑函数的标准形式
- 第3节 逻辑函数的公式法化简
- 第4节 逻辑函数的卡诺图化简



2

事物往往存在两种对立的状态，在逻辑代数中可以抽象地表示为0和1，称为逻辑0状态和逻辑1状态。

逻辑代数中的变量称为**逻辑变量**，用大写字母表示。**逻辑变量**的取值只有两种，即逻辑0和逻辑1，0和1称为逻辑常量，并不表示数量的大小，而是表示两种对立的逻辑状态。



5

### 基本逻辑关系：

(1) “与”逻辑

A、B、C条件都具备时，事件F才发生。



8

## 逻辑代数概述

- 逻辑代数=布尔代数=开关代数
- 主要内容
- 基本逻辑关系：与、或、非及其组合
- 逻辑函数的表示方法：函数式 真值表 卡诺图 逻辑图
- 逻辑函数的化简方法：代数法和卡诺图法



3

### 3.1 逻辑代数的运算法则

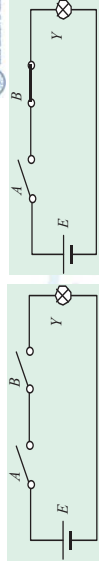
#### 3.1.1 逻辑代数的基本定律

在数字电路中，我们要研究的是电路的输入输出之间的逻辑关系，所以数字电路又称**逻辑电路**，相应的研究工具是**逻辑代数（布尔代数）**。

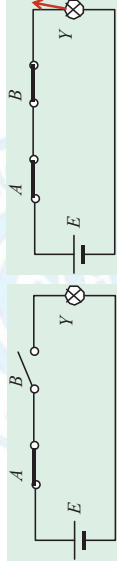
在逻辑代数中，逻辑函数的变量只能取两个值（**二值变量**），即0和1，中间值没有意义，这里的0和1只表示两个对立的逻辑状态，如电位的低高（0表示低电位，1表示高电位）、开关的合等。



6



A断开、B接通，灯不亮。



A、B都接通，灯亮。

两个开关必须同时接通，灯才亮。逻辑表达式为：

$$Y = A B$$



9

### 功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	灭
闭合	断开	灭
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

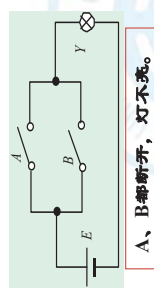
将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

这种把所有可能的条件组合及其对应结果一一列出来的表格叫做真值表。

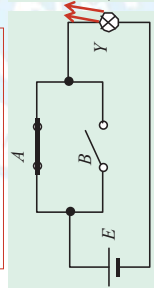
实现与逻辑的电路称为与门。与门的逻辑符号：



$$Y = A \cdot B$$



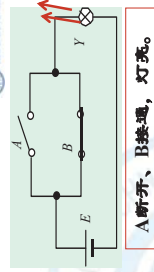
A、B都断开，灯不亮。



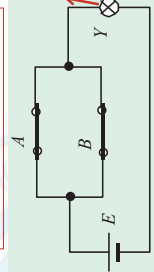
A接通、B断开，灯亮。

两个开关只要有一个接通，灯就会亮。逻辑表达式为：

$$Y = A + B$$



A断开、B接通，灯亮。



A、B都接通，灯亮。

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

真值表

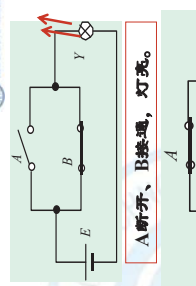
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这种把所有可能的条件组合及其对应结果一一列出来的表格叫做真值表。

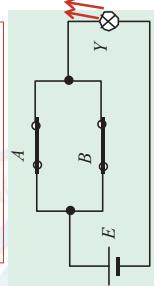
实现与逻辑的电路称为与门。与门的逻辑符号：



$$Y = A \cdot B$$



A断开、B接通，灯亮。



A、B都接通，灯亮。

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

### (2) “或”逻辑

A、B、C只有一个条件具备时，事件F就发生。

### 逻辑符号



### 逻辑式

$$F = A + B + C$$

### 逻辑加法逻辑或

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真值表

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

真值表

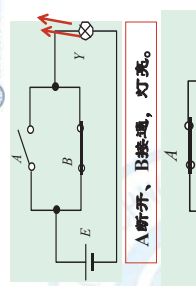
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这种把所有可能的条件组合及其对应结果一一列出来的表格叫做真值表。

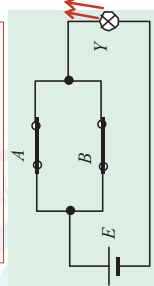
实现与逻辑的电路称为与门。与门的逻辑符号：



$$Y = A \cdot B$$



A断开、B接通，灯亮。



A、B都接通，灯亮。

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

### (2) “或”逻辑

A、B、C只有一个条件具备时，事件F就发生。

### 逻辑符号



### 逻辑式

$$F = A + B + C$$

### 逻辑加法逻辑或

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真值表

### 逻辑式

$F = A \cdot B \cdot C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

### 逻辑乘法逻辑与

真值表

功能表

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### 逻辑符号



实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：

$$Y = A + B$$

将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

真值表

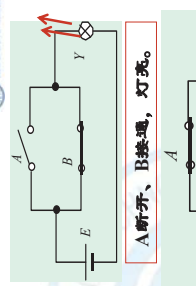
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这种把所有可能的条件组合及其对应结果一一列出来的表格叫做真值表。

实现与逻辑的电路称为与门。与门的逻辑符号：



$$Y = A \cdot B$$



### (4) 几种常用的逻辑关系

“与”、“或”、“非”是三种基本的逻辑关系，任何其它的逻辑关系都可以以它们为基础表示。



**或非:** 条件 A、B、C 任一具备，则 F 不发生。

$$F = \overline{A + B + C}$$

**异或:** 条件 A、B 有一个具备，另一个不具备，则 F 发生。

$$F = \overline{AB} + \overline{AB} = A \oplus B$$

### 组合起来的逻辑——简单记忆

与或非逻辑  $P = A \cdot B + C \cdot D$

异或逻辑  $P = A \oplus B = AB + AB$  “不同为1”

