角动量定理及其守恒定律

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M} = 0, \quad \vec{L} = \text{常矢量}$$

角动量定理　力矩和角动量是对同一点的　角动量守恒定律

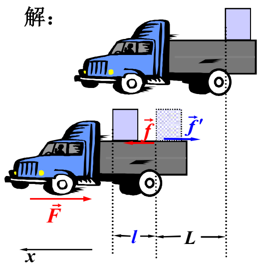
动能定理 $A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}$

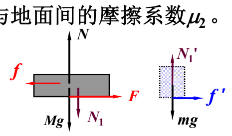
质点系—合外力＋内力做功等于系统动能的增量。

内力不改变质点系的总动量、总角动量，也不能改变质心的速度，但内力可以改变质点系的总动能。

例3: 货质量m，车质量M，车以 v 速度运动，货与车间摩擦系数μ_1，刹车后，车运动L距离停，货相对车移动 l。求：L，车与地面间的摩擦系数μ_2。

解:





作用于车的各力的功

$A_F = -FL$，$A_f = fL$

作用于货上各力的功

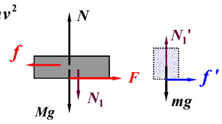
$A_{f'} = -f'(L+l)$

$$\sum A_{内} = -f' l$$

将货物作为研究对象

$$-f(L+l) = -\mu_1 mg(L+l) = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$L = \frac{v^2}{2\mu_1 g} - l$$



将货物和车看成一个系统

$A_{内} = -fl = -\mu_1 mgl$　　$A_{外} = -FL = -\mu_2(M+m)gL$

$$A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$-\mu_2(M+m)gL - \mu_1 mgl = 0 - \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$\mu_2 = \frac{\frac{1}{2}(M+m)v^2 - \mu_1 mgl}{(M+m)g\left(\frac{v^2}{2\mu_1 g} - l\right)}$$

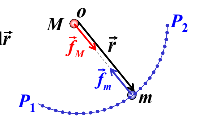
三、势能

1. 万有引力作功

$$A = \int \vec{f}_m \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \left(-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -GMm\frac{dr}{r^2}$$

$$= \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$



万有引力做功与路径无关——保守力。

如果一对力所做的功与相对路径的形状无关，而只决定于相互作用质点始末相对位置，这样的一对力就叫保守力。

保守力沿任意闭合路径所做的功为零。$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$

2. 势 能

保守内力做功与各质点运动的路径无关，只与系统始、末的相对位置状态有关，一种位置状态也称系统的位形。

在保守力场中，存在着一个由系统的位形决定的位置状态函数，称为势能，用E_p表示。

$$A_{保内(1\to2)} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

是确定值

系统由位形1改变到位形2的过程中，保守内力的功等于系统势能的减少(或势能增量的负值)。

选择标准位形，并令其势能为零。$E_{p2} = 0$

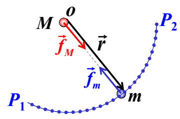
$$E_{p1} = A_{保内(1\to2)}$$

系统处于某位形的势能等于从该位形运动至标准位形（势能零点）时保守内力所做的功。

3. 万有引力势能

$$A = \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

$$= E_{p1} - E_{p2}$$



如果选取两质点相距无穷远的位形为标准位形，系统势能为零，则两质点相距为r时：

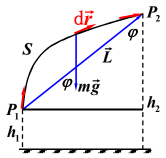
万有引力势能 $E_p = -GMm\frac{1}{r}$　选无穷远势能为零

①势能为以保守力相联系的物体共有。

②非保守力没有势能的概念。

4. 重力作功及重力势能

$$A=\int_S m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$=m\vec{g}\cdot\int_S \mathrm{d}\vec{r}$$
$$=m\vec{g}\cdot\vec{L}$$
$$=mgh_1-mgh_2$$

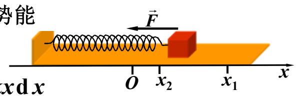


重力做功与路径无关——保守力。

重力势能 $\boxed{E_\mathrm{p}=gmh}$ 选地球表面势能为零　$\boxed{g\equiv\frac{GM}{R^2}}$

$$E_\mathrm{p}=-GMm\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=GMm\frac{h}{R(R+h)}\approx mgh$$

