2009—2010 学年 第一学期末试卷(A)

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

考试科目：《 矩阵理论 》（**A**）

考试日期：2010 年 1 月 14 日

注意事项：1、考试 7 个题目共 8 页

2、考试时间 120 分钟

题目：

一、（本题 39 分）

二、（本题 20 分）

三、（本题 6 分）

四、（本题 9 分）

五、（本题 11 分）

六、（本题 8 分）

七、（本题 7 分）

八、（附加题）

H

姓名： 学号： A

一. 填空(39 分) (注: $\mathbf{I}$ 代表单位阵,A^H表示H转置，det(A)指行列式)

(1) $e^{-tr(A)}\cdot\det(e^A)=$ 1 ，$(e^A)^+e^{-A}-e^{-A}(e^A)^{-1}=$ ______

(2)若 $A^2-3A+2I=0$，则A有一个无重根零化式为 $\mathbf{f(x)}=$ $(x-2)(x-1)$

(3)若 $A=A^2=A^H$ ，则 $A^+=$ A

(4)若3阶阵 $A\neq -I$，且 $A^2+2A+I=0$，则 Jordan 形 $J_A=$ $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\&-1\end{pmatrix}&\\&(-1)\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$，$A\otimes B$ 的特征根为 $3a,3a,3b,3b$

$\mathbf{tr}(A\otimes B)=$ ($6a+6b$)

(6) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}i\\i\\i\end{bmatrix}$，$i=\sqrt{-1}$ ，则谱半径

$\rho(A)$ 取值范围是 $\frac{4}{5}<\rho<1$ ；且 $\|Ax\|_1=$ 1 ；$\|A\|_\infty=$ $\frac{31}{30}$

(7) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $e^{tA}=\begin{pmatrix}(\ \cos t\ )&-\sin t\\(\ \sin t\ )&\cos t\end{pmatrix}$ ， $e^{\pi A}=$ ______

(8) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 则 $Ax=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解是 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ；$A^+=$ $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ ..

(9)矩阵A中各列都可用B的列线性表示($R(A)\subset R(B)$)，则有矩阵P使 $BP=$ PA

(10) n阶阵A的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是 $\rho(A)\leq\|A\|$

(11) n阶阵 A (k 是自然数)，$\rho(A^k)$，$\rho(A)^k$，$\|A^k\|$，$\|A\|^k$ 之间关系为 $\rho(A^k)=\rho(A)^k\leq\|A^k\|\leq\|A\|^k$

(12) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 的满秩分解为 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ ；

(13)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 R^3 的基，$A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 满足：$A\varepsilon_1=\varepsilon_2, A\varepsilon_2=\varepsilon_3, A\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_3$.

则有矩阵B使得 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{B}$，$B=$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

二.(20 分)计算下列各题

1. 设列满(高)阵 $A = A_{m\times n}$ 的 QR 分解为 $A = QR$，Q 为次酉阵 $(Q^H Q = I_n)$.

验证：$X = R^{-1}Q^H$ 满足 A^+ 的 4 个条件.

$$AXA = QRR^{-1}Q^HQR = QR = A$$

$$(AX)^H = (QRR^{-1}Q^H)^H = I = QRR^{-1}Q^H = AX.$$

2.设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (1)求 A^2, A^3，(2)由 $e^{tA} \triangleq I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$ 直接计算 e^{tA}，并求 $(e^{tA})^+ = e^{-tA}$.

(1) $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{T2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{T3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 =$

$(e^{tA})^+ = e^{-tA} = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2 =$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, 计算：$(I-A)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)^2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$$

$$(I-A)(\sum A^k)^2 = (I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1} = 4\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

4. 已知 8 阶阵 A 适合：$rank(A-2I) = 4$, $rank(A-2I)^2 = 1$, $(A-2I)^3 = 0$.求 A 的 Jordan 形 J.

$\lambda = 2$ 时 $r_0 = 8$

$$\begin{array}{lllll} 8 & & & & \\ & \succ 4 & & & \\ 4 & & \succ 1 & l_1 & \\ & \succ 3 & & & \\ 1 & & \succ 2 & l_2 & \\ & \succ 1 & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

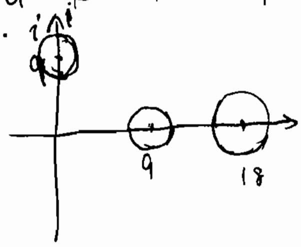
有4个J块 1个1阶 2个2阶 1个3阶块

$$J_A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & \\ & & & (2) \end{pmatrix}$$

5．(1)画出矩阵 A 的盖尔圆盘; (2)说明 A 有 3 个互异特征根.

$$A=\begin{pmatrix}18&1&2\\1&9&1\\1&i&9i\end{pmatrix}.$$

(1) G: $|z-18|<3$ $|z-9|<2$ $|z-9i|<2$



(2). ∵ 3个盖尔圆相互独立，没有连通

∴ 有3个互异特征根

三.(6 分)设 **A**是 n 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$(全体特征根).