同或逻辑  $P = A \odot B = AB + AB$  “相同为1”

### 组合起来的逻辑——简单记忆

与逻辑: 逻辑乘  $P = A \cdot B$  “有0则0”

或逻辑: 逻辑加  $P = A + B$  “有1则1”

非逻辑: 逻辑非  $P = \overline{A}$  “求反”

与非逻辑  $P = \overline{A \cdot B}$  “全高出低、一低出高”

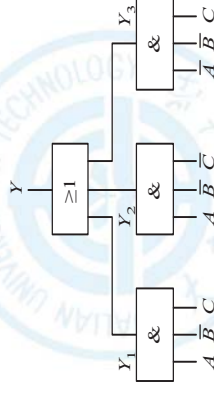
或非逻辑  $P = \overline{A + B}$  “全低出高、一高出低”

### 逻辑函数的表达式

一个逻辑函数的表达式可以有与或表达式、或与表达式、与非-或非表达式、或非-或非表达式、与或非表达式3种表示形式。

- (1) 与或表达式:  $Y = \overline{AB} + AC$
- (2) 或与表达式:  $Y = (A + B)(\overline{A} + C)$
- (3) 与非-或非表达式:  $Y = \overline{\overline{AB} \cdot AC}$
- (4) 或非-或非表达式:  $Y = \overline{\overline{A + B} + \overline{A + C}}$
- (5) 与或非表达式:  $Y = \overline{\overline{AB} + AC}$

一种形式的函数表达式相应于一种逻辑电路。尽管一个逻辑函数表达式各种表示形式不同，但逻辑功能是一样的。



**例3.1** 已知函数Y的逻辑图如图所示，写出函数Y的逻辑表达式。

解: 据逻辑图逐级写出输出端函数表达式如下:

$$Y_1 = \overline{ABC}$$

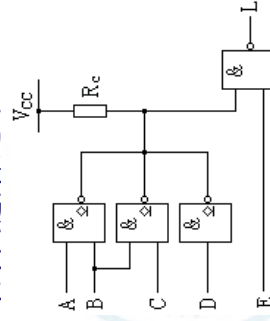
$$Y_2 = \overline{ABC}$$

$$Y_3 = \overline{ABC}$$

最后得到函数Y的表达式为

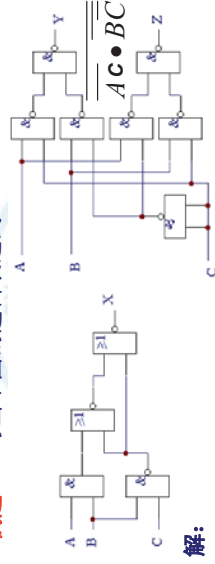
$$Y = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

### 例3.2 写出下图的逻辑表达式



解:  $L = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{D} \cdot E = AB + BC + D + \overline{E}$

### 例3.3 写出下图的逻辑表达式



解:

$$\overline{AB + BC + BC}$$

$$\overline{AC \cdot BC}$$

从三种基本的逻辑关系出发, 我们可以得到以下逻辑运算结果:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 &= 1 \\ 0 + 0 &= 0 & 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 + 1 = 1 \\ \bar{1} &= 0 & \bar{0} &= 1 \end{aligned}$$

### 例3.4 化简下式

解:

$$Y_1 = ABC + \bar{A}BC + \bar{B}C =$$

$$Y_2 = ABC + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C$$

### B. 反变量的吸收

$$\bar{A} + AB = A + B$$

证明

$$\begin{aligned} \bar{A} + AB &= \bar{A} + A + \bar{A}B \\ &= A + B(A + \bar{A}) = A + B \end{aligned}$$

举例

$$A + \bar{A}BC + DC = A + BC + DC$$

被吸收

### 基本规律

$$\begin{aligned} A + 0 &= A & A + 1 &= 1 \\ A \cdot 0 &= 0 \cdot A = 0 & A \cdot 1 &= A \\ A + \bar{A} &= 1 & A + A &= A \\ A \cdot \bar{A} &= 0 & A \cdot A &= A \\ \bar{\bar{A}} &= A \end{aligned}$$

### 吸收法

A. 原始变量的吸收

$$A + AB = A$$

$$\text{证明: } A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$$

化简:

$$AB + CD + \bar{A}\bar{B}D(E + F) = AB + CD$$

被吸收

### 例3.5 化简下式

解:

$$Y_2 = A + \bar{B} + \bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

$$Y = AB + \bar{A}C + \bar{B}C$$

$$Y_1 = \bar{A}B + \bar{A}BCD(E + F)$$

### 3.1.2 逻辑代数的基本规则

交换

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

结合

$$A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

分配

$$A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + B \cdot C = (A + B)(A + C)$$

不适合一般的逻辑函数

证明:  $A + BA = (A + B)(A + C)$

证明:

$$(A + B)(A + C) = \bar{A}A + \bar{A}C + BA + BC$$

$$= A + AB + AC + BC$$

$$= A(1 + B + C) + BC$$

$$= A + BC$$

Distribute

$$A(B + C) = AB + AC$$

AA=A

Distribute

$$A(B + C) = AB + AC$$

0-1

$$A + 1 = 1$$

### 例3.6 证明下式

反变量吸收的证明  $A + \bar{A}B = A + B$  True

$$\begin{aligned} A + \bar{A}B &= A(B + \bar{B}) + \bar{A}B \\ &= AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B \\ &= AB + AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B \\ &= A(B + \bar{B}) + B(A + \bar{A}) \\ &= A + B \end{aligned}$$



39

### 3.2 逻辑函数的标准形式

**A 真值表：**将输入、输出的所有可能状态一一对应地列出。

设A、B、C为输入变量，F为输出变量。

A	B	C	F
0	1	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \boxed{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

逻辑相邻

$$\overline{ABC} + \overline{ABC} = \overline{BC}$$

逻辑相邻的项可以合并，消去一个因子

### 最小项的定义

最小项是标准乘积项，设A、B、C、D...是n个逻辑变量，P是n个变量的一个乘积，如果在P中，每个变量都以原变量或者反变量的形式出现一次，且仅出现一次，则称P为这n个逻辑变量的一个最小项。N个变量的最小项有 $2^N$ 个。

