

## § 5.5 波的叠加 波的干涉和驻波

## 一、波的叠加原理

## ①波的独立传播特性:

可以区分出不同的乐器!  
欣赏音色丰富、结构复杂的交响乐

介质中几列波相遇后,并不改变各自的原有特征(波长、频率、振动方向、传播方向)而继续向前传播。

## ②波的可叠加性:

在波列相遇的区域,介质每一点的振移是各波列单独在该点引起的振移的矢量和。

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$$

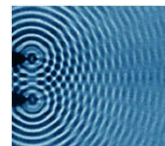


2018年4月28日

1

## 二、波的干涉

**波的干涉:** 两列波在空间相遇,如果叠加的结果是有的地方的**振幅始终加强**、有的地方的**振幅始终减弱**。



即**振幅在空间有一个稳定的分布**。干涉图样

相干波源 (相干条件) ①振动方向平行 (不垂直)  
②频率相同  
③相位差恒定

两个相干波发生干涉时,何处振动加强,何处振动减弱?

2018年4月28日

2

相干波发生干涉时,振动加强(减弱)的条件:

$$S_1: \xi_{10} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad S_2: \xi_{20} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\xi_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \quad \xi_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

$$P \text{ 点的合振动 } \xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

P点两振动的相位差,由位置决定

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

其中:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

对于空间任一点,  $\Delta\varphi$  是恒量 (不随时间改变)。

不同位置,  $\Delta\varphi$  不同,  $A$ 、 $I$  不同, 于是产生振幅(或波强)随位置变化的分布图样——干涉图样。

2018年4月28日

3

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

如果  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 则  $\Delta\varphi$  取决于  $(r_2 - r_1)$ ,  $\delta = r_2 - r_1 \sim$  波程差

①最大强度处: 干涉相长 ②最小强度处: 干涉相消

$$\Delta\varphi = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$A = A_1 + A_2 \quad I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$A = |A_1 - A_2| \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\delta_1 = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$$\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

波源同相的两列相干波在空间相遇, 波程差等于波长整数倍的各点, 振幅最大, 波强最大(干涉相长); 波程差等于半波长奇数倍的各点, 振幅最小, 波强最小(干涉相消)

2018年4月28日

4

最大值  $I_1 = I_2, I = 4I_1$   $I_1 = I_2, I = 0$  最小值

在干涉现象中, 一些点振动的能量增加为单独波能量的4倍, 一些点不振动能量为零; 某些点的振动能量增加一些, 某些点的振动能量减少一些。形成了空间能量的稳定分布。

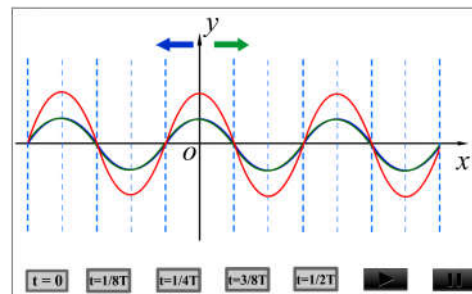
因此, 干涉时, 能量既不产生, 也不会消失, 只是总能量在空间的重新分布。

一般叠加: 当任意两列或几列波在相遇处发生叠加时, 其结果是很复杂的。非相干波相遇叠加时干涉项为零, 平均强度为  $I = I_1 + I_2$

2018年4月28日

5

## 三、驻波—两个相向传播的相干波形成的特殊干涉



2018年4月28日

6

## 1. 驻波的表达式

条件：同一媒质中，在同一直线上沿**相反**方向传播的两列**相干波**叠加。两波**振幅相同**，可分别表示为： $y_1 = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$   $y_2 = A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x)$

合成波称为驻波其表达式：

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) + A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y(t, x) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \omega t \quad \text{—驻波函数}$$

振幅随位置而变

各质元均做简谐振动，角频率 $\omega$ 是原来波的频率

2018年4月28日

7

## 讨论

$$y(t, x) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \omega t$$

①振幅  $|2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x|$  只与位置有关，而与时间无关。

振幅最大的点称为波腹，对应于  $|\cos \frac{2\pi}{\lambda} x| = 1$   
即  $\frac{2\pi}{\lambda} x = k\pi$  的各点。

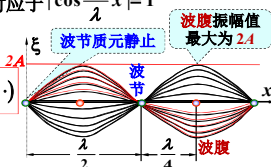
波腹位置  $x = k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

