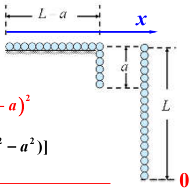
作业5-6：总长为L质量为m的链条放在桌面上，并使其一端下垂的长度为 a ，设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为μ，链条由静止开始运动。求：(1)到链条离开桌边的过程中，摩擦力对链条做了多少功？
(2)链条离开桌边的速率是多少？



解：建立如图坐标，再下滑x长度时

$$\vec{f}(x)=-\frac{m}{L}(L-a-x)g\mu\vec{i}$$

$$\mathrm{d}A=\vec{f}(x)\mathrm{d}x\vec{i}=-\frac{m}{L}(L-a-x)g\mu\mathrm{d}x$$

$$A_f=\int_0^{L-a}-\frac{m}{L}(L-a-x)g\mu\mathrm{d}x=-\frac{mg\mu}{2L}(L-a)^2$$

$$A_p=\int_0^{L-a}\lambda(a+x)g\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{mg}{L}[(L^2-a^2)]$$

方法一：对链条应用动能定理

$$A_f+A_p=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{g}{L}[(L^2-a^2)-\mu(L-a)^2]}$$

方法二：以链条和地球为系统，摩擦力为外力

$$-\frac{mg\mu}{2L}(L-a)^2=\left[\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{L}{2}\right]-\left[\frac{m}{L}(L-a)gL+\frac{m}{L}ag\left(L-\frac{a}{2}\right)\right]$$

作业6-2：以下几种关于机械能守恒条件和动量守恒条件的说法，请指出哪些是错的，错在哪里。

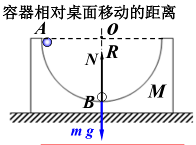
B. 所受合外力为零，内力都是保守力的系统，其机械能必然守恒。

错。 如果系统所受合外力为零，则动量守恒；但合外力为零的系统，如果合外力做功不为零，系统的机械能也不守恒；

★C. 不受外力，而内力都是保守力的系统，其动量和机械能必然同时守恒。

系统不受外力，动量守恒；不受外力，外力做功为零，内力都是保守力，机械能必然守恒。

作业6-6：一质量为m的小球，从内壁光滑的半球形容器边缘点A静止释放。已知容器质量为M放在光滑的水平桌面上。开始时小球和桌面均处于静止。当小球滑到底部的B点时，求：(1) 小球和容器相对桌面的速度大小；(2) 小球受到向上的支持力的大小。(3) 容器相对桌面移动的距离



解：(1) 设小球到达B处时的速度v为正向，容器M的速度为V

小球、容器系统在水平方向动量守恒

$$mv+MV=0$$

小球、容器、地球系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgR \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}} \quad \boxed{V=-\sqrt{\frac{2m^2gR}{M(m+M)}}}$$

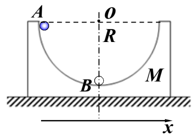
(2) 选M为参考系，小球相对于M作圆周运动。小球到达B时，在竖直方向M合力为零，没有加速度，故惯性力为零。

$$N-mg=m\frac{v'^2}{R}=m\frac{(v-V)^2}{R} \Rightarrow \boxed{N=\frac{mg(3M+2m)}{M}}$$

作业6-6：一质量为m的小球，从内壁光滑的半球形容器边缘点A静止释放。已知容器质量为M放在光滑的水平桌面上。开始时小球和桌面均处于静止。当小球滑到底部的B点时，求：(1) 小球和容器相对桌面的速度大小；(2) 小球受到向上的支持力的大小。(3) 容器相对桌面移动的距离

解：(3) 容器相对桌面移动的距离为d。

小球、容器系统在水平方向不受外力，质心位置不变。



$$\begin{cases} m\Delta x_1+M\Delta x_2=0 \\ \Delta x_1=R+\Delta x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1=\dfrac{M}{M+m}R \\ \Delta x_2=-\dfrac{m}{M+m}R \end{cases} \Rightarrow \boxed{d=|\Delta x_2|=\frac{m}{M+m}R}$$

三、角动量守恒定律

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega) \Rightarrow \boxed{M=0,\quad J_2\omega_2=J_1\omega_1}$$

角动量守恒：

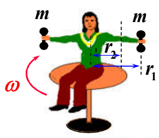
a) 一个刚体，J不变： ω 不变

b) 一个刚体，$J\uparrow(\downarrow)$： $\omega\downarrow(\uparrow)$

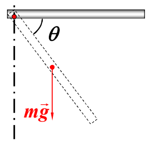
茹可夫斯基凳，滑冰，跳水…

c) 刚体系统：

$$J_1\omega_1+J_2\omega_2+\cdots=\text{恒量}$$



例5：质量为m，长为l的均匀细杆，可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动。今杆由水平位置自由下摆。
求： 转角为θ时的角速度。



解：$M=mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta \qquad M=J\alpha$

$$\frac{1}{2}mgl\cos\theta=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

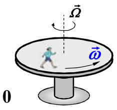
$$\frac{1}{2}mgl\int_0^t\cos\theta\omega\mathrm{d}t=J\int_0^t\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}mgl\int_0^\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=J\int_0^\omega\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad J=\frac{1}{3}ml^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

