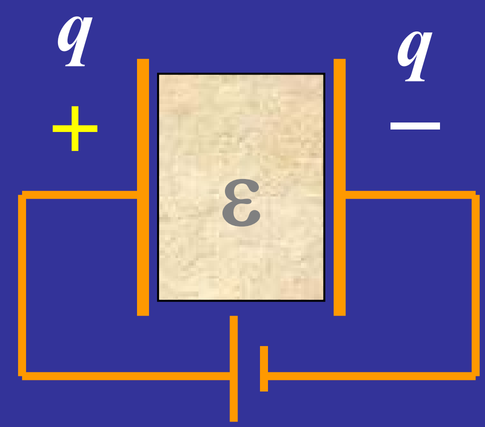
第5章 正弦稳态电路(1)

● 重点:

1. 储能元件：电容和电感元件;
2. 正弦量的三要素、相位差;
3. 正弦量的相量表示;
4. 电路定理的相量形式;

5.1 储能元件

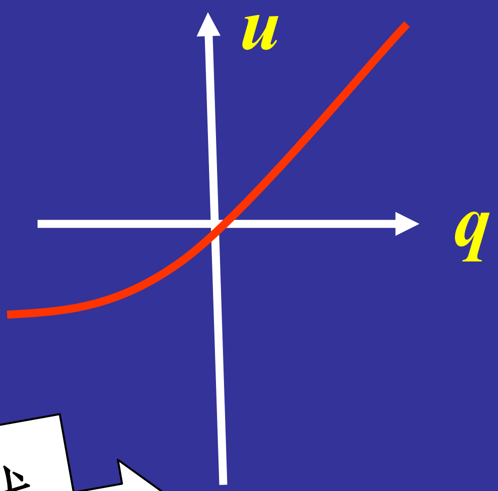
5.1.1 电容元件 (capacitor)



电容器 → 在外电源作用下，两极板上分别带上等量异号电荷，撤去电源，板上电荷仍可长久地集聚下去，是一种储存电场能的部件。

1。定义

电容元件 → 储存电能的元件。其特性可用 $\boldsymbol{u \sim q}$ 平面上的一条曲线来描述

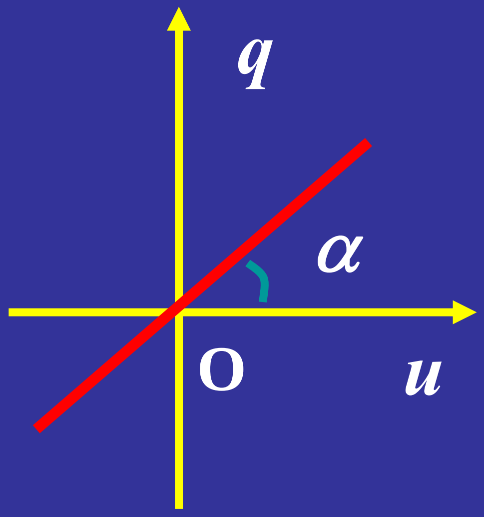


$$f(u,q)=0$$

库伏特性

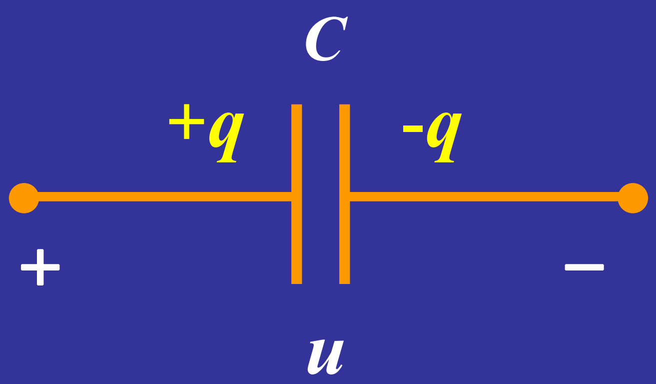
2. 线性定常电容元件

任何时刻，电容元件极板上的电荷q与电流 u 成正比。$q \sim u$ 特性是过原点的直线



$$q = Cu \quad or \quad C = \frac{q}{u} \propto \tan\alpha$$

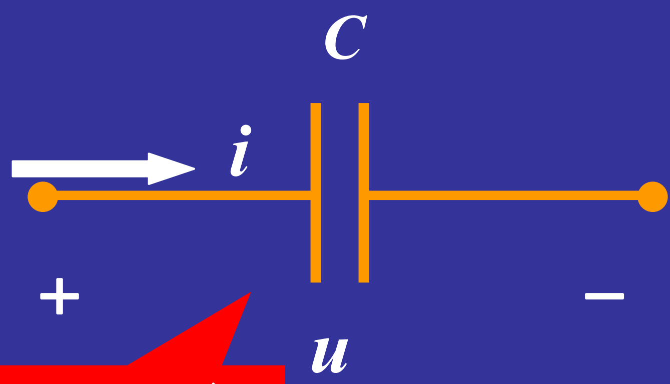
● 电路符号



● 单位

C 称为电容器的电容, 单位：F (法) (Farad，法拉)，常用μF，p F等表示。

● 线性电容的电压、电流关系



u、i 取关联参考方向

电容元件VCR的微分关系

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

表明：

(1) i 的大小取决于 u 的变化率，与 u 的大小无关，电容是动态元件；

(2) 当 u 为常数(直流)时，i =0。电容相当于开路，电容有隔断直流作用；

(3)实际电路中通过电容的电流 i 为有限值，则电容电压 u 必定是时间的连续函数.

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{i}d\xi=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0}\mathrm{i}d\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}id\xi$$

$$=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\mathrm{i}d\xi$$

电容元件VCR
的积分关系

表明

电容元件有记忆电流的作用，故称电容为记忆元件

注

（1）当 u，i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

（2）上式中$u(t_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电容的功率和储能

● 功率

$$p = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

(1) 当电容充电， $u>0$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t>0$，则 $i>0$， $q\uparrow$，
$p>0$, 电容吸收功率。

(2) 当电容放电，$u>0$， $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t<0$，则 $i<0$， $q\downarrow$，
$p<0$, 电容发出功率.

表明

电容能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

● 电容的储能

$$W_C=\int_{-\infty}^{t} uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}Cu^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

$$\overset{若u(-\infty)=0}{=}\frac{1}{2}Cu^2(t)=\frac{1}{2C}q^2(t)\geq 0$$

从t_0到 t 电容储能的变化量:

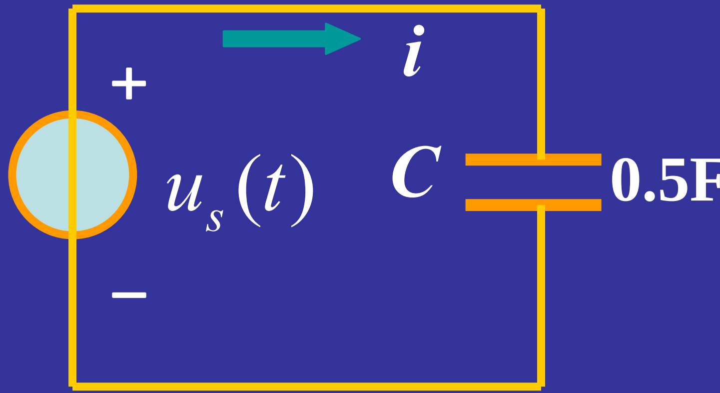
$$W_C=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(t_0)=\frac{1}{2C}q^2(t)-\frac{1}{2C}q^2(t_0)$$

表明

（1）电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变;

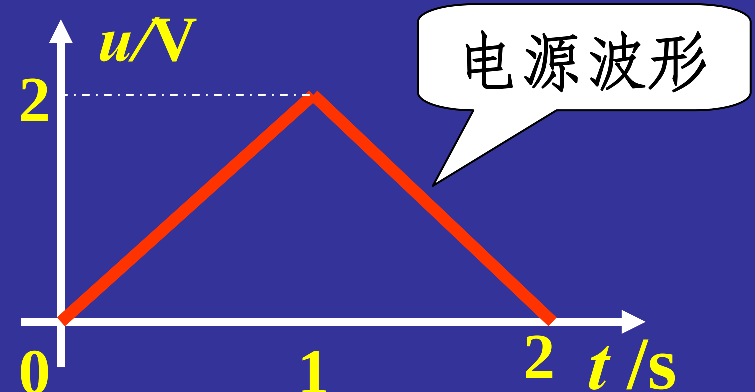
（2）电容储存的能量一定大于或等于零。

例 求电流i、功率$P(t)$和储能$W(t)$



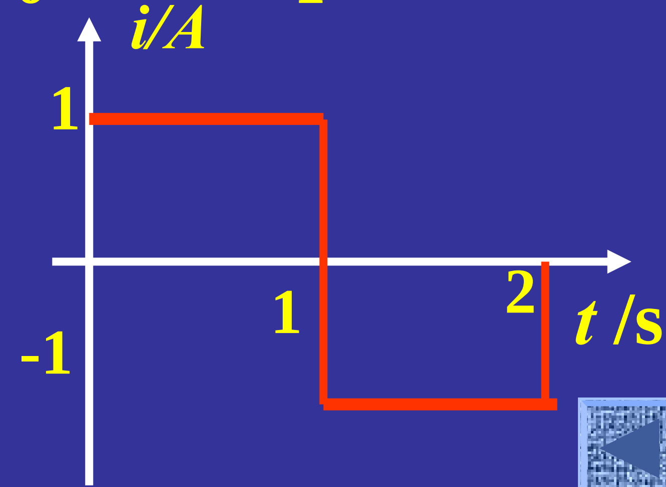
解 $u_S(t)$的函数表示式为:

$$u_s(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1s\\ -2t+4 & 1\le t\le 2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



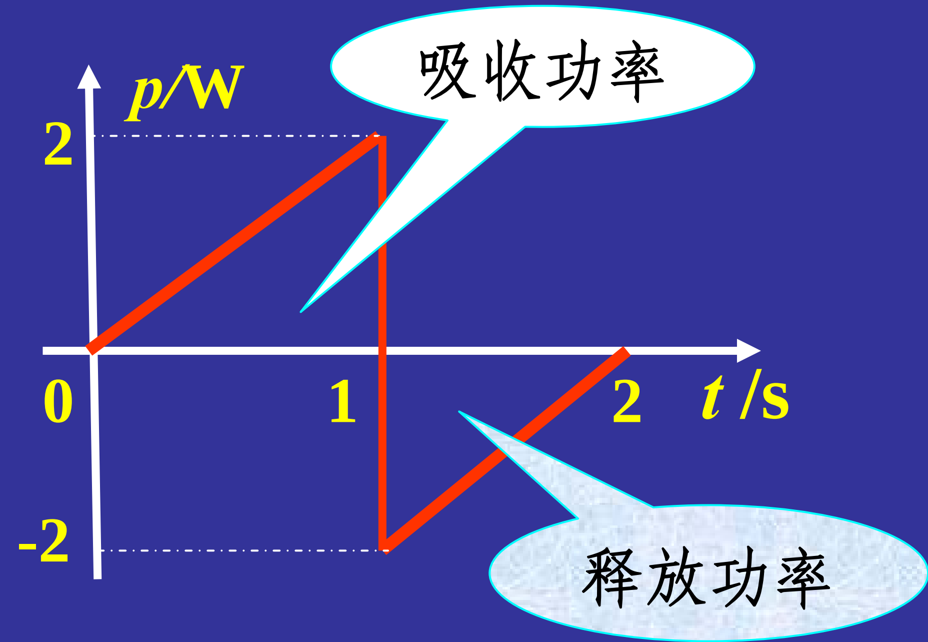
求得电流为

$$i(t)=C\frac{du_s}{dt}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1s\\ -1 & 1\le t<2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



