

# 期中考试安排如下

考试时间：本周星期日 9-10节  
6:00-7:40

考试地点：电信 综253  
电气 综153

# 第6章 频率特性与谐振电路

## ● 重点:

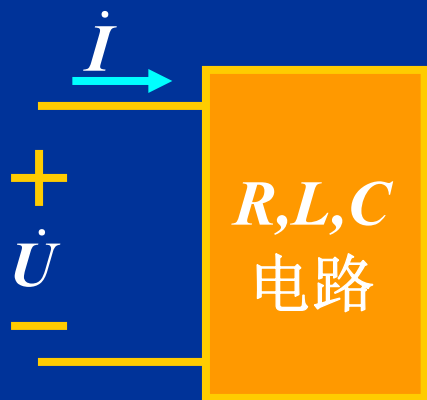
- \*1. 频率特性的概念; (6.1自学)
- 2. 串联及并联谐振电路;
- 3. 谐振电路的频率特性.

## 6. 2 谐振电路

谐振 (*resonance*) 是正弦电路在特定条件下所产生的一种特殊物理现象, 谐振现象在无线电和电工技术中得到广泛应用, 对电路中谐振现象的研究有重要的实际意义。

### 1. 谐振的定义

含有  $R$ 、 $L$ 、 $C$  的一端口电路, 在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时, 称电路发生了谐振。



$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = R$$

发生  
谐振



**谐振时会在某些元件上产生高电压或大电流！**

利用

无线电工程：收音机  
电视机

工业生产：高频淬火  
高频加热

电子测量技术：.....

.....

避免

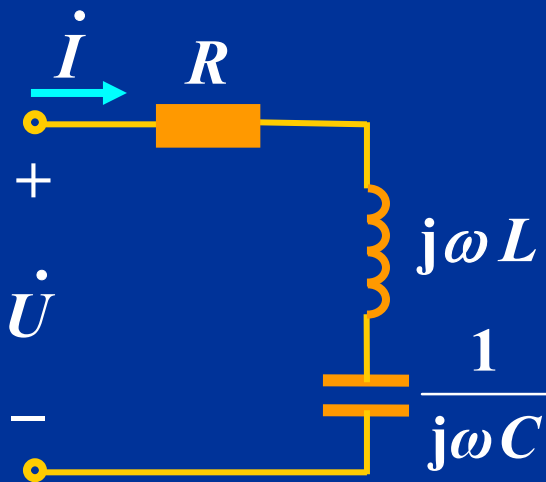
电力系统：

电子线路：

.....

## 6.2.1 串联谐振

$$\begin{aligned} Z &= R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}(X_L + X_C) \\ &= R + \mathrm{j}X \end{aligned}$$



当  $X = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$  时，电路发生谐振。

谐振条件

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振角频率 (*resonant angular frequency*)

仅与电路参数有关

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振频率 (*resonant frequency*)

## 串联电路实现谐振的方式:

(1)  $LC$  不变, 改变  $\omega$ 。

$\omega_0$  由电路本身的参数决定, 一个  $RLC$  串联电路只能有一个对应的  $\omega_0$ , 当外加频率等于谐振频率时, 电路发生谐振。

(2) 电源频率不变, 改变  $L$  或  $C$  (通常改变  $C$ )。

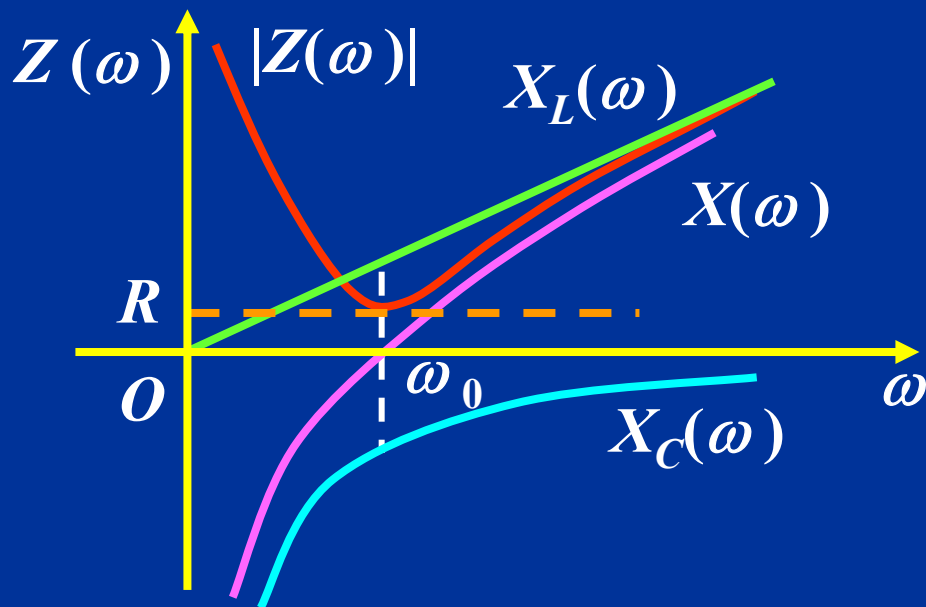
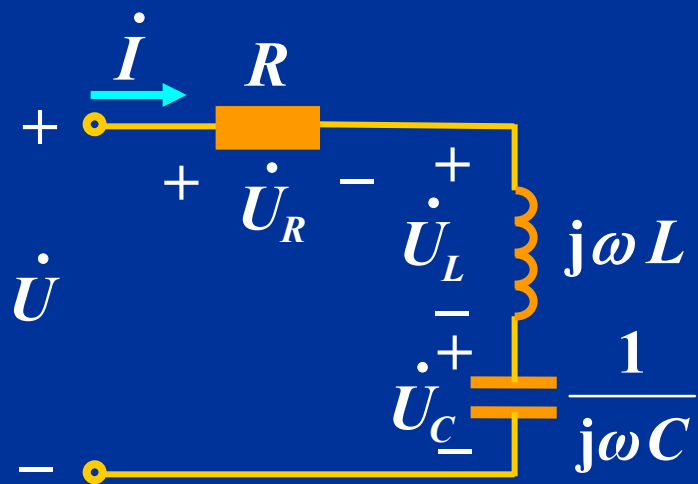
### 3. $RLC$ 串联电路谐振时的特点

