第 3 章 逻辑代数基础

Logic Algebra

逻辑代数描述了二值变量的运算规律，它是英国数学家布尔（**George Boole**）于**1849** 年提出的，也称布尔代数。逻辑代数是按逻辑规律进行运算的代数，是分析和设计数字逻辑电路不可缺少的基础数学工具。

电路中的信号变量都为二值变量，只能有**0**、**1**两种取值。

逻辑代数与算术不同。

§3.1 逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

A的反向运算为$\overline{A}$	或运算 逻辑加 "+"	与运算 逻辑乘 "•"
$\overline{0}=1$	**0 + 0 = 0**	$0\cdot 0=0$
$\overline{1}=0$	**0 + 1 = 1**	$0\cdot 1=0$
	1 + 0 = 1	$1\cdot 0=0$
	1 + 1 = 1	$1\cdot 1=1$

1. 基本定律

每一个定律都有两种形式：逻辑加和逻辑乘。这两种形式互为"对偶式" **Dual** 。

逻辑加 Addition　　逻辑乘 Multiplication

1) 定律 1　**A+B=B+A;**　**AB=BA**　（交换律）

2) 定律2　**A+(B+C)=(A+B)+C;**　**A(BC)=(AB)C**　（结合律）

3) 定律 3　**A+(BC)=(A+B)(A+C);**　**A(B+C)=AB+AC;**（分配律）

4) 定律 4　**A+0=A,　A+1=1;**　$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A$

5) 定律 5　$A + \overline{A} = 1;$　$A \cdot \overline{A} = 0$　（互补律）

6) 定律 6　**A+A=A;**　**A•A=A**　（重叠律）

7) 定律 7　$\overline{\overline{A}} = A$　（还原律）

8) DeMorgan's 定理　$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B};$　$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$　（摩根定理）

推论　$\overline{A+B+C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$　$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

2. 基本规则

1）代入规则

等式两侧某一变量都用一个逻辑函数代入，等式仍成立。

例:

若 $\overline{AX} = \overline{A} + \overline{X}$　　　　$X = BC$

左侧: $\overline{AX} = \overline{ABC}$　　　　右侧: $\overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

有 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

摩根定理

2) 反演规则 Complementary

将一个函数表达式 F 中所有的“与”（·）换成“或”（+），“或”（+）换成“与”（·）；“0”换成“1”，“1”换成“0”；原变量换成反变量，反变量换成原变量，则所得到的逻辑函数即F的反函数，表达式为 $\overline{F}$ 。

$\overline{F}$ 称为函数 F 的反函数。如果 F 成立，$\overline{F}$ 也成立。

注意: 1. 运算顺序不变

2. 不是一个变量上的反号保持不变

例 已知 $F = A(B + \overline{C}) + CD$，求 $\overline{F}$

解: $\overline{F} = (\overline{A} + \overline{B}C)(\overline{C} + \overline{D})$

3) 对偶规则 Duality

若 *F* 为一逻辑函数，如果将该函数表达式中所有“与”（·）换成“或”（+），“或”（+）换成“与”（·）；“0”换成“1”，“1”换成“0”，则所得到的逻辑函数即*F*的对偶式，表达式为 *F'*。

如果 *F* 成立，*F'* 也成立

例：已知 $F = A(B+\overline{C})+CD$ 分别求 F' 和 $\overline{F}$

解：

$$F' = (A+B\overline{C})(C+D)$$

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$$

3. 常用公式

1) **A+AB=A; A(A+B)=A** 吸收律

证: **A+AB = A (1+B) = A**

2） $AB+A\overline{B}=A;$ $(A+B)(A+\overline{B})=A$

证: $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

3) $A+\overline{A}B=A+B;$ $A(\overline{A}+B)=AB$

证: 分配律 **A+BC=(A+B)(A+C)**

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$$

4) $\mathbf{AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C;}$

$$\mathbf{(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)}$$

冗余定理

证:

$$AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC = AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$

$$= AB+\overline{A}C$$

推论: $AB+\overline{A}C+BCDE = AB+\overline{A}C$

5) 异或公式 (XOR) $\quad A\oplus B = \overline{A \odot B}$

证: $\quad \overline{AB+\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{A}B + A\overline{B}$

$$A\oplus A = 0, \quad A\oplus\overline{A} = 1, \quad A\oplus 0 = A, \quad A\oplus 1 = \overline{A}$$

