电荷守恒定律：在一孤立系统内发生的任何物理过程中总电荷数不变。

库仑定律 $\vec{F}=\dfrac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

力的叠加原理 $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$

场强定义 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$

点电荷系电场中的场强

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{r}_0$$

电荷连续分布带电体的场强

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\vec{r}_0$$

分量式

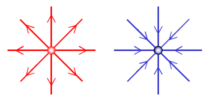
$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{x}{r^3}\mathrm{d}Q$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}Q\begin{cases}=\rho\mathrm{d}V\\=\sigma\mathrm{d}S\\=\lambda\mathrm{d}l\end{cases}$$

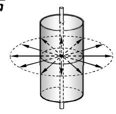
点电荷的电场呈球对称分布

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$



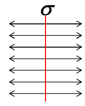
无限长带电直线的电场呈轴对称分布

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



无限大带电平面的电场是匀强场

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$



用积分法求一个物理量在某个空间分布产生的效果

①建立合适的坐标系；

②选取空间分布物理量的元量（微元）；

③写出由此元量引起的待求物理量元量的定义式，是矢量必须写成分量形式；

④多重积分化成一重积分；

⑤确定积分区间，对整个分布空间进行积分；

⑥给出叠加结果：是矢量的要写出矢量表达式。

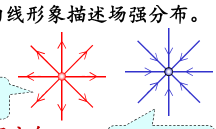
四、电场线和电通量

1. 电场线：用一族假想的空间曲线形象描述场强分布。

$$E=\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S_\perp}$$

电场线数

电场线密度



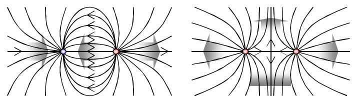
起于正电荷或无穷远处

止于负电荷或无穷远处

①曲线的切线方向代表该点场强方向。

②曲线稠密处场强大；稀疏处场强小。

③场线的特点：无电荷处不产生、不中断、不相交。



电偶极子　　一对等量正点电荷

静电场的电场线不会形成闭合曲线。

2. 电通量：通过任一面的电场线条数。

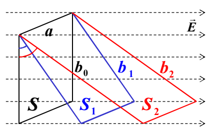
① 均匀电场　$\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{n}$

$$\Phi_e=ES$$

② 均匀电场　$\widehat{\vec{E}\vec{n}}=\theta$

$$\Phi_e=ES_1\cos\theta_1=ES_2\cos\theta_2$$

$$\boxed{\Phi_e=\vec{E}\cdot\vec{S}}$$

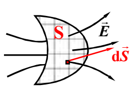


$\vec{n}$ ~ 平面的单位法线

③ 非均匀电场、任意曲面

$$\mathrm{d}\Phi_e=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\qquad \boxed{\Phi_e=\iint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

可正可负



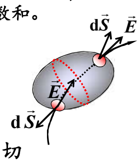
④ 对封闭曲面：$\boxed{\Phi_e=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$　电通量是标量，是代数和。

规定外法线为正向

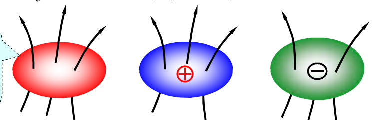
$\theta<90^\circ$，$\mathrm{d}\Phi_e>0$　穿出曲面为正

$\theta>90^\circ$，$\mathrm{d}\Phi_e<0$　穿入曲面为负

$\theta=90^\circ$，$\mathrm{d}\Phi_e=0$　电场线与曲面相切



曲面上每一点的 $E\neq0$



$\Phi=0$　　$\Phi>0$　　$\Phi<0$

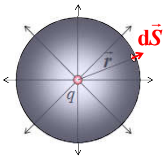
通过闭合曲面的电通量等于净穿出封闭面的电场线总条数。

四、高斯定理

1. 点电荷对于封闭曲面的电通量：

$$\boxed{\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

为了方便计算通量，如何选取封闭曲面？



由电通量定义：$\mathrm{d}\Phi=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\mathrm{d}S_{\perp}$