5. 弹力作功及弹性势能



$$\vec{F}=-kx\vec{i}$$
$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-kx\,\mathrm{d}x$$
$$A=-\int_{x_1}^{x_2}kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$
$$E_{\mathrm{p}1}-E_{\mathrm{p}2}=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

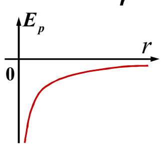
弹力势能：$\boxed{E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2}$ 以弹簧处于自然长度时为弹性势能为零。

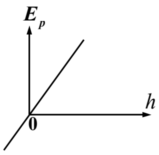
保守力：重力、万有引力、弹性力、静电力等。

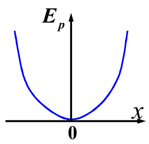
与保守力相对的称为耗散力：摩擦力、粘滞力、爆炸力等。

6. 势能曲线

万有引力势能	重力势能	弹力势能
$E_\mathrm{p}=-G\frac{Mm}{r}$	$E_\mathrm{p}=mgh$	$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2$







上述各势能曲线对应的势能为零的位置在何处？

思考：改变势能零点的选择，曲线该怎样画？

四、功能原理与机械能守恒定律

质点系的动能定理 $\boxed{A_外+A_内=E_{k2}-E_{k1}}$

系统受力 $\begin{cases}外力\\内力\begin{cases}非保守内力\\保守内力\ A_{保内}=-\Delta E_\mathrm{p}\end{cases}\end{cases}$

$$A_外+A_{非保内}+A_{保内}=\Delta E_\mathrm{k}$$
$$A_外+A_{非保内}=\Delta E_\mathrm{k}+\Delta E_\mathrm{p}=\Delta(E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p})$$

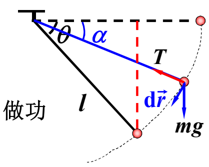
质点系的机械能 $E=E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p}$

功 能 原 理 $\boxed{A_外+A_{非保内}=\Delta E}$

机械能守恒定律

$\boxed{当\ A_外+A_{非保内}=0\ ,\quad E=E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p}=常量}$

例1：已知 m l，静止下落，求下落 θ 角时的速率及绳中张力。



解：地球+小球+绳=系统

$\vec{T}\perp\mathrm{d}\vec{r}$　不作功

只有保守内力(重力)—做功

由机械能守恒给出

$$-mgl\sin\theta+\frac{1}{2}mv^2=0\ \Rightarrow\ v=\sqrt{2gl\sin\theta}$$
$$ma_n=\frac{mv^2}{l}=T-mg\sin\theta\ \Rightarrow\ T=3mg\sin\theta$$

五、守恒定律的应用

1. 守恒定律与对称性

①守恒定律的意义：不究过程细节，却能对系统的某些状态作出预言，是诸守恒定律的特点和优点。

②守恒定律与对称：现代物理指出，自然界存在有许多种对称性，每种对称性都对应一个守恒定律。由对称性可以导出守恒定律，继而导出牛顿定律。

③动量守恒定律对应于空间平移对称性；角动量守恒定律对应于空间转动对称性；能量守恒定律对应于时间平移对称性。

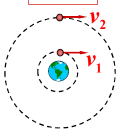
2. 能量守恒定律与卫星的宇宙速度

①第一宇宙速度～环绕速度：

$$mg = m\frac{v_1^2}{R_e}$$

$$\boxed{v_1 \approx \sqrt{gR_e} \approx 7.9\times10^3\ \text{m/s}}\qquad \boxed{v_2 < v_1}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



②第二宇宙速度～飞离地球：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_e m}{R_e} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_e m}{r}$$ 地心参考系

飞离地球的条件

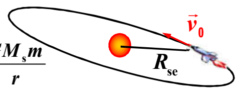
$r\to\infty$ 时, $v\ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_e m}{R_e} \ge 0$

$$v_0 \ge \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gR_e} \approx 11.2\times10^3\ \text{m/s}}$$

③第三宇宙速度——从地面发射的航天器，能够飞离太阳的引力范围，所需要的相对地球的最小速度。

只考虑航天器绕太阳飞行



$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_s m}{R_{se}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m}{r}$$