6) 如果 $A \oplus B \oplus C = D$

$$\text{则} \quad \begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$$

因果关系 **Causality**

多变量异或，变量为 1 的个数为奇数，异或结果为 1；1 的个数为偶数，结果为 0 ；与变量为 0 的个数无关。

§3.2 逻辑函数的标准形式

Standard Forms of Logic Function

3.2.1 最小项及标准与或式

1. 最小项(标准与项) Minterms (Standard Product Form)

与项定义为字母(原变量或其反变量)的逻辑乘项.

$AB \qquad B\bar{C}D \qquad \bar{A}E$

最小项（标准与项）：n 变量函数，n 变量组成的与项中，每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且只出现一次。

n 个变量 $\Longrightarrow$ 2^n 个最小项

例如：3 变量 *A*, *B*, *C*, 有 $2^3 = 8$ 个最小项：

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ $\overline{A}\cdot\overline{B}C$ $\overline{A}B\overline{C}$ $\overline{A}BC$ $A\overline{B}\cdot\overline{C}$ $A\overline{B}C$ $AB\overline{C}$ ABC

2. 最小项真值表

变量 \ 最小项编号	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
A B C \ 最小项	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0 0 0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0 0 1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0 1 0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0 1 1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1 0 0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 0 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1 1 0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
1 1 1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

当 A B C 取某一组值时, 只有一个最小项值为 1 , 其他都等于 0

最小项编号 m_i ：使某一最小项为 1 时, 变量取值的二进制数对应的十进制数为此最小项的编号

例:

ABC: 010　　$\overline{A}B\overline{C} = 1$　　010 = 2

所以 $\overline{A}B\overline{C}$ 的编号为 m_2

例:

2 变量 A, B:　　$m_1 = \overline{A}B$,　　$m_3 = AB$

4 变量 A, B, C, D:　　$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$m_5 = \overline{A}B\overline{C}D$

$m_{13} = AB\overline{C}D$

1: 变量　　变量取 1 对应于原变量

0: 反变量　　变量取 0 对应于反变量

注意：字母的排列顺序

3. 标准与或式 Standard sum of products form

$$F=\overline{A}B+A\overline{C}+A\overline{B}C$$ 与或式

如果一个与或式函数的每个与项都是最小项，这个函数称为标准与或式

例：

$$\left.\begin{aligned}F_1(A,B,C)&=\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}BC+ABC\\&=m_2+m_6+m_3+m_7\\&=\sum m(2,3,6,7)\end{aligned}\right\}$$ 标准与或式

m 可以忽略

与或式说明，变量取何值时，函数 $F = 1$

例 1：将下列函数写成标准与或式：

$$F_1(A,B,C) = AB + BC + AC$$ 与或式

$$= AB(C+\overline{C}) + BC(A+\overline{A}) + AC(B+\overline{B})$$

$$\left.\begin{aligned} &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_5 \\ &= \sum m(3,5,6,7) \end{aligned}\right\} \text{标准与或式}$$

注：$F(A,B,C)$ 必须写全，涉及字母顺序即最小项编号

3.2.2 最大项及标准或与式

和项(或项)定义为字母(原变量或反变量)的逻辑**加**项.

