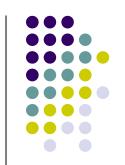
第4章 电路定理 (Circuit Theorems)



- 4.1 齐性定理和叠加定理 (Homogeneity and Superposition Theorem)
- 4.2 替代定理 (Substitution Theorem)
- 4.3 戴维南定理和诺顿定理 (Thevenin-Norton Theorem)
- 4.4 特勒根定理 (Tellegen's Theorem)
- *4.5 互易定理 (Reciprocity Theorem)
 - 4.6 对偶原理 (Dual Principle)





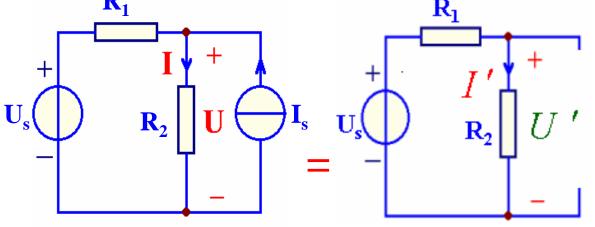


掌握各定理的内容、适用范围及如何应用。

4.1 齐性定理和叠加定理

(Homogeneity and Superposition Theorem)



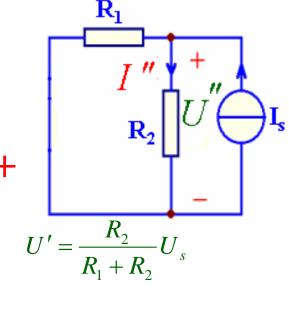


$$U = \frac{U_{s} / R_{1} + I_{s}}{(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}})}$$

$$= \frac{U_{s}R_{2} + R_{1}R_{2}I_{s}}{R_{1} + R_{2}}$$

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s + \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} I_s$$
$$= U' + U''$$

$$I = \frac{U_{s}}{R_{1} + R_{2}} + \frac{R_{1}}{R_{1} + R_{2}} I_{s}$$
$$= I' + I''$$



$$U'' = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} I_s$$

$$I' = \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$

$$I'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$

二、叠加定理:

线性电路中任一条支路电流或电压等于各个独立电单独作用时在该支路所产生的电流或电压的代数和。

(叠加性)

意义: 说明了线性电路中电源的独立性。

注意: 1、一个电源作用, 其余电源置零:

电压源短路; 电流源开路; 受控源保留。

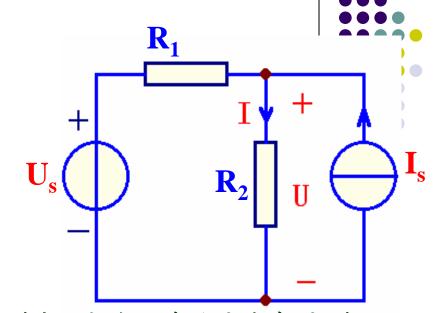
- 2、叠加时注意代数和的意义: 若响应分量 与原响应方向一致取正号, 反之取负。
- 3、叠加定理只能适用线性电路支路电流或支路电压 的计算,不能计算功率。

三 齐性定理

引例:

$$I = \frac{U_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s + \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} I_s$$



- 1、定理:线性电路中,当所有激励增大K倍时,其响应也相应增大K倍。(齐次性)
- 2、意义: 反映线性电路齐次性质。

注意:

- 1、激励是指独立电源;
- 2、只有所有激励同时增大时才有意义。

4. 叠加定理的应用

例1

求电压U.

解

12V电源作用:
$$U^{(1)} = -\frac{12}{9} \times 3 = -4V$$

3A电源作用:
$$U^{(2)} = (\frac{6}{6+3}) \times 3 \times 3 = 6V$$

$$U = -4 + 6 = 2V$$

<u>3Ω</u>

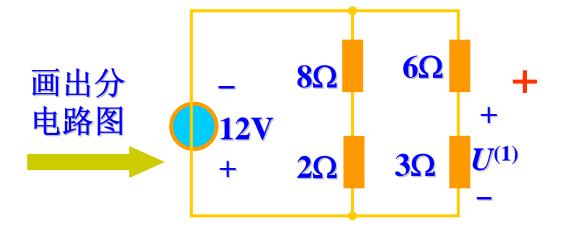
69

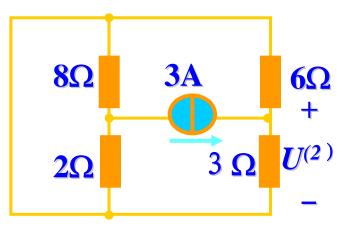
3A

 Ω 8

 2Ω

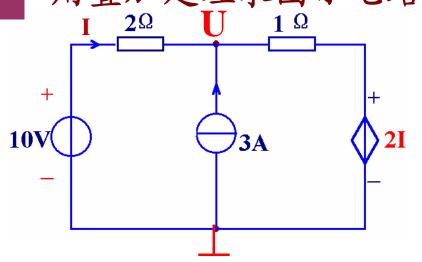
12V







用叠加定理求图示电路中电流I。20

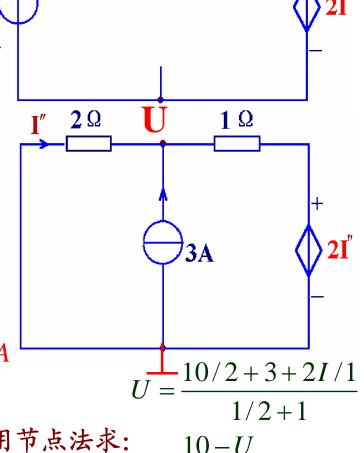


1、10V电压源单独作用时:

$$I' = \frac{10 \text{ 电压源单独作用量}}{2+1}$$
 $I' = 2A$

2、3A电流源单独作用时,有

3、所有电源作用时: $I = I' + I'' = \frac{7}{5}A$



 1Ω

若用节点法求:

$$I = \frac{10 - U}{2}$$

例3 封装好的电路如图,已知下 列实验数据:

当
$$u_S = 1V$$
, $i_S = 1A$ 时, 响应 $i = 2A$

当
$$u_S = -1V$$
, $i_S = 2A$ 时,

响应
$$i = 1A$$

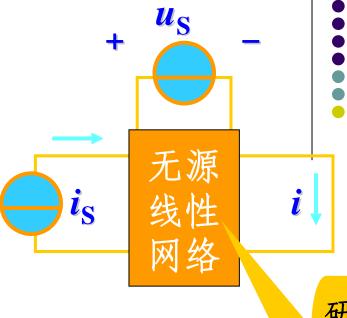
求
$$u_S = -3V$$
, $i_S = 5A$ 时,响应 $i = ?$

解

根据叠加定理,有:
$$i = k_1 i_S + k_2 u_S$$

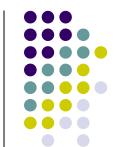
$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = 1 \end{cases} \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

$$i = u_S + i_S = -3 + 5 = 2A$$



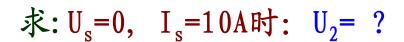
研激和应系实方究励响关的验法

练习1 图示电路,已知:



$$U_s=1V$$
, $I_s=1AH$: $U_2=0$;

$$U_s=1V$$
, $I_s=1AH$: $U_2=0$; $U_s=10V$, $I_s=0H$: $U_2=1V$;



