

一、判断题

- () Monte Carlo 算法有时不能给出问题的解，但只要给出解就是正确的。
- () 回溯法用深度优先或广度优先法搜索状态空间树。
- () $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$
- () $f(n) = O(f(n))$
- () 若求解问题 p 的一个算法 A 的复杂性为 $f(n)$ ，则 p 的复杂性 $C(p) \leq f(n)$ 。
- () 随机化快速排序的 worst case 出现于输入数组恰好为已按非降序排列的情况（假设输出的排序结果也要求是非降序）。
- () 基于比较的排序问题的下界是 $0.5n \log n$ 。
- () 所有问题当中最难的一组问题被称为 NP 完备 (NP-Complete) 问题。
- () P 类和 NP 类问题的关系用 $P \subset NP$ 来表示是错误的。
- () 动态规划算法通过增加空间复杂性来降低时间复杂性。

二、简答题：

1. 证明：

$$1.5n^2 + 365n \log n = O(n^2)$$

2. 推导以下递推式的解：

$$T(n) = 2 \quad \text{当 } n=3 \text{ 时}$$

$$T(n) = 2T(n/3) + 2 \quad \text{当 } n > 3 \text{ 时}$$

3. 求解 TSP 问题的最近邻居算法的性能比是多少？这一性能比是如何求得的？

4. 是否存在具有最小绝对差界的求解地图着色问题的近似算法？若有，请写出伪代码，并说明为什么其绝对差界已达最小。

5. 假设在测试字符串相等性的概率算法中，采用的指纹函数为 $I_p(x) = I(x) \bmod p$ ，其中

$I(x)$ 为比特串 x 的十进制整数表示， $I_p(x)$ 为 $I(x)$ 基于素数 p 的指纹。已知：若 x 和 y 的长度均为 n ， p 为随机选择的小于 $2n^2$ 的素数，则当 $I_p(x) = I_p(y)$ 时， $x \neq y$ 的概率 $p_f \leq 1/n$ 。又知： $\log_2 10 \approx 3.32$ 。问：测试两个十万位的比特串的相等性时，需随机产生并传送几次指纹，可使假匹配的概率低于 10^{-30} ？总共传送了多少比特位？

6. 请举出三种寻找问题下界的方法或策略

7. 按照增长率上升的顺序排列以下函数，即，若在你的排序结果中，函数 $f(n)$ 跟在 $g(n)$ 的后面，则说明应该满足 $g(n)$ 是 $O(f(n))$ ：

$$f_1(n) = 10^n$$

$$f_2(n) = n^{1/3}$$

$$f_3(n) = n^n$$

$$f_4(n) = 2^{\sqrt{\log_e n}}$$

$$f_5(n) = \log_2 n$$

8. 用回溯法求解以下 SAT 问题，请画出搜索树，标明搜索树的分支策略和树中各节点代表的状态（化简的 CNF 形式）

$$(p \vee q \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$$

- 三、设计一求解以下问题的分治算法，写出伪代码，分析其时间复杂性并与该问题的蛮力算法相比较：

某投资咨询公司要长期重复做一项模拟，在这项模拟中他们从过去的某天开始对一支给定的股票连续考察 n 天（这些天数记为 $i = 1, 2, \dots, n$ ）；对每天 i ，有当天这只股票每股的价格 $p(i)$ （为简单起见，我们假设这个价格在每一天之内是固定的）。假设在这 n 天内，某天买进这支股票并且在以后的某天卖出这些股票。欲求：为了挣到最多的钱，他们应该什么时候买进并且什么时候卖出？

- 四、分别用蛮力法、分治法、动态规划法求解以下问题，针对每一个算法，说明其主要求解思想，写出其伪代码，递推公式，并分析其时间复杂性：

某投资咨询公司要长期重复做一项模拟，在这项模拟中他们从过去的某天开始对一支给定的股票连续考察 n 天（这些天数记为 $i = 1, 2, \dots, n$ ）；对每天 i ，有当天这只股票每股的价格 $p(i)$ （为简单起见，我们假设这个价格在每一天之内是固定的）。假设在这 n 天内，某天买进这支股票并且在以后的某天卖出这些股票。欲求：为了挣到最多的钱，他们应该什么时候买进并且什么时候卖出？

- 五、设计一基于动态规划思想求解以下问题的算法，写出递推关系式、伪代码，并分析你所设计的算法的时间复杂性：

一条公路由西到东长 M 公里，公路两旁可能设立广告牌的地点为 x_1, x_2, \dots, x_n ，而在

各地点放置一块广告牌带来的收益分别为 p_1, p_2, \dots, p_n 。有关规定要求两块广告牌的距离不能小于 3 公里。要求找到一组地点来放置广告牌，使得总收益最大。

六、设计一求解以下问题的贪心算法，写出伪代码，并分析其时间复杂性：

给定 m 台机器 M_1, \dots, M_m 和 n 项作业，要把每一项作业分配给一台机器来完成。每一项作业 j 有处理时间 t_j 。若 $A(i)$ 表示分配给机器 M_i 的作业集，则机器 M_i 需要工作的总时间（亦称为 M_i 的负载）为

$$T_i = \sum_{j \in A(i)} t_j$$

完成这 n 项作业的工期 T 为所有机器的最大负载，即 $T = \max_i T_i$

要求找到一种分配方案，使得完成这 n 项作业的工期最小。

七、设计一种策略，使在下面的游戏中，期望提问的平均次数最少（请给出你得到这一策略的过程）：

一副纸牌，由一张 A，两张 2，三张 3，直到 9 张 9 组成。有人从洗过的这副牌中抽出一张，你需要问一连串用是或否来回答的问题来确定这张牌的点数。