第三章 逻辑代数基础

第三章 逻辑代数基础

逻辑代数概述

- 逻辑代数=布尔代数=开关代数
- 主要内容
  基本逻辑关系：与、或、非及其组合
  逻辑函数的表示方法：函数式 真值表 卡诺图
  逻辑图
  逻辑函数的化简方法：代数法和卡诺图法

逻辑代数－绪言

逻辑代数是按一定的逻辑关系进行运算的代数，是分析和设计数字电路的数学工具。在逻辑代数，只有 0 和 1 两种逻辑值，有与、或、非三种基本逻辑运算，还有与或、与非、与或非、异或几种导出逻辑运算。

逻辑是指事物的因果关系，或者说条件和结果的关系，这些因果关系可以用逻辑运算来表示，也就是用逻辑代数来描述。

事物往往存在两种对立的状态，在逻辑代数中可以抽象地表示为 0 和 1 ，称为逻辑0状态和逻辑1状态。

逻辑代数中的变量称为逻辑变量，用大写字母表示。逻辑变量的取值只有两种，即逻辑0和逻辑1，0 和 1 称为逻辑常量，并不表示数量的大小，而是表示两种对立的逻辑状态。

3.1 逻辑代数的运算法则

3.1.1 逻辑代数的基本定律

在数字电路中，我们要研究的是电路的输入输出之间的逻辑关系，所以数字电路又称逻辑电路，相应的研究工具是逻辑代数（布尔代数）。

在逻辑代数中，逻辑函数的变量只能取两个值（二值变量），即0和1，中间值没有意义，这里的0和1只表示两个对立的逻辑状态，如电位的低高（0表示低电位，1表示高电位）、开关的开合等。

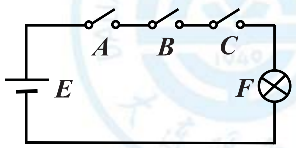
基本逻辑

- 最基本的逻辑关系只有三种，即：*与 或 非*
- 比如要办成一件事的条件：每个人都完成才算完成---与
- 任一人完成即算完成-------或
- 完成的反面是没完成------非

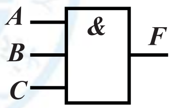
基本逻辑关系：

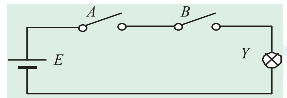
（1） “与”逻辑

A、B、C条件都具备时，事件F才发生。

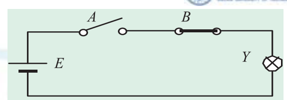


逻辑符号

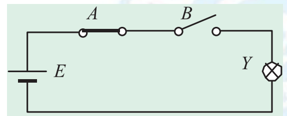




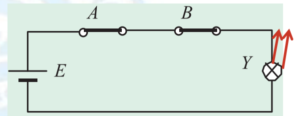
A、B都断开，灯不亮。



A断开、B接通，灯不亮。



A接通、B断开，灯不亮。



A、B都接通，灯亮。

两个开关必须同时接通，灯才亮。逻辑表达式为：

$$Y = A\,B$$

功能表

将开关接通记作1，断开记作0；灯亮记作1，灯灭记作0。可以作出如下表格来描述与逻辑关系：

开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	灭
闭合	断开	灭
闭合	闭合	亮

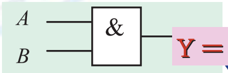
真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这种把所有可能的条件组合及其对应结果一一列出来的表格叫做真值表。

逻辑符号

实现与逻辑的电路称为与门。与门的逻辑符号：



Y＝A B

逻辑式

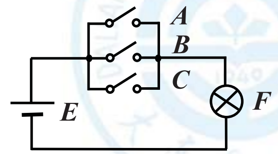
$F=A\cdot B\cdot C$ → 逻辑乘法 逻辑与

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

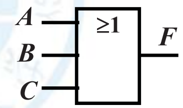
真值表

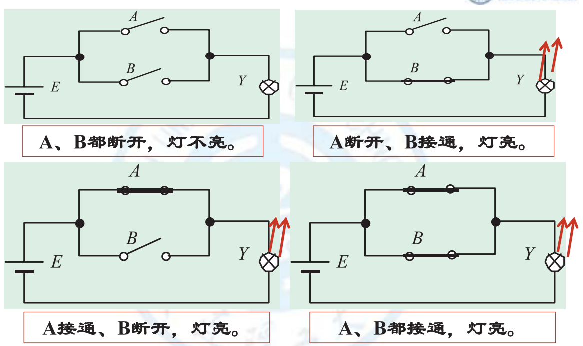
（2）"或"逻辑

A、B、C只有一个条件具备时，事件F就发生。



逻辑符号





两个开关只要有一个接通，灯就会亮。逻辑表达式为：

Y＝A＋B

功能表

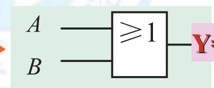
开关 A	开关 B	灯 Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑符号

实现或逻辑的电路称为或门。或门的逻辑符号：



Y=A+B

逻辑式

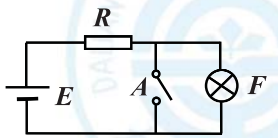
$F=A+B+C$ → 逻辑加法 逻辑或

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

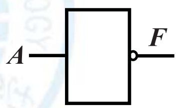
真值表

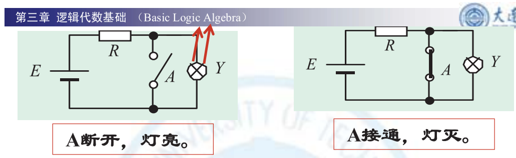
（3）"非"逻辑

A条件具备时 ，事件F不发生；A不具备时，事件F发生。



逻辑符号





功能表

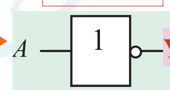
开关 A	灯 Y
断开	亮
闭合	灭

真值表

A	Y
0	1
1	0

逻辑符号

实现非逻辑的电路称为非门。非门的逻辑符号：



$Y=\overline{A}$

逻辑式

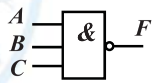
$F=\overline{A}$ → 逻辑非 逻辑反

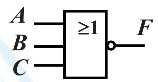
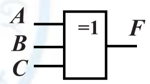
A	F
0	1
1	0

真值表

（4）几种常用的逻辑关系

“与”、“或”、“非”是三种基本的逻辑关系，任何其它的逻辑关系都可以以它们为基础表示。

与非：条件A、B、C都具备，则F不发生。	$F=\overline{A\bullet B\bullet C}$	

或非：条件A、B、C任一具备，则F不发生。	$F=\overline{A+B+C}$	
异或：条件A、B有一个具备，另一个不具备则F发生。	$F=A\bar{B}+\bar{A}B$ $=A\oplus B$	

组合起来的逻辑——简单记忆

与逻辑：逻辑乘　P=A•B　“有0则0”
或逻辑：逻辑加　P=A+B　“有1则1”
非逻辑：逻辑非　P=/A　“求反”

与非逻辑　P=A • B　“全高出低、一低出高”

或非逻辑　P=A + B　“全低出高、一高出低”

组合起来的逻辑——简单记忆

与或非逻辑 P= A•B ＋C•D

异或逻辑　P=A⊕B=AB＋AB　“不同为1”

同或逻辑　P=A　B=AB＋AB　“相同为1”