(1).  $\dot{U}$  与  $\dot{I}$  同相.  $\longrightarrow$

入端阻抗  $Z$  为纯电阻, 即  $Z=R$ 。电路中阻抗值  $|Z|$  最小。

电流  $I$  达到最大值  $I_0=U/R$  ( $U$  一定)。

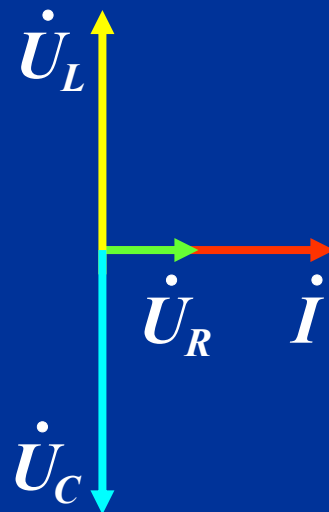




(2)  $LC$ 上的电压大小相等，相位相反，串联总电压为零，也称电压谐振，即

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0, LC \text{ 相当于短路。}$$

电源电压全部加在电阻 上,  $\dot{U}_R = \dot{U}$



$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = j\omega L \frac{\dot{U}}{R} = jQ\dot{U}$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{\dot{I}}{\omega C} = -j\omega L \frac{\dot{U}}{R} = -jQ\dot{U}$$

$$|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C| = QU$$

特性阻抗

品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

当  $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) \gg R$  时,

$$U_L = U_C \gg U$$





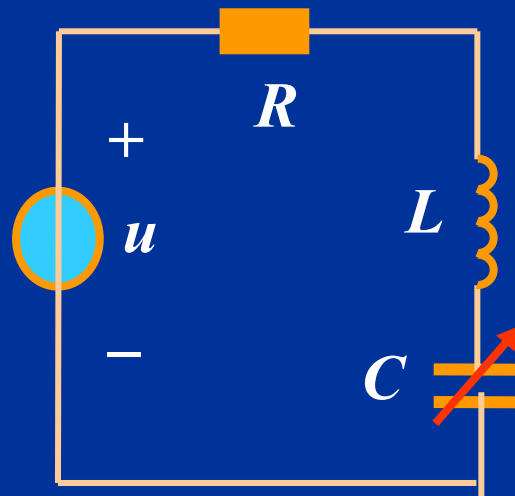
**例** 某收音机  $L=0.3\text{mH}$ ,  $R=10\Omega$ , 为收到中央电台 $560\text{kHz}$ 信号, 求 (1) 调谐电容 $C$ 值; (2) 如输入电压为 $1.5\mu\text{V}$ 求谐振电流和此时的电容电压。

**解** (1) 
$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = 269\text{pF}$$

(2) 
$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1.5}{10} = 0.15\mu\text{A}$$

$$U_C = I_0 X_C = 158.5\mu\text{V} \gg 1.5\mu\text{V}$$

$$\text{or } U_C = QU = \frac{\omega_0 L}{R} U$$



### (3) 谐振时的功率

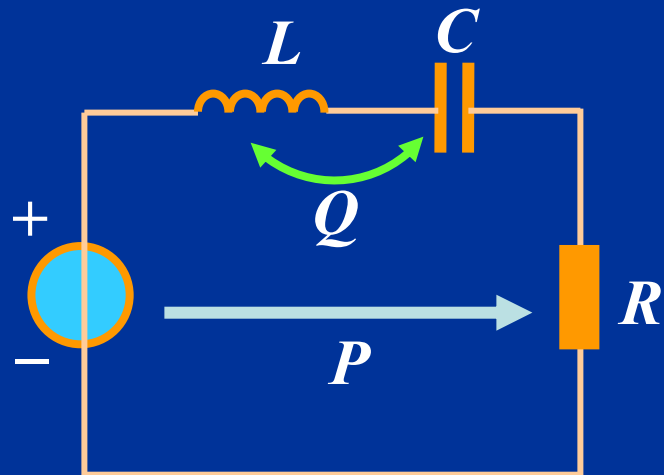
$$P = UI \cos \varphi = UI = RI_0^2 = U^2/R,$$

电源向电路输送电阻消耗的功率，电阻功率达最大。

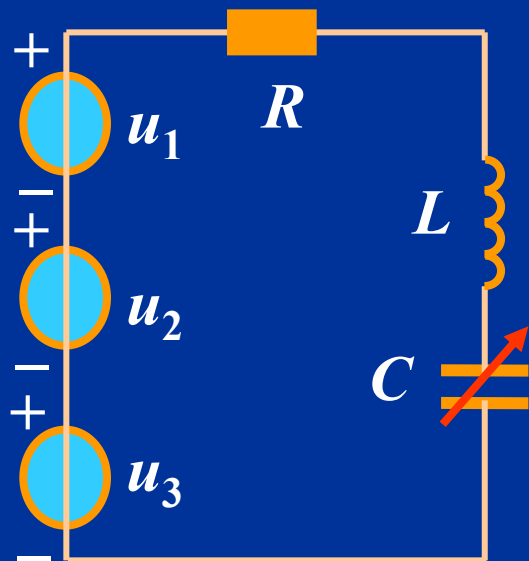
$$Q = UI \sin \phi = Q_L + Q_C = 0$$

$$Q_L = \omega_0 L I_0^2, \quad Q_C = -\frac{1}{\omega_0 C} I_0^2 = -\omega_0 L I_0^2$$

