2011 年 **解：**

状态变量：x_k 表示留给项目 k..n 的投资额，其中 n 为项目总个数，k=1..n.

决策变量：u_k 表示投给项目 k 的投资额.

允许决策集合：

$$D_k(x_k) = \{u_k \mid 0 \le u_k \le x_k\}$$

状态转移方程：

$$x_{k+1} = x_k - u_k$$

递推关系式：

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{u_k \in D_k(x_k)} \{g_k(u_k) + f_{k+1}(x_k - u_k)\} & k = n-1, \dots, 1 \\ f_n(x_n) = g_n(x_n) \end{cases}$$

其中，$g_k(u_k)$表示项目 k 的投资额为 u_k 时的盈利.

针对本题，n = 3，x_k 最大取 8

手工详解过程：

1. 初始化 k = 3

$$f_3(0) = 0; f_3(1) = 4; f_3(2) = 26; f_3(3) = 40; f_3(4) = 45; f_3(5) = 50; f_3(6) = 51; f_3(7) = 52; f_3(8) = 53.$$

x_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(x_3)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53

2. k = 2

$$f_2(0) = \max\{g_2(0) + f_3(0)\} = 0 + 0 = 0;$$

$$f_2(1) = \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(1), \\ g_2(1) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 4, \\ 5 + 0 \end{Bmatrix} = 5;$$

$$f_2(2) = \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(2), \\ g_2(1) + f_3(1), \\ g_2(2) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 26, \\ 5 + 4, \\ 15 + 0 \end{Bmatrix} = 26;$$

$$f_2(3) = \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(3), g_2(1) + f_3(2), \\ g_2(2) + f_3(1), g_2(3) + f_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 0 + 40, 5 + 26, \\ 15 + 4, 40 + 0 \end{Bmatrix} = 40;$$

$$f_2(4) = \max\left\{\begin{matrix} g_2(0)+f_3(4), g_2(1)+f_3(3), \\ g_2(2)+f_3(2), g_2(3)+f_3(1), \\ \mathbf{g_2(4)+f_3(0)} \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} 0+45{,}5+40, \\ 15+26{,}40+4, \\ \mathbf{60+0} \end{matrix}\right\}$$

$$= \mathbf{60};$$

$$f_2(5) = \max\left\{\begin{matrix} g_2(0)+f_3(5), g_2(1)+f_3(4), \\ g_2(2)+f_3(3), g_2(3)+f_3(2), \\ g_2(4)+f_3(1), g_2(5)+f_3(0) \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} 0+50{,}5+45, \\ 15+40{,}40+26, \\ 60+4{,}70+0 \end{matrix}\right\} = 70;$$

$$f_2(6) = \max\left\{\begin{matrix} g_2(0)+f_3(6), g_2(1)+f_3(5), \\ g_2(2)+f_3(4), g_2(3)+f_3(3), \\ g_2(4)+f_3(2), g_2(5)+f_3(1), \\ g_2(6)+f_3(0) \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} 0+51{,}5+50, \\ 15+45{,}40+40, \\ 60+26{,}70+4, \\ 73+0 \end{matrix}\right\}$$

$$= 86;$$

$$f_2(7) = \max\left\{\begin{matrix} g_2(0)+f_3(7), g_2(1)+f_3(6), \\ g_2(2)+f_3(5), g_2(3)+f_3(4), \\ g_2(4)+f_3(3), g_2(5)+f_3(2), \\ g_2(6)+f_3(1), g_2(7)+f_3(0) \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} 0+52{,}5+51, \\ 15+50{,}40+45, \\ 60+40{,}70+26, \\ 73+4{,}74+0 \end{matrix}\right\} = 100;$$

$$
\begin{aligned}
&f_2(8)\\
&= \max\left\{\begin{matrix} g_2(0)+f_3(8), g_2(1)+f_3(7), \\ g_2(2)+f_3(6), g_2(3)+f_3(5), \\ g_2(4)+f_3(4), g_2(5)+f_3(3), \\ g_2(6)+f_3(2), g_2(7)+f_3(1), \\ g_2(8)+f_3(0) \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} 0+53,5+52, \\ 15+51,40+50, \\ 60+45,70+40, \\ 73+26,74+4, \\ 75+0 \end{matrix}\right\}\\
&= 110.
\end{aligned}
$$

x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(x_2)$	0	5	26	40	60	70	86	100	110

3. k = 1

$$
f_1(8) = \max\left\{\begin{matrix} g_1(0)+f_2(8), g_1(1)+f_2(7), \\ g_1(2)+f_2(6), g_1(3)+f_2(5), \\ \mathbf{g_1(4)+f_2(4)}, g_1(5)+f_2(3), \\ g_1(6)+f_2(2), g_1(7)+f_2(1), \\ g_1(8)+f_2(0) \end{matrix}\right\}
$$

$$
= \max\left\{\begin{matrix} 0+110,5+100, \\ 15+86,40+70, \\ \mathbf{80+60}, 90+40, \\ 95+26,98+5, \\ 100+0 \end{matrix}\right\} = 140
$$

x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_1)$	0	5	26	40	80	90	106	120	**140**

最终结果：给项目 1 投资 4 万元，项目 2 投资 4 万元，项目 3 不投资，将获得最大利润 140 万元.