解: 根据叠加定理,有

$$U_2 = K_1 I_s + K_2 U_s$$

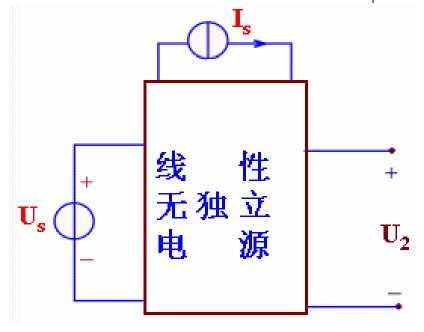
代入已知条件,有

$$0 = K_1 \bullet 1 + K_2 \bullet 1$$

$$1 = K_1 \bullet 0 + K_2 \bullet 10$$

解得

$$K_1 = -0.1$$
 $K_2 = 0.1$



$$U_2 = -0.1I_s + 0.1U_s$$

若
$$U_s=0$$
, $I_s=10$ A时: $U_2=-1V$

练习2 计算电压u和电流i。

10V电源作用:

$$i^{(1)} = (10 - 2i^{(1)})/(2+1)$$
 $i^{(1)} = 2A$

$$i^{(1)} = 2A \quad \blacksquare$$

10V

$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{2}\Omega \\
\mathbf{1}\Omega \\
\mathbf{2}i \\
\mathbf{-}
\end{array}$$

$$u^{(1)} = 1 \times i^{(1)} + 2i^{(1)} = 3i^{(1)} = 6V$$

5A电源作用:
$$2i^{(2)} + 1 \times (5 + i^{(2)}) + 2i^{(2)} = 0$$

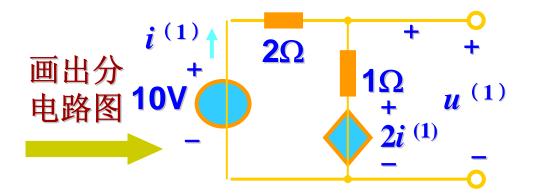
$$i^{(2)} = -1A$$

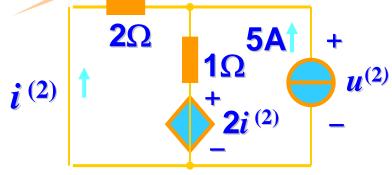
$$u^{(2)} = -2i^{(2)} = -2 \times (-1) = 2V$$

$$u = 6 + 2 = 8V$$

$$u = 6 + 2 = 8V$$
 $i = 2 + (-1) = 1A$

受控源始 终保留

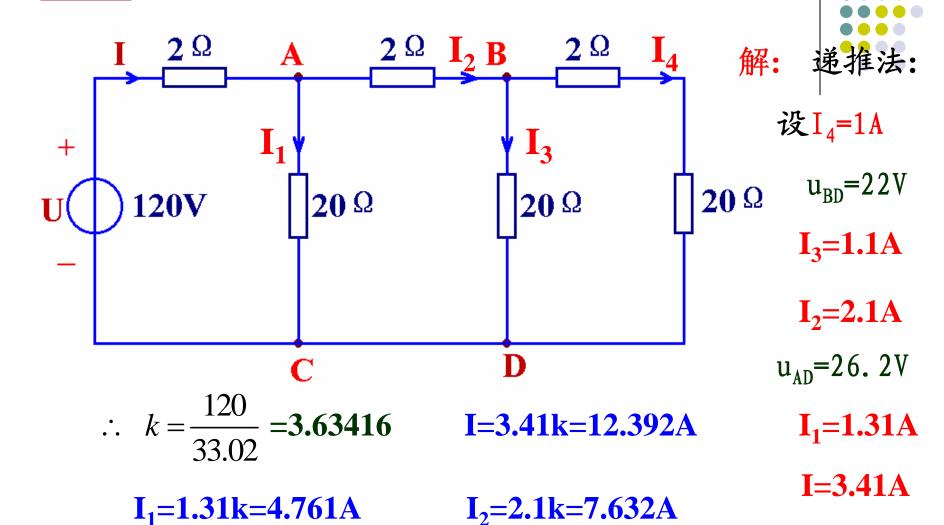




例4

求图示电路各支路电流。

 $I_3=1.1k=3.998A$

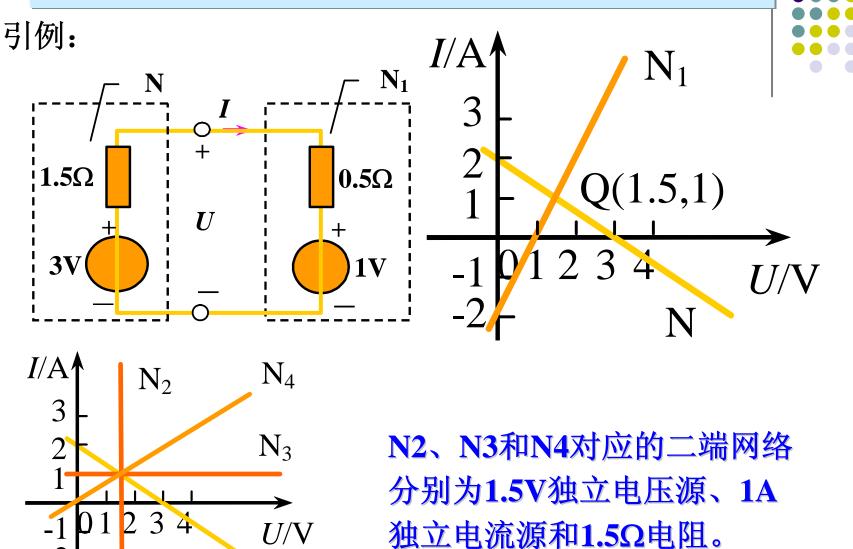


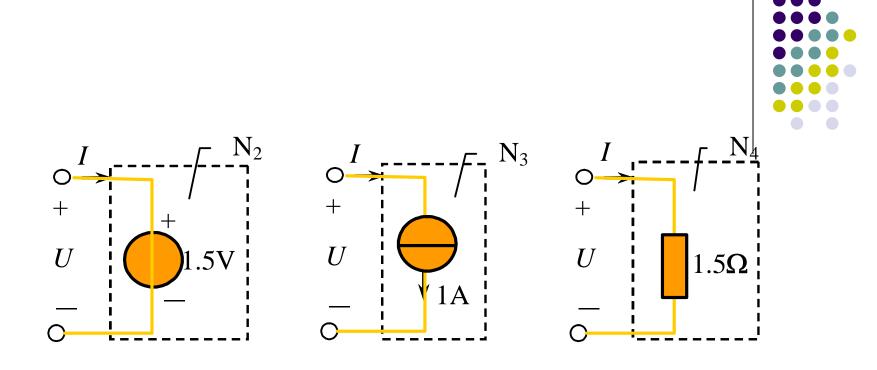
 $I_4 = k = 3.634A$

11

U=33.02V

4.2 替代定理 (Substitution Theorem)





用N2、N3和N4替代N1之后,电压U、电流I以及N网络内部的电压和电流均不受影响.

