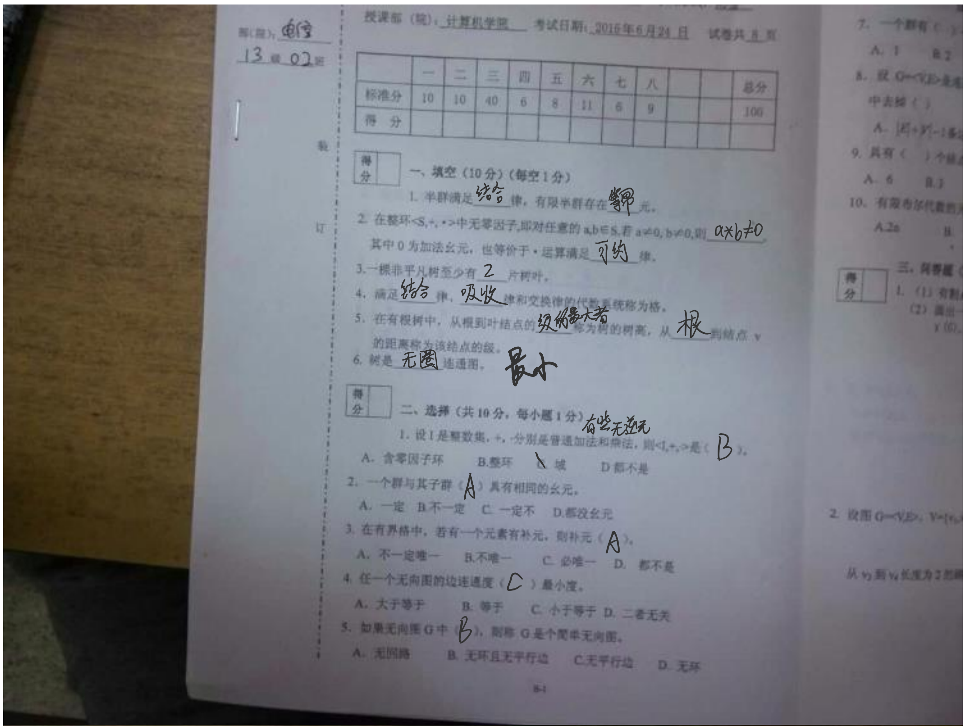
2018年6月25日 18:10



授课部（院）：计算机学院　考试日期：2015年6月24日　试卷共 8 页

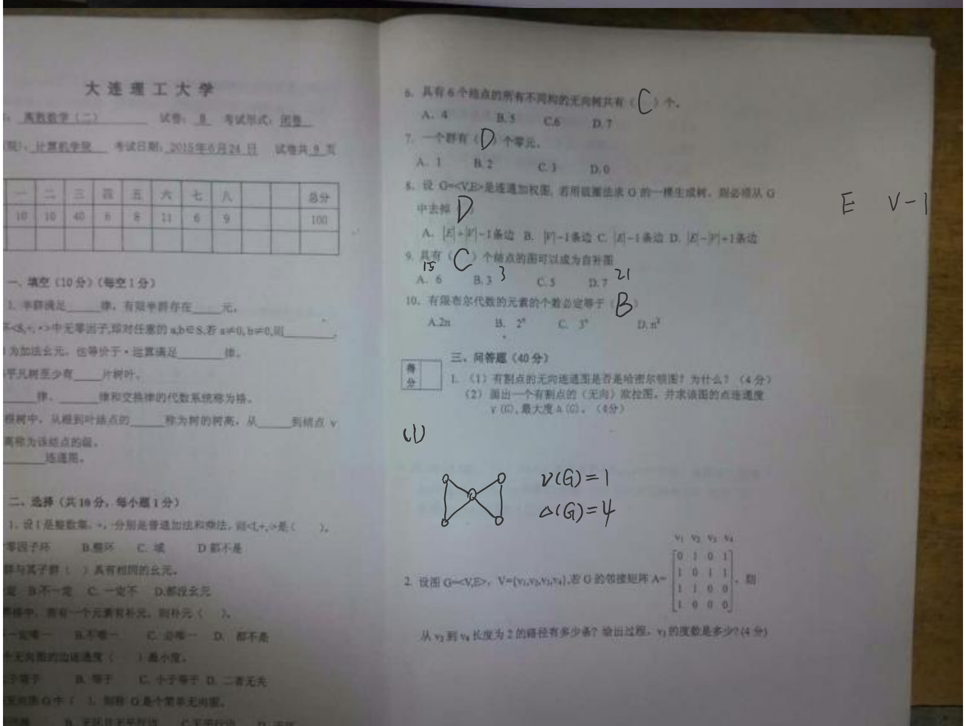
	一	二	三	四	五	六	七	八			总分
标准分	10	10	40	6	8	11	6	9			100
得 分											

