第一章　命题逻辑

习题与解答

1．判断下列语句是否为命题，并讨论命题的真值。

⑴ $2x-3=0$。

⑵ 前进！

⑶ 如果$8+7>20$，则三角形有四条边。

⑷ 请勿吸烟！

⑸ 你喜欢鲁迅的作品吗？

⑹ 如果太阳从西方升起，你就可以长生不老。

⑺ 如果太阳从东方升起，你就可以长生不老。

解　⑶,⑹,⑺表达命题，其中⑶,⑹表达真命题，⑺表达假命题。

2．将下列命题符号化：

⑴ 逻辑不是枯燥无味的。

⑵ 我看见的既不是小张也不是老李。

⑶ 他生于 1963 年或 1964 年。

⑷ 只有不怕困难，才能战胜困难。

⑸ 只要上街，我就去书店。

⑹ 如果晚上做完了作业并且没有其它事情，小杨就看电视或听音乐。

⑺ 如果林芳在家里，那么他不是在做作业就是在看电视。

⑻ 三角形三条边相等是三个角相等的充分条件。

⑼ 我进城的必要条件是我有时间。

⑽ 他唱歌的充分必要条件是心情愉快。

⑾ 小王总是在图书馆看书，除非他病了或者图书馆不开门。

解　⑴ p：逻辑是枯燥无味的。

"逻辑不是枯燥无味的"符号化为$\neg p$。

⑵　p：我看见的是小张。q：我看见的是老李。

"我看见的既不是小张也不是老李"符号化为$\neg p \wedge \neg q$。

⑶　p：他生于 1963 年。q：他生于 1964 年。

"他生于 1963 年或 1964 年"符号化为 $p \oplus q$。

⑷　p：害怕困难。q：战胜困难。

"只有不怕困难，才能战胜困难"符号化为$q \to \neg p$。

⑸　p：我上街。q：我去书店。

"只要上街，我就去书店"符号化为 $p \to q$。

⑹　p：小杨晚上做完了作业。q：小杨晚上没有其它事情。

r：小杨晚上看电视。s：小杨晚上听音乐。

"如果晚上做完了作业并且没有其它事情，小杨就看电视或听音乐"符号化为 $p \wedge q \to r \vee s$。

⑺　p：林芳在家里。q：林芳做作业。r：林芳看电视。

"如果林芳在家里，那么他不是在做作业就是在看电视"符号化为 $p \to q \vee r$。

⑻　p：三角形三条边相等。q：三角形三个角相等。

"三角形三条边相等是三个角相等的充分条件"符号化为 $p \to q$。

⑼　p：我进城。q：我有时间。

"我进城的必要条件是我有时间"符号化为 $p \to q$。

⑽　p：他唱歌。q：他心情愉快。

"他唱歌的充分必要条件是心情愉快"　符号化为 $p \leftrightarrow q$。

⑾　p：小王在图书馆看书。q：小王病了。r：图书馆开门。

"小王总是在图书馆看书，除非他病了或者图书馆不开门"符号化为$\neg(q \vee \neg r) \to p$。

3．列出除$\wedge$，$\vee$，$\oplus$，$\to$，$\leftrightarrow$之外的所有二元联结词的真值表。

解 共有 16 个二元联结词，记除$\wedge$，$\vee$，$\oplus$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$之外的二元联结词为$\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{11}$。

p	q	$p\Delta_1q$	$p\Delta_2q$	$p\Delta_3q$	$p\Delta_4q$	$p\Delta_5q$	$p\Delta_6q$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0

p	q	$p\Delta_7q$	$p\Delta_8q$	$p\Delta_9q$	$p\Delta_{10}q$	$p\Delta_{11}q$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1

4. 求下列公式在真值赋值$(p_1/1, p_2/1, p_3/0, p_4/0)$下的值：

(1) $p_1\vee(p_2\wedge p_3)$

(2) $(p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee\neg((p_1\vee p_2)\wedge(p_3\vee p_4))$

(3) $\neg(p_1\wedge p_2)\vee\neg p_3\vee(((\neg p_1\wedge p_2)\vee\neg p_3)\wedge\neg p_4)$

(4) $(p_2\leftrightarrow\neg p_1)\rightarrow\neg p_3\vee p_4$

(5) $(p_1\leftrightarrow p_3)\wedge(\neg p_2\rightarrow p_4)$

(6) $p_1\vee(p_2\rightarrow p_3\wedge\neg p_1)\leftrightarrow p_2\vee\neg p_4$

(7) $(p_1\leftrightarrow p_3)\wedge(\neg p_2\oplus p_4)$

解 记真值赋值$(p_1/1, p_2/1, p_3/0, p_4/0)$为 v。

(1) $v(p_1\vee(p_2\wedge p_3))=1\vee(1\wedge 0)=1$。

(2) $v((p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee\neg((p_1\vee p_2)\wedge(p_3\vee p_4)))=(1\wedge 1\wedge 0)\vee\neg((1\vee 1)\wedge(0\vee 0))=1$

(3) $v(\neg(p_1\wedge p_2)\vee\neg p_3\vee(((\neg p_1\wedge p_2)\vee\neg p_3)\wedge\neg p_4))$

$=\neg(1\wedge 1)\vee\neg 0\vee(((\neg 1\wedge 1)\vee\neg 0)\wedge\neg 0)=1$。

(4) $v((p_2\leftrightarrow\neg p_1)\rightarrow\neg p_3\vee p_4)=(1\leftrightarrow\neg 1)\rightarrow\neg 0\vee 0=1$。

(5) $v((p_1\leftrightarrow p_3)\wedge(\neg p_2\rightarrow p_4))=(1\leftrightarrow 0)\wedge(\neg 1\rightarrow 0)=0$。

(6) $v(p_1\vee(p_2\rightarrow p_3\wedge\neg p_1)\leftrightarrow p_2\vee\neg p_4)=1\vee(1\rightarrow 0\wedge\neg 1)\leftrightarrow 1\vee\neg 0=1$。

(7) $v((p_1\leftrightarrow p_3)\wedge(\neg p_2\oplus p_4))=(1\leftrightarrow 0)\wedge(\neg 1\oplus 0)=0$。