振幅为零的点称为波节，

对应于  $|\cos \frac{2\pi}{\lambda} x| = 0$

即  $\frac{2\pi}{\lambda} x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$  的各点。

波节位置  $x = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$



2018年4月28日

8

②相位  $\xi = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \times \cos \omega t$

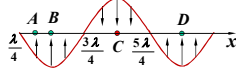
驻波是分段振动的

在相邻两波节之间的质元振动**同相**；  
在同一波节两侧的质元振动**反相**。  
波形定居，但每一位置处的**波幅**随时间变化。

③能量——局部有能量传递

振动的动能与势能在波腹与波节附近质点间相互转化，动能**趋波腹**、势能**趋波节**。

驻波无振动状态或相位的传播，无能量的传播，其**能流密度为零**。行波可以传播相位和能量。

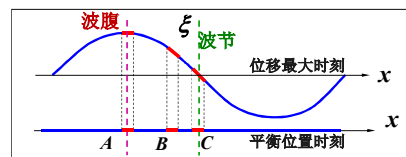


2018年4月28日

9

局部有能量传递

- 最大位移时刻：波腹动能零、势能零；波节动能零、势能最大
- 平衡位置时刻：波腹动能最大、势能零；波节动能零、势能零

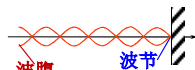


2018年4月28日

10

## 2. 半波损失

在绳与墙壁固定处，为波节位置。



这一现象说明，在反射端，入射波与反射波在该点各自引起的两个振动位相相反，**两相位相差为 $\pi$** ，相当于波程相差 $\lambda/2$ ——半波损失。

反射波与入射波形成的驻波在介质分界面处是波节还是波腹，与**分界面两边的介质性质**有关。

当波从**波疏**媒质垂直入射到**波密**媒质的界面反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是**波节**。

