第9章 非正弦周期电流电路

● 重点

1. 非正弦周期函数分解为付里叶级数

2. 非正弦周期量的有效值和平均功率

3. 非正弦周期电流电路的计算

9.1　非正弦周期信号

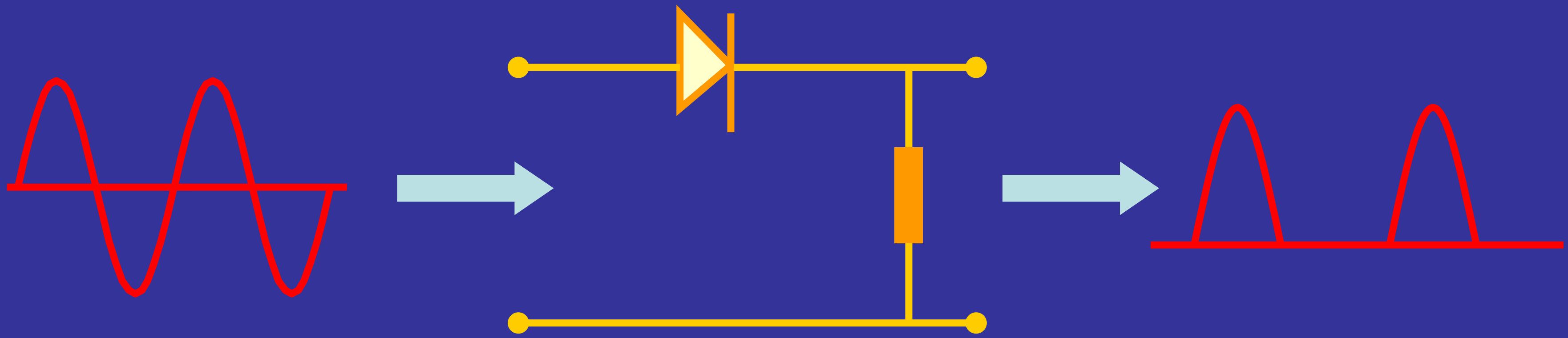
生产实际中不完全是正弦电路，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。