5. 用真值表判断以下公式是不是永真式、永假式、可满足式。

(1) $(p\rightarrow r)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\vee q\rightarrow r))$

⑵ $(p \to \neg p) \to \neg p$

⑶ $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to p)$

⑷ $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

⑸ $(p \wedge q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$

⑹ $\neg p \wedge \neg (p \to q)$

⑺ $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

解 ⑴，⑵，⑷，⑸，⑺是永真式，⑹是永假式，⑶是非永真的可满足式。

6. 指出满足下列公式的所有真值赋值。

⑴ $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$

⑵ $p \vee (q \wedge \neg r \wedge (p \vee q))$

⑶ $p \vee r \to \neg (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

⑷ $p \oplus (q \leftrightarrow r)$

解 ⑴ $(p/0, q/0, r/0)$，$(p/0, q/0, r/1)$，$(p/0, q/1, r/0)$，$(p/0, q/1, r/1)$，

$(p/1, q/0, r/1)$，$(p/1, q/1, r/0)$，$(p/1, q/1, r/1)$。

⑵ $(p/0, q/1, r/0)$，$(p/1, q/0, r/0)$，$(p/1, q/0, r/1)$，$(p/1, q/1, r/0)$，

$(p/1, q/1, r/1)$。

⑶ $(p/0, q/0, r/0)$，$(p/0, q/1, r/0)$。

⑷ $(p/0, q/0, r/0)$，$(p/0, q/1, r/1)$，$(p/1, q/0, r/1)$，$(p/1, q/1, r/0)$。

7. 若公式 A 既不是永真式，也不是永假式，则 A 的每个替换实例一定既不是永真式，也不是永假式。对吗？

解 不对。若 A 是非永真的可满足式，则它的替换实例中既有永真式，也有永假式，也有非永真的可满足式。

8. 用真值表证明以下等值式。

⑴

⑵

⑶

⑷

9. 用等值演算证明以下等值式。

⑴ $p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$

⑵ $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to q \wedge r$

⑶ $(p \to q) \vee (r \to q) \Leftrightarrow p \wedge r \to q$

(4) $p \to (q \to p) \Leftrightarrow \neg p \to (p \to q)$

(5) $(p \to q) \wedge (r \to q) \Leftrightarrow p \vee r \to q$

(6) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q$

解 (1) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$

(2) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow p \to q \wedge r$

(3) $(p \to q) \vee (r \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r \vee q \Leftrightarrow \neg(p \wedge r) \to q \Leftrightarrow p \wedge r \to q$

(4) $p \to (q \to p) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee p \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow \neg\neg p \vee \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \to (p \to q)$

(5) $(p \to q) \wedge (r \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg r) \vee q$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee r) \vee q \Leftrightarrow p \vee r \to q$

(6) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus (q \oplus 1)) \oplus 1 \Leftrightarrow \neg(p \oplus \neg q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q$

10. 用等值演算证明以下公式是永真式。

(1) $(q \to p) \wedge (\neg p \to q) \leftrightarrow p$

(2) $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$

(3) $(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s) \to (p \to q \vee r \vee s)$

(4) $(p \vee q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$

解 (1) $(q \to p) \wedge (\neg p \to q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow p \leftrightarrow p \Leftrightarrow 1$

(2) $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge p \wedge r \to q \wedge s$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge p \wedge (\neg r \vee s) \wedge r \to q \wedge s$

$\Leftrightarrow q \wedge p \wedge s \wedge r \to q \wedge s \Leftrightarrow 1$

(3) $(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s) \to (p \to q \vee r \vee s)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg p \vee r \vee \neg p \vee s \to (p \to q \vee r \vee s)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r \vee s \to \neg p \vee q \vee r \vee s \Leftrightarrow 1$

(4) $(p \vee q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg p \vee r \vee \neg q \vee r$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg p \vee \neg q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$

11. 用等值演算证明以下公式是永假式。

(1) $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p$

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r)$

解 (1) $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow 0$

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg q \wedge \neg r \Leftrightarrow 0$

12. 找出与下列公式等值的尽可能简单的由$\{\neg, \wedge\}$生成的公式。

13. 找出与下列公式等值的尽可能简单的由$\{\neg, \vee\}$生成的公式。

(1) $\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \rightarrow p)$

(2) $(p \rightarrow q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge q$

(3) $p \wedge q \wedge \neg p$

解 (1) $\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge (\neg\neg r \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg\neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge p)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg\neg r \Leftrightarrow \neg(p \vee q \vee \neg r)$

(2) $(p \rightarrow q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge q \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee q \vee \neg r) \vee p \vee \neg q)$

(3) $p \wedge q \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee p)$

14. 设 A 是由$\{\leftrightarrow\}$生成的公式。证明：A 是永真式当且仅当每个命题变元在 A 中出现偶数次。

证明 首先证明：若 A 是由$\{\leftrightarrow\}$生成的仅出现一个命题变元 p 的公式，则

$$A \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{若}p\text{在}A\text{中出现偶数次} \\ p & \text{若}p\text{在}A\text{中出现奇数次} \end{cases}$$

对 p 在 A 中的出现次数进行归纳。

① 若 p 在 A 中出现 1 次，即 A 为 p，显然 $A \Leftrightarrow p$。

② 若 p 在 A 中出现 2 次，即 A 为 $p \leftrightarrow p$，显然 $A \Leftrightarrow 1$。

③ 设 p 在 A 中的出现 n 次，A 为 $B \leftrightarrow C$，p 在 B，C 中的出现次数分别为 k 和 l，则 $n = k + l$，$k < n$ 且 $l < n$。若 n 为偶数, 则 k 和 l 的奇偶性相同，B 和 C 等值于同一公式，$A \Leftrightarrow 1$。若 n 为奇数, 则 k 和 l 的奇偶性不同，B 和 C 中一个等值于 p，另一个是永真式，因此

$A \Leftrightarrow p \leftrightarrow 1 \Leftrightarrow p$。

设在 A 中的出现的所有命题变元为 $p_1, \Lambda\ , p_n$，它们的出现次数分别为 $k_1, \Lambda\ , k_n$。因为

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \oplus B) \Leftrightarrow \neg(B \oplus A) \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$，并且