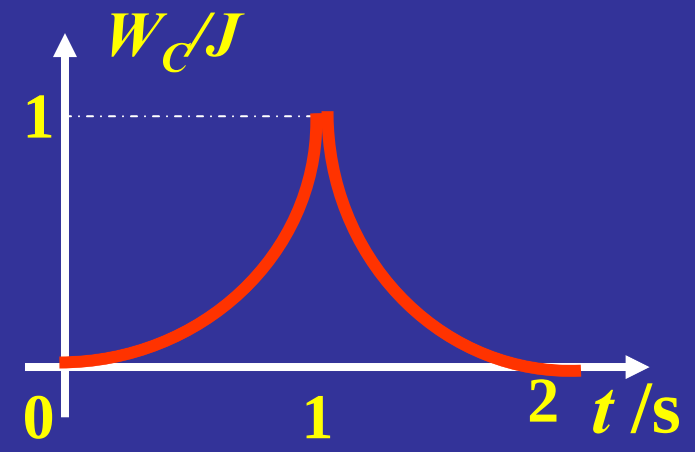
$$p(t)=u(t)i(t)=$$

$$=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1s\\ 2t-4 & 1\le t\le 2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



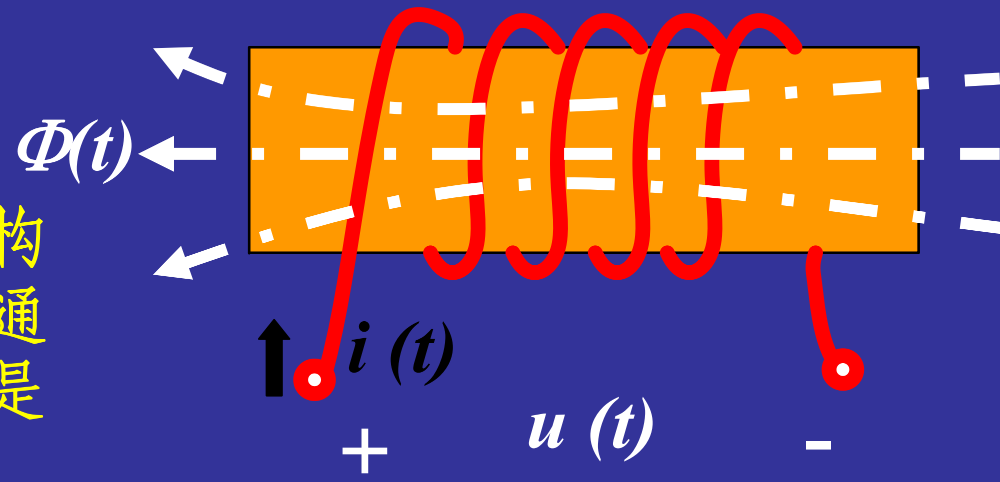
$$W_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)=$$

$$=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t^2 & 0\le t\le 1s\\ (t-2)^2 & 1\le t\le 2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



5.1.2 电感元件 (inductor)

电感器

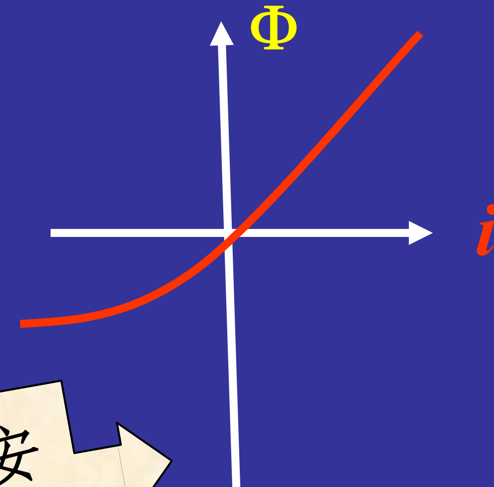


把金属导线绕在一骨架上构成一实际电感器，当电流通过线圈时，将产生磁通，是一种储存磁场能的部件。

1。定义

电感元件

储存磁能的元件。其特性可用Φ ~*i* 平面上的一条曲线来描述



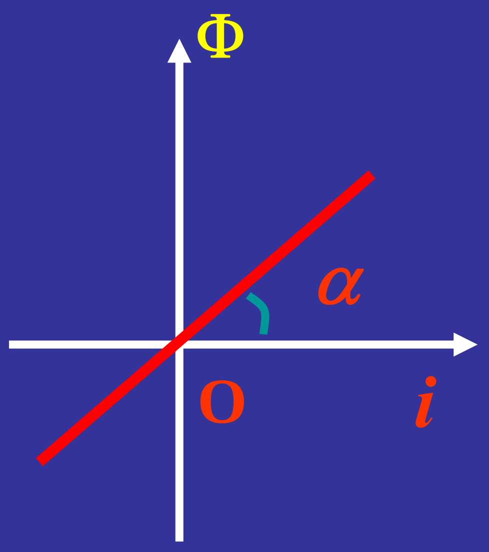
$$f(\Phi, i) = 0$$

2. 线性定常电感元件

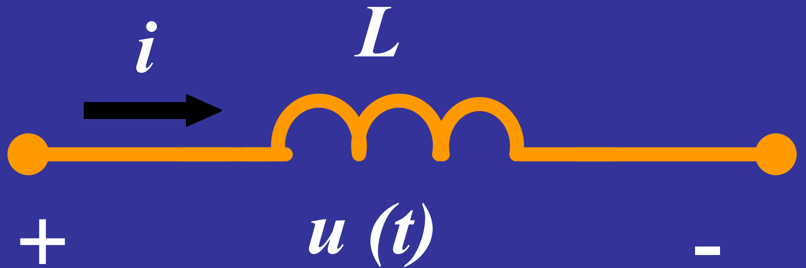
任何时刻，通过电感元件的电流i与其磁通Φ 成正比。

$\Phi \sim i$ 特性是过原点的直线

$$\Phi(t) = Li(t) \quad or \quad L = \frac{\Phi}{i} \propto \tan\alpha$$



● 电路符号

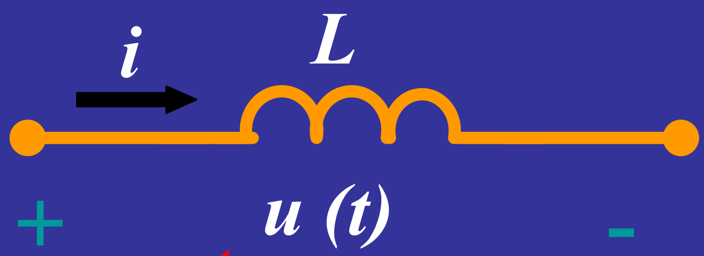


● 单位

L 称为电感器的自感系数，L的单位：H (亨) (Henry，亨利)，常用μH，m H表示。

● 线性电感的电压、电流关系

电感元件VCR
的微分关系



根据电磁感应定
律与楞次定律

$$u(t)=\frac{d\Phi}{d\,t}=L\frac{di(t)}{d\,t}$$

***u*、*i* 取关
联参考方向**

表明：

(1) 电感电压*u* 的大小取决于*i* 的变化率，与*i* 的大小无
关，电感是动态元件；

(2) 当*i*为常数(直流)时，*u* =0。电感相当于短路；

(3)实际电路中电感的电压 *u*为有限值，则电感电流*i*
不能跃变，必定是时间的连续函数.

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\mathrm{d}\xi=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} u\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}\xi$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}\xi$$

电感元件VCR的积分关系

表明

电感元件有记忆电压的作用，故称电感为记忆元件

注

（1）当 u，i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

（2）上式中$i(t_0)$称为电感电流的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电感的功率和储能

u、i 取关联参考方向

● 功率

$$p = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot i$$

(1)当电流*增大*，$i>0$，$\mathrm{d}\,i/\mathrm{d}\,t>0$，则$u>0$， $\psi\uparrow$，$p>0$，电感吸收功率。

(2)当电流减小，$i>0$，$\mathrm{d}\,i/\mathrm{d}\,t<0$，则$u<0$， $\psi\downarrow$，$p<0$，电感发出功率。

表明

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

● 电感的储能

$$W_L=\int_{-\infty}^{t}Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}Li^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)$$

若 $i(-\infty)=0$

$$=\frac{1}{2}Li^2(t)=\frac{1}{2L}\Phi^2(t)\geq 0$$

从 t_0 到 t 电感储能的变化量：

$$W_L=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(t_0)=\frac{1}{2L}\Phi^2(t)-\frac{1}{2L}\Phi^2(t_0)$$

表明

（1）电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变;

（2）电感储存的能量一定大于或等于零。

电容元件与电感元件的比较:

	电容 C	电感 L
变量	电压 u 电荷 q	电流 i 磁通 Φ
关系式	$q = Cu$ $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $W_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2C}q^2$	$\Phi = Li$ $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $W_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2L}\Phi^2$

结论

(1) 元件方程的形式是相似的;

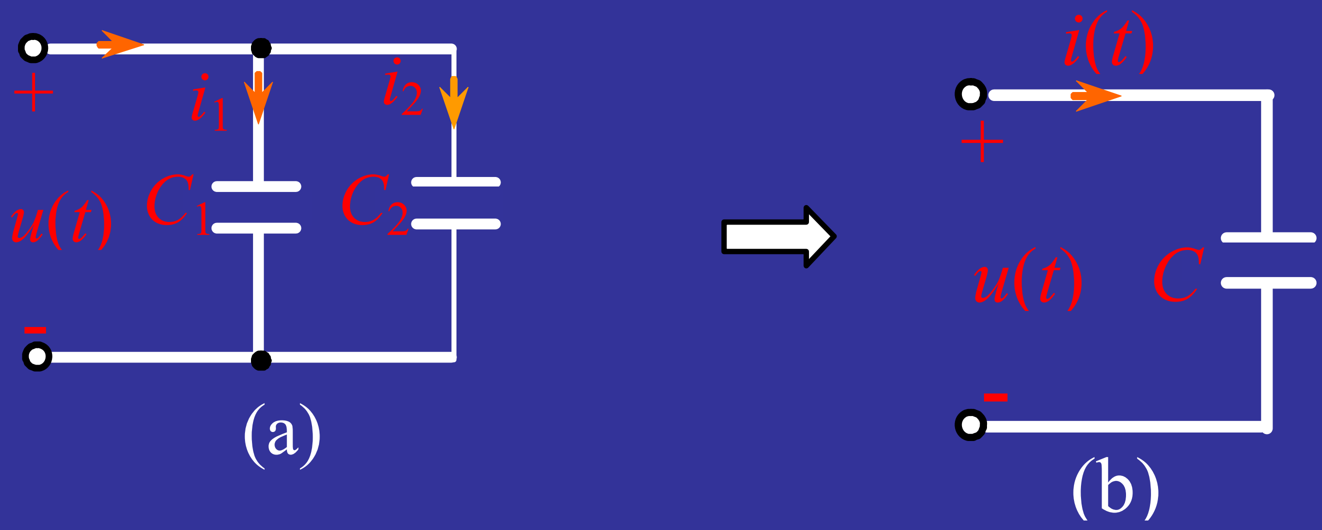
(2) 若把 u-i，q-Φ，C-L， i-u互换,可由电容元件的方程得到电感元件的方程;