(1)写出正规阵 **A**的含有对角阵与两个 U(酉)阵的乘积分解公式;

(2)若 **A**是 2 阶正规矩阵， $\sigma(\mathrm{A})=\{1, i\}$， $X=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ 使得 $\mathrm{A}X=X$，求一个 U(酉)阵

Q, 将 **A**写成 **Q**, $\mathbf{Q}^H$与对角阵的乘积形式.

(1). $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^H$ P和Q为酉阵

$PP^H=I$ $Q^HQ=I$.

(2).

$i\cdot x_1+x_2=0$

$\Downarrow$

$\begin{cases}x_1=ix_2\\x_2=x_2\end{cases}$ $X_2=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

$P=\left(\frac{AX}{|AX|}\ \frac{AX_1}{|AX_1|}\right)=Q$

∴ $Q=\left(\frac{X}{|X|}, \frac{X_2}{|X_2|}\right)=\begin{pmatrix}i/\sqrt2 & i/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$

∴ $A=\begin{pmatrix}i/\sqrt2 & i/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i/\sqrt2 & 1/\sqrt2\\ -i/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$

四.(任选 3 题共 9 分)简证下列各题

1.设$\|\bullet\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容的矩阵范数, 列向 $\alpha\in\mathbb{C}^n, \alpha\neq 0$. 任取 $x\in\mathbb{C}^n$，令$\|x\|$如下:

$\|x\|$ 定义为 $\|x\alpha^H\|$， $x\in\mathbb{C}^n$． 证明: $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\cdot\|x\|$, ($\mathrm{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$).

∵ $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上相容矩阵范数

∴ $\|Ax\| \overset{\text{定义}}{=} \|Ax\alpha^H\| = \|A(x\alpha^H)\| \le \|A\|\cdot\|x\alpha^H\| \overset{\text{定义}}{=} \|A\|\cdot\|x\|$

(相容性)

2.设$\|\bullet\|$是矩阵范数，$x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0$ 使得$Ax=\lambda x$；令 $B=(x,0,0,\cdots,0)_{n\times n}$

证明：　AB=λB，且有 $|\lambda|\cdot\|B\|\le\|A\|\cdot\|B\|$(由此你能否推出一个结论？).

$AB=A(x,0,\cdots 0)_{n\times n}=(Ax,0,\cdots 0)=(\lambda x,0,\cdots 0)=\lambda(x,0,\cdots 0)=\lambda B$

$\because$ $\|\cdot\|$是矩阵范

$\therefore$ 由相容性得 $\|AB\|=\|\lambda B\|=|\lambda|\|B\|\le\|A\|\|B\|$

3. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$是相容的矩阵范数，证明

(1) $\|I\|\ge 1$（I 是单位矩阵）；(2)若 A 可逆，　则$\|A^{-1}\|\ge\frac{1}{\|A\|}$

(1) $\because$ $\|A\|$是相容矩阵范

$\therefore$ $\|IA\|\le\|I\|\|A\|$ 且$\|A\|\geqslant 0$

$\Rightarrow\|A\|\le\|I\|\cdot\|A\|$

$\therefore$ $1\le\|I\|$

(2) A是相容矩阵范$\Rightarrow$ $\|A\cdot A^{-1}\|\le\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 且$\|A\|\geqslant 0$

$\therefore 1\le\|I\|\le\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

$\therefore$ $\|A^{-1}\|\geqslant\frac{1}{\|A\|}$

4. 若 A 为 n 阶正规阵，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根)，

证明 $\sigma(A^H)=\{\overline{\lambda_1},\cdots,\overline{\lambda_n}\}$($A^H$的全体特征根).

由谱分解得 $A=\lambda_1G_1+\cdots+\lambda_nG_n$　$G_i^2=G_i=G_i^H$

$\therefore A^H=\bar\lambda_1G_1+\cdots+\bar\lambda_nG_n$

$\therefore\sigma(A^H)=(\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_n)$

五.(11 分) **1.**设$A_1=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, **b**= $(2\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$，$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{4\times5}$.