电源不向电路输送无功。电感中的无功与电容中的无功大小相等，互相补偿，彼此进行能量交换。



例



一接收器的电路参数为:

$L=250\mu\text{H}$ ,  $R=20\Omega$ ,  $C=150\text{pF}$ (调好),  
 $U_1=U_2=U_3=10\mu\text{V}$ ,  $\omega_0=5.5\times 10^6\text{ rad/s}$ ,  
 $f_0=820\text{ kHz}$ .

	北京台	中央台	北京经济台
$f\text{ (kHz)}$	820	640	1026
$j\omega L$	j1290	j1000	j1611
$\frac{1}{j\omega C}$	-j1290	-j1660	-j1034
$jX$	0	-j 660	-j577
$I=U/ Z  \text{ (}\mu\text{A)}$	$I_0=0.5$	$I_1=0.0152$	$I_2=0.0173$

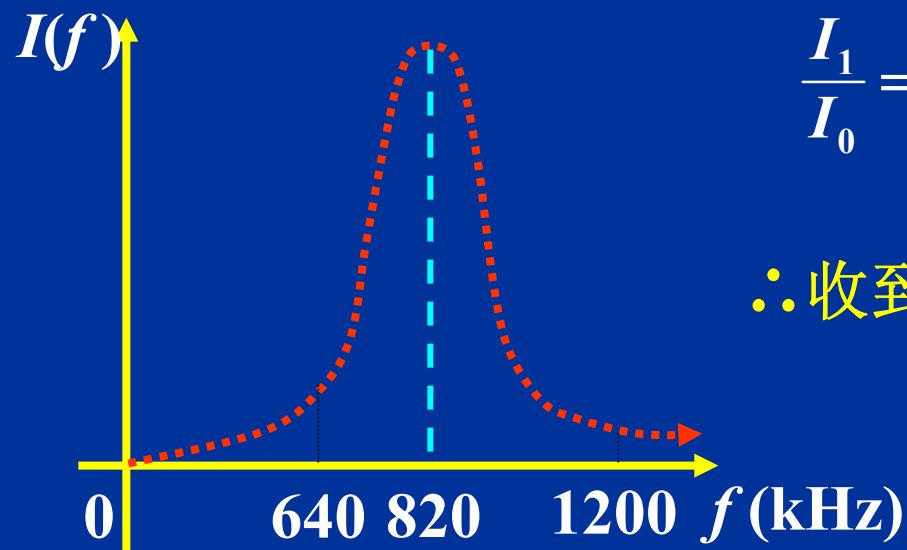


$$I=U/|Z| \text{ (}\mu\text{A)}$$

$$I_0=0.5$$

$$I_1=0.0152$$

$$I_2=0.0173$$

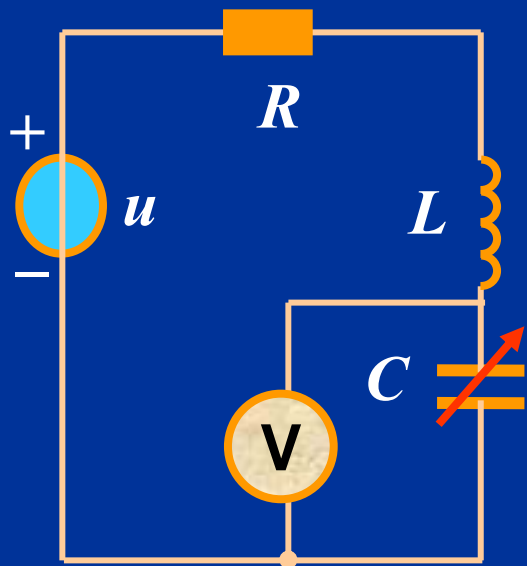


$$\frac{I_1}{I_0} = 3.04\% \quad \frac{I_2}{I_0} = 3.46\% \quad \text{小得多}$$

$\therefore$  收到北京台820kHz的节目。



例



一接收器的电路参数为： $U=10V$   
 $\omega=5\times 10^3 \text{ rad/s}$ ，调C使电路中的电流最大， $I_{\max}=200\text{mA}$ ，测得电容电压为600V，求R、L、C及Q

解

$$R = \frac{U}{I_0} = \frac{10}{200 \times 10^{-3}} = 50\Omega$$

$$U_c = QU \Rightarrow Q = \frac{U_c}{U} = \frac{600}{10} = 60$$

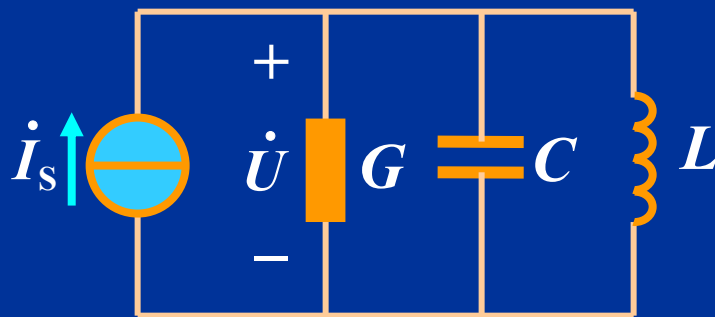
$$L = \frac{RQ}{\omega_0} = \frac{50 \times 60}{5 \times 10^3} = 600\text{mH}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 0.0667 \mu F$$



