洛仑兹变换：S系测得(x,y,z,t)，S'系测得(x',y',z',t')

在S系测量，S'系以速度u沿x方向作匀速直线运动

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

①低速运动时，$u \ll c$，得到伽利略变换。

②洛仑兹变换反映了时间、空间和物质运动之间不可分割的统一关系，它们在测量时互相不能分离。两者构成统一的四维时空。

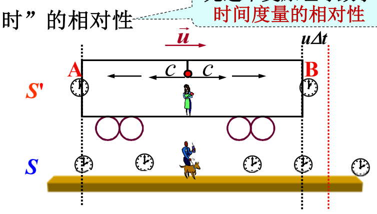
③由于时空坐标均为实数，u不能大于等于c，所以洛伦兹变换给出的结论是：真空中的光速c是物体运动的极限速度。

§ 6.3 狭义相对论的时空观

一、时间的相对论效应

1. "同时"的相对性

光速不变原理导致了时间度量的相对性



在 S'系 测：光信号到达A、B 的事件同时发生。

在 S系测：光信号传播过程中，车又往前开了$u\Delta t$

——先到A，后到B。

$$t_A = \frac{t' + \frac{u x'_A}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad t_B = \frac{t' + \frac{u x'_B}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{u(x'_B - x'_A)}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

相对论中同时具有相对的意义。

$$\Delta t' = 0,\quad \Delta x' > 0 \implies t_A < t_B$$

即在S系测量，A先发生、B后发生。

在一个惯性系中不同地点同时发生的两个事件，在另一个相对做匀速直线运动的参考系测得它们不是同时发生的，除非这两个惯性系相对运动的方向与这两个事件发生地的连线是垂直的。

1-03爱因斯坦火

洛伦兹变换不会改变因果时序

虽然同时具有相对性，但具有因果或时间顺序的两个事件之间的次序是绝对的，不容颠倒。

在S系中有一质点，t_1时刻由x_1出发，于t_2时刻到达x_2处，显然 $t_1 < t_2$，即t_2-t_1>0，

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2-t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(t_2-t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2-t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(1-\frac{u\cdot v}{c^2}\right) > 0 \implies t'_1 < t'_2$$

这说明不会因为相对论效应，而改变客观事件的因果规律。

如果两个事件无因果关系，则两事件的时序完全可能颠倒。

例1：相对某惯性系S发生在同一地点的A、B两事件的次序是A先于B，问：对其他任何一个相对S运动的惯性系，A、B事件的地点是否相同？次序是否会颠倒？

解：设另一惯性系S'相对于S系沿x正方向运动

S: A(x_A, t_A), B(x_B, t_B) $\quad t_A < t_B$, $\ x_A = x_B$

S': A(x'_A, t'_A), B(x'_B, t'_B)

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$x'_A - x'_B = \frac{\overbrace{(x_A - x_B)}^{=0} - u\overbrace{(t_A - t_B)}^{<0}}{\sqrt{1-\beta^2}} > 0$$

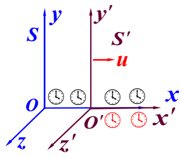
地点一定不同

$$t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$t'_A - t'_B = \frac{\overbrace{(t_A - t_B)}^{<0} - \frac{u}{c^2}\overbrace{(x_A - x_B)}^{=0}}{\sqrt{1-\beta^2}} < 0$$

次序一定不会颠倒

2.“时间间隔”是相对的
时间膨胀



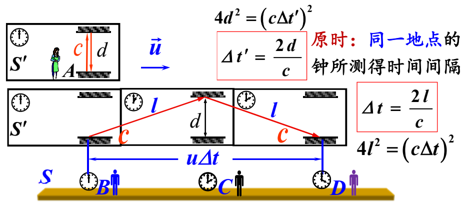
相对论测量规则

① 所有的钟是完全相同的，并且校对好的。

② 同一参照系中的钟是同步的。
（由于同时的相对性，这些同步的时钟在其他参考系看来并不一定同步）

③ 报时用的钟是相对事发地点的钟。

④ 通常当原点O、O'对齐时刻，$t_O = t'_{O'} = 0$



$$4d^2 = (c\Delta t')^2$$

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$ 原时：同一地点的钟所测得时间间隔

$$\Delta t = \frac{2l}{c}$$

$$4l^2 = (c\Delta t)^2$$

$$(u\Delta t)^2 = 4(l^2 - d^2) = (c\Delta t)^2 - (c\Delta t')^2$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$ τ 原时(固有时)最短！