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow \neg(\neg(A \oplus B) \oplus C) \Leftrightarrow A \oplus B \oplus 1 \oplus C \oplus 1$$

$$\Leftrightarrow A \oplus B \oplus C \oplus 1 \oplus 1 \Leftrightarrow \neg(A \oplus \neg(B \oplus C)) \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

所以 $\leftrightarrow$ 满足交换律和结合律，存在由 $\{\leftrightarrow\}$ 生成的公式 $B_1, \Lambda\ , B_n$，使得 $A \Leftrightarrow B_1 \leftrightarrow \Lambda\ \leftrightarrow B_n$，并且 B_i 仅出现命题变元 p_i，出现次数为 k_i，$i = 1, \Lambda\ , n$。若 $k_1, \Lambda\ , k_n$ 全为偶数，则 $A \Leftrightarrow B_1 \leftrightarrow \Lambda\ \leftrightarrow B_n \Leftrightarrow 1 \oplus \Lambda\ \oplus 1 \Leftrightarrow 1$。若 $k_1, \Lambda\ , k_n$ 中有 $k_{l_1}, \Lambda\ , k_{l_m}$ 是奇数，则 $A \Leftrightarrow B_1 \leftrightarrow \Lambda\ \leftrightarrow B_n \Leftrightarrow p_{l_1} \leftrightarrow \Lambda\ \leftrightarrow p_{l_m}$，显然 A 不是永真式。

15. 设 A 是由 $\{\oplus\}$ 生成的公式。证明：A 是永假式当且仅当每个命题变元在 A 中出现偶数次。

证明　首先证明：若 A 是由 $\{\oplus\}$ 生成的仅出现一个命题变元 p 的公式，则

$$A \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & \text{若}p\text{在}A\text{中出现偶数次} \\ p & \text{若}p\text{在}A\text{中出现奇数次} \end{cases}$$

对 p 在 A 中的出现次数进行归纳。

① 若 p 在 A 中出现 1 次，即 A 为 p，显然 $A \Leftrightarrow p$。

② 若 p 在 A 中出现 2 次，即 A 为 $p \oplus p$，显然 $A \Leftrightarrow 0$。

③ 设 p 在 A 中的出现 n 次，A 为 $B \oplus C$，p 在 B, C 中的出现次数分别为 k 和 l，则 $n = k + l$，$k < n$ 且 $l < n$。若 n 为偶数, 则 k 和 l 的奇偶性相同，B 和 C 等值于同一公式，$A \Leftrightarrow 0$。若 n 为奇数, 则 k 和 l 的奇偶性不同，B 和 C 中一个等值于 p，另一个是永假式，因此 $A \Leftrightarrow p \oplus 0 \Leftrightarrow p$。

设在 A 中的出现的所有命题变元为 $p_1, \Lambda\ , p_n$，它们的出现次数分别为 $k_1, \Lambda\ , k_n$。因为 $\oplus$ 满足交换律和结合律，所以存在由 $\{\oplus\}$ 生成的公式 $B_1, \Lambda\ , B_n$，使得 $A \Leftrightarrow B_1 \oplus \Lambda\ \oplus B_n$，并且 B_i 仅出现命题变元 p_i，出现次数为 k_i，$i = 1, \Lambda\ , n$。若 $k_1, \Lambda\ , k_n$ 全为偶数，则 $A \Leftrightarrow B_1 \oplus \Lambda\ \oplus B_n \Leftrightarrow 0 \oplus \Lambda\ \oplus 0 \Leftrightarrow 0$。若 $k_1, \Lambda\ , k_n$ 中有 $k_{l_1}, \Lambda\ , k_{l_m}$ 是奇数，则 $A \Leftrightarrow B_1 \oplus \Lambda\ \oplus B_n \Leftrightarrow p_{l_1} \oplus \Lambda\ \oplus p_{l_m}$，显然 A 不是永假式。

16. 北京、上海、天津、广州四市乒乓球队比赛，三个观众猜测比赛结果。
甲说："天津第一，上海第二。"
乙说："天津第二，广州第三。"
丙说："北京第二，广州第四。"
比赛结果显示，每人猜对了一半，并且没有并列名次。
问：实际名次怎样排列？
解　用字母表示命题如下：

p_2：北京第二，q_2：上海第二，r_1：天津第一，

r_2:天津第二，s_3:广州第三，s_4:广州第四。

由已知条件列出以下方程：

甲猜对了一半：$r_1 \oplus q_2 = 1$，乙猜对了一半：$r_2 \oplus s_3 = 1$，

丙猜对了一半：$p_2 \oplus s_4 = 1$，

每个城市只能得一个名次：$r_1 \wedge r_2 = 0$，$s_3 \wedge s_4 = 0$；

没有并列名次：$p_2 \wedge q_2 = 0$，$p_2 \wedge r_2 = 0$，$r_2 \wedge q_2 = 0$。

解以上8个方程组成的方程组。

$$r_2 = r_2 \wedge 1 = r_2 \wedge (r_1 \oplus q_2) = (r_2 \wedge r_1) \oplus (r_2 \wedge q_2) = 0 \oplus 0 = 0$$

将$r_2 = 0$代入$r_2 \oplus s_3 = 1$得$s_3 = 1$，将$s_3 = 1$代入$s_3 \wedge s_4 = 0$得$s_4 = 0$，将$s_4 = 0$代入$p_2 \oplus s_4 = 1$得$p_2 = 1$，将$p_2 = 1$代入$p_2 \wedge q_2 = 0$得$q_2 = 0$，将$q_2 = 0$代入$r_1 \oplus q_2 = 1$得$r_1 = 1$。因此，天津第一，北京第二，广州第三，上海第四。

17. 某勘探队取回一块矿样，三人判断如下。
甲说："矿样不含铁，也不含铜。"
乙说："矿样不含铁，含锡。"
丙说："矿样不含锡，含铁。"
已经知道，这三人中有一个是专家，一个是老队员，一个是实习队员。化验结果表明：这块矿样只含一种金属，专家的两个判断皆对，老队员的判断一对一错，实习队员的两个判断皆错。问：这三人的身分各是什么？

