

第7章 含有耦合电感的电路

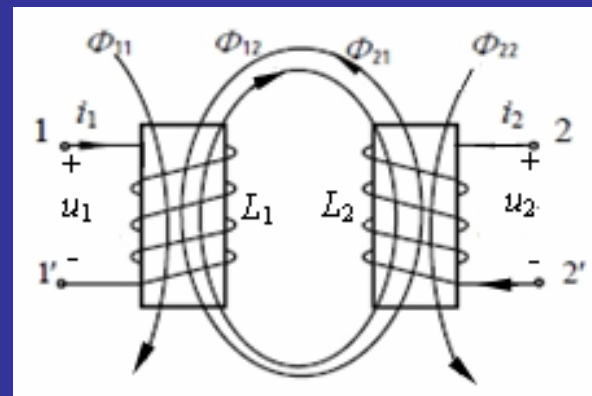
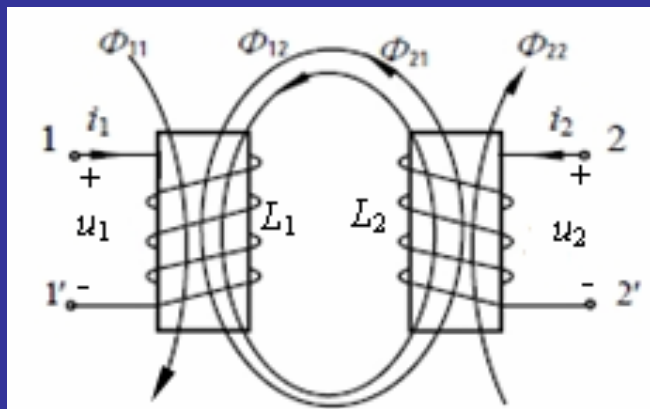
●重点

1. 互感和互感电压
2. 有互感电路的计算
3. 空心变压器和理想变压器

7.1 耦合电感的伏安关系

耦合电感元件属于多端元件，在实际电路中，如收音机、电视机中的中周线圈、振荡线圈，整流电源里使用的变压器等都是耦合电感元件，熟悉这类多端元件的特性，掌握包含这类多端元件的电路问题的分析方法是必要的。

1. 互感



线圈1中通入电流 i_1 时，在线圈1中产生磁通 (*magnetic flux*)，同时，有部分磁通穿过临近线圈2，这部分磁通称为互感磁通。两线圈间有磁的耦合。



在线性情况下，各磁通均与电流成正比，即

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= L_1 i_1 & \Phi_{22} &= L_2 i_2 \\ \Phi_{21} &= M_{21} i_1 & \Phi_{12} &= M_{12} i_2\end{aligned}$$

L_1 和 L_2 分别为线圈 1 和 2 的自电感； M_{12} 和 M_{21} 称为两线圈的互感。

当两个线圈都有电流时，每一线圈的磁链为自磁链与互磁链的代数和：

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} \pm \Phi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} \pm \Phi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1\end{aligned}$$

注

(1) M 值与线圈的形状、几何位置、空间媒质有关，与线圈中的电流无关，满足 $M_{12}=M_{21}$

(2) L 总为正值， M 值有正有负。



2. 耦合系数 (coupling coefficient)

用耦合系数 k 表示两个线圈磁耦合的紧密程度。

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

当 $k=1$ 称全耦合：漏磁 $\Phi_{s1} = \Phi_{s2} = 0$ 即 $\Phi_{11} = \Phi_{21}$, $\Phi_{22} = \Phi_{12}$

一般有：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{(Mi_1)(Mi_2)}{L_1 i_1 L_2 i_2}} = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}} \leq 1$$

耦合系数 k 与线圈的结构、相互几何位置、空间磁介质有关

互感现象



利用——变压器：信号、功率传递
避免——干扰

克服：合理布置线圈相互位置或增加屏蔽减少互感作用。



3. 耦合电感上的电压、电流关系

当 i_1 为时变电流时，磁通也将随时间变化，从而在线圈两端产生感应电压。

当 i_1 、 u_{11} 、 u_{21} 方向与 Φ 符合右手螺旋时，根据电磁感应定律和楞次定律：

$$u_{11} = \frac{d\Phi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \longrightarrow \text{自感电压}$$

$$u_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \longrightarrow \text{互感电压}$$

当两个线圈同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压：



$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

注

两线圈的自磁链和互磁链相助，互感电压取正，否则取负。表明互感电压的正、负：

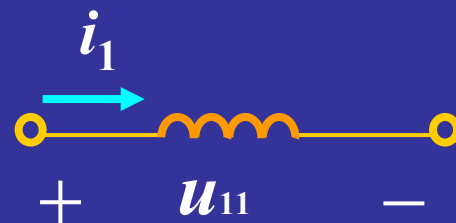
- (1) 与电流的参考方向有关。
- (2) 与线圈的相对位置和绕向有关。



4. 互感线圈的同名端

对自感电压，当 u, i 取关联参考方向， u, i 与 Φ 符合右螺旋定则，其表达式为

$$u_{11} = \frac{d\Phi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$



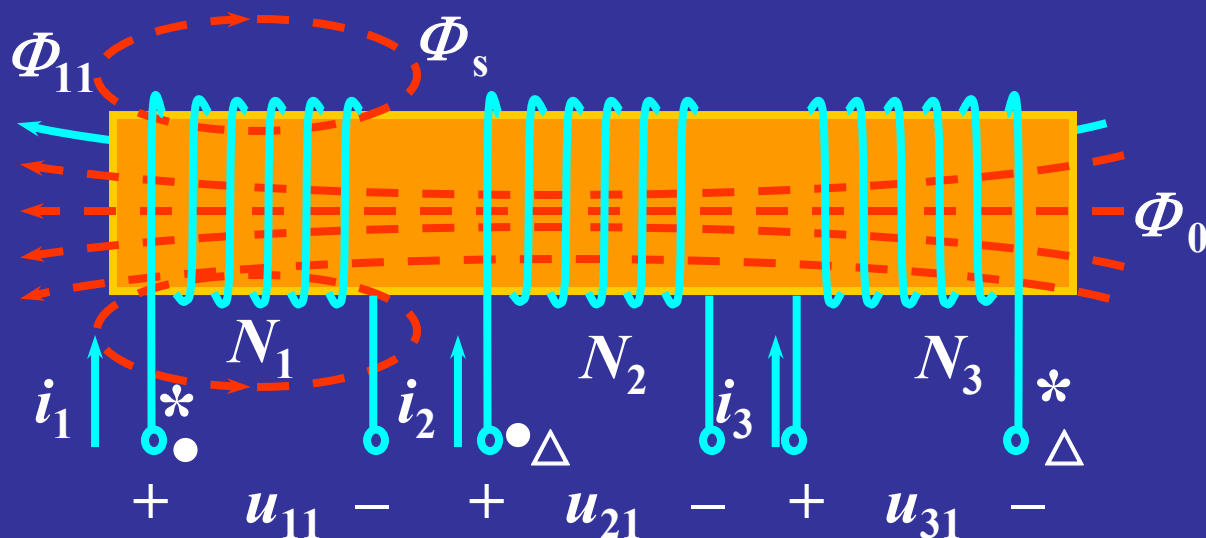
上式说明，对于自感电压由于电压电流为同一线圈上的，只要参考方向确定了，其数学描述便可容易地写出，可不用考虑线圈绕向。

对互感电压，因产生该电压的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。为解决这个问题引入同名端的概念。



同名端

→ 当两个电流分别从两个线圈的对应端子同时流入或流出，若所产生的磁通相互加强时，则这两个对应端子称为两互感线圈的同名端。



$$u_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{31} = -M_{31} \frac{di_1}{dt}$$

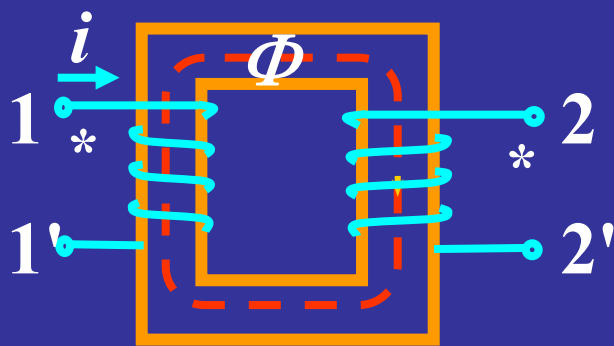
注意：线圈的同名端必须两两确定。



确定同名端的方法:

- (1) 当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时, 两个电流产生的磁场相互增强。

例



- (2) 当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时, 将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。

同名端的实验测定:



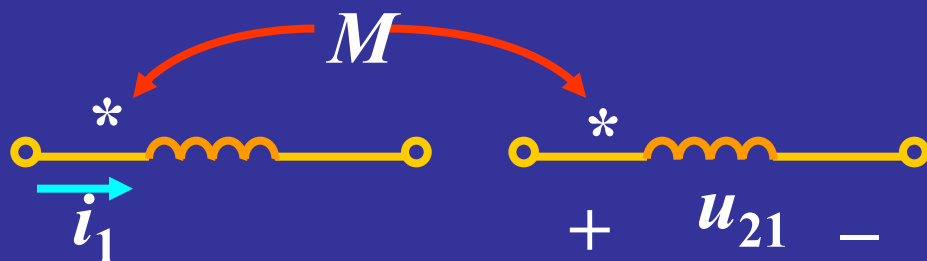
如图电路，当闭合开关 S 时， i 增加，

$$\frac{di}{dt} > 0, \quad u_{22'} = M \frac{di}{dt} > 0 \quad \text{电压表正偏。}$$

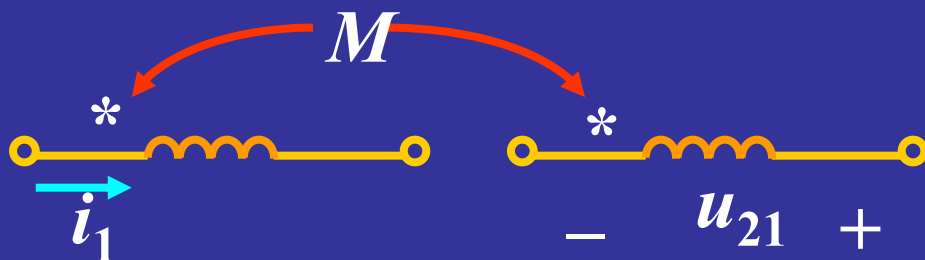
当两组线圈装在黑盒里，只引出四个端线组，要确定其同名端，就可以利用上面的结论来加以判断。

由同名端及 u 、 i 参考方向确定互感线圈的特性方程

有了同名端，以后表示两个线圈相互作用，就不再考虑实际绕向，而只画出同名端及参考方向即可。

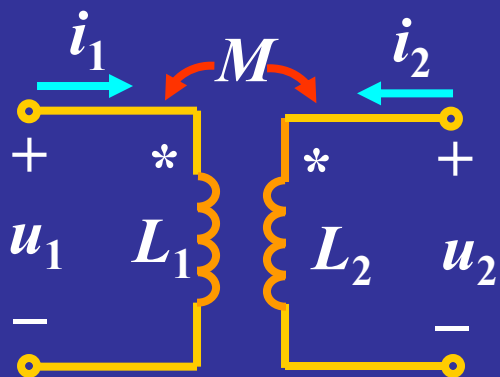


$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



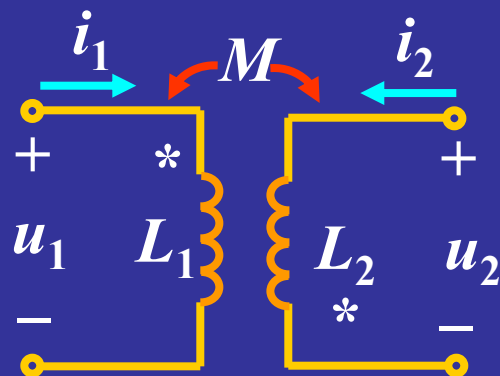
$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