## 6.2.2 并联电路的谐振

### 1. $G$ 、 $C$ 、 $L$ 并联电路



对偶:

$R L C$  串联

$G C L$  并联

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

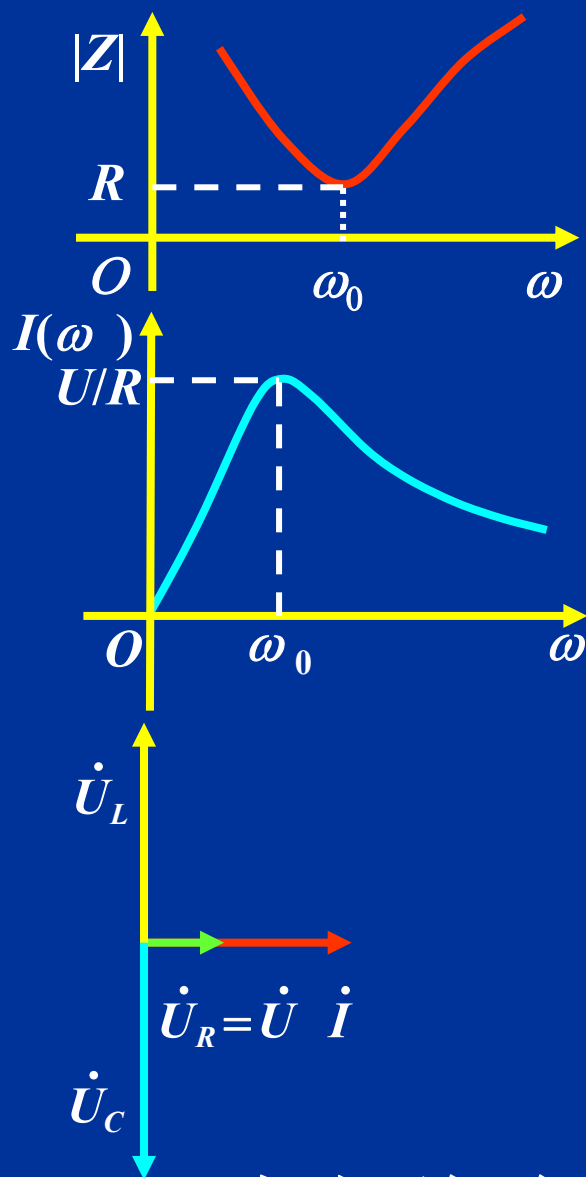
谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

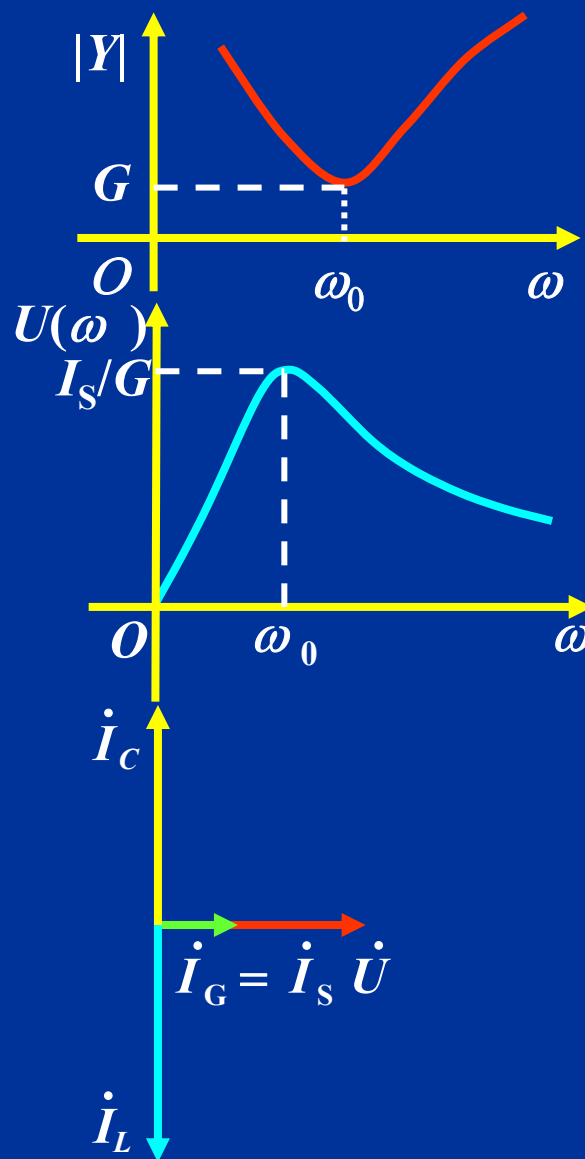


## $RLC$ 串联



$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$ ,  $LC$  相当于短路。

## $GCL$ 并联



$\dot{i}_L + \dot{i}_C = 0$ ,  $LC$  相当于开路。



## ***RLC 串联***

电压谐振

$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = QU$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

## ***GCL 并联***

电流谐振

$$I_L(\omega_0) = I_C(\omega_0) = QI_S$$

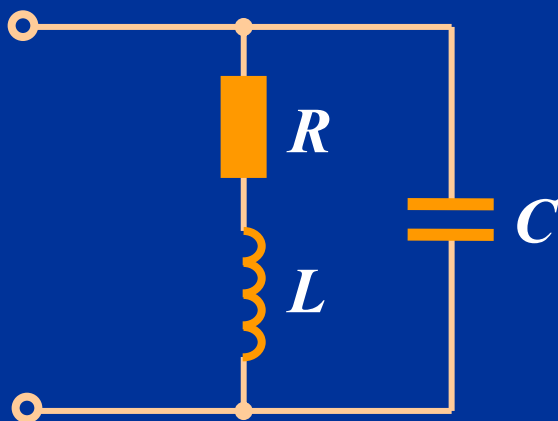
$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$