一、定理:

在任意集中参数电路中,若第k条支路的电压U_k和电流I_k已知,则该支路可用下列任一元件组成的支路替代:

- (1) 电压为Uk的理想电压源;
- (2) 电流为lk的理想电流源;
- (3) 电阻为 $R_k = U_k / I_k$ 的电阻元件。

二、注意:

- 1、支路k应为已知支路;
- 2、如果N1中某支路电压或电流为N中受控源的控制量, 不能应用替代定理。
- 3、替代与等效不相同。替代前后电路的工作点不变,而等等效是指端口对外的u-i关系等效。 (意义)
- 4、替代电源的方向。

例

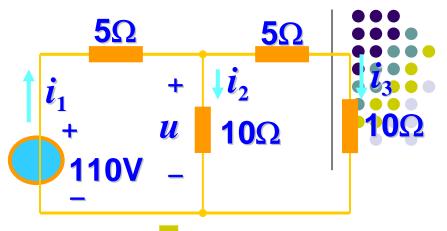
求图示电路的支路电压 和电流。

$$i_1 = 110/[5 + (5+10)//10]$$

= 10A

$$i_2 = 3i_1 / 5 = 6A$$

$$u = 10i_2 = 60V$$

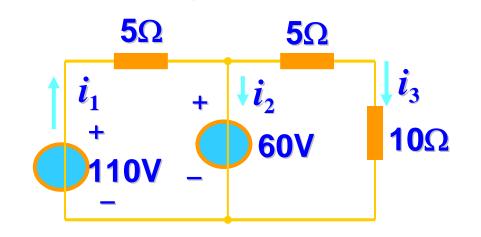


$$i_3 = 2i_1 / 5 = 4A$$

替代以后有:

$$i_1 = (110 - 60) / 5 = 10A$$

$$i_3 = 60/15 = 4A$$



替代后各支路电压和电流完全不变。

应用举例:

求图示电路中的Us和R。

解: I=2A U=28v

$$U_{S} = 43.6 v$$

利用替代定理,有

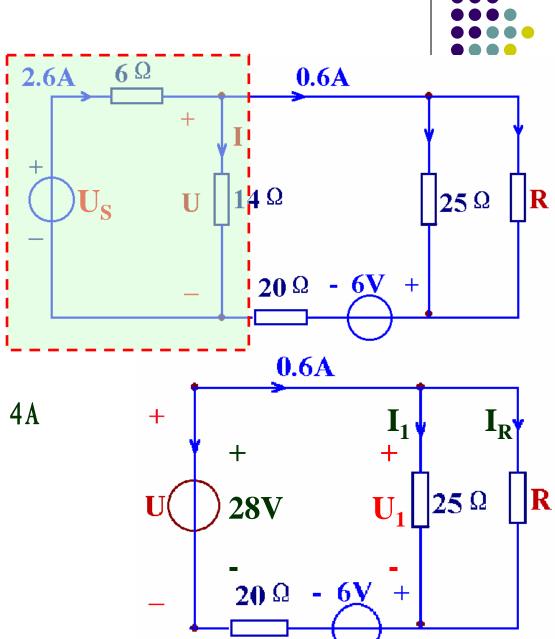
$$U_1 = 28 - 20 \times 0.6 - 6$$

$$=10v$$

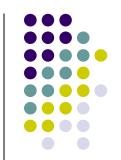
$$I_1 = 0.4A$$

$$I_{R}=0.6-0.4=0.2A$$

$$\therefore$$
 R=50 Ω .



4.3 戴维南定理和诺顿定理 (Thevenin-Norton Theorem)



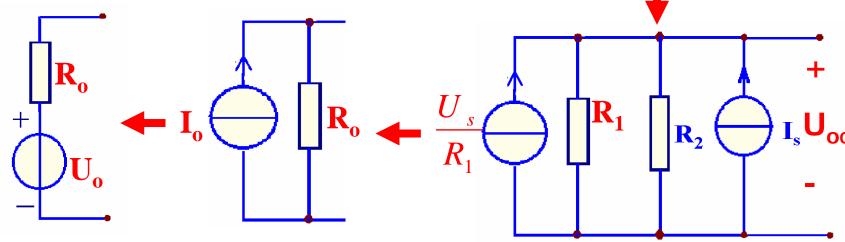
工程实际中,常常碰到只需研究某一支路的电 压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说,电 路的其余部分就成为一个有源二端网络,可等效变 换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流 源与电阻并联支路), 使分析和计算简化。戴维南定 理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方 法。



一、引例

将图示有源单口网络化简 为最简形式。

$$I_0 = \frac{U_s}{R_1} + I_s$$
 $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



 $U_{0} = I_{o}R_{o} = \frac{(U_{s}/R_{1} + I_{s})R_{1}R_{2}}{(R_{1} + R_{2})}$

(Ro:除源输入电阻)

(Io: 短路电流Isc)

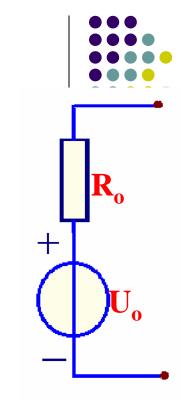
(U₀: 开路电压U_{0c}) 18

二、定理:

1、线性含源单口网络对外电路作用可等效为一个理想电压源和电阻的串联组合。

其中:

电压源电压U_o为该单口网络的开路电压U_{oc}; 电阻R_o为该单口网络的除源输入电阻R_o。



说明: (1) 该定理称为戴维南定理(Thevenin's Theorem),也称为等效电压源定理;

(2)由定理得到的等效电路称为戴维南等效电路,U_{oc}和R_o称为戴维南等效参数。

2、线性含源单口网络对外电路作用可等效为一个理想电流源和电阻的并联组合。

其中:

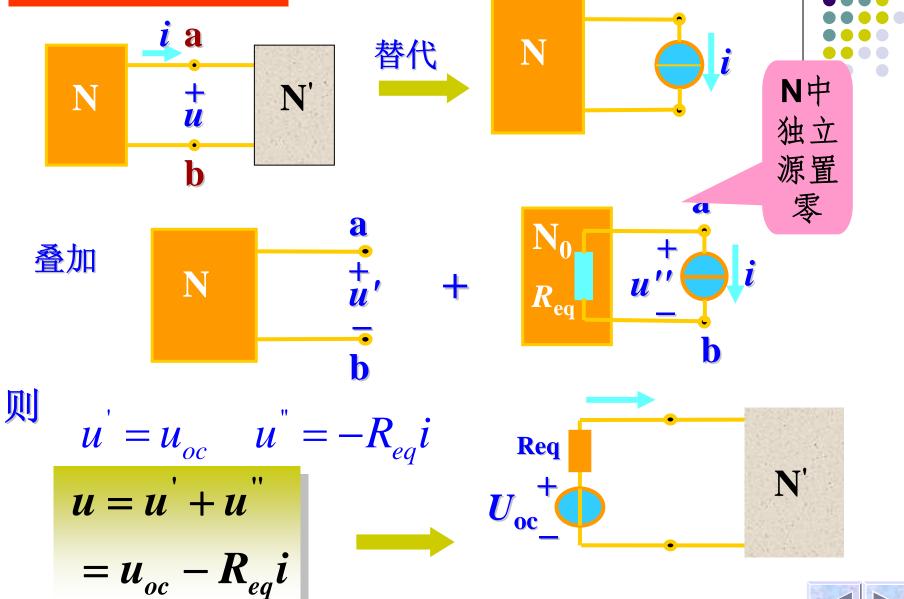
电流源电流I₀为该单口网络的短路电流I_{sc};

电阻R。为该单口网络的除源输入电阻R。.