- 非正弦周期交流信号的特点

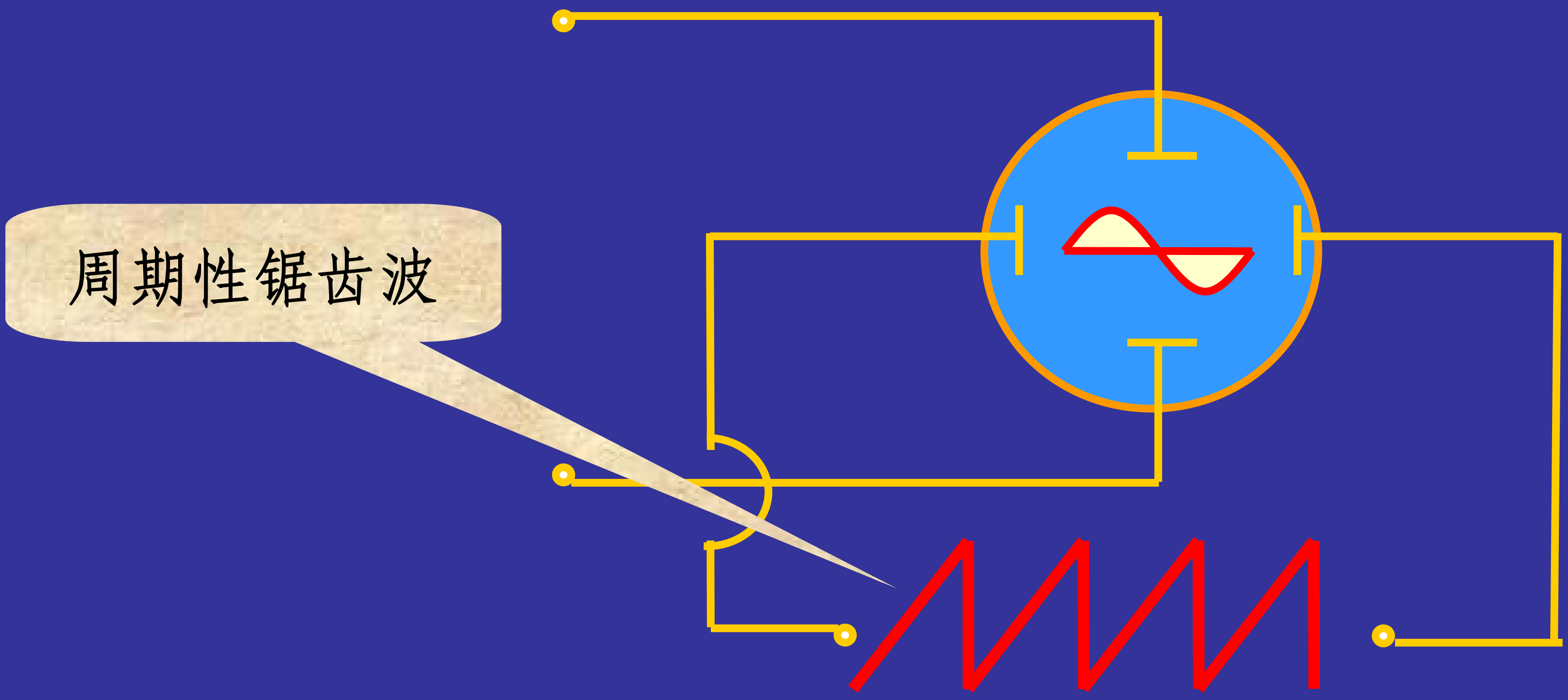
(1)　不是正弦波

(2)　按周期规律变化 → $f(t)=f(t+kT)$

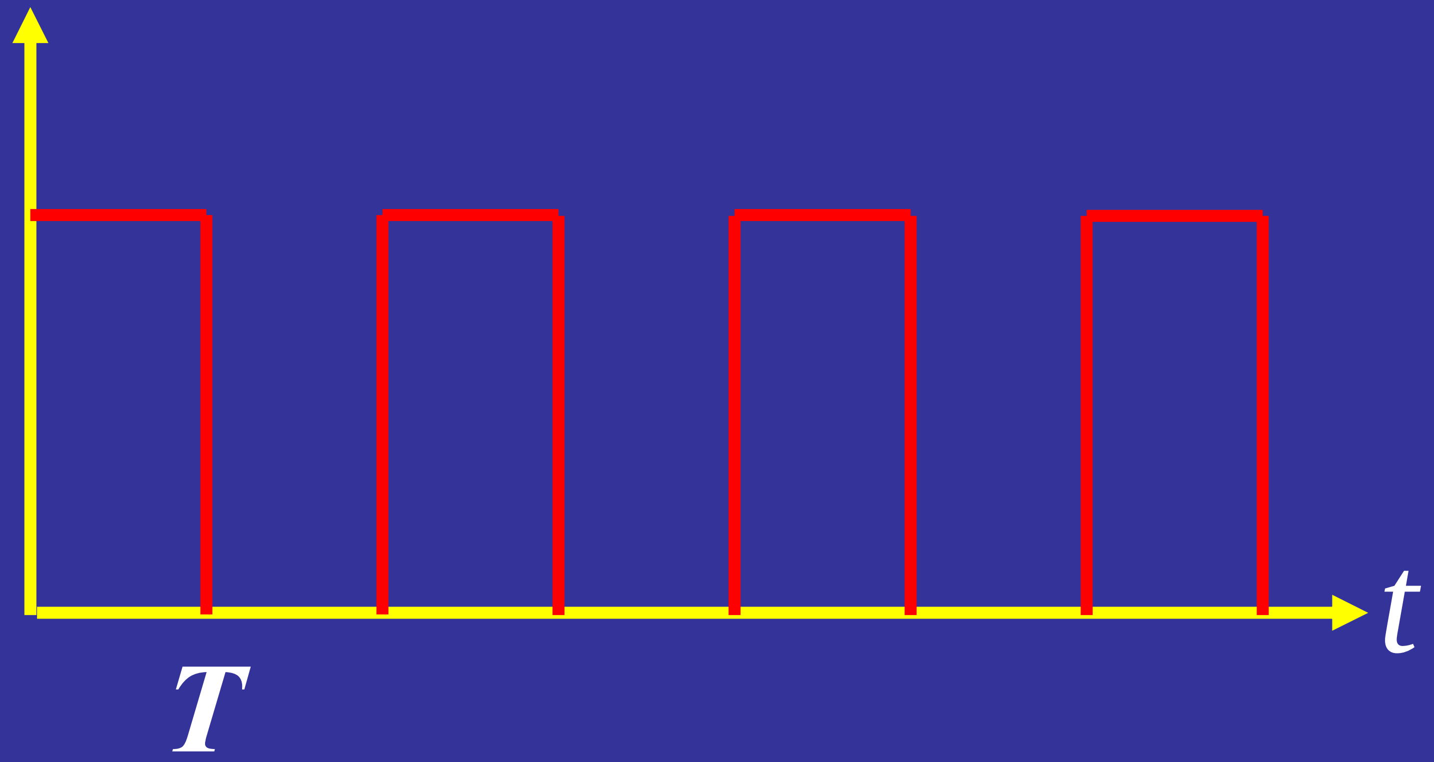
例1　半波整流电路的输出信号



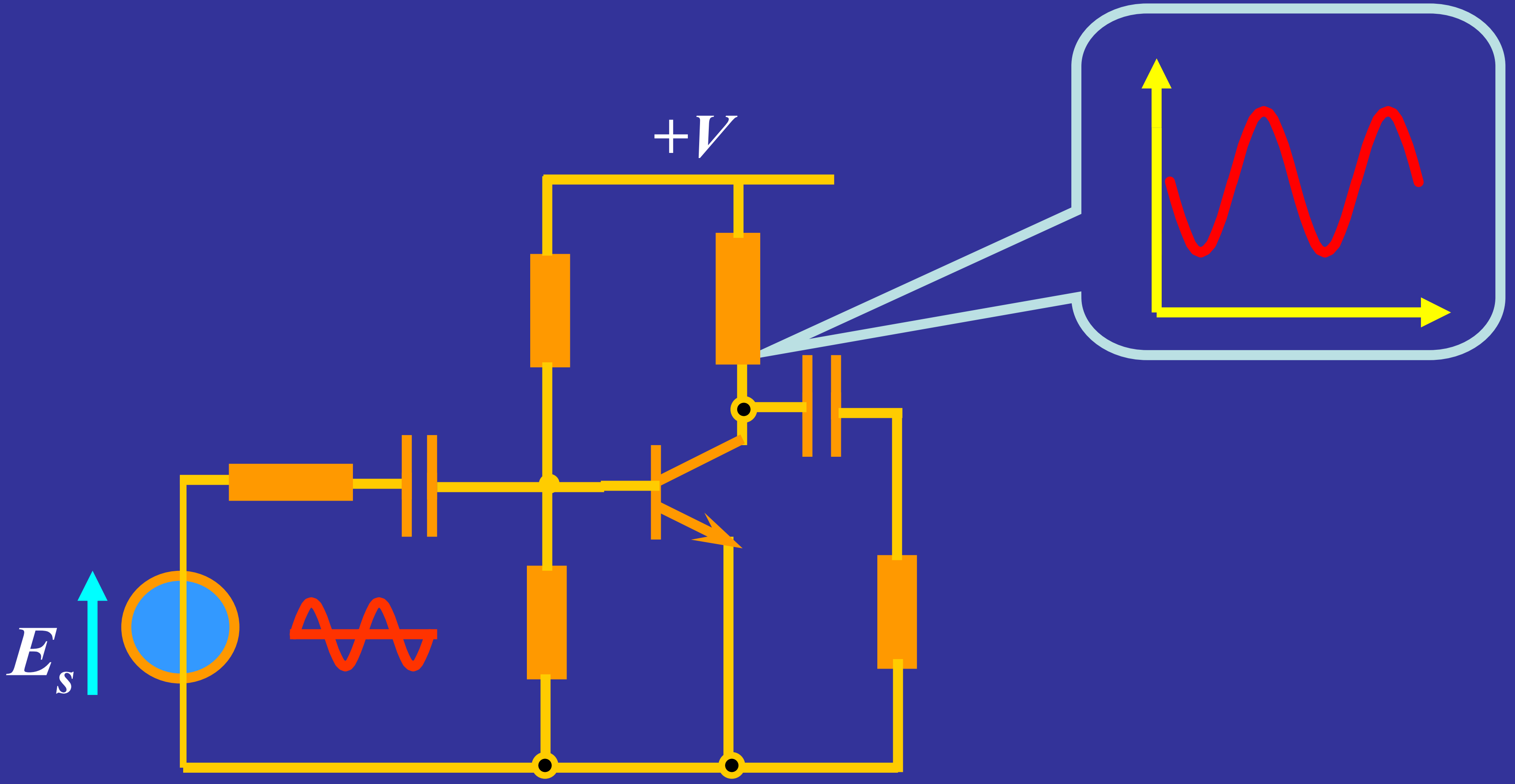
例2 示波器内的水平扫描电压



例3 计算机内的脉冲信号



例4 交直流共存电路



9.2 非正弦周期函数分解为付里叶级数

非正弦周期函数展开成付里叶级数:

直流分量

基波（和原函数同频）

$$f(t) = A_0 + A_{1m}\cos(\omega_1 t + \phi_1) +$$

二次谐波（2倍频）

$$+ A_{2m}\cos(2\omega_1 t + \phi_2) + \cdots$$

$$+ A_{nm}\cos(n\omega_1 t + \phi_n) +$$

高次谐波

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

也可表示成:

$$A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)=a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t$$

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t]$$

系数之间的关系为

$$\begin{cases} A_0=a_0 \\ A_{km}=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \\ a_k=A_{km}\cos\phi_k \qquad b_k=-A_{km}\sin\phi_k \\ \phi_k=\arctan\dfrac{-b_k}{a_k} \end{cases}$$