(3) C 和 L称为对偶元件, Φ 、q等称为对偶元素。

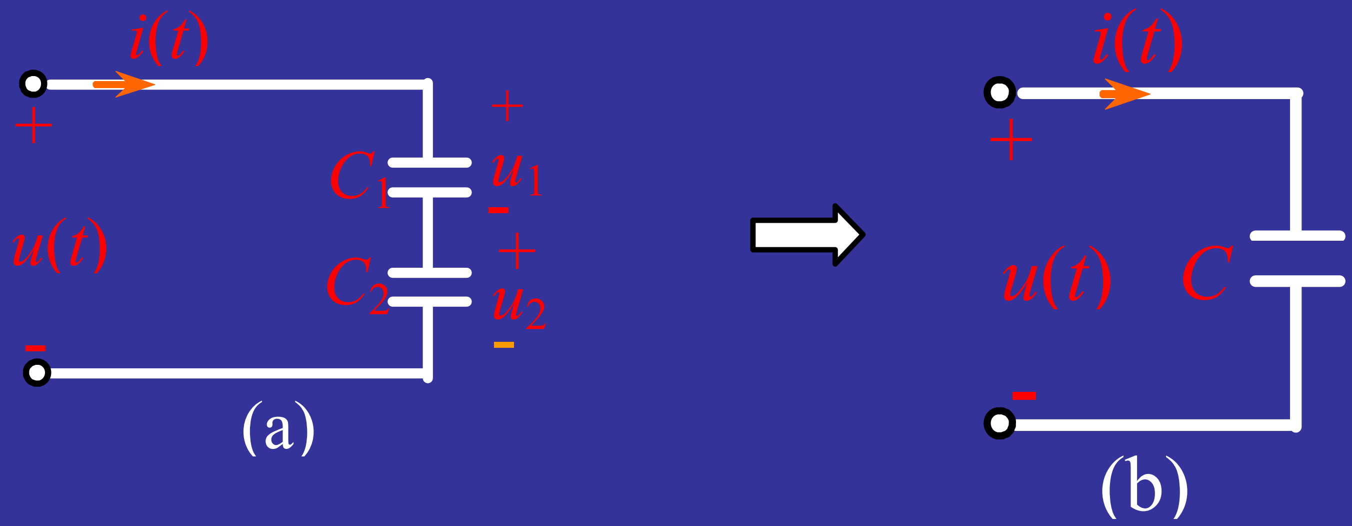
* 显然，R、G也是一对对偶元素: $U=RI \Leftrightarrow I=GU$

$I=U/R \Leftrightarrow U=I/G$

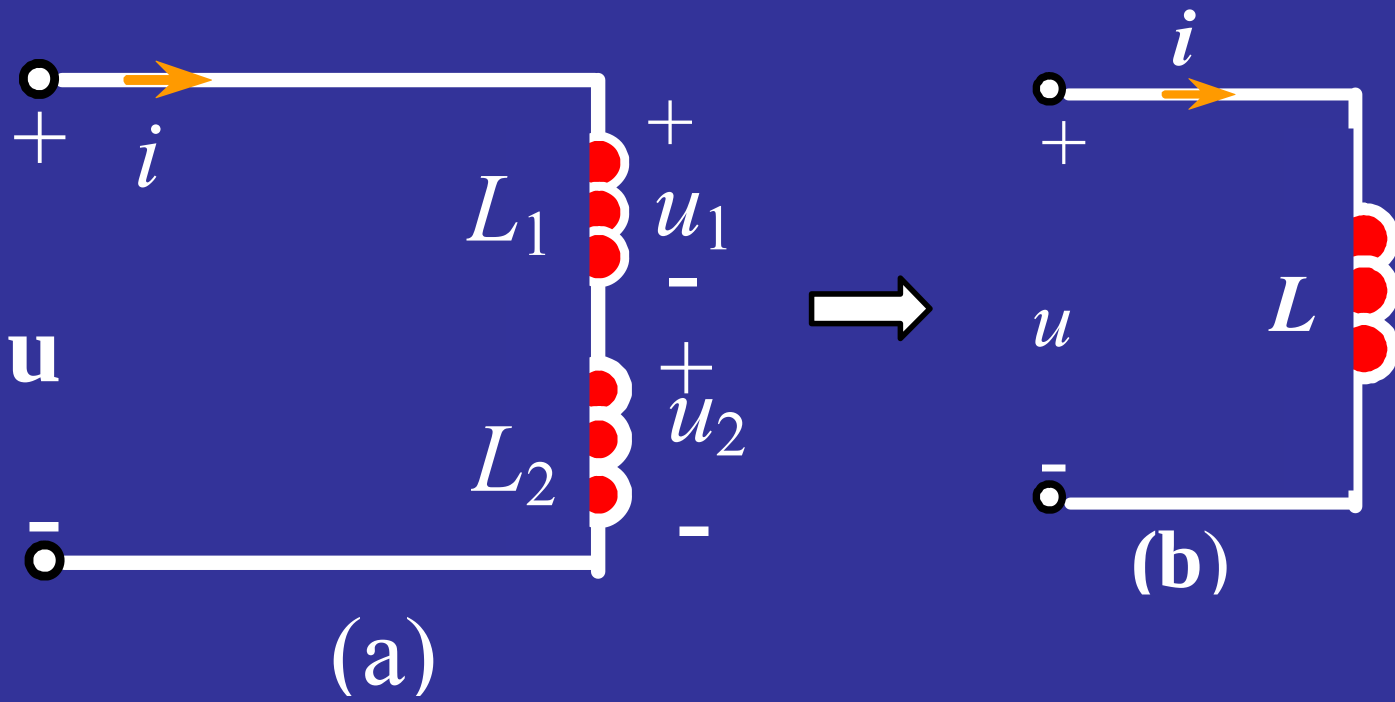
5.1.3 电容和电感的串并联等效



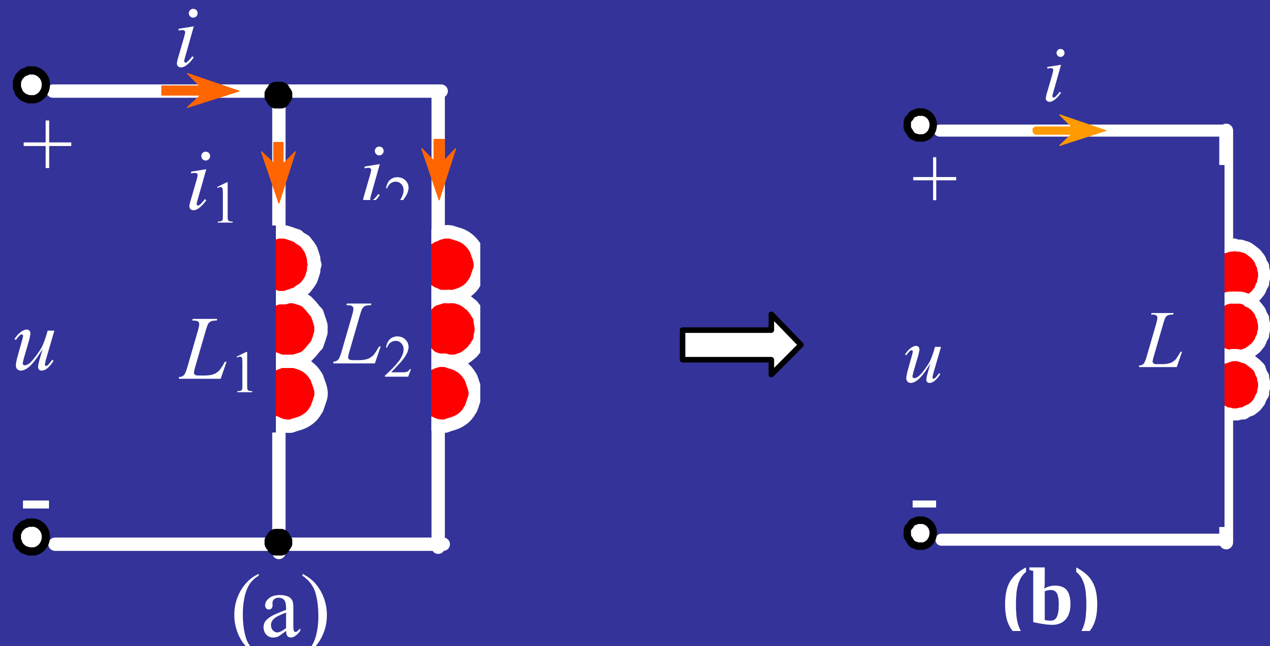
$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j$$



$$\frac{1}{C}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j}$$



$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j$$



$$\frac{1}{L} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{L_j}$$

5.2 正弦量的基本概念

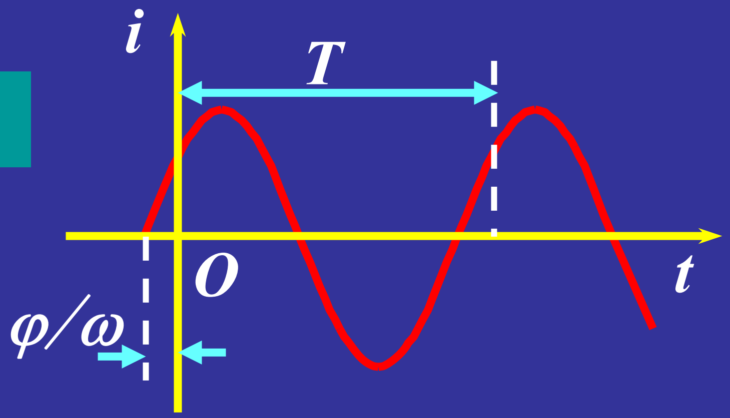
● 正弦电流电路 → 激励和响应均为正弦量的电路称为正弦电路或交流电路。

1. 正弦量

瞬时值表达式：

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$$

波形：



周期*T* (*period*)和频率*f* (*frequency*)：

$$f=\frac{1}{T}$$

- 周期*T*：重复变化一次所需的时间。 单位：s，秒
- 频率*f*：每秒重复变化的次数。 单位：Hz，赫(兹)

2. 正弦量的三要素

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$$

(1) 幅值 (*amplitude*) (振幅、 最大值) I_m

→ 反映正弦量变化幅度的大小。

(2) 角频率(*angular frequency*) ω

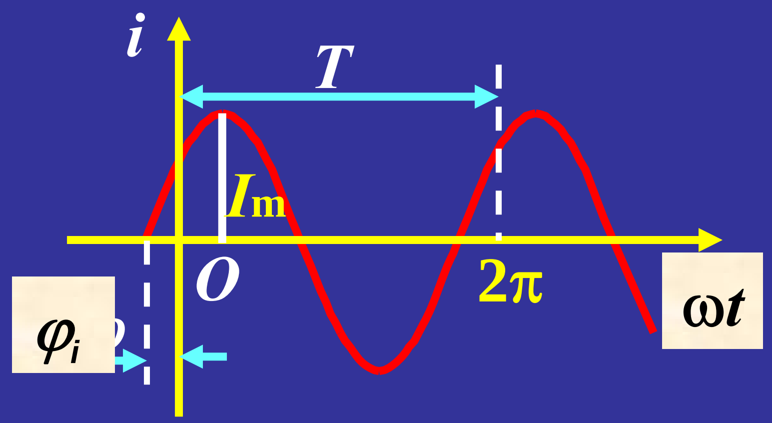
→ 相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

