简谐振动特征及描述方法

①受回复力：$F=-kx$

②特征方程：$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

简谐振动表达式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

③固有（角）频率：

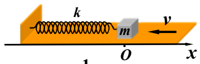
弹簧阵子：$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

④振幅A和初相φ由初始条件决定：

$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}$ $\varphi=\tan^{-1}(-\frac{v_0}{\omega x_0})$

⑤描述方法：解析法、曲线法、旋转矢量法

简谐振动的能量

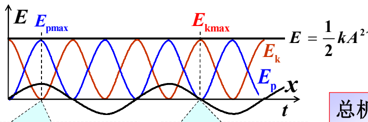


$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$ $\omega^2=\frac{k}{m}$

$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2$

不仅给出了振动系统的振幅，而且给出了振动系统的能量。

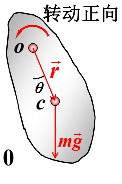


位移最大，势能最大，动能为零。

平衡位置，动能最大，势能为零。

总机械能守恒，振动过程中动能和势能交替转换。

2. 复摆：



刚体受外力作用沿水平轴转一小角时，质心重力就会在刚体上施加回复力矩。

$M=-mgr\sin\theta\approx-mgr\theta$

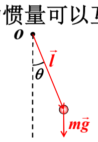
$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgr\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+(mgr/J)\theta=0$

$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$ $\omega=\sqrt{mgr/J}$ $T=2\pi\sqrt{J/mgr}$

周期可以测量，所以质心位置和转动惯量可以互测。

特别对于单摆

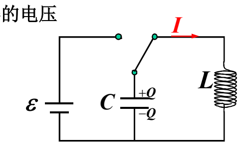
$T=2\pi\sqrt{ml^2/mgl}=2\pi\sqrt{l/g}$ $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$



3. LC电磁振荡：

回路中自感电动势等于电容器的电压

$-L\frac{dI}{dt}=\frac{Q}{C}$， $I=\frac{dQ}{dt}$



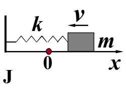
$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q=0$

$Q=Q_0\cos(\omega t+\varphi)$ $\omega=\sqrt{1/LC}$ $T=2\pi\sqrt{LC}$

$I=\frac{dQ}{dt}=-\omega Q_0\sin(\omega t+\varphi)$ $I_0=\omega Q_0$

$I=I_0\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ $E=E_m+E_e=\frac{1}{2}LI^2+\frac{Q^2}{2C}$

例1：弹簧振子质量为m=2.5kg, 弹簧劲度系数k=250N/m, 当振子处于平衡位置右方且向x轴负向运动时开始记时，此时动能为0.2J, 势能为0.6J, 求 (1) t=0时振子的位移和速度; (2)系统的振动函数.



解：(1) $t=0$ 时,

$E_p=\frac{1}{2}kx_0^2=0.6$ J $E_k=\frac{1}{2}mv_0^2=0.2$ J

$x_0=\pm\sqrt{2E_p/k}=\pm0.069$ m 由题意 $x_0=0.069$ m

$v_0=\pm\sqrt{2E_k/m}=\pm0.4$ m/s $v_0=-0.4$ m/s

(2) $t=0$ 时, 系统的总机械能为$E=0.2+0.6=0.8$ J

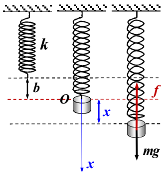
$A=\sqrt{2E/k}=0.08$ m， $\varphi_0=\pi/6$

$\omega=\sqrt{k/m}=10$ rad/s $x=0.08\cos(10t+\pi/6)$

弹簧振子—竖直放置

挂上重物后，弹簧伸长为 b

$$f = mg - kb = 0$$



选平衡位置为坐标原点，取向下为x轴正向，当向下拉重物伸长x（相对平衡位置）时物体所受的合力：

$$F = mg - k(x+b) = mg - kx - kb = -kx$$

$$F = -kx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

例2：将竖直悬挂的弹簧振子(m, k)向下拉使弹簧伸长为$3mg/k$, 然后由静止释放, 要使振子动能达到m^2g^2/k, 至少需要经历的时间是多少? 以平衡位置为原点。

解：平衡时 $mg = kl_0 \Rightarrow A = \frac{3mg}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{2mg}{k}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由初条件知，$\varphi = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega t)$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \boxed{\frac{2m^2g^2}{k}\sin^2(\omega t) = \frac{m^2g^2}{k}}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

§ 4.3 阻尼振动

振动系统因受阻力作用做振幅减小的运动。

摩擦阻尼、辐射阻尼——减幅振动

一、阻尼振动的动力学方程

1. 受力特点：物体受回复力和与速度正比的阻力。

$$f = -\gamma(dx/dt)$$

2. 微分方程：$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}}$ $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{\gamma}{2m} & \text{阻尼系数} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} & \text{无阻尼的固有频率} \end{cases}$$

