S.R. 基本假设

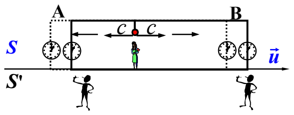
①爱因斯坦相对性原理
②光速不变原理

⇨ 洛仑兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

S.R. 时空观

①同时的相对性（不同地点）



②时间膨胀 $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 两地时 原时最短！

③长度收缩 $l' = l\sqrt{1-u^2/c^2}$ 动长 静长最长！

运动垂向长度不变的列车钻洞的想象实验

设洞外停有一辆列车，车箱高度与洞顶高度相等。现在使车箱匀速地向山洞开去。则高度是否变化？

假设高度由于运动变小了。这样，在地面上观察，由于运动的车箱高度减小，列车当然能穿过山洞。

在车箱上观察，则山洞是运动的，由相对性原理，洞顶的高度应减小，列车就不能穿过山洞。

但是列车能否穿过山洞，是一个确定的物理事实，和参考系的选择无关，因而上述矛盾不应该发生。故上述假设是错误的。在满足相对性原理条件下，车箱和洞顶的高度不应因运动而减小。同理可以得到高度不应因运动而增加。

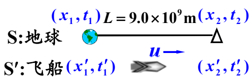
$\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ 故运动垂向长度不变

例9 某空间站相对地球静止，相距 $9.0\times10^9\,\mathrm{m}$，且两处的钟都校正、同步。一飞船匀速飞经两地，当飞船经过地球时宇航员将钟与地球上的钟校准，当飞船飞经空间站时，发现飞船上的钟比空间站的钟慢了3s。求：飞船相对地球的速率？

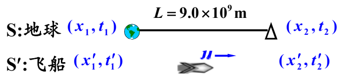
解： $\Delta t = \frac{L}{u} \qquad \Delta t' = \frac{L'}{u} = \frac{L\sqrt{1-u^2/c^2}}{u}$

或 $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

$\Rightarrow \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2}$



$$\Delta t - \Delta t' = \frac{L}{u} - \frac{L\sqrt{1-u^2/c^2}}{u} = 3 \quad \Rightarrow \quad u = 0.198c$$



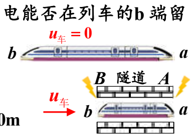
解二：洛伦兹变换

$$\Delta x = x_2 - x_1 = L \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{u}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\frac{L}{u} - \frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t - \Delta t' = 3 \quad \Rightarrow \quad u = 0.198c$$

例10 一列车以恒定速度 $u=\sqrt{3}c/2$ 通过隧道，列车的静长为20 m，隧道的静长为10 m。从地面上看，当列车的前端 a 到达隧道 A 端的同时，有两个闪电正击中隧道的 A 和 B 端。问：（1）从地面参考系看，此闪电能否在列车的b端留下痕迹？（2）从列车参考系看，此闪电能否在列车的b 端留下痕迹？



解：（1）地面为 S 系，列车为 S' 系

在 S 系看列车：

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} = 20\sqrt{1-(3/4)^2} = 10\mathrm{m}$$

a与A相遇时，b恰好进入隧道，闪电不会留下痕迹。

（2）在列车系 S' 中看隧道的长度：

$$l_{隧} = l_{隧0}\sqrt{1-\beta^2} = 10\sqrt{1-(3/4)^2} = 5\mathrm{m}<20\mathrm{m}$$

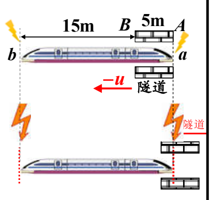
列车露在隧道外15 m，闪电会留下痕迹？

地面系：A 、B 端闪电同时的；列车系：闪电同时？

	S系	S'系
事件2（A端闪电）	(x_2, t_2)	(x'_2, t'_2)
事件1（B端闪电）	(x_1, t_1)	(x'_1, t'_1)

列车系：列车静止；隧道收缩，向后移动

$$t_2' - t_1' = \frac{\underbrace{(t_2 - t_1)}_{=0} - \frac{u}{c^2}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{=10\mathrm{m}}}{\sqrt{1-\beta}} = -\frac{10\sqrt{3}}{c} < 0$$



事件1（B端闪电）后发生

隧道移动距离：

$$\Delta S = u\Delta t' = \frac{\sqrt{3}}{2}c\cdot\frac{10\sqrt{3}}{c} = 15\mathrm{m}$$

在列车上看，b 端也正好进入隧道。

作业15-6：

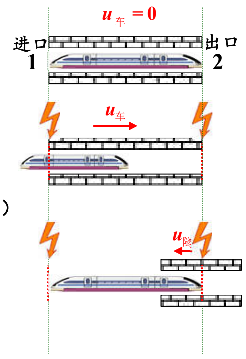
列车和隧道静止时长度相等，当列车以u的高速通过隧道时，分别在地面和列车上测量，列车长度L与隧道长度L'的关系如何？

