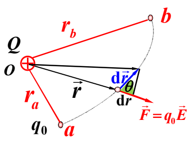
## § 7.2 场强环路定理 电势

### 一、场强环路定理

1. 点电荷对检验电荷作功：




点电荷的电场 $\vec{E}=\dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

检验电荷$q_0$从 $a \xrightarrow{\text{沿任意路径}} b$

电场力作功 $A=?$ $\quad \mathrm{d}A=\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\dfrac{q_0Q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$A=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{r\,|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta}{r^3}=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

电场对检验电荷作功与端点位置有关，与路径无关。

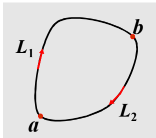
电场对检验电荷作功的特点说明电场力为保守力。



2.场强环路定理：

$$A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=q_0\int_{a\,L_1}^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}-q_0\int_{a\,L_2}^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$$




$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0}$ 场强环路定理

场强环路定理：在静电场中，场强沿任意闭合路径的环流恒为零。也说明静电场是无旋场，电场线不可能是闭合曲线。

这也是静电场的保守性的另一种说法。

静电场是无旋有源场，静电场也是保守场。



### 二、电势能 电势

1. 电势能

静止点电荷场是保守力场，引进势能函数。

$A=\dfrac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b}\right)=W_a-W_b$ 静电场力对电荷所做的功就等于电荷电势能的减量。

定义 $W_a=A_{a-0势}=q_0\int_a^{0势}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

通常令无穷远处电势能为零，因为那里电场力为零。

电势能是属于电荷 $q_0$和产生电场的电荷系统所共有。

电场力所做的功有正（如在斥力场中）有负（如在引力场中），所以电势能有正有负。



电势能与检验电荷电量和电场强度的线积分成正比。

2. 电势：将单位正电荷移至零电势能处电场作的功。

$\dfrac{W_a}{q_0}=\int_a^{0势}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$\boxed{U_a=\int_a^{0势}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$

- 单位正电荷放在$a$点处，系统的电势能。
- 把单位正电荷从 $a$ 点移到0电势（无限远）处，电场力所做的功。

3. 电势差：在电场中移动单位正电荷时电场作的功。

$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}-\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ 电压

电势（差）与检验电荷无关，是场自身的性质。



把$q_0$ 从$a$处移到 $b$ 处电场力做的功可表示为

$A=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=q_0\left(U_a-U_b\right)$ 实用中，常取大地的电势为零。

讨论：$U_a>U_b$
- $q_0>0 \Rightarrow A>0$
- $q_0<0 \Rightarrow A<0$

在静电场中释放正电荷 ⇨ 向电势低处运动。

正电荷受力方向 ⇨ 沿电场线方向。

结论：电场线指向电势减弱的方向。

在原子、核子物理中，电子、质子等粒子的能量常用电子伏特为单位，1eV表示1个电子通过1V电势差时所获得的能量。$1\mathrm{eV}=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$



4. 电势叠加原理：

$$U=\int_a^{0电势}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^{0电势}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^{0电势}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right)=\sum_{i=1}^{n}U_i$$

电场中任意一点的电势等于影响该电场空间的所有点电荷单独存在时在该点的电势的代数和。

根据点电荷的电势能和无穷远处电势能为零的假设：

$W_i(r)=\dfrac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_i} \Rightarrow \boxed{U_i=\dfrac{W_i}{q_0}=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_i}}$ 点电荷电场的电势分布

$$\boxed{U=\sum_{i=1}^{n}U_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r}}$$

若带电体的电荷分布相互影响，电场和电势将改变。

三、场强和电势的微分关系

1. 等势面 $\begin{cases}\text{用等势面来形象地描绘电场中电势的分布。}\\ \text{电势相等的空间各点所组成的曲面。}\end{cases}$

特点：

① 沿等势面移动电荷，电场力不作功。

$A_{12}=q_0(U_1-U_2)\xrightarrow{\text{同一等势面上}}0$

② 等势面与电场线处处正交。

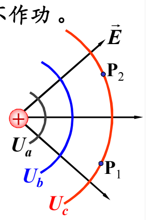
$\mathrm{d}A=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\xrightarrow{\text{同一等势面上}}0$

$q_0\neq0$，$E\neq0$，$\mathrm{d}r\neq0 \Rightarrow \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{r}$

