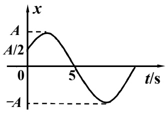
作业9-2：一简谐振动的曲线如图所示，求该振动的周期。



解：$t=0,\ x_0=\dfrac{A}{2} \Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{1}{2}$

$\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$t=0$ 时，$v>0 \Rightarrow \varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

$t=5$ 时，$x=0 \Rightarrow 0=A\cos(\dfrac{2\pi}{T}\times 5-\dfrac{\pi}{3})$

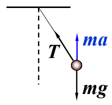
$\dfrac{2\pi}{T}\times 5-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow T=12\ (\mathrm{s})$

思考题 一弹簧振子竖起挂在电梯内，当电梯静止时振子谐振动频率为ν_0，现使电梯以加速度a向上作匀加速运动，则其简谐振动的频率将如何变化？（填不变、变大、变小、变大变小都有可能）

$\boxed{\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\ \text{不变}}$

一单摆挂在电梯顶上，当电梯静止时，单摆的谐振动周期为T_0，现使电梯向下作匀加速运动，则单摆周期将如何变化？（变大、变小、不变）

$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$ $\boxed{T'=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}}$



变大

阻尼振动方程 $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$

1. 小阻尼：$\beta<\omega_0$ $\boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}>T_0}$

$\boxed{x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)}$

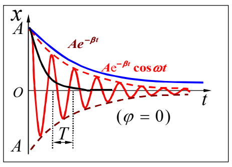
振幅衰减，周期变大。

2. 大阻尼：$\beta>\omega_0$

缓慢回归，没有周期。

3. 临界阻尼：$\beta=\omega_0$

快速回归，处于临界。



受迫振动

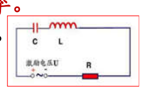
$\boxed{F=F_0\cos\omega t}$ 外来策动力作用下的振动受迫振动

1. 受力特点：物体受回复力、阻尼力和周期性外力。

2. 微分方程：$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t}$

3. 稳态解：$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$ $\begin{cases}\omega\ \sim\text{策动频率}\\ \omega_0\sim\text{固有频率}\\ \beta\ \sim\text{阻尼系数}\end{cases}$

稳态时 ①振动频率等于策动力频率。 ②振幅不变与初始条件无关。 ③初相与初始条件无关。



当 $\boxed{\omega=\omega_0}$ 时，速度共振、位移共振（弱阻尼）。

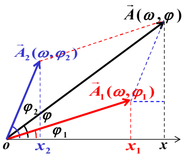
§ 4.5 同方向简谐振动的合成

一、同方向同频率的简谐振动合成

分振动 $\left\{\begin{array}{l} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{array}\right\}$ $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$

由A_1、A_2组成的平行四边形保持形状，以ω角速度旋转——

合振动是简谐振动角频率为ω



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$ 由余弦定理求振幅

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$ 由三角函数求初相

合成振动的特点 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

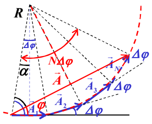
①二者的相位相同：$\Delta\varphi = 2k\pi \;\rightarrow\; A_{max} = A_1 + A_2$

②二者的相位相反：$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \rightarrow A_{min} = |A_1 - A_2|$

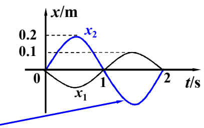
③二者的其它相差：$A_{min} \le \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \le A_{max}$

若两振幅相同，最大能量达四倍，最小能量可为零。

多个同方向同频率简谐振动的合成—用矢量相加，在讨论光的干涉和衍射时有重要应用。



例1：两同频率(ω)同方向简谐振动曲线如图所示，其合振动方程为(　　　)。



解：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$

$A = A_2 - A_1 = 0.1\text{ m}$

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

$$x = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})\ \text{(SI)}$$

两振动反相，合振动减弱，并与大振幅者同相位。

二、同方向不同频率简谐振动的合成

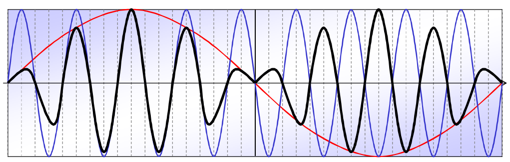
两个振动的合成 $A_1 = A_2 = A,\ \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

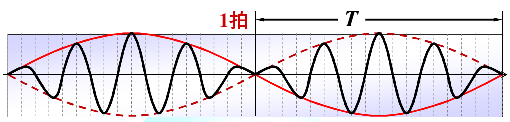
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t+\varphi) + A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi)$$