例



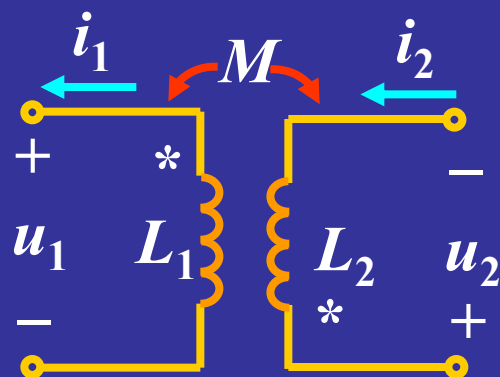
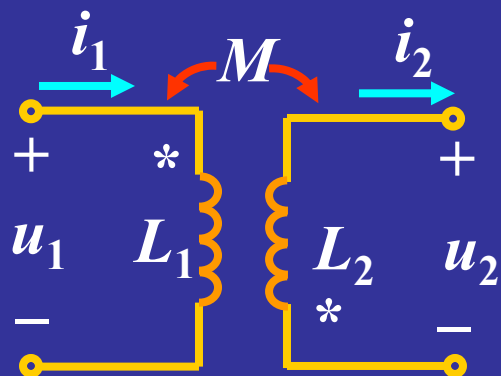
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

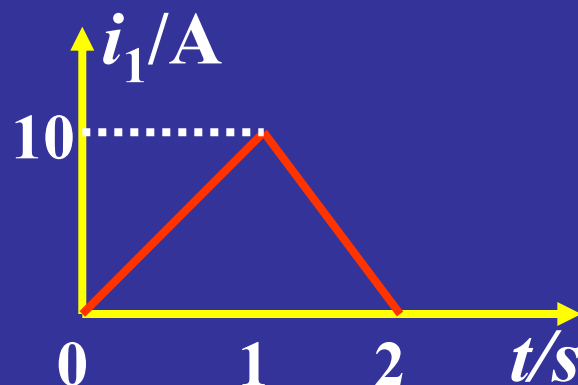
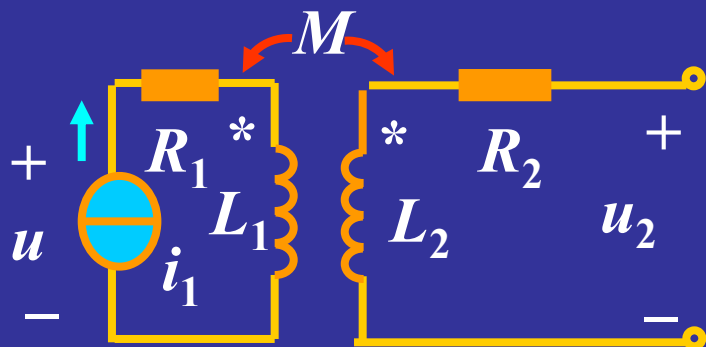


写出图示电路电压、电流关系式



例

已知 $R_1 = 10\Omega, L_1 = 5\text{H}, L_2 = 2\text{H}, M = 1\text{H}$, 求 $u(t)$ 和 $u_2(t)$



解

$$u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} = \begin{cases} 10\text{V} & 0 \leq t \leq 1\text{s} \\ -10\text{V} & 1 \leq t \leq 2\text{s} \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

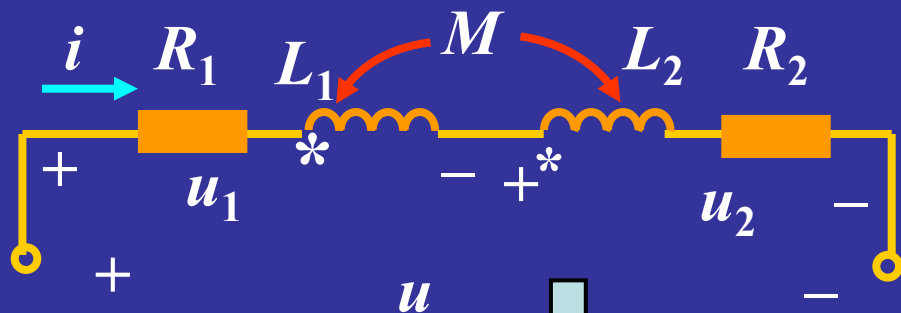
$$u(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = \begin{cases} 100t + 50\text{V} & 0 \leq t \leq 1\text{s} \\ -100t + 150\text{V} & 1 \leq t \leq 2\text{s} \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$



7.2 含有耦合电感电路的计算

1. 耦合电感的串联

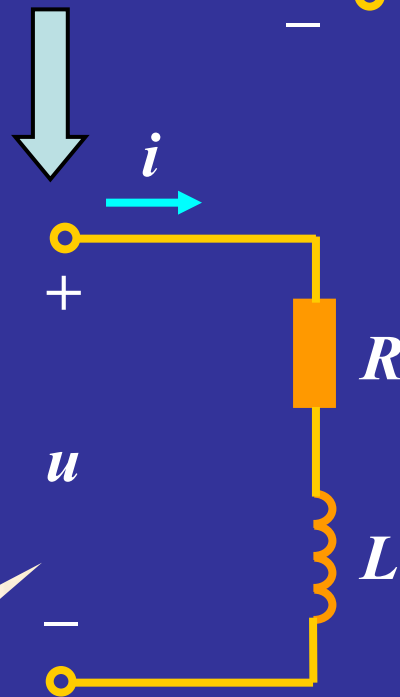
(1) 顺接串联



$$\begin{aligned} u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \\ &= Ri + L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

$$R = R_1 + R_2$$

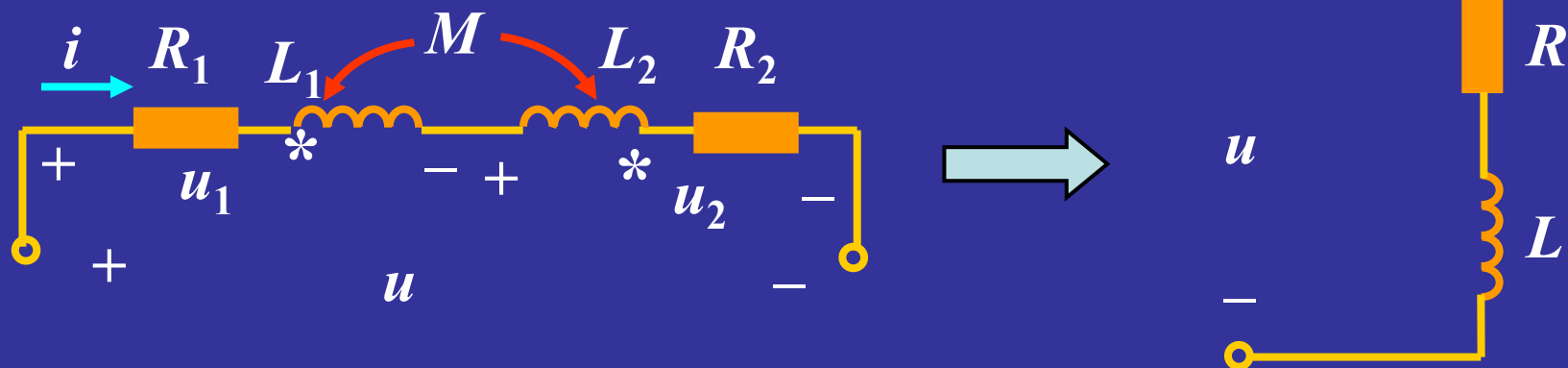
$$L = L_1 + L_2 + 2M$$



去耦等效电路



(2) 反接串联



$$\begin{aligned} u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

$$R = R_1 + R_2 \quad L = L_1 + L_2 - 2M$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \quad \rightarrow \quad M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

互感不大于两个自感的算术平均值。



互感的测量方法:

顺接一次，反接一次，就可以测出互感:

$$M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}$$

全耦合时 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

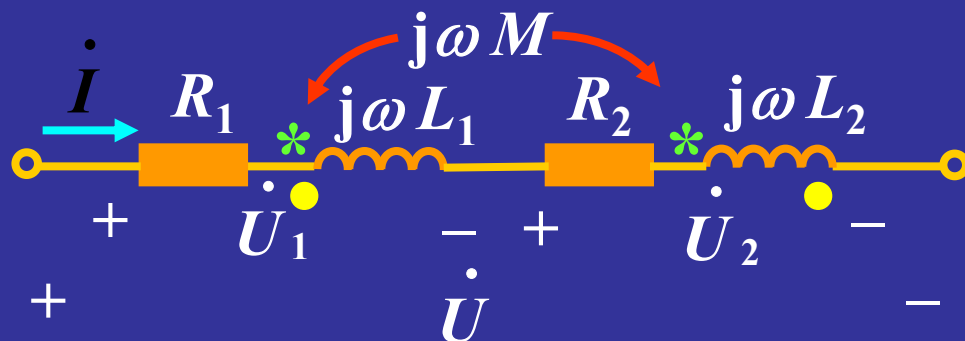
$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \pm 2M = L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2} \\ &= (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2 \end{aligned}$$

当 $L_1 = L_2$ 时, $M = L_1 = L_2$

$$L = \begin{cases} 4M & \text{顺接} \\ 0 & \text{反接} \end{cases}$$

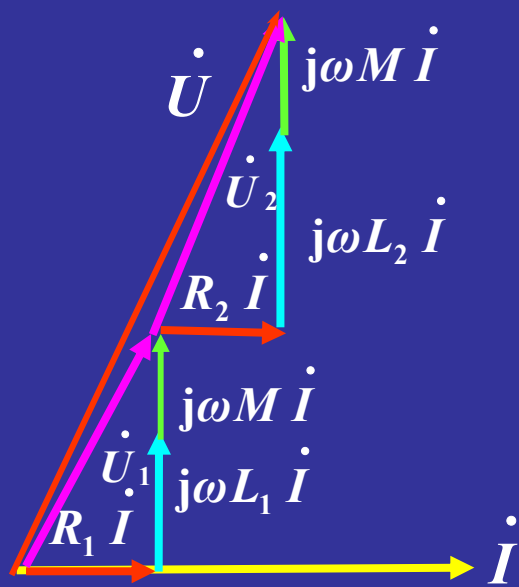


在正弦激励下:

