二、相对论动力学的基本方程

动量 $\vec{p}=m\vec{v}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}$

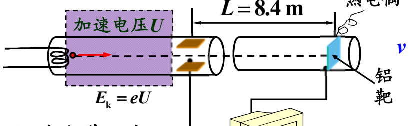
$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}+\vec{v}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$ 低速时牛顿定律成立

① $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 与牛顿力学形式相同，但是动量的变化率及力的具体形式与参考系有关。

② $\vec{F}$ 与 $\vec{a}$ 不一定同向。

贝托齐极限速率实验（1962年）



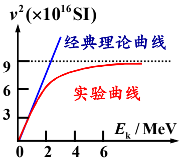
$v=\dfrac{L}{\Delta t}$

经典力学认为：

物体的速度没有上限。

$A_外=\Delta E_k=\dfrac{1}{2}m_e(v^2-v_0^2)$

$v_0=0 \quad v^2=\dfrac{2\Delta E_k}{m_e}=\dfrac{2E_k}{m_e}$



实验结果：电子极限速度等于真空中的光速。

三、质量-能量关系

1. 相对论动能

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\vec{v}\cdot\mathrm{d}(m\vec{v})=\int c^2\mathrm{d}m=c^2\int\mathrm{d}m$$

$A=\Delta E_k$ 从物体静止开始

$\Rightarrow E_k=A=c^2\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m=mc^2-m_0c^2$

$\boxed{E_k=E-E_0}$

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}(m\vec{v})=v^2\mathrm{d}m+m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=v^2\mathrm{d}m+(c^2-v^2)\mathrm{d}m=c^2\mathrm{d}m$$

$\boxed{m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$

$m^2(c^2-v^2)=m_0^2c^2$ 两边微分

$2mc^2\mathrm{d}m-2mv^2\mathrm{d}m-2m^2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=0$

$m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=(c^2-v^2)\mathrm{d}m$

讨论

相对论动能 $\boxed{E_k=mc^2-m_0c^2}=E-E_0$

$\boxed{E_k=m_0c^2(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1)}$ $\boxed{m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$

① 当 $v\ll c$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\approx1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cancel{\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}}+\cdots$$ （泰勒展开）

$E_k=m_0c^2(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}-1)\approx\dfrac{1}{2}m_0v^2$ 回到牛顿力学

并且 $E_k\ll m_0c^2$

② 高能粒子的速率极限是 c：随着 E_k 的增加，v 趋向于极限 c，这一点已被实验所证实。

$$v^2=c^2\left(1-\frac{1}{(1+E_k/m_0c^2)^2}\right)$$

2. 相对论质能关系

总能量 $E=E_0+E_k$

静止能量 $\boxed{E_0=m_0c^2}$ —比动能、化学能大上亿倍！

例：电子静止质量 $m_e=0.911\times10^{-30}$ kg，相应的静止能量 $E_0=8.19\times10^{-14}\text{J}=0.511\text{MeV}$。

总能量 $\boxed{E=mc^2}$ —质能关系

① 相对论质能关系统一了质量和能量守恒。

$\boxed{\Delta E=\Delta mc^2}$ 能量守恒 ⟷ 质量守恒

物体的质量变化与能量变化是互相伴随的。

② 核反应中的应用：$\boxed{E_k=E-E_0 \quad =mc^2-m_0c^2}$

能量守恒 $\boxed{E=E_0+E_k}$

$E_{k1}+m_{01}c^2=E_{k2}+m_{02}c^2$

$E_{k2}-E_{k1}=(m_{01}-m_{02})c^2$

- m_{01} 反应粒子总静止质量
- E_{k1} 反应前总动能
- m_{02} 生成粒子总静止质量
- E_{k2} 反应后总动能

核反应释放的能量 $\boxed{\Delta E_k=\Delta m_0c^2}$ 动能的增量等于静止能量的减量

$\Delta m_0=m_{01}-m_{02}$ — “质量亏损”（质量的减量）

一定的质量亏损一定释放出相应的能量。

劈裂原子核可释放静止能量（第一颗原子弹1945年）。

太阳发光发热的能量来源——核聚变。（氢弹）

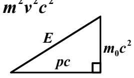
四、能量-动量关系

$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow m^2(1-\dfrac{v^2}{c^2})=m_0^2$

$\Rightarrow m^2c^2=m_0^2c^2+m^2v^2$

两边乘以c^2 $\Rightarrow m^2c^4=m_0^2c^4+m^2v^2c^2$

①实物粒子 $\left.\begin{array}{l} E=mc^2 \\ \vec{p}=m\vec{v} \end{array}\right\}$ $\boxed{E^2=m_0^2c^4+p^2c^2}$ $\boxed{E^2=E_0^2+p^2c^2}$