例如：对A、B、C三变量而言，其最小项有：

$$\overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}$$

**最小项的编号：**把使最小项的值为1的一组变量的取值作为编号，对上而言，即

$$m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$$

三变量最小项列表如下：

### B 逻辑表达式

- (1) 与或表达式： $Y = \overline{A}B + AC$
- (2) 或与表达式： $Y = (A + B)(\overline{A} + C)$
- (3) 与非-与非表达式： $Y = \overline{\overline{A}B \cdot AC}$
- (4) 或非-或非表达式： $Y = \overline{\overline{A + B} + \overline{A + C}}$
- (5) 与或非表达式： $Y = \overline{\overline{A}B + AC}$

### 3.2.1 逻辑函数的最小项及其性质

(1) **最小项：**如果一个函数的某个乘积项包含了函数的全部变量，其中每个变量都以原变量或反变量的形式出现，且仅出现一次，则这个乘积项称为该函数的一个标准乘积项，通常称为最小项。

3个变量A、B、C可组成8个最小项：

$$\overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}, \overline{ABC}$$

### 三变量函数的最小项及编号

最小项	变量取值			编号
	A	B	C	
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	0	0	0	$m_0$
$\overline{A}\overline{B}C$	0	0	1	$m_1$
$\overline{A}B\overline{C}$	0	1	0	$m_2$
$\overline{A}BC$	0	1	1	$m_3$
$A\overline{B}\overline{C}$	1	0	0	$m_4$
$A\overline{B}C$	1	0	1	$m_5$
$AB\overline{C}$	1	1	0	$m_6$
$ABC$	1	1	1	$m_7$

把逻辑函数的输入、输出关系写成**与、或、非**等逻辑运算的组合式，即**逻辑代数式**，又称为**逻辑函数式**，通常采用“**与或**”的形式。

$$\text{比如： } F = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

若表达式的乘积项中包含了所有输入变量的原变量或反变量，则这一项称为**最小项**，上式中每一项都是**最小项**。

若两个最小项中只有一个变量以原、反状态相区别，则称它们为**逻辑相邻**。

(2) **最小项的表示方法：**通常用符号 $m_i$ 来表示最小项。下标i的确定：把最小项中的原变量记为1，反变量记为0，当变量顺序确定后，可以按顺序排列成一个二进制数，则这个二进制数相对应的十进制数，就是这个最小项的下标i。

3个变量A、B、C的8个最小项可以分别表示为：

$$m_0 = \overline{ABC}, m_1 = \overline{ABC}, m_2 = \overline{ABC}, m_3 = \overline{ABC}$$

$$m_4 = \overline{ABC}, m_5 = \overline{ABC}, m_6 = \overline{ABC}, m_7 = \overline{ABC}$$

### 最小项性质

- (1)、每一个最小项与变量的一组取值相对应。只有该组取值才能使其值为1，其余组下该最小项的值均为0。
- (2)、变量相同的任意两个最小项的乘积为0。
- (3)、全体最小项的和为1。

### 标准与或表达式

逻辑函数表达式为一组最小项之和的形式。

标准与或表达式是表明逻辑变量取何值时，该逻辑函数等于1。

求逻辑函数标准与或式的方法：

以其值表标准与或表达式：

- 找出使逻辑函数 F 为 1 的变量组合；
- 写出使 F 为 1 的变量取值对应的最小项；
- 将这些最小项相加。



55

如果列出了函数的真值表，则只要将函数值为1的那些最小项相加，便是函数的最小项表达式。

A	B	C	Y	最小项	
0	0	0	0	$m_0$	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	0	1	1	$m_1$	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1	$m_2$	$m_3 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3$	$m_3 = \overline{A}B\overline{C}$
1	0	0	0	$m_4$	$m_5 = A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	$m_5$	$m_5 = A\overline{B}\overline{C}$
1	1	0	0	$m_6$	
1	1	1	0	$m_7$	

$$Y = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 = \sum m(1, 2, 3, 5)$$

$$= \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

将真值表中函数值为0的那些最小项相加，便可得到反函数的最小项表达式。



58

### 最大项的定义

最大项是标准或项，设 A, B, C, D... 是 n 个逻辑变量，M 是 n 个变量的和，如果在 M 中，每个变量都以原变量或者反变量的形式出现一次，且仅出现一次，则称 M 为这 n 个逻辑变量的一个最大项。n 个变量的最大项有  $2^n$  个。

例如：对 A, B, C 三变量而言，其最大项有：

$$A+B+C, A+B+\overline{C}, A+\overline{B}+C, A+\overline{B}+\overline{C}, \overline{A}+B+C, \overline{A}+B+\overline{C}, \overline{A}+\overline{B}+C, \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

最大项的编号：把使最大项的值为 0 的一组变量的取值作为编号，对上而言，即

$$M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$$



61

### 例题3.12 逻辑函数真值表如图，求其标准与或式。

解：

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\ &= m_0 + m_2 + m_6 \\ &= \sum m(0, 2, 6) \end{aligned}$$

从一般与或表达式求标准与或表达式：

$$\begin{aligned} F &= \overline{A}B + \overline{B}C + \overline{A}C \\ &= \overline{A}B(C + \overline{C}) + (\overline{A} + \overline{A})\overline{B}C + \overline{A}(\overline{B} + B)\overline{C} \\ &= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= m_1 + m_2 + m_3 + m_6 \\ &= \sum m(1, 2, 3, 6) \end{aligned}$$

任何逻辑函数都可以化成一个唯一的标准与或式(因为真值表唯一)。



56

### 例题3.13 请指出下式的最小项

Ex. Function  $F(A, B, C) = \overline{A+B} + \overline{A}BC$  Min.Pmt.