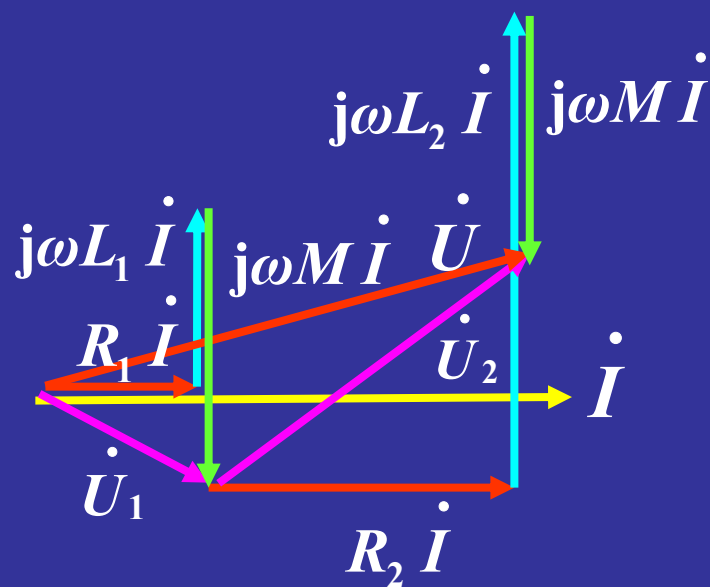


$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I}$$

相量图:



(a) 顺接

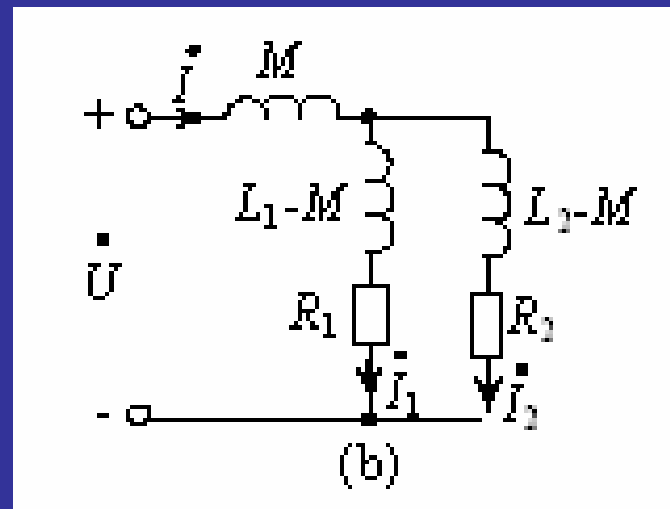
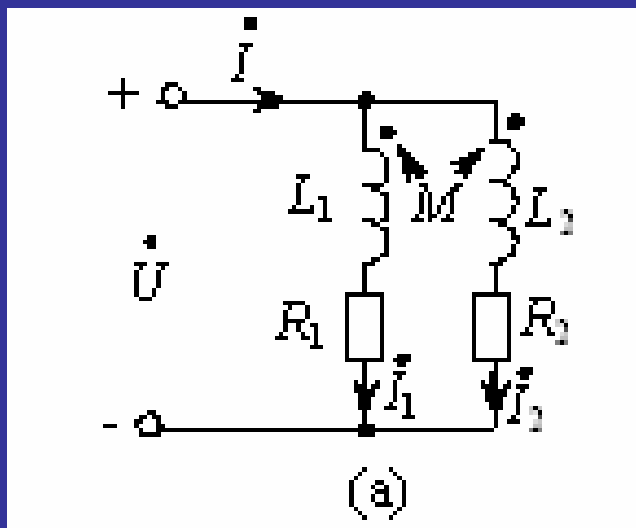


(b) 反接



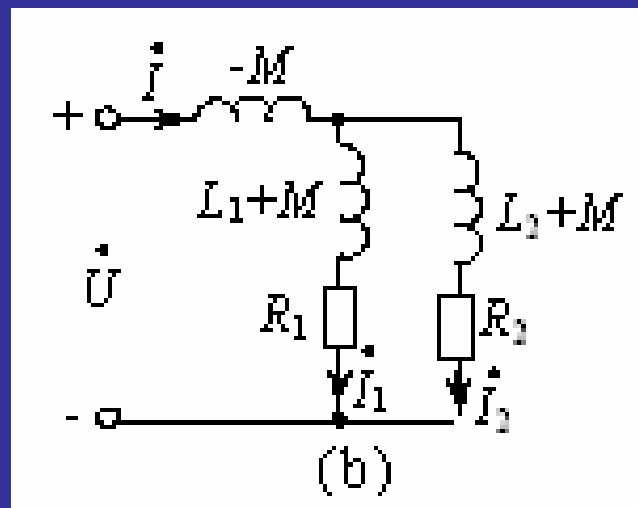
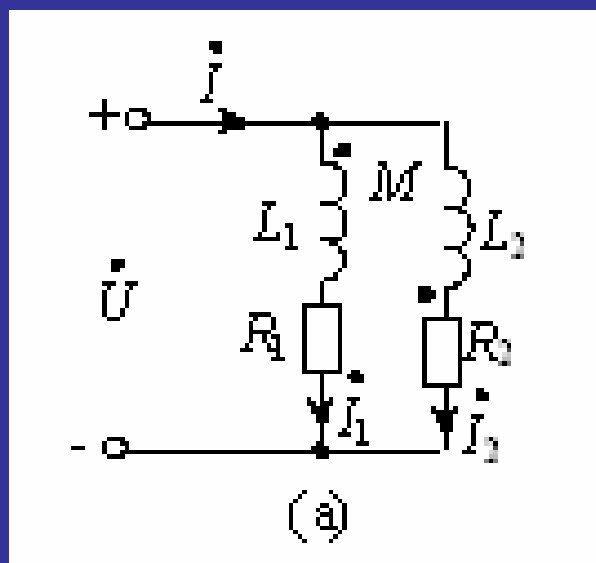
2. 耦合电感的并联

(1) 同侧并联



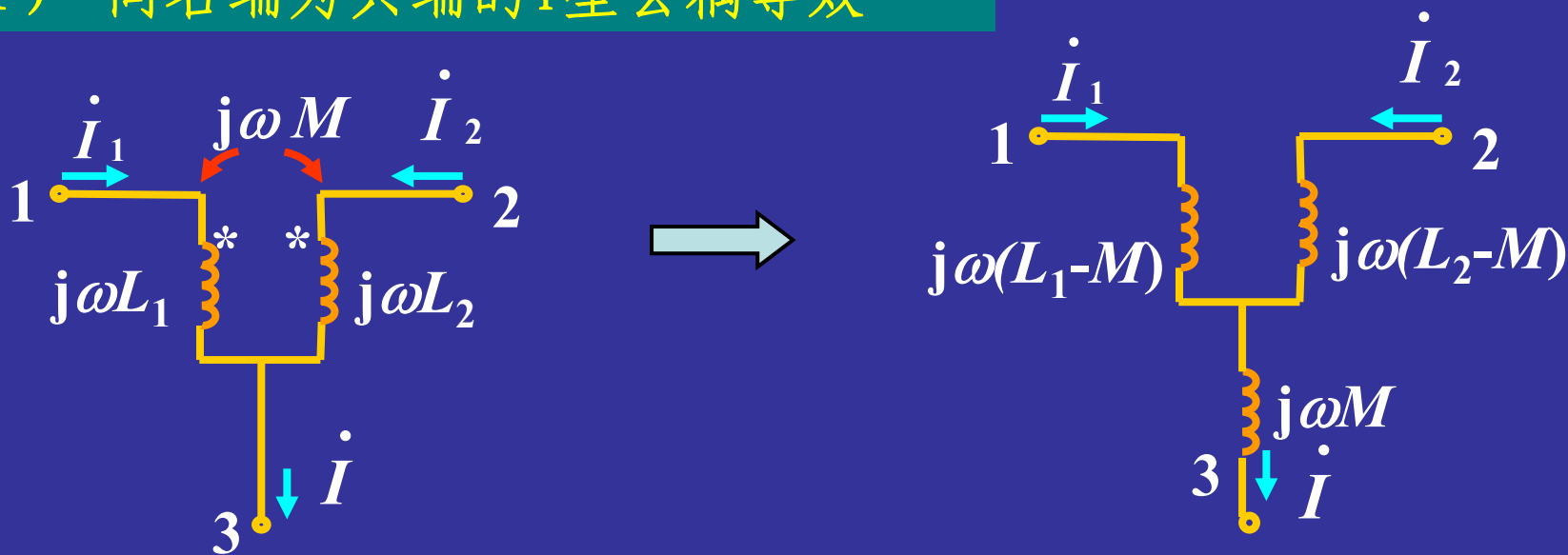
$$\begin{cases} \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{U} = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U} = (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U} = R_1\dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I} \\ \dot{U} = R_2\dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I} \end{cases}$$

