模式识别
第二章 贝叶斯决策理论

北京航空航天大学计算机学院

内容

* 引言
* 几种常见的决策规则
* 正态分布时的统计决策

引言

* 贝叶斯决策理论是统计模式识别中最基本的方法，利用此方法进行分类时要求:
  * 各类别总体的概率分布是已知的
  * 待决策分类的类别数是一定的
* 统计决策理论——根据每一类总体的概率分布决定决策边界

引言
基本符号与定义

* 在连续的情况下，假设对要识别的物理对象有d种特征观察量

$$x_1, x_2, \ldots, x_d$$

* 这些特征的所有可能的取值范围构成了d维空间

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_d]^T$$

* 我们又称x为d维特征向量

引言
基本符号与定义

- 假设要分类的问题有c个类别，各类别状态用 ω_i 来表示，其中 $i=1,2,...,c$
- 且对应于各类别的 ω_i 出现的先验概率 $P(\omega_i)$ 及类条件概率密度 $p(x|\omega_i)$已知
- 如果在特征空间已经观察到某一个向量x, 应该把x分到哪一类?

引言
基本符号与定义

* 例：医生要根据病人血液中白细胞的浓度来判断病人是否患血液病。（两分类问题）
* 根据以往医生的经验知道：
  * 患病的人，白细胞的浓度与正常人不同
  * 一般人群中，患病的人数比例为0.1。
* 如果已知一个人的白细胞浓度，医生应该做出怎样的判断？

引言
基本符号与定义

- 对该问题的数学表示如下：
- 用Ω表示“类别”这一随机变量，ω_1 表示正常，ω_2 表示患病
- X表示“白细胞浓度”这个随机变量
- x表示浓度值

引言
基本符号与定义

* 医生的先验概率：

$$P(\omega_1) = 0.9$$

$$P(\omega_2) = 0.1$$

* 观测数据白细胞浓度分别在两种情况下的类条件分布：

$$p(x \mid \omega_1)$$

$$p(x \mid \omega_2)$$

引言
基本符号与定义

* 决策：根据观测到的x, 利用先验概率和类条件概率，决定x属于哪一类
* 决策是从样本空间到决策空间的一个映射
* 评价决策有多种标准，对于同一个问题，采用不同的标准会得到不同意义下“最优”的决策。

引言
基本符号与定义

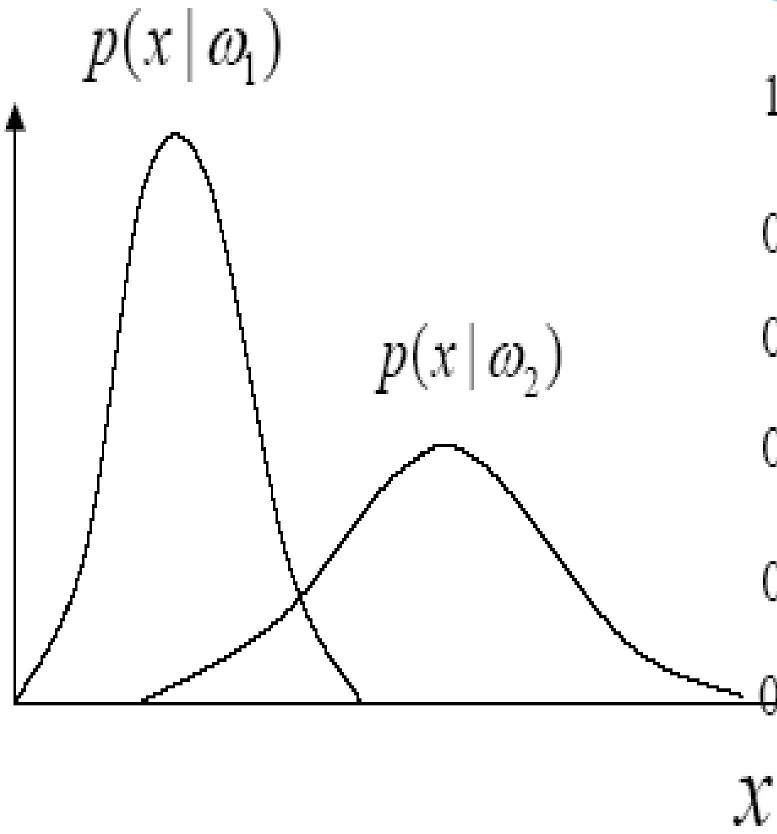
* Bayes决策是所有识别方法的一个基准
* Bayes决策两种常用的准则：
  * 最小错误概率准则
  * 最小风险准则