解 p:矿样含铁，　　　　q:矿样含铜，　　　　r:矿样含锡。
甲说的两句话为：$\neg p$，$\neg q$
乙说的两句话为：$\neg p$，r
丙说的两句话为：$\neg r$，p
如果用一个公式表达出这三人中有一个是专家，一个是老队员，一个是实习队员，公式会非常复杂。其实我们不必完全写出这样的公式。因为矿样只含一种金属，所以$p \wedge q = 0$，$q \wedge r = 0$，$r \wedge p = 0$。甲是实习队员，即甲说的两句话都是错的，可表示为：$p \wedge q$。乙是实习队员，即乙说的两句话都是错的，可表示为：$p \wedge \neg r$。丙是实习队员，即丙说的两句话都是错的，可表示为：$r \wedge \neg p$。甲、乙、丙三人中至少有一个是实习队员，可表示为：

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) = 1$$

因为$p \wedge q = 0$，所以$(p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) = 1$，即$p \oplus r = 1$，$p$和$r$中恰好有一个为 1，因此$q = 0$。甲是老队员，即甲说的话一半对一半错，可表示为：$\neg p \oplus \neg q$。乙是老队员，即乙说的话一半对一半错，可表示为：$\neg p \oplus r$。丙是老队员，即丙说的话一半对一半错，可表示为：$\neg r \oplus p$。甲、乙、丙三人中有奇数个老队员，可表示为：

$$(\neg p \oplus \neg q) \oplus (\neg p \oplus r) \oplus (\neg r \oplus p) = 1$$

由教材上的等值式可得到

$$(\neg p \oplus \neg q) \oplus (\neg p \oplus r) \oplus (\neg r \oplus p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \oplus \neg p) \oplus (\neg r \oplus r) \oplus (\neg q \oplus p)$$

$$\Leftrightarrow 0 \oplus 1 \oplus (q \oplus 1 \oplus p) \Leftrightarrow q \oplus p$$

又知道 $q=0$，所以 $p=1$。因为 $r\wedge p=0$，所以 $r=0$。因此，甲说的话一半对一半错，甲是老队员。乙说的话全错，乙是实习队员。丙说的话全对，丙是专家。

18. 先用等值演算证明下列等值式，再用对偶定理得出新等值式。

(1) $\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow p$

(2) $(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$

(3) $q\vee\neg((\neg p\vee q)\wedge p)\Leftrightarrow 1$

解 (1) $\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\Leftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)\Leftrightarrow p$

由对偶定理得 $\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow p$。

(2) $(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\Leftrightarrow(p\vee(\neg q\wedge q))\wedge(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee\neg q)\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\Leftrightarrow p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$

由对偶定理得 $(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge q)$。

(3)

19. 设 A 是由 $\{0,1,\neg,\wedge,\vee\}$ 生成的公式，A^* 与 A 互为对偶式。

(1) 若 A 是永真式，则 A^* 是永假式。

(2) 若 A 是永假式，则 A^* 是永真式。

证明 (1) 设 A 是永真式，则 $A\Leftrightarrow 1$，由对偶定理得 $A^*=0$，因此 A^* 是永假式。

(2) 设 A 是永假式，则 $A\Leftrightarrow 0$，由对偶定理得 $A^*=1$，因此 A^* 是永真式。

20. 证明以下联结词集合是极小完全集。

(1) $\{0,\rightarrow\}$

(2) $\{\oplus,\rightarrow\}$

(3) $\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$

(4) $\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$

证明 (1) $\neg p\Leftrightarrow\neg p\vee 0\Leftrightarrow p\rightarrow 0$，因为 $\{\neg,\rightarrow\}$ 是完全集，所以 $\{0,\rightarrow\}$ 是完全集。任取由 $\{0\}$ 生成的不出现除命题变元 p 之外的命题变元的公式 A，令真值赋值 $v=(p/0)$，则 $v(A)=0$，而 $v(\neg p)=1$，因此 $\{0\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{0\}$ 不是完全集。任取由 $\{\rightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/1)$，则 $v(A)=1$，而 $v(\neg p)=0$，因此 $\{\rightarrow\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\rightarrow\}$ 不是完全集。所以 $\{\neg,\rightarrow\}$ 是极小完全集。

(2) $\neg p\Leftrightarrow p\oplus 1\Leftrightarrow p\oplus(p\rightarrow p)$，因为 $\{\neg,\rightarrow\}$ 是完全集，所以 $\{\oplus,\rightarrow\}$ 是完全集。任取由 $\{\oplus\}$ 生成的仅出现除命题变元 p 的

公式 A，令真值赋值 $v=(p/0)$，则 $v(A)=0$，而 $v(\neg p)=1$，因此 $\{\oplus\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\oplus\}$ 不是完全集。$\{\to\}$ 不是完全集。所以 $\{\oplus,\to\}$ 是极小完全集。

⑶ $\neg p \Leftrightarrow p\oplus 1 \Leftrightarrow p\oplus(p\to p)$，因为 $\{\neg,\wedge\}$ 是完全集，所以 $\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$ 是完全集。任取由 $\{\oplus,\wedge\}$ 生成的仅出现除命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/0)$，则 $v(A)=0$，而 $v(\neg p)=1$，因此 $\{\oplus,\wedge\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\oplus,\wedge\}$ 不是完全集。任取由 $\{\wedge,\leftrightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/1)$，则 $v(A)=1$，而 $v(\neg p)=0$，因此 $\{\wedge,\leftrightarrow\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\wedge,\leftrightarrow\}$ 不是完全集。$\{\oplus,\leftrightarrow\}$ 不是完全集。所以 $\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$ 是极小完全集。

⑷ $\neg p \Leftrightarrow p\oplus 1 \Leftrightarrow p\oplus(p\to p)$，因为 $\{\neg,\vee\}$ 是完全集，所以 $\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$ 是完全集。任取由 $\{\oplus,\vee\}$ 生成的仅出现除命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/0)$，则 $v(A)=0$，而 $v(\neg p)=1$，因此 $\{\oplus,\vee\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\oplus,\vee\}$ 不是完全集。任取由 $\{\vee,\leftrightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/1)$，则 $v(A)=1$，而 $v(\neg p)=0$，因此 $\{\vee,\leftrightarrow\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\vee,\leftrightarrow\}$ 不是完全集。$\{\oplus,\leftrightarrow\}$ 不是完全集。所以 $\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$ 是极小完全集。