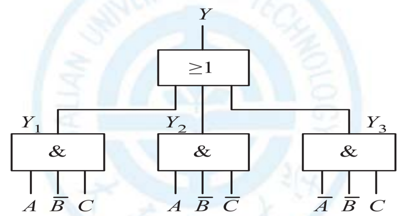
总结　逻辑函数的表达式

一个逻辑函数的表达式可以有与或表达式、或与表达式、与非-与非表达式、或非-或非表达式、与或非表达式5种表示形式。

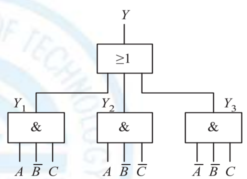
（1）与或表达式：$Y=\bar{A}B+AC$
（2）或与表达式：$Y=(A+B)(\bar{A}+C)$
（3）与非-与非表达式：$Y=\overline{\overline{\bar{A}B}\cdot\overline{AC}}$
（4）或非-或非表达式：$Y=\overline{\overline{A+B}+\overline{\bar{A}+C}}$
（5）与或非表达式：$Y=\overline{\bar{A}\bar{B}+A\bar{C}}$

一种形式的函数表达式相应于一种逻辑电路。尽管一个逻辑函数表达式的各种表示形式不同，但逻辑功能是相同的。

例题3.1已知函数Y的逻辑图如图所示，写出函数Y的逻辑表达式。



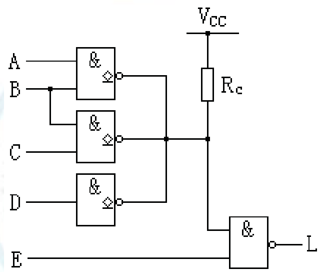
解：据逻辑图逐级写出输出端函数表达式如下：
$Y_1=A\bar{B}C$
$Y_2=A\bar{B}\bar{C}$
$Y_3=\bar{A}\bar{B}C$



最后得到函数Y的表达式为

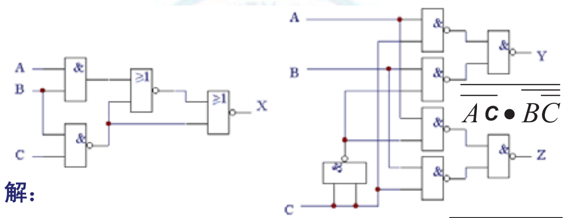
$$Y=A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$$

例题3.2 写出下图的逻辑表达式



解：$L=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{D}\cdot E}=AB+BC+D+\bar{E}$

例题3.3 写出下图的逻辑表达式



解：

$\overline{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BC}}$　$\overline{\overline{AC\bullet BC}}$　$\overline{\overline{AC}\bullet\overline{BC}}$

从三种基本的逻辑关系出发，我们可以得到以下逻辑运算结果：

0• 0=0 • 1=1 • 0=0　　1 • 1=1

0+0=0

0+1=1+0=1+1=1

$\overline{1} = 0$

$\overline{0} = 1$

基本规律

$A+0=A$　　$A+1=1$

$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$　　$A \cdot 1 = A$

$A+\overline{A}=1$　　$A+A=A$

$A \cdot \overline{A} = 0$　　$A \cdot A = A$

$\overline{\overline{A}} = A$

3.1.2 逻辑代数的基本规则

交换　$A+B=B+A$

$A \bullet B = B \bullet A$

结合　$A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B$

$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$

分配　$A(B+C) = A \bullet B + A \bullet C$

$A+B \bullet C = (A+B)(A+C)$

不适合一般的逻辑函数

例题3.4 化简下式

解：

$Y_1 = ABC + \overline{A}BC + B\overline{C} =$

$Y_2 = ABC + A\overline{B} + A\overline{C}$

吸收法

A. 原始变量的吸收

$A+AB=A$

证明：$A+AB=A(1+B)=A \bullet 1=A$

化简：

$AB + CD + AB\overline{D}(E+F) = AB + CD$

被吸收

证明：A+BA=(A+B)(A+C)

证明：

$(A+B)(A+C)=\cancel{AA}+AB+AC+BC$

$=A+AB+AC+BC$

$=A(\cancel{1+B+C})+BC$

$=A+BC$

Distribute A(B+C)=AB+AC
AA=A
Distribute A(B+C)=AB+AC
0-1 A+1=1

B. 反变量的吸收

$A + \overline{A}B = A + B$

证明　$A + \overline{A}B = A + AB + \overline{A}B$

$= A + B(A + \overline{A}) = A + B$

举例　$A + \overline{A}BC + DC = A + BC + DC$

被吸收

例题3.5 化简下式

解：

$Y_2 = A + \overline{\overline{B} + \overline{CD}} + \overline{\overline{AD}\,\overline{B}}$

$Y = AB + \overline{A}C + \overline{B}C$

$Y_1 = \overline{A}B + \overline{A}BCD(E+F)$

例题3.6 证明下式

反变量吸收的证明$A + \overline{A}B = A + B$ True

$$\begin{aligned} A + \overline{A}B &= A(B+\overline{B}) + \overline{A}B \\ &= AB + A\overline{B} + \overline{A}B \\ &= AB + AB + A\overline{B} + \overline{A}B \\ &= A(B+\overline{B}) + B(A+\overline{A}) \\ &= A + B \end{aligned}$$

C. 混合变量的吸收

$$AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$$

证明

$$AB+\bar{A}C+BC$$
$$=AB+\bar{A}C+(A+\bar{A})BC$$
$$=AB+\bar{A}C+ABC+\bar{A}BC$$
$$=AB+\bar{A}C$$

1

吸收

举例

$$AB+\bar{A}C+BCD$$
$$=AB+\bar{A}C+BC+BCD$$
$$=AB+\bar{A}C+BC$$
$$=AB+\bar{A}C$$

吸收

例题3.7 化简下式

$$Y=A\bar{B}+C+\bar{A}\bar{C}D+B\bar{C}D$$

解：

D. 反演定律

$$\overline{A\bullet B}=\bar{A}+\bar{B}$$
$$\overline{A+B}=\bar{A}\bullet\bar{B}$$

利用真值表证明

A	B	AB	$\overline{A\bullet B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

几种规则小节

反演规则 $\overline{A\bullet B}=\bar{A}+\bar{B}$ $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$

取反 $\bar{\bar{A}}=A$

吸收 $A+A\bullet B=A$ $A\bullet(A+B)=A$

$A+\bar{A}\bullet B=A+B$ $A\bullet(\bar{A}+B)=A\bullet B$

$AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$

$(A+B)(\bar{A}+C)(B+C)=(A+B)(\bar{A}+C)$

例题3.8 求反

$$Y=A\bar{B}+C\bar{D}E \Rightarrow \bar{Y}=(\bar{A}+B)(\bar{C}+D+\bar{E})$$

$$Y=A+\overline{B+\bar{C}+\overline{D+\bar{E}}} \Rightarrow \bar{Y}=\bar{A}\cdot\overline{\bar{B}\cdot C\cdot\overline{\bar{D}\cdot E}}$$

例题3.9 化简下图逻辑

解： $Y=(A+B+C)(A+B+\bar{C})$

$$=\overline{\overline{(A+B+C)(A+B+\bar{C})}}$$
$$=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C}$$
$$=\overline{\bar{A}\bar{B}}$$
$$=A+B$$

$$AB+A\bar{B}=A$$

对偶原则

$$Y=A\bar{B}+C\bar{D}E \Rightarrow Y'=(A+\bar{B})(C+\bar{D}+E)$$

$$Y=A+\overline{B+\bar{C}+\overline{D+\bar{E}}} \Rightarrow Y'=A\cdot\overline{B\cdot\bar{C}\cdot\overline{D\cdot\bar{E}}}$$