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

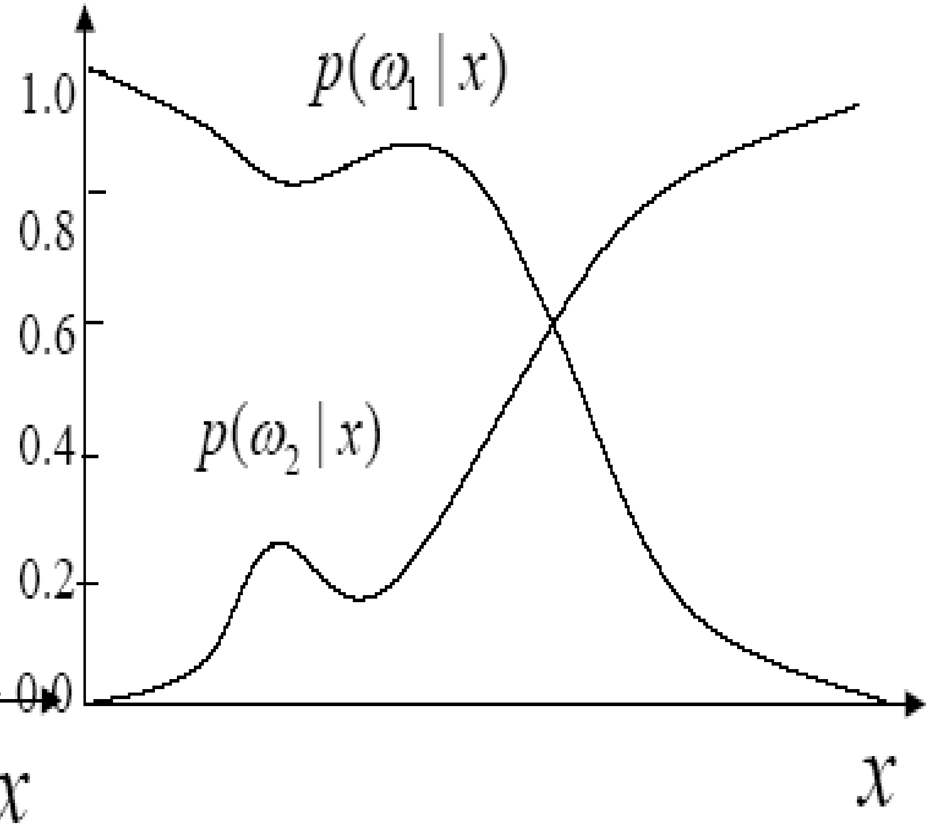
* 前面的问题，已知先验概率和类条件概率密度，利用贝叶斯公式，求得后验概率

$$p(\omega_i \mid x) = \frac{p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{2} p(x \mid \omega_j)P(\omega_j)}$$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策



类条件概率密度函数



后验概率

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

* **决策规则**
* (1) $P(\omega_i|x) = max_{j=1,2}P(\omega_j|x), x \in \omega_i$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

* 其他等价形式
* (2) $\mathrm{p}(x|\omega_i)P(\omega_i) = max_{j=1,2}P(x|\omega_j)P(\omega_i)$
* (3) 若$l(x) = \frac{\mathrm{p}(x|\omega_1)}{\mathrm{p}(x|\omega_2)} \gtrless \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$

  则$x \in \frac{\omega_1}{\omega_2}$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

* (4)对上式取自然对数的负值,可写为

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = -\ln\big(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})\big)$$

$$= -\ln \mathbf{p}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\omega}_1) + \ln \mathbf{p}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\omega}_2) \gtrless \ln \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}_1)}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}_2)}$$

则$\boldsymbol{x} \in \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\boldsymbol{\omega}_2}$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

* 例题: 前面讲到的白血病检验问题
* 现有一待识别细胞,观察值为x, 从类条件概率密度分布曲线上查得

$$\mathrm{p}(x|\omega_1) = 0.2 \quad \mathrm{p}(x|\omega_2) = 0.4$$

* 对该细胞进行分类

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

- 利用贝叶斯公式，分别计算后验概率

$$P(\omega_1|x)=\frac{p(x|\omega_1)P(\omega_1)}{\sum_{j=1}^{2}p(x|\omega_j)P(\omega_j)}$$

$$=\frac{0.2*0.9}{0.2*0.9+0.4*0.1}=0.818$$

$$P(\omega_2|x)=1-P(\omega_1|x)=0.182$$

$$P(\omega_1|x)>P(\omega_2|x)$$

- 故该细胞是正常的

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

* 下面以一维情况证明上述贝叶斯决策规则使错误率最小
* 错误率：此处为平均错误率
* $\boldsymbol{P(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(e, x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(e|x)p(x)dx}$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

- 条件错误率 $P(e|x)$ 的计算：
  - 以两类问题为例，当获得观测值 x 后，有两种决策可能：决定 $x\in\omega_1$，或者 $x\in\omega_2$.
    条件错误率为：

$$P(e|x)=\begin{cases}P(\omega_2|x)=1-P(\omega_1|x) & \text{若决定}x\in\omega_1\\ P(\omega_1|x)=1-P(\omega_2|x) & \text{若决定}x\in\omega_2\end{cases}$$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

