第2章 质点和质点系动力学

§ 2.3 动量定理和动量守恒定律

车辆超载容易引发交通事故

车辆超速容易引发交通事故

在研究机械运动状态的改变时，必须同时考虑质量和速度这两个因素。

一、动量、冲量与质点的动量定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} \Rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p}}$$

动量定理的微分形式

合外力的冲量 $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ 动量的增量

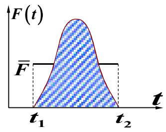
动量定理的积分形式

说明
①冲量的方向与动量增量的方向一致。
②在非惯性系中合外力包括惯性力。
③可写成分量式求解，

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \,\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x}$$

平均冲力：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\cdot\mathrm{d}t \quad \text{单位：N·s}$$



$$\bar{\vec{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}t = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

平均冲力

一定　　延长，冲量增加

$$\Delta\vec{p} = \bar{\vec{F}}\,\Delta t$$

一定　　延长，缓冲作用

例1：篮球 $m = 1$kg，以 $v = 6$ ms^{-1} 撞在篮板上，设碰撞时间 $\Delta t = 0.01$s，碰撞前后速度与蓝板法线夹角都是 $\alpha = 60^{\circ}$，速率不变。求：篮板受到的平均作用力。

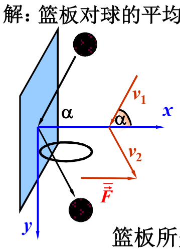
解：篮板对球的平均力

$$F_x = \frac{I_x}{\Delta t} = \frac{m v_{2x} - m v_{1x}}{\Delta t}$$

$$= \frac{2 m v \cos\alpha}{\Delta t} = 600\text{N}$$

$$F_y = \frac{I_y}{\Delta t} = 0 \quad \text{略去重力}$$

$$\vec{F} = 600\vec{i}\ \text{N}$$

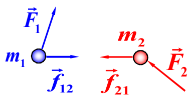


篮板所受平均作用力 $\vec{F}' = -600\vec{i}\ \text{N}$

二、质点系的动量定理

$$\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{f}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}$$



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}$$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$ ----质点系动量定理的微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$ ----质点系动量定理的积分形式

内力只改变系统内单个质点的动量，不改变系统的总动量。

三、动量守恒定律

1. 动量守恒定律的条件

$\vec{F}_{外}=0 \Longrightarrow \vec{P}=$常矢量　动量守恒定律

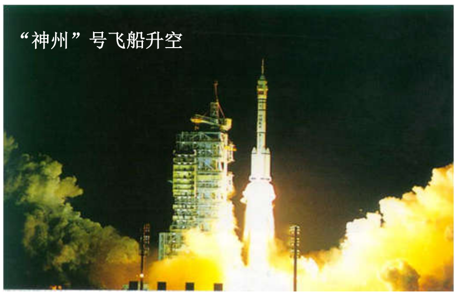
可应用于任何一个分量

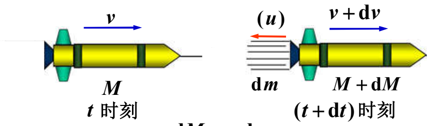
$$\begin{cases} F_x=0 & \Rightarrow P_x=\text{常量} \\ F_y=0 & \Rightarrow P_y=\text{常量} \\ F_z=0 & \Rightarrow P_z=\text{常量} \end{cases}$$

系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变。

有时系统合外力不为零，但外力远小于系统的内力，如碰撞、爆炸等问题，仍可近似应用动量守恒定律。

2. 火箭飞行原理





$dM=-dm$

喷出气体相对火箭体的速度 u— 喷气速度

喷出气体相对地球的速度为 $v-u$

t 时刻的动量 $P=Mv$

$t+dt$ 时刻的动量

$$P'=(M+dM)(v+dv)+dm(v-u)$$

忽略空气阻力和万有引力，系统动量守恒：

$$P=P' \Longrightarrow M\,dv=u\,dm=-u\,dM$$

$$dv=-u\frac{dM}{M} \Longrightarrow \int_{v_1}^{v_2}dv=-u\int_{M_1}^{M_2}\frac{dM}{M} \Longrightarrow \underbrace{v_2-v_1}_{\text{速度增量}}=u\ln\underbrace{\frac{M_1}{M_2}}_{\text{质量比}}$$