## 2. 电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容器并联时，电路如图：



### (1) 谐振条件

$$\begin{aligned} Y &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) \\ &= G + jB \end{aligned}$$

谐振时  $B=0$ ，即

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

此电路发生谐振是有条件的，在电路参数一定时，满足

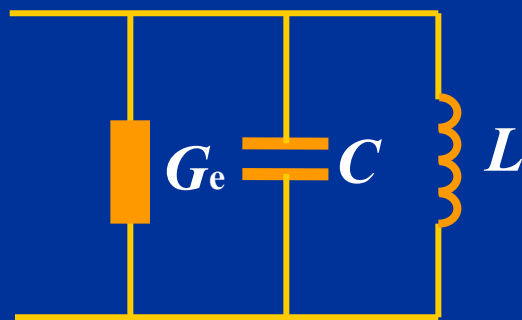
$$\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2 > 0, \text{ 即 } R < \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 时, 可以发生谐振}$$

一般线圈电阻  $R \ll \omega L$ ，则等效导纳为：

$$Y = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) \approx \frac{R}{(\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

谐振角频率  $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

等效电路



$$R_e = \frac{1}{G_e} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$



## (2) 谐振特点

(a) 电路发生谐振时，输入阻抗达最大值：

$$Z(\omega_0) = R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}$$

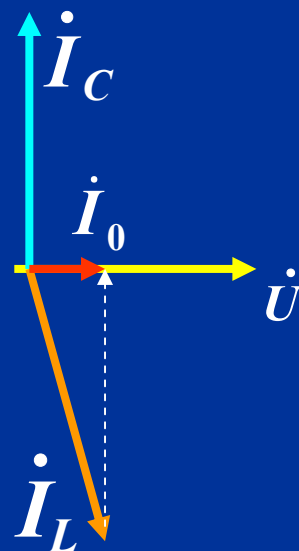
(b) 电流一定时，总电压达最大值：  $U_0 = I_0 Z = I_0 \frac{L}{RC}$

(c) 支路电流是总电流的Q倍，设  $R \ll \omega L$

$$I_L \approx I_C \approx \frac{U}{\omega_0 L} = U \omega_0 C$$

$$\frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{U / \omega_0 L}{U / (RC / L)} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

$$\longrightarrow I_L \approx I_C = Q I_0 \gg I_0$$



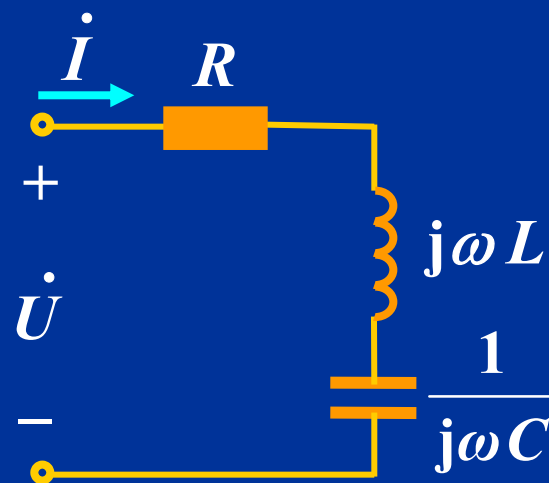
## 6.3 谐振电路的频率特性

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_R}{\dot{U}} = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{1 + j(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})}$$

串联谐振时  $Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o CR}$

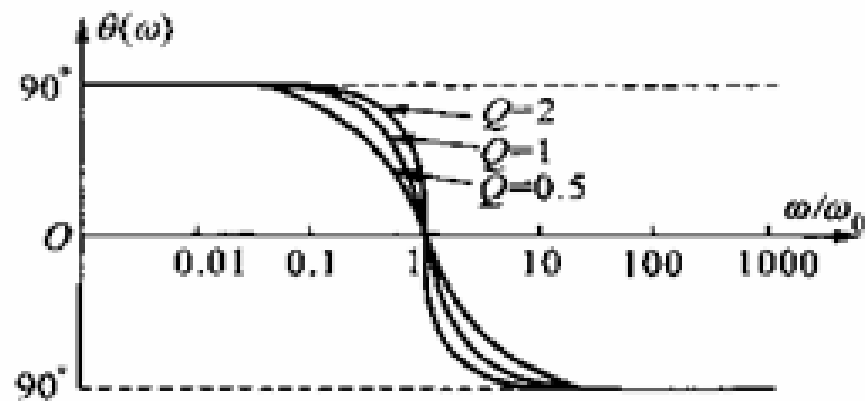
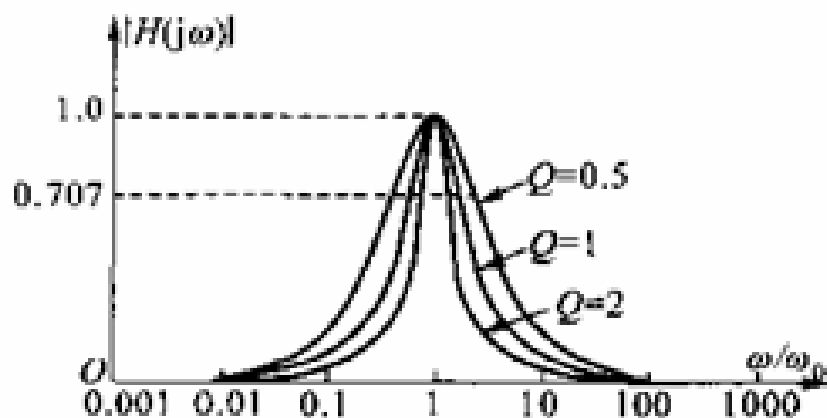
代入上式并整理，得