例6：质量为M，半径为R的水平转台，转动惯量$J=\frac{1}{2}MR^2$,可绕通过中心的光滑竖直轴自由转动。质量为m的人站在转台边缘，初始二者静止。若人沿边缘走一周，转台对地面转过多大角度？

解：设人对地速率为v，对地角速度为ω，转台的角速度为Ω



人和转台为一系统，角动量守恒

$$Rmv+\frac{1}{2}MR^2\Omega=0 \Rightarrow mR^2\omega+\frac{1}{2}MR^2\Omega=0$$

两边对时间积分，得

$$m\theta+\frac{1}{2}M\Theta=0 \quad \theta=2\pi+\Theta \Rightarrow \Theta=-\frac{2m}{2m+M}\cdot 2\pi$$

§ 3.3 刚体转动的动能定理

一、外力矩的功

在外力 $\vec{F}$ 作用下，刚体移过$\mathrm{d}\theta$角，外力功为

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s$$

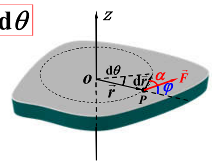
$$\boxed{\cos\alpha=\sin\varphi} \quad \boxed{\mathrm{d}s=r\cdot\mathrm{d}\theta}$$

$$\mathrm{d}A=\boxed{F\sin\varphi\cdot r}\cdot\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A=M\mathrm{d}\theta$$

力F的功 ⇒ 力矩的功

$$\boxed{A=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta}$$



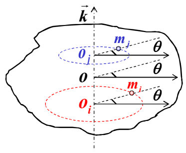
刚体内力的功？

二、刚体转动动能：

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}J_z\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$



三、定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

四、刚体的重力势能

刚体重力势能等于组成刚体各个质点的重力势能之和。

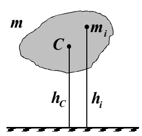
$$E_p=\sum m_igh_i=g\sum m_ih_i \qquad h_C=\frac{\sum m_ih_i}{m}$$

刚体重力势能 $E_p=mgh_C$ ⇐ 根据质心定义

刚体机械能 $E=E_p+E_k$

$$\boxed{E=mgh_C+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv_C^2}$$

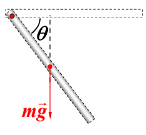
重力势能　转动动能　质心平动动能



例1：质量为m，长为l的均匀细杆，可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动。今杆由水平位置自由下摆，当它摆至任意角度θ时，求：(1)重力做的功；(2)杆的角速度和角加速度；(3) 轴端受的外力。

解：(1) $M=\frac{l}{2}mg\cos\theta \qquad A=\int M\mathrm{d}\theta$

$$A=\int_0^{\theta}\frac{l}{2}mg\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{l}{2}mg\sin\theta$$



解法二：若选水平时重力势能为零，重力的功

$$A=0-\left(-\frac{l}{2}mg\sin\theta\right)=\frac{l}{2}mg\sin\theta$$

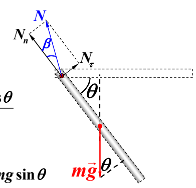
(2) 由定轴转动的动能定理

$$A=\frac{l}{2}mg\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-0 \quad J=\frac{1}{3}ml^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

$$M=J\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

例1：质量为m，长为l的均匀细杆，可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动。今杆由水平位置自由下摆，当它摆至任意角度θ时，求：(1)重力做的功；(2)杆的角速度和角加速度；(3) 轴端受的外力。

解：(3) 杆受重力和轴端支承力



任意角度θ时，质心做圆周运动

$$a_n=\frac{l}{2}\omega^2=\frac{3g\sin\theta}{2} \qquad a_\tau=\frac{l}{2}\alpha=\frac{3g\cos\theta}{4}$$

由质心运动定理，得

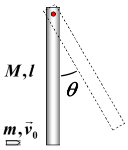
$$N_n-mg\sin\theta=\frac{3mg\sin\theta}{2} \Rightarrow N_n=\frac{5}{2}mg\sin\theta$$

$$mg\cos\theta-N_\tau=\frac{3mg\cos\theta}{4} \Rightarrow N_\tau=\frac{1}{4}mg\cos\theta$$

$$N=\sqrt{N_n^2+N_\tau^2} \qquad \beta=\arctan\frac{N_\tau}{N_n}$$

例2：质量为M的均匀直杆长为l，垂直挂在光滑的水平轴上，质量为m的子弹以v_0水平射入杆底。求：木杆与子弹启动时的角速度ω及两者一起摆动的最大摆角θ。

解：对于子弹和木棒组成的系统，选择悬挂点为参考点，则所有外力矩的和恒为零。故此过程角动量守恒。



$$mlv_0 + 0 = mlv + (\frac{1}{3}Ml^2)\omega = \underbrace{(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)}_{J = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2}\omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{3mv_0}{(M+3m)l}}$$