21. 证明以下联结词集合不是完全集。

⑴ $\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$

⑵ $\{\oplus,\wedge,\vee\}$

证明 ⑴ 任取由 $\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/1)$，则 $v(A)=1$，而 $v(\neg p)=0$，因此 $\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ 不是完全集。

⑵ 任取由 $\{\oplus,\wedge,\vee\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A，令真值赋值 $v=(p/0)$，则 $v(A)=0$，而 $v(\neg p)=1$，因此 $\{\oplus,\wedge,\vee\}$ 不能定义 $\neg$。所以 $\{\oplus,\wedge,\vee\}$ 不是完全集。

22. 二元联结词 $\uparrow$（称为“与非”）和 $\downarrow$（称为“或非”）的真值表如下。

p	q	$p\uparrow q$	$p\downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

证明：

⑴ $\{\uparrow\}$ 是完全集。

⑵ $\{\downarrow\}$ 是完全集。

⑶ 若 Δ 是二元联结词且 $\{\Delta\}$ 是完全集，则 Δ 是 $\uparrow$ 或 $\downarrow$。

证明 ⑴ $\neg p \Leftrightarrow p\uparrow p$， $p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

因为 $\{\neg,\wedge\}$ 是完全集，所以 $\{\uparrow\}$ 是完全集。

(2) $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$， $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

因为$\{\neg, \vee\}$是完全集，所以$\{\downarrow\}$是完全集。

(3) 若$0\Delta 0=0$或$1\Delta 1=1$，则$\neg$不能由$\{\Delta\}$定义。因此，$0\Delta 0=1$且$1\Delta 1=0$。

若$0\Delta 1 \neq 1\Delta 0$，则Δ的真值表的最后一列有偶数个 1，真值表最后一列有奇数个 1 的$\wedge$不能由$\{\Delta\}$定义。所以，$0\Delta 1=1\Delta 0$。若$0\Delta 1=1\Delta 0=1$，则Δ是$\uparrow$。若$0\Delta 1=1\Delta 0=0$，则Δ是$\downarrow$。

23. 三元联结词Δ的真值表如下。

p	q	r	$\Delta(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

证明$\{\Delta\}$是极小完全集。

证明 $p \downarrow q \Leftrightarrow \Delta pqq$，因为$\{\downarrow\}$是完全集，所以$\{\Delta\}$是极小完全集。

24. 在下列公式中，哪些是析取范式，哪些是合取范式?

$$p,\ p \vee q,\ (p \vee q) \wedge r,\ p \wedge \neg r,\ p \vee \neg p,\ ((p \vee q) \wedge \neg q) \vee r$$

解 p，$p \vee q$，$p \wedge \neg r$，$p \vee \neg p$是析取范式，p，$p \vee q$，$(p \vee q) \wedge r$，$p \wedge \neg r$，$p \vee \neg p$是合取范式。

25. 在下列公式中，哪些是关于p，q，r的主析取范式，哪些是关于p，q，r的主合取范式？

$p \vee q \vee r$，$p \wedge \neg q \wedge r$，$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$，$p \vee (q \wedge r)$，$(p \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r)$

解 $p \wedge \neg q \wedge r$是关于p，q，r的主析取范式，$p \vee q \vee r$是关于p，q，r的主合取范式。

26. 是否有这样的公式，它既是主合取范式，又是主析取范式？如果有，举出一例。

解 有。p既是关于p的主析取范式，又是关于p的主合取范式。

27. 求下列公式的主范式，进而判断其是否永真式、永假式、可满足式。

(1) $\neg p \wedge q \to r$

(2) $(p \to q) \to r$

(3) $\neg p \vee \neg q \to (p \leftrightarrow \neg q)$

(4) $p \vee (p \to q \vee (\neg q \to r))$

(5) $(p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to \neg q \wedge \neg r)$

(6) $p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

解 (1) $\neg p \wedge q \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \vee \neg q \vee r$

$\neg p \wedge q \to r$的主合取范式是$p \vee \neg q \vee r$，包含一个极大项，因此它是非永真的可满足式。

(2) $(p \to q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$(p \to q) \to r$ 的主合取范式是 $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$，包含了三个极大项，因此它是非永真的可满足式。

(3) $\neg p \vee \neg q \to (p \leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge p \vee q \Leftrightarrow p \vee q$

$\neg p \vee \neg q \to (p \leftrightarrow \neg q)$ 的主合取范式为 $p \vee q$，包含了一个极大项，因此它是非永真的可满足式。

(4) $p \vee (p \to q \vee (\neg q \to r)) \Leftrightarrow p \vee (\neg p \vee q \vee (\neg\neg q \vee r)) \Leftrightarrow 1$

$p \vee (p \to q \vee (\neg q \to r))$ 的主合取范式为 1，不包含任何极大项，因此它是永真式。

(5) $(p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to \neg q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$(p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to \neg q \wedge \neg r)$ 的主析取范式为 $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$，包含了两个极小项，因此它是非永真的可满足式。

(6) $p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$ 的主合取范式为 $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$，包含了所有的四个极大项，因此它是永假式。

28. 用主范式证明下列等值式。

(1) $(p \to q) \to p \wedge q \Leftrightarrow (\neg p \to p) \wedge (r \to p)$

(2) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to q \wedge r$

解 (1) $(p \to q) \to p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)) \vee (p \wedge q \wedge (\neg r \vee r))$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$$(\neg p \to p) \wedge (r \to p) \Leftrightarrow (\neg\neg p \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$$

$\Leftrightarrow p \wedge (p \vee \neg r) \Leftrightarrow p \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$(p \to q) \to p \wedge q$ 和 $(\neg p \to p) \wedge (r \to p)$ 等值于同一个关于 p，q，r 的主析取范式