例题3.10 求下式的对偶和反函数

$$Y=AB(C+D)+FG$$

对偶 $Y'=(A+B+CD)(F+G)$

求反 $\bar{Y}=(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}\bar{D})(\bar{F}+\bar{G})$

例题3.11 分别求下式的对偶式和反函数

$$Y=D+\overline{D+\overline{C+\bar{B}A}}$$

解：

对偶 $Y'=D\overline{D\overline{C(\bar{B}+A)}}$

求反 $\bar{Y}=\bar{D}\overline{\bar{D}\overline{\bar{C}(B+\bar{A})}}$

3.2 逻辑函数的标准形式

A 真值表：将输入、输出的所有可能状态一一对应地列出。

设A、B、C为输入变量，F为输出变量。

A	B	C	F
0	1	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

B 逻辑表达式

（1）与或表达式：$Y=\bar{A}B+AC$

（2）或与表达式：$Y=(A+B)(\bar{A}+C)$

（3）与非-与非表达式：$Y=\overline{\overline{\bar{A}B}\cdot\overline{AC}}$

（4）或非-或非表达式：$Y=\overline{\overline{A+B}+\overline{\bar{A}+C}}$

（5）与或非表达式：$Y=\overline{\bar{A}\bar{B}+A\bar{C}}$

把逻辑函数的输入、输出关系写成与、或、非等逻辑运算的组合式，即逻辑代数式，又称为逻辑函数式，通常采用“与或”的形式。

比如：$F=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+ABC$

若表达式的乘积项中包含了所有输入变量的原变量或反变量，则这一项称为最小项，上式中每一项都是最小项。

若两个最小项中只有一个变量以原、反状态相区别，则称它们为逻辑相邻。

$F=\boxed{A\bar{B}\bar{C}}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}+ABC$

逻辑相邻

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}=\bar{B}\bar{C}$

逻辑相邻的项可以合并，消去一个因子

3.2.1 逻辑函数的最小项及其性质

（1）最小项：如果一个函数的某个乘积项包含了函数的全部变量，其中每个变量都以原变量或反变量的形式出现，且仅出现一次，则这个乘积项称为该函数的一个标准积项，通常称为最小项。

3个变量A、B、C可组成8个最小项：

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}\bar{C}$、$A\bar{B}C$、$AB\bar{C}$、ABC

（2）最小项的表示方法：通常用符号mi来表示最小项。下标i的确定：把最小项中的原变量记为1，反变量记为0，当变量顺序确定后，可以按顺序排列成一个二进制数，则与这个二进制数相对应的十进制数，就是这个最小项的下标i。

3个变量A、B、C的8个最小项可以分别表示为：

$m_0=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$m_1=\bar{A}\bar{B}C$、$m_2=\bar{A}B\bar{C}$、$m_3=\bar{A}BC$

$m_4=A\bar{B}\bar{C}$、$m_5=A\bar{B}C$、$m_6=AB\bar{C}$、$m_7=ABC$

最小项的定义

最小项是标准乘积项，设A，B，C，D…是 n 个逻辑变量，P是n个变量的一个乘积，如果在P 中，每个变量都以原变量或者反变量的形式出现一次，且仅出现一次，则称P 为这n个逻辑变量的一个最小项。N 个变量的最小项有 2^N 个。

例如：对A， B， C三变量而言，其最小项有：

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}\bar{B}C$，$\bar{A}B\bar{C}$，$\bar{A}BC$，$A\bar{B}\bar{C}$，$A\bar{B}C$，$AB\bar{C}$，ABC

最小项的编号；把使最小项的值为 1 的一组变量的取值作为编号，对上而言，即

m_0，m_1，m_2，m_3，m_4，m_5，m_6，m_7

三变量最小项列表如下：

三变量函数的最小项及编号

最小项	变量取值 $A\ B\ C$	编号
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0 0 0	m_0
$\bar{A}\bar{B}C$	0 0 1	m_1
$\bar{A}B\bar{C}$	0 1 0	m_2
$\bar{A}BC$	0 1 1	m_3
$A\bar{B}\bar{C}$	1 0 0	m_4
$A\bar{B}C$	1 0 1	m_5
$AB\bar{C}$	1 1 0	m_6
ABC	1 1 1	m_7

最小项性质

（1）、每一个最小项与变量的一组取值相对应。只有该组取值才能使其值为1，其余组下该最小项的值均为 0 。

（2）、变量相同的任意两个最小项的乘积为 0 。

（3）、全体最小项的和为 1 。

标准与或表达式

逻辑函数表达式为一组最小项之和的形式。

标准与或表达式是表明 逻辑变量取何值时，该逻辑函数等于 1 。

求逻辑函数标准与或式的方法：

从真值表求标准与或表达式：

(a)、找出使逻辑函数 F 为 1 的变量组合；

(b)、写出使 F 为 1 的变量取值对应的最小项；

(c)、将这些最小项相或。

例题3.12 逻辑函数真值表如图，求其标准与或式。

解：

$$F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$$
$$=m_0+m_2+m_6$$
$$=\Sigma_m(0,2,6)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

从一般与或表达式求标准与或表达式：

$$F=AB+BC+AC$$
$$=AB(C+\overline{C})+(A+\overline{A})BC+A(B+\overline{B})C$$
$$=ABC+AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C$$
$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$$
$$=m_7+m_6+m_3+m_5$$
$$=\Sigma_m(3,5,6,7)$$

任何逻辑函数都可以化成一个唯一的标准与或式(因为真值表唯一)。

逻辑函数的最小项表达式

任何一个逻辑函数都可以表示成唯一的一组最小项之和，称为标准与或表达式，也称为最小项表达式

对于不是最小项表达式的与或表达式，可利用公式$A+\overline{A}=1$和$A(B+C)=AB+BC$来配项展开成最小项表达式。

$$Y=\overline{A}+BC$$

解：

如果列出了函数的真值表，则只要将函数值为1的那些最小项相加，便是函数的最小项表达式。

A	B	C	Y	最小项
0	0	0	0	m_0
0	0	1	1	m_1
0	1	0	1	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	m_6
1	1	1	0	m_7

$m_1=\overline{A}\,\overline{B}C$

$m_1=\overline{A}B\overline{C}$

$m_3=A\overline{B}\,\overline{C}$

$m_5=A\overline{B}C$

$$Y=m_1+m_2+m_3+m_5=\sum m(1,2,3,5)$$
$$=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$$

将真值表中函数值为0的那些最小项相加，便可得到反函数的最小项表达式。

例题3.13 请指出下式的最小项

Ex. **Function** $F(A,B,C)=\overline{A+\overline{B}}+\overline{A}\,\overline{B}C$ **Min.Pmt.**

解：

$$F(A,B,C)=\overline{A+\overline{B}}+\overline{A}\,\overline{B}\,C=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}C$$
$$=\overline{A}B(C+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$
$$=m_3+m_2+m_1=\sum m(1、2、3)$$

3.2.2 函数的最大项

同样地，对或-与式来说，其标准形式是 最大项之积。

如：F（A，B，C）=（A+B+C）（A+B+C）（A+B+C）

最大项意指取值为1的机会最大。

如果一个逻辑函数有 n 个变量，则它有 2^n 个最小项，也有 2^n 个最大项。

例如：

F（A，B，C） 有3个变量，有8个最小项，8个最大项

每个最大项、最小项由原反变量组合而成，不好写，也不好记，我们为它们编一个号码，最小项用小写m，最大项用大写M，再加一个下标，下标的取值规律是：变量按顺序排好，原变量为1，反变量为0，取其2进制值