$$A+B \qquad \overline{A}+B+\overline{C} \qquad \overline{D}+E+F$$

1. 最大项 Maxterms

n 变量组成的或项中, 每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次, 且只出现一次, 此或项为最大项, 也称为标准或项(**Standard Sum Terms**)。

n 个变量 $\Longrightarrow$ 2^n 个最大项

三变量最大项真值表

变量 $A\ B\ C$	M_0 $A+B+C$	M_1 $A+B+\overline{C}$	M_2 $A+\overline{B}+C$	M_3 $A+\overline{B}+\overline{C}$	M_4 $\overline{A}+B+C$	M_5 $\overline{A}+B+\overline{C}$	M_6 $\overline{A}+\overline{B}+C$	M_7 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

当 ABC 取某一组值时，只有一个最大项值为0，其他都等于1

使某一最大项为0时，A、B、C 取值的二进制数对应的十进制数为此最大项的编号：M_i

例：3 变量 A, B, C

$$M_2 = A + \overline{B} + C \qquad (010) \text{ 使 } A + \overline{B} + C = 0$$

$$M_4 = \overline{A} + B + C$$

4 变量 A,B,C,D $\quad M_2 = A + B + \overline{C} + D$

$$M_{10} = \overline{A} + B + \overline{C} + D$$

注意：最大项 $\begin{cases} 0 \Longleftrightarrow \text{原变量} \\ 1 \Longleftrightarrow \text{反变量} \end{cases}$

2. 标准或与式 Standard Product of Sums

$$F = (A + \overline{B})(B + C)$$ 或与式

每个或项都是最大项称为标准或与式

或与式说明, 变量取何值时, 函数 $F = 0$

例: 任何一个括号等于0，F_2等于0

$$F_2(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1

$$= M_0 \bullet M_1 \bullet M_4 \bullet M_5$$

$$= \prod M(0,1,4,5)$$

M 可以忽略

3.2.3 两种标准式间的关系

1）最小项和最大项互为反函数

$$\overline{m_i} = M_i \qquad \overline{M_j} = m_j$$

$$F(A,B,C): \quad \overline{m_1} = \overline{\bar{A}\,\bar{B}\,C} = A+B+\bar{C} = M_1$$

001 最小项编号 0 0 1 最大项编号

2) 不在最小项中出现的编号,一定出现在最大项的编号中

$$F(A,B,C) = \Sigma\, m\,(2,3,5,6,7) \qquad F_1 \text{ 与或式}$$

$$= \Pi\, M\,(0,1,4) \qquad F_2 \text{ 或与式}$$

$F(A,B,C) = \Sigma m(2,3,5,6,7)$ F_1 与或式

$= \Pi M(0,1,4)$ F_2 或与式

ABC	F	F_1	F_2
0 0 0	0		M_0
0 0 1	0		M_1
0 1 0	1	m_2	
0 1 1	1	m_3	
1 0 0	0		M_4
1 0 1	1	m_5	
1 1 0	1	m_6	
1 1 1	1	m_7	

$F = F_1 = F_2$

F_1 说明函数何时为 1

F_2 说明函数何时为 0

标准与或式和标准或与式是一个逻辑关系的两种表达方式

§3.3 逻辑函数的公式化简

Simplification Using Logic Algebra

一个逻辑函数有多种表达形式

例如： $F = XY + \bar{Y}Z$ 与或式

$= (X + \bar{Y})(Y + Z)$ 或与式

$= \overline{\overline{XY} \cdot \overline{\bar{Y}Z}}$ 与非-与非式

$= \overline{\overline{X+\bar{Y}} + \overline{Y+Z}}$ 或非–或非式

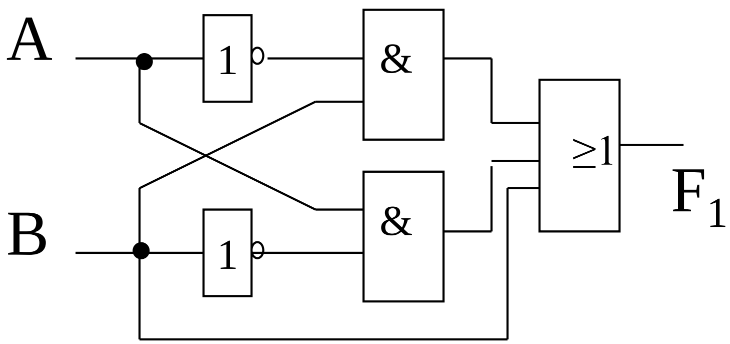
$= \overline{\bar{X}Y+\bar{Y}\,\bar{Z}}$ 与或非式