$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$，因此，

$$(p \to q) \to p \wedge q \Leftrightarrow (\neg p \to p) \wedge (r \to p)。$$

(2) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

$$p \to q \wedge r \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

$(p \to q) \wedge (p \to r)$ 和 $p \to q \wedge r$ 的主合取范式相同，所以，

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to q \wedge r。$$

29. 判断以下关系是否成立，并说明理由。

(1) $p \vee q, \neg p \models q$

(2) $p \vee q$，，$q \models p$

(3) $p_1 \to q_1, p_2 \to q_2, p_1 \wedge p_2 \models q_1 \wedge q_2$

(4) $p \to q, q \to p \models p \vee q$

(5) $p \wedge q \to r, p \vee q \to \neg r \models p \wedge q \wedge r$

解 (1) 若真值赋值 v 使得 $v(p \vee q) = v(\neg p) = 1$，则 $v(q) = 1$。所以 $p \vee q, \neg p \models q$。

(2) 真值赋值 $v = (p/0, q/1)$ 使得 $v(p \vee q) = v(p \to q) = v(q) = 1$，但 $v(p) = 0$，所以 $p \vee q, p \to q, q \not\models p$。

(3) 若真值赋值 v 使得 $v(p_1 \to q_1) = v(p_2 \to q_2) = v(p_1 \wedge p_2) = 1$，则 $v(p_1) = v(p_2) = 1$，因而 $v(q_1) = v(q_2) = 1$，

$v(q_1 \wedge q_2)=1$。所以 $p_1 \to q_1$，$p_2 \to q_2$，$p_1 \wedge p_2 \models q_1 \wedge q_2$。

(4) 真值赋值 $v=(p/0, q/0)$ 使得 $v(p \to q)=v(q \to p)=1$，但 $v(p \vee q)=0$。所以 $p \to q$，$q \to p \not\models p \vee q$。

(5) 真值赋值 $v=(p/0, q/1, r/0)$ 使得 $v(p \wedge q \to r)=v(p \vee q \to \neg r)=1$，但 $v(p \wedge q \wedge r)=0$。所以 $p \wedge q \to r$，$p \vee q \to \neg r \not\models p \wedge q \wedge r$。

30. 判断以下公式组成的集合是否可满足，并说明理由。

(1) $(p \vee q) \vee (s \wedge \neg r)$，$\neg(s \wedge \neg r)$

(2) p_1，$\neg p_1 \vee p_2$，$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$，…，$\neg p_1 \vee \Lambda \vee \neg p_n \vee p_{n+1}$，…

(3) $p \vee q$，$\neg p \vee \neg q$，$p \to q$

解 (1) 可满足。真值赋值 $(p/1, q/0, r/1, s/0)$ 满足它。

(2) 可满足。若真值赋值 v 使得 $v(p_i)=1, i=1, 2, \Lambda$，则 v 满足它。

(3) 可满足。真值赋值 $(p/0, q/1)$ 满足它。

31. 设 A, B, C 是任意公式。$A \vee B \models C$ 当且仅当 $A \models C$ 且 $B \models C$。

证明 1 （$\Rightarrow$）设 $A \vee B \models C$。任取满足 A 的真值赋值 v，则 $v(A \vee B)=1$，因为 $A \vee B \models C$，所以 $v(C)=1$。这表明 $A \models C$。

任取满足 B 的真值赋值 v，则 $v(A \vee B)=1$，因为 $A \vee B \models C$，所以 $v(C)=1$。这表明 $B \models C$。

（$\Leftarrow$）设 $A \models C$ 且 $B \models C$。任取满足 $A \vee B$ 的真值赋值 v，则 $v(A)=1$ 或 $v(B)=1$。

① 若 $v(A)=1$，因为 $A \models C$，所以 $v(C)=1$。

② 若 $v(B)=1$，因为 $B \models C$，所以 $v(C)=1$。

因此，$A \vee B \models C$。

证明 2 $A \vee B \to C \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

$A \vee B \models C$

当且仅当 $A \vee B \to C$ 是永真式

当且仅当 $(A \to C) \wedge (B \to C)$ 是永真式

当且仅当 $A \to C$ 和 $B \to C$ 都是永真式

当且仅当 $A \models C$ 且 $B \models C$

32. 设 Γ_1 和 Γ_2 是公式集合，B 是公式，$\Gamma_2 \models B$，对于 Γ_2 中每个公式 A，$\Gamma_1 \models A$。证明：$\Gamma_1 \models B$。

证明 任取满足 Γ_1 的真值赋值 v。对于 Γ_2 中每个公式 A，因为 $\Gamma_1 \models A$，所以 $v(A)=1$。这表明 v 满足 Γ_2。又因为 $\Gamma_2 \models B$，所以

$v(B)=1$。因此，$\Gamma_1 \models B$。

33. 公式集合Γ不可满足当且仅当$\Gamma \models 0$。

证明 （$\Rightarrow$）设$\Gamma \not\models 0$，则存在真值赋值v满足Γ且$v(0)=0$，因此Γ可满足。

（$\Leftarrow$）设$\Gamma \models 0$。若Γ可满足，有真值赋值v满足Γ，由$\Gamma \models 0$得出$v(0)=1$，这是不可能的。因此，Γ不可满足。

34. 设 n 是正整数，$\Gamma = \{p_1 \to q_1, \Lambda, p_n \to q_n, p_1 \vee \Lambda \vee p_n\} \cup \{\neg(q_i \wedge q_j) \mid 1 \le i < j \le n\}$。证明：$\Gamma \models (q_1 \to p_1) \wedge \Lambda \wedge (q_n \to p_n)$。

证明 设真值赋值v满足Γ，则$v(p_1 \vee \Lambda \vee p_n)=1$，存在$i \le n$使$v(p_i)=1$。因为$v(p_i \to q_i)=1$，所以$v(q_i)=1$。若$1 \le j < i$，因为$v(\neg(q_j \wedge q_i))=1$，因此$v(q_j)=0$。若$i < j \le n$，因为$v(\neg(q_i \wedge q_j))=1$，因此$v(q_j)=0$。所以$v((q_1 \to p_1) \wedge \Lambda \wedge (q_n \to p_n))=1$。