一、填空（10分）（每空1分）

1. 半群满足 结合 律，有限半群存在 幺零 元。
2. 在整环<S,+,•>中无零因子,即对任意的 a,b∈S,若 a≠0, b≠0,则 $a*b\neq0$，其中 0 为加法幺元，也等价于 • 运算满足 可约 律。
3. 一棵非平凡树至少有 2 片树叶。
4. 满足 结合 律、吸收 律和交换律的代数系统称为格。
5. 在有根树中，从根到叶结点的 级的最大者 称为树的树高，从 根 到结点 v 的距离称为该结点的级。
6. 树是 无圈 连通图。 最小

二、选择（共10分，每小题1分）

1. 设 I 是整数集，+，· 分别是普通加法和乘法，则<I,+,·>是（B）。 有些无逆元
   A. 含零因子环　B.整环　C. 域　D 都不是
2. 一个群与其子群（A）具有相同的幺元。
   A. 一定　B.不一定　C. 一定不　D.都没幺元
3. 在有界格中，若有一个元素有补元，则补元（A）。
   A. 不一定唯一　B.不唯一　C. 必唯一　D. 都不是
4. 任一个无向图的边连通度（C）最小度。
   A. 大于等于　B. 等于　C. 小于等于　D. 二者无关
5. 如果无向图 G 中（B），则称 G 是个简单无向图。
   A. 无回路　B. 无环且无平行边　C.无平行边　D. 无环



6. 具有 6 个结点的所有不同构的无向树共有（C）个。
   A. 4　B. 5　C.6　D. 7
7. 一个群有（D）个零元。
   A. 1　B. 2　C. 3　D. 0
8. 设 G=<V,E>是连通加权图，若用破圈法求 G 的一棵生成树，则必须从 G 中去掉（D）
   A. $|E|+|V|-1$条边　B. $|V|-1$条边　C. $|E|-1$条边　D. $|E|-|V|+1$条边
9. 具有（C）个结点的图可以成为自补图
   A. 6 15　B. 3 3　C. 5　D. 7 21
10. 有限布尔代数的元素的个数必定等于（B）
   A. 2n　B. 2^n　C. 3^n　D. n^2

三、问答题（40分）

1. （1）有割点的无向连通图是否是哈密尔顿图？为什么？（4分）
   （2）画出一个有割点的（无向）欧拉图，并求该图的点连通度 $\gamma(G)$，最大度 $\Delta(G)$。（4分）

(1)