(2) 异侧并联



3. 耦合电感的T型等效

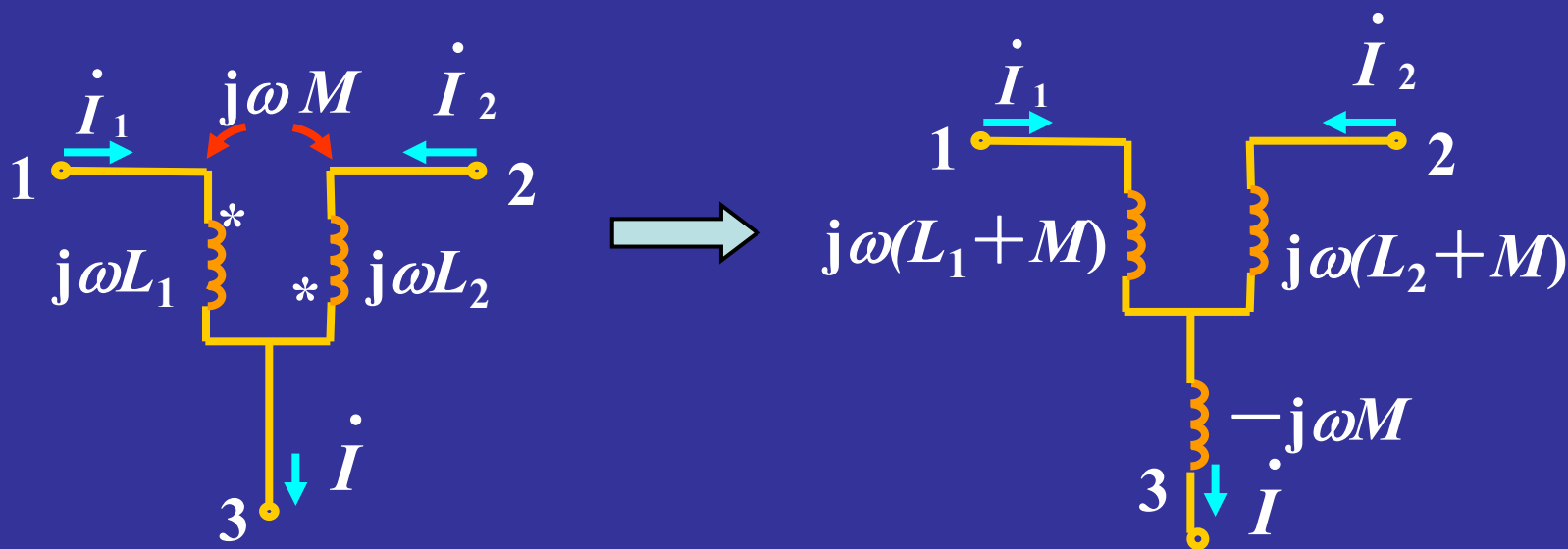
(1) 同名端为共端的T型去耦等效



$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

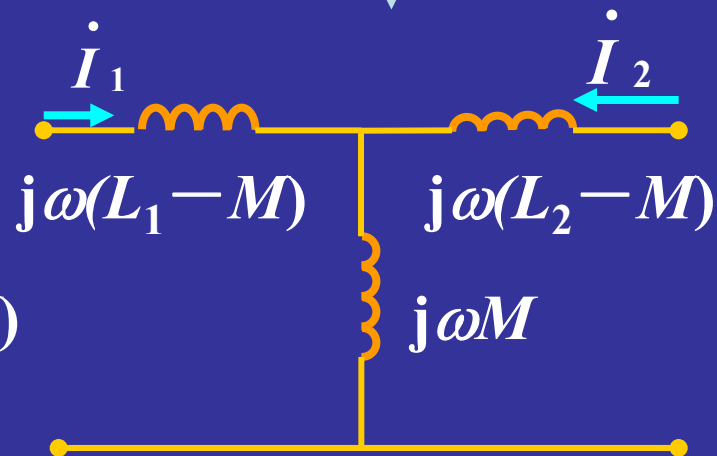
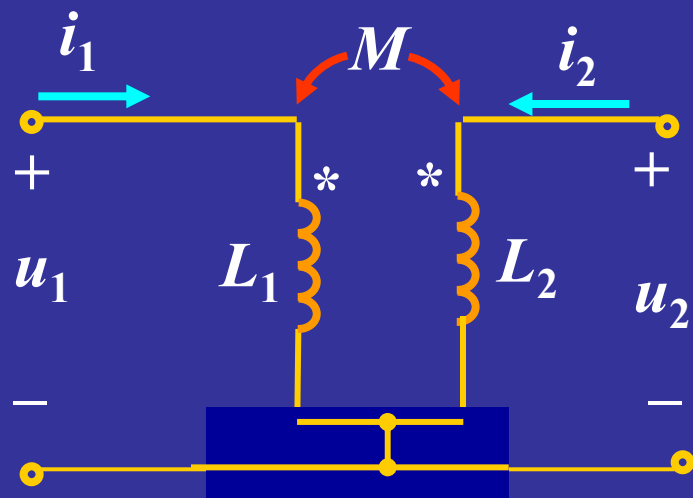
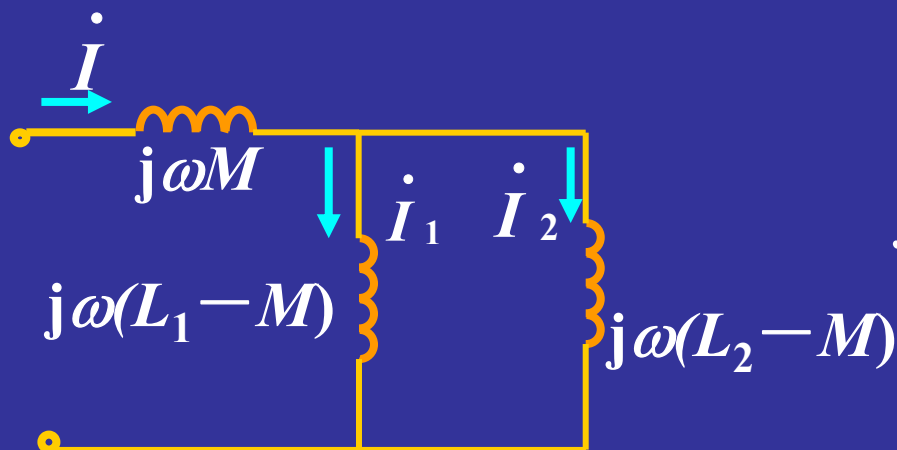
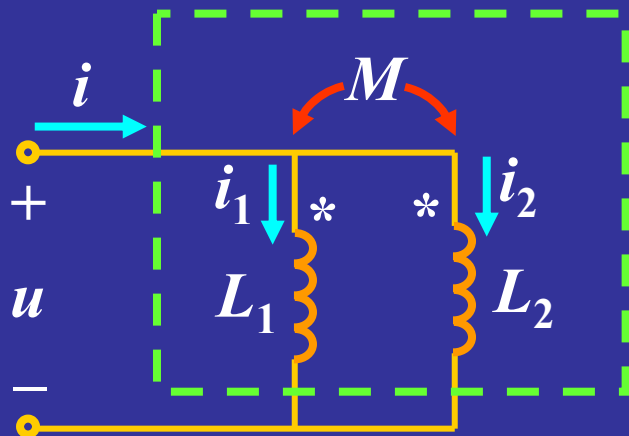


(2) 异名端为共端的T型去耦等效

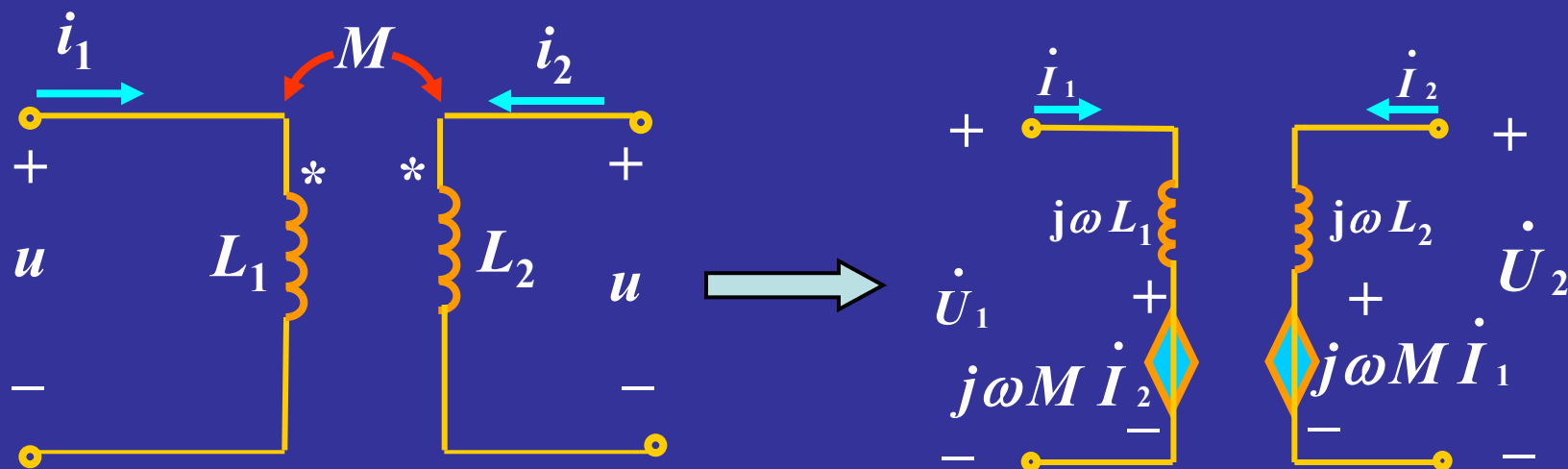


$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 + M) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 + M) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$





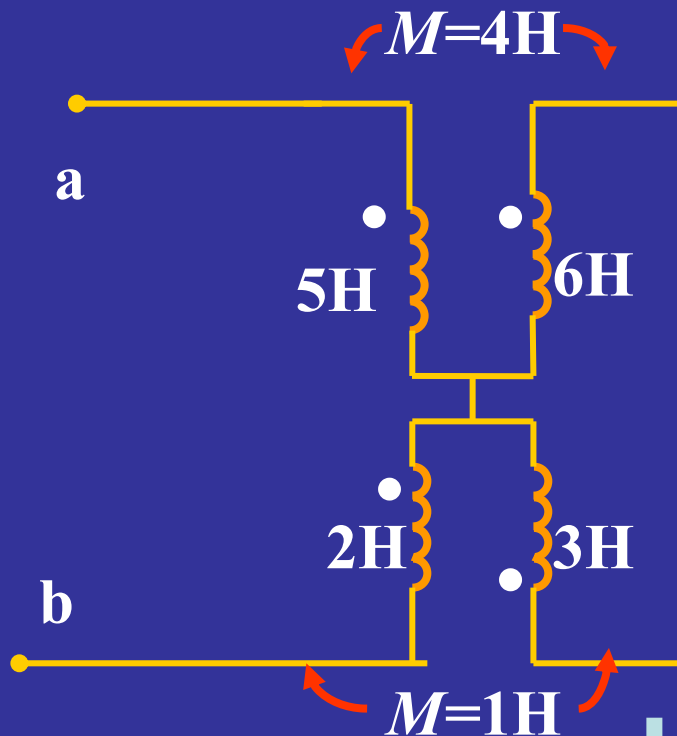
4. 受控源等效电路



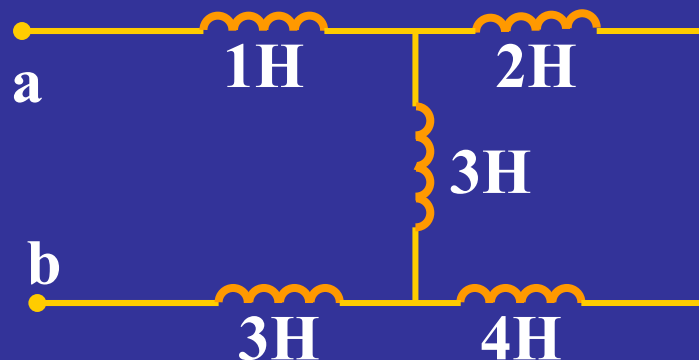
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

例

求等效电感 L_{ab}



解



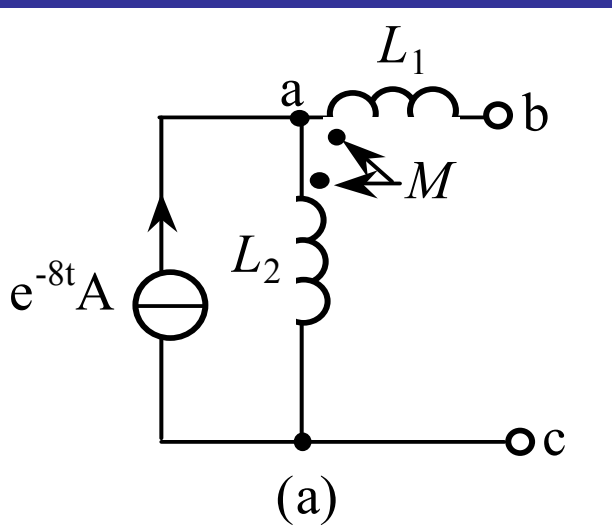
$$L_{ab} = 6H$$



5. 有互感的电路的计算

- (1) 有互感的电路的计算仍属正弦稳态分析，前面介绍的相量分析的方法均适用。
- (2) 注意互感线圈上的电压除自感电压外，还应包含互感电压。一般采用支路法和回路法计算。
- (3) 采用去耦等效，等效后同前。

例1 已知 $L_1=2\text{H}$ ， $L_2=3\text{H}$ ， $M=2\text{H}$ 。求 u_{ac} ， u_{ab} ， u_{bc} 。