选择以点电荷q为球圆心r为半径的球面为研究对象。

$$\Phi_e(r)=\oiint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_s \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_s \mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

通过以上球面的电通量为常数，与球面的半径无关，只与它所包围的电荷电量 q 有关，所以对其它任意形状的封闭曲面电通量也不变。

2. 高斯定理：在真空中的静电场内，通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭曲面所包围的电荷电量的代数和的$1/\varepsilon_0$倍。

$$\boxed{\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \mathrm{d}q}$$

①虽然高斯定理是在库仑定律的基础上得出的，但库仑定律是从电荷间的作用反映静电场的性质，而高斯定理则是从场和场源电荷间的关系反映静电场的性质，表明静电场为有源场（电场线由正电荷发出，并汇聚于负电荷）。

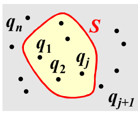
②高斯定理反映的是场强对封闭曲面的通量和场源间的关系，并非场强本身与源的关系。

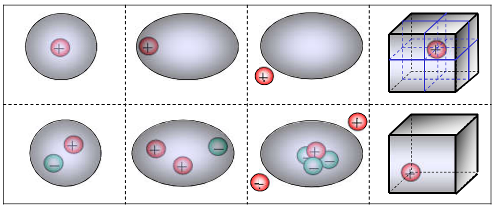
3. 场源电荷为多个点电荷

任选一个封闭曲面，则空间所有电荷有内、外之分。

$$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S\Big(\sum_{i=1}^{j}\vec{E}_{内}+\sum_{i=j+1}^{n}\vec{E}_{外}\Big)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\sum_{i=1}^{j}\Big(\oiint_S \vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{S}\Big)+0=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{j}q_{i内}$$





4. 高斯定理的意义：$\boxed{\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \mathrm{d}q}$

①方程中的通量Φ_e仅仅与封闭曲面内的电荷有关系；而与高斯面的形状、曲面内电荷的分布情况无关。

②方程中的场强$\vec{E}$是封闭曲面上各点的场强，却与空间所有的电荷有关。

③高斯定理说明静电场是有源场。（曲面外的电荷只能改变电场线的分布情况，但不能改变内部电荷反射出的电场线的总条数）

④库仑定律只适用于静止点电荷产生的电场，而高斯定律则是关于电场的普遍的基本规律（适用运动电荷的电场）。

5. 利用高斯定理可以简化对称场的计算

$$\boxed{\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \mathrm{d}q}$$

若Q的分布具有某种对称性，则用高斯定理求场强很方便。

常见的电量分布的对称性

	球对称	轴对称	面对称
均匀带电	点电荷 球面 球体	直线、柱面、柱体 } 无限长	平面、平板 } 无限大

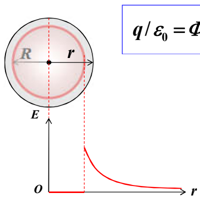
场强具有相同的对称性：$\vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{S}$ 通量为零，

$\vec{E}/\!/\mathrm{d}\vec{S}$，$E=C$，$E$ 可提到积分号外。

例1：求均匀带电球面半径R，电量为q的电场分布。

解：给定电荷的电场，具有以球面的圆心为对称中心的球对称分布。

选择与球面同心的，以 r 为半径的球面为高斯面，使$\vec{E}$的方向与该点$\mathrm{d}\vec{S}$平行；高斯面上 $\vec{E}$ 的大小相同。



$$q/\varepsilon_0=\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=E\oiint_S \mathrm{d}S=E4\pi r^2$$

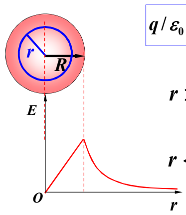
$r>R$ $\quad E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

