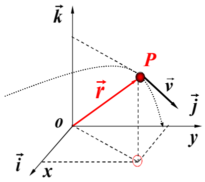
§ 1.2 速度和加速度的分量表示

一、直角坐标系

$$\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$$

$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec i+\frac{dy}{dt}\vec j+\frac{dz}{dt}\vec k=v_x\vec i+v_y\vec j+v_z\vec k$$

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec i+\frac{dv_y}{dt}\vec j+\frac{dv_z}{dt}\vec k=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k$$



$$|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

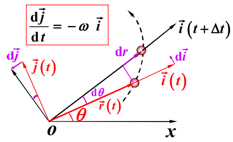
$$|\vec v|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$|\vec a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

二、柱坐标系 (平面极坐标系)

1. 速度的分量表示

$$\boxed{\frac{d\vec j}{dt}=-\omega\vec i}$$



$$\vec r=r(t)\vec i(t)$$

$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d(r\vec i)}{dt}$$

$$=\frac{dr}{dt}\vec i+r\frac{d\vec i}{dt}\ ?\ \begin{cases}\text{方向与}\vec i(t)\text{垂直}\Rightarrow\vec j(t)\\ \text{大小}=1\times\frac{d\theta}{dt}\end{cases}$$

$$=\frac{dr}{dt}\vec i+r\cdot\boxed{\omega\vec j}$$

$$=v_r\vec i+v_\theta\vec j$$

角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$

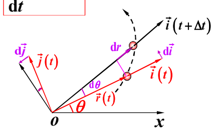
角加速度 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$

2. 加速度

$$\boxed{\frac{d\vec i}{dt}=\omega\vec j}\quad\boxed{\frac{d\vec j}{dt}=-\omega\vec i}$$

$$\vec v=\frac{dr}{dt}\vec i+r\omega\vec j$$

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}$$



$$=\frac{d^2r}{dt^2}\vec i+\frac{dr}{dt}\omega\vec j+\frac{dr}{dt}\omega\vec j+r\alpha\vec j-r\omega^2\vec i$$

$$=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2\right)\vec i+(r\alpha+2v_r\omega)\vec j$$

$$=a_r\vec i+a_\theta\vec j$$

径向加速度　横向加速度　科里奥利加速度

3. 圆周运动

$$\vec r(t)=r\vec i=R\vec i$$

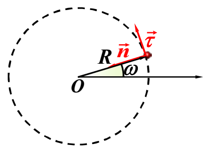
$$\vec v=R\frac{d\vec i}{dt}=R\omega\vec j$$

$$\vec a=R\omega\frac{d\vec j}{dt}+R\frac{d\omega}{dt}\vec j$$

$$=-R\omega^2\vec i+R\alpha\vec j$$

$$=a_n(-\vec i)+a_\tau\vec j$$

$$=a_n\vec n+a_\tau\vec\tau$$



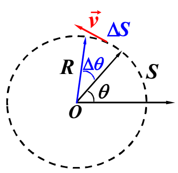
$$\boxed{\frac{d\vec j}{dt}=-\omega\vec i}$$

$a_n=R\omega^2=\frac{v^2}{R}$ ⇒ (向心)法向加速度—改变速度方向

$a_\tau=R\alpha=\frac{dv}{dt}$ ⇒ 切向加速度——改变速度大小

角量和线量的关系

线量	角量	关系式
S	θ	$S=R\theta$
ΔS	$\Delta\theta$	$\Delta S=R\,\Delta\theta$
v	ω	$v=R\omega$
a_τ	α	$\frac{dv}{dt}=R\alpha=a_\tau$



$a_n=R\omega^2=\frac{v^2}{R}$ ⇒ (向心)法向加速度—改变速度方向

$a_\tau=R\alpha=\frac{dv}{dt}$ ⇒ 切向加速度——改变速度大小

三、自然坐标系

任意曲线运动 ⇒ 无数平面圆周运动的叠加

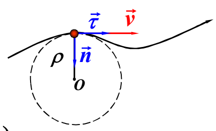
O 瞬时曲率中心

ρ 瞬时曲率半径

单位矢量 $\begin{cases}\text{轨道切向 }\vec\tau\\ \text{轨道内法向 }\vec n\end{cases}$

1.质点的速度

$$\vec v=v\vec\tau\qquad v=\frac{ds}{dt}$$



2.质点的加速度

$$\vec a=\frac{d(v\vec\tau)}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec\tau+v\frac{d(\vec\tau)}{dt}$$

$$=a_\tau\vec\tau+a_n\vec n=\vec a_\tau+\vec a_n$$

$$\begin{cases}a_\tau=\rho\alpha=\frac{dv}{dt}\\ a_n=\rho\omega^2=\frac{v^2}{\rho}\end{cases}$$

注意：容易出错的地方

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{a}_n$ ✗ $\frac{v^2}{R}$ $\qquad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

a ✗ $a_n + a_\tau$ $\qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

$\vec{a}_\tau$ ✗ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad \vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$