解：

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= \overline{A+B} + \overline{A}BC = \overline{A}B + \overline{A}BC \\ &= \overline{A}B(C + \overline{C}) + \overline{A}BC = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\ &= m_3 + m_2 + m_1 = \sum m(1, 2, 3) \end{aligned}$$



59

三变量最大项列表如下：

A, B, C	最大项(值为0的项)	编号
0 0 0	$A + B + C$	$M_0$
0 0 1	$A + B + \overline{C}$	$M_1$
0 1 0	$A + \overline{B} + C$	$M_2$
0 1 1	$A + \overline{B} + \overline{C}$	$M_3$
1 0 0	$\overline{A} + B + C$	$M_4$
1 0 1	$\overline{A} + B + \overline{C}$	$M_5$
1 1 0	$\overline{A} + \overline{B} + C$	$M_6$
1 1 1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	$M_7$



62

### 逻辑函数的最小项表达式

任何一个逻辑函数都可以表示成唯一的一组最小项之和，称为标准与或表达式，也称为最小项表达式。

对于不是最小项表达式的与或表达式，可利用公式  $A + \overline{A} = 1$  和  $A(B+C) = AB + AC$  来配项展开成最小项表达式。

$$Y = \overline{A} + BC$$

解：



57

### 3.2.2 函数的最大项

同样地，对或与式来说，其标准形式是最大项之积。

如：F(A, B, C) = (A+B+C)(A+B+C)(A+B+C)  
最大项意指取值为1的机会最大。

如果一个逻辑函数有 n 个变量，则它有  $2^n$  个最小项，也有  $2^n$  个最大项。

例如：  
F(A, B, C) 有 3 个变量，有 8 个最小项，8 个最大项

每个最大项、最小项由原反变量组合而成，不好写，也不好记，我们为它们编一个号码，最小项用小写 m，最大项用大写 M，再加一个下标，下标的取值顺序是：变量按顺序排列，原变量为 1，反变量为 0，取其 2 进制值



60

三变量最大项真值表如下：

ABC	$M_0$ $A+B+C$	$M_1$ $A+B+\overline{C}$	$M_2$ $A+\overline{B}+C$	$M_3$ $A+\overline{B}+\overline{C}$	$M_4$ $\overline{A}+B+C$	$M_5$ $\overline{A}+B+\overline{C}$	$M_6$ $\overline{A}+\overline{B}+C$	$M_7$ $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
000	0	1	1	1	1	1	1	1
001	1	0	1	1	1	1	1	1
010	1	1	0	1	1	1	1	1
011	1	1	1	0	1	1	1	1
100	1	1	1	1	0	1	1	1
101	1	1	1	1	1	0	1	1
110	1	1	1	1	1	1	0	1
111	1	1	1	1	1	1	1	0



63

## 最大项的性质

- (1)、每一个最大项与变量的一组取值相对应。只有该组取值才能使其值为0, 其余组下该最大项的值均为1。
- 例如:  $A + \bar{B} + C$  对应于 0、1、0, 此时  $M_2 = 0$ 。
- (2)、变量相同的任意两个最大项之和为1。
- (3)、全体最大项的乘积为0。

## 例3.15 求出下式的最大、最小项

$$Y(A, B, C) = AB + BC$$

解:

$$Y(A, B, C) = AB + BC = AB(C + \bar{C}) + BC(A + \bar{A}) = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$$

$$= \sum m(7, 6, 3)$$

$$Y(A, B, C) = \sum m(7, 6, 3)$$

$$\bar{Y}(A, B, C) = \sum m(0, 1, 2, 4, 5)$$

$$Y(A, B, C) = \prod M(0, 1, 2, 4, 5)$$

$$= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

如果逻辑函数不是最简表达式, 应该对其进行化简。这样可以用最少的器件实现尽可能多的功能, 可以降低成本、提高可靠性和减少门延迟时间。

判断一个与或逻辑表达式是否最简的条件:

- (1) 与项最少, 即表达式中“+”号最少;
- (2) 每个与项中的变量数最少, 即表达式中“.”号最少。

## 标准或与表达式

标准或与表达式: 每个或项都是最大项的或与表达式求标准或与表达式的方法

以其值表:

- 找出真值表中  $F=0$  的行;
- 对  $F=0$  的行, 写出对应的最大项;
- 所有最大项相与。

## 例3.16 求出下式的最大、最小项

$$Y(C, D, G) = (\bar{C} + \bar{D}) + DG$$

解:

$$Y(C, D, G) = (\bar{C} + \bar{D}) + DG$$

$$Y(C, D, G)$$

## 二、逻辑函数式化简的常用方法

1、并项法: 利用互补律  $\bar{A} + A = 1$

$$(1). \bar{A}BC + ABC = \bar{A}B(C + \bar{C}) = \bar{A}B$$

$$(2). A(\bar{B}C + B\bar{C}) + A(B\bar{C} + \bar{B}C)$$

$$= A(\bar{B} \oplus C + B \oplus C)$$

$$= A(B \oplus \bar{C}) + A(B \oplus C)$$

$$= A$$

2、吸收法: 利用  $A + AB = A$

$$(1). \bar{B} + A\bar{B}D = \bar{B}$$

$$(2). \bar{A}B + \bar{A}BCD(E + F + G) = \bar{A}B$$

## 例3.14 求如图对应的标准或与式

$$F(A, B, C) = (A + B + C)(A + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

$$= \prod m(1, 3, 4, 5, 7)$$

(2)、从一般或式: 利用  $(A + X)(A + \bar{X}) = A$

例: 求  $F(A, B, C) = (A + B)(A + C)$  对应的标准或与式

$$F(A, B, C) = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + B + C)(A + \bar{B} + C)$$

$$= \prod m(0, 1, 2)$$

## 最大项与最小项之间的关系

- 1、最大项与最小项互补:  $\bar{m}_i = M_j, \bar{M}_i = m_j$   
如:  $M_4 = \bar{A} + B + C, m_4 = ABC, \bar{m}_4 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{M}_4 = M_4$
- 2、不在最大项中出现的编号一定出现在最小项中。  
对上两例而言,  $F = \sum m(0, 2, 6), F = \prod M(1, 3, 4, 5, 7)$

## 3.3 逻辑函数的公式化简

### 一、逻辑函数式的常见形式

一个逻辑函数的表达式不是唯一的, 可以有多种形式, 并且能互相转换。例如:

$$L = AC + \bar{A}B$$

$$= (A + B)(\bar{A} + C)$$

$$= \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$= \overline{A + B} + \overline{A + C}$$

$$= \overline{AC} + \overline{AB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{AB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{AB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{AB}$$