上面五种都是最简表达式

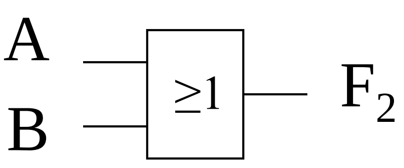
化简目的：少用元件完成同样目的，降低成本。

例：用门电路实现下列函数

$$F_1 = \overline{A}B + B + A\overline{B}$$



$$F_2 = A + B$$



公式法化简 (Laws, Theorems, Formula)

例1：用公式法化简下式

方法二

$$F = A\bar{B} + \overline{\bar{A}C + \bar{B}C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\bar{A}C} \cdot \overline{\bar{B}C}$$

$$= A\bar{B} + (A + \bar{C})(B + \bar{C})$$

$$= A\bar{B} + AB + A\bar{C} + B\bar{C} + \bar{C}$$

$$= \mathbf{A} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{(\bar{A} + \bar{B})C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\bar{A}+\bar{B}} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\overline{AB}} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + AB + \bar{C}$$

$$= A + \bar{C}$$

例 2：用公式法化简下式

$$F = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{D}\bar{E}(B+G) + \bar{D} + (\bar{A}+B)D + A\bar{B}CDE + A\bar{B}DEG$$

$C+\bar{C}$ complement

吸收

吸收

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \overline{A\bar{B}}D$$

$$= A\bar{B} + \bar{D} + D = A\bar{B} + 1 = 1$$

方法二

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}D + BD$$

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}D + B$$

$$= A + \bar{D} + \bar{A} + B$$

$$= 1$$

例 3：将下列函数化简成最简或与式。

$$G=(A+B+\overline{C})(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

解：对偶关系

$$G'=AB\overline{C}+AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$=AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$G=(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

§3.4 卡诺图化简逻辑函数

Simplification Using K-Maps

用公式法化简逻辑函数时，有时很难看出是否达到最简式。用卡诺图（**Karnaugh Map**）化简逻辑函数具有简单、直观、方便的特点，较容易判断出函数是否得到最简结果。

3.4.1 卡诺图 Karnaugh Map

卡诺图 (**K-map**)与真值表相似，可以给出输入所有可能组合所对应的输出值 。与真值表不同的是卡诺图是由小格构成。每个小格代表一个二进制输入的组合。

n 个变量的卡诺图中有2^n个小格, 每个小格表示一个最小项。

2 变量卡诺图: *F* (*A*,*B*)

F B \ A	0	1
0	$\bar{A}\,\bar{B}$ m_0	$A\bar{B}$ m_2
1	$\bar{A}B$ m_1	AB m_3

变量取值：**0→1**

$$\left.\begin{array}{l}0 \ \text{ for } \ \bar{A},\bar{B}\\ 1 \ \text{ for } \ A,B\end{array}\right\}\text{最小项}$$

变量(A,B) 位置确定, 每小格代表的最小项就确定。

3 变量卡诺图: $F(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	2	6	4
1	m_1	3	7	5

排列方式要求:

保证相邻格之间只有一个变量变化

AB顺序的排列方法

几何相邻: 位置相邻

逻辑相邻: 只有一个变量变化

相邻格

卡诺图其它排列方式:

F A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

F AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

每个小格有 *n* 个相邻格

相邻格与排列方式无关

4 变量卡诺图: $F(A,B,C,D)$

F CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

F AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

每个小格: 4 个相邻格

5变量卡诺图: *F* (*A*,*B*,*C*,*D*,*E*)