第二章　谓词逻辑

习题与解答

1. 将下列命题符号化：

⑴ 所有的火车都比某些汽车快。

⑵ 任何金属都可以溶解在某种液体中。

⑶ 至少有一种金属可以溶解在所有液体中。

⑷ 每个人都有自己喜欢的职业。

⑸ 有些职业是所有的人都喜欢的。

解　⑴ 取论域为所有交通工具的集合。令$T(x): x$是火车，　$C(x): x$是汽车，　$F(x,y): x$比y跑得快。

“所有的火车都比某些汽车快”可以符号化为$\forall x(T(x) \to \exists y(C(y) \land F(x,y)))$。

⑵ 取论域为所有物质的集合。令$M(x): x$是金属，　$L(x): x$是液体，　$D(x,y): x$可以溶解在y中。

“任何金属都可以溶解在某种液体中”　可以符号化为$\forall x(M(x) \to \exists y(L(y) \land D(x,y)))$。

⑶ 论域与谓词与⑵同。“至少有一种金属可以溶解在所有液体中”　可以符号化为$\exists x(M(x) \land \forall y(L(y) \to D(x,y)))$。

⑷ 取论域为所有事物的集合。令

$$M(x): x\text{是人}，\quad J(x): x\text{是职业}，\quad L(x,y): x\text{喜欢}y。$$

“每个人都有自己喜欢的职业”　可以符号化为$\forall x(M(x) \to \exists y(J(y) \land L(x,y)))$

⑸论域与谓词与⑷同。“有些职业是所有的人都喜欢的”可以符号化为$\exists x(J(x) \land \forall y(M(y) \to L(y,x)))$。

2. 取论域为正整数集，用函数＋（加法），●（乘法）和谓词＜，＝将下列命题符号化：

⑴ 没有既是奇数，又是偶数的正整数。

⑵ 任何两个正整数都有最小公倍数。

⑶ 没有最大的素数。

⑷ 并非所有的素数都不是偶数。

解　先引进一些谓词如下：

$D(x,y): x$能被y整除，$D(x,y)$可表示为$\exists v(v \bullet x = y)$。

$J(x): x$是奇数，$J(x)$可表示为$\neg\exists v(v \bullet 2 = x)$。

$E(x): x$是偶数，$E(x)$可表示为$\exists v(v \bullet 2 = x)$。

$P(x): x$是素数，$P(x)$可表示为$\neg(x=1) \land \forall u(\exists v(v \bullet u = x) \leftrightarrow u = 1 \lor u = x)$。

⑴ “没有既是奇数，又是偶数的正整数”可表示为$\neg\exists x(J(x) \land E(x))$，

并可进一步符号化为$\neg\exists x(\neg\exists v(v \bullet 2 = x) \land \exists v(v \bullet 2 = x))$。

⑵ “任何两个正整数都有最小公倍数”可表示为

$\forall x \forall y \exists z(D(z,x) \land D(z,y) \land \forall u(D(u,x) \land D(u,y) \to z < u \lor z = u))$，

并可进一步符号化为

$\forall x \forall y \exists z(\exists v(v \bullet x = z) \land \exists v(v \bullet y = z) \land \forall u(\exists v(v \bullet x = u) \land \exists v(v \bullet y = u) \to z < u \lor z = u))$ ⑶ “没有最大的素数”可表

示为$\neg\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\to y<x\vee y=x))$，

并可进一步符号化为

$$\neg\exists x(\neg(x=1)\wedge\forall u(\exists v(v\bullet u=x)\leftrightarrow u=1\vee u=x)\wedge\forall y(\neg(y=1)\wedge\forall u(\exists v(v\bullet u=y)\leftrightarrow u=1\vee u=y)\to y<x\vee y=x))$$

⑷ “并非所有的素数都不是偶数”可表示为$\neg\forall x(P(x)\to\neg E(x))$，并可进一步符号化为

$$\neg\forall x(\neg(x=1)\wedge\forall u(\exists v(v\bullet u=x)\to\neg\exists v(v\bullet 2=x))$$

3. 取论域为实数集合，用函数＋，－（减法）和谓词＜，＝将下列命题符号化：

⑴ 没有最大的实数。

⑵ 任何两不同的实数之间必有另一实数。

⑶ 函数$f(x)$在点a处连续。

⑷ 函数$f(x)$恰有一个根。

⑸ 函数$f(x)$是严格单调递增函数。

解 ⑴ “没有最大的实数”符号化为$\neg\exists x\forall y(y<x\vee y=x)$。

⑵ “任何两不同的实数之间必有另一实数”符号化为$\forall x\forall y(x<y\to\exists z(x<z\wedge z<y))$。

⑶“函数$f(x)$在点a处连续”的定义是：

任给$\varepsilon>0$，总可以找到$\delta>0$，使得只要$|x-a|<\delta$就有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。

“函数$f(x)$在点a处连续”符号化为

$$\forall\varepsilon(0<\varepsilon\to\exists\delta(0<\delta\wedge\forall x(a-\delta<x\wedge x<a+\delta\to f(a)-\varepsilon<f(x)\wedge f(x)<f(a)+\varepsilon)))$$

⑷ “函数$f(x)$恰有一个根”符号化为$\exists x(f(x)=0\wedge\forall y(f(y)=0\to y=x))$。

⑸ “函数$f(x)$是严格单调递增函数”符号化为$\forall x\forall y(x<y\to f(x)<f(y))$。

4. 指出下列公式中变元的约束出现和自由出现，并对量词的每次出现指出其辖域。

⑴ $\forall x(P(y,x)\to P(x,a))$

⑵ $\forall xP(x)\to\forall zQ(x,y)$

⑶ $\forall x(P(x)\wedge R(x))\to\forall xP(x)\wedge Q(x)$

⑷ $\forall y(P(f(x,y),x)\to\forall xP(z,g(x,y)))$

⑸ $\forall x(P(x)\to Q(x)\wedge\exists xR(x))\wedge R(x)$

5. 归纳证明：若t，t'是项，则$t^{x}_{t'}$也是项。

证明 ① 若t是x，则$t^{x}_{t'}$是t'，$t^{x}_{t'}$是项。

② 若 t 是不同于 x 的变元 y，则 $t_{t'}^{x}$ 仍是 y，$t_{t'}^{x}$ 是项。

③若 t 是常元 a，则 $t_{t'}^{x}$ 仍是 a，$t_{t'}^{x}$ 是项。

④若 t 是 $f(t_1,\Lambda,t_n)$，则 $t_{t'}^{x}$ 是 $f((t_1)_{t'}^{x},\Lambda,(t_n)_{t'}^{x})$，由归纳假设知 $(t_1)_{t'}^{x},\Lambda,(t_n)_{t'}^{x}$ 都是项，所以 $t_{t'}^{x}$ 是项。