系数的计算:

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k\omega_1 t d(\omega_1 t)$$

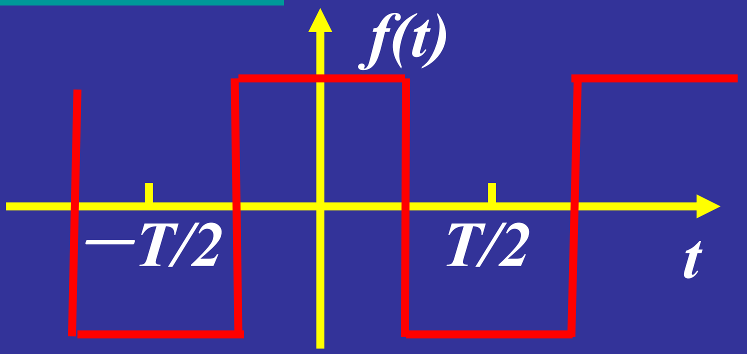
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin k\omega_1 t d(\omega_1 t)$$

求出A_0、a_k、b_k便可得到原函数$f(t)$的展开式。

利用函数的对称性可使系数的确定简化

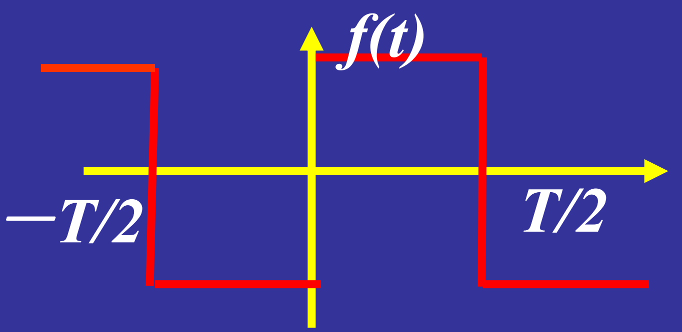
（1）偶函数

$$f(t) = f(-t) \quad b_k = 0$$



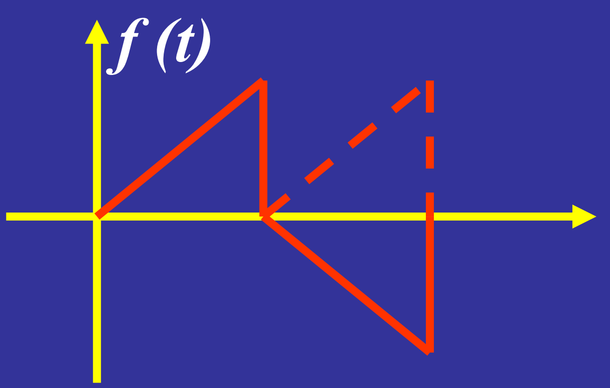
（2）奇函数

$$f(t) = -f(t) \quad a_k = 0$$

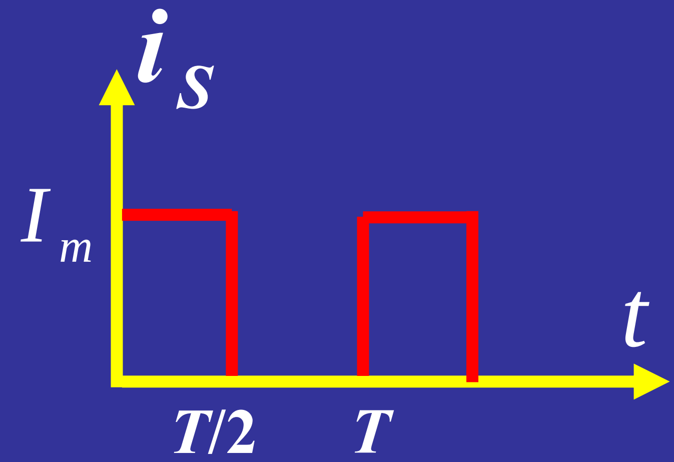


（3）奇谐波函数

$$f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \quad a_{2k} = b_{2k} = 0$$



例1 周期性方波信号的分解



解 图示矩形波电流在一个周期内的表达式为：

$$i_S(t)=\begin{cases} I_m & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ 0 & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$

直流分量：$I_O=\dfrac{1}{T}\int_0^T i_S(t)\,dt=\dfrac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m\,dt=\dfrac{I_m}{2}$