$2^5 = 32$ cells

F DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

相邻格包括对称位置

14: 6, 15, 10, 12, 30

8 : 12, 9, 24, 0, 10

3.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

Mapping a Logic Function

例 1: 将真值表转换成卡诺图

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

F *AB* / *C*	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

例 2：用卡诺图表示标准与或式和标准或与式

$$F(X,Y,Z)=\sum m(0,4,6)$$

$$F(X,Y,Z)=\prod M(1,2,3,5,7)$$

F 何时为 1（最小项）

F 何时为 0（最大项）

F: Z \ XY	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

F: Z \ XY	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

等 价

例3：将与或式填入卡诺图

$$F(X,Y,Z)=XY+\overline{Y}Z+\overline{X}\,\overline{Z}$$

$$=XY(Z+\overline{Z})+\overline{Y}Z(X+\overline{X})+\overline{X}\,\overline{Z}(Y+\overline{Y})$$

$$=XYZ+XY\overline{Z}+X\overline{Y}Z+\overline{X}\,\overline{Y}Z+\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

$$=\sum m(0,1,2,5,6,7)$$

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

直接填　XY:

在 XY = 11 的两个格中填1

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

3.4.3 卡诺图化简逻辑函数

K-Map Simplification

1. 求最简与或式

方法：圈相邻格中的1, 合并最小项

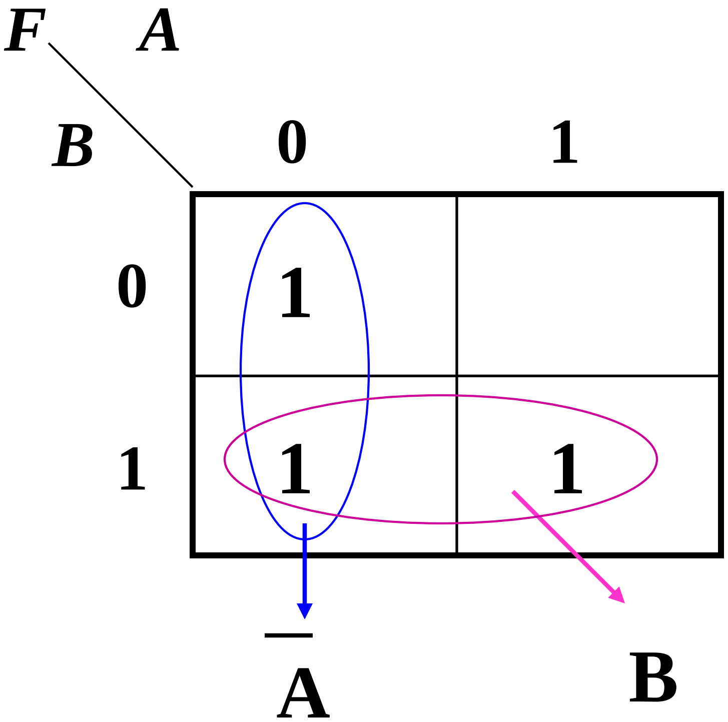
圈 *1*：根据下面规则将含有 1 的相邻格圈在一起

尽可能多地把相邻的矩形的 2^n 个 1 圈在一起，消去变化了的 n 个变量，留下不变的变量是 1 写原变量，是 0 写反变量，组成“与”项；每个圈中至少有一个别的圈没圈过的 1，所有的 1 都要圈；1 可以重复圈；圈之间为“或”的关系。

圈 1个1，2个1，4个1，8个1，16个1

例 1: 用卡诺图化简下列函数

$$F(A,B)=\sum(0,1,3)$$



解:

① 填卡诺图

② 圈 *1*

③ 将与项相加

$$F=\overline{A}+B$$

例 2: 化简函数

F \ C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

$\overline{B}$

AC

$$F = \overline{B} + AC$$

例 3:

F — *CD* \ *AB*	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D)=\overline{D}+AB$$

2. 求最简或与式

尽可能多的把相邻矩形中 2^n个0 圈在一起, 消去变化了的n 个变量, 留下不变的变量, (是0 写原变量, 是 1 写反变量)组成或项; 每个圈中至少有一个别的圈没圈过的0, 所有0 都要圈, 0 可重复圈, 圈之间为与的关系.