$\omega_2 \approx \omega_1$

$\omega_2 - \omega_1 << \omega_1, \omega_2$ ～前项为振幅，后项为振动、初相





$$x = x_1 + x_2 = 2A_0\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi)$$

合振动可看作振幅缓变的简谐振动—拍振动。

频率相差很小的两个同方向的合振动忽强忽弱的现象—拍。合振动每变化一个周期叫做一拍。

$$T = \frac{1}{\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|/2\pi} = \frac{2}{|\nu_2-\nu_1|}\quad \left\{\begin{array}{l} T_{拍} = \dfrac{1}{|\nu_2-\nu_1|} \\ \nu_{拍} = |\nu_2-\nu_1| = \left|\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right| \end{array}\right.$$

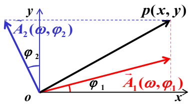
合振幅变化的频率——拍频
和标准音叉出现的拍音消失，来校准乐器

§ 4.6 相互垂直的简谐振动的合成

一、垂直方向同频率简谐振动的合成

质点位移为各个位移的矢量和。

$\vec{r}=\sum \vec{r}_i \to x=\sum x_i, y=\sum y_i, z=\sum z_i$



光学中，两个振动的和称偏振。

$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)=A_1\cos\theta \Rightarrow x/A_1=\cos\theta$

$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)=A_2\cos(\theta+\Delta\varphi) \Rightarrow y/A_2=\cos(\theta+\Delta\varphi)$

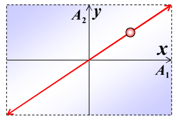
$\cos(\theta+\Delta\varphi)=\cos\theta\cos\Delta\varphi-\sin\theta\sin\Delta\varphi$ 移项、平方

$y/A_2=(x/A_1)\cos\Delta\varphi-\sqrt{1-(x/A_1)^2}\sin\Delta\varphi$

$\boxed{(x^2/A_1^2)-(2xy/A_1A_2)\cos\Delta\varphi+(y^2/A_2^2)=\sin^2\Delta\varphi}$

$\boxed{(x^2/A_1^2)+(y^2/A_2^2)-(2xy/A_1A_2)\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$

1. 二者相位相同：$\Delta\varphi=2k\pi$



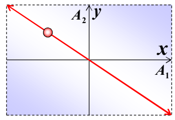
$y=A_2\cos(\omega t+\varphi)$

$x=A_1\cos(\omega t+\varphi)$

$\boxed{y=\frac{A_2}{A_1}x}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$ 直线轨迹谐振动

2. 二者相位相反：$\Delta\varphi=(2k+1)\pi$



$y=A_2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$

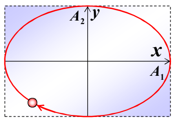
$x=A_1\cos(\omega t+\varphi)$

$\boxed{y=-\frac{A_2}{A_1}x}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$ 直线轨迹谐振动

$\boxed{(x^2/A_1^2)+(y^2/A_2^2)-(2xy/A_1A_2)\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$

3. 相位超前$\pi/2$:$\Delta\varphi=2k\pi+\pi/2$



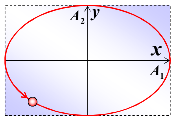
$y=-A_2\sin(\omega t+\varphi)$

$x=A_1\cos(\omega t+\varphi)$

$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$

y超前$\pi/2$，轨迹顺时针右旋椭圆。

4. 相位落后$\pi/2$:$\Delta\varphi=2k\pi-\pi/2$



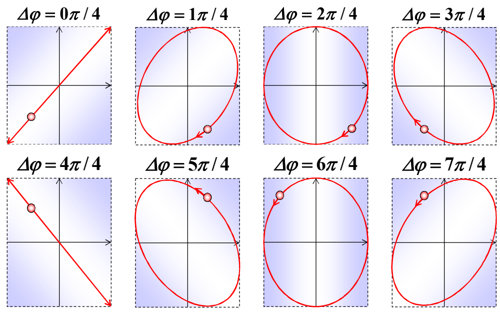
$y=A_2\sin(\omega t+\varphi)$

$x=A_1\cos(\omega t+\varphi)$

$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$

y落后$\pi/2$，轨迹逆时针左旋椭圆。

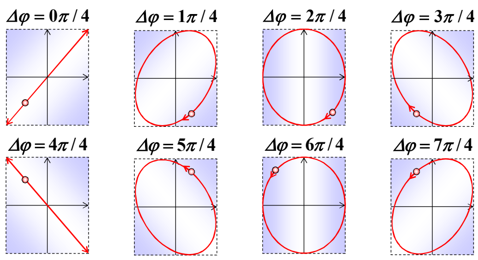
5. 其它相位关系 $\begin{cases}\Delta\varphi=0\sim\pi \to \text{顺时针}\\ \Delta\varphi=\pi\sim 2\pi \to \text{逆时针}\end{cases}$