- Bayes最小错误率决策:
  - 选择后验概率$P(\omega_1 | x), P(\omega_2 | x)$中大的$\omega$作为决策，使得在观测值$x$下的条件错误率最小。

$$D(x) = \arg\max_i P(\omega_i | x).$$

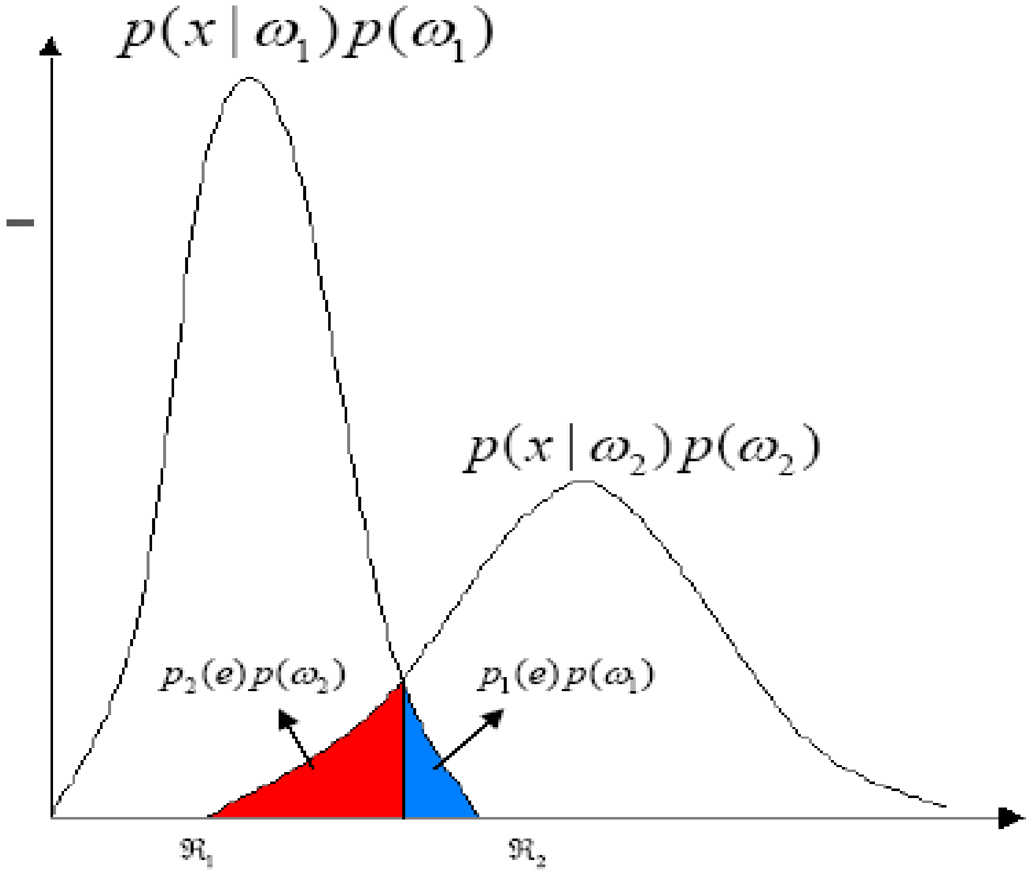
  - 条件错误率:

$$P(e | x) = 1 - \max_i P(\omega_i | x).$$

  - 错误率:

$$P(e) = E(P(e | x)).$$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策



几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

$$p(e) = p(x \in \Re_1, \omega_2) + p(x \in \Re_2, \omega_1)$$

$$== p(x \in \Re_1 | \omega_2) p(\omega_2) + p(x \in \Re_2 | \omega_1) p(\omega_1)$$

$$= p(\omega_2) p_2(e) + p(\omega_1) p_1(e)$$

* 此决策实际上对每个x都使P(e|x)取最小
* 从而保证上式最小
* 由此证明了最小错误率贝叶斯规则确实使错误率最小

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

Bayes最小错误率决策不仅保证了错误率（条件错误率的期望）最小，而且保证每个观测值下的条件错误率最小，Bayes决策是一致最优决策。

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

多类识别问题的Bayes最小错误率决策:

- 在观测值x下的每个决策的条件错误率为:

$$P(e|x)=1-P(\omega_i|x) \quad \text{若决定} x\in\omega_i$$

- 决策为:

$$D(x)=\arg\max_i P(\omega_i|x).$$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

后验概率$P(\omega_i \mid x)$的计算：

- Bayes公式：

$$P(\omega_i \mid x) = \frac{p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)}{p(x)}$$

$$= \frac{p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)}{\sum_i p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)}.$$

