简谐波的波函数

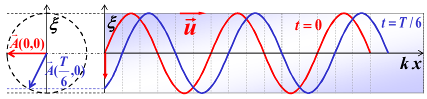
$\xi(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0]$ 已知原点的振动，求平衡位置x处质元振动

$\xi(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x-x_0}{u})+\varphi_0]$ 已知x_0处的振动，求平衡位置在x处质元振动

波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{u}$ $\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$ $\lambda=uT=2\pi\frac{u}{\omega}$

脉冲的宽度为y轴峰值一半时所对应的宽度

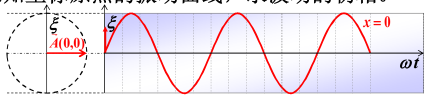
例4 已知时间零点的波形曲线，求波动的初相。



$\xi=A\cos(\omega t_0-kx_0+\varphi)=0$ $\varphi=\pm\pi/2$

$v=-\omega A\sin(\varphi)<0$ $\Rightarrow$ $\varphi=+\pi/2$ $\xi=A\cos(-kx+\frac{\pi}{2})$

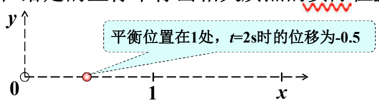
已知坐标原点的振动曲线，求波动的初相。



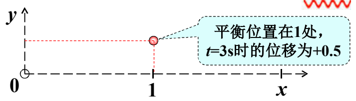
$\xi=A\cos(\omega t_0-kx_0+\varphi)=0$ $\varphi=\pm\pi/2$

$v=-\omega A\sin(\varphi)>0$ $\Rightarrow$ $\varphi=-\pi/2$ $\xi=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$

例5 数组$(t=2,x=1,\xi=-0.5)$满足一维弹性纵波的数学方程 $\xi=0.5\cos\pi(t-x)$[SI] 。请说出该数组的物理意义，并在给定的坐标中标出相关质点的实际位置。



例6 数组$(t=3,x=1,\xi=+0.5)$满足一维弹性横波的数学方程 $\xi=0.5\cos\pi(t-x)$[SI] 。请说出该数组的物理意义，并在给定的坐标中标出相关质点的实际位置。

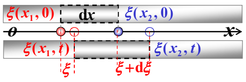


§ 5.3 波的能量

一、传播介质的能量、能量密度

波的能量= 媒质振动动能E_k+ 形变势能E_p

以细长杆纵波为例



动能 $dE_k=\frac{1}{2}dm\cdot v^2$

$$=\frac{1}{2}\rho dV(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2=\frac{1}{2}\rho S\cdot dx(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2$$

动能密度 $w_k=\frac{dE_k}{dV}=\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2$

势能 $dE_p=\frac{1}{2}k(d\xi)^2=\frac{1}{2}\frac{YSdx}{(dx)^2}(d\xi)^2$

$$F=YS\frac{d\xi}{dx}=\frac{YS}{dx}d\xi$$

$$dE_p=\frac{1}{2}YdV\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}\rho u^2dV\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

$$Y=\rho u^2\leftarrow u=\sqrt{Y/\rho}$$

势能密度 $w_p=\frac{dE_p}{dV}=\frac{1}{2}\rho u^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$

$\xi(x,t)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$ $\boxed{w=2w_k=2w_p}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\omega A\sin\omega(t-\frac{x}{u})}$ $\boxed{\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\omega A}{u}\sin\omega(t-\frac{x}{u})}$

动能密度 $w_k=\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

势能密度 $w_p=\frac{1}{2}\rho u^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

$\boxed{w_k=w_p}$

与振动不同，波动质量元的动能和势能呈同步变化。

二、能量特征

$$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

①固定 x $w_k=w_p$

w_k、w_p 均随 t 周期性变化

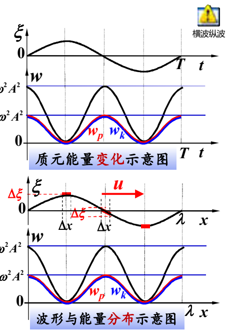
②固定 t

w_k、w_p随 x 在空间周期分布

$\xi=0$ 处$\rightarrow w_k$、w_p 同时最大

ξ最大处$\rightarrow w_k$ 、w_p同时为 0

$dE_p=\frac{1}{2}k(\Delta\xi)^2$



体积元的总机械能是随时间变化的，它在0和最大值之间周期地变化着。这说明任一体积元都在不断地接收和放出能量。有波传播时振动质元的能量不守恒。

三、能流密度和波强

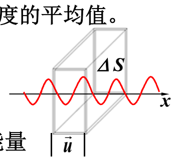
①平面简谐波的总能量密度

$$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

在波动过程中，单位体积介质中的能量。

平均能量密度：一周期内能量密度的平均值。

$$\boxed{\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\,dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2}$$



②能流

单位时间内通过某一截面ΔS的能量

$p=\frac{wu\Delta t\cdot\Delta S}{\Delta t}=wu\Delta S$ 平均能流：（周期平均） $\overline{p}=\overline{w}u\Delta S$