例 3　圈 *0*:

F: CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$B+\overline{D}$

$A+\overline{D}$

$$\therefore F=(A+\overline{D})(B+\overline{D})$$
$$=AB+\overline{D}$$

F: CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$$F=\overline{D}+AB$$

与或式和或与式可以互相转换

总结:　与或式圈 1

或与式圈 0

例 4: 将下图化简成最简与或表达式

与或式　圈 1

G　AB CD	00	01	11	10
00		1	1	
01		1		
11				1
10		1	1	

$$G = B\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}CD$$

孤立的 *1* 一定要圈.

例 5：将下图化简成最简与或式

C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$$\left.\begin{aligned} F &= A\bar{C} + \bar{A}C + AB \\ &= A\bar{C} + \bar{A}C + BC \end{aligned}\right\}$$ 取其一

最简式不是唯一的

例 6: 分别将下式化简成最简与或式和最简或与式

$$F(A,B,C,D)=\overset{0}{(\overline{A}+\overline{C})}\overbrace{(\overline{A}+B+\overline{D})}^{0}\overset{0}{(\overline{B}+D)}\overbrace{(\overline{A}+B+\overline{C}+D)}^{0}$$

1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0

解: 在卡诺图中直接填 *0*

F CD \ *AB*	00	01	11	10
00		0	0	
01				0
11			0	0
10		0	0	0

最简或与式: 圈 *0*

$$F(A,B,C,D)=(\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{D})$$

最简与或式: 圈 *1*

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}D+B\overline{C}D+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

例 7: 化简

$$F(W,X,Y,Z)=\overline{\overline{W}\,\overline{X}+\overline{Y}Z+(\overline{W}+Y)X\overline{Z}+\overline{(W+Z)(\overline{W}+\overline{Y})}}$$

$$\overline{W+Z}+\overline{\overline{W}+\overline{Y}}$$

$$\overline{F}=\overline{W}\,\overline{X}+\overline{Y}Z+\overline{W}X\overline{Z}+XY\overline{Z}+\overline{W}\,\overline{Z}+WY$$

$\overline{F}$ *WX* / *YZ*

YZ \ WX	00	01	11	10
00	**1**	**1**		
01	**1**	**1**	**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**	**1**	**1**	**1**

直接在 $\overline{F}$ K-map 中填**1**, 圈**0**

$$\overline{F}=(\overline{W}+Y+Z)(W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{W}+Y+Z}+\overline{W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}$$

$$=W\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{W}XYZ$$

例8: 已知 $F = A\bar{B}C + \bar{A}\bar{D} + AB\bar{D} + \underline{\bar{A}B\bar{C}\bar{D}} + \underline{ABC\bar{D}}$ 冗余