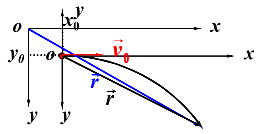
例1：写出以v_0初速度作平抛运动的质点的运动函数。

解：建立坐标系

$x = v_0 t \qquad y = \frac{1}{2}gt^2$

$z = 0$

$\vec{r} = v_0 t\vec{i} + \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$

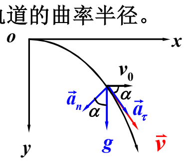


注意：不同的坐标系对同一运动的描述不同。

$\vec{r} = v_0 t\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$

$\vec{r} = (x_0 + v_0 t)\vec{i} + \left(y_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$

例2：求以v_0初速度平抛物体t时刻的切向加速度、法向加速度及轨道的曲率半径。



解：$a_\tau = g\sin\alpha$

$a_\tau = g\cdot\frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$

$a_n = g\cos\alpha$

$a_n = g\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$

$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$

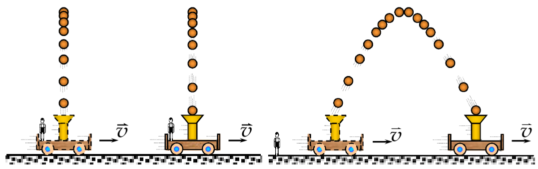
$v_x = v_0 \qquad v_y = g\,t$

$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$

$\sin\alpha = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$

$\cos\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$

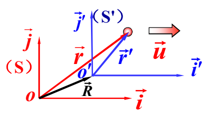
§ 1.3 相对运动



(a) 车做匀速直线运动时，车上的人观察到钢球做直线运动。

(b) 车做匀速直线运动时，地面上的人观察到钢球做抛物线运动。

相互平动的坐标系对运动描述的差异很重要。



o'的位置矢量 $\vec{R}(t)$

速度 $\vec{u} = \frac{d\vec{R}}{dt}$

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ $\qquad \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}}$

伽利略坐标变换

1. 两个坐标系彼此静止 $\vec{u} = 0$，则 $\vec{v} = \vec{v}'$。

2. $\vec{u}$ = 常矢量， $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ $\qquad \vec{a} = \vec{a}'$

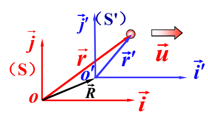
伽利略速度变换 $\qquad$ K与K'为惯性系

3. $\vec{u}$ 不是常矢量，则坐标系间存在非零加速度。 $\qquad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$

加速度变换

注意 伽利略变换成立是有条件的：

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$



长度的测量不依赖于参考系

-----空间绝对性

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

时间的测量不依赖于参考系

-----时间绝对性

绝对时空观只在 $u \ll c$ 时才成立。

例1：已知汽车以每秒 9 米的速度向东行驶，与此同时空中的雨滴以每秒18米的速度垂直落下。
求：雨滴相对于车的速度。

解： $\vec{u} = 9\vec{i}$

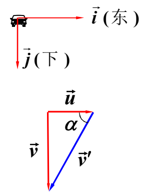
$\vec{v} = 18\vec{j}$

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

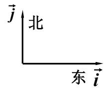
$= 18\vec{j} - 9\vec{i}$

$v' = \sqrt{9^2 + 18^2}$ m/s

$\tan\alpha = \dfrac{18}{9} = 2$



例2：轮船以18 km h^{-1}的速度向正北航行时测得风是西北风；以36 km h^{-1}的速度向正东航行时测得风是正北风。求：地面测得的风速。



解： $\vec{u}_1 = 18\vec{j}$ $\vec{v}_1' = A(\vec{i} - \vec{j})$

$\vec{u}_2 = 36\vec{i}$ $\vec{v}_2' = -B\vec{j}$

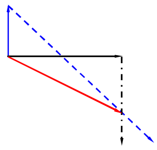
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 = A(\vec{i} - \vec{j}) + 18\vec{j} \\ \vec{v}_2 = -B\vec{j} + 36\vec{i}\end{array}\right\} \text{地面的风速不变}$$

$A(\vec{i} - \vec{j}) + 18\vec{j} = 36\vec{i} - B\vec{j}$

$A\vec{i} + (18 - A)\vec{j} = 36\vec{i} - B\vec{j}$

$A = 36 \qquad B = 18$

$\boxed{\vec{v} = 36\vec{i} - 18\vec{j} \ \ \text{km h}^{-1}}$



思考题

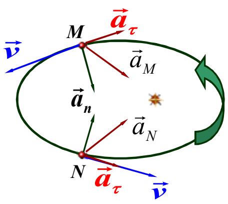
根据开普勒定律，行星运动轨道为椭圆。已知任意时刻行星的加速度方向都指向椭圆的一个焦点（太阳所在处），分析行星通过M、N点时速率分别增大还是减小？

$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v} \Longrightarrow$ 减速

通过M点速率减小

$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v} \Longrightarrow$ 加速

通过N点速率增大



思考题

一个作平面运动的质点，运动方程为

$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{v} = \vec{v}(t)$

如果 (1) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ 质点作什么运动

(2) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ 质点作什么运动

(1) 质点位置矢量大小不变，圆周运动。

(2) 质点切向加速度为零，作匀速率曲线运动。