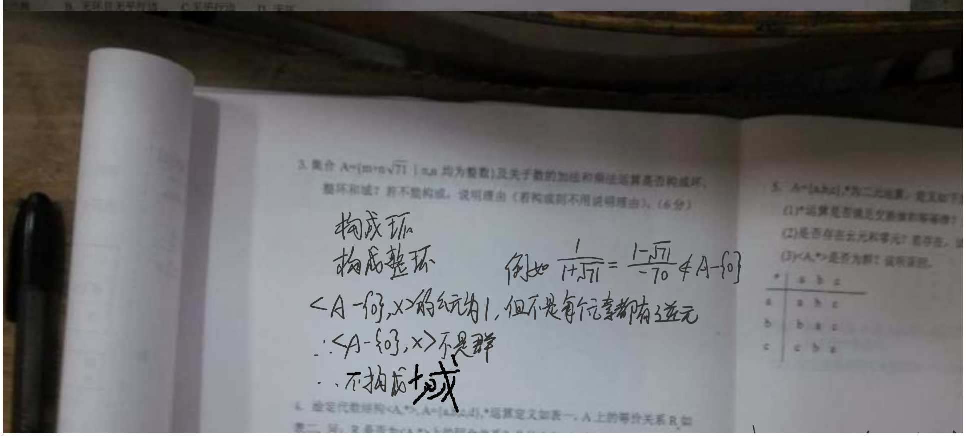
$\nu(G)=1$

$\Delta(G)=4$

2. 设图 G=<V,E>，V={v_1,v_2,v_3,v_4},若 G 的邻接矩阵 A=

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

，则从 v_3 到 v_4 长度为 2 的路径有多少条？给出过程，v_2 的度数是多少？（4分）



3. 集合 A={$m+n\sqrt{71}$ | m,n 均为整数}及关于数的加法和乘法运算是否构成环、整环和域？若不能构成，说明理由（若构成则不用说明理由）。（6分）

构成环

构成整环

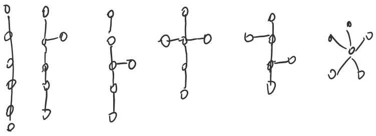
例如 $\frac{1}{1+\sqrt{71}}=\frac{1-\sqrt{71}}{-70}\notin A-\{0\}$

<A-{0},×>的幺元为1，但不是每个元素都有逆元

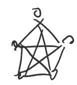
∴<A-{0},×>不是群

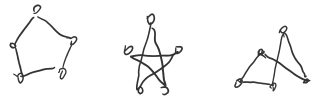
∴不构成域

4. 给定代数结构<A,*>，A={a,b,c,d}，*运算定义如表一，A 上的等价关系 R 如表二……



E　V-1





$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 2条

度数为 3

$\therefore \langle A-\{0\}, \times\rangle$ 不是群

$\therefore$ 不构成~~域~~

4. 给定代数结构<A,*>，A={a,b,c,d}，*运算定义如表一，A上的等价关系R如表二，问：R是否为<A,*>上的同余关系？为什么？（6分）

*	a	b	c	d
a	a	a	d	c
b	b	a	d	a
c	c	b	a	b
d	c	d	b	a

表一

R	a	b	c	d
a	√	√		
b	√	√		
c			√	√
d			√	√

表二

~~a与b在一个等价类里，进行运算结果为a或b，仍在一个等价类里~~

c与d – – – 、 – – – a或b – –

a、b与c、d各在一个等价类里，而b*d=a，b*c=d，a与d不在一个等价类里

$\therefore$ 不是

6. 设 H={0,4,8}，（1）<H,+12>是否为群 Z_{12}={0,1,2,...11}，+12是模12加法，（2 求群<Z_{12},+12>中元素4的阶。（7分）

为整数)及关于数的加法和乘法运算是否构成环、说明理由（若构成则不需说明理由）。（6分）

5. A={a,b,c}，*为二元运算，定义如下表。（共9分）

(1)*运算是否满足交换律和等幂律？为什么？（4分）

(2)是否存在幺元和零元？若存在，试给出。（2分）

(3)<A,*>是否为群？说明原因。（3分）

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

(1) $b*c=c$，$c*b=b$，不满足交换律

$b*b=a$，不满足等幂律

(2) 幺元为a

无零元

(3) 不是群

在有限群中，每行每列都是A中元素的置换 <A,*>

而c列中元素c出现了2次

$\therefore$ 不是群

b,c,d}，*运算定义如表一，A上的等价关系R如同余关系？为什么？（6分）

R	a	b	c	d
a	√	√		
b	√	√		
c			√	√
d			√	√

表二

6. 设 H={0,4,8}，（1）<H,+12>是否为群<Z_{12},+12>的子群？为什么？其中 Z_{12}={0,1,2,...11}，+12是模12加法，（2）求H的左陪集3H，7H？（3）求群<Z_{12},+12>中元素4的阶。（7分）