化简上式，并分别用最少的与非门和或非门实现

解：填卡诺图

F $CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

1) 用与非门实现

→ 圈 *1*

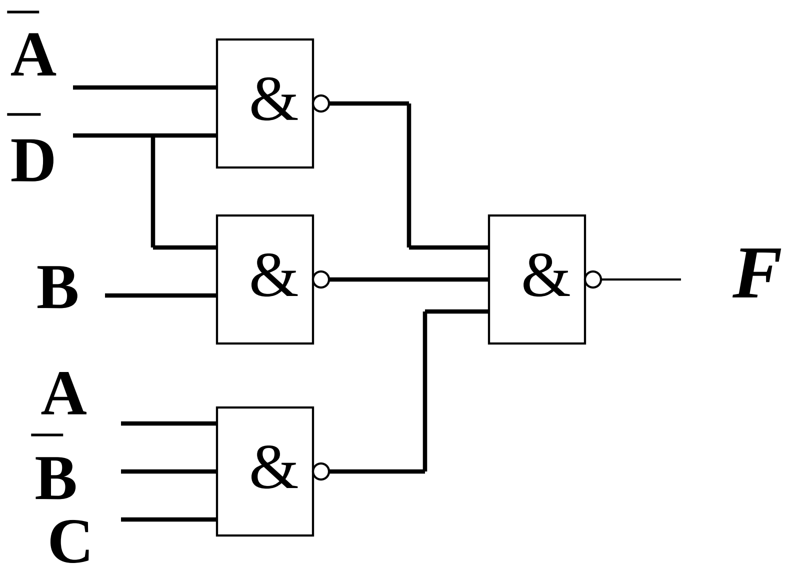
$$F = \overline{\overline{\bar{A}\bar{D} + B\bar{D} + A\bar{B}C}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{A}\bar{D}} \bullet \overline{B\bar{D}} \bullet \overline{A\bar{B}C}}$$

与或 → 与非 - 与非

$$F = \overline{\overline{\bar{A}\bar{D}} \bullet \overline{B\bar{D}} \bullet \overline{A\bar{B}C}}$$

与非 – 与非门



2) 或非门 ⟹ 圈 *0*

F *AB* / *CD*	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

$$F = \overline{\overline{(A+\bar{D})(\bar{B}+\bar{D})(\bar{A}+B+C)}}$$

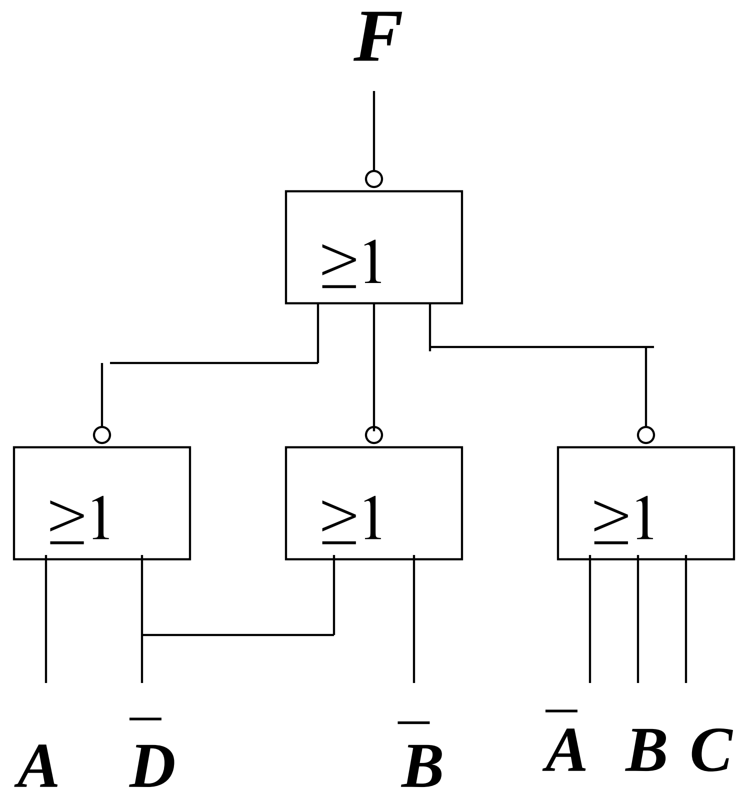
$$F = \overline{\overline{A+\bar{D}} + \overline{\bar{B}+\bar{D}} + \overline{\bar{A}+B+C}}$$

或与 ⟹ 或非 - 或非

化简：每个圈需一个门实现，各圈之间加一个门

$$F=\overline{\overline{A+\overline{D}}+\overline{\overline{B}+\overline{D}}+\overline{\overline{A}+B+C}}$$

或非－或非门



3.4.4 具有随意项的逻辑函数的化简

Simplification of Logic Function with “Don’t Care” Terms

实际逻辑电路中, 有些变量(输入)组合不会出现或不允许出现, 如 BCD 码中 1010~1111；这些组合对输出不产生任何影响(是 *1* 是 *0* 不影响输出), 这种组合称“随意项”（Don’t care）.