呈勾股关系

②光子的静止质量m_0=0，固有 $E=pc$　　h普朗克常数

根据量子力学理论，频率为ν的光子能量为 $E=h\nu$

因此，光子的动量 $p=\dfrac{E}{c}=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}=mc$

狭义相对论动力学

相对论质量 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

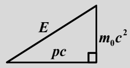
相对论动量 $\vec{p}=m\vec{v}=\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

相对论动能 $E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

总能量 $E=mc^2$　静止能量 $E_0=m_0c^2$

相对论能量动量关系

$E^2=m_0^2c^4+p^2c^2=E_0^2+p^2c^2$



例1 将一千克100℃的水冷至0℃，降温一百度。

求：能量的损失和相应质量的减少。$C=4.2\,\mathrm{J/(g\cdot{}^\circ C)}$

解：　$\Delta E=1000\times4.2\times100=4.2\times10^5\,(\mathrm{J})$

$\Delta m=\dfrac{\Delta E}{c^2}=\dfrac{4.2\times10^5}{(3\times10^8)^2}=4.66\times10^{-12}\,(\mathrm{kg})$

例2 将弹性系数为 $k=10$ N/m 的弹簧拉伸半米。

求：能量的增加和相应质量的增加。

解：　$\Delta E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=0.5\times10\times0.5^2=1.25\ (J)$

$\Delta m=\dfrac{\Delta E_p}{c^2}=\dfrac{1.25}{(3\times10^8)^2}=1.39\times10^{-17}\,(\mathrm{kg})$

例3 一个粒子的动能等于该粒子的静止能量。

求：该粒子的速率。

解：　$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2$

$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2m_0 \Rightarrow 1-\dfrac{v^2}{c^2}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

例4 一个粒子的动量是非相对论动量的二倍。

求：该粒子的速率。

解：　$\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{mv}{m_0v}=\dfrac{m}{m_0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2$

$\Rightarrow 1-\dfrac{v^2}{c^2}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

例5：一次热核聚变反应

$^2_1\mathrm{H}$(氘)+$^3_1\mathrm{H}$(氚)$\rightarrow$ $^4_2\mathrm{He}$(氦)+$^1_0\mathrm{n}$(中子)

质量亏损：$\Delta m_0=(m_D+m_T)-(m_{He}+m_n)$

$=(2.01355\mathrm{u}+3.01550\mathrm{u})-(1.00867\mathrm{u}+4.00150\mathrm{u})$

$=3.315\times10^{-29}\mathrm{kg}$

u=1.66054×10^{-27}kg—原子质量单位

释放能量：$\Delta E=\Delta m_0c^2=2.818\times10^{-12}\,\mathrm{J}$

1kg 核燃料释放能量约为：　3.35×10^{14} J

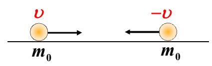
1kg 优质煤燃烧热为：　2.93×10^7J

两者相差10^7倍，即1kg核燃料～1千万kg 煤！

质能关系 $\Rightarrow$ 原子能时代的开始。

例6：两个静质量都是m_0的全同粒子，以相等速率υ相向运动，碰撞后复合。求：复合粒子的速度和质量。

解：设复合粒子质量为M，速度为V



碰撞过程，动量守恒：

$$m\upsilon+m(-\upsilon)=MV=0 \Rightarrow V=0 \Rightarrow M=M_0$$

由能量守恒：

$$2mc^2=Mc^2=M_0c^2$$

$$M_0=2m=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}>2m_0$$

损失的动能转换成静止能量。

例7 两静止质量都是m_0的粒子，分别以$0.8c$和$0.6c$的速度沿直线相向运动。它们经过对心碰撞后合成为一个新粒子。求：新粒子的静止质量和速率。

解：$m_A=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{5}{3}m_0$，$m_B=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{5}{4}m_0$

由能量守恒：

$$m_Ac^2+m_Bc^2=Mc^2 \Rightarrow M=m_A+m_B \Rightarrow \boxed{M=\frac{35}{12}m_0}$$

由动量守恒：

$$m_Av_A-m_Bv_B=MV \Rightarrow \boxed{V=\frac{5m_0}{M}\left(\frac{v_A}{3}-\frac{v_B}{4}\right)}$$

$$V=\frac{4\times0.8c-3\times0.6c}{7}=\frac{1.4c}{7}=0.2c$$

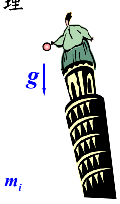
$$\boxed{M_0=M\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{35}{12}m_0\sqrt{1-0.04}=2.86m_0}>2m_0$$

§6.6 广义相对论简介

一、广义相对论基本原理 $\begin{cases}\text{等效原理}\\\text{相对性原理}\end{cases}$

等效原理 $F=m_ia$ m_i称惯性质量

$F=\frac{GMm_g}{r^2}$ m_g称引力质量



对一个自由落体：$G\frac{m_gM}{r^2}=m_ig$

$$\frac{m_g}{m_i}=\frac{gr^2}{GM}\xlongequal{\text{实验表明}}\text{常量} \Rightarrow m_g\propto m_i$$