最大项的定义

最大项是标准或项，设A，B，C，D…是 n 个逻辑变量，M是n个变量的和，如果在M 中，每个变量都以原变量或者反变量的形式出现一次，且仅出现一次，则称M 为这n个逻辑变量的一个最大项。N 个变量的最大项有 2^N 个。

例如：对A，B，C三变量而言，其最大项有：

$A+B+C,\ A+B+\overline{C},\ A+\overline{B}+C,\ A+\overline{B}+\overline{C},\ \overline{A}+B+C,\ \overline{A}+B+\overline{C},\ \overline{A}+\overline{B}+C,\ \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

最大项的编号：把使最大项的值为 0 的一组变量的取值作为编号，对上而言，即

$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ M_6,\ M_7$

三变量最大项列表如下：

A，B，C	最大项(值为0的项)	编号
0 0 0	$A+B+C$	M_0
0 0 1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0 1 0	$A+\overline{B}+C$	M_2
0 1 1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1 0 0	$\overline{A}+B+C$	M_4
1 0 1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1 1 0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1 1 1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

三变量最大项真值表如下：

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
ABC	$A+B+C$	$A+B+\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+B+C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
000	0	1	1	1	1	1	1	1
001	1	0	1	1	1	1	1	1
010	1	1	0	1	1	1	1	1
011	1	1	1	0	1	1	1	1
100	1	1	1	1	0	1	1	1
101	1	1	1	1	1	0	1	1
110	1	1	1	1	1	1	0	1
111	1	1	1	1	1	1	1	0

最大项的性质

（1）、每一个最大项与变量的一组取值相对应。只有该组取值才能使其值为0，其余组下该最大项的值均为 1 。

例如：$A+\overline{B}+C$ 　对应于 0、1、0 ，此时 M_2 =0 。

（2）、变量相同的任意两个最大项之和为 1 。

（3）、全体最大项的乘积为 0 。

标准或与表达式

标准或与表达式：每个或项都是最大项的或与表达式

求标准或与表达式的方法

从真值表：

（a）、找出真值表中 F=0 的行；

（b）、对 F=0 的行，写出对应的最大项；

（c）、所有最大项相与。

例题3.14 求如图对应的标准或与式

$$F(A,B,C)=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$=\prod_M(1,3,4,5,7)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

（2）、从一般或与式：利用 $(A+X)(A+\overline{X})=A$

例：求 $F(A,B,C)=(A+B)(A+C)$ 对应的标准或与式

$$F(A,B,C)=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C)(A+\overline{B}+C)$$

$$=\prod_M(0,1,2)$$

最大项与最小项之间的关系

1、最大项与最小项互补：$\overline{m_i}=M_i$ ，$\overline{M_i}=m_i$

如：$M_4=\overline{A}+B+C$ ，$m_4=A\overline{B}\overline{C}$，$\overline{m_4}=M_4$

2、不在最大项中出现的编号一定出现在最小项中。

对上两例而言，$F=\sum_m(0,2,6)$，$F=\prod_M(1,3,4,5,7)$

例题3.15 求出下式的最大、最小项

Y(A,B,C)=AB+BC

解：

$$Y(A,B,C)=AB+BC=AB(C+\overline{C})+BC(A+\overline{A})=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC$$

$$=\sum m(7,6,3)$$

$$Y(A,B,C)=\sum m(7,6,3)$$

$$\overline{Y}(A,B,C)=\sum m(0,1,2,4,5)$$

$$Y(A,B,C)=\prod M(0,1,2,4,5)$$

$$=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

例题3.16 求出下式的最大、最小项

$$Y(C,D,G)=\overline{(\overline{C}+\overline{D})+DG}$$

解：

$$Y(C,D,G)=\overline{(\overline{C}+\overline{D})+DG}$$

$$Y(C,D,G)$$

3.3 逻辑函数的公式法化简

一、逻辑函数式的常见形式

一个逻辑函数的表达式不是唯一的，可以有多种形式，并且能互相转换。例如：

$L=AC+\overline{A}B$	与—或表达式
$=(A+B)(\overline{A}+C)$	或—与表达式
$=\overline{\overline{AC}\cdot\overline{\overline{A}B}}$	与非—与非表达式
$=\overline{\overline{A+B}+\overline{\overline{A}+C}}$	或非—或非表达式
$=\overline{A\overline{C}+\overline{A}\overline{B}}$	与—或非表达式

其中，与—或表达式是逻辑函数的最基本表达形式。

如果逻辑函数不是最简表达式，应该对其进行化简。这样可以用最少的器件实现尽可能多的功能，可以降低成本、提高可靠性和减少门延迟时间。

判断一个与或逻辑表达式是否最简的条件：

(1) 与项最少，即表达式中“+”号最少；

(2) 每个与项中的变量数最少，即表达式中“ · ”号最少。

二、逻辑函数式化简的常用方法

1、并项法：利用互补律 $\overline{A}+A=1$

(1). $\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}=\overline{A}\overline{B}(C+\overline{C})=\overline{A}\overline{B}$

(2). $A（BC+\overline{B}\overline{C}）+A（B\overline{C}+\overline{B}C）$

$$=A(\overline{B\oplus C}+B\oplus C)$$

$$=A(\overline{B\oplus C})+A(B\oplus C)$$

$$=A$$

2、吸收法：利用 $A+AB=A$

(1). $\overline{B}+A\overline{B}D=\overline{B}$

(2). $\overline{A}B+\overline{A}BCD(E+F+G)=\overline{A}B$

3、消去法：利用 $A+\overline{A}B=A+B$

(1). $AB+\overline{A}C+\overline{B}C=AB+(\overline{A}+\overline{B})C=AB+\overline{AB}C=AB+C$

4、配项法：利用 $B=(A+\overline{A})B$

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$

$$=AB+ABC+\overline{A}C+\overline{A}BC$$

$$=AB+\overline{A}C$$

5、综合法

$$X=AD+A\overline{D}+AB+\overline{A}C+BD+A\overline{B}EF+\overline{B}EF$$

$$=A+AB+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF$$

$$=A+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF$$

$$=A+C+BD+\overline{B}EF$$

例题3.17 化简

利用逻辑代数的基本公式：

$$F = A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$
$$= A\bar{B}C + AB(C+\bar{C})$$
$$= A\bar{B}C + AB$$
$$= A(\bar{B}C + B)$$
$$= A(C+B)$$
$$= AC + AB$$

提出AB

=1

提出A

反变量吸收

例题3.18

化简该式

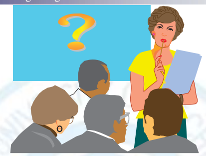
$$F = \overline{\overline{AB+\overline{AB}}\bullet\overline{BC+\overline{BC}}}$$
$$= (AB+\bar{A}\bar{B}) + (BC+\bar{B}\bar{C})$$
$$= AB + \bar{A}\bar{B}(C+\bar{C}) + BC(A+\bar{A}) + \bar{B}\bar{C}$$
$$= AB + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}BC + \bar{B}\bar{C}$$
$$= AB + \bar{A}C(\bar{B}+B) + \bar{B}\bar{C}$$
$$= AB + \bar{A}C + \bar{B}\bar{C}$$