谐波分量：$b_K=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\sin k\omega t\,d(\omega t)$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos k\omega t\right)\Big|_0^{\pi}=\begin{cases} 0 & K\text{为偶数} \\ \dfrac{2I_m}{k\pi} & K\text{为奇数} \end{cases}$$

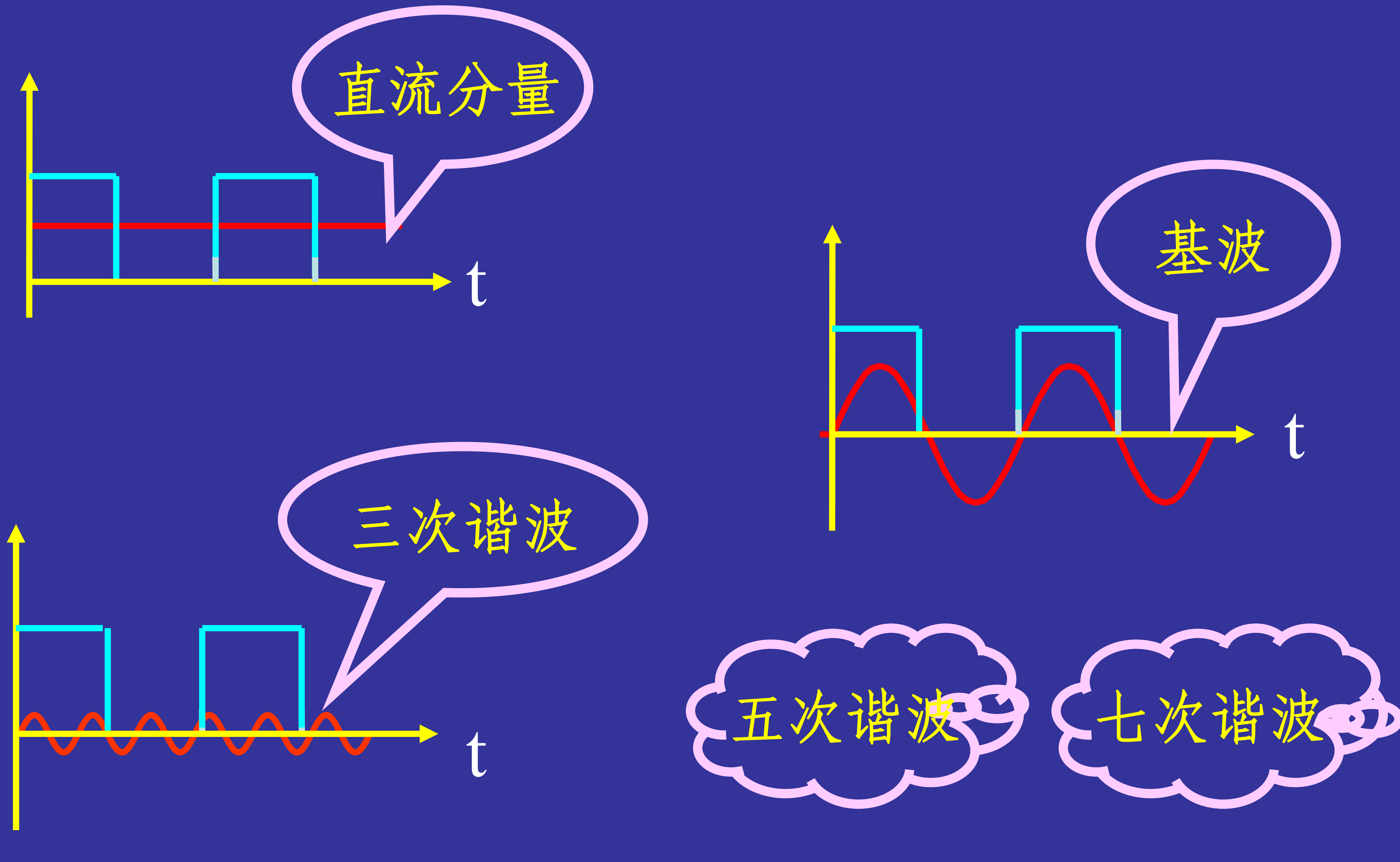
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\cos k\omega t d(\omega t)$$

