§ 5.5 波的叠加 波的干涉和驻波

一、波的叠加原理

①波的独立传播特性：

可以区分出不同的乐器！欣赏音色丰富、结构复杂的交响乐

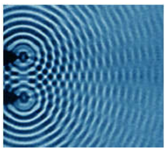
介质中几列 波相遇后，并不改变各自的原有特征（波长、频率、振动方向、传播方向）而继续向前传播。

②波的可叠加性：

在波列相遇的区域，介质每一点的振移是各波列单独在该点引起的振移的矢量和。

$$\boxed{\xi(x,t)=\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)}$$

二、波的干涉



干涉图样

波的干涉：两列波在空间相遇，如果叠加的结果是有的地方的振幅始终加强、有的地方的振幅始终减弱。

即振幅在空间有一个稳定的分布。

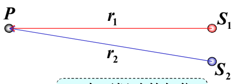
相干波源（相干条件）：
①振动方向平行（不垂直）
②频率相同
③相位差恒定

两个相干波发生干涉时，何处振动加强，何处振动减弱 ？

相干波发生干涉时，振动加强（减弱）的条件：

S_1: $\xi_{10}=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ S_2: $\xi_{20}=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$\xi_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)$$



$$\xi_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

P点的合振动 $\boxed{\xi=\xi_1+\xi_2=A\cos(\omega t+\varphi)}$

P点两振动的相位差，由位置决定

其中：$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$ $\boxed{\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}}$

$$\boxed{I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$$

对于空间任一点，$\Delta\varphi$是恒量（不随时间改变）。

不同位置，$\Delta\varphi$ 不同，A、I 不同，于是产生振幅（或波强）随位置变化的分布图样——干涉图样。

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}\quad\boxed{\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}}$$

$$\boxed{I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$$

如果 $\varphi_2=\varphi_1$，则$\Delta\varphi$取决于(r_2-r_1)，$\boxed{\delta=r_2-r_1}$~波程差

①最大强度处：干涉相长	②最小强度处：干涉相消
$\Delta\varphi=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\ \cdots)$	$\Delta\varphi=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\ \cdots)$
$\boxed{A=A_1+A_2}$ $\boxed{I_{max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}}$	$\boxed{A=\lvert A_1-A_2\rvert}$ $\boxed{I_{min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}}$
$\boxed{\delta_1=k\lambda}$ $(k=0,\pm1,\pm2\ \cdots)$	$\boxed{\delta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}}$ $(k=0,\pm1,\pm2\ \cdots)$

波源同相的两列相干波在空间相遇，波程差等于波长整数倍的各点，振幅最大，波强最大（干涉相长）；波程差等于半波长奇数倍的各点，振幅最小，波强最小（干涉相消）

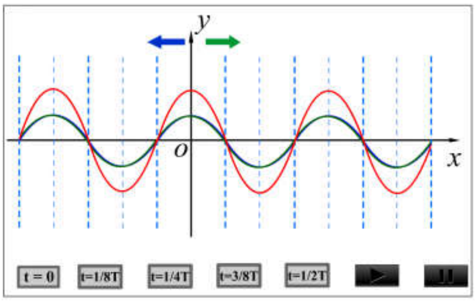
最大值 $\boxed{I_1=I_2,\ I=4I_1}$ $\boxed{I_1=I_2,\ I=0}$ 最小值

在干涉现象中，一些点振动的能量增加为单独波能量的 4 倍，一些点不振动能量为零；某些点的振动能量增加一些，某些点的振动能量减少一些。形成了空间能量的稳定分布。

因此，干涉时，能量既不产生，也不会消失，只是总能量在空间的重新分布。

一般叠加：当任意两列或几列波在相遇处发生叠加时，其结果是很复杂的。非相干波相遇叠加时干涉项为零，平均强度为 $\boxed{I=I_1+I_2}$

三、驻波—两个相向传播的相干波形成的特殊干涉



1. 驻波的表达式

条件：同一媒质中，在同一直线上沿相反方向传播的两列相干波叠加。两波振幅相同，可分别表示为：$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$ $y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$

合成波称为驻波其表达式：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$\boxed{y(t,x) = \boxed{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x} \cdot \cos\omega t}$$ ——驻波函数

振幅随位置而变

各质元均做简谐振动，角频率ω是原来波的频率

讨论 $y(t,x) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$

①振幅 $\left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$只与位置有关，而与时间无关。

振幅最大的点称为波腹，对应于$|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x| = 1$

即 $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$ 的各点。

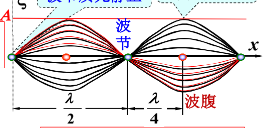
波腹位置 $x = k\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0, \pm1, \pm2\cdots)$

振幅为零的点称为波节，

对应于 $|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x| = 0$

即 $\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 的各点。

波节位置 $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ $(k = 0, \pm1, \pm2\cdots)$



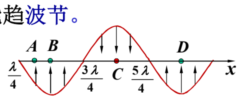
②相位 $\xi = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} \times \cos\omega t$ 　驻波是分段振动的

在相邻两波节之间的质元振动同相；
在同一波节两侧的质元振动反相。
波形定居，但每一位置处的波幅随时间变化。

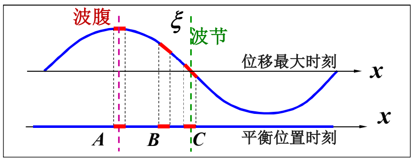
③能量——局部有能量传递

振动的动能与势能在波腹与波节附近质点间相互转化，动能趋波腹、势能趋波节。

驻波无振动状态或相位的传播，无能量的传播，其能流密度为零。行波可以传播相位和能量。

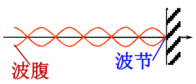


局部有能量传递
- 最大位移时刻
  - 波腹动能零、势能零
  - 波节动能零、势能最大
- 平衡位置时刻
  - 波腹动能最大、势能零
  - 波节动能零、势能零