（规定:电场中任意两个相邻等势面之间的电势差都相等）

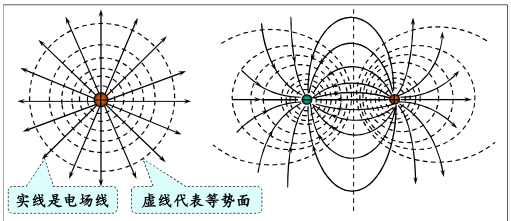
③ 等势面稠密处——电场强度大

④ 电场线指向电势降落的方向。






等势面与电场线处处正交；等势面稠密处电场强度大。




点电荷的电场线和等势面　　电偶极子的电场线和等势面

在实用中，由于电势差易于测量，所以先测出电场中等电势的各点，画出等势面，再根据等势面与电场线处处垂直的特点画出电场线，从而对电场有较全面定性的直观了解。

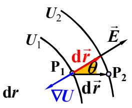


2. 电势梯度

$P_1$、$P_2$相距很近，两处场强近似相等。

两点间电势差 $U_1-U_2=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

沿 $\mathrm{d}\vec{r}$ 方向电势增量 $\boxed{\mathrm{d}U}=U_2-U_1=\boxed{-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}=-E\cos\theta\,\mathrm{d}r$




$\boxed{E\cos\theta=-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}}$ 电场中某点的电场强度沿某方向的分量等于电势沿此方向的空间变化率的负值。

$\theta=0 \Rightarrow \boxed{-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=E}$ 沿着$\vec{E}$的方向电势空间变化率最大。

$-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-(E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y+E_z\mathrm{d}z)=\mathrm{d}U=\dfrac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z$

$\Rightarrow \boxed{-\dfrac{\partial U}{\partial x}=E_x}$ $\boxed{-\dfrac{\partial U}{\partial y}=E_y}$ $\boxed{-\dfrac{\partial U}{\partial z}=E_z}$ 电势梯度 $\boxed{\nabla U=\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}}$

$\boxed{\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\nabla U}$ 电势梯度是矢量由低电势指向高电势

电场中各点的电场强度等于该点电势梯度的负值。



例 1：点电荷 $q$ 的电势。

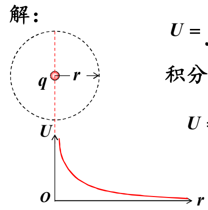
解：

$U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$　　$\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

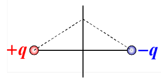
积分与路径无关，沿半径积分。

$U=\int_r^{\infty}\dfrac{q\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$

$=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_r^{\infty}=\boxed{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$




例2：求一对正、负电荷连线中垂线上的电势。



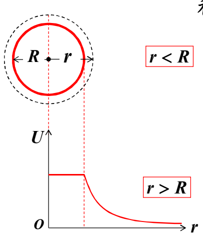

$U=U_1+U_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}=0$



例 3：求均匀带电 $q$ 的球面 $R$ 的电势。

解：由高斯定理 $\vec{E}_1(r<R)=0$，$\vec{E}_2(r>R)=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

积分与路径无关，沿半径积分。




$\boxed{r<R}$ $U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$=\int_R^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\boxed{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

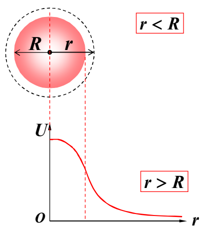
$\boxed{r>R}$ $U=\int_r^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\boxed{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$



例4 求均匀带电 $q$ 的球体 $R$ 的电势。

解：由高斯定理 $\vec{E}_1(r<R)=\dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$，$\vec{E}_2(r>R)=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

积分与路径无关，沿半径积分。




$\boxed{r<R}$ $U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$=\int_r^{R}\dfrac{\rho\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{3\varepsilon_0}+\int_R^{\infty}\dfrac{q\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

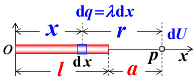
$=\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2-r^2)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$\boxed{r>R}$ $U=\int_r^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

**例 5：** 长为 $l$ 的均匀带电直线，电荷线密度为 $\lambda$。

求：图中 $P$ 点的电势。

解：如图选取坐标系，




$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$$

$\boxed{y=l+a-x}$

$$U=\int_0^l\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{(l+a-x)}$$

$$\begin{cases} y|_{x=l}=a \\ y|_{x=0}=l+a \end{cases}$$

$$=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l+a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{l+a}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

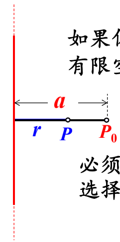
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln y\Big|_a^{l+a}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l+a}{a}$$



**例 6：** 求无限长均匀带电 $\lambda$ 直线的电势。

解：由 $\vec{E}=\dfrac{\lambda\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$ 其中 $\vec{r}$ 限定在水平面内。

如果仍然选择无限远点为电势的零点，则有限空间任意点的电势都将趋于无限大。




$$U=\int_r^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^\infty\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r}$$

必须选择有限远的某点为电势的零点，如选择距离带电直线 $a$ 远的 $P_0$ 点电势为零。

$$U=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^a\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$