- $P(\omega_i)$ ：先验概率；$p(x \mid \omega_i)$：类条件概率密度。

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

$$
\left.
\begin{aligned}
P(e) = {} & [P(\vec{x}\in\Re_2|\omega_1)+P(\vec{x}\in\Re_3|\omega_1)+\ldots+P(\vec{x}\in\Re_c|\omega_1)]P(\omega_1) \\
& +[P(\vec{x}\in\Re_1|\omega_2)+P(\vec{x}\in\Re_3|\omega_2)+\ldots+P(\vec{x}\in\Re_c|\omega_2)]P(\omega_2) \\
& +\ldots\ldots \\
& \underbrace{+[P(\vec{x}\in\Re_1|\omega_c)+P(\vec{x}\in\Re_2|\omega_c)+\ldots+P(\vec{x}\in\Re_{c-1}|\omega_c)]P(\omega_c)}_{\text{每行}c-1\text{项}}
\end{aligned}
\right\} c\text{行}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1,j\neq i}^{c}[P(\vec{x}\in\Re_j|\omega_i)]P(\omega_i)
$$

几种常见的决策规则
基于最小错误概率的贝叶斯决策

$$P(c)=\sum_{j=1}^{c}P(\vec{x}\in\Re_j\,|\,\omega_j)P(\omega_j)=\sum_{j=1}^{c}\int_{\Re_j}p(\vec{x}\,|\,\omega_j)P(\omega_j)d\vec{x}$$

$$P(e)=1-P(c)$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 每个决策的风险是不同的，我们在决策过程中应该考虑决策风险

* 以疾病诊断为例，风险大不相同

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 如何在决策中考虑风险?

* 引入风险函数（损失函数），通常是决策和自然状态的函数，可用决策表来表示

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

- N类问题：$(\lambda_{i,\,j})_{N*N}$

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \cdots & \lambda_{1n} \\
\lambda_{21} & \lambda_{22} & & \cdots & & \lambda_{2n} \\
 & & \ddots & & & \\
\vdots & & \lambda_{ij} & & & \vdots \\
\lambda_{(n-1)1} & & & & & \lambda_{(n-1)n} \\
\lambda_{n1} & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{nn}
\end{pmatrix}
$$

表示当我们给出的决策为i类，而真实类别为j时的损失值。

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 以数学形式表示决策问题:
* (1)观察x是d维随机向量

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_d]^T$$

* (2)状态空间Ω由c个自然状态组成

$$\Omega = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_c]^T$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* (3) 决策空间由a个决策组成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_a\}$$

* (4) 损失函数为λ

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

- 根据贝叶斯公式，

$$P(\omega_j|x) = \frac{p(x|\omega_j)P(\omega_j)}{p(x)}$$

- 其中

$$p(x) = \sum_{i=1}^{c} p(x|\omega_i)P(\omega_i)$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 在引入损失函数后，对应于决策a_i，λ可以在c个$\lambda(a_i, \omega_j), j = 1, 2, \ldots, c$ 中任意选取一个，相应的概率为$P(\omega_j|x)$
* 故采用决策a_i时的条件期望损失是
* $R(a_i|x) = E[\lambda(a_i, \omega_j)] = \sum_{j=1}^{c} \lambda(a_i, \omega_j) P(\omega_j|x), i = 1, 2, \ldots, a$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* x是随机变量，采用x不同的观测值，产生的条件风险不同，决策a可以看成是x的函数，我们定义期望风险

$$R = \int R(a(x)|x)p(x)dx$$

* 条件风险对应的是x，期望风险对应的是$a(x)$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 在考虑错判带来的损失时，我们希望损失最小，如果在采取每个决策，都使其条件风险最小，则对所有的x作出决策时，其期望风险也必然最小。这样的决策就是最小风险贝叶斯决策。
* 最小风险贝叶斯决策规则为：

如果 $$R(a_k|x) = min_{i=1,\dots,a} R(a_i|x)$$

则 $$a = a_k$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

- 具体计算步骤如下：
- (1) 计算后验概率
- (2) 根据决策风险表，计算出采取a_i的条件风险

$$R(a_i|x) = E\left[\lambda\left(a_i, \omega_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{c} \lambda\left(a_i, \omega_j\right) P\left(\omega_j|x\right), i = 1, 2, \ldots, a$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* (3) 对a个条件风险值进行比较，找出使条件风险最小的决策a

$$R(a_k|x) = min_{i=1,\ldots,a} R(a_i|x)$$

* 则a_k就是最小风险贝叶斯决策

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

- 以前面例题为例
- 已知：

$$P(\omega_1) = 0.9, P(\omega_2) = 0.1$$
$$P(x|\omega_1) = 0.2, P(x|\omega_2) = 0.4$$
$$\lambda_{11} = 0, \lambda_{12} = 6$$
$$\lambda_{21} = 1, \lambda_{22} = 0$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 利用贝叶斯公式，分别计算后验概率

