

一、判断题 (本题共 7 分, 每小题 0.5 分)

请在正确的陈述前面括号中打√, 在错误的陈述前面括号中打×。

() 回溯法用深度优先法搜索状态空间树。

() 一个完全多项式近似方案是一个近似方案 $\{A_i\}$, 其中每一个算法 A_i 在输入实例 I 的规模的多项式时间内运行。

() 基于比较的寻找数组 $A[1...n]$ 中最大值元素问题的下界是 $\Omega(n/3)$ 。

() NP 完全问题比其它所有 NP 问题都要难。

() 贪婪技术所做的每一步选择所产生的部分解, 不一定是可行性的。

() 在动态规划中, 各个阶段所确定的策略就构成一个策略序列, 通常称为一个决策。

() P 类和 NP 类问题的关系用 $P \subset NP$ 来表示是错误的。

() Las Vegas 算法只要给出解就是正确的。

() 通常来说, 算法的最坏情况的时间复杂性比平均情况的时间复杂性容易计算。

() 若近似算法 A 求解某极小化问题一实例的解为 s_a , 且已知该问题的最优解为 $s_o/3$, 则该近似算法的性能比为 3。

() 快速排序算法的平均时间复杂度是 $O(n \log n)$, 使用随机化快速排序算法可以将平均时间复杂度降得更低。

() $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\min\{f(n), g(n)\})$ 。

() 若 $f(n) = \Omega(g(n))$, $g(n) = \Omega(h(n))$, 则 $f(n) = \Omega(h(n))$ 。

() 若 $f(n) = O(g(n))$, 则 $g(n) = \Omega(f(n))$ 。

二、问答题 (本题共 12 分)

- 1、二叉查找树属于减治策略的三个变种中哪一个的应用? 什么情况下二叉查找树表现出最差的效率? 此时的查找和插入算法的复杂性如何? (本题 3 分)
- 2、何谓伪多项式算法? 如何将一 Monte Carlo 算法转化为 Las Vegas 算法 (本题 2 分)
- 3、构造 AVL 数和 2-3 树的主要目的是什么? 它们各自有什么样的查找和插入的效率? (本题 2 分)
- 4、写出 0/1 背包问题的一个多项式等价 (Polynomially equivalent) 的判定问题, 并说明为什么它们是多项式等价的。(本题 3 分)
- 5、下面问题是否属于 NP 问题? 为什么? (本题 2 分)

给定图 $G=(N,A)$ 中的两个点 p 、 q , 整数 c 和 t , 图 G 中每条边的长度 c_{ij} 及遍历这条边的时间 t_{ij} , 问图 G 中是否存在一条由 p 到 q 的路径, 使得其长度大于 C , 且遍历时间小于 t ?

三、写出一求解下列问题的分治算法，推导其时间复杂性并与蛮力法相比较。（本题 5 分）

给定互不相等的 n 个数的一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，若其中某两个数 a_i 和 a_j 的关系为： $a_i > a_j$ ，且 $i < j$ ，则称 a_i 和 a_j 是逆序的。要求计算该序列中的逆序个数，即，具有逆序关系的元素对的总数目。

四、用动态规划方法手工求解以下问题（本题 8 分）

有 8 万元的投资可以投给 3 个项目，每个项目在不同投资数额下（以万元为单位）的利润如下表。

投资额 盈利 项目	0	1	2	3	4	5	6	7	8
项目 1	0	5	15	40	80	90	95	98	100
项目 2	0	5	15	40	60	70	73	74	75
项目 3	0	4	26	40	45	50	51	52	53

请安排投资计划，使总的利润最大。

写出你所设的状态变量、决策变量、状态转移方程与递推关系式，和手工求解的详细步骤及结果。

五、用分支定界法求解以下问题：（本题 8 分）

A 国与 B 国之间尚未直接通商。与 A 国直接通商的有 20 个国家 (C_1, C_2, \dots, C_{20})；与 B 国直接通商的为另外 30 个国家 ($C_{21}, C_{22}, \dots, C_{50}$)。上述 50 个国家 (C_1, C_2, \dots, C_{50}) 之间并不是每两个国家都直接通商，任意两国之间的贸易税率由对称矩阵 R 给出，其中 ∞ 代表两国不能直接通商。

A 国某公司与 B 国一公司欲通过某几个中间国家的公司完成一笔贸易，各个国家的进出口贸易通关等手续所需办理时间由向量 T 给出。请安排一中转贸易计划，使得该交易所产生的向各中转国缴纳的税费最低，且整个交易能够在时间 t 内完成。

1. 说明你是如何构造搜索树的。（要求是二叉搜索树）。
2. 说明算法遍历搜索树的原则（何时以及如何前进、分支、回溯、剪枝等等）。
3. 你设计的分支定界算法的“界”是什么，它为什么是正确的和有效的？
4. 写出伪代码。