$r<R$ $\quad E=0$

例2：求均匀带电q 的球体，半径为R 的电场分布。

解：给定电荷的电场，具有以球体的圆心为对称中心的球对称分布。

选择与球体同心的，以 r 为半径的球面为高斯面。



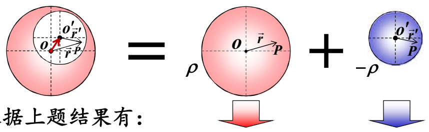
$$q/\varepsilon_0=\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=E\oiint_S \mathrm{d}S=E4\pi r^2$$

$r>R$ $\quad \rho=q\Big/\dfrac{4}{3}\pi R^3$ $\quad E=q/4\pi r^2\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}=q\vec{r}/4\pi r^3\varepsilon_0$

$r<R$ $\quad q'=\rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad E=\rho r/3\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0$

例3 在均匀带电的球体（电荷体密度为 ρ）内部具有一个偏心的球形空腔，求空腔内的电场分布。

解：可作如图等效代换，再应用叠加原理。



根据上题结果有：

$\vec{E}=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}_1=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}_2=-\rho\vec{r}'/3\varepsilon_0$

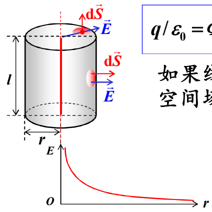
$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0-\rho\vec{r}'/3\varepsilon_0$ $\quad \vec{r}-\vec{r}'\equiv\vec{r}_{oo'}$

$\vec{E}=\rho(\vec{r}-\vec{r}')/3\varepsilon_0=\rho\vec{r}_{oo'}/3\varepsilon_0$ $\quad$ 腔内匀强电场！

例 4：求无限长均匀带电 λ 直线的电场分布。

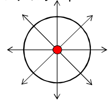
解：给定电荷的电场，具有以带电的直线为对称轴线的轴对称分布。

选择以直线为轴线，以 r 为半径的柱面为高斯面，底面 $\vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{S}$，$\Phi_{e上,下}=0$；侧面 $\vec{E}/\!/\mathrm{d}\vec{S}$，$\vec{E}$ 大小相同；



$$q/\varepsilon_0=\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=E\iint_{侧}\mathrm{d}S=E2\pi rl$$

如果线粗不可忽略，空间场强分布如何？

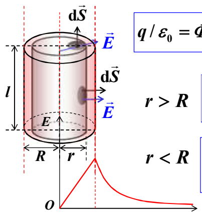


$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad \vec{E}=\dfrac{\lambda\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

例 5：求无限长均匀带电 λ 圆柱体 R 的电场分布。

解：给定电荷的电场，具有以圆柱的轴线为对称轴线的轴对称分布。

选择与圆柱同轴的，以 r 为半径的柱面为高斯面，底面 $\vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{S}$，$\Phi_{e上,下}=0$；侧面 $\vec{E}/\!/\mathrm{d}\vec{S}$，$\vec{E}$ 大小相同；



$$q/\varepsilon_0=\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=E\iint_{侧}\mathrm{d}S=E2\pi rl$$

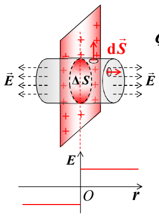
$r>R$ $\quad \lambda=\dfrac{q}{L}=\dfrac{\rho\cdot\pi R^2\times 1}{1}$ $\quad E=\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ $\quad \vec{E}=\lambda\vec{r}/2\pi\varepsilon_0 r^2$

$r<R$ $\quad \lambda'=\dfrac{\rho\cdot\pi r^2\times 1}{1}$ $\quad E=\rho r/2\varepsilon_0$ $\quad \vec{E}=\rho\vec{r}/2\varepsilon_0$

例 6：求无限大均匀带电 σ 的平面的电场分布。

解：给定电荷的电场，具有以带电的平面为对称平面的面对称分布。

选择与平面平行的，以 ΔS为底面的柱面为高斯面，侧面 $\vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{S}$，$\Phi_{e圆柱侧}=0$；底面 $\vec{E}/\!/\mathrm{d}\vec{S}$，$\vec{E}$ 大小相同；



$$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\iint_{底}\mathrm{d}S=2E\Delta S$$