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_R}{\dot{U}} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega})}$$



其幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}}$$

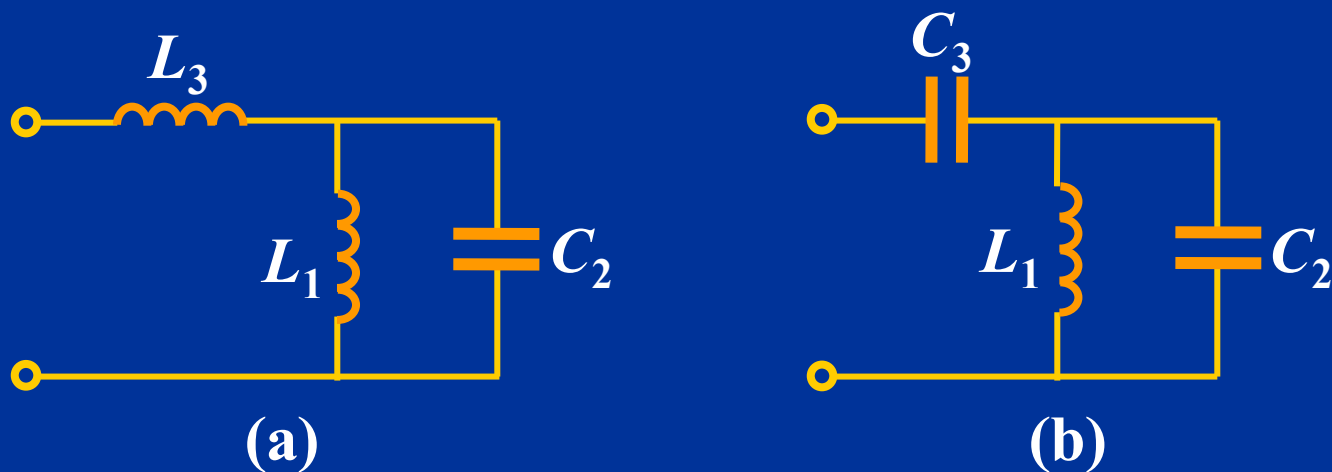


## ● 选择性 (*selectivity*)

从幅频特性曲线看到，通频带越窄，曲线越尖，对信号的“选择性”越好。另外， $Q$ 越大，谐振曲线越尖。当稍微偏离谐振点时，曲线就急剧下降，电路对非谐振频率下的信号具有较强的抑制能力，所以选择性好。因此， $Q$ 是反映谐振电路性质的一个重要指标。

## 6.4 串并联电路的谐振

讨论由纯电感和纯电容所构成的串并联电路：



上述电路既可以发生串联谐振( $Z=0$ ), 又可以发生并联谐振( $Z=\infty$ )。可通过求入端阻抗来确定串、并联谐振频率。

对(a)电路,  $L_1$ 、 $C_2$ 并联, 在低频时呈感性。随着频率增加, 在某一角频率 $\omega_1$ 下发生并联谐振。 $\omega > \omega_1$ 时, 并联部分呈容性, 在某一角频率 $\omega_2$ 下可与 $L_3$ 发生串联谐振。



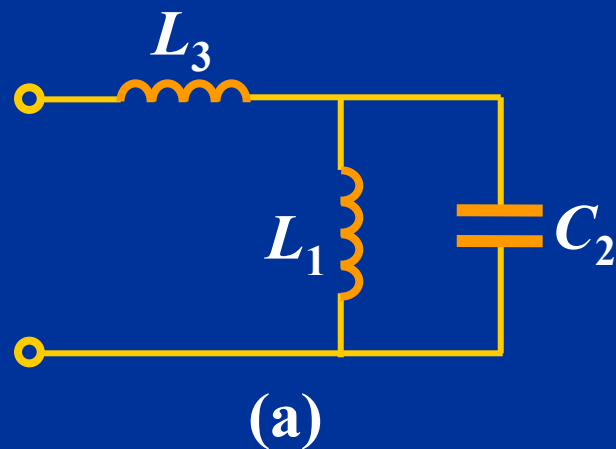
对(b)电路 $L_1$ 、 $C_2$ 并联，在低频时呈感性。在某一角频率 $\omega_1$ 下可与 $C_3$ 发生串联谐振。 $\omega > \omega_1$ 时，随着频率增加，并联部分可由感性变为容性，在某一角频率 $\omega_2$ 下发生并联谐振。

定量分析：

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Z(\omega) &= j\omega L_3 + \frac{j\omega L_1 \left( \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}} = j \left( \omega L_3 - \frac{\omega L_1}{\omega^2 L_1 C_2 - 1} \right) \\ &= j \frac{\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega(L_1 + L_3)}{\omega^2 L_1 C_2 - 1} \end{aligned}$$

当 $Z(\omega)=0$ ，即分子为零，有：

$$\omega_2^3 L_1 L_3 C_2 - \omega_2 (L_1 + L_3) = 0$$



可解得:  $\omega_2 = 0$  (舍去)