解1 由自感和互感的**VCR**知

$$u_{ac} = L_2 \frac{di}{dt} = -24e^{-8t} \text{ V}$$

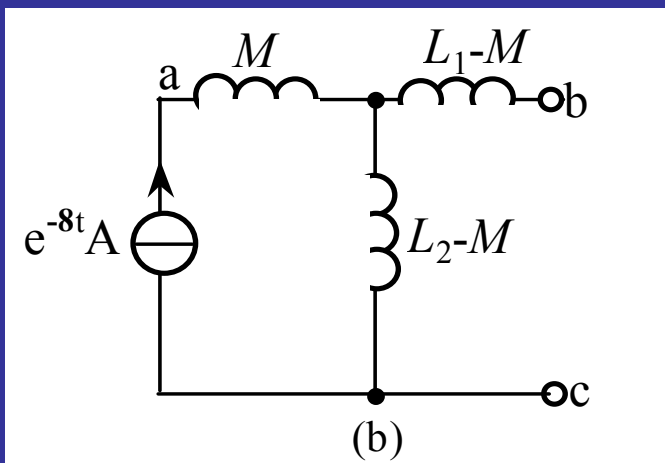
$$u_{ab} = M \frac{di}{dt} = -16e^{-8t} \text{ V}$$

$$u_{bc} = u_{ba} + u_{ac} = -u_{ab} + u_{ac} = -8e^{-8t} \text{ V}$$



解2

采用T型去耦等效，但请注意节点a的位置。



$$u_{ac} = (M + L_2 - M) \frac{di}{dt} = -24e^{-8t} \text{ V}$$

$$u_{ab} = M \frac{di}{dt} + 0 = -16e^{-8t} \text{ V}$$

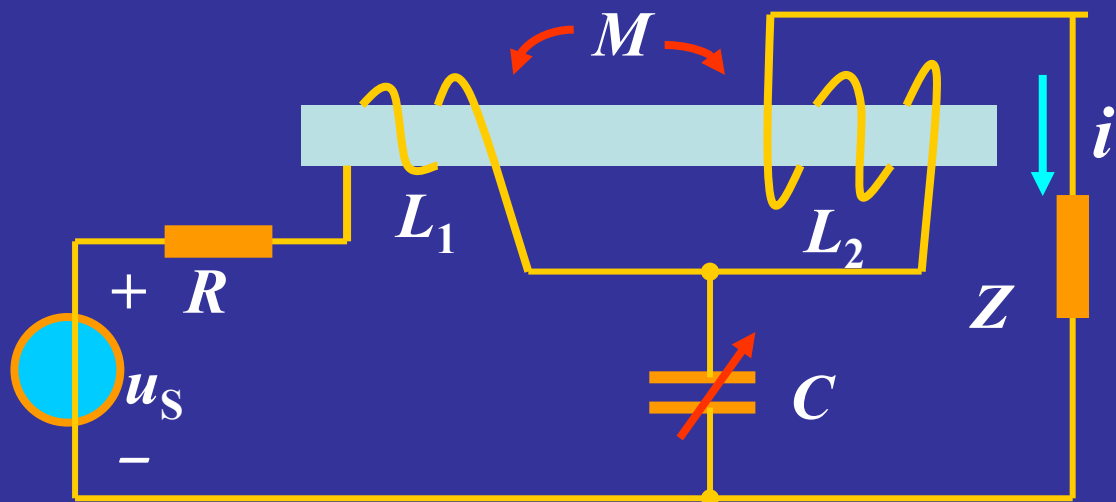
$$u_{bc} = (L_2 - M) \frac{di}{dt} = -8e^{-8t} \text{ V}$$

* 电路中电流源为指数函数，电路不存在相应的相量模型，求解电压必须利用自感电压和互感电压的定义

例 2

要使 $i=0$ ，问电源的角频率为多少？

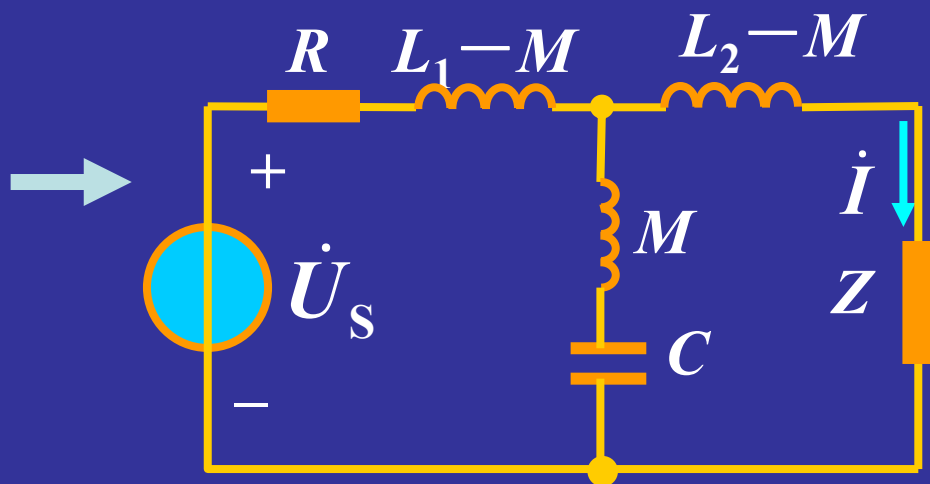
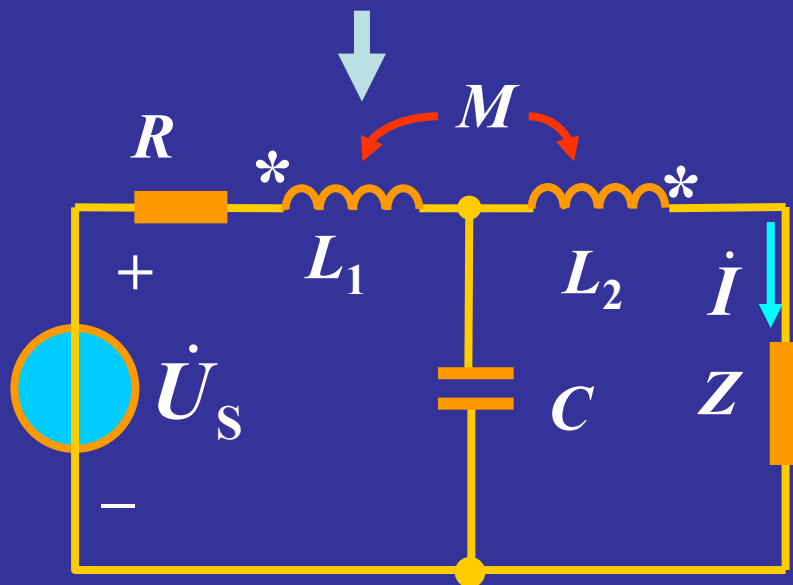
解



$$\text{当 } \omega M = \frac{1}{\omega C}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{MC}}$$

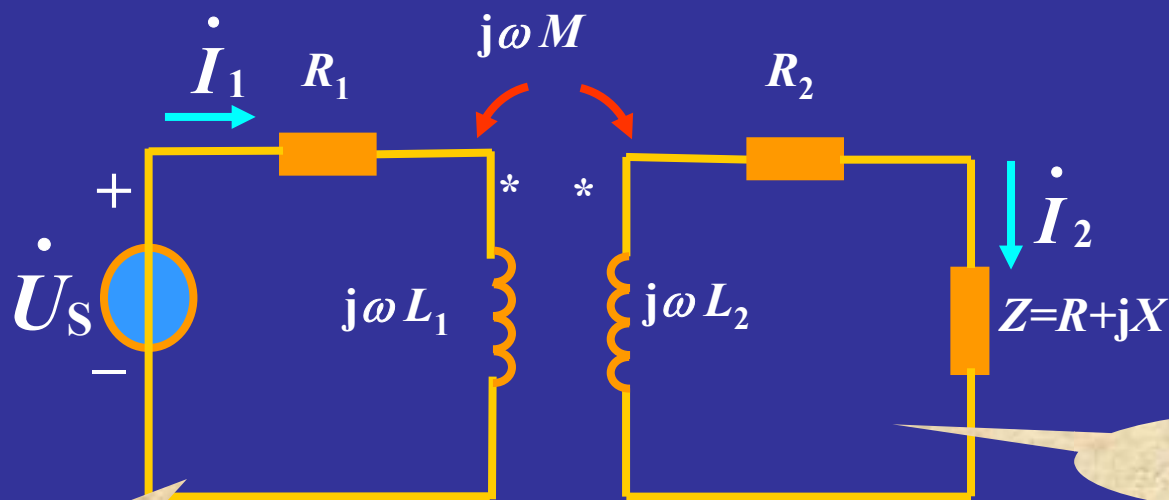
$$\dot{I}=0$$



7.3 空心变压器

变压器由两个具有互感的线圈构成，一个线圈接向电源，另一线圈接向负载，变压器是利用互感来实现从一个电路向另一个电路传输能量或信号的器件。当变压器线圈的芯子为非铁磁材料时，称空心变压器。

1. 空心变压器电路



原边回路

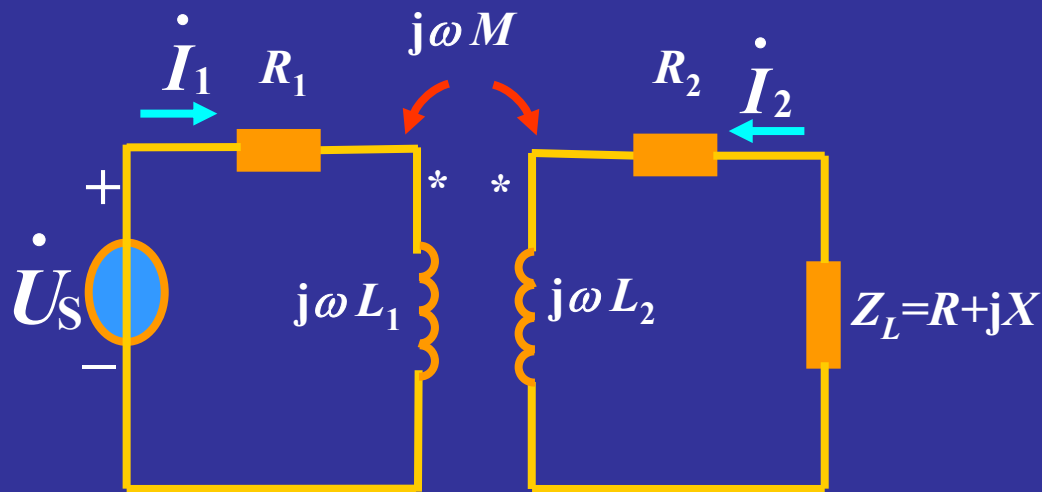
副边回路



2. 分析方法

(1) 方程法分析

回路方程:



$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

令 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$, $Z_{22} = (R_2 + R) + j(\omega L_2 + X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

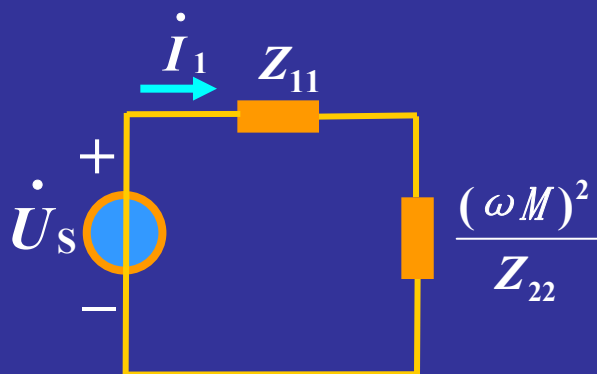


$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

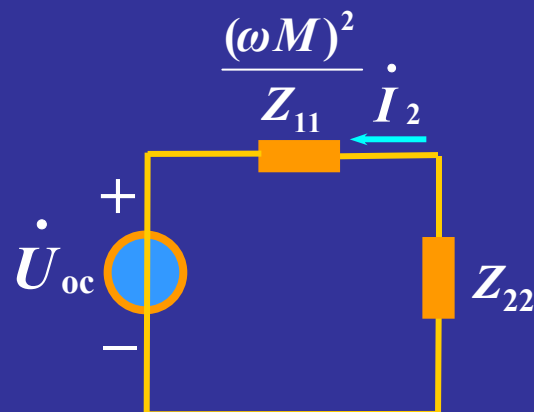
$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \dot{U}_s}{(Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}})Z_{22}} = \frac{-j\omega M \dot{U}_s}{Z_{11}} \cdot \frac{1}{Z_{22} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$