2. 半波损失

在绳与墙壁固定处，为波节位置。



这一现象说明，在反射端，入射波与反射波在该点各自引起的两个振动位相相反，两相位相差为π，相当于波程差λ/2 ——半波损失。

反射波与入射波形成的驻波在介质分界处是波节还是波腹，与分界处两边的介质性质有关。

当波从波疏媒质垂直入射到波密媒质的界面反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是波节。

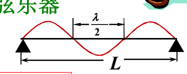
当波从波密媒质垂直入射到波疏媒质的界面反射时，无半波损失，界面处出现波腹。

3. 驻波的波长条件

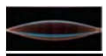
弦线中或激光器谐振腔中都会产生驻波。

① 两端固定的驻波系统——弦乐器

$L = n\frac{\lambda_n}{2}$ $(n = 1, 2, 3\cdots)$



弦上允许出现的驻波波长 $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ 　本征频率 $\nu_n = \frac{nu}{2L}$ 　$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$



$n = 1$ 基频 $\nu_1 = u/2L$

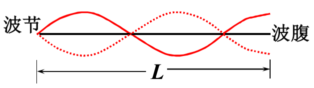
$n = 2$ 二次谐频 $\nu_2 = u/L$

三次谐频

四次谐频

一个驻波系统有多个本征频率。
策动力与某个本征频率相同或相近时就发生共振。

② 一端固定的驻波系统——管乐器



$$L = n\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4} \quad (n = 0, 1, 2\cdots)$$

$$\boxed{\nu_n = \frac{(2n+1)u}{4L}} \quad \begin{cases} \nu_0 & \text{—基频} \\ \nu_n & \text{—谐频} \end{cases}$$

管、弦乐器

少数几个本征频率合成的驻波，当强度适中，可引起愉悦的感觉；过多的本征频率叠加或非本征频率则形成噪声，使人感到不舒服。

例1：A、B为两相干波源，在同一媒质中，波速u =10m/s，频率ν=100Hz，A_1= A_2=5cm，A为波峰时B恰为波谷，求两列波的波函数及传到P点时的干涉结果（假设振幅不衰减）。

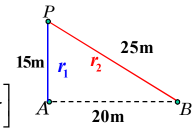
解：$y_A = A_1\cos 2\pi\nu t \qquad y_B = A_2\cos(2\pi\nu t - \pi)$

A波以A为点波源

$$y_A(t,x) = A_1\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

B波以B为点波源

$$y_B(t,x) = A_2\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{u}\right) - \pi\right]$$



$$\Delta\varphi = \left[2\pi\nu\left(t - \frac{r_2}{u}\right) - \pi\right] - 2\pi\nu\left(t - \frac{r_1}{u}\right) = -\pi - 2\pi 100\frac{0.25 - 0.15}{10} = -3\pi$$

$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$ P点振幅为零，静止。

例2：两相干波源分别在 P、Q 两点处，初相相同，它们相距 $3\lambda/2$，由 P、Q 发出频率为ν，波长为λ的两列相干波，R 为PQ 连线上的一点。

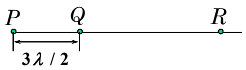
求：①自P、Q 发出的两列波在 R 处的相位差。

②两波源在 R 处干涉时的合振幅。

解：① $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda}{2} = 3\pi$

②$\Delta\varphi$为π 的奇数倍，

合振幅最小 $|A_1 - A_2|$



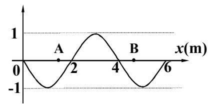
例3 图中曲线表示某驻波 t 时刻的波形曲线。其中平衡位置在A、B的两质元距离为3米。

问：(1) 指出A、B两点的相位差及该驻波的波长；

(2) 如果该曲线是某时刻沿 x 轴正向传播的平面简谐波的波形图，A、B两点的相位差又为多少？

解：(1) A、B两点的相位差为零

驻波的波长 $\lambda = 4\text{m}$

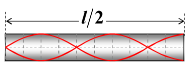


(2) A、B两点的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 1.5\pi$$

例4 长为 l 的金属棒中形成纵波，并且让中点为波节，棒的杨氏模量为Y，密度为ρ_0，求驻波的频率。

解：设 $l/2$ 中有 n 个波节



$$\frac{l}{2} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad (n=1、2、3\ldots.)$$

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{2n+1}$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \Rightarrow \nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{2n+1}{2l}\sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$$

例5 如图所示的是一端固定、一端开放的驻波，虚线与实线都表示振移最大时的波形曲线。若波速为100m/s，

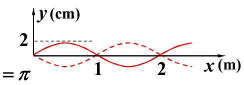
求：(1) 写出形成此驻波的行波的波函数；

(2) 驻波方程及波节的位置。

解：(1) $u = 100\text{m/s}$

$A = 0.01\text{m} \quad \lambda = 2\text{m}$

$\nu = u/\lambda = 50\text{Hz} \quad k = 2\pi/\lambda = \pi$



设入射波波函数为 $\xi_-(x,t) = 0.01\cos(100\pi t + \pi x)$

反射波波函数为 $\xi_+(x,t) = 0.01\cos(100\pi t - \pi x - \pi)$

(2) 驻波方程为

$$\xi(x,t) = 0.02\cos(\pi x + \pi/2)\cos(100\pi t - \pi/2)$$

$$\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \pi x + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k,\ (k = 0,1,2\cdots)$$