二、垂直方向不同频率简谐振动的合成

1. 频率相差很小 $\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$

可看做频率相等，而相差随时间缓慢变化并重复所有值，故形成如前的动态图形。

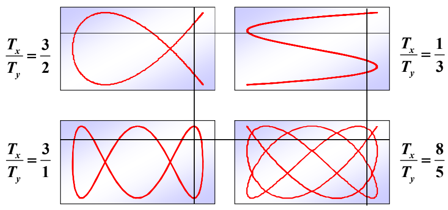


2. 频率呈简单整数比

①当频率不同时轨迹比较复杂，通常不稳定不闭合。

②若频率呈简单整数比，轨迹闭合—李萨如图形。

$\frac{T_x}{T_y}=\frac{n_x}{n_y}$ 曲线与x轴的交点 曲线与y轴的交点 经常用来测量未知振动的频率



应用程序

§ 4.7 谐振分析

一、谐振分析

把一个复杂的周期振动分解为一系列简谐振动之和的方法。

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum[a_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]\quad\begin{cases}a_0=\dfrac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t\\ a_k=\dfrac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t+\varphi_k)\mathrm{d}t\end{cases}$$

ω—基频（原周期函数的频率）

各个分振动中频率最低的

$k=2$ 二次谐频（2ω）

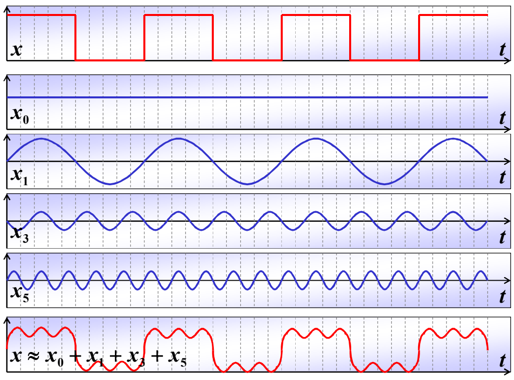
$k=3$ 三次谐频（3ω）

……

$k=n$ n 次谐频（$n\omega$）

$k\omega\ (k=2,3\ldots)$ —k次谐频

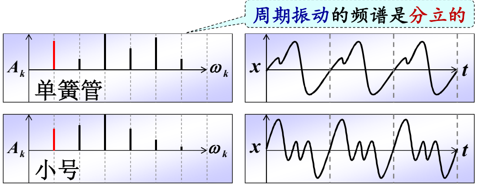
这样分解在数学上的依据是傅立叶级数和傅立叶积分的理论，因此这种方法称为傅立叶分析。



二、频谱图 $x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum[A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]$

频谱：将每项的振幅A和对应的角频率ω画成图线，就可以得到该复杂振动的频谱。

周期振动的频谱是分立的



基频决定音高，频谱决定音色。

音高相同，音色不同，因为高次谐频的个数和振幅不同——频谱不同。

§ 4.8 相空间中振动的轨道

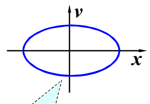
位形空间：由位置坐标构成 $(x,\ y,\ z)$

相空间：由位置 和动量 构成 $(p,\ x)$

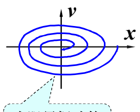
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{(A\omega)^2}=1$$



简谐振动的相空间曲线



小阻尼振动的相空间曲线

$$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=-\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)-\omega Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

小阻尼

简谐振动的合成

- 同方向简谐振动的合成（一维）
  - 同频率 两个特殊情况 {同相、反相}
    - $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$
    - $\varphi=\arctan\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$
  - 不同频率（相差不大）
    - $x=2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\ \cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi)$
    - $\nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|=\left|\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right|$
- 相互垂直简谐振动的合成（二维）
  - 同频率 一般斜椭圆
    - 具体形状由A_1、A_2、$\Delta\varphi$确定
  - 不同频率 {频率相差不大、频率成整数比} 李萨如图形