③能流密度 $p=wu\Delta S$ $\overline{p}=\overline{w}u\Delta S$

单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的能量

$$S=\frac{p}{\Delta S}=wu$$

平面简谐波 $S=wu=\rho u\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

平均能流密度：能流密度在一个周期内的平均值。

简谐波强度 $\boxed{I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2}$ 单位：W/m^2

声学称声强、光学称光强。

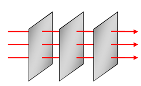
$I\propto A^2$ 频率确定时，常用振幅的平方代表波强。

四、平面波和球面波振幅 — 能量守恒定律讨论

若介质不吸收，相同的时间内通过围在同一束波线中的两个波阵面的总能量相等。 $\boxed{I\propto A^2}$

平面波

$I_1S_1=I_2S_2\Rightarrow A_1^2=A_2^2=A^2$

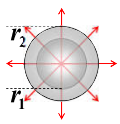


波函数 $\boxed{\xi(x)=A\cos(\omega t-kx)}$

球面波

$I_1S_1=I_2S_2\Rightarrow\frac{A_1^2}{A_2^2}=\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$

$\begin{cases}r_1=1\\A_1=A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_2=r\\A_2=\frac{A}{r}\end{cases}$



波函数 $\boxed{\xi(r)=(A/r)\cos(\omega t-kr)}$

例1：用聚焦超声波的方法在水中可以产生强度达到I=120 kW/cm²的超声波。设该超声波的频率为ν=500 kHz，水的密度为$\rho=10^3$ kg/m³，其中声速为u=1500 m/s。求这时液体质元振动的振幅。

解： $I=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$　　$a=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\right]$

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho u}}=\frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho u}}$$

利用超声波清洗，产生极大的作用力

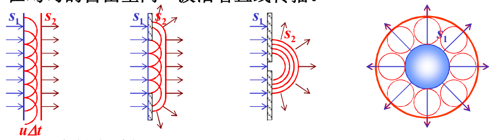
$$=\frac{1}{2\pi\times500\times10^3}\sqrt{\frac{2\times120\times10^7}{10^3\times1500}}=1.27\times10^{-5}\,(\mathrm{m})$$

可见液体中超声波的振幅实际很小。当然，它还是比水分子的间距（10^{-10} m）大得多。

§ 5.4 惠更斯原理 反射与折射

一、惠更斯原理

波传播时，任一波面上的每一点均可作为发射子波的点波源，其后任意时刻，这些子波的包迹就是该时刻的波面。在均匀的自由空间—波沿着直线传播。



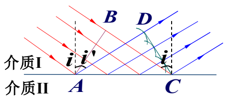
二、波的衍射：波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播（改变波线方向）的现象。

尺寸与波长相当，衍射现象明显。 声波：u=340m/s　ν=450Hz　λ= 0.76m；可见光：λ= 390~780nm

三、波的反射与折射

①波的反射定律：

$BC=u_1\Delta t$
$AD=u_1\Delta t$ ⟹ $i=i'$



②波的折射定律：

$BC=u_1\Delta t=AC\sin i$

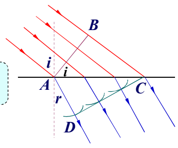
$AD=u_2\Delta t=AC\sin r$

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u_1}{u_2}=n_{21}$$

介质2相对于介质1的折射率

对于光波 $n_1=\frac{c}{u_1}$，$n_2=\frac{c}{u_2}$

介质相对于空气的折射率



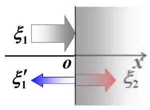
$\boxed{n_1\sin i=n_2\sin r}$

四、垂直入射的反射波和透射波

1. 诸波函数：

$\xi_1=A_1\cos(\omega t-k_1x)$　，$(-\infty,0]$

$\xi_2=A_2\cos(\omega t-k_2x)$　，$[0,+\infty)$



$\xi_1'=A'\cos(\omega t+k_1x)$，$(-\infty，0]$ φ=0被波疏反射；φ=π被波密反射

2. 相位关系： $\boxed{z=\rho u}$～波阻

①波密波疏：介质波阻较大的称波密、较小称波疏。

②透射相位：透射波的振动和入射波的振动恒同相。

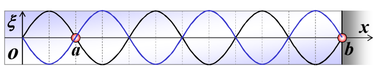
③反射相位：被波疏反射同相，被波密反射则反相。

④半波损失：被波密介质反射的振动呈反相的现象。

例1 波长为λ的平面简谐波沿x轴正向传播，$x_a=\lambda/2$处振动表达式为$\xi(t,x_a)=A\cos\omega t$，$x_b=3\lambda$处置反射面(波密)。试求：若无能量损失①入射波函数；②反射波函数。

解①

以a为源



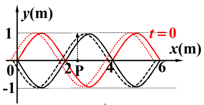
$$\xi(t,x)=A\cos[\ \omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(x-x_a)]=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi)$$

②入射波在反射点的振动 $\xi(t,x_b)=A\cos(\ \omega t-\pi)$

反射波在反射点的振动 $\xi(t,x_b)=A\cos\omega t$

以b为源 $\xi'(t,x)=A\cos[\ \omega\ t+\frac{2\pi}{\lambda}(x-x_b)]=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$

例 一平面简谐波在弹性媒质中沿x轴传播，周期T= 2s。图中所示为t=1s时刻的波形图，且此时图中平衡位置在P点的质元运动方向向上。(1) 画出t=0时刻，平衡位置在x=0处质元的旋转矢量图；(2) 写出该波的波函数；(3) 写出t=1s时刻，在$0\le x\le6$m区域内，振动势能为零的各媒质质元的平衡位置坐标。

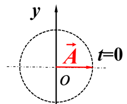


解：(1) 由图知沿x轴负向传播

$\varphi=-\pi/2$

(2) $A=1$m　$\omega=2\pi/T=\pi$

$\lambda=4$m　$u=\lambda/T=2$m/s



$$y(x,t)=\cos\left[\pi\left(t+\frac{x}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

(3) 图中1, 3, 5m 的点振动势能为零。

振动动能为零，总能量也为零。