3、消去法: 利用  $A + \bar{A}B = A + B$

$$(1). AB + \bar{A}C + \bar{B}C = AB + (\bar{A} + \bar{B})C = AB + \bar{A}\bar{B}C = AB + C$$

4、配项法: 利用  $B = (A + \bar{A})B$

$$AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C + (A + \bar{A})BC$$

$$= AB + ABC + \bar{A}C + \bar{A}BC$$

$$= AB + \bar{A}C$$

5、综合法

$$X = AD + A\bar{D} + AB + \bar{A}C + BD + AB\bar{E}F + \bar{B}EF$$

$$= A + AB + \bar{A}C + BD + \bar{B}EF$$

$$= A + \bar{A}C + BD + \bar{B}EF$$

$$= A + C + BD + \bar{B}EF$$

$$= A + C + BD + \bar{B}EF$$



## 例題 3.17 化简

利用逻辑代数的基本公式:

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} \\
 &= \overline{ABC} + \overline{AB}(C + \overline{C}) \\
 &= \overline{ABC} + \overline{AB} \quad \text{提出 } \overline{AB} \\
 &= \overline{A}(\overline{BC} + B) \quad \text{提出 } \overline{A} \\
 &= \overline{A}(\overline{C} + B) \quad \text{反变量吸收} \\
 &= \overline{A}C + \overline{A}B
 \end{aligned}$$

73

## 逻辑函数的最简表达式

## A 最简与或表达式

逻辑函数化简的意义: 逻辑表达式越简单, 实现它的电路越简单, 电路工作越稳定可靠。

乘积项最少、并且每个乘积项中的变量也最少的与或表达式。

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{A}B\overline{E} + \overline{A}B + \overline{A}C + \overline{A}CE + \overline{B}C + \overline{B}CD \\
 &= \overline{A}B + \overline{A}C + \overline{B}C \\
 &= \overline{A}B + \overline{A}C \quad \text{最简与或表达式}
 \end{aligned}$$

76

## 例題 3.18

化简该式

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \\
 &= (\overline{AB} + \overline{AB}) + (\overline{BC} + \overline{BC}) \quad \text{反演} \\
 &= \overline{AB} + \overline{AB}(C + \overline{C}) + \overline{BC} \quad \text{配项} \\
 &= \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{BC} \quad \text{被吸收} \\
 &= \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{BC} \quad \text{被吸收} \\
 &= \overline{AB} + \overline{AC}(\overline{B} + B) + \overline{BC} \\
 &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}
 \end{aligned}$$

74

## B、最简与非-或非表达式

非号最少、并且每个非号下面乘积项中的变量也最少的与非-或非表达式。

$$Y = \overline{A}B + \overline{A}C = \overline{A}B + \overline{A}C = \overline{\overline{A}B \cdot \overline{A}C}$$

①在最简与或表达式的基础上两次取反

## C、最简或与表达式

括号最少、并且每个括号内相加的变量也最少的或与表达式。

$$Y = \overline{A}B + \overline{A}C$$

①求出反函数的最简与或表达式

$$\begin{aligned}
 \overline{Y} &= \overline{\overline{A}B + \overline{A}C} = \overline{(\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + C)} \\
 &= \overline{\overline{A} + \overline{A}C + \overline{B}C + \overline{A}B} = \overline{\overline{A}B + \overline{A}C}
 \end{aligned}$$

②利用反演规则写出函数的最简或与表达式

$$Y = (\overline{A} + B)(\overline{A} + C)$$

77

## 例題 3.19 化简下式

$$Y = \overline{A}B + \overline{B}C + \overline{B}C + \overline{A}B$$

解:

$$Y = \overline{A}B + \overline{A}B + \overline{B}C + \overline{B}C$$

79



$$\overline{AB} = \overline{AC} \quad ? \rightarrow \quad \overline{B} = \overline{C}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A+C} \quad ? \rightarrow \quad \overline{B} = \overline{C}$$

请注意与普通代数的区别!

75

## D、最简或非-或非表达式

非号最少、并且每个非号下面相加的变量也最少的或非-或非表达式。

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{(A+B)(A+C)} \\
 &= \overline{(A+B)(A+C)} = \overline{A+B+A+C} \\
 &\quad \text{①求最简或非-或非表达式} \\
 &\quad \text{②两次取反} \\
 &\quad \text{③用摩根定律去掉下面的非号}
 \end{aligned}$$

②两次取反

## E、最简与或非表达式

非号下面相加的乘积项最少、并且每个乘积项中相乘的变量也最少的与或非表达式。

$$Y = \overline{A}B + \overline{A}C = \overline{A+B+A+C} = \overline{A+B+A+C}$$

去非号

掉非号

用非号

定律

①求最简或非-或非表达式

78

## 例題 3.21 化简下式—利用消除冗余项

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{BC} + \overline{BC} + A \\
 &= \overline{BC} + \overline{BC} + A \quad \text{including redundancy} \\
 &= \overline{BC} + A \quad \text{including redundancy} \\
 &= \overline{BC} + A
 \end{aligned}$$

解:

81



		CD			
AB	00	01	11	10	
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

逻辑函数以一般的逻辑表达式给出：先将逻辑表达式化为与或表达式（不必变换为最小项之和的形式），然后在卡诺图上与每一个乘积项所包含的那些最小项（该乘积项就是这些最小项的公因子）相对应的方格内填入1，其余的方格内填入0。