$$P(\omega_1|x)=\frac{p(x|\omega_1)P(\omega_1)}{\sum_{j=1}^{2}p(x|\omega_j)P(\omega_j)}$$

$$=\frac{0.2*0.9}{0.2*0.9+0.4*0.1}=0.818$$

$$P(\omega_2|x)=1-P(\omega_1|x)=0.182$$

$$P(\omega_1|x)>P(\omega_2|x)$$

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 引入风险函数后，计算条件风险

$$R(a_1|x) = \sum_{j=1}^{c} \lambda_{1j} P(\omega_j|x) = \lambda_{12} P(\omega_2|x)$$
$$= 1.092$$

$$R(a_2|x) = \lambda_{21} P(\omega_1|x) = 0.818$$

* 因为 $R(a_1|x) > R(a_2|x)$
* 故选择决策行动a_2即该细胞为异常

几种常见的决策规则
基于最小风险的贝叶斯决策

* 小作业：最小错误率的贝叶斯决策和最小风险贝叶斯决策的关系？（证明）

几种常见的决策规则
分类器设计

* 应用最小错误率贝叶斯决策准则的分类器设计
* 分类器设计问题为确定判别函数和决策面
* 对于c类分类问题，按照决策规则可以把d维特征空间分成c个决策域，我们将划分决策域的边界面称为决策面，在数学上用解析形式可以表示成决策面方程，用于表达决策规则的某些函数称为判别函数。

几种常见的决策规则
多类情况的贝叶斯决策规则

- (1) $P(\omega_i|x) > P(\omega_j|x), j = 1, 2, \dots, c, j \neq i$

  则 $x \in \omega_i$

- (2) $p(x|\omega_i)P(\omega_i) > p(x|\omega_j)P(\omega_j), j = 1, 2, \dots, c, j \neq i$，则 $x \in \omega_i$

几种常见的决策规则
多类情况的贝叶斯决策规则

* (3) $l(x)=\frac{\mathrm{p}(x|\omega_i)}{\mathrm{p}(x|\omega_j)}>\frac{P(\omega_j)}{P(\omega_i)}, j=1,2,\ldots,c, j\neq i$，则$x\in\omega_i$
* (4) $\ln \mathrm{p}(x|\omega_i)+\ln \mathrm{P}(\omega_i)>\ln \mathrm{p}(x|\omega_j)+\ln \mathrm{P}(\omega_j), j=1,2,\ldots,c, j\neq i$，则$x\in\omega_i$

几种常见的决策规则
判别函数

* 判别函数: 通常定义一组判别函数$g_i(x), i = 1, 2, \dots, c$, 用来表示多类决策规则:
* 如果使得$g_i(x) > g_j(x)$对于一切的$j \neq i$均成立，则将x归于ω_i类。

几种常见的决策规则
判别函数

- 相对应于贝叶斯决策的判别函数
- (1) $g_i(x) = P(\omega_i|x)$
- (2) $g_i(x) = p(x\,\big|\,\omega_i)P(\omega_i)$
- (3) $g_i(x) = \ln \mathrm{p}(x|\omega_i) + \ln \mathrm{P}(\omega_i)$