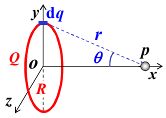
**例7：** 求均匀带电量为 $Q$ 的圆环轴线上的电势与场强。

解：在圆环上任取一电荷元 $\mathrm{d}q$。

$$U=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

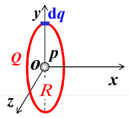



**例 8：** 求均匀带电量为 $Q$ 的圆环圆心处的电势。

解：在圆环上任取一电荷元 $\mathrm{d}q$。

$$U=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

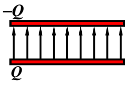
若圆环不均匀带电？



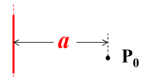



**思考题** 下例说法对否？举例说明。 $\boxed{U=\int_r^{0势}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$ $\boxed{-\nabla U=\vec{E}}$

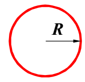
(1) 场强相等的区域，电势处处相等？ ✗



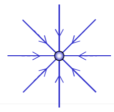

(3) 电势为零处，场强一定为零？ ✗




(2) 场强为零处，电势一定为零？ ✗




(4) 场强大处，电势一定高？ ✗





## 小　结

| 计算电势的方法 | 计算场强的方法 |
|---|---|
| 1.点电荷场的电势及叠加原理<br>$U=\sum_i\dfrac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$ （分立）<br>$U=\int_Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ （连续） | 1.点电荷场的场强及叠加原理<br>$\vec{E}=\sum_i\dfrac{Q_i\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}$ （分立）<br>$\vec{E}=\int_Q\dfrac{\vec{r}\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ （连续） |
| 2.根据电势的定义 $\vec{E}\Rightarrow U$<br>$U=\int_r^{0势}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$<br>积分关系 | 2. $U\Rightarrow\vec{E}$ $\boxed{\vec{E}=-\nabla U}$<br>$E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}\cdots$<br>微分关系 |
| | 3. 高斯定理 |



| 均匀带电 | 典型电场的电势 | 典型电场的场强（高斯定理） |
|---|---|---|
| 球面 | $U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 球面内<br>$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 球面外 | $\vec{E}=0$ 球面内<br>$\vec{E}=\dfrac{q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ 球面外 |
| 无限长直线 | $U=\dfrac{\lambda\ln\frac{a}{r}}{2\pi\varepsilon_0}$ | $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 方向垂直于直线 轴对称 |
| 无限大平面 | $U=Ed=\dfrac{\sigma\cdot d}{2\varepsilon_0}$ | $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向垂直于平面 匀强场 |

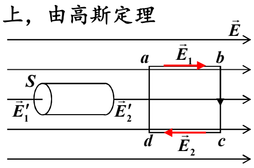
例9 利用高斯定理、场强环路定理证明：场强方向处处相同而大小不等的静电场不存在。

解：①在同一条电场线上，由高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

$$-E_1'S+E_2'S=0$$

$$\therefore E_1'=E_2'$$




②在不同的电场线上，由场强环路定理

$$\oint_{abcda}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Rightarrow E_1\cdot\overline{ab}-E_2\overline{cd}=0$$

$$\overline{ab}=\overline{cd} \Rightarrow E_1=E_2 \quad \text{命题得证。}$$



作业15-5：一光脉冲从$O$点发出到$P$点被吸收，在$S$系中 $\overline{OP}=l$ 且与$x$轴的夹角为$\theta$，$S'$ 系相对S系以$v$的速度沿$x$轴运动，设光脉冲发出时刻 $t_O=t'_{O'}=0$，求在$S'$系中测量：

(1) 光被吸收的时刻$t'$；(2) 两点间的距离$l'$。

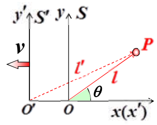
解：在$S$系$P$点坐标为：$(l\cos\theta,\ l\sin\theta,\ 0,\ l/c)$

在$S'$系$P$点坐标为：$(x',\ y',\ z',\ t')$

$$t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{l/c+vl\cos\theta/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{l\cos\theta+vl/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y'=y=l\sin\theta \qquad z'=z=0$$




不是原时的问题；
也不是尺缩的问题。

$$\boxed{l'}=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{\frac{(l\cos\theta+vl/c)^2}{1-v^2/c^2}+l^2\sin^2\theta}=\frac{l+vl\cos\theta/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boxed{=ct'}$$



16-5 两个静止质量都是$m_0$的粒子，一个静止，一个以0.8$c$的速度运动。它们经过对心碰撞后合成为一个新粒子。求：(1)新粒子的运动质量和速率。(2)新粒子的静止质量。

解：(1) $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{5}{3}m_0$

由能量守恒：

$$m_0c^2+mc^2=Mc^2 \Rightarrow M=m_0+\frac{5}{3}m_0 \Rightarrow \boxed{M=\frac{8}{3}m_0}$$

由动量守恒：

$$mv=MV \Rightarrow \boxed{V=\frac{m}{M}v=0.5c}$$

(2) $\boxed{M_0=M\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{8}{3}m_0\sqrt{1-0.25}=2.31m_0}$