$$Y = (A + D)(B + \overline{C})$$

或变换为与或表达式与

$$Y = \overline{A}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}$$

A D 的公因子

		CD			
AB	00	01	11	10	
00	1	1	0	0	
01	0	0	0	0	
11	1	0	0	1	
10	1	1	0	1	

B C 的公因子

### 3.4.3 用卡诺图化简函数

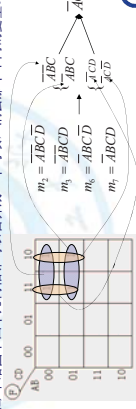
#### 用卡诺图化简逻辑函数的依据和规则

依据：卡诺图保证了任何相邻方格所代表的最小项只有一个变量不同，因此，当相邻方格为1时，其对应的最小项就可以合并，消去那个不同的变量，只保留相同的变量。

原则：(1) 卡诺图中两个几何相邻可以合并成一个与项，消去那个不同的变量。

		CD			
BC	A	00	01	11	10
	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0

(2) 卡诺图中四个几何相邻可以合并成一个与项，消去两个不同的变量。



### 3.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

逻辑函数是以真值表或者以最小项表达式给出：在卡诺图上那些与给定逻辑函数的最小项相对应的方格内填入1，其余的方格内填入0。

$$Y(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 4, 6, 7, 11, 14, 15)$$

		CD			
AB	00	01	11	10	
	00	0	1	0	0
	01	1	0	0	0
	11	1	1	1	1
10	0	1	1	1	0

#### 卡诺图的特点

- 卡诺图中的小方格数等于最小项总数，如变量数为  $2^n$ ，则有  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 512 \rightarrow 1024$
- 卡诺图行列两侧标注的0、1，是使对应方格内最小项为1的变量取值；同时，这些0、1组成的二进制数大小就是对应最小项的编号。且几何相邻的最小项具有逻辑相邻性。
- 卡诺图是一个上下、左右闭合的图形，几何上相邻的概念包括上下左右。

#### 用卡诺图表示逻辑函数

- 已知逻辑函数的真值表，只要将真值表中每组变量取值所对应的数值填入相应的小项方格中即可。

例如：画出如图真值表对应的卡诺图。

		BC			
A	D	00	01	11	10
	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1

### 利用卡诺图表示逻辑函数

下按一左停作本图按三角键播放；按

#### (2)、已知逻辑函数的表达式

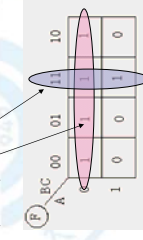
化简最小项之和，在相应的最小项方格中填入1即可。

$$\begin{aligned} \text{例如：画出如 } F(A, B, C) &= AB + BC + AC \\ &= AB(C + \overline{C}) + (A + \overline{A})BC + A(B + \overline{B})C \\ &= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC \\ &= \sum m(3, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

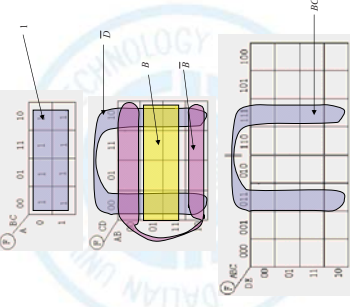
		BC			
A	D	00	01	11	10
	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1

#### (3)、直接填写（一般与或式）

例如：画出如  $F(A, B, C) = \overline{A} + BC$



#### (3) 卡诺图中八个几何相邻可以合并成一个与项，消去三个不同的变量。



推论：在  $n$  个变量的卡诺图中，若有  $2^k$  ( $k=0,1,2,\dots,n$ ) 个相邻格为1，可以将它们圈在一起，合并成一个有  $(n-k)$  个变量的与项，消去  $k$  个不同的变量。如果  $k=n$ ，则消去全部变量，结果为1。

2. 用卡诺图化简逻辑函数，求最简与或表达式

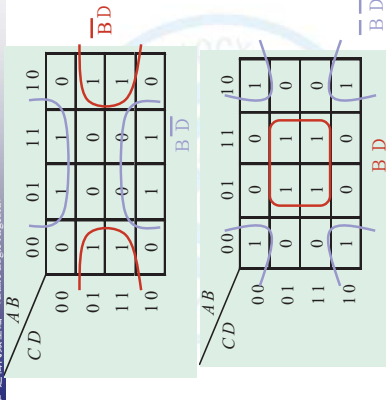
步骤：(1)、画卡诺图；  
(2)、合并最小项；  
(3)、写最简与或表达式。

在合并最小项时，对“1”格画圈，除了遵循前2页上的原则外，要注意：

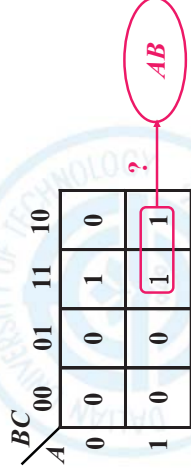
- (1)、“1”格不能遗漏；
- (2)、“1”格不能被多次使用；
- (3)、圈的数量尽可能少(或项数少)；
- (4)、圈的数量尽可能大(与项中的变量数少)；
- (5)、每个圈中至少应包含一个新的“1”格(否则，这个圈多余)；
- (6)、最简式不一定唯一，可能有多种正确的最简式。



00

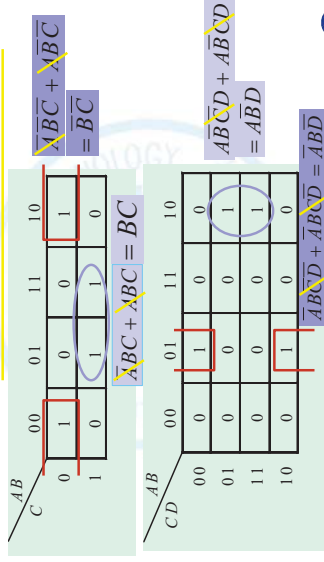


03



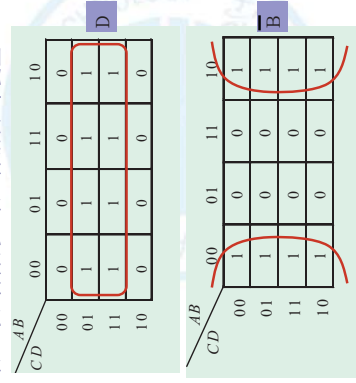
06

(A) 任何两个 (2个) 标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去一个变量 (消去互为反变量的因子，保留公因子)。



01

(C) 任何8个 (2个) 标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量。



04

小结：相邻最小项的数目必须为2的幂次方，即由2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872, 4631683569492647816942839400347516314130799386625622561578303360316525



	CD	00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	0

不是矩形

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	0	1	1
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