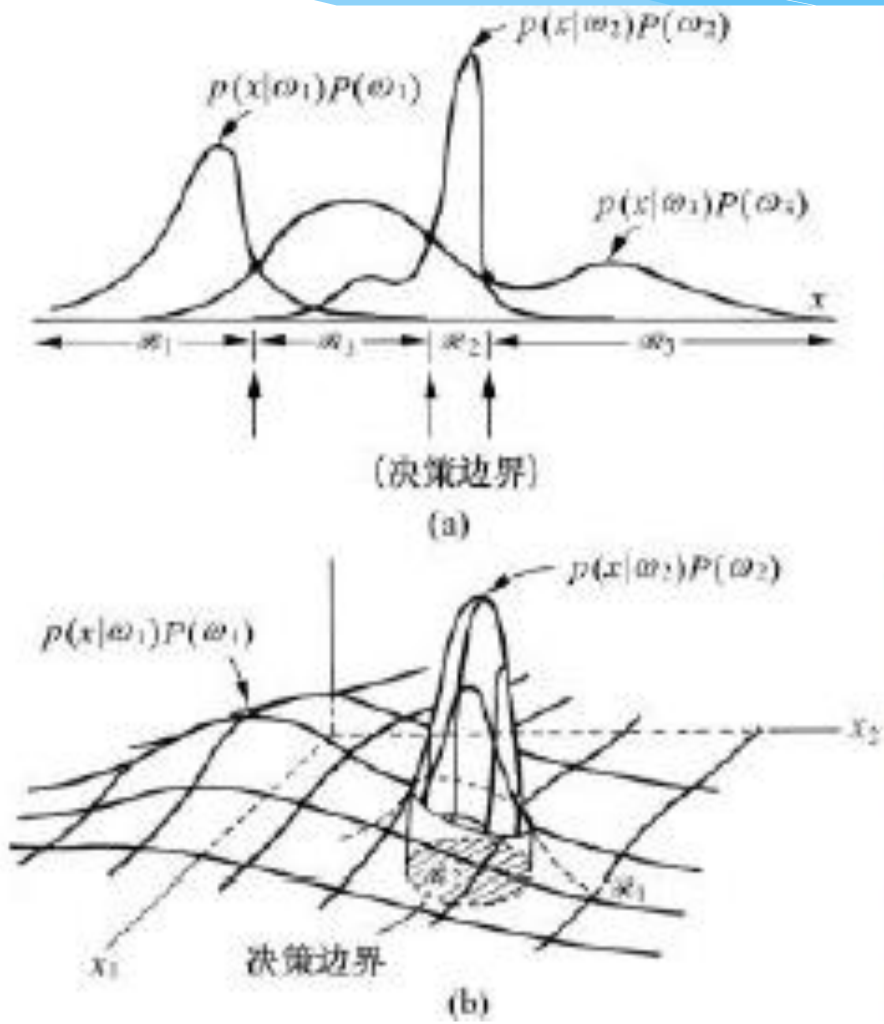
几种常见的决策规则
决策面方程&分类器设计

* 决策面方程

$$g_i(x) = g_j(x)$$

* 分类器设计原则
  * 选取最大的g(x)

几种常见的决策规则
决策面方程&分类器设计



正态分布时的统计决策

* 在统计决策分析中经常假定正态分布，因为：
  * 物理上的合理性
  * 正态分布的一些性质使在数学上计算简单

正态分布时的统计决策

* 物理上的合理性示例
  * 人的身高、寿命等
  * 考试成绩
  * 医学参考值
  * 信道噪声

正态分布时的统计决策
正态分布函数定义及性质

* 单变量正态分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$$

$$\mu = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx$$

正态分布时的统计决策
正态分布函数定义及性质

* 概率密度函数应满足下面关系：

$$p(x) \geq 0(-\infty < x < +\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

正态分布时的统计决策
正态分布函数定义及性质

* 多元正态分布

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\{\frac{-1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\}$$

其中

$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_d}]^T$是d维列向量，

$\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d]^T$是d维均值向量，

Σ是d*d维的协方差矩阵

正态分布时的统计决策
正态分布函数定义及性质

$$\mu = E\{x\}$$

$$\Sigma = E\{(x-\mu)(x-\mu)^T\}$$

$$\sigma_{ij}^2 = E\left[(x_i-\mu_i)\left(x_j-\mu_j\right)\right]$$

$$\Sigma = \begin{matrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & .. & \sigma_{1d}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & .. & \sigma_{2d}^2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \sigma_{d1}^2 & \sigma_{d2}^2 & .. & \sigma_{dd}^2 \end{matrix}$$

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 多元正态概率模型下的最小错误率贝叶斯判别函数和决策面

$$\boldsymbol{g_i(x)} = \ln \mathbf{p}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\omega_i}) + \ln \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$$

* 正态分布时判别函数为

$$\boldsymbol{g_i(x)} = \frac{-1}{2}(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i) - \frac{d}{2}\ln \mathbf{2\pi} - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$$

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 决策面方程

$$\boldsymbol{g_i(x) = g_j(x)}$$

$$\frac{-1}{2}\left[(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i) - \left(x-\mu_j\right)^T\Sigma_j^{-1}\left(x-\mu_j\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\frac{|\Sigma_i|}{|\Sigma_j|} + \ln\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_j})}$$

$$= \mathbf{0}$$

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 特殊情况1:

$$\Sigma_i = \sigma^2 I, i = 1,2, \ldots, c$$

* 每类协方差矩阵相等，类内各特征相互独立，方差相等
* 若先验概率$\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}_i) \neq \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}_j)$

$$\Sigma_i = \begin{matrix} \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \sigma^2 & \ldots \\ 0 & \ldots & \sigma^2 \end{matrix}, |\Sigma_i| = \sigma^{2d}, \Sigma_i^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I$$

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 判别函数为：

$$\boldsymbol{g_i(x)} = \frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu_i)^T(x-\mu_i) - \frac{d}{2}\ln \boldsymbol{2\pi} - \frac{1}{2}\ln \sigma^{2d} + \ln \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$$

即$\boldsymbol{g_i(x)} = \frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu_i)^T(x-\mu_i) + \ln \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$