反演

配项

被吸收

被吸收



$AB=AC \xrightarrow{?} B=C$

$A+B=A+C \xrightarrow{?} B=C$

请注意与普通代数的区别！

逻辑函数的最简表达式

A 最简与或表达式

逻辑函数化简的意义：逻辑表达式越简单，实现它的电路越简单，电路工作越稳定可靠。

乘积项最少、并且每个乘积项中的变量也最少的与或表达式。

$$Y = \bar{A}B\bar{E} + \bar{A}B + A\bar{C} + A\bar{C}E + B\bar{C} + B\bar{C}D$$
$$= \bar{A}B + A\bar{C} + B\bar{C}$$
$$= \bar{A}B + A\bar{C} \longrightarrow \text{最简与或表达式}$$

B、最简与非-与非表达式

非号最少、并且每个非号下面乘积项中的变量也最少的与非-与非表达式。

$$Y = \bar{A}B + A\bar{C} = \overline{\overline{\bar{A}B + A\bar{C}}} = \overline{\overline{\bar{A}B}\cdot\overline{A\bar{C}}}$$

②用摩根定律去掉下面的非号

①在最简与或表达式的基础上两次取反

C、最简或与表达式

括号最少、并且每个括号内相加的变量也最少的或与表达式。

$$Y = \bar{A}B + A\bar{C}$$

①求出反函数的最简与或表达式

$$\bar{Y} = \overline{\bar{A}B + A\bar{C}} = (A+\bar{B})(\bar{A}+C)$$
$$= \bar{A}\bar{B} + AC + \bar{B}C = \bar{A}\bar{B} + AC$$

②利用反演规则写出函数的最简或与表达式

$$Y = (A+B)(\bar{A}+\bar{C})$$

D、最简或非-或非表达式

非号最少、并且每个非号下面相加的变量也最少的或非-或非表达式。

$$Y = \bar{A}B + A\bar{C} = (A+B)(\bar{A}+\bar{C})$$

①求最简或非-或非表达式

$$= \overline{\overline{(A+B)(\bar{A}+\bar{C})}} = \overline{\overline{A+B}+\overline{\bar{A}+\bar{C}}}$$

③用摩根定律去掉下面的非号

②两次取反

E、最简与或非表达式

非号下面相加的乘积项最少、并且每个乘积项中相乘的变量也最少的与或非表达式。

$$Y = \bar{A}B + A\bar{C} = \overline{\overline{A+B}+\overline{\bar{A}+\bar{C}}} = \overline{\bar{A}\bar{B} + AC}$$

①求最简或非-或非表达式

②用摩根定律去掉下面的非号

例题3.19 化简下式

$$Y = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$$

解：

$$Y = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$$

例题3.20 化简下式—利用消除冗余项

解：

$$Y_1 = A\bar{B} + AC + ADE + \bar{C}D$$

$$Y_2 = AB + \bar{B}C + \cancel{AC(DE+FG)}$$

例题3.21 化简下式—利用消除冗余项

$$Y = ABC + A\overline{BC} + BC + \bar{B}C + A$$

解：

$$= BC + \bar{B}C + A$$

$$= C + A$$

including redundancy

$AB + A\bar{B} = A$

例题3.22 化简下式

$$Y = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

解：

$$= A\overline{B}(C+\overline{C}) + (A+\overline{A})B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B \cdots\cdots \text{redundancy}$$

$$= A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B \cdots\cdots \left(AB + A\overline{B} = A \right)$$

例题3.23 化简下式

$$Y = AC + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D} + A(B+\overline{C}) + \overline{A}BC\overline{D}$$

解：

$$= AC + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D} + A(B+\overline{C}) + \overline{A}BC\overline{D}$$

Absorb

例题3.24 化简下式

$$(2)Y = (A+\overline{B}+C+\overline{D})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\cdot(\overline{A}+B+C+D)\cdot$$
$$(\overline{A}+B+\overline{C}+D)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C+D)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

解：

例题3.25 化简下式

$$F = AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + (\overline{A}+\overline{B})D$$

解：

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}D + \overline{A}D + \overline{B}D$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}D + \overline{B}D$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C} + (\overline{A}+\overline{B})D$$

$$= AB + \overline{AB}D + \overline{A}\,\overline{C}$$

$$= AB + D + \overline{A}\,\overline{C}$$

本节小结

- 由前例可见，将逻辑表达式写为标准形式的过程是一个从简洁到烦琐的过程，它得到的好处是形式唯一。在以后学习卡诺图时会用到。
- 逻辑代数是分析和设计数字电路的重要工具。利用逻辑代数，可以把实际逻辑问题抽象为逻辑函数来描述，并且可以用逻辑运算的方法，解决逻辑电路的分析和设计问题。
- 与、或、非是3种基本逻辑关系，也是3种基本逻辑运算。与非、或非、与或非、异或则是由与、或、非3种基本逻辑运算复合而成的4种常用逻辑运算。
- 逻辑代数的公式和定理是推演、变换及化简逻辑函数的依据。

3.4 逻辑函数的卡诺图化简法

3.4.1 卡诺图：

将n个输入变量的全部最小项用小方块阵列图表示，并且将逻辑相临的最小项放在相临的几何位置上，所得到的阵列图就是n变量的卡诺图。

卡诺图的每一个方块（最小项）代表一种输入组合，并且把对应的输入组合注明在阵列图的上方和左方。

两变量卡诺图

A \ B	0	1
0	1	0
1	0	1

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	Φ	1

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	Φ	1
11	0	Φ	0	1
10	1	1	0	1

$ABCD$=0100时函数取值

只有一项不同

单元编号0010，对应于最小项：$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$

函数取0、1均可，称为无所谓状态（或任意状态）

有时为了方便，用二进制对应的十进制表示单元编号。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$$F(A,B,C)=\Sigma(1,2,4,7)$$

1,2,4,7单元取1，其它取0

CD AB	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

3.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

逻辑函数是以真值表或者以最小项表达式给出：在卡诺图上那些与给定逻辑函数的最小项相对应的方格内填入1，其余的方格内填入0。

$$Y(A,B,C,D)=\sum m(1,3,4,6,7,11,14,15)$$

AB CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

m_1 m_3 m_4 m_{11} m_6 m_7 m_{15} m_{14}

利用卡诺图表示逻辑函数

按方格键暂停；按三角键播放；按下一页停止本页播放。

下一页

逻辑函数以一般的逻辑表达式给出：先将函数变换为与或表达式（不必变换为最小项之和的形式），然后在卡诺图上与每一个乘积项所包含的那些最小项（该乘积项就是这些最小项的公因子）相对应的方格内填入1，其余的方格内填入0。

$Y=\overline{(A+D)(B+\overline{C})}$

变换为与或表达式

$Y=\overline{A}\,\overline{D}+\overline{B}C$

$\overline{A}\,\overline{D}$的公因子

AB CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	1	1	0	1

$\overline{B}C$的公因子

卡诺图的特点

(a)、卡诺图中的小方格数等于最小项总数，如变量数为 2^n，则有

2⟶ 4，3 ⟶ 8，4 16，5

(b)、卡诺图行列两侧标注的0，1是使对应方格内最小项为1的变量取值；同时，这些0，1组成的二进制数大小就是对应最小项的编号。且几何相邻的最小项具有逻辑相邻性。

(c)、卡诺图是一个上下、左右闭合的图形，几何上相邻的概念包括上下左右。

用卡诺图表示逻辑函数

(1)、已知逻辑函数的真值表

只要将真值表中每组变量取值所对应的数值填入相应的最小项方格中即可

例如：画出如图真值表对应的卡诺图。

F: BC A	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(2)、已知逻辑函数的表达式

化作最小项之和，在相应的最小项方格中填入1即可。

例如：画出如 $F(A,B,C)=AB+BC+AC$
$$=AB(C+\overline{C})+(A+\overline{A})BC+A(B+\overline{B})C$$
$$=ABC+AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C$$
$$=\sum_m(3,5,6,7)$$

