第4章 振 动

§4.1 简谐振动
§4.2 谐振子
§4.3 阻尼振动
§4.4 受迫振动
§4.5 同方向简谐振动的合成
§4.6 相互垂直的简谐振动的合成
§4.7 谐振分析
§4.8 相空间中振动的轨道

第四章 振 动

振动是物体的一种运动形式。

机械振动：物体在一定位置附近往复的运动。 平衡位置

广义振动：任一物理量（如电场、电流等）随时间周期性的变化都叫振动。

简谐振动：周期运动中最简单最基本的振动形式。

振动分解：周期运动可分解为若干简谐振动之和。

$$x(t+T)=x(t) \quad \rightarrow \quad x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum[A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]$$

研究目的 —— 利用、减弱 或 消除振动。

§4.1 简谐振动

一、简谐振动

简谐振动：物理量（如位移）随时间的变化规律符合余弦函数或正弦函数的运动，称为简谐振动。

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

简谐振动的振幅～A —— 离开原点的最大距离，由初始条件决定。A决定系统的能量。

简谐振动角频率～ω

简谐振动的初相～φ —— 与时间零点的选择有关，或者说与坐标轴取向及计时有关。

$\left.\right\}$ 简谐振动的三个特征量。

周期：$T=2\pi/\omega$

频率：$\nu=\dfrac{1}{T}=\omega/2\pi$

相位：$(\omega t+\varphi)$ —— 决定某一时刻系统的振动状态。

$\left.\right\}$ 简谐振动的三个辅助量。

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

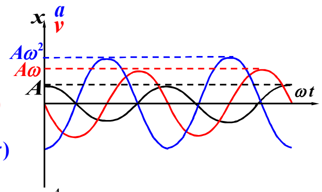
简谐振动的各阶导数也都作简谐振动

二、振动曲线

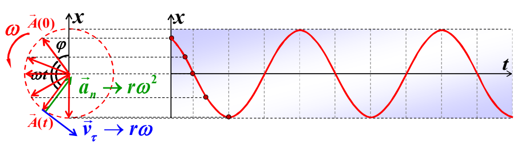
$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$v=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$

$a=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$



三、 旋转矢量：



绕O点以角速度 ω 逆时针旋转的矢量 ,在x 轴上的投影正好描述了一个简谐振动。

$\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)}$

$\boxed{v_\tau=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)=v}$

$\boxed{a_n=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)=a}$

四、同频相位差：$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$

1. 二者相位相同：$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,(k=0,\pm1,\cdots)$

2. 二者相位相反：$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi,(k=0,\pm1,\cdots)$

3. 相位超前落后：$\Delta\varphi>0$, $\Delta\varphi<0$, $|\Delta\varphi|=|\varphi_2-\varphi_1|<\pi$

如 $\Delta\varphi=3\pi/2$ 不能说振动二超前振动一 $3\pi/2$

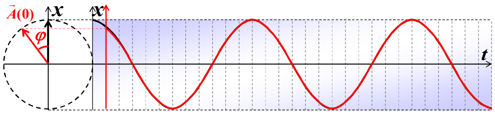
$\dfrac{3}{2}\pi-2\pi=-\dfrac{\pi}{2}$ 应该说振动二落后振动一 $\pi/2$
或者说振动一超前振动二 $\pi/2$

$v=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)$ 称速度超前位移 $\pi/2$

$a=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$ 加速度超前速度 $\pi/2$

五、快速做图法：

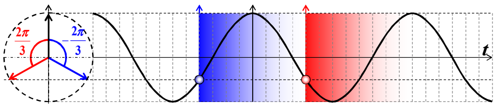
1. 选择“振动一”为零初相，并画出振动曲线，如图



2. 对初相为正的振动，“振动一”的纵轴向右平移。

3. 对初相为负的振动，“振动一”的纵轴向左平移。

例1 快速画出 $x = A\cos(\omega t \pm 2\pi/3)$ 的振动曲线。



例2 一质点沿 x 轴作简谐振动 $A = 0.12$ m，$T = 2.0$ s 当 t=0 时质点位移 $x_0 = 0.06$ m 且向 x 轴正向运动。

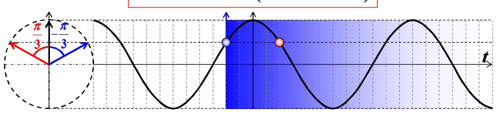
求：①此简谐振动的表达式

解：①设简谐振动的表达式 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \qquad x_0 = A\cos\varphi \to \cos\varphi = 1/2 \to \varphi = \pm\pi/3$$