2. 火箭的推力

火箭体对喷射的气体的推力 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$

以 dt 时间喷出的气体 dm 为系统

被喷出前 $p_1=v\,dm$　被喷出后 $p_2=(v-u)dm$

气体受到冲量 $Fdt=p_2-p_1=-udm$

气体受到推力 $F=-u\dfrac{dm}{dt}$　火箭受到推力 $F'=u\dfrac{dm}{dt}$

3. 提高速度的途径：

①$u\uparrow$ 用高能推进剂　②$\dfrac{M_1}{M_2}\uparrow$ 受限，采用多级火箭

终速度为：$v=u_1\ln N_1+u_2\ln N_2+u_3\ln N_3+\cdots$

四、质心运动定理

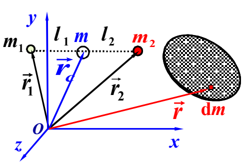
1. 质心的位置：质心由系统结构确定，与坐标系无关。

$$\vec{r}_c=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{\Sigma m_i}$$

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$m_1(x_c-x_1)=m_2(x_2-x_c)$$

$m_1l_1=m_2l_2$ 满足杠杆法则



$$\boxed{\vec{r}_c=x_c\vec{i}+y_c\vec{j}+z_c\vec{k}}$$

$x_c=\dfrac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}$　分立　　连续分布 $x_c=\dfrac{\int_M x\,dm}{M}$

2. 质心运动定理：

$$\vec{r}_c=\frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{\Sigma m_i}\quad \sum m_i=m\quad \boxed{m\vec{r}_C=\sum m_i\vec{r}_i}$$

$$m\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\Sigma m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\sum m_i\vec{v}_i=\sum\vec{p}_i=\boxed{\vec{P}=m\vec{v}_c}$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\vec{v}_i=\sum m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\sum m_i\vec{a}_i=\sum\vec{F}_i=\boxed{\vec{F}=m\vec{a}_c}$$

质心运动定理

质心运动只与系统所受合外力相关

①内力不改变质心的运动状态，但改变各质点的运动状态。

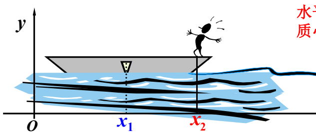
②质点系所受合外力为零，则动量守恒，质心速度不变。

③可以用质心运动来代表整个物体的运动。

例2：人和船质量分别为m和M，船长L，忽略水的阻力，当人从船头行至船尾，问：船在水面上行？

水平方向不受外力，质心位置不变。

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{合外力}$$



$$x_c = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} = \frac{M x_1' + m x_2'}{M + m} \Rightarrow \Delta x_c = \frac{M\Delta x_1 + m\Delta x_2}{M+m}$$

$$M\Delta x_1 + m\Delta x_2 = 0$$

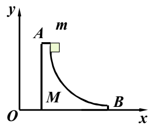
船相对水面位移　人相对水面位移

$$\Delta x_2 = \Delta x_2' + \Delta x_1 = -L + \Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \frac{mL}{M+m}$$

例3: 质量为M的物体静止在光滑的水平面上，AB是半径为R的四分之一圆周。质量为m的物体沿M从A点无初速的滑下来。求m滑到B点时，M在水平地面上移动的距离。

解:将m及M视为一个系统，系统动量的水平分量守恒，则有:



$$mv_x + M(-V) = 0$$

$$MV = mv_x$$

两边对t积分 $M\int_0^t V\mathrm{d}t = m\int_0^t v_x \mathrm{d}t$

S与s表示M与m在水平方向移动的距离。

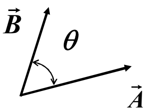
$$MS = ms$$

由伽利略变换有 $s = R - S$

$$S = \frac{m}{M+m}R$$

矢量的点乘（点积、标积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$



两矢量的点乘结果为一个标量。

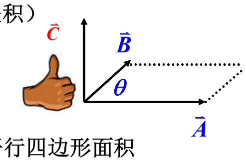
$\theta < \pi/2$ 时，$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta > 0$

$\theta > \pi/2$ 时，$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta < 0$

$\theta = \pi/2$ 时，$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 0$

矢量的叉乘（叉积、矢积）

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$



大小：两矢量构成的平行四边形面积

$$|\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

方向：沿小于π的夹角由$\vec{A}$转向$\vec{B}$的右手螺旋前进的方向。