说明: (1) 该定理称为诺顿定理(Norton's Theorem),也称 为等效电流源定理;

(2)由定理得到的等效电路称为诺顿等效电路, I_{sc}和R_o 称为诺顿等效参数。

3. 定理的证明



4. 定理的应用

(1) 开路电压 U_{oc} 的计算



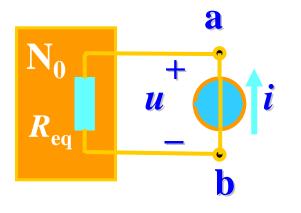
戴维南等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压 U_{oc} ,电压源方向与所求开路电压方向有关。计算 U_{oc} 的方法视电路形式选择前面学过的任意方法,使易于计算。

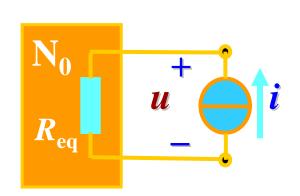
(2)等效电阻的计算

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路,电流源开路)后,所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算:



- 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△-互换的方法计算等效电阻;
- 2 外加电源法(加压求流或加流求压)。

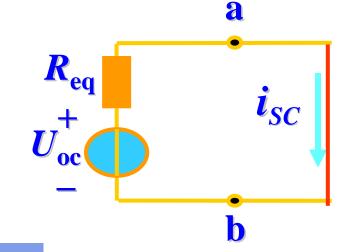




$$R_{eq} = \frac{u}{i}$$

3 开路电压,短路电流法。

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$



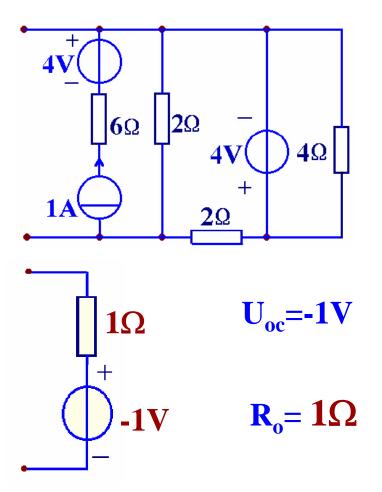
2 3 方法更有一般性。

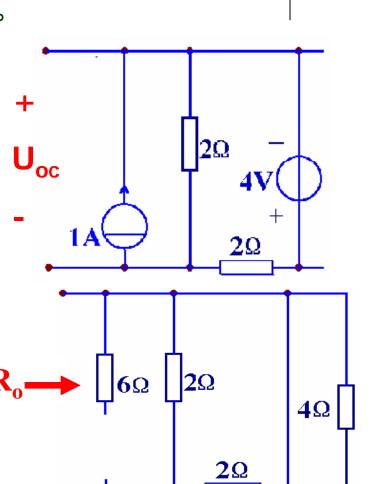


应用实例:

1、线性含源单口网络的化简

例1: 将图示电路等效为最简形式。





例2: 已知图示网络的伏安关系为:

$$U=2000I+10$$

并且 $I_s=2\times10^{-3}A$. 求网络N的戴维南等效电

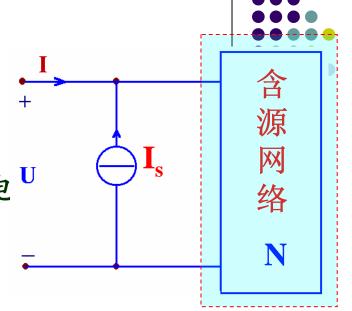
解: 设网络N 的戴维南等效电路参数

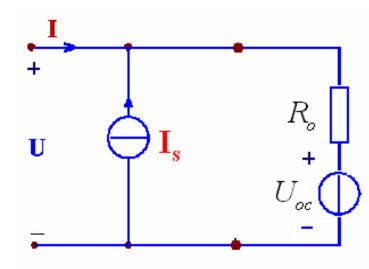
为Uoc和Ro,则有

$$U = U_{oc} + (I + I_s)R_o$$
$$= R_o I + (I_s R_o + U_{oc})$$

故
$$R_o I = 2000 I (I_s R_o + U_{oc}) = 10$$

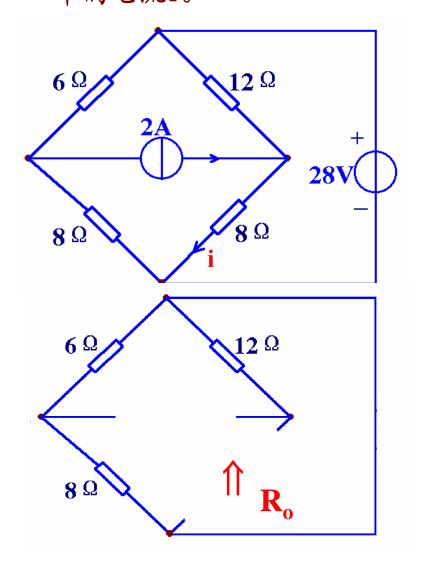
$$\therefore R_o = 2000\Omega \qquad U_{oc} = 6V$$





2、求某一条支路的响应。

例3: 用戴维南定理定理求图示电路 中的电流i。



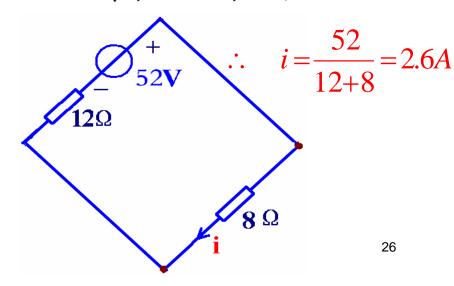
解: 移去待求支路得单口

求开路电压 U_{oc} :