$$v_0 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\omega A\sin\varphi > 0 \to \quad \varphi = -\pi/3$$

$$\boxed{x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3)}$$



例2 一质点沿 x 轴作简谐振动 $A = 0.12$ m，$T = 2.0$ s 当 t=0 时质点位移 $x_0 = 0.06$ m 且向 x 轴正向运动。

求：② $t = T/4$ 时质点的位置、速度和加速度。

解：②已知简谐振动 $x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3)$

$$t = 1/2 \to x = 0.12\cos(\pi/2 - \pi/3) = 0.104\text{m}$$

$$v = -0.12\pi\sin(\pi/2 - \pi/3) = -0.188\text{m/s}$$

$$a = -0.12\pi\pi\cos(\pi/2 - \pi/3) = -1.025\text{m/s}^2$$

例2 一质点沿 x 轴作简谐振动 $A = 0.12$ m，$T = 2.0$ s 当 t=0 时质点位移 $x_0 = 0.06$ m 且向 x 轴正向运动。

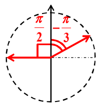
求：③首次通过平衡位置的时刻。

解：③已知简谐振动 $x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3)$

$$0.12\cos(\pi t - \pi/3) \equiv 0 \quad \boxed{(\pi t - \pi/3) = (2k-1)\pi/2}$$

$$t - 1/3 = k - 1/2 \quad \to \quad \boxed{t = (k-1) + 5/6} \quad \boxed{t_1 = 0.8\dot{3}\text{s}}$$

等效问题：矢量转过 $\pi/3 + \pi/2 = 5\pi/6$ 需多长时间？



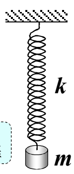
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad \boxed{t_1 = \frac{1}{\pi}\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6} = 0.8\dot{3} \quad (\text{s})}$$

第 N 次通过平衡位置时 $(N-1) + 0.8\dot{3}$ s

§ 4.2 谐振子

1. 弹簧振子

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$ 振动函数



$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

位移与外力正比反向表明回复性。

动力学方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$$ 特征方程 运动学方程

$$\left.\begin{aligned}\boxed{F = -kx} \\ F = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

比较

固有角频率 $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

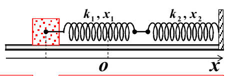
$$\boxed{T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

由初始条件求解：$x_0 = A\cos\varphi$ ，$v_0 = -\omega A\sin\varphi$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}} \qquad \boxed{\varphi = \tan^{-1}(-\frac{v_0}{\omega x_0})}$$

固有周期由振动系统确定，振幅由振动的能量确定两者属于物理特性；初相与时间零点的选择有关。

弹簧振子的串联：

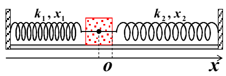


$$f = kx = k_1x_1 = k_2x_2$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 \to \frac{f}{k} = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2} \to k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}}$$

弹簧振子的并联：

$$f = kx = k_1x + k_2x \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$



车轮在地面沿直线轨迹做纯滚动

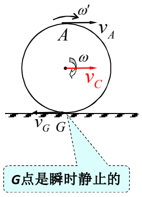
轮子前进的距离x和车轮相对于质心转过角度θ的关系为

$$x = R\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$v_C = R \cdot \omega$$

$$v_A = v_C + R \cdot \omega = 2v_C$$

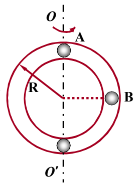
$$v_G = v_C - R \cdot \omega = 0$$



相对于瞬时接触点G的角速度为ω'（ω与ω'的大小关系）

$$v_A = 2R \cdot \omega' = 2v_C = 2R \cdot \omega \Rightarrow \boxed{\omega = \omega'}$$

思考题 内壁光滑的圆环形细管绕竖直光滑固定轴OO'自由转动。环半径为R。一质量为m的小球静止于管内最高点A处。由于微小扰动，小球向下滑动，判断在下滑过程中下列说法是否正确。



A. 小球的动量不守恒.

B. 小球对OO'轴的角动量守恒

C. 地球、环管和小球组成的系统的机械能不守恒

分析：A. 正确. 小球下滑过程始终受管壁压力和重力作用，而两力方向不同, 合力不为零.

B. 不正确. 重力始终与OO'轴平行, 重力矩为零, 但管壁对小球的压力方向不一定过OO'轴, 力矩不为零.

C. 不正确. 在此系统中, 当球下滑时, 只有重力作功.

小球和环组成的系统的角动量是否守恒?