(2) 等效电路法分析



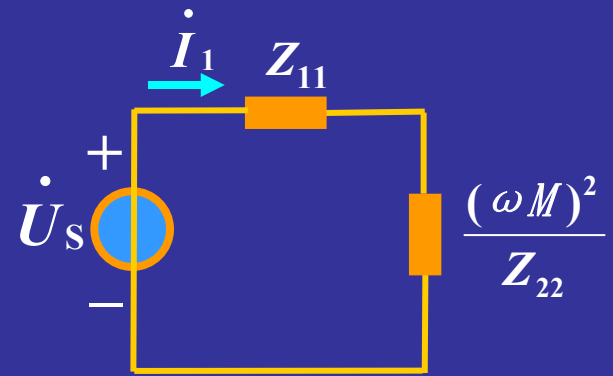
原边等效电路



副边等效电路

$$Z'_{11} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

$$= \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R' + jX'$$



原边等效电路

$Z'_{11} = R' + jX' \longrightarrow$ 副边对原边的引入阻抗。

$R' = \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \longrightarrow$ 引入电阻。恒为正，表示副边回路吸收的功率是靠原边供给的。

$X' = -\frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \longrightarrow$ 引入电抗。负号反映了引入电抗与付边电抗的性质相反。

当 $\dot{I}_2 = 0$ ，即副边开路， $Z_{in} = Z_{11}$



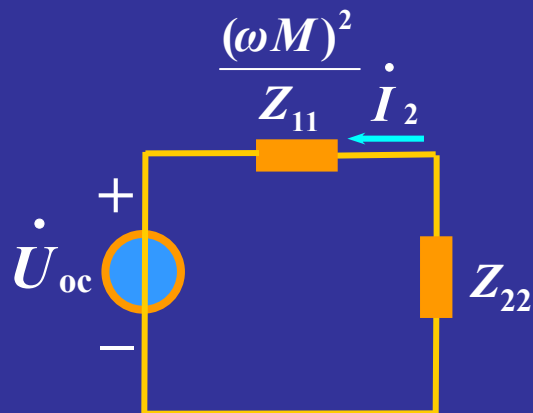
引入阻抗反映了副边回路对原边回路的影响。从物理意义讲，虽然原副边没有电的联系，但由于互感作用使闭合的副边产生电流，反过来这个电流又影响原边电流电压。

从能量角度来说：

电源发出有功 $P = I_1^2(R_1 + R')$

$I_1^2 R_1$ 消耗在原边； $I_1^2 R'$ 消耗在付边，由互感传输。





$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{Z_{11}}$$

副边开路时，
原边电流在副边产生的互感电压。

副边等效电路

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$$

原边对副边的引入阻抗。

利用戴维宁定理可以求得空心变压器副边的等效电路。

(3) 去耦等效法分析

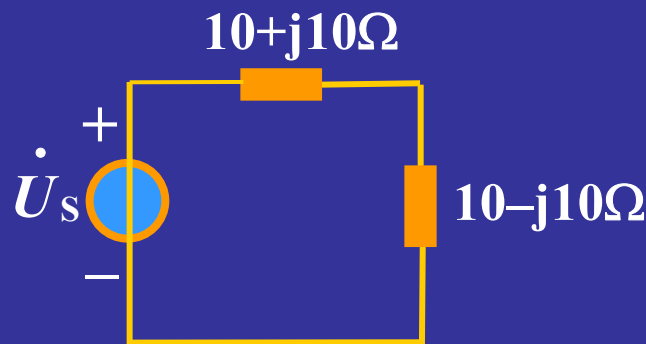
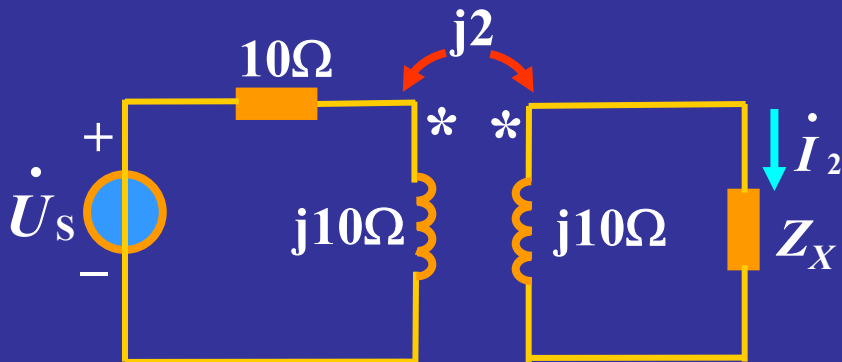
对含互感的电路进行去耦等效，变为无互感的电路，再进行分析。



例1

已知 $U_S=20\text{ V}$, 原边引入阻抗 $Z'_{11}=10-j10\Omega$.

求: Z_X 并求负载获得的有功功率.



解

$$Z'_{11} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{Z_X + j10} = 10 - j10$$

$$\therefore Z_X = \frac{4}{10 - j10} - j10 = \frac{4 \times (10 + j10)}{200} - j10 = 0.2 - j9.8\Omega$$

此时负载获得的功率: $P = P_{R_{引}} = \left(\frac{20}{10+10}\right)^2 R' = 10\text{ W}$

实际是最佳匹配: $Z_l = Z_{11}^*$, $P = \frac{U_S^2}{4R} = 10\text{ W}$



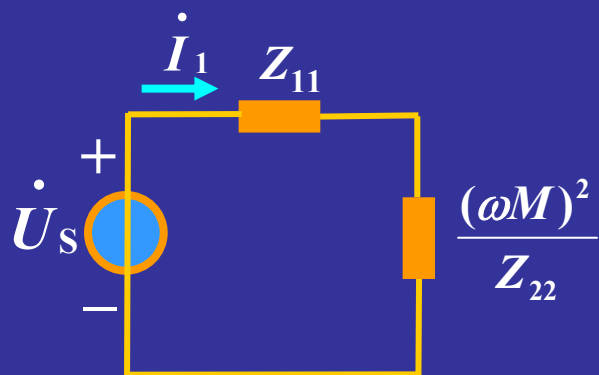
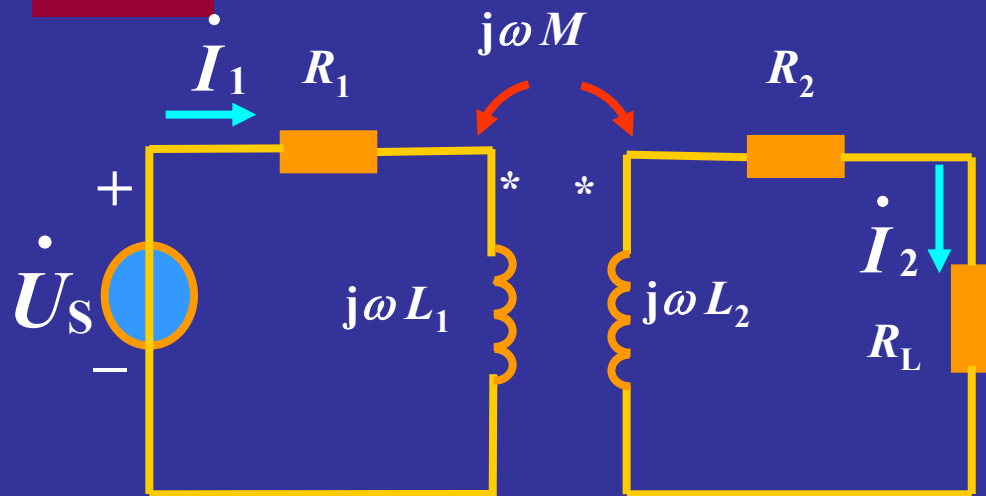
例2

$$L_1=3.6\text{H}, L_2=0.06\text{H}, M=0.465\text{H}, R_1=20\Omega, R_2=0.08\Omega,$$

$$R_L=42\Omega, \omega=314\text{rad/s},$$

$$\dot{U}_s = 115\angle 0^\circ \text{ V}$$

求: \dot{I}_1, \dot{I}_2 .



解1 应用原边等效电路

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j1130.4\Omega$$

$$\begin{aligned} Z_{22} &= R_2 + R_L + j\omega L_2 = 42.08 + j18.85 \\ &= 46.11\angle 26.4^\circ\Omega \end{aligned}$$

$$Z'_{11} = \frac{X_M^2}{Z_{22}} = \frac{146^2}{46.11\angle 24.1^\circ} = 462.3\angle(-24.1^\circ) = 422 - j188.8\Omega$$



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z'_{11}} = \frac{115\angle 0^\circ}{20 + j1130.4 + 422 - j188.8} = 0.111\angle(-64.9^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j146 \times 0.111\angle -64.9^\circ}{42.08 + j18.85} = \frac{16.2\angle 25.1^\circ}{46.11\angle 24.1^\circ} = 0.351\angle 1^\circ \text{ A}$$

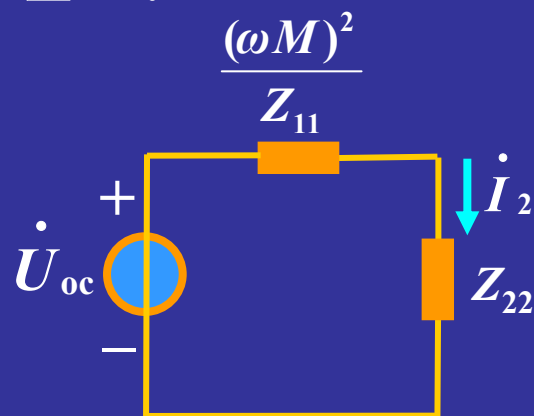
解2

应用副边等效电路

$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} &= j\omega M \dot{I}_1 = j\omega M \cdot \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} \\ &= j146 \times \frac{115\angle 0^\circ}{20 + j1130.4} = 14.85\angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{146^2}{20 + j1130.4} = \frac{21316}{1130.6\angle 90^\circ} = -j18.85 \Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc}}{-j18.5 + 42.08 + j18.85} = \frac{14.85\angle 0^\circ}{42.08} = 0.353\angle 0^\circ \text{ A}$$