$$U_{oc} = 28 + 12 \times 2 = 52 \text{v}$$

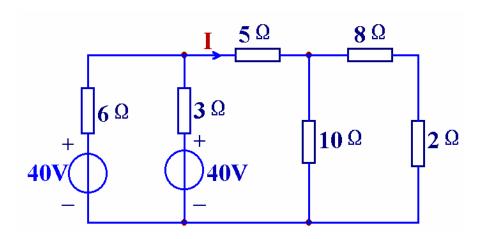
除去独立电源求 $R_o: R_o = 12\Omega$

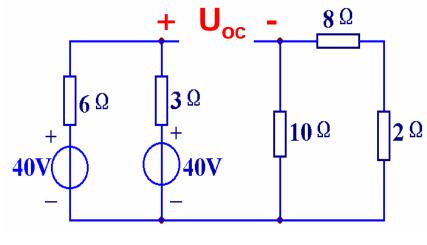
画出戴维南等效电路,并接入待求支路求响应。



练习:图示电路,用戴维南定理求电流。

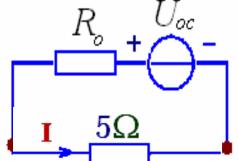




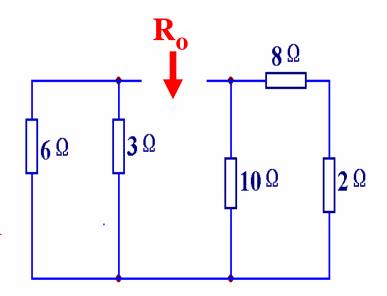


解:移去待求支路求: $U_{oc} = 40V$

除去独立电源求: $R_0 = 7\Omega$



$$I = \frac{40}{7+5} = \frac{10}{3}A$$



画出戴维南等效电路, 并接入待求支路求响应。

3、含受控源电路分析

例5:图示电路,用戴维南定理求电流12。

解: 移去待求支路,有

$$6kI' - 2kI' + 4k(I' - 10m) = 0$$

$$I' = 5mA$$
 $U_{oc} = 6kI' = 30V$

除源外加电压,有

$$3ki + 6kI'' = u$$

由等效电路得

$$3ki+2kI''+4k(i-I'')=u$$

$$3ki+2kI''+4k(i-I'')=u \qquad \therefore \quad R_o=\frac{u}{i}=6k\Omega$$

10mA

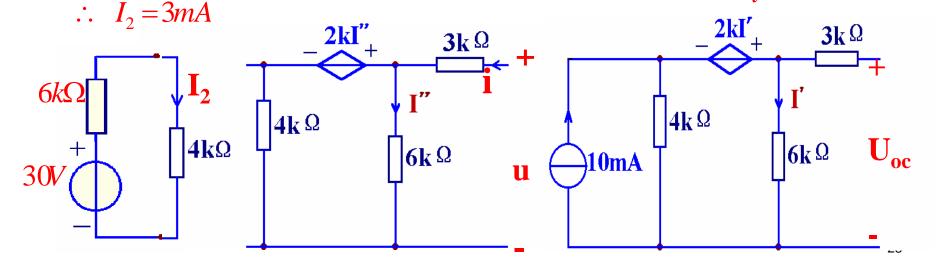
2kI +

 $4k\Omega$

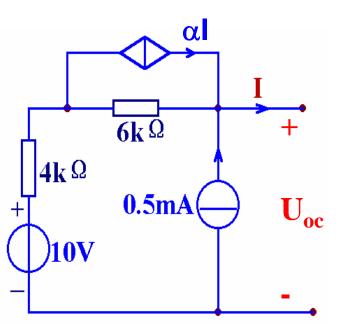
 $3k\Omega$

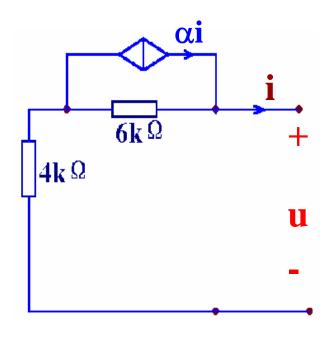
4kΩ

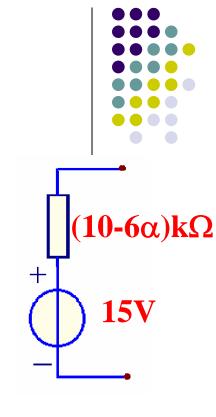
6kΩ



例 5: 求出图示电路的戴维南等效电路。







解: 求开路电压Uoc:

由于开路, I=0, 故有

$$U_{oc} = 10 + 0.5m \times (4k + 6k)$$

=15V

外加电压求输入电阻Ro:

由除源等效电路,有
$$u = 6k \times (\alpha i - i) - 4k \times i$$

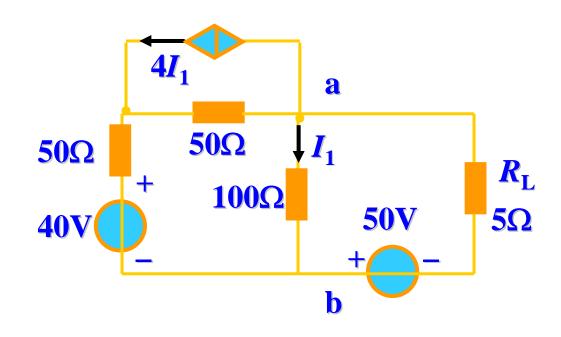
$$R_o = -\frac{u}{i}$$
$$= (10-6\alpha)k\Omega$$

所求电路戴维南等效电路如右图。

练习.

求负载 R_L 消耗的功率。

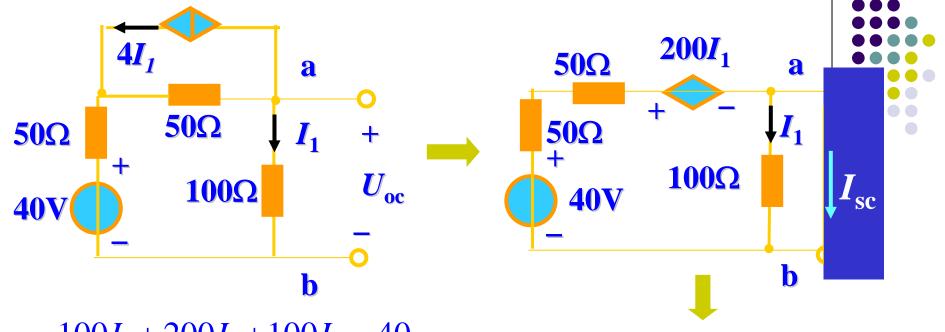




解

(1) 求开路电压 U_{oc}





$$100I_1 + 200I_1 + 100I_1 = 40$$

$$I_1 = 0.1A$$
 $U_{oc} = 100I_1 = 10V$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

用开路电压、短路电流法

$$I_{sc} = 40/100 = 0.4A$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 10/0.4 = 25\Omega$$

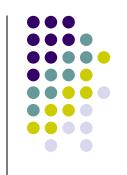


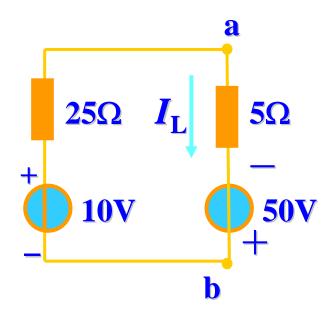
 50Ω

50Ω

40V

(3) 画出等效电路图





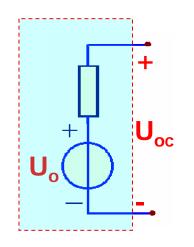
$$I_L = \frac{U_{oc} + 50}{25 + 5} = \frac{60}{30} = 2A$$

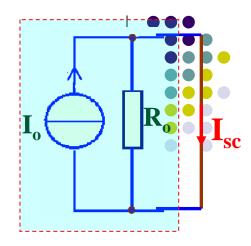
$$P_L = 5I_L^2 = 5 \times 4 = 20W$$



注意:

- 1、等效电源的方向;
- 2、除源输入电阻Ro求法:
 - (1)等效变换法(去源)
 - (2) 外加电源法 (去源)

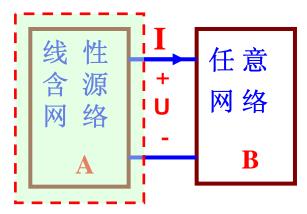




注意:电压与电流方向关联

$$R_o = \frac{S_{oc}}{I_{sc}}$$

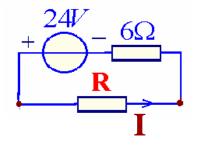
- (3) 开路短路法(U_{oc} 、 I_{sc}) (不去源)
- 3、含受控源有源单口网络不一定同时存在两种等效电源
- 4、含源单口网络与外电路应无耦合;
- 5、含源单口网络应为线性网络;
- 6、等效参数计算。



练习: 图示电路分别求 $R=2\Omega$ 、 6Ω 、 18Ω 时的电流I和R所吸收的功率P。

解:
$$U_{oc} = \frac{144 \times 6}{3+6} - \frac{144}{2} = 24V$$

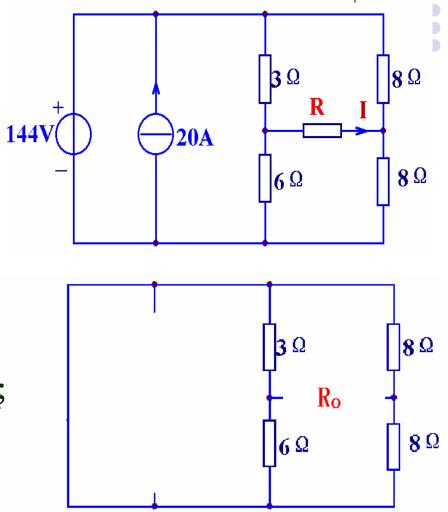
$$R_o = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + \frac{8}{2} = 6\Omega$$



当R=2Ω时: I=3A , P=18W;

当 $R=6\Omega$ 时: I=2A , P=24W;

当R=18Ω时: I=1A , P=18W.