若地面观测者发现当列车完全进入隧道时，隧道的进、出口处同时发生了雷击（当然未击中列车），按相对论的理论，列车上的旅客会测得列车遭雷击了吗？为什么？

答：根据长度收缩效应，在地面参考系测量，列车的长度小于隧道的长度，即：$L<L'$

同理，在列车参考系测量，则有：$L>L'$

作业15-6：



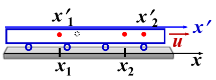
静止：车长=隧道长=L_0

在地面观察（未击中列车）
车运动：车长<L_0

在车上观察（也未击中列车）
隧道运动：隧道长<L_0

$$t_2'-t_1'=\frac{\Delta t-\frac{u(x_2-x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{0-\frac{u\times L_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}<0$$

例11 高速列车以u速驶过车站，固定在站台上的激光打孔机，两激光束间距为10m。在地面参考系测量：两激光同时射向车厢，在车厢上打出两个小孔。求在列车上测量：(1) 两激光打孔机的激光束间距；(2) 激光器发光脉冲的时间差和先后顺序；(3) 车厢外两个小孔之间的距离。



解：(1) $l'=l\sqrt{1-u^2/c^2}$

(2)
$$t_2'-t_1'=\frac{\overset{=0}{\Delta t}-\frac{u\overset{=l}{(x_2-x_1)}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{u\,l}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}<0$$

2先打孔

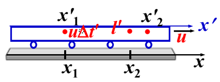
(3)
$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{10\text{m}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$l=\Delta x'\sqrt{1-\beta^2}=l''\sqrt{1-\beta^2}$$

例11 高速列车以u速驶过车站，固定在站台上的激光打孔机，两激光束间距为10m。在地面参考系测量：两激光同时射向车厢，在车厢上打出两个小孔。求在列车上测量：(3) 车厢外两个小孔之间的距离。

解：(3) 在列车上测量两发射孔间距 $l'=l\sqrt{1-u^2/c^2}$

但是由于激光枪1发射时间滞后 $\Delta t'=-\frac{u\,l}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$

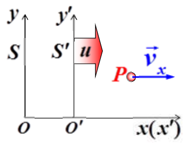


$$l''=l'+u\Delta t'$$

$$l''=l\sqrt{1-u^2/c^2}+\frac{u^2\,l}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{l}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

三、相对论速度变换

①物体沿x轴方向运动



S： $v_x=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$

S'： $v'_x=\frac{\mathrm{d}\,x'}{\mathrm{d}\,t'}$

讨论：v_x、v'_x 的关系

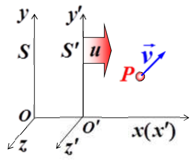
$$x'=\gamma(x-ut)\Rightarrow \mathrm{d}x'=\gamma(\mathrm{d}x-u\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t$$

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad t'=\gamma(t-\frac{ux}{c^2})\Rightarrow \mathrm{d}t'=\gamma(\mathrm{d}t-\frac{u\mathrm{d}x}{c^2})/\mathrm{d}t$$

$$\boxed{v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}\quad\boxed{v'_y=v_y=0}\quad\boxed{v'_z=v_z=0}$$

物体沿x'方向运动

②物体沿任意方向运动



S： $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$

S'： $\vec{v}'=v'_x\vec{i}+v'_y\vec{j}+v'_z\vec{k}$

$$\boxed{v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}$$

$$v'_y=\frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,t'}\qquad\boxed{\mathrm{d}t'=\gamma(\mathrm{d}t-\frac{u\mathrm{d}x}{c^2})}$$

$$v'_y=\frac{\mathrm{d}\,y/\mathrm{d}t}{\underbrace{\mathrm{d}t-\frac{u}{c^2}\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t}}\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\boxed{v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}$$

$$v'_z\overset{?}{\Leftrightarrow}v_z$$

物体沿x方向运动

$$\boxed{v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}\qquad \boxed{v_x=\frac{v'_x+u}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}}$$

低速时得到伽利略变换

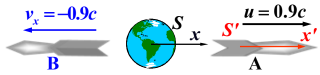
物体沿任意方向运动

$$\boxed{v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}\quad \boxed{v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}\quad \boxed{v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}}$$

$$\boxed{v_x=\frac{v'_x+u}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}}\quad \boxed{v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}}\quad \boxed{v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}}$$

例12 在地面测得两枚静长为20m的火箭A、B以$0.9c$的速度背向飞行。求：在火箭A上测量火箭B的速度和长度？

解：设地球—S系
A—S'系



$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}=\frac{-0.9c-0.9c}{1-\frac{0.9c(-0.9c)}{c^2}}=\frac{-1.8c}{1.81}=-0.994c$$