例:

用 A, B, C 分别表示电机的正转、反转和停止三种状态:

A=1　正转

B=1　反转

C=1　停

任何时刻只存在一个状态

$$ABC \begin{cases} 100 \text{ or} \\ 010 \text{ or} \\ 001 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 000 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{matrix}\right\}$$

没有意义

"随意项"

随意项

$$\left.\begin{array}{l}\text{卡诺图}\\ \text{真值表}\end{array}\right\}\ \boldsymbol{X}\text{ 或 }\boldsymbol{\varphi} \qquad \text{逻辑函数}\ \left\{\begin{array}{l}\sum d(\quad\quad)\\ = \mathbf{0}\end{array}\right.$$

d ( ) 括号中为最小项编号

化简时, 根据化简需要, φ可作*1* 或作*0*;

但不能既当*1* 同时又当*0*

例 1: 用卡诺图化简函数

$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,7,11,15)+d(0,2,5)$$

解：卡诺图　　　　标脚标： Φ_1,Φ_2,Φ_3

F　CD \ AB	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	**1**	Φ_3		
11	**1**	**1**	**1**	**1**
10	Φ_2			

采用　$\Phi_3=1,$

$\Phi_1=\Phi_2=0$

圈 *1* :

$$F=CD+\overline{A}D$$

圈 *0* :

$$F=D(\overline{A}+C)$$

若采用 $\Phi_1 = \Phi_2 = 1,\quad \Phi_3 = 0$

F CD \ AB	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	1	Φ_3		
11	1	1	1	1
10	Φ_2			

圈 *1*:

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} + CD$$

例 2: Simplify the logic function with don't care terms:

$$G = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B\text{，}$$

$$\mathbf{AB+AC = 0}$$

$AB = \Phi$ **$AC = \Phi$**

物理意义：这两项在函数中不起作用，不是数学上的等于0

G *C* \ *AB*	00	01	11	10
0	1	1	φ	
1		1	φ	φ

$$G = B + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

3.4.5 引入变量卡诺图 (VEM)

Variable Entered Map

一般，变量超过5个时，采用引入变量卡诺图方法化简逻辑函数。将*n* 变量函数中一个变量作为引入变量，填入(*n*-1) 变量卡诺图中。

例 1: 用VEM方法化简下列逻辑函数

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\cdot\overline{C}+ABC$$

3变量

将变量 *C* 拿出作为引入变量，将函数填入2变量卡诺图中

F A / B	0	1
0	$\overline{C}$	$\overline{C}$
1	0	$C+\overline{C} \rightarrow 1$

当A=0, B=0 时，$F=\overline{C}$，在m_0 格填 $\overline{C}$

圈的原则与圈1相同, 合并相同变量

$$F=\overline{B}\cdot\overline{C}+AB$$

例 2: $$F(C,D,E)=C\overline{D}+C\overline{E}+\overline{C}E+\overline{D}E+CDE$$

将 E 分出作为引入变量（一般最后一个变量作为引入变量）

F $D \backslash C$	0	1
0	E	$E+\overline{E}$
1	E	$E+\overline{E}$

$$F = E + C$$

例 3: 化简下面引入变量卡诺图（VEM）：

F C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	D
1	D	D	1	D

$$F = D + AB + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

作业：

3 . 8

3 . 11 (1, 3)

3 . 12 (1, 3)

3 . 15 (1, 3)

3 . 18 (1, 3)

3 . 19 (1, 3)

3 . 20

3 . 21(1, 3)

3 . 22(1, 3)

3 . 23 (2)

3 . 24 (2)