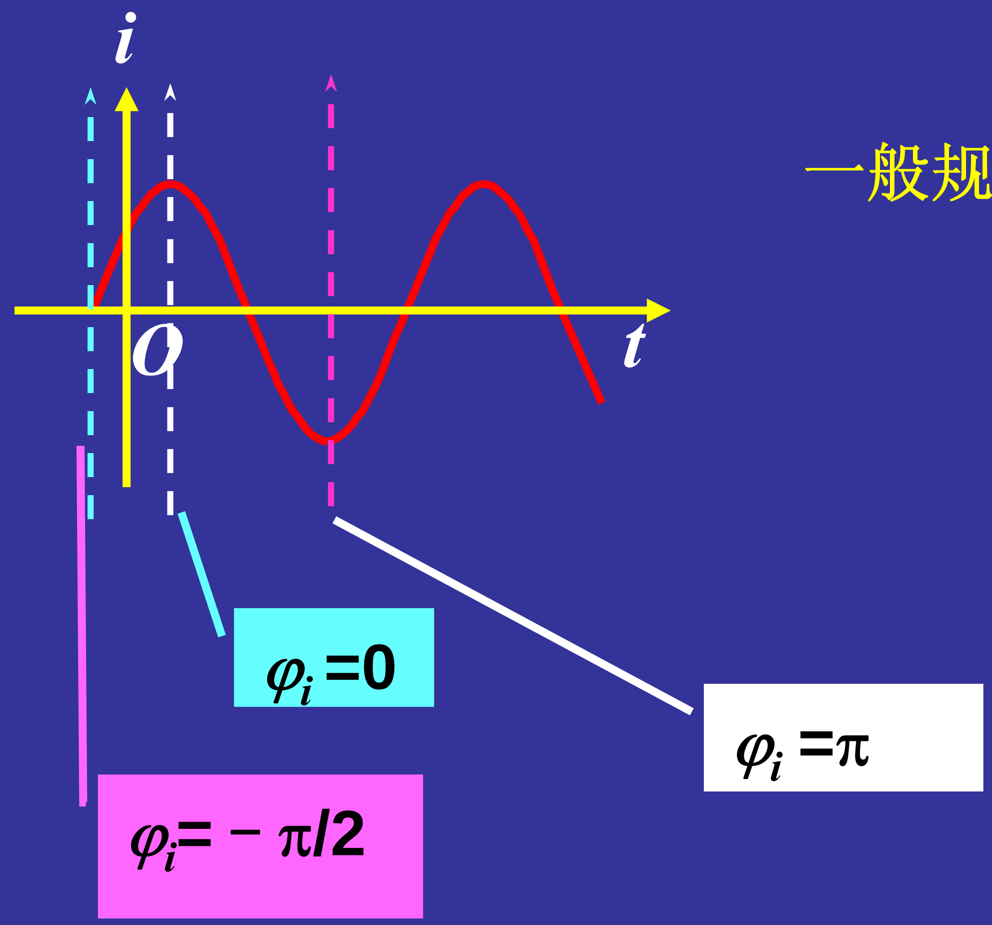
单位： rad/s ，弧度 / 秒

(3) 初相位(*initial phase angle*) φ

→ 反映正弦量的计时起点。

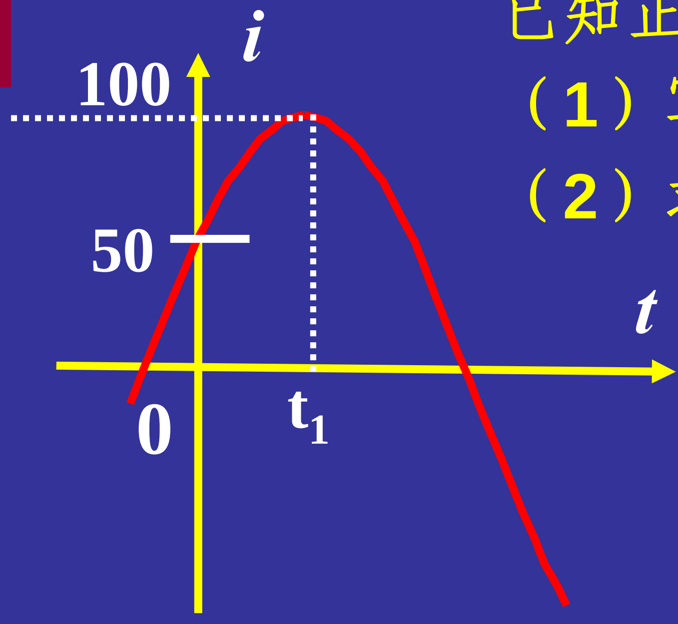


同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。



一般规定：$|\varphi|\leq\pi$ 。

例



已知正弦电流波形如图，ω = 10³rad/s，

（1）写出*i(t)*表达式;

（2）求最大值发生的时间t_1

解 $i(t)=100\cos(10^3 t+\varphi_i)$

$t=0 \rightarrow 50=100\cos\varphi_i$

$\longrightarrow \varphi_i=\pm\pi/3$

由于最大值发生在计时起点之后 $\longrightarrow \varphi_i=-\dfrac{\pi}{3}$

$$i(t)=100\cos(10^3 t-\frac{\pi}{3})$$

当 $10^3 t_1=\pi/3$ 有最大值 $\longrightarrow t_1=\dfrac{\pi/3}{10^3}=1.047ms$

3. 同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)。

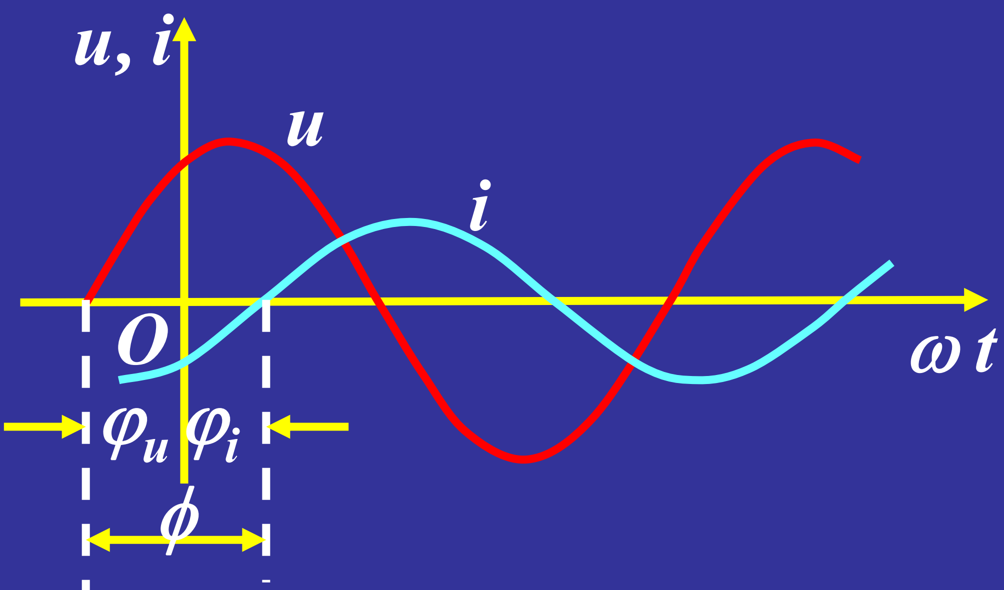
设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

则 相位差：$\phi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

等于初相位之差

规定：$|\phi|\le\pi$ (180°)

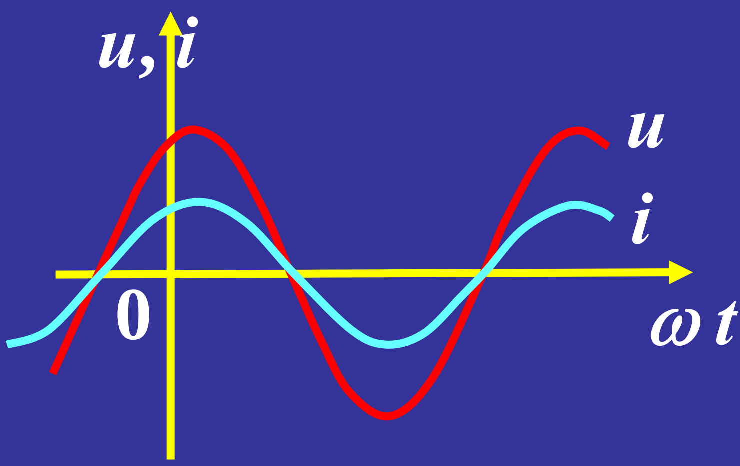
- $\phi>0$，u超前i ϕ角，或i落后u ϕ角(u比i先到达最大值)；



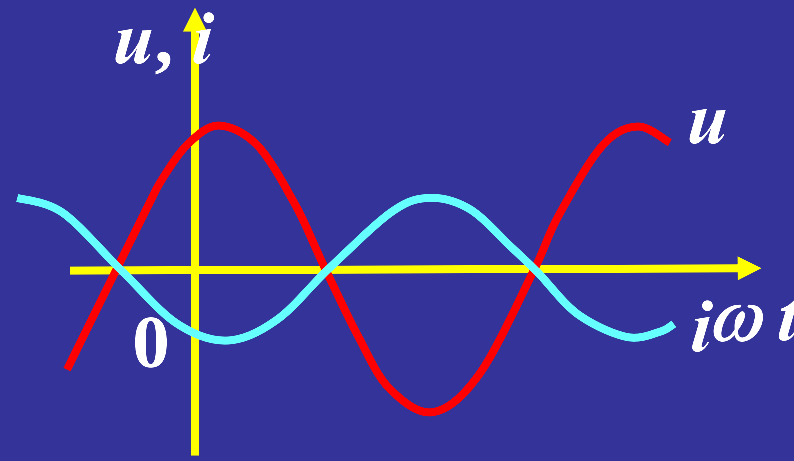
- $\phi<0$，i超前u ϕ角，或u滞后i ϕ角，i比u先到达最大值。

特殊相位关系：

$\phi = 0$，同相：



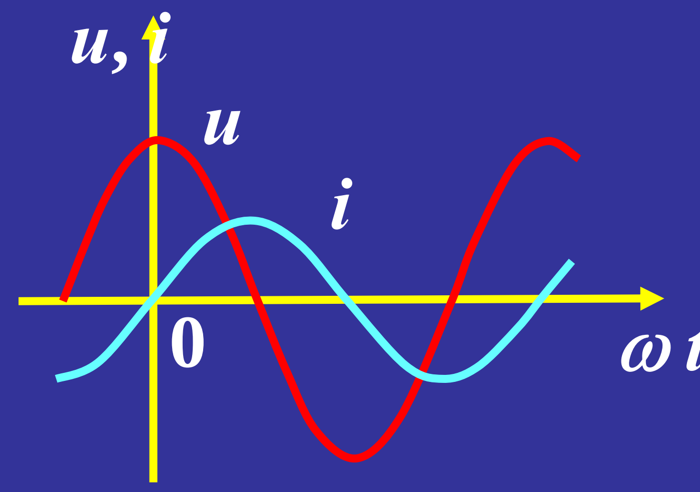
$\phi = \pm\pi$ $(\pm180^{\circ})$，反相：



$\phi = \pi/2$：

u 领先 i $\pi/2$，不说 u 落后 i $3\pi/2$；

i 落后 u $\pi/2$，不说 i 领先 u $3\pi/2$。



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例　计算下列两正弦量的相位差。　**解**

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+3\pi/4)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-\pi/2)$

$\phi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>0$

$\phi=2\pi-5\pi/4=3\pi/4$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15^0)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-105^0)$

$\phi=30^0-(-105^0)=135^0$

(3) $u_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

$u_2(t)=10\cos(200\pi t+45^0)$

$\omega_1\neq\omega_2$

不能比较相位差

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30^0)$

$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30^0)$

$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$

$\phi=-30^0-(-150^0)=120^0$

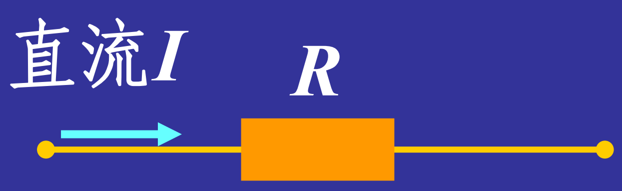
两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其大小工程上采用有效值来表示。

- 周期电流、电压有效值(*effective value*)定义

物理意义



$$W = RI^2T$$

$$W = \int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}t$$

电流有效值定义为

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

有效值也称均方根值(*root-meen-square*)

同样，可定义电压有效值:

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

- 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\varphi_i)\,\mathrm{d}t}$$

$$\because \quad \int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi_i)\,\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi_i)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore \quad I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m \rightarrow \boxed{I_m=\sqrt{2}I}$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\mathrm{m}} \qquad \text{或} \qquad U_{\mathrm{m}} = \sqrt{2} U$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为U_{m}≈311V；

U=380V，　　　U_{m}≈537V。

注 （1）工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

（2）测量中，电磁式交流电压、电流表读数均为有效值。

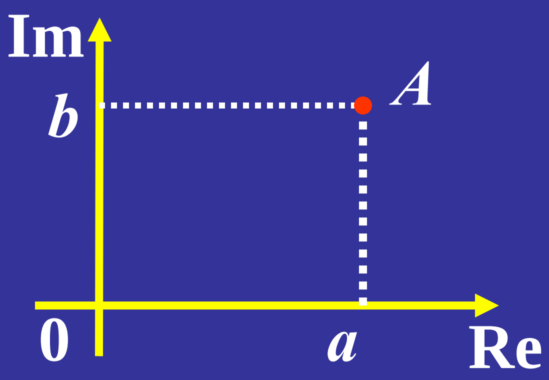
（3）区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