碰撞后，子弹和木棒上摆的过程中，系统的机械能守恒。

$$\frac{1}{2}(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega^2 - mgl - \frac{1}{2}Mgl = -mgl\cos\theta - \frac{1}{2}Mgl\cos\theta$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left[1 - \frac{(M+3m)l\omega^2}{3(M+2m)g}\right]}$$

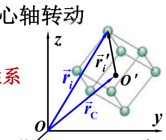
子弹嵌入瞬间动量守恒？

§ 3.4 刚体的一般运动

一般运动 = 质心平动+ 绕通过质心轴转动

一、质心系的角动量定理

质心系：坐标原点在质心上，非惯性系



$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i' \qquad m_i\vec{r}_i = m_i\vec{r}_C + m_i\vec{r}_i'$$

$$\sum m_i\vec{r}_i = m\cdot\vec{r}_C + \sum m_i\vec{r}_i'$$

$$\boxed{\sum m_i\vec{r}_i' = 0} \quad \boxed{\sum m_i\vec{v}_i' = 0,\ \sum m_i\vec{a}_i' = 0}$$

质心系是零动量参考系

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(\sum \vec{L}_i) \Rightarrow \sum \vec{r}_i' \times (\vec{F}_i - m_i\vec{a}_C) = \frac{d}{dt}(\sum \vec{L}_i')$$

$$\boxed{\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(\sum \vec{L}_i')}$$

质心系中，角动量定理仍然成立，不需要考虑惯性力。

二、柯尼希定理

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i' \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i'$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_C + \vec{v}_i')\cdot(\vec{v}_C + \vec{v}_i')$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \sum m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_C + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i'^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i'^2$$

质点系相对于质心系的总动能——质点系的内动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum m_i r_i'^2}_{J'}\omega^2 \qquad \boxed{E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega^2}$$

平动动能 质点系轨道动能

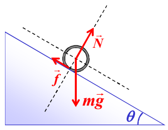
转动动能 质点系内动能

刚体的总动能＝质心的平动动能＋绕质心的转动动能

例1：一个质量为m、半径为R的球壳在长为L的斜面的顶端由静止无滑动地下滚。

求：①下滚加速度②落底速度。

解：①以质心为转轴，列方程：



$$\begin{cases} fR = J\alpha = \frac{2}{3}mR^2\alpha = \frac{2}{3}mRa_C \\ mg\sin\theta - f = ma_C \end{cases} \qquad \boxed{a_C = R\alpha = \frac{3}{5}g\sin\theta}$$

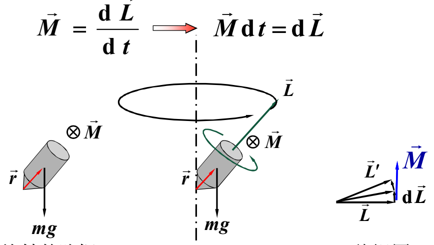
$$M' = J'\alpha \rightarrow mgR\sin\theta = (\frac{2}{3}mR^2 + mR^2)\alpha = \frac{5}{3}mRR\alpha = \frac{5}{3}mRa_C$$

②因摩擦力不做功，可用机械能守恒定律。

$$mgL\sin\theta = mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mR^2\omega^2 = \frac{5}{6}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$$

三、进动

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{M}dt = d\vec{L}$$



不旋转的陀螺 旋转的陀螺 俯视图

倒了！ 转轴进动！

进 动

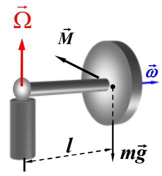
刚体的角动量在水平面之内。

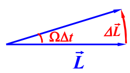
$$|\vec{M}| = |\vec{r}_C \times m\vec{g}| = mgr_C\sin\theta = mgl$$

$$L = J\omega,\ \Delta L = (J\omega)\Omega\Delta t$$

$$M = \Omega\cdot J\omega \qquad \boxed{\vec{M} = \vec{\Omega}\times J\vec{\omega}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\Omega}\times\vec{L}}$$





进动角速度：$\Omega = \dfrac{M}{L}$

平动与转动的主要内容对照

平 动	转 动
质 量 m	转动惯量 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$
动 量 $\vec{p}=m\vec{v}$	角动量 $\vec{L}=J\vec{\omega}$
牛顿定律 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$	转动定律 $\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=J\vec{\alpha}$
动量定理	角动量定理
$\int \vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$	$\int \vec{M}\mathrm{d}t=J\vec{\omega}_2-J\vec{\omega}_1$
动量守恒定律	角动量守恒定律
条 件，$\vec{F}_{外}=0$	条 件，$\vec{M}=0$
$\vec{p}=$常矢量	$\vec{L}=$常矢量

2018年4月9日 19

平动与转动的主要内容对照

平 动	转 动
力的功：$A=\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功：$A=\int_{\theta_0}^{\theta} M\mathrm{d}\theta$
质点的动能定理：	刚体定轴转动的动能定理：
$A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$	$A=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$
重力势能	重力势能
$E_P=mgh$	$E_p=mgh_c$

机械能守恒 $A_{外}+A_{非保}=\Delta E=\Delta\left(E_k+E_p\right)$

求解刚体及与质点构成系统的有关问题

2018年4月9日 20