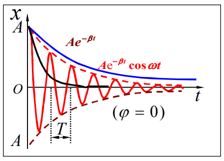
二、三种可能的运动状态

1. 小阻尼：$\beta < \omega_0$

$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0}$

方程的解

$$\boxed{x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$



振幅衰减，周期变大。

2. 大阻尼：$\beta > \omega_0$ $\quad \omega' = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$\boxed{x = Ae^{-(\beta-\omega')t} + Be^{-(\beta+\omega')t}}$ 缓慢回归，没有周期。

3. 临界阻尼：$\beta = \omega_0$

$\boxed{x = e^{-\beta t}(At + B)}$ 快速回归，处于临界。

§ 4.4 受迫振动

阻尼力 ⇒ 消耗系统能量 ⇒ 系统振幅衰减

维持振动 ⇐ 给系统补充能量

一、受迫振动的动力学方程

$\boxed{F = F_0\cos\omega t}$ 外来策动力作用下的振动受迫振动

1. 受力特点：物体受回复力、阻尼力和周期性外力。

2. 微分方程：$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t$ $\quad \boxed{f_0 = \frac{F_0}{m}}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t} \quad \begin{cases} \omega \sim \text{策动频率} \\ \omega_0 \sim \text{固有频率} \\ \beta \sim \text{阻尼系数} \end{cases}$$

二、受迫振动稳态解

方程的解=受迫振动的特解+阻尼振动的通解

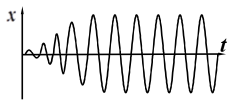
设特解为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + Be^{-\beta t}x'(t)$$

t很大时达到稳态 $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$



稳态时
- ①振动频率等于策动力频率。
- ②振幅不变与初始条件无关。
- ③初相与初始条件无关。

三、共振

1. 位移共振——振动系统受迫振动时，其振幅达极大值的现象。

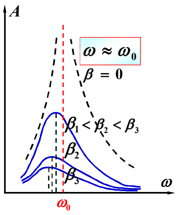
$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=0 \Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

位移共振条件

A有极大值

$$\boxed{A_m=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$



特别对于小阻尼 $\beta<<\omega_0$ ，$\omega=\omega_0$ —尖锐共振

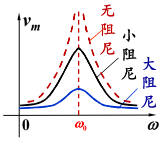
2.速度共振——振动系统受迫振动时，其速度振幅达最大值的现象。 $\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)}$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_m=A\omega=\frac{f_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+(2\beta)^2}}$$

当 $\boxed{\omega=\omega_0}$ 时，$v_m=\dfrac{f_0}{2\beta}$ 极大

速度共振条件



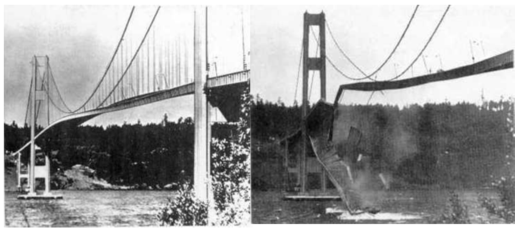
$$\tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v=v_m\cos\omega t$$

速度共振时， 策动力和速度是同相。一周期内策动力总是做正功，向系统输入的能量最大。

弱阻尼时，位移共振和速度共振不加区分。

小号发出的波足以把玻璃杯振碎



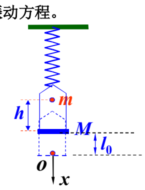
1940年华盛顿的Tocama 悬索桥建成。

同年7月的一场大风引起桥的共振，桥被摧毁。

例3：劲度系数为k的轻弹簧下挂一质量为M的盘子，一质量为m的物体从离盘子h高度处自由下落到盘中并与盘子一起振动。

求：(1)系统的振动周期。(2)系统的振动振幅。(3)取平衡位置为原点，位移向下为正，并以开始振动时作为计时起点，求振动方程。

解：(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ $\qquad T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$



质量为m的物体如果放到盘子里, $l_0=\dfrac{mg}{k}$

(2) 取平衡位置为坐标原点，取x轴向下为正

碰前速度 $v=\sqrt{2gh}$ 碰后共同速度 v_0

$$mv=(m+M)v_0 \qquad v_0=\frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$$

以碰撞过程结束为计时零点，$x_0=-l_0=-\dfrac{mg}{k}$ $\qquad \boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$

$$A=\sqrt{x_0^{\ 2}+\frac{v_0^{\ 2}}{\omega^2}}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}} \qquad \boxed{\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}=\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}}$$