封闭

非空有限集

$H \subseteq Z_{12}$

封闭

运算表

(1) <H,+12>有幺元0，$\therefore$ <H,+12>是群

+12满足结合律，

	逆元	
0		0
4		8
8		4

H非空且 $H \subseteq Z_{12}$

$\therefore$ 是子群

7 11 15

3

(2) $3H=\{3,7,11\}$

$7H=\{3,7,11\}$

(3) $4^2=8$

$4^3=0$

阶为3

四、证明：完全图 K_5 是非平面图。（6分）

$|V|=5$

$|E|=10$

若是平面图

则为连通图

且为简单平面图

$\because |V| \geq 3$

$\therefore |E| \leq 3|V|-6$

$10 \leq 9$

不成立

$\therefore$ 非

五、设一棵无向树T有4度和2度的分支点各1个，树叶为5个，其余为3度结点，问则T中有几个3度结点？T在同构的意义下是唯一的吗？如果不是，试画出两棵不同构的树。（6分）

设x

$4+2+5+3x=2(6+x)$

$11+3x=12+2x$

$x=1$

六、给定集合M及运算*，其中M={e, a, b, c}，…结合律，且*的运算表为：（11分）

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(1) 试证：<M, *>是Abel群，但不是循环群，给出一…并求所有生成元。

(2) 以上这些群是否可能成为一个18阶群的子群？说…

、证明：完全图 K_5 是非平面图。（6 分）

五、设一棵无向树 T 有 4 度和 2 度的分支点各 1 个，树叶为 5 个，其余为 3 度结点，问图 T 中有几个 3 度结点？T 在同构的意义下是唯一的吗？如果不是，试画出两棵不同构的树。（8 分）

得分	

六、给定集合 M 及运算*，其中 M = {e, a, b, c}，已知*运算满足结合律，且*的运算表为：（11 分）

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

（1） 试证：<M, *>是 Abel 群，但不是循环群，给出一个与同阶的循环群，并求所有生成元。

（2） 以上这些群是否可能成为一个 10 阶群的子群？说明理由。

(1) 封闭，满足结合律

e 是幺元

每个元素都有逆元

关于主对角线对称

* 是可交换的

∴ Abel 群

∵ $a^2=e, b^2=e, c^2=e$

∴ $a^n=a$ 或 e

都不是生成元

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$b^2=a, b^3=c, b^4=e$

$c^2=a, c^3=b, c^4=e$

∴ b 和 c 是生成元

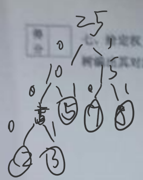
(2) 任何有限群的阶必可被其子群的阶整除

而 10 不能被 4 整除

∴ 不能

得分	

七、给定权 2, 3, 5, 7, 8，构造一棵最优二叉树，并根据这棵最优树确定其对应的前缀码。（6 分）



2 : 000

3 : 001

5 : 01

7 : 10

8 : 11

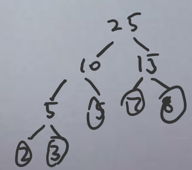
2 3 5 7 8

5 5 7 8

10 7 8

10 15

25



得分	

八、给定无限循环群<G,*>与整数加法群<I,+>，G 的生成元为 g，定义映射 f 如下： f: G→I　　$f(g^i)=i$　（∀i∈I）

试证 f 是<G,*>到<I,+>的同构映射，并求同态核 k_f。（9 分）

$\forall g^x, g^y \in G\ (x, y \in I)$

则 $f(g^x * g^y)=f(g^{x+y})=x+y=f(g^x)+f(g^y)$

∴ f 同态

若 $f(g^x)=f(g^y)$，则 $x=y$，则 $g^x=g^y$　单射

任取 $x \in I$，∵ <G,*> 为无限循环群

∴ 必存在 $g^x \in G$　　满射

任取 $x \in I$，∵ $\langle G, * \rangle$ 为无限循环群

∴ 必存在 $g^x \in G$

使 $f(g^x) = x$　　满射

∴ 同构

$\langle I, + \rangle$ 幺元为 0

为同构映射

∴ $K_f = \{e_G\} = g^0$