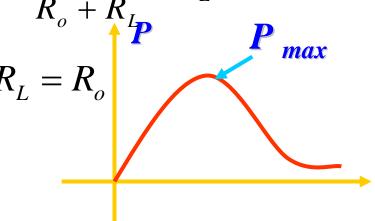


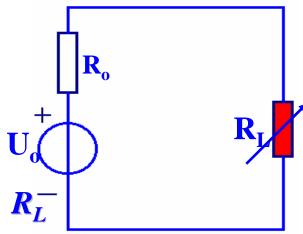
4.4 最大功率传输定理



$$P_{R_L} = (\frac{U_o}{R_o + R_{ID}})^2 R_L$$

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_I} = 0 : :$$

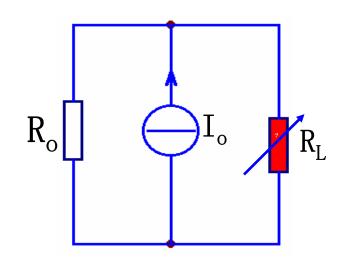




一、定理:

一个实际电源模型向负载 R_L 传输能量,当且仅当 R_L = R_o 时,才可获最大功率 P_{max} 。 并且:

$$P_{m \, ax} = \frac{U_o^2}{4 \, R} \quad \mathbb{R} \quad P_{m \, ax} = \frac{1}{4} \, I_o^2 R_o$$



例: (1) 求电阻R为多少时可获最大功率?





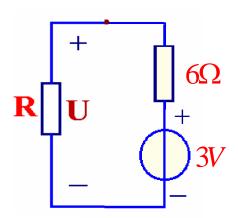
解: 移去R有:
$$U_{oc} = 6I + 3I$$
 $I = \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}A$ $U_{oc} = 3V$

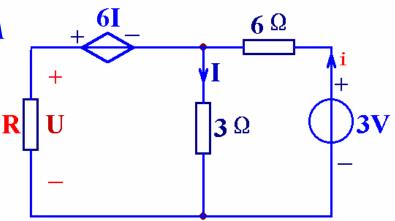
除去独立电源,有 u = 6I' + 6(i - I') R U

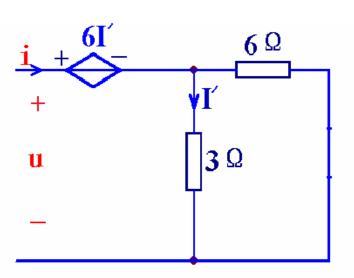
$$R_o = \frac{u}{i} = 6\Omega$$

画出等效电路,有 $R=R_0=6\Omega$

$$P_{\text{max}} = 3/8W$$

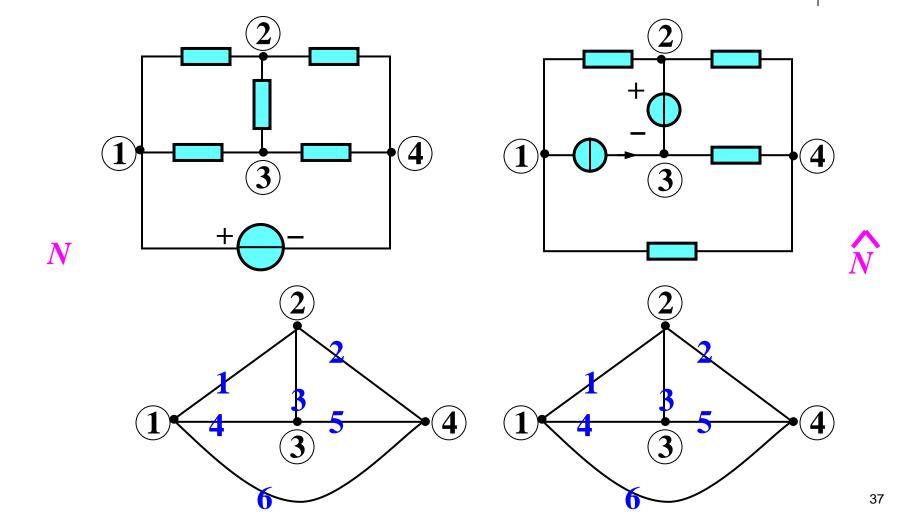


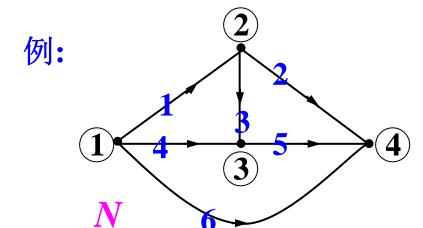


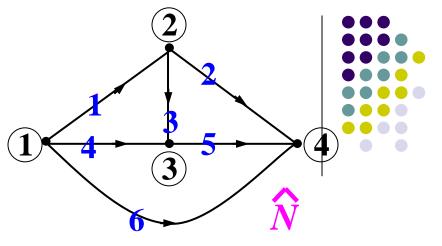


4.5 特勒根定理(Tellegen's Theorem)

一. 具有相同拓扑结构的电路







*对应支路取相同的参考方向

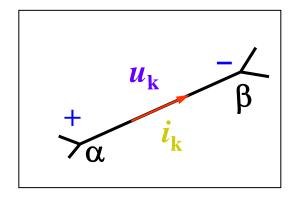
*各支路电压、电流均取关联的参考方向 $\sum_{k=1}^{6} (u_k \hat{i}_k) = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 + u_4 \hat{i}_4 + u_5 \hat{i}_5 + u_6 \hat{i}_6$ $= (u_{n1} - u_{n2}) \hat{i}_1 + (u_{n2} - u_{n4}) \hat{i}_2 + (u_{n2} - u_{n3}) \hat{i}_3$ $+ (u_{n1} - u_{n3}) \hat{i}_4 + (u_{n3} - u_{n4}) \hat{i}_5 + (u_{n1} - u_{n4}) \hat{i}_6$ $= u_{n1} (\hat{i}_1 + \hat{i}_6 + \hat{i}_4) + u_{n2} (-\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3)$ $+ u_{n3} (-\hat{i}_3 - \hat{i}_4 + \hat{i}_5) + u_{n4} (-\hat{i}_2 - \hat{i}_5 - \hat{i}_6) = \mathbf{0}$

二. 特勒根定理

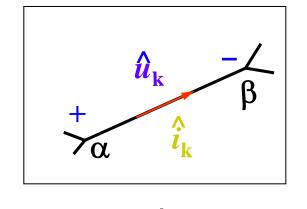
网络N 和 \hat{N} 具有相同的拓扑结构。

取: 1. 对应支路取相同的参考方向

2. 各支路电压、电流均取关联的参考方向



N



特勒根定理

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \qquad \text{All} \qquad \sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$



$$\Leftrightarrow u_k = u_\alpha - u_\beta$$
 , $\hat{i}_k = \hat{i}_{\alpha\beta} = -\hat{i}_{\beta\alpha}$

$$u_k \hat{i}_k = (u_\alpha - u_\beta) \hat{i}_{\alpha\beta} = u_\alpha \hat{i}_{\alpha\beta} - u_\beta \hat{i}_{\alpha\beta} = u_\alpha \hat{i}_{\alpha\beta} + u_\beta \hat{i}_{\beta\alpha}$$

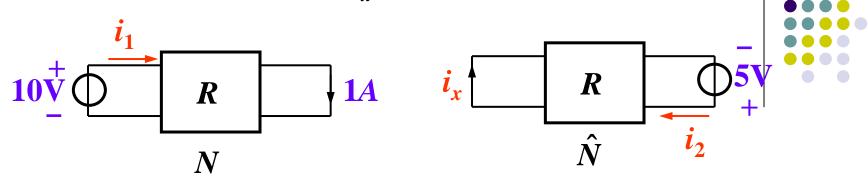
n个节点,有n项

 $\sum_{\alpha} \hat{i}$ 流出节点 α 的 所有支路电流和

同理可证:
$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

功率守恒定理 $\sum_{k=0}^{b} u_k i_k = 0$ 是特勒根定理的特例.