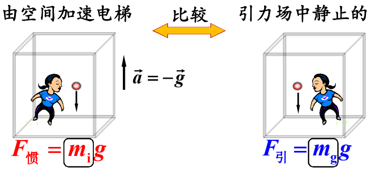
选取适当的单位可使得：$\boxed{m_g=m_i}$（精度高于10^{-11}）

在引力场中一切物体都具有同一加速度。

爱因斯坦假想实验一

——广义相对论的等效原理

自由空间加速电梯 比较 引力场中静止的电梯



观察者无法判断电梯是在自由空间加速运动还是在引力场中静止。

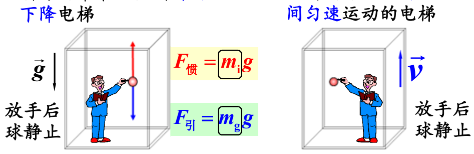
等效原理：任何力学实验都不可能把引力场和加速度的效果区分开。（加速度与引力场等效）

爱因斯坦假想实验二

——广义相对论的相对性原理

引力场中某一空间自由下降电梯

远离引力场的自由空间匀速运动的电梯



引力场中自由下落的参考系（电梯）与惯性系等效，称为局部惯性系。

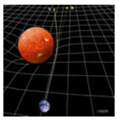
一切参考系都是等价的，物理定律在任何参考系中都具有相同的形式。

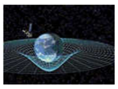
二、广义相对论的预言与检验

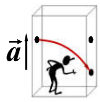
1. 光线的偏折与空间弯曲
2. 水星近日点的进动
3. 引力红移
4. 引力时间延缓
5. 引力波
6. 黑洞
7. 虫洞

弯曲的时空

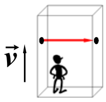
等效原理 ⟹ 光线在引力场中弯曲

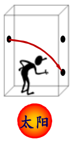






自由空间一个相对某惯性系向上做加速运动的非惯性系。





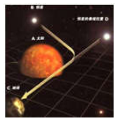
在飞船参照系中观察：光沿直线传播。

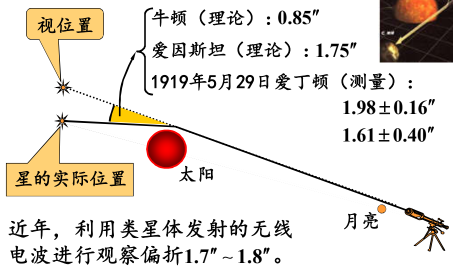
引力源（太阳）

由于物质的存在，实际空间并不是均匀的，空间发生了“弯曲”。

太阳附近光线偏折的实验验证

遥远的星光如果掠过太阳表面将会发生 1.7″ 的偏转。





牛顿（理论）：0.85″

爱因斯坦（理论）：1.75″

1919年5月29日爱丁顿（测量）：

1.98±0.16″

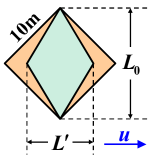
1.61±0.40″

近年，利用类星体发射的无线电波进行观察偏折1.7″～1.8″。

例题 一静止面积为S_0=100 m²，面密度为σ_0的正方形板，当观测者以速度u=0.6c沿其对角线运动时。

求：（1）所测得图形的形状与面积；

（2）面密度之比σ / σ_0。



解：（1）$L' = L_0\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2} = 0.8L_0$

$$S' = 2\times\frac{1}{2}L'\times\frac{L_0}{2} = \frac{0.8L_0^2}{2} = 80\mathrm{m}^2$$

（2）$\dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \dfrac{m'/S'}{m_0/S_0} = \dfrac{m'L_0}{m_0L'} = \dfrac{\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}L_0}{m_0L_0\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{1-\beta^2} = 1.5625$

作业15-5: 一光脉冲从O点发出到P点被吸收，在S系中 $\overline{OP} = l$ 且与x轴的夹角为θ，S' 系相对S系以v的速度沿x轴运动，设光脉冲发出时刻 $t_O = t'_{O'} = 0$，求在S'系中测量：(1) 光被吸收的时刻t'；(2) 两点间的距离l'。

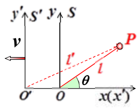
解：在S系P点坐标为：

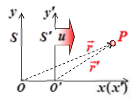
$$(l\cos\theta,\ l\sin\theta,\ 0,\ l/c)$$

$$t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l/c+vl\cos\theta/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l\cos\theta+vl/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y' = y = l\sin\theta$$





$$\boxed{l'} = \sqrt{\frac{(l\cos\theta+vl/c)^2}{1-v^2/c^2}+l^2\sin^2\theta} = \frac{l+vl\cos\theta/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \boxed{= ct'}$$