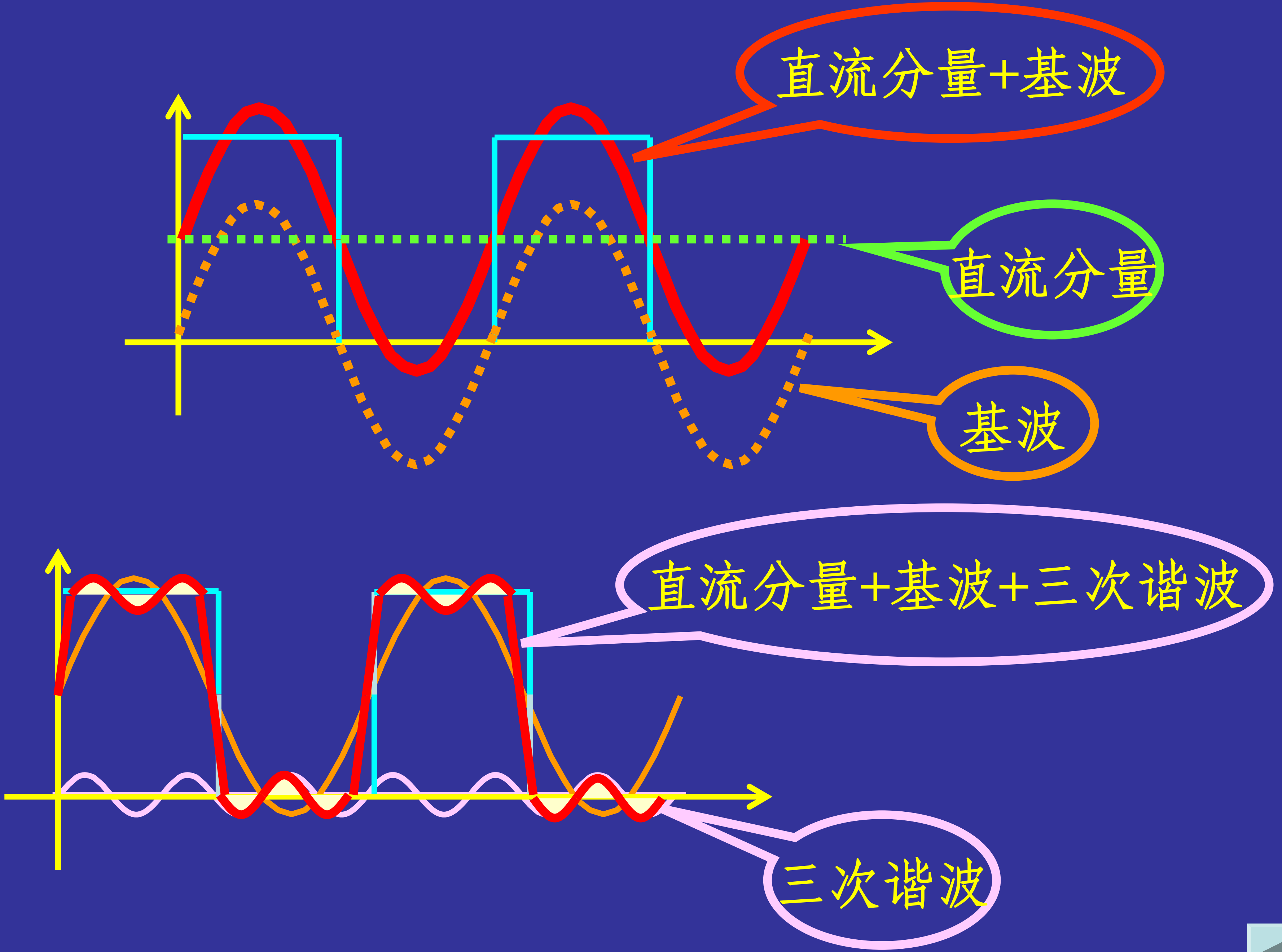
$$= \frac{I_m}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi} = 0$$

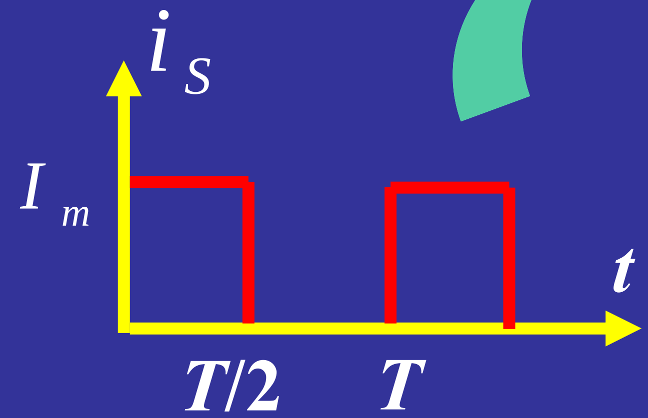
i_S 的展开式为:

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots)$$

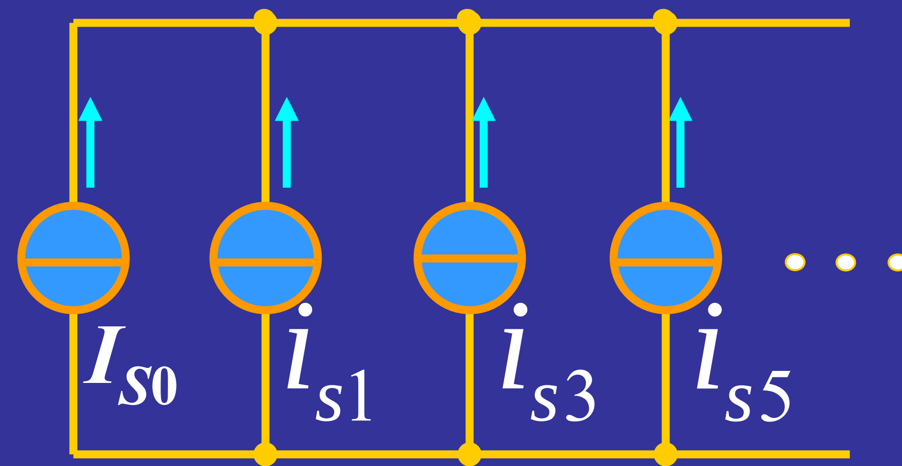
周期性方波波形分解




直流分量+基波
直流分量
基波
直流分量+基波+三次谐波
三次谐波



等效电源



$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega\ t + \ldots)$$

I_{S0} i_{s1} i_{s3} i_{s5}

9.3 有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

（1）正弦、余弦信号一个周期内的积分为0。

k整数

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t d(\omega t) = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos k\omega t d(\omega t) = 0$$

（2）$\sin^2$、$\cos^2$ 在一个周期内的积分为π。

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t d(\omega t) = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t d(\omega t) = \pi$$

（3） 三角函数的正交性

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \sin p\omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \cos p\omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cdot \sin p\omega t d(\omega t) = 0$$

$$(k \neq p)$$

2. 非正弦周期量的有效值

若 $$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

则有效值:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(\omega t) d(t)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 d(t)}$$

利用三角函数的正交性得:

$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_k^2}{2}}$$

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots\cdots}$$

同理

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots\cdots}$$

结论　非正弦周期量的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。

3. 非正弦周期函数的平均值

若 $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$

则其平均值定义为：

$$I_{AV} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)| dt$$

4. 非正弦周期交流电路的平均功率

$$\begin{cases} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t + \varphi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{ik}) \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i\,dt$$

利用三角函数的正交性，得:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \qquad (\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik})$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$

结论

平均功率＝直流分量的功率＋各次谐波的平均功率

9　非正弦周期交流电路的计算

1. 计算步骤

（1） 利用付里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号；

（2） 利用正弦交流电路的计算方法，对各谐波信号分别应用相量法计算；

（注意: 交流各谐波的 X_L、X_C不同，对直流C 相当于开路、L相于短路。）

（3） 将以上计算结果转换为瞬时值叠加。

2. 计算举例

例 1 已知 $i_1 = 9\sqrt{2}\cos(\omega t + 120°)\ \mathrm{A}$, $i_2 = 6\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)\ \mathrm{A}$, $i_3 = 4\sqrt{2}\cos(2\omega t + 30°)\ \mathrm{A}$. 求电流表的读数.