例 已知如图 ,求电流 i_x 。



解 设电流 i_1 和 i_2 ,方向如图所示。

由特勒根定理,得
$$10 \times (-i_x) + 0 \times i_2 + \sum_{3}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$
 $0 \times (-i_1) + (-5) \times 1 + \sum_{3}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$

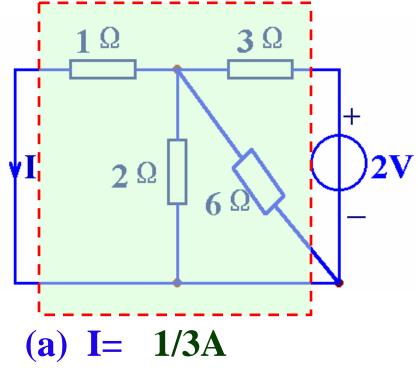
$$\therefore u_k \hat{i}_k = i_k R_k \hat{i}_k = i_k \hat{u}_k$$

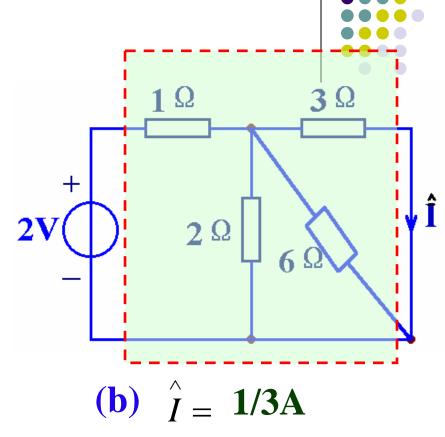
$$\therefore -10i_r = -5 \qquad i_r = 0.5A$$

*4-6 互易定理

一、引例:

例1:

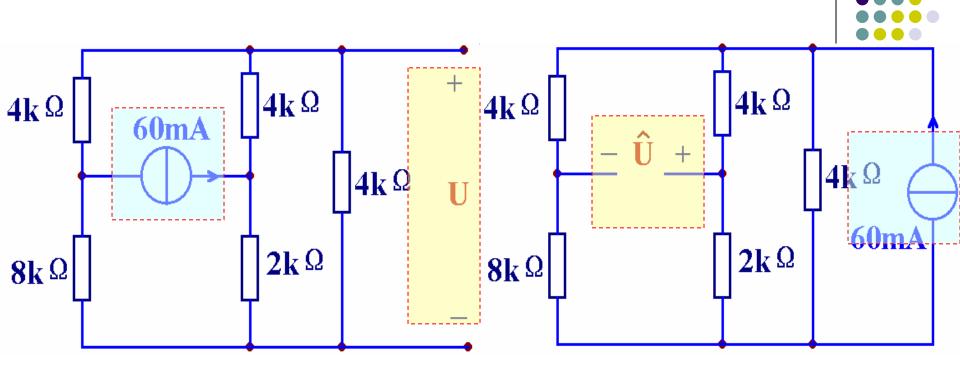




结论:激励电压与响应电流互换位置,响应不变。

例2:

(a) U = -40V

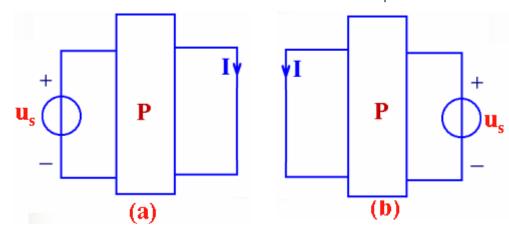


(b) U = -40V

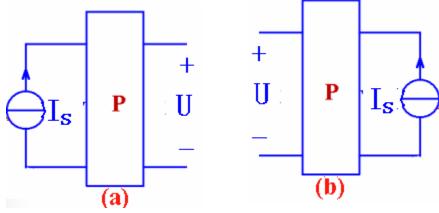
二、定理: 在线性无源单激励电路中,激励与响应互

置,响应不变。

(a) 形式一: 电压源与电流表互换位置, 电流表读数不变。



(b) 形式二: 电流源与电压表互换位置, 电压表读数不变。



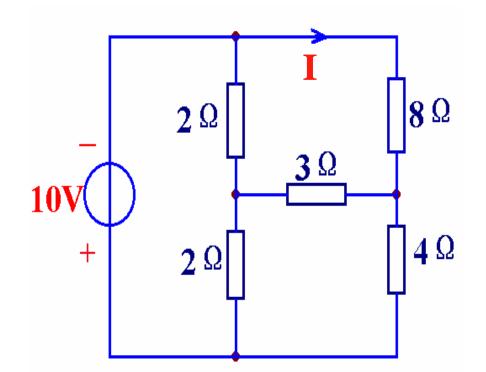
注意:



- (1) 互易定理适用于线性无任何电源网络;
- (2)激励一个,响应一个;
- (3)激励与响应位置互换,其余结构不变;
- (4) 形式一、二中,激励、响应不能为同一量纲;
- (5)激励与响应互换位置后的方向。

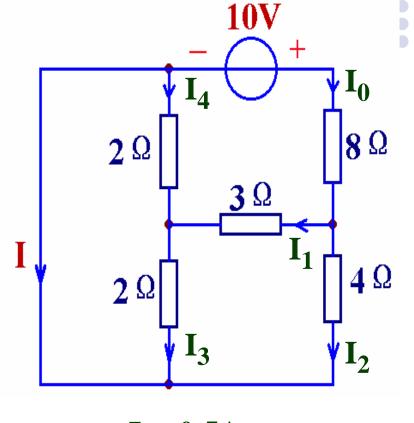
三、定理应用:

例1: 求图示电路中电流I。



解: $I_0 = 1A$

$$I_4 = -0.25A$$

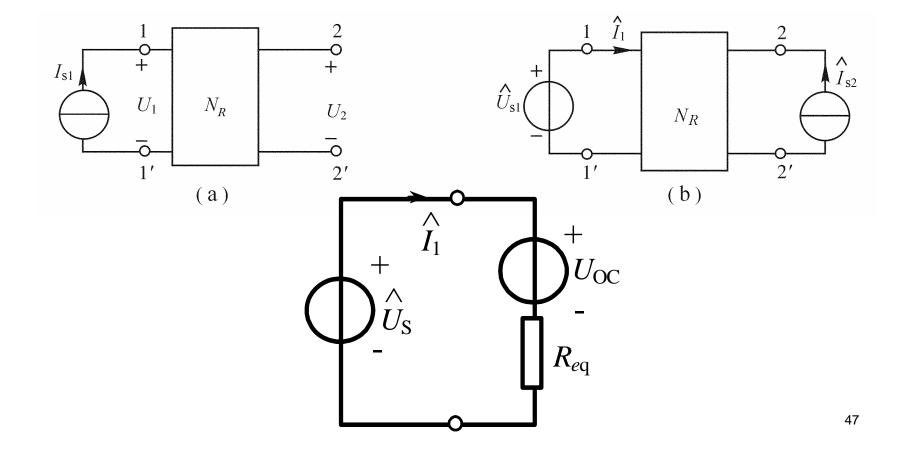


$$I_2 = 0.5A$$

 $I_1 = 0.5A$

$$\therefore$$
 I= -I₀ -I₄ = -0.75A

例 2 图(a)所示电路中,有 I_{S1} =1A, U_1 =2V, U_2 =1V;图(b)中有, $U_{S1}=20V$, $I_{S2}=10A$, N_R 为互 易网络,试确定电流值。