① 就每个方格数越大越好，  
② 多条都可同时画，但每个  
③ 新的方格，圈②中标  
④ 不能漏掉任何它

将代表乘积项相加

合并最小项

③

最简与或表达式

$$Y(A, B, C, D) = BD + CD + AC\bar{D}$$

化简时可以将无所谓状态当作1或0，目的是得到最简结果。

BC	A	00	01	11	10
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

认为是1

$$F=A$$

- (2) 先找面积尽量大的组合进行化简，可以减少更多的因子。
- (3) 各最小项可以重复使用。
- (4) 注意利用无所谓状态，可以使结果大大简化。
- (5) 所有的1都被圈过后，化简结束。
- (6) 化简后的逻辑式是各化简项的逻辑和。

两点说明：  
① 在有些情况下，最小项的圈法不只一种，得到各个乘积项组成的与或表达式各不相同，哪个是最简的，要经过比较、检查才能确定。

	CD	00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	1
	11	0	0	1	1
	10	0	0	0	0

$$ACD + B\bar{C}D + A\bar{B}C + A\bar{B}D$$

不是最简

$$B\bar{C}D + A\bar{B}C + A\bar{B}D$$

最简

例3.26 化简

解：

CD	00	01	11	10
AB	1	1	1	1
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

ABD

$$F = \overline{ABD}$$

图形化简的基本步骤

$$Y(A, B, C, D) = \sum m(3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 15)$$

逻辑表达式或真值表



AB	CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1	1
01	0	0	1	1	0
11	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0

卡诺图

② 在有些情况下，不同圈法得到的与或表达式都是最简形式。即一个函数的最简与或表达式不是唯一的。

AB	CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0	0
01	1	1	1	0	0
11	0	0	1	0	0
10	1	0	1	0	0

$$A\bar{C} + A\bar{B}D + ABC + B\bar{C}D$$

$$A\bar{C} + A\bar{B}D + ABC + ABD$$

例3.27 已知真值表如图，用卡诺图化简。

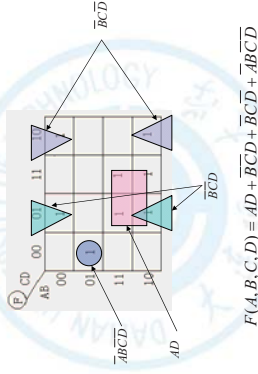
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，即无所谓状态。

### 例 3.28 用卡诺图法化简。

$$F(A, B, C, D) = \sum_m(1, 2, 4, 9, 10, 11, 13, 15)$$

解:

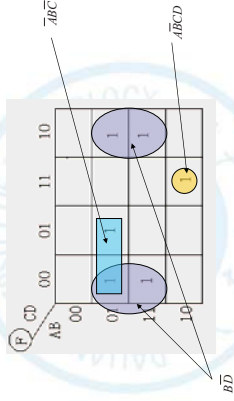


$$F(A, B, C, D) = AD + \overline{B}CD + B\overline{C}D + AB\overline{C}D$$

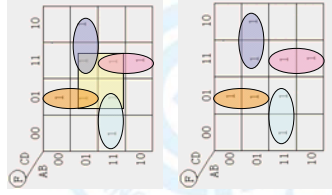
### 例 3.31 用卡诺图法化简。

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}BCD + \overline{B}CD + B\overline{C}D + \overline{A}BCD$$

解:



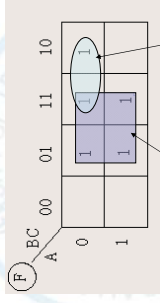
$$F(A, B, C, D) = \overline{B}D + \overline{A}BC + \overline{A}BCD$$



### 例 3.29 用卡诺图法化简。

$$F(A, B, C) = \overline{A}BC + \overline{A}BC + \overline{A}BC + \overline{A}BC$$

解:

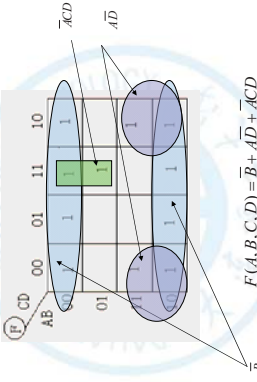


$$F(A, B, C) = \overline{A}B + C$$

### 例 3.32 用卡诺图法化简。

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}B + \overline{A}CD + \overline{A}BD + \overline{A}CD + \overline{A}BCD$$

解:



$$F(A, B, C, D) = \overline{B} + \overline{A}D + \overline{A}CD$$

### 3.4.4 含随意项的逻辑函数的化简

在实际逻辑电路中，逻辑函数真值表中某方格的取值有可能是任意值 (0/1)；或者可能永远不会出现 (逻辑上不涉及此方格)。如果一个逻辑电路的输入为 8421BCD 码，显然变量的取值范围中 1010—1111 这 6 个输入组合是不会出现的，其对应的输出是什么都无所谓，不必关心。

就这样，在电路中：  
输出可假定为 1，也可假定为 0 的输入变量组合叫随意状态，在真值表和卡诺图中记为  $\phi$  或  $x$ 。  
在逻辑函数表达式中用  $\sum_i (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  表示随意状态。

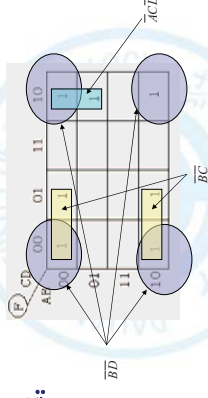
如  $\sum_i (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  表示随意状态。  
有时可用逻辑函数表达式表示函数中随意状态。  
如  $d = AB + AC$   $d = AB + AC$  说明包含的最小项是随意状态。

化简具有随意项的逻辑函数时，可以用随意项扩大相邻方格的面积，根据化简的需要，确定随意项的取值，当然在一个函数中，某个随意项的取值不能同时既为 1 又为 0。

### 例 3.30 用卡诺图法化简。

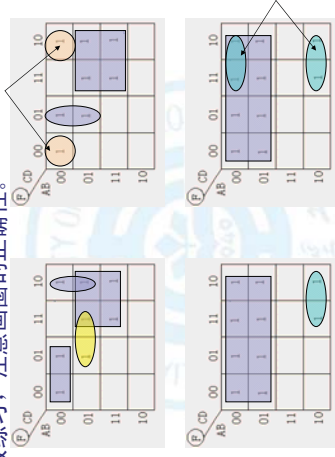
$$F(A, B, C, D) = \overline{A}BC + \overline{A}CD + \overline{A}BCD + \overline{A}BC$$