F: BC A	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

(3)、直接填写（一般与或式）

例如：画出如$F(A,B,C)=\overline{A}+BC$ 对应的卡诺图

F: BC A	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

3.4.3 用卡诺图化简函数

用卡诺图化简逻辑函数的依据和准则

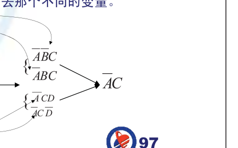
依据：卡诺图保证了几何相邻两方格所代表的最小项只有一个变量不同，因此，当相邻方格为1时，其对应的最小项就可以合并，消去那个不同的变量，只保留相同的变量。

原则：(1) 卡诺图中两个几何相邻可以合并成一个与项，消去那个不同的变量。

F: BC A	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0

$$m_5=A\overline{B}C$$
$$m_7=ABC$$
$$m_5+m_7=A\overline{B}C+ABC$$
$$=AC(\overline{B}+B)=AC$$

(2) 卡诺图中四个几何相邻可以合并成一个与项，消去那个不同的变量。



$$m_2=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$
$$m_3=\overline{A}\,\overline{B}CD$$
$$m_6=\overline{A}BC\overline{D}$$
$$m_7=\overline{A}BCD$$

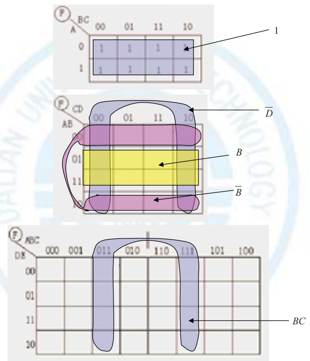
$\longrightarrow$ $\left\{\begin{matrix}\overline{A}\,\overline{B}C\\ \overline{A}BC\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\overline{A}CD\\ \overline{A}C\overline{D}\end{matrix}\right.$ $\longrightarrow \overline{A}C$

利用卡诺图化简逻辑函数

按方格键暂停；按三角键播放；按下一页停止本页播放。

下一页

(3) 卡诺图中八个几何相邻可以合并成一个与项，消去那个不同的变量。



推论：在 n 个变量的卡诺图中，若有 2^k （ $k=0,1,2,\dots,n$ ）个几何相邻格为1，可以将它们圈在一起，合并成一个有（ $n-k$ ）个变量的与项，消去 k 个不同的变量。如果 $k=n$ ，则消去全部变量，结果为1。

2、用卡诺图化简逻辑函数，求最简与或表达式

步骤：（1）、画卡诺图；
（2）、合并最小项；
（3）、写最简与或表达式。

在合并最小项时，对'1'格画圈，除了遵循前2页上的原则外，要注意：
（1）、'1'格不能遗漏；
（2）、'1'格允许被多次使用；
（3）、圈的个数尽可能少（或项少）；
（4）、圈的面积尽可能大（与项中的变量数少）；
（5）、每个圈中至少应包含一个新的'1'格（否则，这个圈多余）；
（6）、最简式不一定唯一，可能有多种正确的最简式。

（A）任何两个（2^1个）标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去一个变量（消去互为反变量的因子，保留公因子）。

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$\bar A\bar B\bar C + A\bar B\bar C = \bar B\bar C$

$\bar ABC + ABC = BC$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	1	0	0

$A\bar B\bar CD + A\bar BCD = A\bar BD$

$\bar AB\bar C\bar D + \bar ABC\bar D = \bar AB\bar D$

（B）任何4个（22个）标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去2个变量。

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$\bar A\bar B\bar C + \bar AB\bar C + AB\bar C + A\bar B\bar C$
$=(\bar A\bar B + \bar AB + AB + A\bar B)\bar C$
$=\bar C$

$\bar ABC + \bar AB\bar C + AB\bar C + ABC = (\bar A\bar C + \bar AC + A\bar C + AC)B = B$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

$\bar CD$

$\bar AB$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$\bar BD$

$B\bar D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

BD

$\bar B\bar D$

（C）任何8个（2^3个）标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量。

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

D

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\bar B$

小结：相邻最小项的数目必须为个才能合并为一项，并消去个变量。包含的最小项数目越多，即由这些最小项所形成的圈越大，消去的变量也就越多，从而所得到的逻辑表达式就越简单。这就是利用卡诺图化简逻辑函数的基本原理。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1

$\bar ABC$

ABC

$ABC + \bar ABC$
$= BC$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1

? AB

化简过程：

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1

BC

AB

$F=AB+BC$

利用卡诺图化简的规则：

（1）相临单元的个数是2^N个，并组成矩形时，可以合并。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

AD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

不是矩形

（2）先找面积尽量大的组合进行化简，可以减少更多的因子。

（3）各最小项可以重复使用。

（4）注意利用无所谓状态，可以使结果大大简化。

（5）所有的1都被圈过后，化简结束。

（6）化简后的逻辑式是各化简项的逻辑和。

图形法化简的基本步骤

逻辑表达式或真值表

$Y(A,B,C,D)=\sum m(3,5,7,8,11,12,13,15)$

1

1

卡诺图

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

2

①圈越大越好，但每个圈中标1的方格数目必须为2^i个。②同一个方格可同时画在几个圈内，但每个圈都要有新的方格，否则它就是多余的。③不能漏掉任何一个标1的方格。

合并最小项

3

最简与或表达式

2

$A\overline{C}\,\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

CD

BD

冗余项

3

将代表每个圈的乘积项相加

$Y(A,B,C,D)=BD+CD+A\overline{C}\,\overline{D}$

两点说明：

① 在有些情况下，最小项的圈法不只一种，得到的各个乘积项组成的与或表达式各不相同，哪个是最简的，要经过比较、检查才能确定。

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+B\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}+AD$

不是最简

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}+AD$

最简

② 在有些情况下，不同圈法得到的与或表达式都是最简形式。即一个函数的最简与或表达式不是唯一的。

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	0

$\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}+ABC+B\overline{C}D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	0

$\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}+ABC+A\overline{B}D$

化简时可以将无所谓状态当作1或0，目的是得到最简结果。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	Φ	1	1

A

认为是1

$F=A$

例题3.26 化简

解：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

ABD

$$F=\overline{ABD}$$

例题3.27 已知真值表如图，用卡诺图化简。

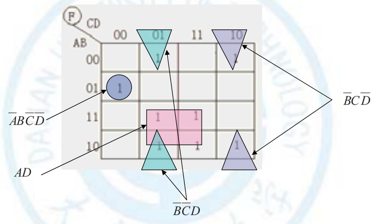
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

101状态未给出，即是无所谓状态。

例题3.28 用卡诺图法化简。

$$F(A,B,C,D)=\sum_m(1,2,4,9,10,11,13,15)$$

解：

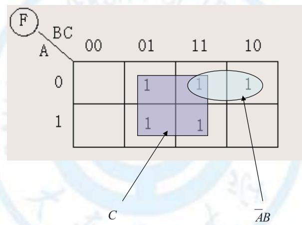


$$F(A,B,C,D)=AD+\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$$

例题3.29 用卡诺图法化简。

$$F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$$

解：

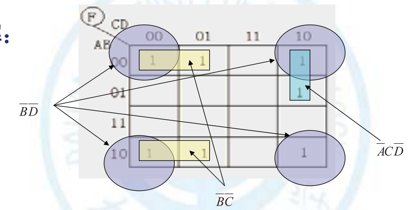


$$F(A,B,C)=\overline{A}B+C$$

例题3.30 用卡诺图法化简。

$$F(A,B,C,D)=\overline{ABC}+\overline{A}C\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}$$