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}} \quad (\text{串联谐振})$$

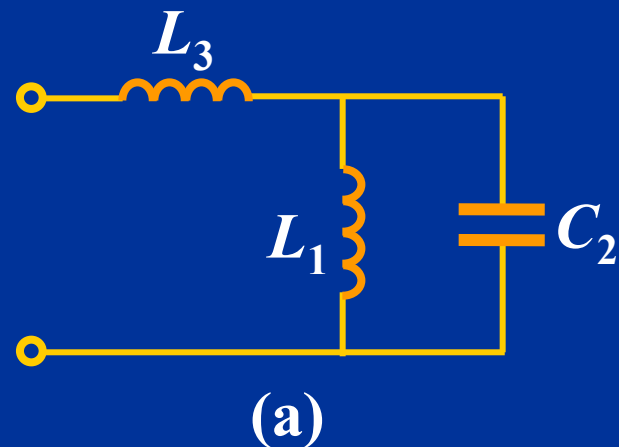
当  $Y(\omega)=0$ , 即分母为零, 有:

$$\omega_1^2 L_1 C_2 - 1 = 0$$

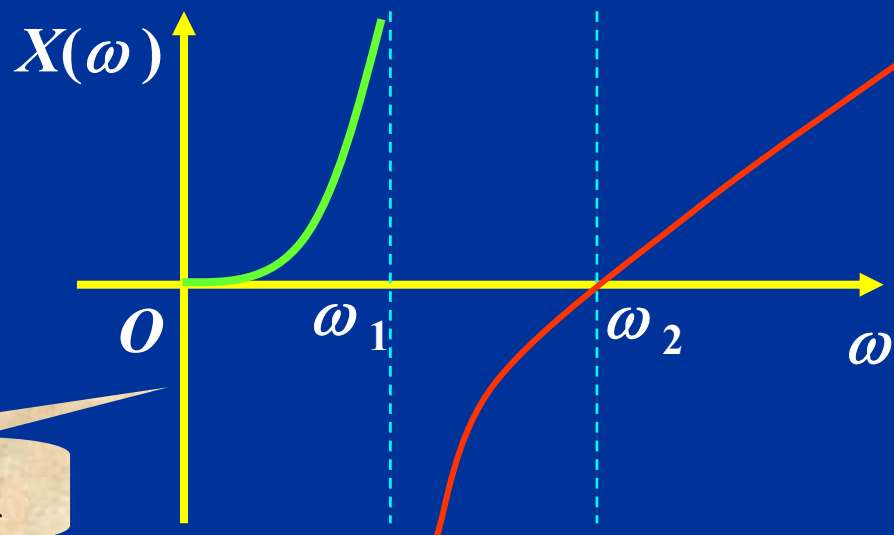
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (\text{并联谐振})$$

可见,  $\omega_1 < \omega_2$

阻抗的频率特性

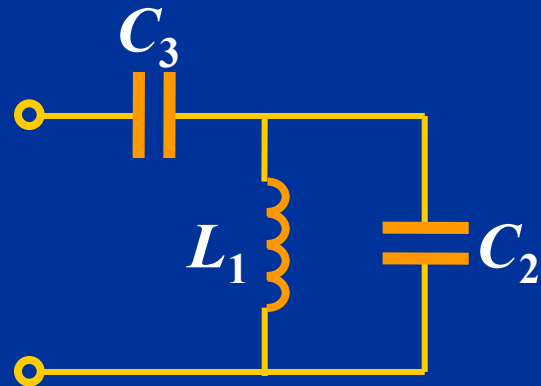


$$Z(\omega) = jX(\omega)$$





$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad Z(\omega) &= \frac{1}{j\omega C_3} + \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{j\omega C_3} + \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_2} \\
 &= -j \frac{1 - \omega^2 L_1 (C_2 + C_3)}{\omega C_3 (1 - \omega^2 L_1 C_2)}
 \end{aligned}$$



(b)

分别令分子、分母为零，可得：

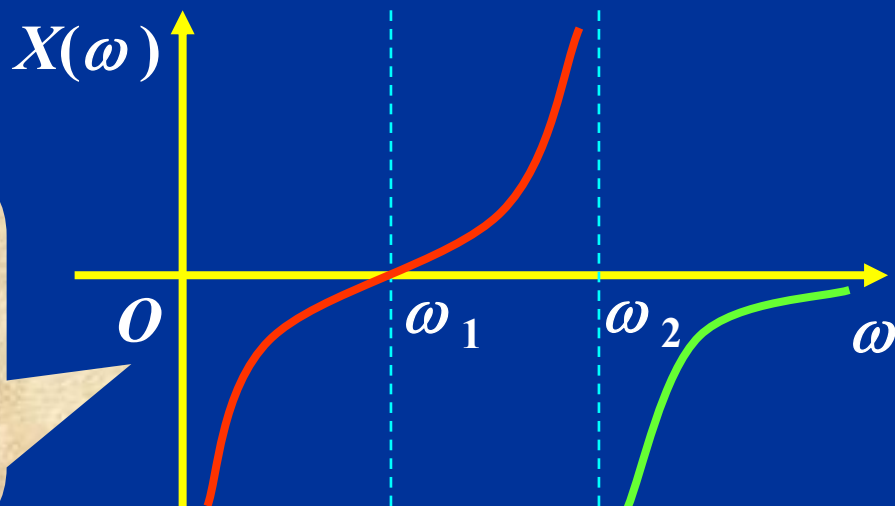
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_2 + C_3)}} \quad \text{串联谐振}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