本章小结:

1 叠加定理:

线性电路中任一条支路电流或电压等于各个独立电源单独作用时在该支路所产生的电流或电压的代数和。

2 齐次定理:

线性电路中,当所有激励增大K倍时,其响应也相应增大K倍。

3 替代定理:

在任意集中参数电路中,若第k条支路的电压 U_k 和电流 I_k 已知,则该支路可用理想电压源 U_k 或理想电流源 I_k 或 $R_k = U_k/I_k$ 电阻支路替代。

4 戴维南定理和诺顿定理(等效电源定理):

线性含源单口网络对外电路作用可等效为一个理。 想电压源和电阻的串联组合或一个理想电流源和电阻的 并联组合。

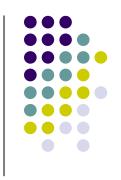
5 最大功率传输定理:

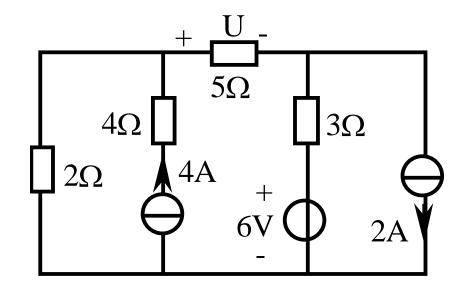
一个实际电源模型(U_o 、 R_o)向负载 R_L 後輸能量, 当且仅当 R_L = R_o 时,才可获最大功率 P_m 。 $4R_o$

6 特勒根定理:

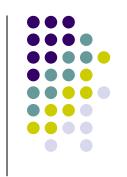
适应于任何线性与非线性、时变与非时变电路, 是网络功率守恒的体现,就是网络全部支路消耗(包 括发出)的功率等于零。

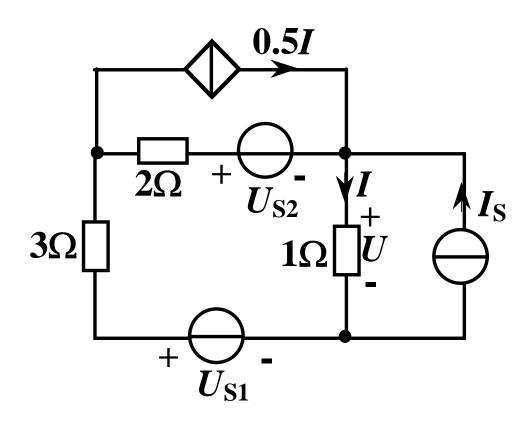




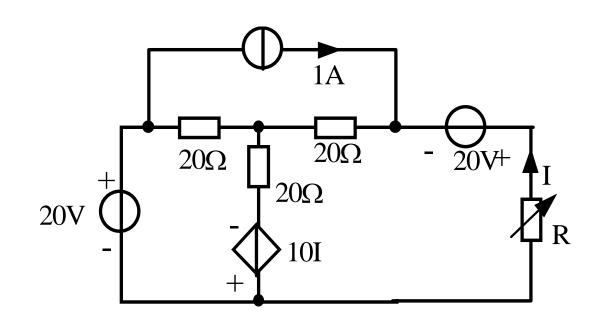


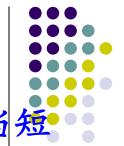
练习2: 电路如图所示, U_{S1} =1V时U=1.5V,求当 U_{S1} =3V时的电压U(1.9V)。



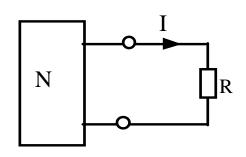


练习3: 如图所示电路, 试求R=?时可获得最大场。 率? 该最大值是多少? (25 Ω , 36W)

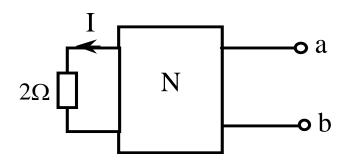




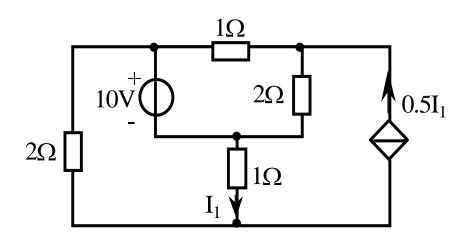
练习4: 含源二端网络N外接R为12Ω时, I=2A; 当 路时, I=5A。当R=32Ω时, I=? (1A)



- 练习5: 如图已知N为线性有源电阻网络。当ab端接4 电阻时, Uab=4V, I=1. 5A; 当ab端接12Ω电阻时, Uab=6V, I=1. 75A。
- 求(1) ab端的戴维南等效电路。(Uoc=8V, Ro=4Ω)
 - (2) ab端接何值电阻时I=1.9A。(R=36Ω)

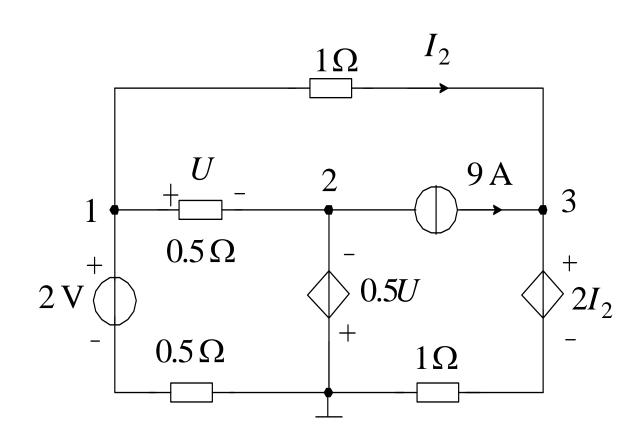






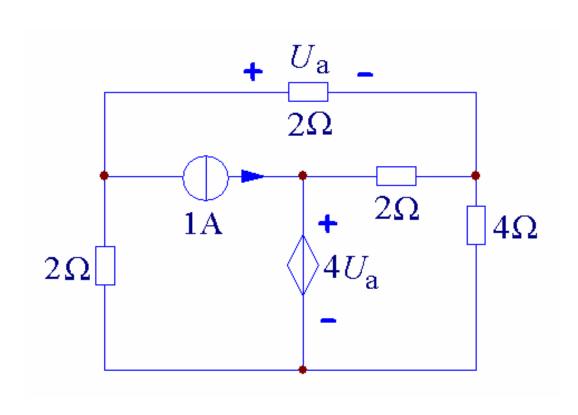


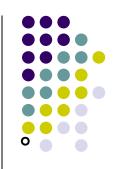
练习7: 电路如图所示,列出节点电压方程。



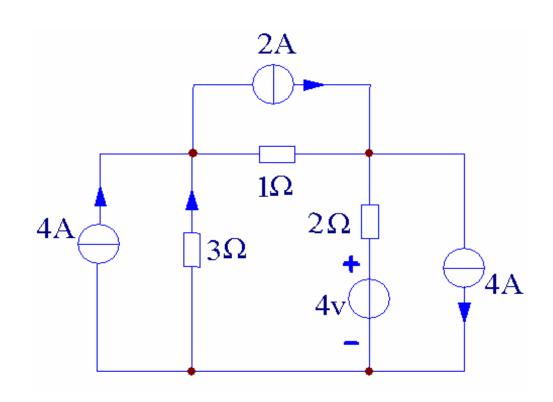


练习8: 求如示电路中受控电压源输出的功率。





练习9: 求如示电路中各激励源输出功率的总和





练习10: 求如示电路中的电压 U_a 。