当波从**波密**媒质垂直入射到**波疏**媒质的界面反射时，无半波损失，界面处出现**波腹**。

2018年4月28日

11

## 3. 驻波的波长条件

弦线中或激光器谐振腔中都会产生驻波。

① 两端固定的驻波系统——弦乐器

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

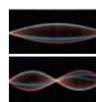
弦上允许出现的驻波波长

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

本征频率

$$\nu_n = \frac{nu}{2L}$$

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



$n=1$

基频

$\nu_1 = u/2L$

$n=2$

二次谐波

$\nu_2 = u/L$

$n=3$

三次谐波

$\nu_3 = 3u/2L$

$n=4$

四次谐波

$\nu_4 = 2u/L$

$\nu_5 = 5u/2L$

$\nu_6 = 3u/L$

$\nu_7 = 7u/2L$

$\nu_8 = 4u/L$

$\nu_9 = 9u/2L$

$\nu_{10} = 5u/L$

$\nu_{11} = 11u/2L$

$\nu_{12} = 6u/L$

$\nu_{13} = 13u/2L$

$\nu_{14} = 7u/L$

$\nu_{15} = 15u/2L$

$\nu_{16} = 8u/L$

$\nu_{17} = 17u/2L$

$\nu_{18} = 9u/L$

$\nu_{19} = 19u/2L$

$\nu_{20} = 10u/L$

$\nu_{21} = 21u/2L$

$\nu_{22} = 11u/L$

$\nu_{23} = 23u/2L$

$\nu_{24} = 12u/L$

$\nu_{25} = 25u/2L$

$\nu_{26} = 13u/L$

$\nu_{27} = 27u/2L$

$\nu_{28} = 14u/L$

$\nu_{29} = 29u/2L$

$\nu_{30} = 15u/L$

$\nu_{31} = 31u/2L$

$\nu_{32} = 16u/L$

$\nu_{33} = 33u/2L$

$\nu_{34} = 17u/L$

$\nu_{35} = 35u/2L$

$\nu_{36} = 18u/L$

$\nu_{37} = 37u/2L$

$\nu_{38} = 19u/L$

$\nu_{39} = 39u/2L$

$\nu_{40} = 20u/L$

$\nu_{41} = 41u/2L$

$\nu_{42} = 21u/L$

$\nu_{43} = 43u/2L$

$\nu_{44} = 22u/L$

$\nu_{45} = 45u/2L$

$\nu_{46} = 23u/L$

$\nu_{47} = 47u/2L$

$\nu_{48} = 24u/L$

$\nu_{49} = 49u/2L$

$\nu_{50} = 25u/L$

$\nu_{51} = 51u/2L$

$\nu_{52} = 26u/L$

$\nu_{53} = 53u/2L$

$\nu_{54} = 27u/L$

$\nu_{55} = 55u/2L$

$\nu_{56} = 28u/L$

$\nu_{57} = 57u/2L$

$\nu_{58} = 29u/L$

$\nu_{59} = 59u/2L$

$\nu_{60} = 30u/L$

$\nu_{61} = 61u/2L$

$\nu_{62} = 31u/L$

$\nu_{63} = 63u/2L$

$\nu_{64} = 32u/L$

$\nu_{65} = 65u/2L$

$\nu_{66} = 33u/L$

$\nu_{67} = 67u/2L$

$\nu_{68} = 34u/L$

$\nu_{69} = 69u/2L$

$\nu_{70} = 35u/L$

$\nu_{71} = 71u/2L$

$\nu_{72} = 36u/L$

$\nu_{73} = 73u/2L$

$\nu_{74} = 37u/L$

$\nu_{75} = 75u/2L$

$\nu_{76} = 38u/L$

$\nu_{77} = 77u/2L$

$\nu_{78} = 39u/L$

$\nu_{79} = 79u/2L$

$\nu_{80} = 40u/L$

$\nu_{81} = 81u/2L$

$\nu_{82} = 41u/L$

$\nu_{83} = 83u/2L$

$\nu_{84} = 42u/L$

$\nu_{85} = 85u/2L$

$\nu_{86} = 43u/L$

$\nu_{87} = 87u/2L$

$\nu_{88} = 44u/L$

$\nu_{89} = 89u/2L$

$\nu_{90} = 45u/L$

$\nu_{91} = 91u/2L$

$\nu_{92} = 46u/L$

$\nu_{93} = 93u/2L$

$\nu_{94} = 47u/L$

$\nu_{95} = 95u/2L$

$\nu_{96} = 48u/L$

$\nu_{97} = 97u/2L$

$\nu_{98} = 49u/L$

$\nu_{99} = 99u/2L$

$\nu_{100} = 50u/L$

$\nu_{101} = 101u/2L$

$\nu_{102} = 51u/L$

$\nu_{103} = 103u/2L$

$\nu_{104} = 52u/L$

$\nu_{105} = 105u/2L$

$\nu_{106} = 53u/L$

$\nu_{107} = 107u/2L$

$\nu_{108} = 54u/L$

$\nu_{109} = 109u/2L$

$\nu_{110} = 55u/L$

$\nu_{111} = 111u/2L$

$\nu_{112} = 56u/L$

$\nu_{113} = 113u/2L$

$\nu_{114} = 57u/L$

$\nu_{115} = 115u/2L$

$\nu_{116} = 58u/L$

$\nu_{117} = 117u/2L$

$\nu_{118} = 59u/L$

$\nu_{119} = 119u/2L$

$\nu_{120} = 60u/L$

$\nu_{121} = 121u/2L$

$\nu_{122} = 61u/L$

$\nu_{123} = 123u/2L$

$\nu_{124} = 62u/L$

$\nu_{125} = 125u/2L$

$\nu_{126} = 63u/L$

$\nu_{127} = 127u/2L$

$\nu_{128} = 64u/L$

$\nu_{129} = 129u/2L$

$\nu_{130} = 65u/L$

$\nu_{131} = 131u/2L$

$\nu_{132} = 66u/L$

$\nu_{133} = 133u/2L$

$\nu_{134} = 67u/L$

$\nu_{135} = 135u/2L$

$\nu_{136} = 68u/L$

$\nu_{137} = 137u/2L$

$\nu_{138} = 69u/L$

$\nu_{139} = 139u/2L$

$\nu_{140} = 70u/L$

$\nu_{141} = 141u/2L$

$\nu_{142} = 71u/L$

$\nu_{143} = 143u/2L$

$\nu_{144} = 72u/L$

$\nu_{145} = 145u/2L$

$\nu_{146} = 73u/L$

$\nu_{147} = 147u/2L$

$\nu_{148} = 74u/L$

$\nu_{149} = 149u/2L$

$\nu_{150} = 75u/L$

$\nu_{151} = 151u/2L$

$\nu_{152} = 76u/L$

$\nu_{153} = 153u/2L$

$\nu_{154} = 77u/L$

$\nu_{155} = 155u/2L$

$\nu_{156} = 78u/L$

$\nu_{157} = 157u/2L$

$\nu_{158} = 79u/L$

$\nu_{159} = 159u/2L$

## ② 一端固定的驻波系统——管乐器

波节 波腹

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\nu_n = \frac{(2n+1)u}{4L} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_0 - \text{基频} \\ \nu_n - \text{谐频} \end{array} \right.$$