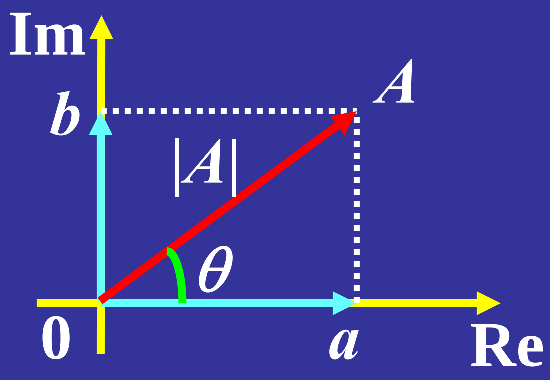
$$i, I_m, I \qquad u, U_m, U$$

5.3 正弦量的相量表示

1. 复数及运算

● 复数A的表示形式　　$A=a+\mathrm{j}b$　($\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位)





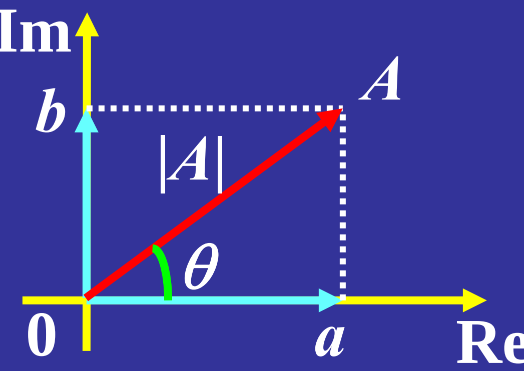
$$A=a+jb \qquad\qquad A=|A|e^{j\theta}$$

$$A=|A|e^{j\theta}=|A|(\cos\theta+j\sin\theta)=a+jb$$

$$A=|A|e^{j\theta}=|A|\angle\theta$$

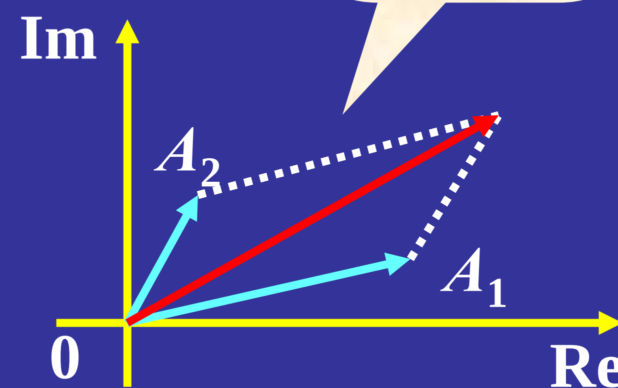
两种表示法的关系：

$$\begin{cases} A=a+\mathrm{j}b & \text{直角坐标表示} \\ A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|A|\angle\theta & \text{极坐标表示} \end{cases}$$



$$\begin{cases} |A|=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta=\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=|A|\cos\theta \\ b=|A|\sin\theta \end{cases}$$

图解法



- 复数运算

(1) 加减运算——采用代数形式

若　$A_1=a_1+\mathrm{j}b_1$，　$A_2=a_2+\mathrm{j}b_2$

则　$A_1\pm A_2=(a_1\pm a_2)+\mathrm{j}(b_1\pm b_2)$

(2) 乘除运算——采用极坐标形式

若 $A_1=|A_1|\angle\theta_1$ ，$A_2=|A_2|\angle\theta_2$

则: $A_1\cdot A_2=|A_1|e^{j\theta_1}\cdot|A_2|e^{j\theta_2}=|A_1||A_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$=|A_1||A_2|\angle\theta_1+\theta_2$

乘法：模相乘，角相加。

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{|A_1|\angle\theta_1}{|A_2|\angle\theta_2}=\frac{|A_1|e^{j\theta_1}}{|A_2|e^{j\theta_2}}=\frac{|A_1|}{|A_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{|A_1|}{|A_2|}\angle\theta_1-\theta_2$$

除法：模相除，角相减。

例1. $5\angle 47^\circ+10\angle-25^\circ=?$

解 $5\angle 47^\circ+10\angle-25^\circ=(3.41+j3.657)+(9.063-j4.226)$

$=12.47-j0.569=12.48\angle-2.61^\circ$

例2. $$220\angle 35^\circ + \frac{(17+\mathrm{j}9)(4+\mathrm{j}6)}{20+\mathrm{j}5} = ?$$

解 $$\text{原式} = 180.2 + \mathrm{j}126.2 + \frac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$$

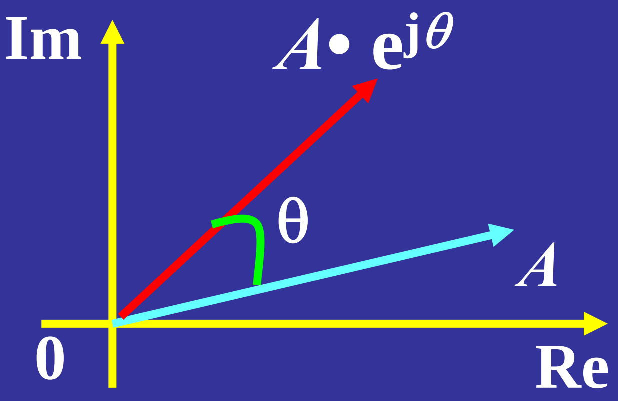
$$= 180.2 + \mathrm{j}126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$$

$$= 180.2 + \mathrm{j}126.2 + 2.238 + \mathrm{j}6.329$$

$$= 182.5 + \mathrm{j}132.5 = 225.5\angle 36^\circ$$

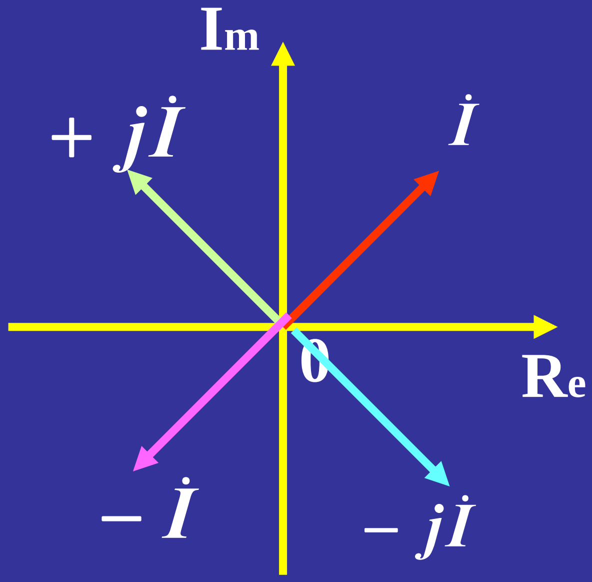
(3) 旋转因子:

复数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta = 1\angle\theta$



$A\bullet\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 相当于A逆时针旋转一个角度θ，而模不变。故把 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 称为旋转因子。

几种不同θ值时的旋转因子



$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{j-\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$\theta = \pm\pi, \quad e^{j\pm\pi} = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi) = -1$$

故 +j, –j, −1 都可以看成旋转因子。

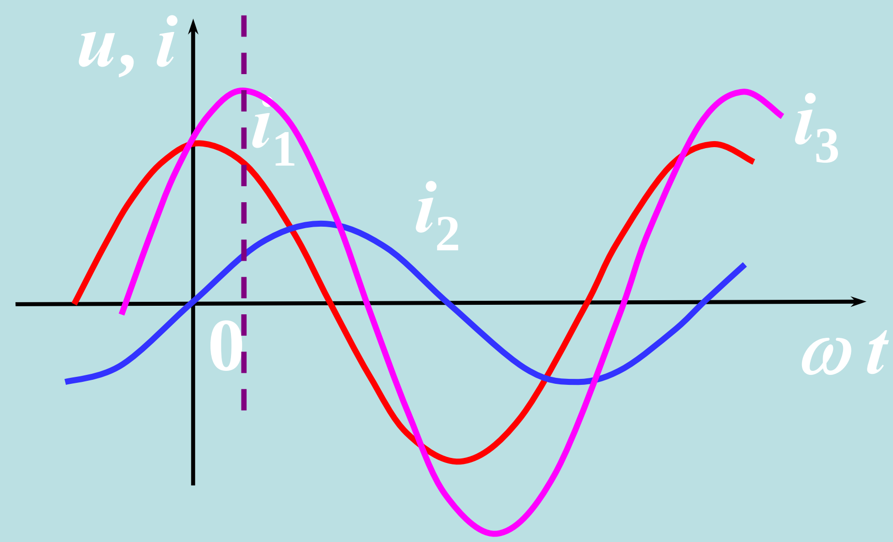
2. 正弦量的相量表示

两个正弦量的相加

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

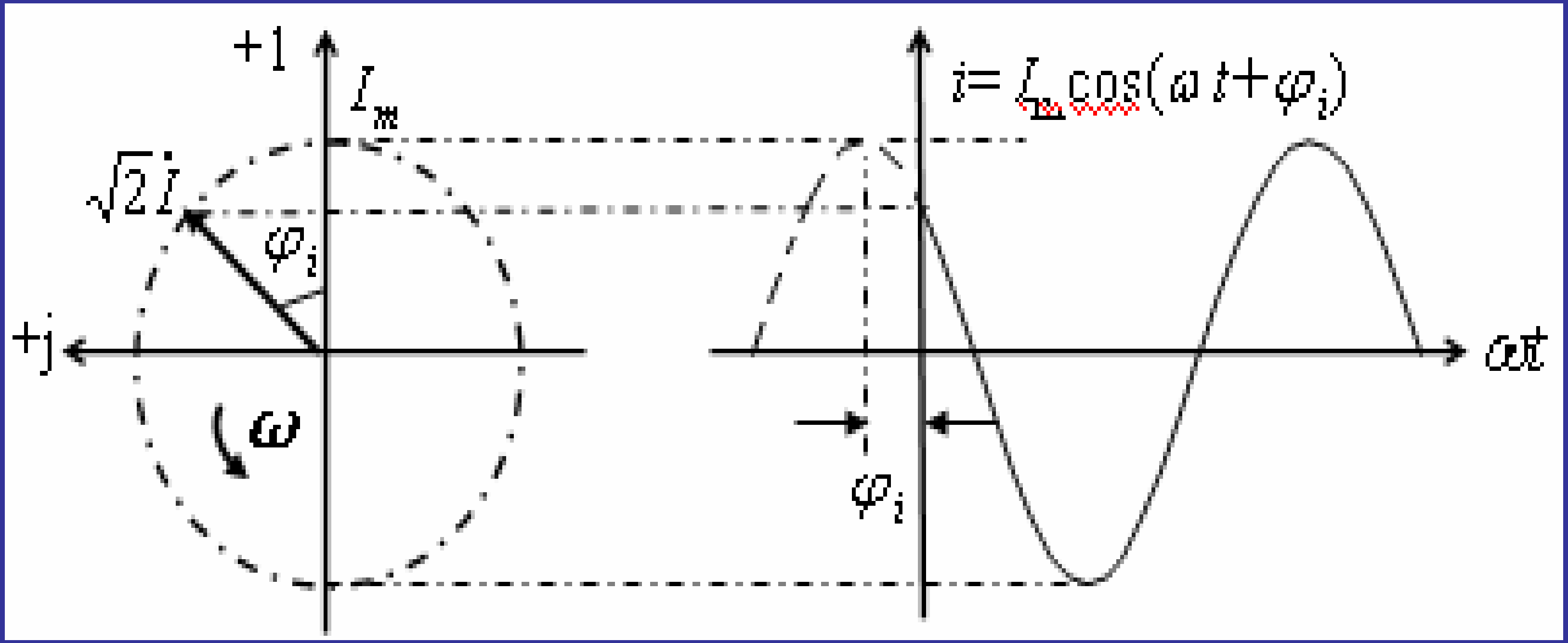
+



因同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只要确定初相位和有效值(或最大值)就行了。因此，

正弦量 ⟷ 复数

实际是变换的思想



正弦电流*i*的瞬时值等于对应的旋转相量在实轴上的投影.