2012 年 **解：**设阶段序数 k 表示月份，状态变量 x_k 为第 k 个月初拥有的单位产品数量，亦为第 k-1 月末时的单位产品数量，决策变量 u_k 为第 k 个月生产的单位产品数量，c_k 为第 k 月份需要的产品数量，这里 x_k 和 u_k 均取离散变量。

状态转移方程为：

$$x_{k+1} = x_k + u_k - c_k \ , \quad k = 1, 2, 3, 4; \ 且 \ x_1 = 0。$$

k 段允许决策集合为：

$$D_k(x_k)=\{\max(0,c_k-x_k)\le u_k\le 6\},k\ =\ 1,2,3;$$

当 k=4 时，$u_k=c_k-x_k$。

设$v_k(x_k,u_k)$为第 k 月的成本费, 单位为(千元)，则

$$v_k=0.5*x_k+u_k+I(u_k),$$

$$I(u_k)=\begin{cases}3, & u_k>0\\0, & u_k=0\end{cases}$$

故指标函数为

$$V_{1,4}=\sum_{k=1}^{4}v_k$$

令$f_k(x_k)$表示为由x_k出发采用最优生产方案到第 4 个月结束这段期间的产品成本。根据最优化原理，则有递推公式：

$$\begin{cases}f_k(x_k)=0, & k=5\\f_k(x_k)=\min\limits_{u_k\in D_k(x_k)}\{0.5*x_k+u_k+I(u_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-c_k)\}, & k=1,2,3,4\end{cases}$$

其中：

$$c_k=\begin{cases}2, & k=1\\3, & k=2\\2, & k=3\\4, & k=4\end{cases}$$

逆序计算的详细步骤如下：

(1) 当 k=4 时，

$$f_4(x_4)=\min\limits_{u_4\in D_4(x_4)}\{0.5*x_4+u_4+I(u_4)\}=\begin{cases}2 & x_4=4,\ u_4=0\\5.5 & x_4=3,u_4=1\\6 & x_4=2,u_4=2\\6.5 & x_4=1,u_4=3\\7 & x_4=0,u_4=4\end{cases}$$

(2) 当 k=3 时，因为 $x_4=x_3+u_3-c_3=x_3+u_3-2\le 4$,且$u_3=x_4-x_3+2\in[0,6]$，所以有：

当 $x_3=0,u_3=(6,5,4,3,2)$,此时$f_3(x_3)=\min(11,13.5,13,12.5,12)=11$,在$u_3=6,u_4=0$处取得最小值。

当 $x_3=1,u_3=(5,4,3,2,1)$，此时 $f_3(x_3)=\min(10.5,13,12.5,12,11.5)=10.5$,在$u_3=5,u_4=0$处取得最小值。

当 $x_3=2,u_3=(4,3,2,1,0)$，此时 $f_3(x_3)=\min(10,12.5,12,11.5,8)=8$,在$u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当 $x_3=3,u_3=(3,2,1,0)$，此时 $f_3(x_3)=\min(9.5,12,11.5,8)=8$，在$u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当$x_3=4,u_3=(2,1,0)$, 此时$f_3(x_3)=\min(9,11.5,8)=8$, 在$u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当$x_3=5,u_3=(1,0)$, 此时$f_3(x_3)=\min(8.5,8)=8$, 在$u_3=0,u_4=4$处取

得最小值。

当$x_3=6,u_3=(0)$, 此时$f_3(x_3)=\min(5)=5$, 在$u_3=0,u_4=0$处取得最小值。

(3) 当 k=2 时，因为$x_3=x_2+u_2-c_2=x_2+u_2-3\le 6,u_2=x_3-x_2+3\in[0,6]$，且$x_2\le 6$所以有：

当 $x_2=0,u_2=(6,5,4,3)$ 时， $f_2(x_2)=\min(17,16,17.5,17)=16$ ，在$u_2=5,u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当$x_2=1,u_2=(6,5,4,3,2)$时，$f_2(x_2)=\min(17.5,16.5,15.5,17,16.5)=15.5$, 且在$u_2=4,u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当$x_2=2,u_2=(6,5,4,3,2,1)$时， $f_2(x_2)=\min(18,17,16,15,16.5,16)=15$，在$u_2=3,u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当 $x_2=3,u_2=(6,5,4,3,2,1,0)$ 时 ，$f_2(x_2)=\min(15.5,17.5,16.5,15.5,14.5,16,12.5)=12.5$， 且在$u_2=0,u_3=6,u_4=0$处取得最小值。

当$x_2=4,u_2=(5,4,3,2,1,0)$时，$f_2(x_2)=\min(15,17,16,15,14,12.5)=12.5$, 且在$u_2=0,u_3=5,u_4=0$处取得最小值。

当 $x_2=5,u_2=(4,3,2,1,0)$ 时， $f_2(x_2)=\min(14.5,16.5,15.5,14.5,10.5)=10.5$, 且在$u_2=0,u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

当$x_2=6,u_2=(3,2,1,0)$时， $f_2(x_2)=\min(14,16,15,14.5,11)=11$，且在$u_2=0,u_3=0,u_4=4$处取得最小值。

(4) 当 k=1 时，因为$x_1=0,x_2=x_1+u_1-c_1=u_1-2\le 6,u_1=x_2+2\in[0,6]$, 所以有：

当 $u_1=(6,5,4,3,2)$ ， $f_1(x_1)=\min(21.5,20.5,22,21.5,21)=20.5$ ，且在$u_1=5,u_2=0,u_3=6,u_4=0$处取得最小值。

综上所述，最优的库存方案为：第一月生产 5 单位产品，第二月和第四月不生产，第三月生产 6 单位产品。