解 求有效值时，注意同次谐波分量要合成一个分量。

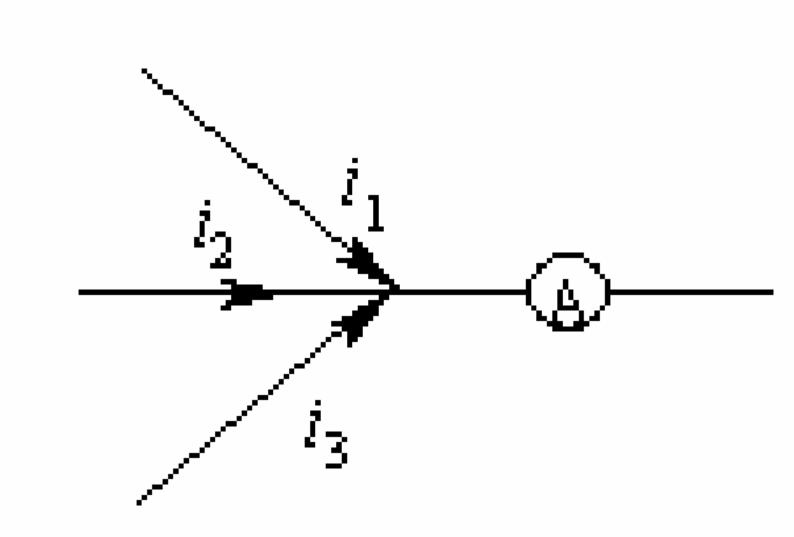
$$i_2 = 6\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°) = 6\sqrt{2}\cos(\omega t - 60°)\mathrm{A}$$