解：

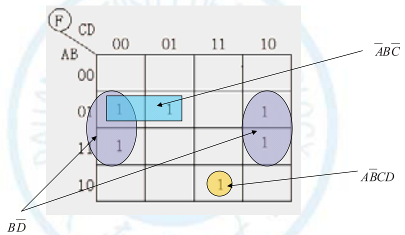


$$F(A,B,C,D)=\overline{B}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C\overline{D}$$

例题3.31 用卡诺图法化简。

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}D+B\overline{C}\,\overline{D}+BC\overline{D}+A\overline{B}CD$$

解：

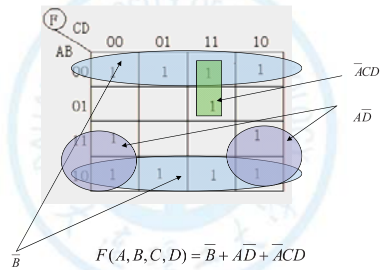


$$F(A,B,C,D)=B\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}CD$$

例题3.32 用卡诺图法化简。

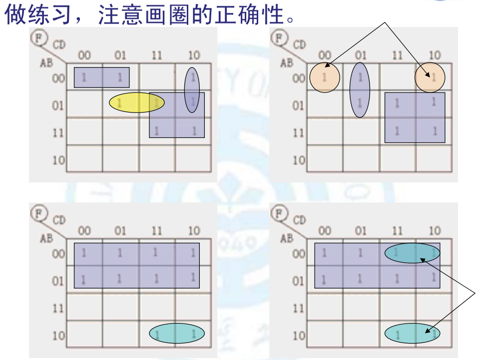
$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}D+AC\overline{D}+\overline{A}BCD$$

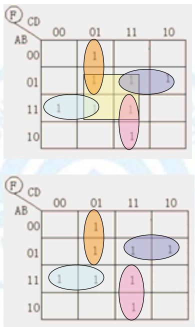
解：



$$F(A,B,C,D)=\overline{B}+A\overline{D}+\overline{A}CD$$

多做练习，注意画圈的正确性。





3.4.4 含随意项的逻辑函数的化简

在实际逻辑电路中，逻辑函数真值表中某方格的取值有可能是任意值(0/1)；或者可能永远不会出现(逻辑上不涉及此方格)。如一个逻辑电路的输入为 8421BCD码，显然变量的取值范围中 1010—1111 这6个输入组合是不会出现的，其对应的输出是什么都无意义，不必关心。

象这样，在电路中：

输出可假定为1，也可假定为0的输入变量组合叫随意状态，在真值表和卡诺图中记为 ϕ 或 X 。

在逻辑函数表达式中用 $\sum_d(...)$ 表示随意态。

如 $\sum_d(10,11,15)$ 表示最小项 m_{10},m_{11},m_{15} 是随意态。

有时可用逻辑函数表达式表示函数中随意态。

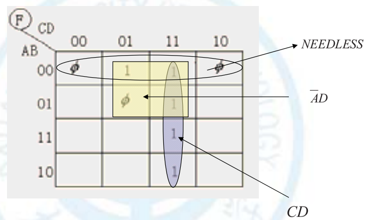
如 $d=AB+AC$　$d=AB+AC$ 说明包含的最小项是随意态。

化简具有随意态的逻辑函数时，可以用随意态扩大相邻方格的面积，根据化简函数的需要，确定随意态的取值，当然在一个函数中，某个随意态的取值不能同时既为1又为0。

例题3.33 用卡诺图法化简。

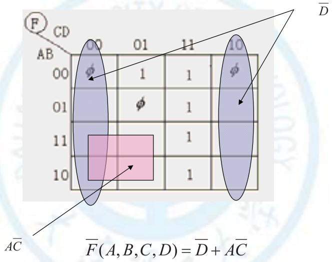
$$F(A,B,C,D)=\sum_m(1,3,7,11,15)+\sum_d(0,2,5)$$

解：



$$F(A,B,C,D)=\overline{A}D+CD$$

上例：求最简或与式。



$\overline{F}(A,B,C,D)=\overline{D}+A\overline{C}$

$F(A,B,C,D)=D(\overline{A}+C)$

随意项：函数可以随意取值（可以为0，也可以为1）或不会出现的变量取值所对应的最小项称为随意项，也叫做约束项或无关项。

例如：判断一位十进制数是否为偶数。

A B C D	Y	A B C D	Y	说 明
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	1 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	1 0 1 0	×	不会出现
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×	不会出现
0 1 0 0	1	1 1 0 0	×	不会出现
0 1 0 1	0	1 1 0 1	×	不会出现
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×	不会出现
0 1 1 1	0	1 1 1 1	×	不会出现

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	×	1
01	0	0	×	0
11	0	0	×	×
10	1	1	×	×

输入变量A，B，C，D取值为0000～1001时，逻辑函数Y有确定的值，根据题意，偶数时为1，奇数时为0。

$$Y(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)$$

A，B，C，D取值为1010 ～1111的情况不会出现或不允许出现，对应的最小项属于随意项。用符号“φ”、“×”或“d”表示。

随意项之和构成的逻辑表达式叫做 随意条件或约束条件，用一个值恒为 0 的条件等式表示。

$$\Sigma d(10,11,12,13,14,15)=0$$

含有随意条件的逻辑函数可以表示成如下形式：

$$F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,6,8)+\Sigma d(10,11,12,13,14,15)$$

在逻辑函数的化简中，充分利用随意项可以得到更加简单的逻辑表达式，因而其相应的逻辑电路也更简单。在化简过程中，随意项的取值可视具体情况取0或取1。具体地讲，如果随意项对化简有利，则取1；如果随意项对化简不利，则取0。

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	×	1
01	0	0	×	0
11	0	0	×	×
10	1	1	×	×

不利用随意项的化简结果为：

$Y=\overline{A}\overline{D}+\overline{A}\overline{C}\overline{D}$

利用随意项的化简结果为：

$Y=\overline{D}$

例题3.34 化简 $F(A,B,C,D)=\Sigma(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$B\overline{C}D$ $\overline{B}\,\overline{D}$ $\overline{B}C$ $C\overline{D}$ A

$$F=A+C\overline{D}+\overline{B}C+\overline{B}\,\overline{D}+B\overline{C}D$$

例题3.35 化简下式

$Y=C\cdot\overline{D}\cdot(A\oplus B)+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$

$A\cdot B+C\cdot D=0$

解：

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	×	0
01	1	1	×	1
11	×	×	×	×
10	0	0	×	1