● 正弦量的相量表示

是一个正弦量
有物理意义

造一个复函数 $$A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}$$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$$

对***A***(***t***)取实部： $$\mathrm{Re}[A(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$$

对于任意一个正弦时间函数都有唯一与其对应的复数函数

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i) \leftrightarrow A(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}$$

A(***t***)还可以写成 $$A(t)=\underbrace{\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}}_{\text{复常数}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{\mathrm{j}\omega t}$$

A(***t***)包含了三要素：***I***、 ***φ***、***ω***，复常数包含了***I***, ***φ*** 。

称 $\dot{I}=I\angle\varphi_i$ 为正弦量 ***i(t)*** 对应的相量。

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i) \Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\varphi_i$$

相量的模表示正弦量的有效值

相量的幅角表示正弦量的初相位

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系:

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u) \Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\varphi_u$$

例1 已知

$$i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\text{A}$$

$$u=311.1\cos(314t-60^{\circ})\text{V}$$

试写出*i*, *u*的相量形式.

解

$$\dot{I}=100\angle 30^{\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{U}=220\angle -60^{\circ}\ \text{V}$$

例2 已知 $\dot{I}=50\angle 15^\circ\ \mathrm{A},\ f=50\mathrm{Hz}$.

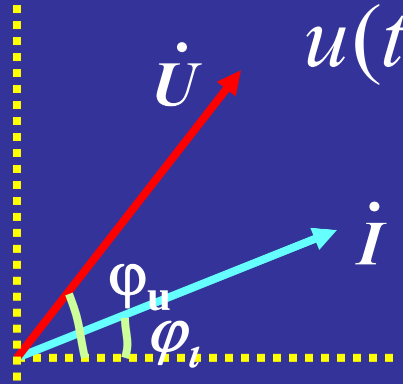
试写出电流的瞬时值表达式。

解 $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^\circ)\ \mathrm{A}$

- 相量图 → 在复平面上用向量表示相量的图

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)\rightarrow \dot{I}=I\angle\varphi_i$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)\rightarrow \dot{U}=U\angle\varphi_u$$



3. 相量法的应用

(1) 同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\cos(\omega t+\varphi_{u1})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\cos(\omega t+\varphi_{u2})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t}+\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}(\underbrace{\dot{U}_1+\dot{U}_2}_{\dot{U}})e^{j\omega t})$$

可得其相量关系为: $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

故同频正弦量相加减运算变成对应相量的相加减运算。

$$i_1 \pm i_2 = i_3$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

例 $u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)\ \text{V}$

$u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ)\ \text{V}$

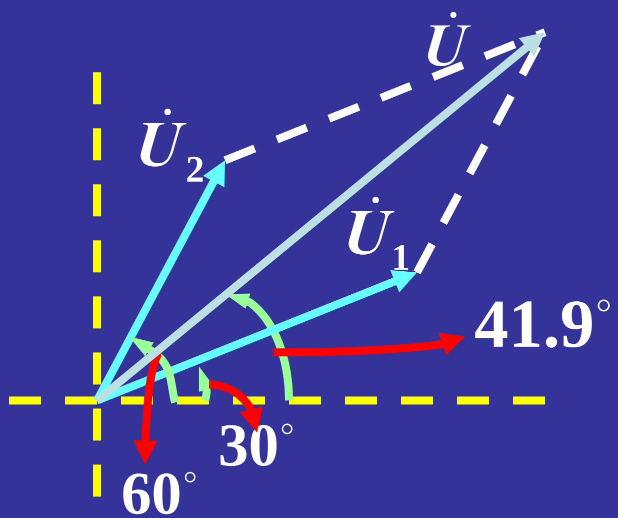
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{cases}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ = 5.19 + j3 + 2 + j3.46$$

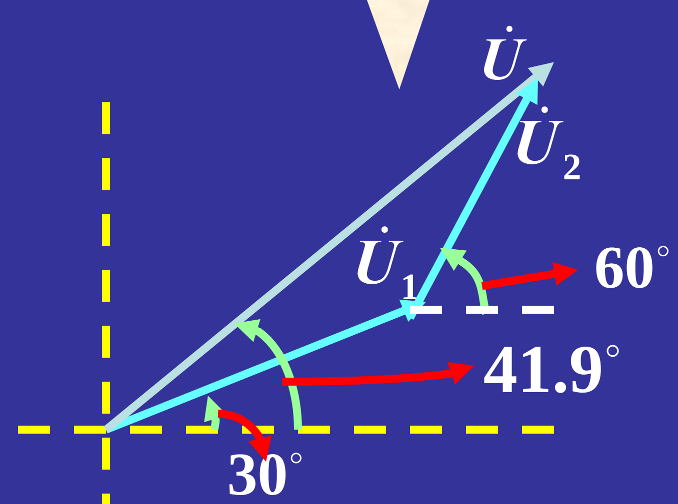
$$= 7.19 + j6.46 = 9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^\circ)\ \text{V}$$

也可借助相量图计算



首尾相接



相量法的优点：

（**1**）把时域问题变为复数问题;

（**2**）把微积分方程的运算变为复数方程运算;

（**3**）可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路;

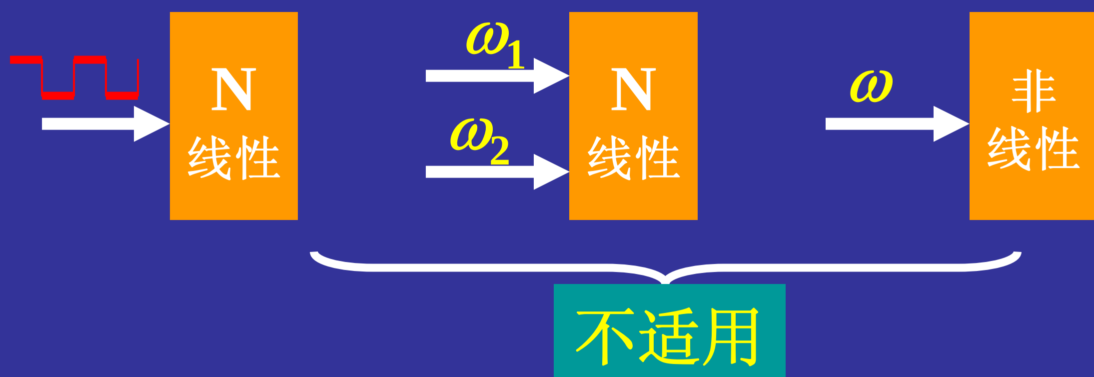
注

① 正弦量 ⇄ 相量

时域 频域

正弦波形图 ⇄ 相量图

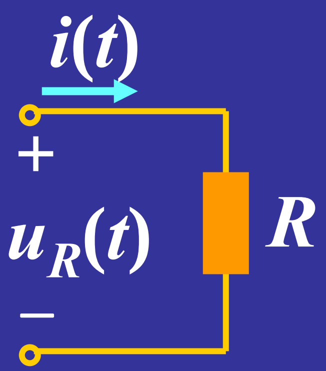
② 相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线性电路。



③ 相量法用来分析正弦稳态电路。

5.4 电路定理的相量形式

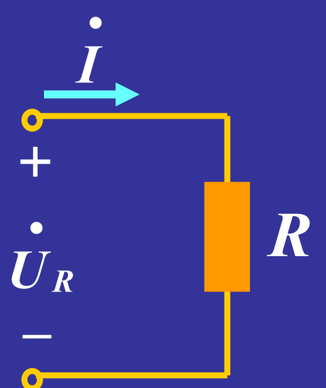
1. 电阻元件VCR的相量形式



时域形式：

已知 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$

则 $u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}\underbrace{RI}_{U_R}\cos(\omega t+\underbrace{\varphi_i}_{\varphi_u})$



相量形式：

$\dot{I}=I\angle\varphi_i$

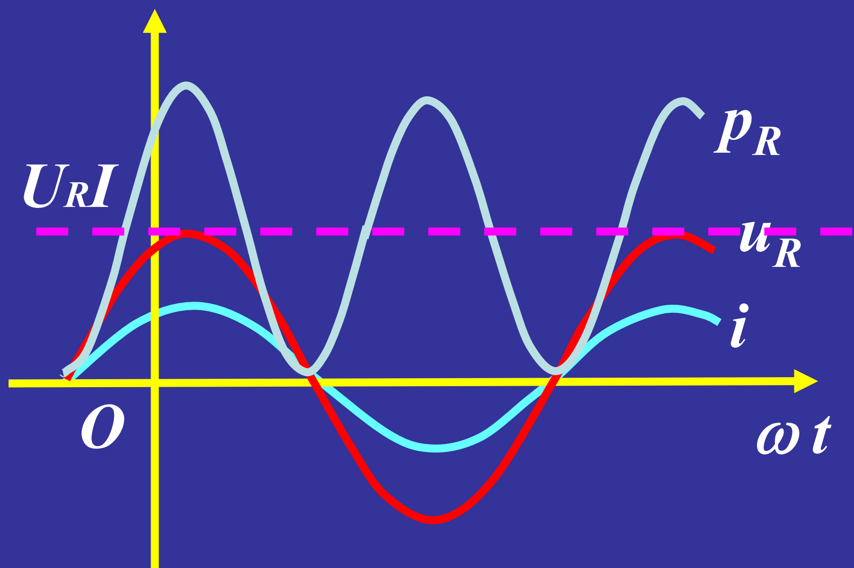
$\dot{U}_R=RI\angle\varphi_i$

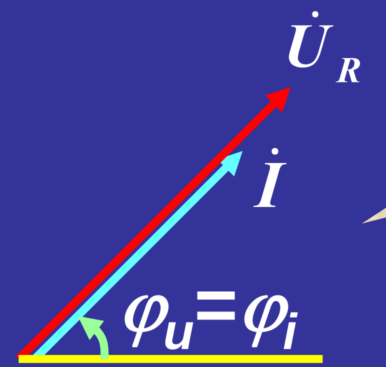
相量关系：

相量模型

$\dot{U}_R=R\dot{I}$ → $\begin{cases} U_R=RI & \text{有效值关系} \\ \varphi_u=\varphi_i & \text{相位关系} \end{cases}$

波形图及相量图：





同相位

瞬时功率：

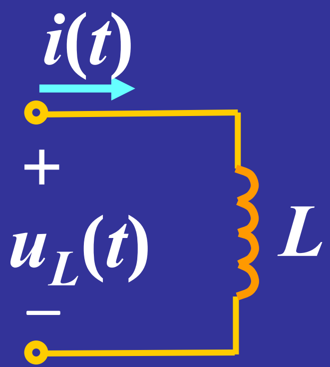
$$p_R = u_R i = \sqrt{2}U_R\sqrt{2}I\cos^2(\omega t+\varphi_i)$$
$$= U_R I[1+\cos 2(\omega t+\varphi_i)]$$

瞬时功率以2ω交变。始终大于零，表明电阻始终吸收功率

2. 电感元件VCR的相量形式

时域形式：

已知 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$



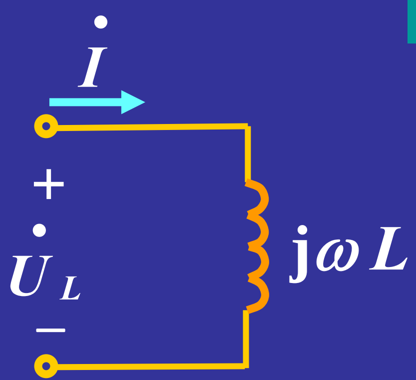
则 $u_L(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega L I\sin(\omega t+\varphi_i)$

$$=\sqrt{2}\omega L I\cos(\omega t+\varphi_i+\frac{\pi}{2})$$

相量形式：

$$\dot{I}=I\angle\varphi_i$$

$$\dot{U}_L=\omega LI\angle\varphi_i+\pi/2$$



相量关系：

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=jX_L\dot{I}$$

相量模型

有效值关系： $U=\omega L I$

相位关系： $\varphi_u=\varphi_i+90^\circ$

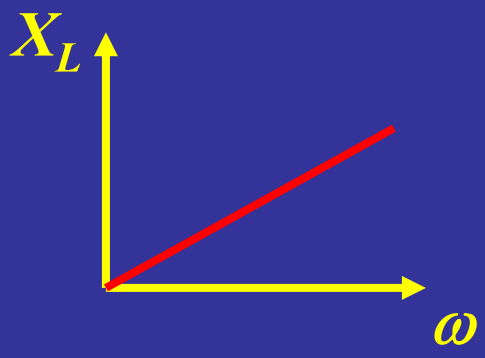
感抗和感纳:

$X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗，单位为Ω（欧姆)

$B_L=1/\omega L=1/2\pi fL$，感纳，单位为 S

感抗的物理意义:

(1) 表示限制电流的能力； (2) 感抗和频率成正比；



$\omega=0$(直流), $X_L=0$, 短路;

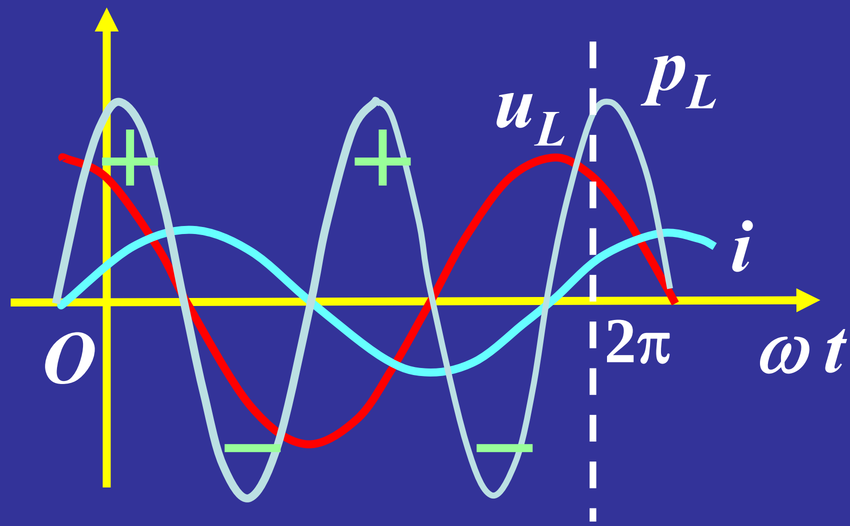
$\omega\to\infty$, $X_L\to\infty$, 开路;

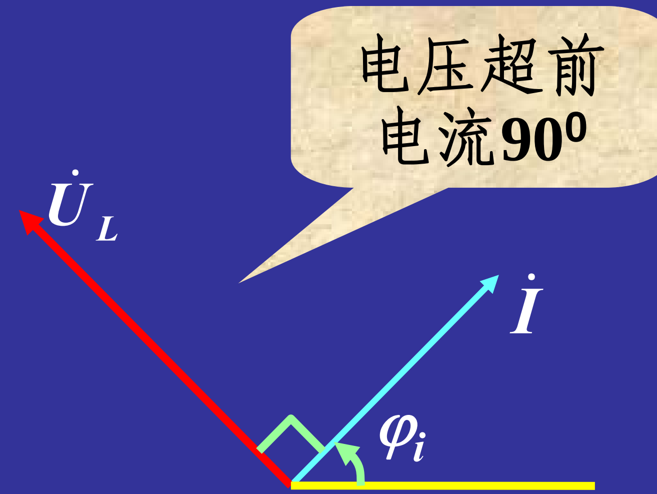
相量表达式:

$$\dot{U}=jX_L\dot{I}=j\omega L\dot{I}\ ,$$

$$\dot{I}=jB_L\dot{U}=j\frac{-1}{\omega L}\dot{U}=\frac{1}{j\omega L}\dot{U}$$

波形图及相量图：





功率：

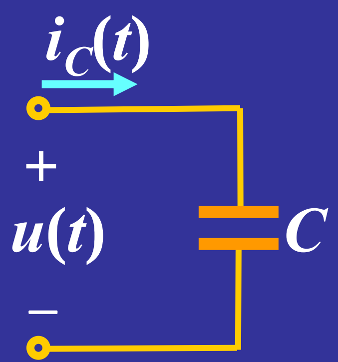
$$p_L = u_L i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i)$$
$$= U_L I \sin 2(\omega t + \varphi_i)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消

3. 电容元件VCR的相量形式

时域形式：

已知 $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)$



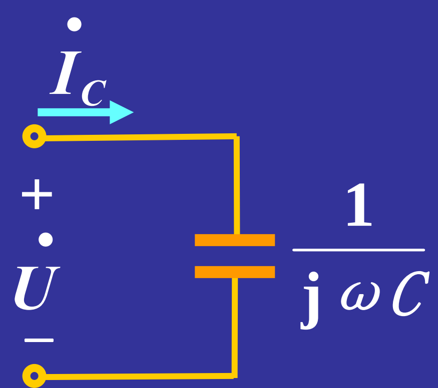
则 $i_C(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\varphi_u)$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2})$$

相量形式：

$$\dot{U}=U\angle\varphi_u$$

$$\dot{I}_C=\omega CU\angle\varphi_u+\pi/2$$



相量关系：

$$\dot{U}=-j\frac{1}{\omega C}\dot{I}=-jX_C\dot{I}$$

相量模型

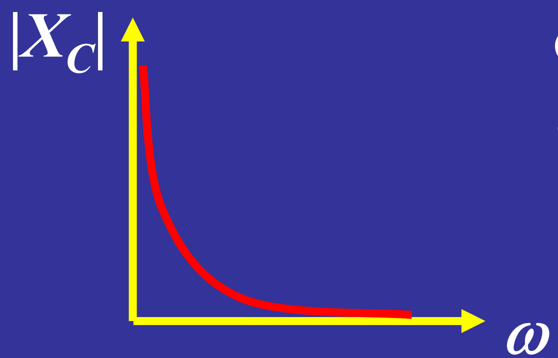
有效值关系：$I_C=\omega CU$

相位关系：$\varphi_i=\varphi_u+90°$

容抗与容纳:

$X_C=1/\omega C$, 称为容抗，单位为 Ω(欧姆)

$B_C=\omega C$, 称为容纳，单位为 S



频率和容抗成反比，

$\omega \to 0$，$|X_C| \to \infty$ 直流开路(隔直)

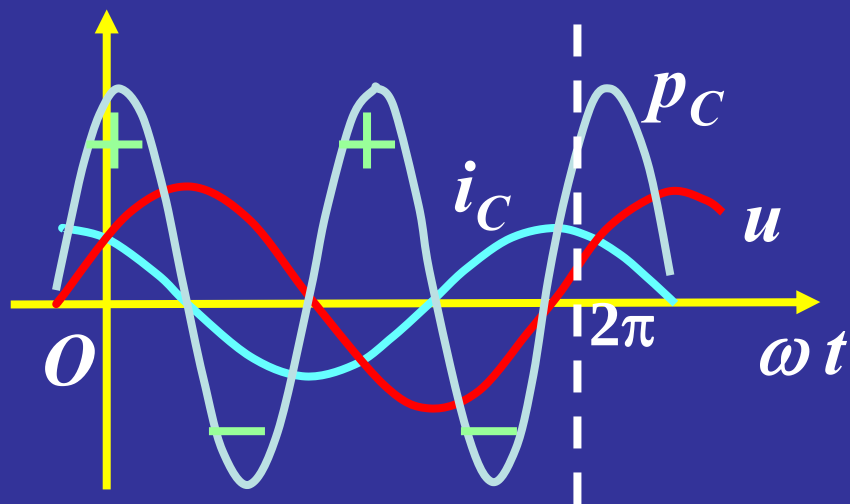
$\omega \to \infty$，$|X_C| \to 0$ 高频短路(旁路作用)

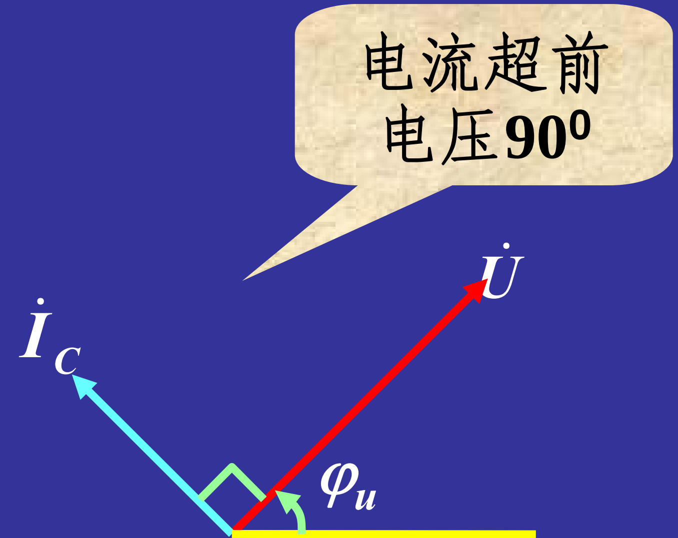
相量表达式:

$$\dot{U}=jX_C\dot{I}=j\frac{-1}{\omega C}\dot{I}$$

$$\dot{I}=jB_C\dot{U}=j\omega C\dot{U}$$

波形图及相量图：





功率：

$$p_C = u i_C$$
$$= 2UI_C \cos(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_u)$$
$$= UI_C \sin 2(\omega t + \varphi_u)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消

4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，**KCL**和**KVL**可用相应的相量形式表示：

$$\sum i(t)=0 \longrightarrow \sum i(t)=\sum \mathrm{Re}\sqrt{2}\left[\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots\right]e^{j\omega t}=0$$

$$\longrightarrow \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \longrightarrow \sum \dot{U}=0$$

上式表明：流入某一节点的所有正弦电流用相量表示时仍满足**KCL**；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足**KVL**。

例1　试判断下列表达式的正、误:

(1) $\boxed{\dot{U}} = j\omega L \dot{I}$

(5) $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \dfrac{1}{j\omega C}$

(2) $i = 5\cos\omega t \cancel{=} 5\angle 0^0$

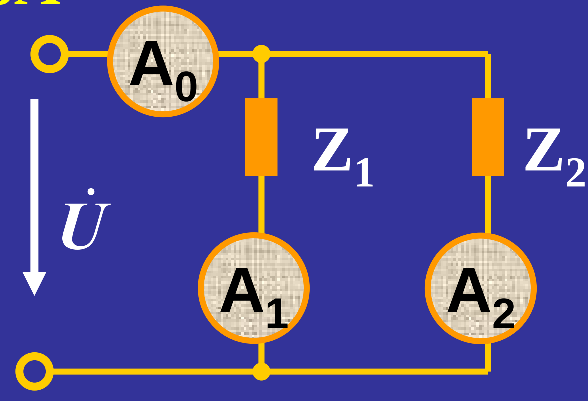
(3) $\dot{I}_\mathrm{m} = j\omega C \dot{U}_m$

(6) $\dot{U}_\mathrm{L} = j\omega L \dot{I}_L$

(4) $X_\mathrm{L} = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_m}{I_m}$