管、弦乐器

少数几个本征频率合成的驻波，当强度适中，可引起愉悦的感觉；过多的本征频率叠加或非本征频率则形成噪声，使人感到不舒服。

2018年4月28日

13

例1: A、B为两相干波源，在同一媒质中，波速 $u=10\text{m/s}$ ，频率 $\nu=100\text{Hz}$ ， $A_1=A_2=5\text{cm}$ ，A为波峰时B恰为波谷，求两列波的波函数及传到P点时的干涉结果（假设振幅不衰减）。

$$\text{解: } y_A = A_1 \cos 2\pi\nu t \quad y_B = A_2 \cos(2\pi\nu t - \pi)$$

A波以A为点波源

$$y_A(t, x) = A_1 \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

B波以B为点波源

$$y_B(t, x) = A_2 \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right) - \pi\right]$$

$$\Delta\varphi = \left[2\pi\nu\left(t - \frac{r_2}{u}\right) - \pi\right] - 2\pi\nu\left(t - \frac{r_1}{u}\right) = -\pi - 2\pi \cdot 100 \cdot \frac{0.25 - 0.15}{10} = -3\pi$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi} \quad \text{P点振幅为零，静止。}$$

2018年4月28日

14

例2: 两相干波源分别在P、Q两点处，初相相同，它们相距 $3\lambda/2$ ，由P、Q发出频率为 $\nu$ ，波长为 $\lambda$ 的两列相干波，R为PQ连线上的一点。

求: ①自P、Q发出的两列波在R处的相位差。

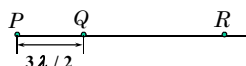
②两波源在R处干涉时的合振幅。

$$\text{解: ① } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{2} = 3\pi$$

② $\Delta\varphi$ 为 $\pi$ 的奇数倍，

合振幅最小

$$|A_1 - A_2|$$



2018年4月28日

15

例3 图中曲线表示某驻波 $t$ 时刻的波形曲线。其中平衡位置在A、B的两质元距离为3米。

问: (1) 指出A、B两点的相位差及该驻波的波长；

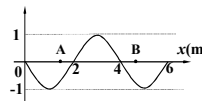
(2) 如果该曲线是某时刻沿 $x$ 轴正方向传播的平面简谐波的波形图，A、B两点的相位差又为多少？

解: (1) A、B两点的相位差为零

驻波的波长  $\lambda = 4\text{m}$

(2) A、B两点的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = 1.5\pi$$



2018年4月28日

16

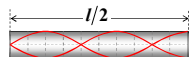
例4 长为 $l$ 的金属棒中形成纵波，并且让中点为波节，棒的杨氏模量为 $Y$ ，密度为 $\rho_0$ ，求驻波的频率。

解: 设 $l/2$ 中有 $n$ 个波节

$$\frac{l}{2} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$l = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{2n+1}$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \Rightarrow v = \frac{u}{\lambda} = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$$



2018年4月28日

17

例5 如图所示的是一端固定、一端开放的驻波，虚线与实线都表示振幅最大时的波形曲线。若波速为 $100\text{m/s}$ ，求: (1) 写出形成此驻波的行波的波函数；

(2) 驻波方程及波节的位置。

解: (1)  $u = 100\text{m/s}$

$$A = 0.01\text{m} \quad \lambda = 2\text{m}$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = 50\text{Hz} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$$

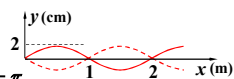
设入射波波函数为  $\xi_-(x, t) = 0.01 \cos(100\pi t + \pi x)$

反射波波函数为  $\xi_+(x, t) = 0.01 \cos(100\pi t - \pi x - \pi)$

(2) 驻波方程为

$$\xi(x, t) = 0.02 \cos(\pi x + \pi/2) \cos(100\pi t - \pi/2)$$

$$\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \pi x + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k, (k=0, 1, 2, \dots)$$



2018年4月28日

18