解:



$$F(A, B, C, D) = \overline{B}D + \overline{B}C + \overline{A}CD$$

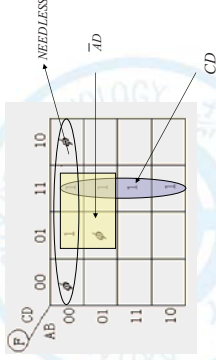
多做练习，注意画圈的正确性。



### 例 3.33 用卡诺图法化简。

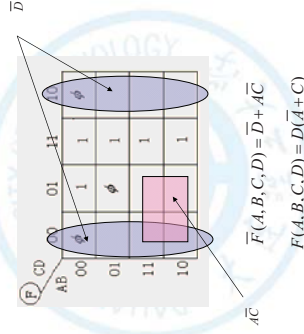
$$F(A, B, C, D) = \sum_m(1, 3, 7, 11, 15) + \sum_i(0, 2, 5)$$

解:



$$F(A, B, C, D) = \overline{A}D + CD$$

上例：求最简或与式。



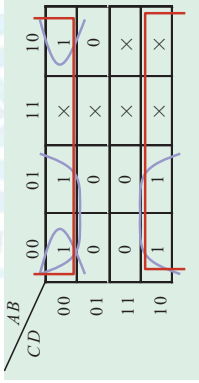
含有任意条件的逻辑函数可以表示成如下形式：

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

在逻辑函数的化简中，充分利用随意项可以得到更加简单的逻辑表达式，因而其相应的逻辑电路也更简单。在化简过程中，随意项的取值可视具体情况取0或取1。具体地讲，如果随意项对化简有利，则取1；如果随意项对化简不利，则取0。

不利用随意项的化简结果为：  
 $Y = \bar{A}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$

利用随意项的化简结果为：  
 $Y = \bar{D}$



### 3.4.5 引入变量卡诺图

逻辑变量个数超过5个，卡诺图十分复杂，采用VEM化简法。

1、引入变量卡诺图的作图法：

将  $n$  个变量函数填入  $n-1$  个或更少变量的卡诺图，使卡诺图的面积减小为原来的1/2。

例：化简

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$$

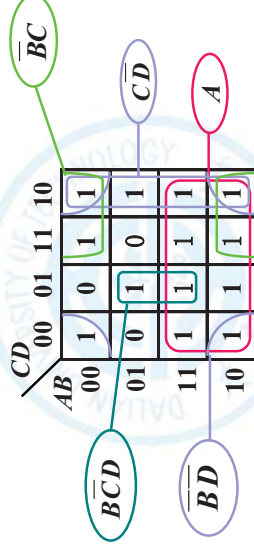
分离C作为引入变量，其真值表为。

A	B	F
0	0	$\bar{C}$
0	1	0
1	0	$\bar{C}$
1	1	$\bar{C} + C$

**随意项：**函数可以随意取值（可以为0，也可以为1）或不会出现的最小项称为随意项，也叫约束项或无关项。  
例如：判断一位十进制数是否为偶数。

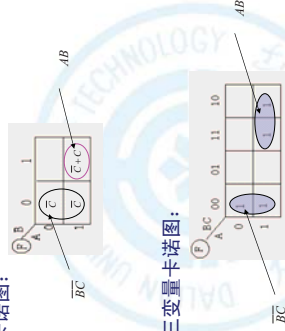
ABCD	Y	ABCD	Y	说明
0000	1	1000	1	
0001	0	1001	0	
0010	1	1010	×	不会出现
0011	0	1011	×	不会出现
0100	1	1100	×	不会出现
0101	0	1101	×	不会出现
0110	1	1110	×	不会出现
0111	0	1111	×	不会出现

**例3.34 化简**  $F(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$



$$F = A + C\bar{D} + \bar{B}C + \bar{B}\bar{D} + \bar{B}C\bar{D}$$

画出卡诺图：



对比三变量卡诺图：

VEM卡诺图可以从函数得到，也可以从真值表得出。

AB	CD	00	01	11	10
00	00	1	1	×	1
01	00	0	0	×	0
11	00	0	0	×	×
10	00	1	1	×	×

输入变量A, B, C, D取值为0000~1001时，逻辑函数Y有确定的值，根据题意，偶数时为1，奇数时为0。

$$Y(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8)$$

A, B, C, D取值为1010~1111的情况不会出现或不允许出现，对应的最小项属于随意项。用符号“φ”、“×”或“d”表示。随意项之和构成的逻辑表达式叫做 随意条件或约束条件，用一个恒值为0的条件等式表示。

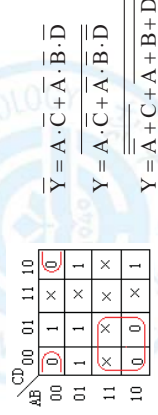
$$\sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15) = 0$$

**例3.35 化简下式**

$$Y = C \cdot \bar{D} \cdot (A \oplus B) + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot D$$

$$A \cdot B + C \cdot D = 0$$

解：

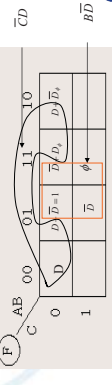


$$\bar{Y} = A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{D}$$

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{D}$$

$$Y = \bar{A} + C + A + B + D$$

ABCD	F
0000	0
0001	1
0010	0
0011	0
0100	1
0101	1
0110	1
0111	0
1000	φ
1001	1
1010	0
1011	0
1100	1
1101	φ
1110	φ
1111	φ







本章总结

逻辑函数的化简有公式法和图形法等。公式法是利用逻辑代数的公式、定理和规则来对逻辑函数化简，这种方法适用于各种复杂的逻辑函数，但需要熟练地运用公式和定理，且具有一定的运算技巧。图形法就是利用函数的卡诺图来对逻辑函数化简，这种方法简单直观，容易掌握，但变量太多时卡诺图太复杂，图形法已不适用。在对逻辑函数化简时，充分利用随意项可以得到十分简单的结果。

第三章 逻辑代数基础  
结束