可见，*i2*与*i1*频率相同、相位相反。

由**KCL**知, $i = i_1 + i_2 + i_3$，所以，其有效值为

$$I = \sqrt{(9-6)^2 + 4^2} = 5\ \mathrm{A}$$

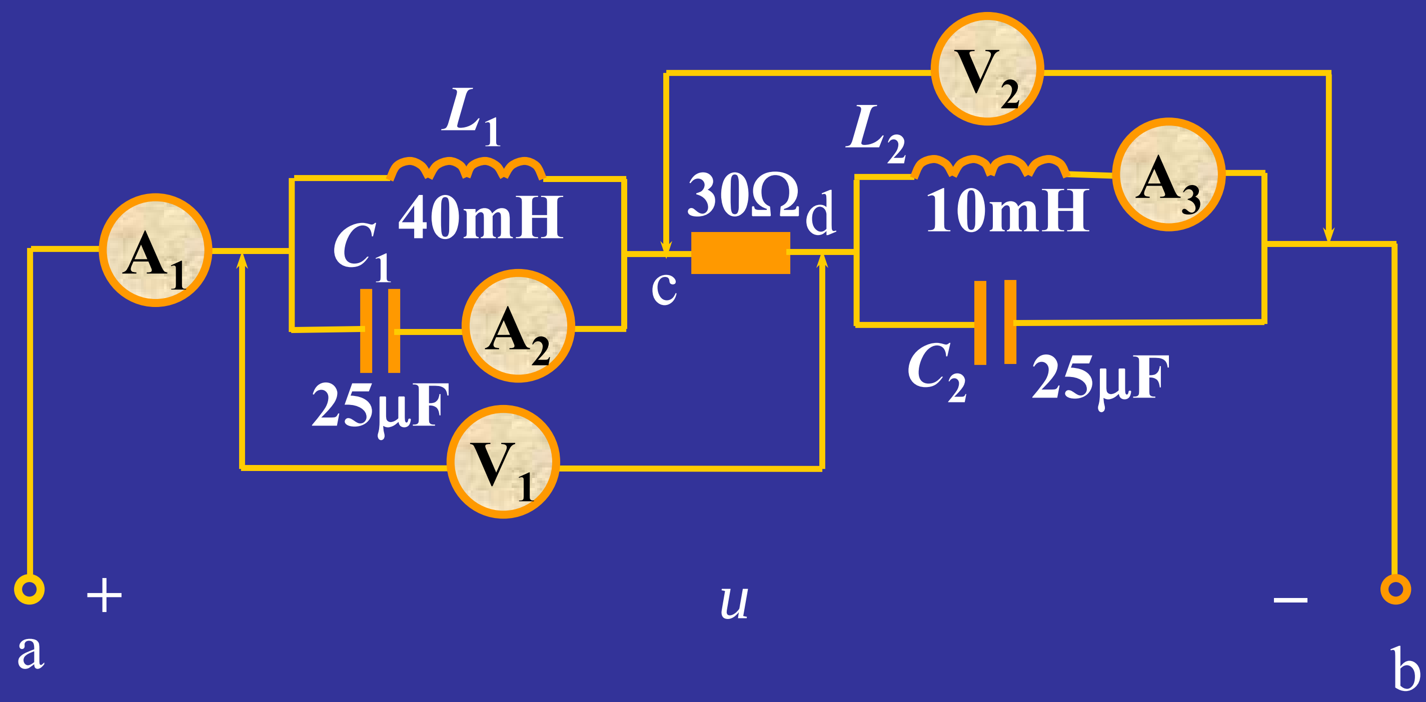
即电流表的读数为 5 **A.**



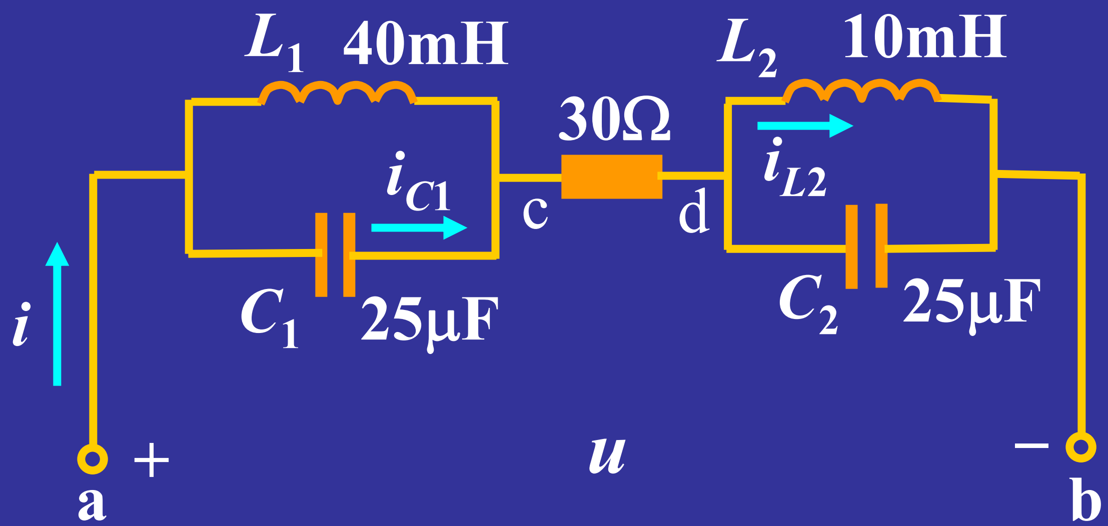
例 2

已知: $u = 30 + 120\sqrt{2}\cos 1000t + 60\sqrt{2}\cos(2000t + \frac{\pi}{4})$ V.

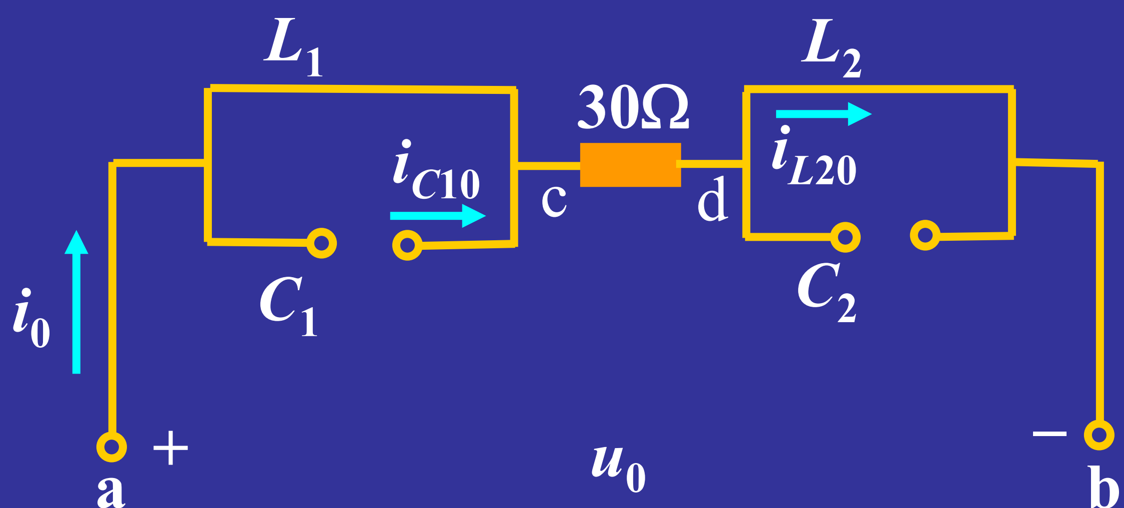
求图示电路中各表读数(有效值)及电路吸收的功率。



解



(1) u_0=30V作用于电路，L_1、 L_2 短路， C_1 、 C_2开路。



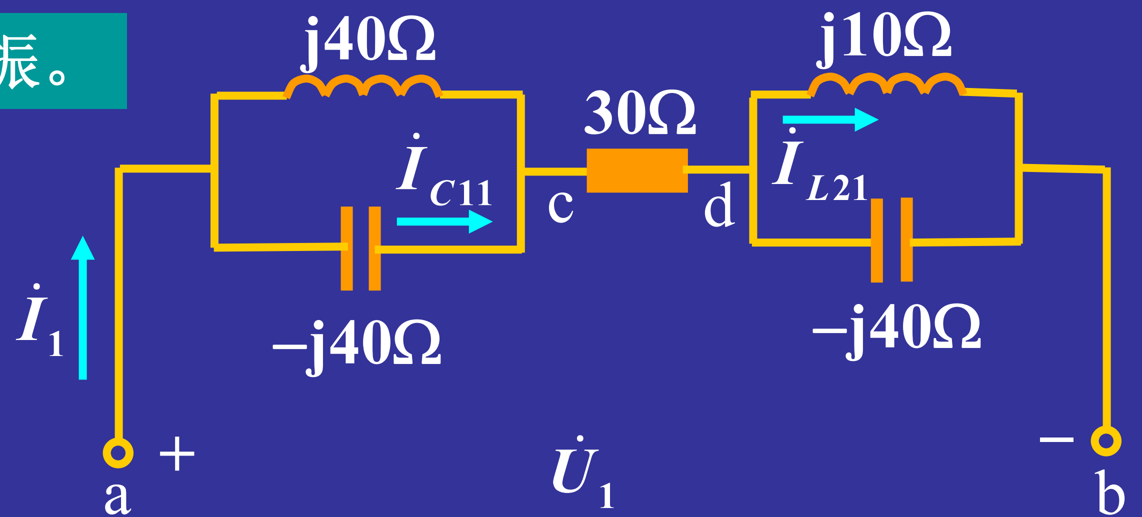
$i_0 = i_{L20} = u_0/R = 30/30 = 1\text{A}$, $i_{C10} = 0$, $u_{ad0} = u_{cb0} = u_0 = 30\text{V}$

(2) $u=120\sqrt{2}\cos 1000t$ V作用

$$\omega L_1 = 1000 \times 40 \times 10^{-3} = 40\Omega \qquad \omega L_2 = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \times 25 \times 10^{-6}} = 40\Omega$$

L_1、C_1 发生并联谐振。



$$\dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{L21} = 0$$

$$\dot{U}_{cb1} = 0 \qquad \dot{U}_{ac1} = \dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ \text{ V}$$