(7) $u = L\dfrac{di}{dt}$

例2 已知电流表读数：$A_1 = 8A$　$A_2 = 6A$



若（1）$Z_1 = R,\quad Z_2 = -jX_C$　$A_0 = ?$

（2）$Z_1 = R,\quad Z_2$为何参数

$A_0 = I_{0\max} = ?$

（3）$Z_1 = jX_L,\quad Z_2$为何参数　$A_0 = I_{0\min} = ?$

（4）$Z_1 = jX_L,\quad Z_2$为何参数　$A_0 = A_1$　$A_2 = ?$

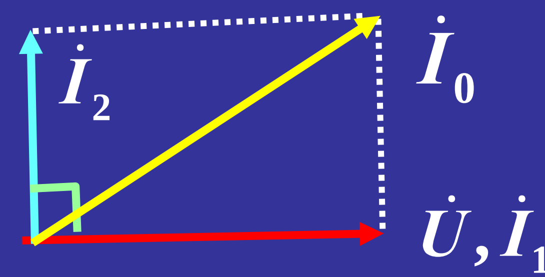
解

（1）$I_0 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10A$

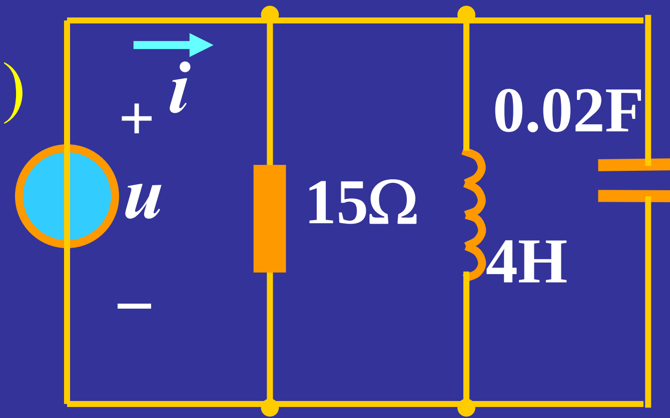
（2）Z_2为电阻，$I_{0\max} = 8 + 6 = 14A$

（3）$Z_2 = -jX_C,\quad I_{0\min} = 8 - 6 = 2A$

（4）$Z_2 = -jX_C,\quad I_0 = I_1 = 8A,\quad I_2 = 16A$



例3 已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)\,\text{V}$，求：$i(t)$

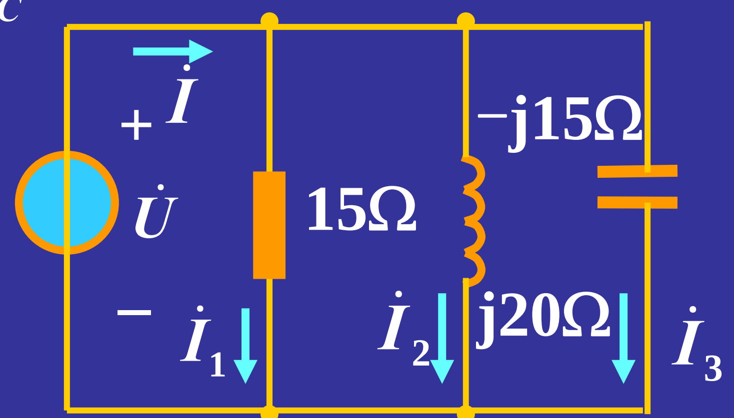


解 $\dot{U}=120\angle 0^0\ \text{V}$

$$jX_L=j4\times 5=j20\Omega$$

$$-jX_C=-j\frac{1}{5\times 0.02}=-j10\Omega$$

相量模型



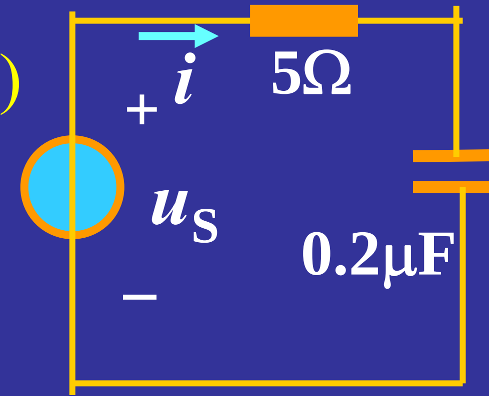
$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=\frac{\dot{U}}{R}+\frac{\dot{U}}{jX_L}+\frac{\dot{U}}{-jX_C}$$

$$=120\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{j20}-\frac{1}{j10}\right)$$

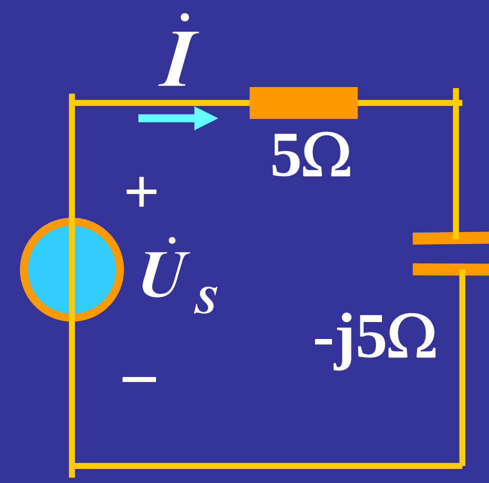
$$=8-j6+j12=8+j6=10\angle 36.9^0\,A$$

$$i(t)=10\sqrt{2}\cos(5t+36.9^0)A$$

例4 已知 $i(t)=5\sqrt{2}\cos(10^6 t+15^0)\,\mathrm{A}$, 求: $u_S(t)$



相量模型

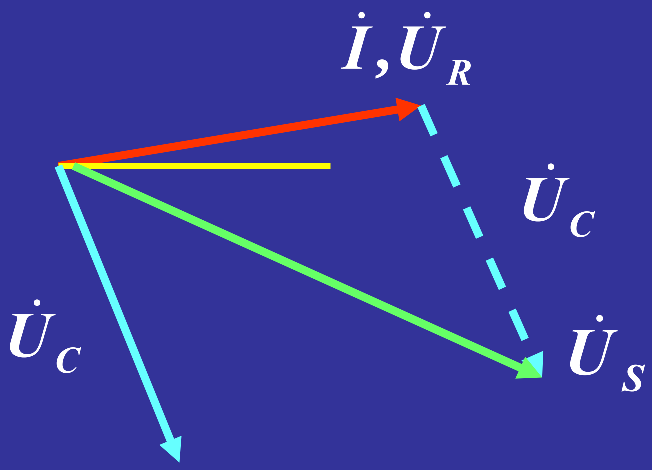


解 $\dot{I}=5\angle 15^0\ \mathrm{A}$

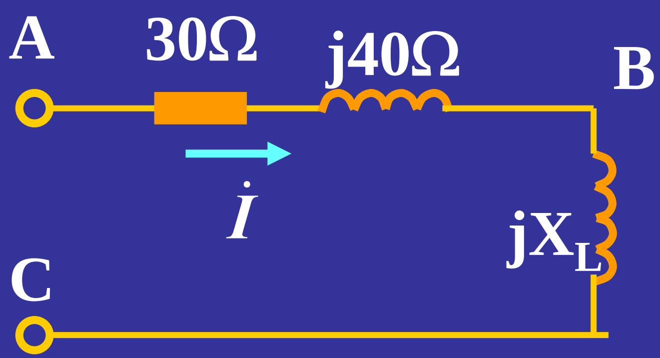
$$-jX_C=-j\frac{1}{10^6\times 0.2\times 10^{-6}}=-j5\Omega$$

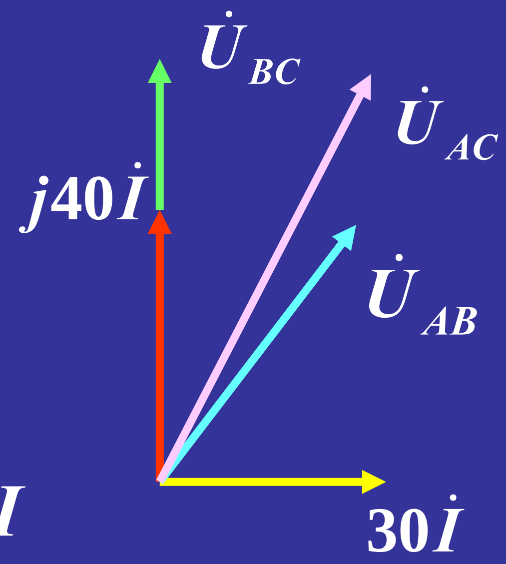
$$\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_C=5\angle 15^0\times(5-j5)$$

$$=5\angle 15^0\times 5\sqrt{2}\angle -45^0=25\sqrt{2}\angle -30^0\,V$$



例5 已知 $U_{AB}=50V$，$U_{AC}=78V$，问：$U_{BC}=?$





解

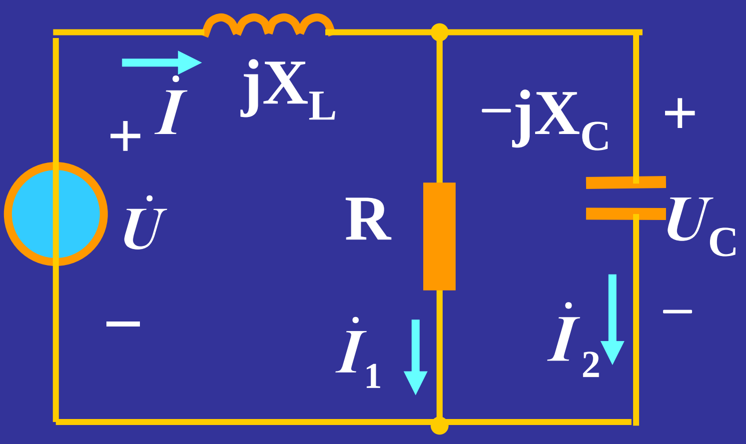
$$U_{AB}=\sqrt{(30I)^2+(40I)^2}=50I$$

$$\longrightarrow\quad I=1A,\ \ U_R=30V,\ \ U_L=40V$$

$$U_{AC}=78=\sqrt{(30)^2+(40+U_{BC})^2}$$

$$\longrightarrow\quad U_{BC}=\sqrt{(78)^2-(30)^2}-40=32V$$

例6 图示电路I_1=I_2=5A，U = 50V，总电压与总电流同相位，求I、R、X_C、X_L。



解 设 $\dot{U}_C = U_C\angle 0^0$

$\dot{I}_1 = 5\angle 0^0\,\text{A},\quad \dot{I}_2 = j5\text{A}$

$\dot{I} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}\angle 45^0\ \text{A}$

$$\dot{U} = 50\angle 45^0 = (5 + j5)\times jX_L + 5R = \frac{50}{\sqrt{2}}(1 + j)$$

令等式两边实部等于实部，虚部等于虚部

$$\begin{cases} 5X_L = 50/\sqrt{2} \Rightarrow X_L = 5\sqrt{2} \\ 5R = \dfrac{50}{\sqrt{2}} + 5\times 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow R = X_C = 10\sqrt{2}\Omega \end{cases}$$

也可以画相量图计算

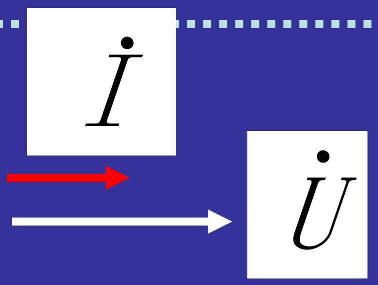
小 结

1. 单一参数电路中的基本关系

电路参数 **R**

基本关系 $u = iR$

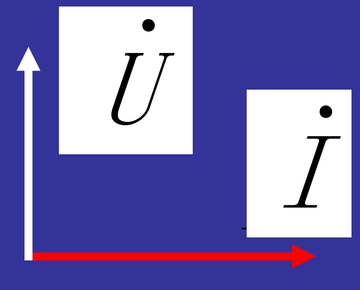
复阻抗 R



电路参数 **L**

基本关系 $u = L\dfrac{di}{dt}$

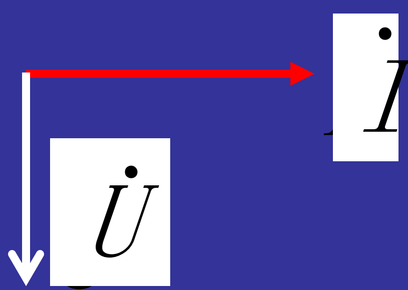
复阻抗 $jX_L = j\omega L$



电路参数 **C**

基本关系 $i = C\dfrac{du}{dt}$

复阻抗 $-jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$



2. 单一参数电路中复数形式的欧姆定律

在正弦交流电路中，若正弦量用相量 $\dot{U}$、$\dot{I}$ 表示，电路参数用复数阻抗（$R \rightarrow R$、$L \rightarrow jX_L$、$C \rightarrow -jX_C$）表示，则复数形式的欧姆定律和直流电路中的形式相似。

复数形式的欧姆定律

$\dot{U}=\dot{I}R$	$\dot{U}=\dot{I}(jX_L)$	$\dot{U}=\dot{I}(-jX_C)$
纯电阻电路	纯电感电路	纯电容电路