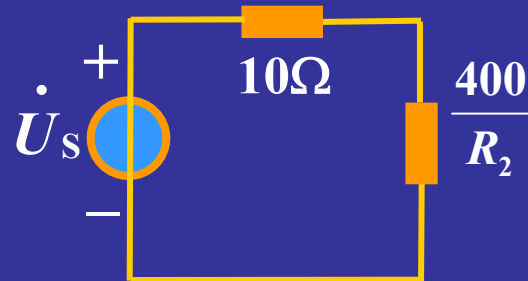
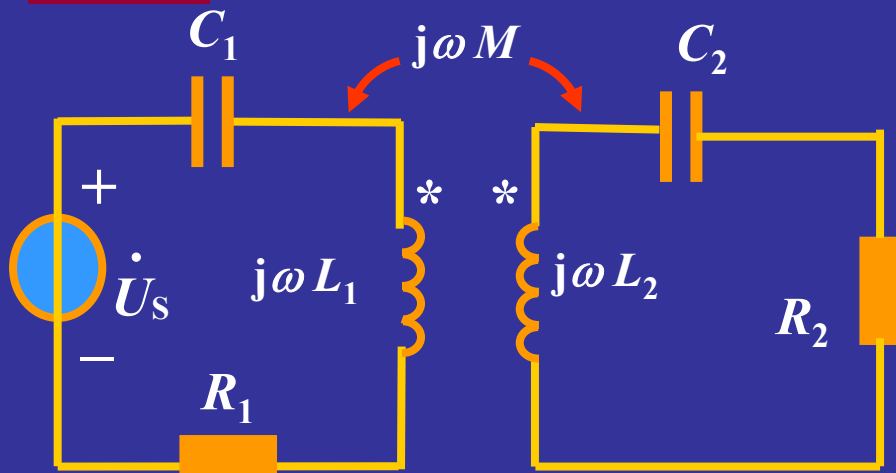


例3

$L_1=L_2=0.1\text{mH}$, $M=0.02\text{mH}$, $R_1=10\Omega$, $C_1=C_2=0.01\mu\text{F}$,

$\omega=10^6\text{rad/s}$, $\dot{U}_s=10\angle 0^\circ\text{ V}$

问: $R_2=?$ 能吸收最大功率, 求最大功率。



解1

$$\omega L_1 = \omega L_2 = 100\Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 100\Omega$$

$$\omega M = 20\Omega$$

$$Z_{11} = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}) = 10\Omega$$

$$Z_{22} = R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) = R_2$$

应用原边等效电路

$$Z'_{11} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{400}{R_2}$$

$$\text{当 } Z'_{11} = Z_{11} = 10 = \frac{400}{R_2}$$

→ $R_2=40\Omega$ 时吸收最大功率

$$P_{\max} = 10^2 / (4 \times 10) = 2.5\text{W}$$



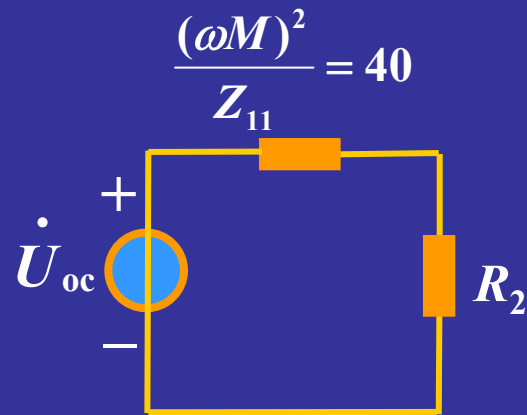
解2 应用副边等效电路

$$Z'_{22} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{400}{10} = 40 \Omega$$

$$\dot{U}_{oc} = j\omega M \cdot \frac{\dot{U}_s}{Z_{11}} = \frac{j20 \times 10}{10} = j20V$$

当 $Z'_{22} = R_2 = 40\Omega$ 时吸收最大功率

$$P_{\max} = 20^2 / (4 \times 40) = 2.5W$$



7.4 理想变压器

理想变压器是实际变压器的理想化模型，是对互感元件的理想科学抽象，是极限情况下的耦合电感。

1. 理想变压器的三个理想化条件

(1) 无损耗 \rightarrow 线圈导线无电阻，做芯子的铁磁材料的磁导率无限大。

(2) 全耦合 $\rightarrow k=1 \Rightarrow M=\sqrt{L_1 L_2}$

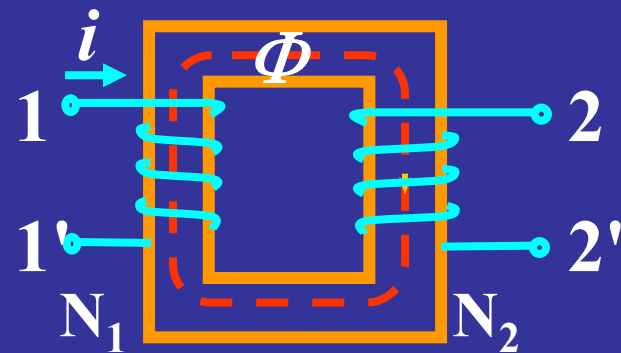
(3) 参数无限大 $\rightarrow L_1, L_2, M \Rightarrow \infty,$
但 $\sqrt{L_1/L_2} = N_1/N_2 = n$

以上三个条件在工程实际中不可能满足，但在一些实际工程概算中，在误差允许的范围内，把实际变压器当理想变压器对待，可使计算过程简化。



2. 理想变压器的主要性能

(1) 变压关系

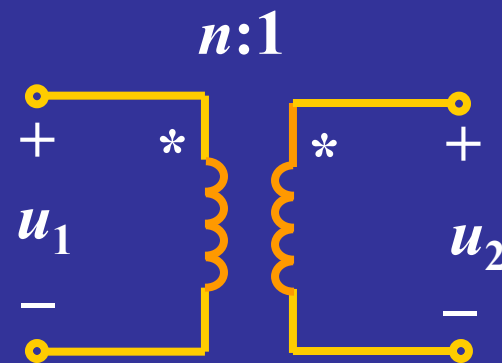


$$k=1 \longrightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi_{11} + \phi_{22} = \phi$$

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

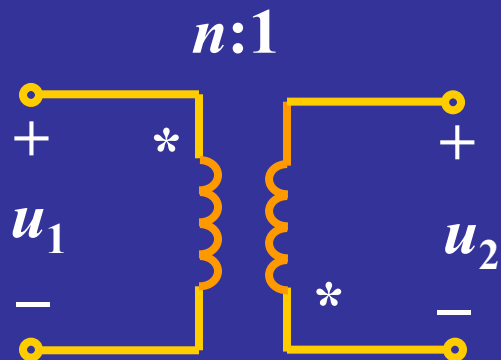
$$u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$



理想变压器模型

若



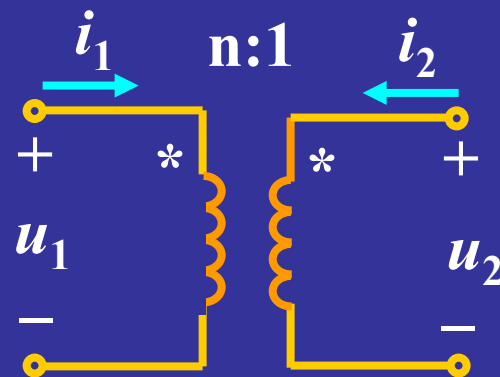
$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -n$$



(2) 变流关系

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$\rightarrow i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^t u_1(\xi) d\xi - \frac{M}{L_1} i_2(t)$$



理想变压器模型

考虑到理想化条件: $k=1 \Rightarrow M=\sqrt{L_1 L_2}$

$$L_1 \Rightarrow \infty, \sqrt{L_1/L_2} = N_1/N_2 = n$$

$$\frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{1}{n}$$



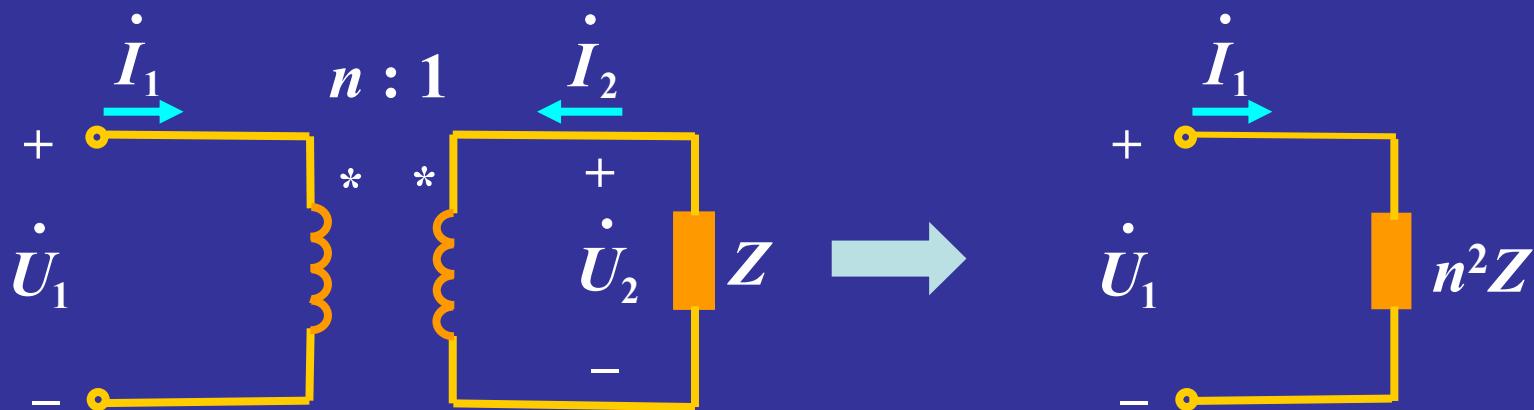
$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{n} i_2(t)$$

若 i_1 、 i_2 一个从同名端流入，一个从同名端流出，则有：



(3) 变阻抗关系



$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2} = n^2 \left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right) = n^2 Z$$

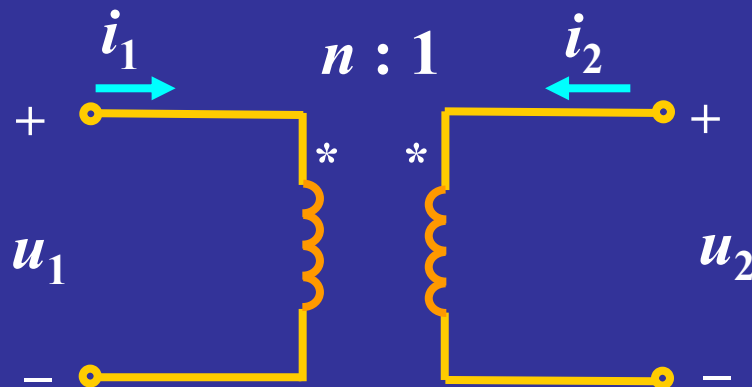
注

理想变压器的阻抗变换性质只改变阻抗的大小，不改变阻抗的性质。



(4) 功率性质

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$



$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-n i_1) = 0$$

表明:

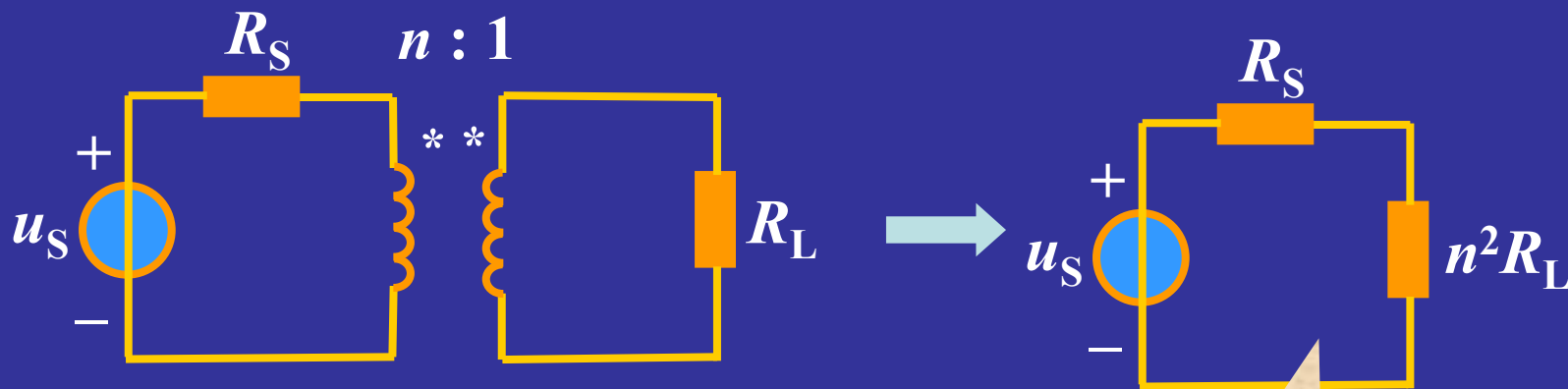
(a) 理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

(b) 理想变压器的特性方程为代数关系，因此它是无记忆的多端元件。



例1

已知电源内阻 $R_S=1\text{k}\Omega$ ，负载电阻 $R_L=10\Omega$ 。为使 R_L 上获得最大功率，求理想变压器的变比 n 。



当 $n^2 R_L = R_S$ 时匹配，即

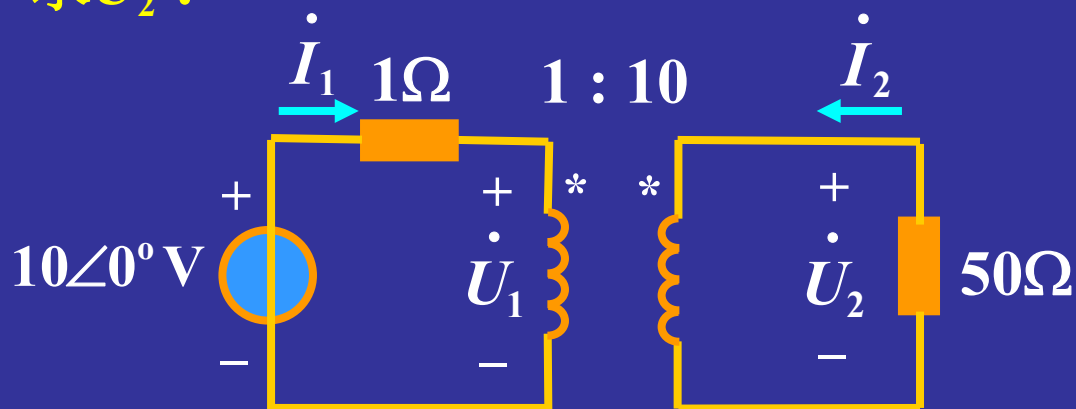
$$10n^2 = 1000$$

$$\therefore n^2 = 100, \quad n = 10.$$

应用变阻
抗性质



例2 求 \dot{U}_2 .



方法1: 列方程

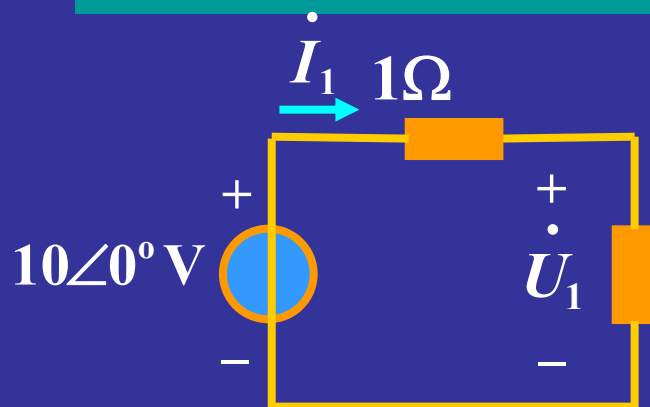
$$\begin{cases} 1 \times \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 10\angle 0^\circ \\ 50 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\ \dot{U}_1 = \frac{1}{10} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -10 \dot{I}_2 \end{cases}$$

解得



$$\dot{U}_2 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$

方法2：阻抗变换

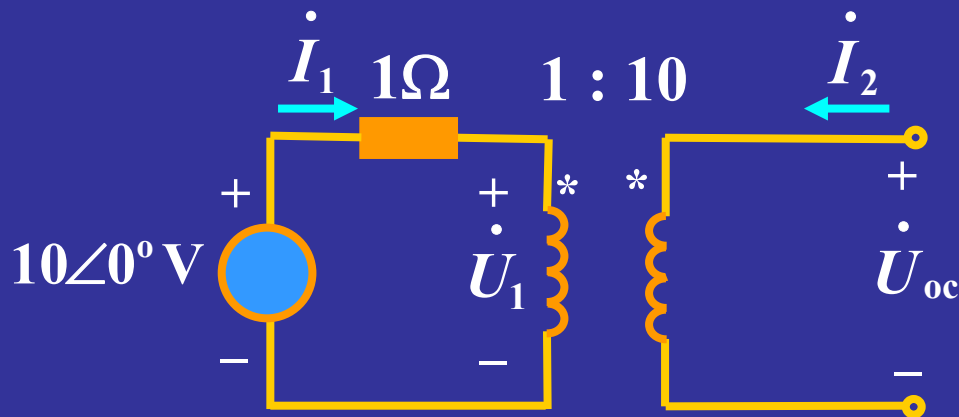


$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^\circ}{1 + 1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 50 = \frac{1}{2} \Omega \quad \dot{U}_2 = \frac{1}{n} \dot{U}_1 = 10 \dot{U}_1$$

$$= 33.33 \angle 0^\circ \text{ V}$$

方法3：戴维南等效



求 \dot{U}_{oc} :

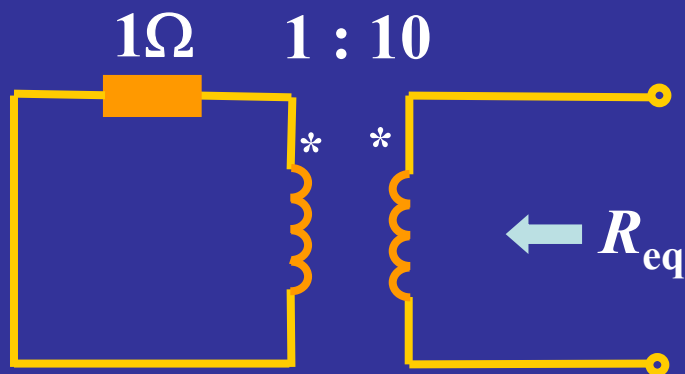
$$\because \dot{I}_2 = 0, \quad \therefore \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1 = 10\dot{U}_s$$

$$= 100\angle 0^\circ \text{ V}$$

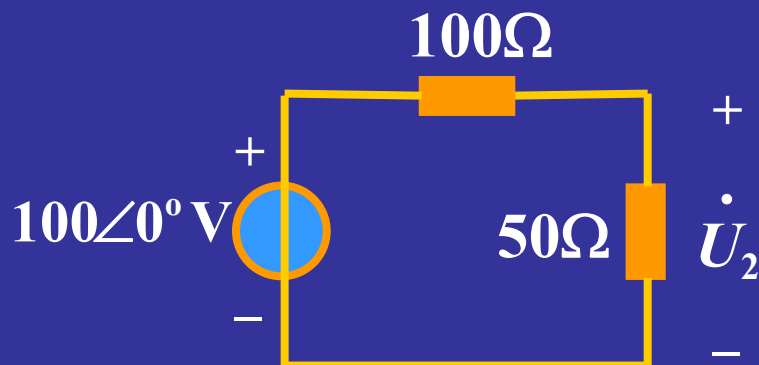


求 R_{eq} :



$$R_{eq} = 10^2 \times 1 = 100\Omega$$

戴维南等效电路:

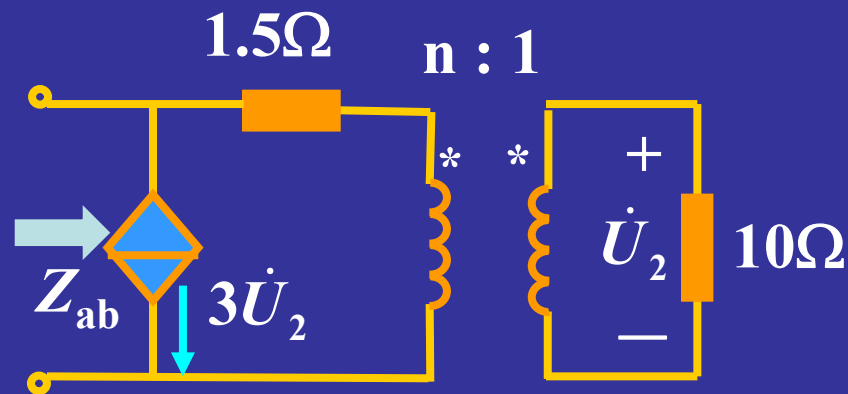


$$\dot{U}_2 = \frac{100\angle 0^\circ}{100 + 50} \times 50 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$



例3 已知图示电路的等效阻抗 $Z_{ab}=0.25\Omega$ ，求理想变压器的变比 n 。

解 应用阻抗变换
外加电源得：



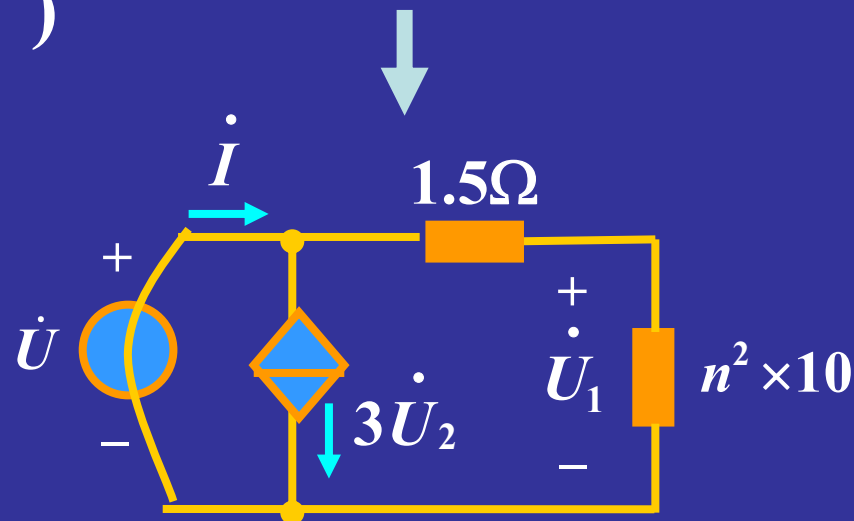
$$\dot{U} = (\dot{I} - 3\dot{U}_2) \times (1.5 + 10n^2)$$

$$\therefore \dot{U}_1 = (\dot{I} - 3\dot{U}_2) \times 10n^2$$

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\rightarrow \dot{U}_2 = \frac{10n\dot{I}}{30n + 1}$$

$$Z_{ab} = 0.25 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1.5 + 10n^2}{30n + 1}$$



$$\rightarrow n=0.5 \text{ or } n=0.25$$