求 A^+ 与 Ax=b 的极小范数解或最佳极小二乘解

$$A^+=\begin{pmatrix}A_1^+&\\&A_2^+\end{pmatrix}_{5\times4}=\begin{pmatrix}\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\\-1&2\end{pmatrix}&\\&\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{5\times4}$$

$x_0=A^+b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， (1)求 A 的短奇异值分解; (2)求奇异值分解.

(1) $A^HA=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\sigma(A^HA)=\{6,3\}$ $\lambda=6$时 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda=3$时 $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $P=\left(\frac{AX_1}{|AX_1|}\ \ \frac{AX_2}{|AX_2|}\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ 2/\sqrt6 & -1/\sqrt6\end{pmatrix}$ $\therefore A=P\begin{pmatrix}6 & \\ & 3\end{pmatrix}Q^H$

(2) 令 $V=Q$. $U=\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt2\\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt2\\ 2/\sqrt6 & -1/\sqrt6 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore A=U\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$

六.(8 分) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. 求 A 的极小式；计算 e^{tA} 与 $\rho(A\otimes e^B)$

$A-2I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $T(x)=(x-2)^2\cancel{(x-3)}$ $m(x)=(x-2)^2$ (极小式)

$f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2I)$

$e^{tA}=e^{2t}I+te^{2t}(A-2I)$ $\sigma(B)=\{1,0\}$

$\rho(A\otimes e^B)=\cancel{2}\times e^1=3e$

七. (7分)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求一个矩阵 B (具有正的特征根)，使得 $B^2=A$.

$(A-I)^3=0$

即 $B=A^{\frac{1}{2}}$ $f(A)=f(1)I+f'(1)(A-I)+\frac{f''(1)}{2}(A-I)^2$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

$A^{\frac{1}{2}}=I+\frac{1}{2}(A-I)-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(A-I)^2$

$=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{pmatrix}=B$ $\sigma(B)=\{1,1,1\}$

附加题(8分)

1.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m},B\in\mathbb{C}^{n\times n},X=X(t)\in\mathbb{C}^{m\times n}$，验证 $X=e^{At}Ce^{Bt}$ 是微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB\text{，}X(0)=C$$ 的唯一解。 ？

$\cancel{\frac{dX}{dt}=Ae^{At}Ce^{Bt}+e^{At}CBe^{Bt}}$ $=AX+XB$

$\cancel{AX=Ae^{At}Ce^{Bt}\quad XB=}$ $e^{At}Ce^{Bt}B=e^{At}CBe^{Bt}$

2.设单位列向量$\varepsilon\in\mathbb{C}^3$ $(|\varepsilon|^2=\varepsilon^H\varepsilon=1)$. 令$A=\varepsilon\varepsilon^H$， $B=I-2\varepsilon\varepsilon^H$

(1)求$A=\varepsilon\varepsilon^H$的特征多项式，验证$A^2=A=A^H$，并且求$A$的极小式与$A^+$ ；

(2)求B的谱$\sigma(B)$与谱半径$\rho(B)$，验证$B^2=I$.

(3) f(x)是解析函数，求谱分解公式$f(B)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$中的谱阵$G_1,G_2$

(1)、$\because\ \varepsilon^H\varepsilon=1$

$\therefore\ |\varepsilon\varepsilon^H-\lambda I|=\lambda^{3-1}|\varepsilon^H\varepsilon-\lambda I|$

$\lambda=0,0,1$

$\therefore\ T_A(x)=x^2(x-1)$

~~$\because r(A)=3-1=2$~~

~~$m_A(x)=$~~

$A^2=AA=\varepsilon\varepsilon^H\varepsilon\varepsilon^H=\varepsilon\varepsilon^H=A$

$A^H=(\varepsilon\varepsilon^H)^H=\varepsilon\varepsilon^H=A$

$\therefore\ A^2-A=0$

$\therefore\ m_A(x)=x(x-1)$

~~A^+ $\because r(A)=1$~~

~~$\therefore A^+=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H$~~ $A^+=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H=A$

~~$\because AA^+A=A=A^2=A^H=A^2AA$~~

~~$\therefore AA^+=AI$~~ ~~$AA^+=A^+A=$~~

(2) $\sigma(B)=\{1,1,-1\}$ $\rho(B)=1$

$B^2=BB=(I-2A)(I-2A)=I-4A+4A^2=I$.

(3)、设$f(x)=x+1$ $B^2=I\Rightarrow(B-I)(B+I)=0$ $\Rightarrow m_B(x)=(x-1)(x+1)$

$f(-1)=0$ $f(1)=2$ $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=1$

$A+I=2G_2$

$G_2=\frac{A+I}{2}$ $G_1=I-G_2=\frac{I-A}{2}$