$\overline{Y}=A\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$

$Y=\overline{A\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}}$

$Y=\overline{\overline{\overline{A}+C}+\overline{A+B+D}}$

3.4.5 引入变量卡诺图

逻辑变量个数超过5个，卡诺图十分复杂。采用VEM化简法。

1、引入变量卡诺图的作图法：

将 n 个变量函数填入 $n-1$ 个或更少变量的卡诺图，使卡诺图的面积减小为原来的1/2。

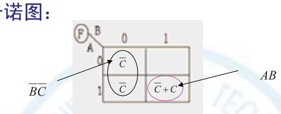
例：化简

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$$

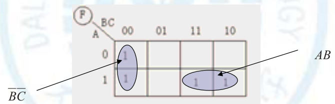
分离C作为引入变量，其真值表为：

A	B	F
0	0	$\overline{C}$
0	1	0
1	0	$\overline{C}$
1	1	$\overline{C}+C$

画出卡诺图：



对比三变量卡诺图：



VEM卡诺图可以从函数得到，也可以从真值表得出。

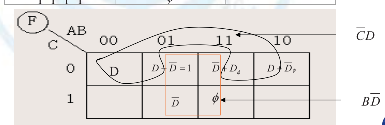
A B C D	F	
0 0 0 0	0	D
0 0 0 1	1	
0 0 1 0	0	0
0 0 1 1	0	
0 1 0 0	1	$D+\overline{D}=1$
0 1 0 1	1	
0 1 1 0	1	$\overline{D}$
0 1 1 1	0	
1 0 0 0	ϕ	$D+\overline{D}_\phi$
1 0 0 1	1	
1 0 1 0	0	0
1 0 1 1	0	
1 1 0 0	1	$\overline{D}+D_\phi$
1 1 0 1	ϕ	
1 1 1 0	ϕ	ϕ
1 1 1 1	ϕ	

$\phi=0,\ F=D$

$\phi=1,\ F=1$

$\phi=0,\ F=\overline{D}$

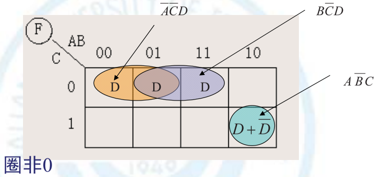
$\phi=1,\ F=1$



例题3.36 用VEM化简

$F(A,B,C,D)=\bar{A}BCD+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+\overline{ABC}D$

解：分离 D



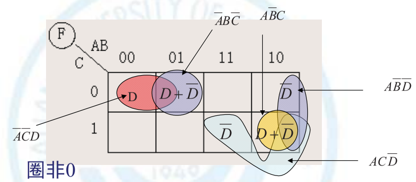
圈非0

$F(A,B,C,D)=A\bar{B}C+\overline{AC}D+B\bar{C}D$

例题3.37 用VEM化简

$F(A,B,C,D)=\overline{ABC}D+\bar{A}\overline{BC}D+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\overline{ABC}D+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BCD+AB\bar{C}\bar{D}$

解：分离 D



圈非0

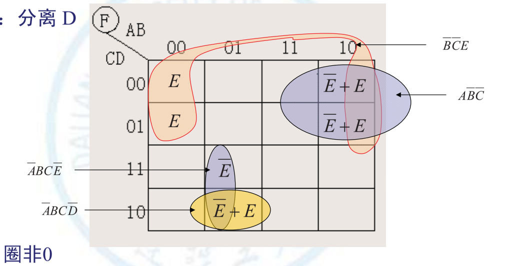
$F(A,B,C,D)=\overline{AC}D+\bar{A}B\bar{C}+AC\bar{D}+AB\bar{D}+\bar{A}BC$

例题3.38 用VEM化简

$F(A,B,C,D,E)$

$=\overline{ABCDE}+\overline{ABC}DE+\bar{A}BC\overline{DE}+A\overline{BC}DE+\overline{AB}C\overline{DE}+A\overline{BC}D+\bar{A}BCD\bar{E}+\bar{A}BC\overline{DE}$

解：分离 D

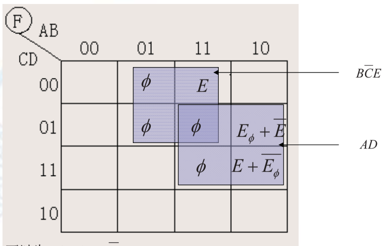


圈非0

$F(A,B,C,D)=\overline{BC}E+A\bar{B}C+\bar{A}BC\bar{E}+A\overline{BC}D$

例题3.39 化简

解：



其中：ϕ 可以为：0，1，$E\bar{E}$

$$\phi=\begin{cases}1, & E_\phi=E,\bar{E}_\phi=\bar{E}\\ 0, & E_\phi=\bar{E},\bar{E}_\phi=E\end{cases}$$

圈非0

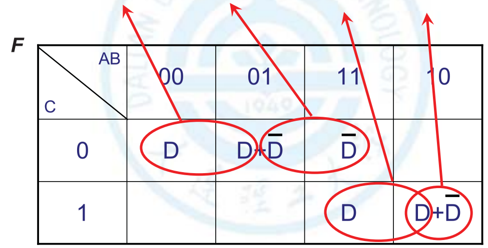
$F(A,B,C,D,E)=B\bar{C}E+AD$

例题3.40 化简

$F(A,B,C,D)=ABCD+\overline{ABC}D+\bar{A}\overline{BC}D+AB\overline{CD}+$

$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

$F=\overline{AC}D+\overline{BC}D+ACD+A\bar{B}C$

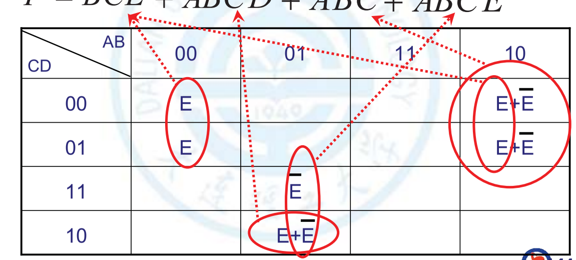


例题3.41 化简

$F=\overline{ABC}DE+\overline{ABCD}E+\bar{A}B\overline{CD}E+\overline{ABCDE}+$

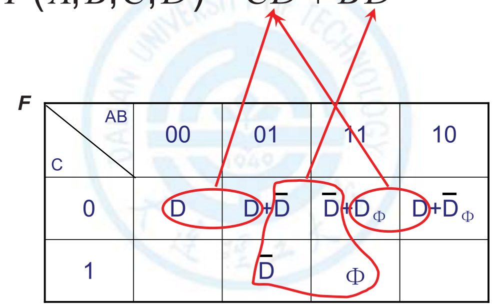
$\overline{ABCD}E+\overline{AB}C\bar{D}+A\bar{B}CDE+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}E$

$F=\overline{BC}E+\overline{AB}C\bar{D}+A\bar{B}C+\bar{A}BC\bar{E}$



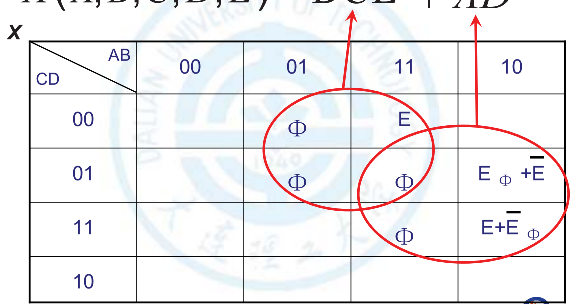
例题3.42 化简

$F(A,B,C,D)=\bar{C}D+B\bar{D}$



例题3.43 化简

$X(A,B,C,D,E)=B\bar{C}E+AD$



卡诺图化简常见的错误

按下方格键暂停；按一页停止本页播放；按三角键播放。

下一页

本章总结

逻辑函数的化简有公式法和图形法等。公式法是利用逻辑代数的公式、定理和规则来对逻辑函数化简，这种方法适用于各种复杂的逻辑函数，但需要熟练地运用公式和定理，且具有一定的运算技巧。图形法就是利用函数的卡诺图来对逻辑函数化简，这种方法简单直观，容易掌握，但变量太多时卡诺图太复杂，图形法已不适用。在对逻辑函数化简时，充分利用随意项可以得到十分简单的结果。

第三章　逻辑代数基础

结束