原时—用一个时钟测出的时间（静止在此参考系）

由不同地点的两个钟测量—两地时（非原时Δt）

S'系相对S系以速度u沿x方向作匀速直线运动

事发地在S坐标系中

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x \times u / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta x = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta t = \tau}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \geq \tau \neq 0}$$

静止时钟的时间最短；或者运动的时间变长。

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0$$

事发地在S′坐标系中

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \Delta x' \times u / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta x' = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta t' = \tau}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \geq \tau \neq 0}$$

静止时钟的时间最短；或者运动的时间变长。

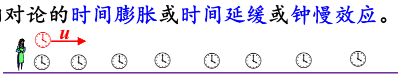
$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0$$

相对论效应 $\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ $\begin{cases}\text{如原时0.9秒（钟慢）} \\ \text{两地时1秒（钟快）}\end{cases}$

①运动会使时间膨胀，也称动钟变慢效应。

事件在S'系静止（原时） 在S系事件运动（两地时）

在S系中的观察者把相对自己运动的钟和自己不同位置但同步的钟对比，发现自己参考系的钟所测的时间要长，即事件变化过程的时间间隔变大了，称相对论的时间膨胀或时间延缓或钟慢效应。



$\begin{cases}\text{时间延缓是一种相对效应。事件在}S\text{系中静止，}\Delta t\text{原时。} \\ \text{与钟一起运动的观测者是感受不到钟变慢的效应的。}\end{cases}$

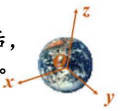
孪生子效应*

星际旅行—最近的星系（小麦哲伦云）要15万光年。

$\boxed{\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$ 坐光子火箭  τ可以任意短

“天上方一日， 地上已七年”
运动不是相对的吗？
孪生子佯谬？

实验： 1971年，铯原子钟放在飞机上沿赤道向东和向西绕地球一周，回到原处后，分别比静止在地面的钟慢59ns和快273ns。



与广义相对论的理论计算符合

例1 π^+介子静止时平均寿命$\bar{\tau} = 2.6 \times 10^{-8}$s 以后衰变为$\mu^+$子与中微子。现用高能加速器把$\pi^+$介子加速到 $v = 0.75c$ 。求：π^+介子平均一生最长行程。

解：按经典理论 $\bar{l} = v\bar{\tau} = 5.85$ m

实验室测得 $\bar{l}' = 8.5 \pm 0.6$ m

相对论考虑时间膨胀 $\begin{cases}\bar{\tau} \text{ 原时——最短} \\ \text{实验室测得运动的}\pi^+\text{介子平均寿命} \\ \bar{\tau}' = \dfrac{\bar{\tau}}{\sqrt{1-0.75^2}} = 1.51\bar{\tau}\end{cases}$

$$\bar{l}' = v\bar{\tau}' = 8.83 \text{ m}$$

在一个惯性系中观测到运动惯性系中的任何过程（包括物理、化学和生命过程）的节奏变慢。

例2 相互作匀速直线运动的两惯性系S与S′,固定于S′系的某一点处发生的一个事件，在S′系中测得其时间间隔为$\Delta t'$，在S系中测得此事件经历时间为Δt。问：①测$\Delta t'$至少用几个时钟？

②测Δt至少用几个时钟？

③Δt与$\Delta t'$哪个是固有时？

解：①测$\Delta t'$至少用一个时钟。

②测Δt至少用两个时钟。

③$\Delta t'$是固有时。

例3 火车以108km/h的速度匀速行驶。地上一闪光灯闪光10s，问从车上观测闪光延续多长时间。

解：设地面S系，车S'系

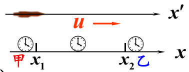
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u = 30\ \mathrm{ms^{-1}},\ \beta = \frac{u}{c} = 10^{-7}$$

$$= 10 + 5\times 10^{-14}\,\mathrm{s}$$ 太小，不易察觉！

u	τ（s）	Δt（s）
0.1c	1	1.01
0.99c	1	4
0.998c	1	50

例4 在地面参考系，甲、乙两地直线相距1000km，某一时刻从两地同时各开出一列火车。飞船沿两地连线从甲到乙匀速（u=9 km/s)飞行， 以飞船为参考系，求：①测得的两列火车开出的间隔；②哪一列先开？