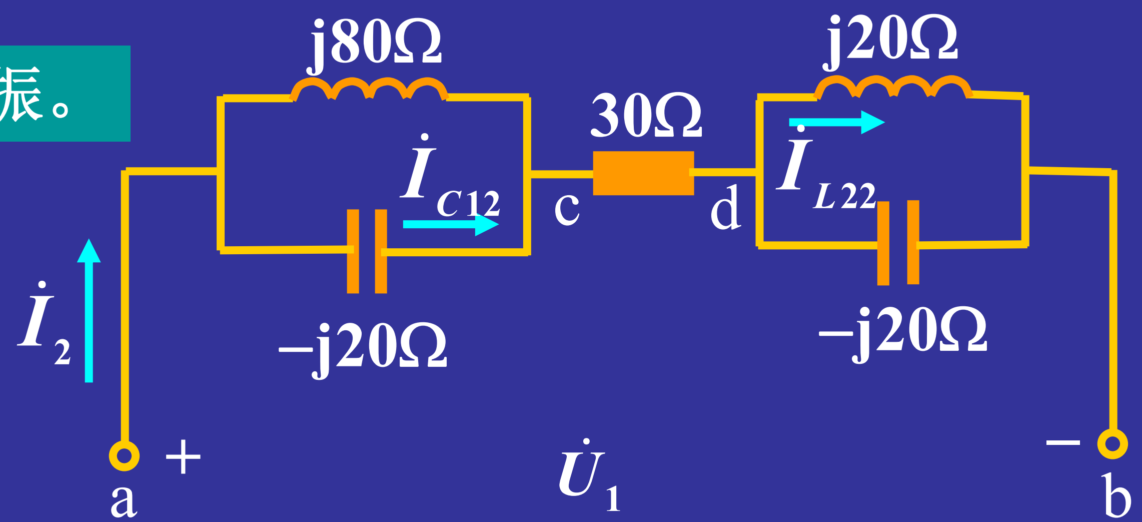
$$\dot{I}_{C11} = j\omega C_1 \dot{U}_1 = \frac{120\angle 0^\circ}{-j40} = 3\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$(3)\ u = 60\sqrt{2}\cos(2000t + \frac{\pi}{4})\ \text{V作用}$$

$$2\omega L_1 = 2000 \times 40 \times 10^{-3} = 80\Omega, \quad 2\omega L_2 = 2000 \times 10 \times 10^{-3} = 20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000 \times 25 \times 10^{-6}} = 20\Omega$$

L_2、C_2 发生并联谐振。



$$\dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{C12} = 0$$

$$\dot{U}_{ad2} = 0, \quad \dot{U}_{db2} = \dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{L22} = \frac{\dot{U}_1}{j2\omega L_2} = \frac{60\angle 45^\circ}{j20} = 3\angle -45^\circ\ \text{A}$$

所求的电压、电流的瞬时值为：

$$i = i_0 + i_1 + i_2 = 1\text{A}$$

$$i_{C1} = i_{C10} + i_{C11} + i_{C12} = 3\sqrt{2}\cos(1000t + 90°)\ \text{A}$$

$$i_{L2} = i_{L20} + i_{L21} + i_{L22} = 1 + 3\sqrt{2}\cos(2000t - 45°)\ \text{A}$$

$$u_{ad} = u_{ad0} + u_{ad1} + u_{ad2} = 30 + 120\sqrt{2}\cos 1000t\ \text{V}$$

$$u_{cb} = u_{cb0} + u_{cb1} + u_{cb2} = 30 + 60\sqrt{2}\cos(2000t + 45°)\ \text{V}$$

电流表A_1的读数： $I = 1\ \text{A}$　　电流表A_2的读数：3A

电流表A_3的读数： $\sqrt{1^2 + 3^2} = 3.16\text{A}$

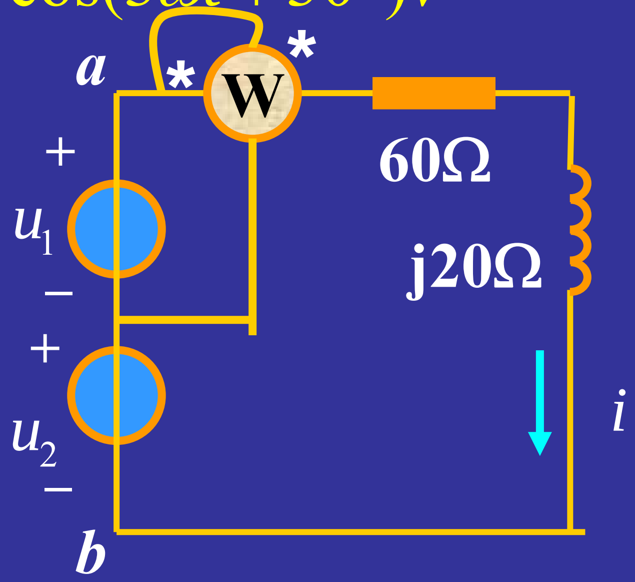
电压表V_1的读数： $\sqrt{30^2 + 120^2} = 123.7\text{V}$

电压表V_2的读数： $\sqrt{30^2 + 60^2} = 67.1\text{V}$

例3 已知 $\omega L = 20\Omega, u_1 = 220\sqrt{2}\cos\omega t V$

$$u_2 = 220\sqrt{2}\cos\omega t + 100\sqrt{2}\cos(3\omega t + 30^0)V$$

求U_{ab}、i、及功率表的读数。



解 $U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2} = 451.22V$

一次谐波作用时：$\dot{U}_{ab(1)} = 440\angle 0^0 V$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 6.96\angle -18.4^0 A$$

三次谐波作用时：$\dot{U}_{ab(3)} = 100\angle 30^0 V$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^0}{60 + j60} = \frac{5\angle 30^0}{3 + j3} = 1.18\angle -15^0 A$$

$$i = 6.96\sqrt{2}\cos(\omega t - 18.4^0) + 1.18\sqrt{2}\cos(3\omega t - 15^0)A$$

$$P = 220 \times 6.96\cos 18.4 = 1452.92W$$

测的是基波的功率