2019--2020 第二学期大作业

一.(10 分)判断正误

(1) 列向量 X 的模长 $|X|$ 满足公式 $X^H X = |X|^2$，也有 $X^H A^H AX = |AX|^2$. （　　）

而且如果 $A^H AX = 0$，则有可能 $AX \neq 0$ （　　　）

(2)设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则有迹公式：$tr(A^H A) = tr(AA^H) = \sum |a_{ij}|^2$ （　　）

而且若 $tr(A^H A) = 0$，则可能有 $A \neq 0$ （　　）

(3)若 B 是列满秩(高阵)，C 是行满秩，则 $B^+ = (B^H B)^{-1} B^H$，$C^+ = C^H (CC^H)^{-1}$ （　　）

(4) 若 $A = BC$ 是满秩分解(高低分解)，则 $A^+ = C^+ B^+$ （　　　）

(5) 若矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩为 $rank(A)=1$，则 $A^+ = (\sum |a_{ij}|^2)^{-1} A^H$ （　　）

(6)设 $A=(a_{ij})_{n,n}$ 特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有许尔不等式：$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ （　　）

(7)若 A 是酉矩阵($A^H A = AA^H = I$)，则 $A^+ = A^{-1} = A^H$ （　　）

(8)若 A 是正规阵，P 是同阶酉矩阵，则 $P^H AP$ 也是正规阵. （　　）

(9)若 A 是正规阵，则存在酉矩阵 P 使 $P^H AP = D$ 为对角阵. （　　）

(10)若正规阵 A 特征根为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则它的全体奇异值为 $\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$ （　）

(11)若 A 是 n 阶方阵，则行列式 $\det(e^A) = e^{tr(A)}$ 且 $e^{-A}e^A = I$ (单位阵) （　　）

(12) A, B 是任意矩阵，则 $(A\otimes B)^H = A^H \otimes B^H$，$(A\otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+$ （　　）

(13)方阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 满足 $|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|_1$ 且 $[\rho(A)]^3 = \rho(A^3)$ （　　）

(14)设 $A = A_{n\times p}, B = B_{p\times n}$，则 AB, BA **有相同的非 0 特征根，且** $tr(BA) = tr(AB)$ （　　）

(15) $\|\bullet\|$ 是矩阵范数，I 是单位阵，则可能有 $\|I\| < 1$ （　　）

(16)许尔定理说：若 A 是 n 阶方阵，则存在酉矩阵 P 使 $P^H AP = D$ 为对角阵. （　　）

(17)若 $Ax=b$ 无解(不相容)，**则** $A^H Ax = A^H b$ **也无解(不相容)** （　　）

(18) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，张量积 $A\otimes B$ 的全体特征根为{ a，$2b$ } （　　）

二. 化简与计算(10 分)

1.设 **A** 的 **QR** 分解是 $A=QR$，其中 $Q^HQ=I$，化简 $R-Q^HA$

2. 已知 $A^2=A$，化简 $e^A=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots=?$

3. $c\neq 0$ 为复数，求正规阵 $A=\begin{pmatrix}0 & c\\ c & 0\end{pmatrix}$ 谱半径 $\rho(A)$；写出 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛的条件

4. 已知 $(A-I)^2=0$，化简 $e^{t(A-I)}=I+t(A-I)+\frac{(t(A-I))^2}{2}+\frac{(t(A-I))^3}{3!}+\cdots=?$

且 $e^{tA}=e^{t(A-I)+tI}=e^{t(A-I)}e^{tI}=?$

5. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，化简 $(A-2I)^2$，$e^{t(A-2I)}$，$e^{tA}=e^{t(A-2I)}e^{2tI}=?$

二. 计算(15 分)

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. 求 A 的正 SVD(正奇值分解)与奇异值分解.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ i & 1\end{pmatrix},(i^2=-1)$ 求 **QR** 分解 $A=QR$

三. 计算(15 分)

1.已知 $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos 3t & -\sin 3t\\ \sin 3t & \cos 3t\end{pmatrix}$，求 e^{-tA}，$\left(\frac{de^{tA}}{dt}\right)_{t=0}=?$，$A=?$

2.求解微分方程：$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX$，$X(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，其中 $A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}i & 1\\ i & 1\end{pmatrix}$ $(i=\sqrt{-1})$ 求：A^+，特征根 $\lambda(A^HA)$，谱范数 $\|A\|_2$

4.用盖尔圆盘定理估计 $A=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & 4 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 6 & \frac{1}{16}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 8\end{pmatrix}$ 的谱半径 $\rho(A)$ 的范围

四. **(15 分)说明** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 是否正规阵？ 并求 A 与 A^{-1} 的谱分解，计算 A^{100}

五. (10 分) 设列向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T\neq 0$,

令(镜面阵) $P=I-\dfrac{2XX^H}{|X|^2}$ ，**其中** $|X|^2=X^HX$.

(1) 计算: P^H-P, P^2-I, $P^{-1}-P$, $PX=?$，P是否酉阵(优阵)?

(2)用秩 1 方法求 XX^H **的特征根** $\lambda(XX^H)$，求P的全体特征根$\lambda(P)$；

(3)已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}|\alpha|\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, 令$X=\alpha-\beta=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

求 $P=I-\dfrac{2XX^H}{|X|^2}=?$ 验证 $P\alpha=\beta$, $P\beta=\alpha$

六.计算与证明(13 分)

1.设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$**，求一个矩阵 *B*，使** $B^{10}=A$

2.若 n 阶 Hermite 阵 A **的互异特征值只有 1，-1，计算** A^{2020} 与 A^{2021}

3. **证明：若列向量** x,y **满足** $A^HAx=A^HAy$，**则必有** $Ax=Ay$

七. 简述题(12 分)

写出你对正奇值分解(正 SVD)或奇异值分解(SVD)的理解; 试用一个例子说明它的应用.