解:①设地面S系，飞船S'系



$$x_2 - x_1 = 10^6\,\mathrm{m} \qquad t_2 = t_1$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - u/c^2\,(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -10^{-7}\,\mathrm{s} \qquad t_2' < t_1'$$

两车开出的时间间隔：10^{-7}s 乙地的车先出发

沿两个惯性系相对运动方向发生的两个事件，在其中一个惯性系表现为同时的，在另一惯性系中观察，则总是在表现为同时的惯性系中运动后方的那一事件先发生，(如果用时钟来说)即其指针超前或钟走的快。

例5 在惯性系S中，有两个事件发生于同一地点。第二事件比第一事件晚发生Δt=3s，而在另一个惯性系S'中观测，第二事件比第一事件晚发生$\Delta t'$=4s。求：在S′系中发生两事件的地点之间距离是多少？

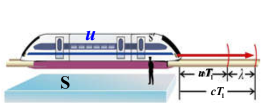
解：$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad 1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2$$

$$u = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}\cdot c = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot c = \frac{\sqrt{7}}{4}c$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -\frac{u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -u\Delta t'$$

$$|\Delta x'| = u\Delta t' = \frac{\sqrt{7}}{4}c\times 4 \approx 7.9\times 10^8\ \mathrm{m}$$ 地点一定不同

例6 电磁波（光）的多普勒效应。



证明：

①信号传播的速度与光源、接收器的运动状态无关，恒为光速 c 。设光源或电磁波源的运动速度为 u 。

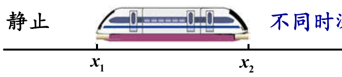
②设一光信号的固有周期为T_0，时间膨胀使接收信号周期变大： $$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

③光源的运动改变了光的波长，由此引发接收端的多普勒效应： $$\lambda = cT_1 - uT_1$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-u)T_1} = \frac{\sqrt{1-(u/c)^2}}{(1-u/c)\,T_0} \qquad \nu = \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}\,\nu_0$$

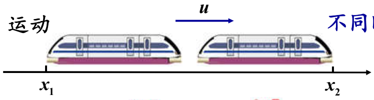
长度的测量：

静止



不同时测？ 无所谓

运动

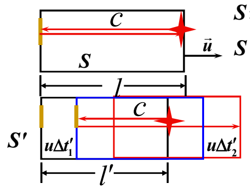


不同时测？✗

停下来测？✗ 追着测？✗ 同时测

光速不变原理 ⇨ 同时的相对性 ⇨ 长度的相对性

二、长度的相对论效应～长度收缩



S：往返历时 $\Delta t = \dfrac{2l}{c}$

S'：往$\Delta t'_1$ 返$\Delta t'_2$

$$\Delta t' = \Delta t_1' + \Delta t_2'$$

$$c\Delta t_1' + u\Delta t_1' = l' \Rightarrow \Delta t_1' = \frac{l'}{c+u}$$

$$c\Delta t_2' - u\Delta t_2' = l' \Rightarrow \Delta t_2' = \frac{l'}{c-u}$$

$$\Delta t' = \frac{l'}{c+u} + \frac{l'}{c-u} = \frac{2l'}{c(1-\beta^2)}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

动长

$$\boxed{l' = l\sqrt{1-\beta^2}}$$

静长最长！

S'系相对S系以速度 u 沿x方向作匀速直线运动

物体放在S'坐标系中

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = 0,\ \Delta x' = L_0 \to \Delta x = L}$$

$$\boxed{L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \ge L > 0}$$

静止尺子的长度最长；
或者运动的尺子变短。

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - L\times u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \ne 0$$

物体放在S坐标系中

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + u(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t' = 0,\ \Delta x = L_0 \to \Delta x' = L}$$

$$\boxed{L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \ge L > 0}$$

静止尺子的长度最长；
或者运动的尺子变短。

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + L\times u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \ne 0$$

例7 固有长度为五米的飞船以 $u = 9\times10^3\,\mathrm{ms^{-1}}$ 的速率相对地面匀速飞行，地面上测量长度是多少？

解： $u = 9\times10^3\,\mathrm{m/s}$，$L' = L_0 = 5\mathrm{m}$，$L = ?$

$$L = L'\sqrt{1-u^2/c^2} = 5\sqrt{1-[(9\times10^3)/3\times10^8]^2}$$

$$\approx 5[1 - \frac{1}{2}\times(3\times10^{-5})^2] = 4.999999998\mathrm{m}$$

例8 讨论长度收缩对几何图形的影响。