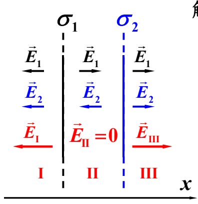
$$\Phi_e=q/\varepsilon_0=\sigma\Delta S/\varepsilon_0$$

场强与距离无关！

两侧为匀强电场！

$E=\sigma/2\varepsilon_0$

例7 求：电荷面密度分别为 σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。



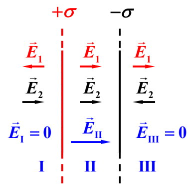
解：$E_1=\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$　$E_2=\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$

$$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{I}}=-\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}\\ \vec{E}_{\mathrm{II}}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}\\ \vec{E}_{\mathrm{III}}=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}\end{cases}$$

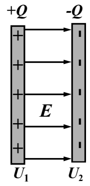
薄带电金属板场强分布。

当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ $\begin{cases}\boxed{E_{\mathrm{II}}=0}\\ \boxed{E_{\mathrm{III}}=-E_{\mathrm{I}}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}\end{cases}$

例7 求：电荷面密度分别为 σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。



当 $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$ $\begin{cases}\boxed{E_{\mathrm{I}}=E_{\mathrm{III}}=0}\\ \boxed{E_{\mathrm{II}}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}\end{cases}$



带电平板电容器间的场强

应用高斯定理计算场强的步骤小结：

①根据带电体的对称性，分析场强的对称性，确定场强的大小和方向。

②选择合适的高斯面，$\vec{E}\perp d\vec{S}$ 通量为零，$\vec{E}/\!/d\vec{S}$，$E=C$，E 可提到积分号外。

③求出高斯面内的电荷的代数和。

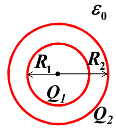
④按高斯定理计算场强的大小。

高斯定理对于任何电场、任何封闭曲面都成立，但是要利用高斯定理简化电场求解，却仅限于具有高度对称性的电场。

例8 求电量分别为 Q_1 及 Q_2 半径分别为 R_1 及 R_2 的均匀带电同心球面的场强分布。

解：选择与同心球面同心的，以 r 为半径的球面为高斯面。

$$\frac{q}{\varepsilon_0}=\Phi_e=\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\oint\!\!\oint_S dS=E\cdot 4\pi r^2$$



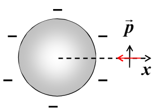
$r<R_1$　$\boxed{E=0}$

$R_1<r<R_2$　$\boxed{E=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

$r>R_2$　$\boxed{E=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

例9 如图，在均匀带有负电荷的球面之外，放置一个电偶极子，球面位置及电荷分布固定。请你定性地描述，当电偶极子由静止被释放后如何运动。

解：在力矩的作用下，电偶极子 $\vec{p}$ 逆时针转向 $-x$ 的方向；同时在合力作用下，向左平移。



例10 如果高斯面上的 $\vec{E}$ 处处为零，根据高斯定理 $\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 能否肯定高斯面内一定没有电荷？请举例说明。

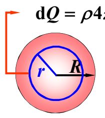
解：不能。圆心带电 Q、同心球面均匀带电 $-Q$，选球面外的同心高斯面。一定没有净电荷。

18-2 求：半径为 R 的带电球体，电荷体密度 $\rho=Kr$（K 为常数，r 为到球心的距离，$r\le R$）。(1)求球体带的总电量；(2)空间电场强度分布；

解：(1)　$dQ=\rho 4\pi r^2 dr$

$$Q=\int_0^R dQ=\int_0^R Kr4\pi r^2 dr$$

$$=4\pi K\int_0^R r^3 dr=\pi KR^4$$



选择高斯面——同心球面

当 $r>R$ 时，$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}=\dfrac{KR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

当 $r<R$ 时，$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{\pi Kr^4}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}=\dfrac{Kr^2}{4\varepsilon_0}\vec{r}_0$