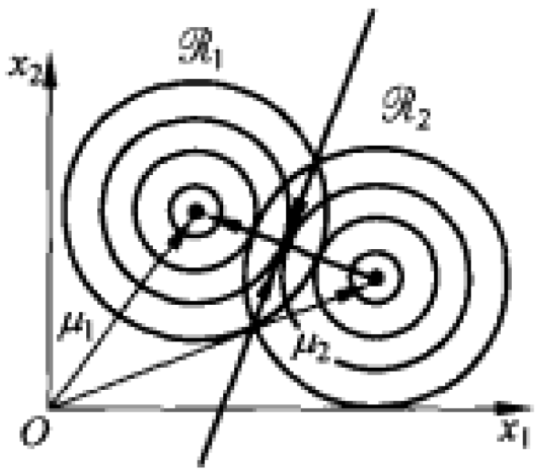
正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 若先验概率$\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}_j)$

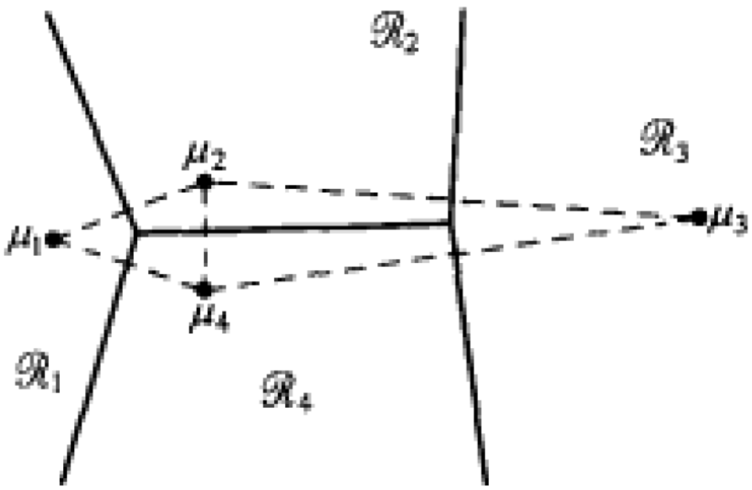
$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu_i)^T(x-\mu_i)$$

等价于最小距离分类器

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面



(a) 两类情况



(b) 多类情况

正态分布且 $P(\omega_i)=P(\omega_j)$，$\boldsymbol{\Sigma}_i=\sigma^2\boldsymbol{I}$ 时的决策面

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 特殊情况2：

$$\Sigma_i = \Sigma, i = 1,2, \ldots, c$$

* 每类协方差矩阵相等

* $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2}(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i) - \frac{d}{2}\ln \mathbf{2\pi} - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

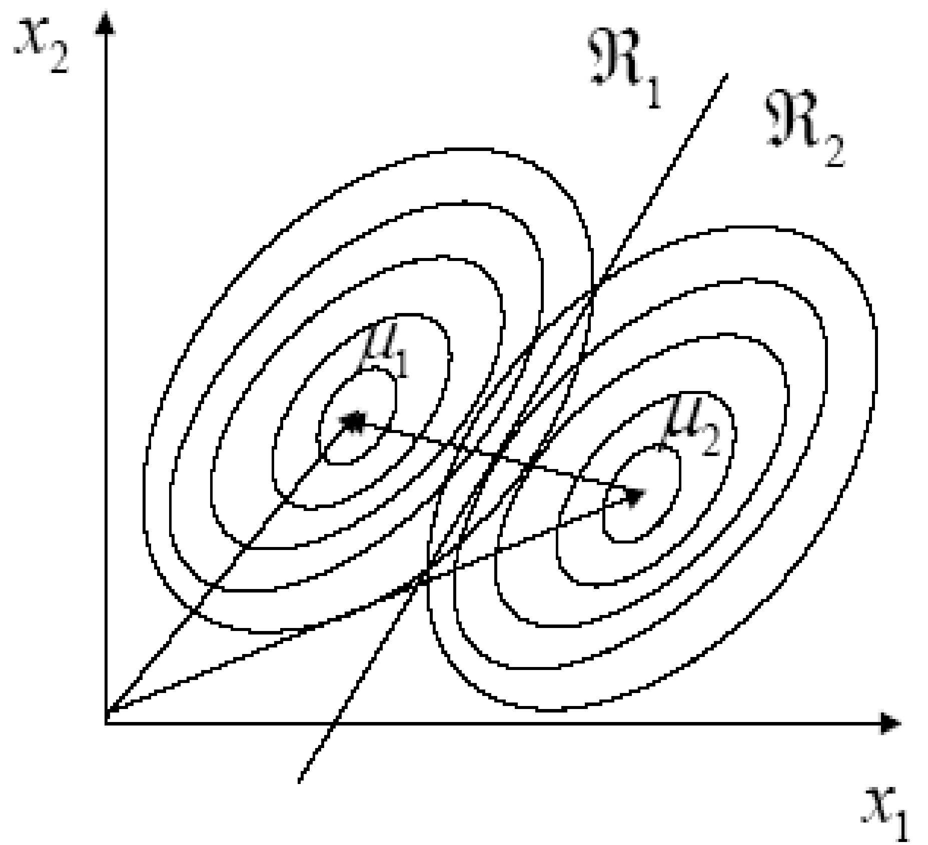
可简化为$\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x})=\frac{-1}{2}(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)+\ln\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega_i})$