用经典力学理论会得出 $\boxed{v'_x=-1.8c}$ 的超光速结论

静长L=20m，在相对速度为0.994c的惯性系中长度

$$L'=L\sqrt{1-(v'_x)^2/c^2}=20\sqrt{1-0.994^2}=2.2\ \text{m}$$

例13 一飞船以$0.80c$的速度相对于地面匀速飞行，并以$0.90c$的速度相对于飞船向前方发射一个物体。求：从地面上观察，被飞船发射的物体的速度？

解：地面静止，飞船运动 $u=0.8c$ ，$v'_x=0.9c$

$$\boxed{v_x=\frac{v'_x+u}{1+uv'_x/c^2}=\frac{0.90c+0.80c}{1+0.80\times0.90}\approx0.99c}$$

$$u=u,\ v'_x=c\rightarrow \boxed{v_x=\frac{c+u}{1+uv'_x/c^2}=\frac{c+u}{c^2+uc}c^2=c}$$

不管 u 多大，在 S 系中测得光速仍然是 c

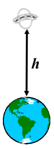
—— 追赶光是徒劳的！

例14 一飞船相对地面以$v_1=0.6c$的速度向上飞离地球，当飞船上的钟走了10s后，该飞船向地面发射一枚导弹，其相对于地面的速度$v_2=0.3c$ 。

求：地面上测飞船发射多久导弹才能到达地面？

解：按地面的时钟测量，飞船发射导弹时间

$$\Delta t_1=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=\frac{10}{\sqrt{1-0.6^2}}=12.5\ \text{s}$$



地面上测飞船上升的高度 $h=v\Delta t_1$

地面上测导弹到达地面的时间：

$$\Delta t_2=h/v_2=0.6c\times12.5/0.3c=25\ \text{s}$$

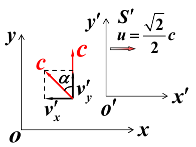
则从飞船发射到导弹到达地面的时间是：

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=12.5+25=37.5\ \text{s}$$

例15 一个光子在惯性系S中沿 y 方向以 c 的速度运动，S′系以 $\sqrt{2}/2c$ 的速度沿x方向运动，求在S′系光子运动方向与y'轴的夹角。

解：$v_x=0,\ v_y=c,\ v_z=0,\ u=\sqrt{2}/2c$

$$\begin{cases} v'_x=\dfrac{v_x-u}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}c \\ v'_y=\dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c \\ v'_z=0 \end{cases}$$



洛伦兹变换符合光速不变原理

$\tan\alpha=1\ \rightarrow\ \alpha=45^\circ$

$$v'_x=-u=-\frac{\sqrt{2}}{2}c\qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}/2\,c}{c}=\sqrt{2}/2\rightarrow\alpha=45^\circ$$

§6.4 狭义相对论的力学

动量守恒定律、能量守恒、和质量守恒定律是普遍性的定律，按照狭义相对论的相对性原理，它们在不同的惯性系中应有相同的形式。

在相对论中，动量还是 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

动力学基本方程还是 $\boxed{\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$

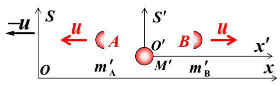
为了使这些定律对洛仑兹变换保持不变，不能规定m是一个常数。

必须认为质量与运动速度有关，即 $m = m(v)$

2018年5月14日 19

一、相对论质量

静止于O'的粒子裂为两个完全相同的粒子，分别沿着x'轴的正反方向运动。



由动量守恒定律 $v'_B = -v'_A = u$

由相对论速度变换公式：　S系：$m_B \overset{?}{=} m_A$

$$
\begin{cases}
v_A = \dfrac{v'_A + u}{1 + u v'_A / c^2} = 0 \\[2ex]
v_B = \dfrac{v'_B + u}{1 + u v'_B / c^2} = \dfrac{2u}{1 + u^2 / c^2} \\[2ex]
u = \dfrac{c^2}{v_B}\left(1 - \sqrt{1 - v_B^2 / c^2}\right)
\end{cases}
$$

由动量守恒和质量守恒定律

$$Mu = \cancel{m_A v_A} + m_B v_B$$

$$(m_A + m_B)\cancel{u} = m_B \frac{2\cancel{u}}{1 + u^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - v_B^2 / c^2}}$$

2018年5月14日 20

相对论的质量（运动质量）

$$m_B = \frac{m_{B0}}{\sqrt{1 - v_B^2 / c^2}}$$

物体静止时的质量（静止质量）

物体相对惯性系的运动速率

去掉下角标 $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$ 相对论质量公式

静止质量最小！

一般宏观物体：$v = 10^4\,\mathrm{m/s}$　$\dfrac{m - m_0}{m_0} \approx 5.6 \times 10^{-10}$

在微观粒子实验中，质量随速率改变非常明显。

电子能量(MeV)	v/c	m/m_0
5	0.995	9.8
25	0.9998	49
2.8×10^3	0.99999998	5490

速度越大，质量越大，加速越不容易，无法把一个物体加速到≥光速c。

2018年5月14日 21

不同理论的时空观

	与参考系有关	与参考系无关
经典理论	速度υ（包括光速）	时间Δt、长度Δx、质量m
相对论	时间Δt、长度Δx、质量m、速度υ（不包括光速）	光速c、静止质量m_0

爱因斯坦：接受新时空观，预言新现象。

2018年5月14日 22