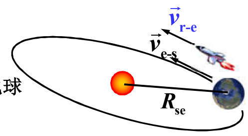
飞离太阳系的条件

$r\to\infty$ 时 $\frac{1}{2}mv^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_s m}{R_{se}} \ge 0$

$$v_0 \ge \sqrt{\frac{2GM_s}{R_{se}}}\qquad \begin{cases} M_s = 2\times10^{30}\ \text{kg} \\ R_{se} = 11.5\times10^{11}\ \text{m} \\ G = 6.67\times10^{-11}\ [\text{SI}] \end{cases}$$

相对太阳的速度 $v_{r\text{-}s} = v_0 \ge 42.2\times10^3$ m/s

考虑地球绕太阳公转速度



$v_{e\text{-}s} = 29.8\times10^3$ m/s

如使发射物体的方向与地球公转运行方向一致，则

$$\vec v_{r\text{-}e} = \vec v_{r\text{-}s} - \vec v_{e\text{-}s}$$

$$v_{r\text{-}e} = v_{r\text{-}s} - v_{e\text{-}s} = (42.2-29.8)\times10^3 = 12.4\times10^3\ \text{m/s}$$

考虑航天器必须克服地球引力势能

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{GM_e m}{R_e} + \frac{1}{2}mv_{r\text{-}e}^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_{r\text{-}e}^2$$

$$\boxed{v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{r\text{-}e}^2} = 16.7\times10^3\ \text{m/s}}$$

六、碰撞问题——系统动量守恒

1. 完全非弹性碰撞

碰前 $\vec v_1$ m_1 1　$\vec v_2$ m_2 2　　碰后 $\vec V$ M

$$m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2 = (m_1+m_2)\vec V \Rightarrow \vec V = \frac{m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2}{m_1+m_2} = \vec v_C$$

损失的动能

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

转化成其他形式的能量了。

2. 完全弹性碰撞——碰撞前后总动能无损失。

①对心碰撞：

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{10} + m_2v_{20}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

碰前 $\vec v_{10}$ $\vec v_{20}$　1　2

碰后 $\vec v_1$ $\vec v_2$

$$v_1 = \frac{(m_1-m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1+m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2-m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_2+m_1}$$

讨论

1)、$m_1 = m_2$ $\begin{cases} v_1 = v_{20} \\ v_2 = v_{10} \end{cases}$ 交换彼此的速度

2)、$m_2 >> m_1$ 且 $v_{20} = 0$ $\begin{cases} v_1 \approx -v_{10} & \text{①被弹回} \\ v_2 \approx 0 & \text{②不动} \end{cases}$

②偏心撞击：

m_1=m_2=m，v_2=0

动量守恒 $m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ $\quad m_1 = m_2$

$\Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}$

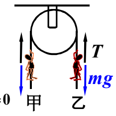
动能守恒 $\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

$\Rightarrow \boxed{v_0^2 = v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow \boxed{2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \equiv 0}$

两个质量相同的物体，其中一个碰撞前静止，

则碰撞后两物体分离的速度彼此垂直。

例1: 轻绳绕过一质量不计且轴光滑的滑轮，质量皆为m的甲、乙二人分别抓住绳两端从同一高度静止开始上爬。分析(1)以二人为系统，在运动中系统的动量是否守恒？机械能是否守恒？系统对滑轮的角动量是否守恒？(2)当甲相对绳的运动速度 u 是乙相对绳的速度的2倍时，二人的速度各是多少？



解:(1) 二人为系统，因加速上升，所受合外力大于零，系统动量不守恒；

以人和地球为系统，绳的张力对系统做功，机械能不守恒；$M = TR - TR + mgR - mgR = 0$

二人对滑轮的合外力矩为零, 系统角动量守恒。

(2) 由角动量守恒 $Rmv_{甲} - Rmv_{乙} = 0 \Rightarrow v_{甲} = v_{乙}$

设滑轮左侧绳子向下

$$\left.\begin{aligned} v_{甲} &= u - v_{绳} \\ v_{乙} &= u/2 + v_{绳} \end{aligned}\right\} v_{绳} = \frac{u}{4} \qquad v_{甲} = v_{乙} = \frac{3u}{4}$$