* 当先验概率相等时

$$\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x})=\gamma^2=(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)$$

即为马氏距离

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面



正态分布且$P(\omega_1)=P(\omega_2), \Sigma_1=\Sigma_2$ 时的决策面

正态分布时的统计决策
多元正态-判别函数和决策面

* 特殊情况3:

$$\Sigma_i \neq \Sigma_j$$

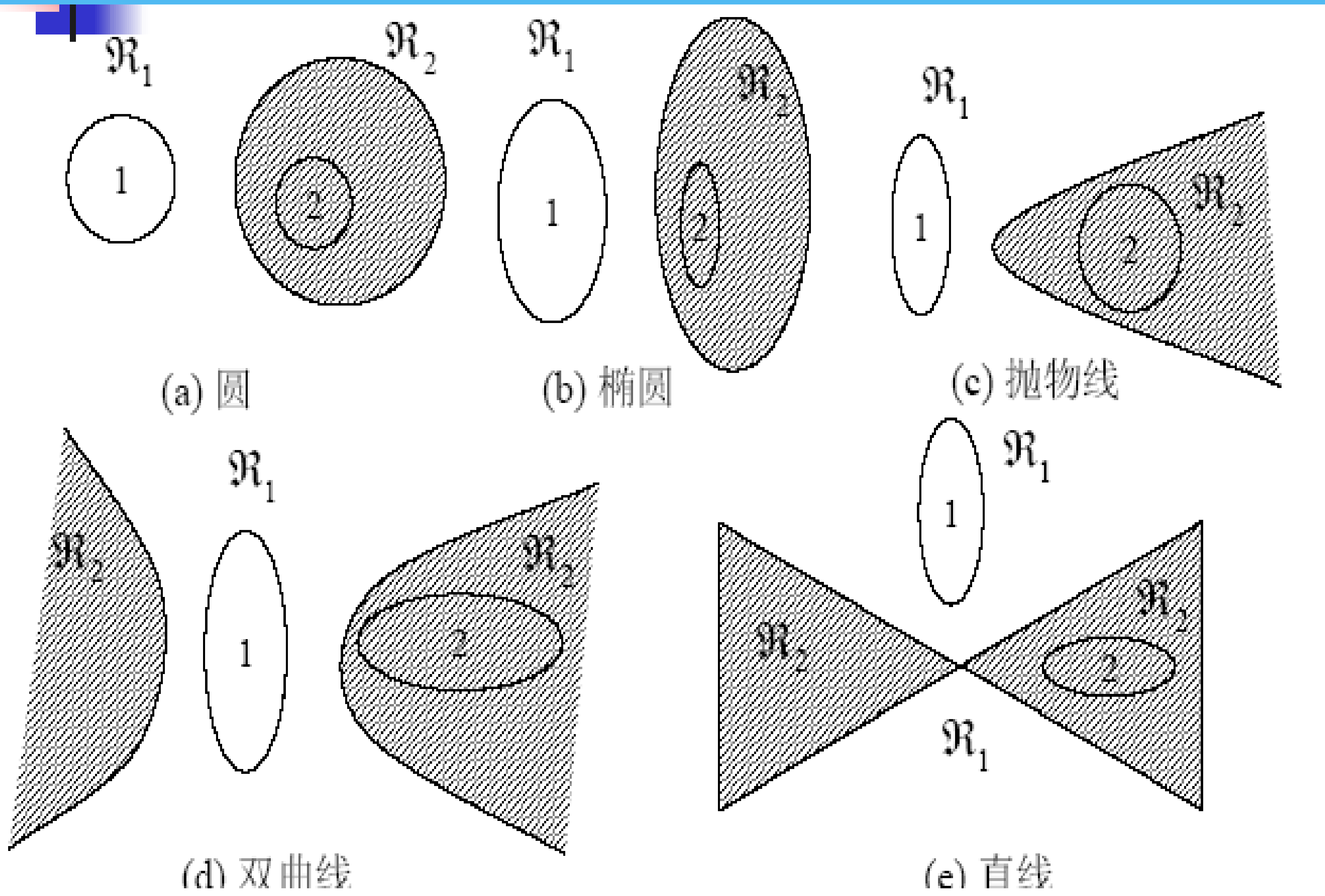
* 各类协方差矩阵不相等

$$\boldsymbol{g_i(x)} = \frac{-1}{2}(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln \mathrm{P}(\boldsymbol{\omega_i})$$

* 决策面: $\boldsymbol{g_i(x) - g_j(x) = 0}$

正态分布时的统计决策

多元正态 - 判别函数和决策面



谢谢