并联谐振

$$\omega_1 < \omega_2$$

阻抗  
的频率特  
性



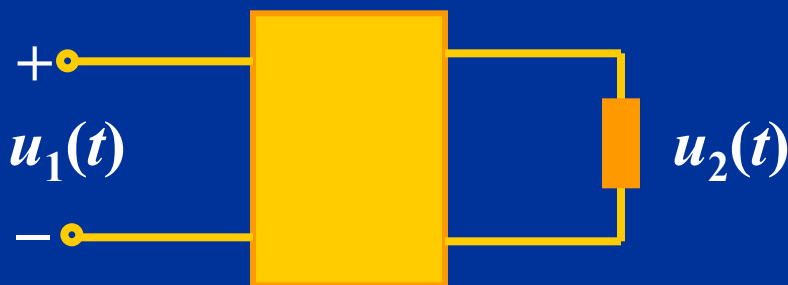
## LC串并联电路的应用:

可构成各种无源滤波电路 (*passive filter*)。

**例** 激励  $u_1(t)$ , 包含两个频率  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分量 ( $\omega_1 < \omega_2$ ):

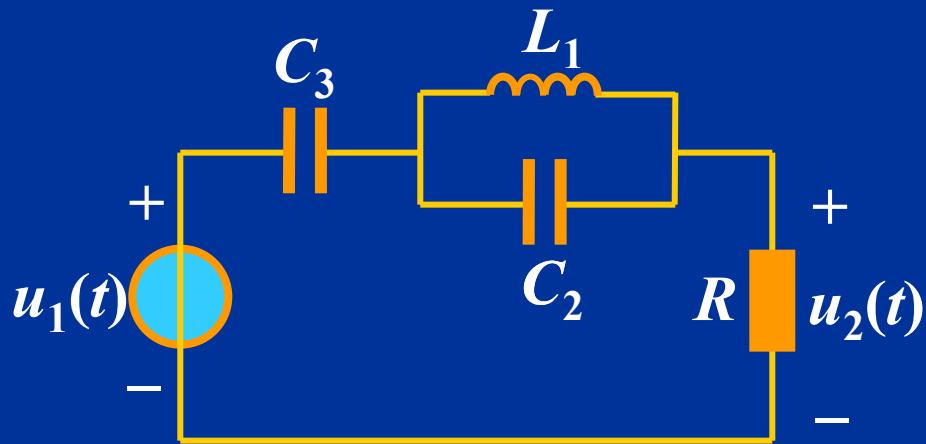
$$u_1(t) = u_{11}(\omega_1) + u_{12}(\omega_2)$$

要求响应  $u_2(t)$  只含有  $\omega_1$  频率电压。如何实现?



**解**

设计下列滤波电路实现:



$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

并联谐振，开路

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_2 + C_3)}}$$

串联谐振，短路

$\omega_1$  信号短路直接加到负载上。

该电路  $\omega_2 > \omega_1$ ，滤去高频，得到低频。



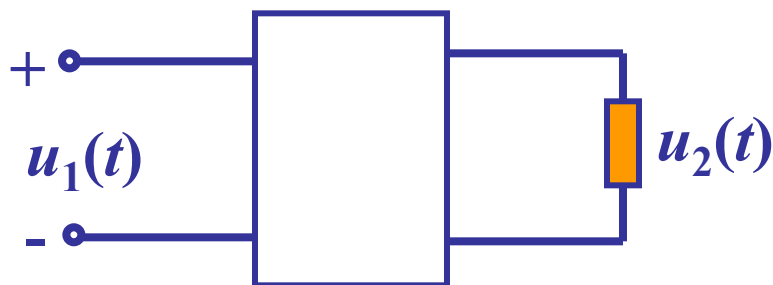
## LC串并联电路的应用:

可构成各种无源滤波电路 (*passive filter*)。

**例** 激励  $u_1(t)$ , 包含两个频率  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分量 ( $\omega_1 < \omega_2$ ):

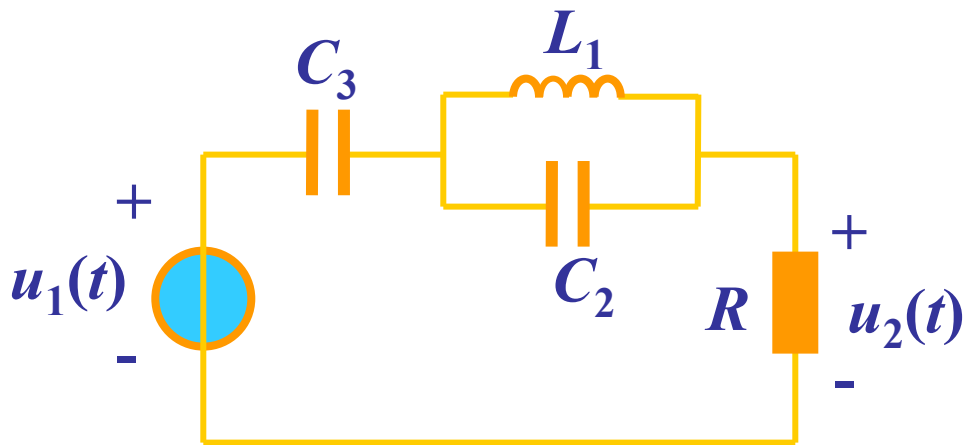
$$u_1(t) = u_{11}(\omega_1) + u_{12}(\omega_2)$$

要求响应  $u_2(t)$  只含有  $\omega_1$  频率电压。如何实现?



**解**

设计下列滤波电路实现:



$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad \text{并联谐振, 开路}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_2 + C_3)}} \quad \text{串联谐振, 短路}$$

$\omega_1$  信号短路直接加到负载上。

该电路  $\omega_2 > \omega_1$  , 滤去高频, 得到低频。