6. 归纳证明：若 t 是项，A 是公式，则 A_t^x 也是公式。

证明 ①若 A 是 $P(t_1,\Lambda,t_n)$，则 A_t^x 是 $P((t_1)_t^x,\Lambda,(t_n)_t^x)$，由上题知 $(t_1)_t^x,\Lambda,(t_n)_t^x$ 都是项，所以 A_t^x 是公式。

②若 A 是 $\neg B$，则 A_t^x 是 $\neg B_t^x$，由归纳假设知 B_t^x 是公式，所以 A_t^x 是公式。

③若 A 是 $B \to C$，则 A_t^x 是 $B_t^x \to C_t^x$，由归纳假设知 B_t^x 和 C_t^x 都是公式，所以 A_t^x 是公式。

④若 A 是 $\forall xB$，则 A_t^x 仍是 A，A_t^x 是公式。

⑤若 A 是 $\forall yB$，其中 y 是不同于 x 的变元，则 A_t^x 是 $\forall yB_t^x$，由归纳假设知 B_t^x 是公式，所以 A_t^x 是公式。

7. 给定解释 I 和 I 中赋值 v 如下：

$$D_I=\{1,2\},\ a^I=1,\ b^I=2,\ f^I(1)=2,\ f^I(2)=1$$

$$P^I(1,1)=P^I(1,2)=1,\ P^I(2,1)=P^I(2,2)=0,\ v(x)=1,\ v(y)=1$$

计算下列公式在解释 I，赋值 v 下的真值。

(1) $P(a,f(x))\wedge P(x,f(b))\wedge P(f(y),x)$

(2) $\forall x\exists yP(y,x)$

(3) $\forall x\forall y(P(x,y)\to P(f(x),f(y)))$

解 (1) $I(P(a,f(x))\wedge P(x,f(b))\wedge P(f(y),x))(v)$

$$=P^I(a^I,f^I(v(x)))\wedge P^I(v(x),f^I(b^I))\wedge P^I(f^I(v(y)),v(x))$$

$$=P^I(1,f^I(1))\wedge P^I(1,f^I(2))\wedge P^I(f^I(1),1)$$

$$=P^I(1,2)\wedge P^I(1,1)\wedge P^I(2,1)=1\wedge 1\wedge 0=0$$

(2) $I(\forall x\exists yP(y,x))(v)$

$$=I(\exists yP(y,x))(v[x/1])\wedge I(\exists yP(y,x))(v[x/2])$$

$$=(I(P(y,x))(v[x/1][y/1])\vee I(P(y,x))(v[x/1][y/2]))$$

$$\wedge(I(P(y,x))(v[x/2][y/1])\vee I(P(y,x))(v[x/2][y/2]))$$

$$=(P^I(1,1)\vee P^I(2,1))\wedge(P^I(1,2)\vee P^I(2,2))$$

$$=(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)=1$$

⑶ $I(\forall x\forall y(P(x,y)\to P(f(x),f(y))))(v)$

$=(P^I(1,1)\to P^I(f^I(1),\ f^I(1)))\wedge(P^I(1,2)\to P^I(f^I(1),\ f^I(2)))$

$\wedge(P^I(2,1)\to P^I(f^I(2),\ f^I(1)))\wedge(P^I(2,2)\to P^I(f^I(2),\ f^I(2)))$

$=(P^I(1,1)\to P^I(2,2))\wedge(P^I(1,2)\to P^I(2,1))\wedge(P^I(2,1)\to P^I(1,2))\wedge(P^I(2,2)\to P^I(1,1))$

$=(1\to 0)\wedge(1\to 0)\wedge(0\to 1)\wedge(0\to 1)=0\wedge 0\wedge 1\wedge 1=0$

7. 给定解释 I 如下：$D_I=\{a,b\}$， $P^I(a,a)=P^I(b,b)=1$， $P^I(a,b)=P^I(b,a)=0$

判断 I 是不是以下语句的模型。

⑴ $\forall x\exists yP(x,y)$

⑵ $\forall x\forall yP(x,y)$

⑶ $\exists x\forall yP(x,y)$

⑷ $\exists x\exists y\neg P(x,y)$

⑸ $\forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x))$

⑹ $\forall xP(x,x)$

解 ⑴ $I(\forall x\exists yP(x,y))$

$=(P^I(a,a)\vee P^I(a,b))\wedge(P^I(b,a)\vee P^I(b,b))=(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)=1$

⑵ $I(\forall x\forall yP(x,y))$

$=P^I(a,a)\wedge P^I(a,b)\wedge P^I(b,a)\wedge P^I(b,b)=1\wedge 0\wedge 0\wedge 1=0$

⑶ $I(\exists x\forall yP(x,y))$

$=(P^I(a,a)\wedge P^I(a,b))\vee(P^I(b,a)\wedge P^I(b,b))=(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=0$

⑷ $I(\exists x\exists y\neg P(x,y))$

$=\neg P^I(a,a)\vee\neg P^I(a,b)\vee\neg P^I(b,a)\vee\neg P^I(b,b)=0\vee 1\vee 1\vee 0=1$

⑸ $I(\forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x)))$

$=(P^I(a,a)\to P^I(a,a))\wedge(P^I(a,b)\to P^I(b,a))$

$\wedge(P^I(b,a)\to P^I(a,b))\wedge(P^I(b,b)\to P^I(b,b))$

$=(1\to 1)\wedge(0\to 0)\wedge(0\to 0)\wedge(1\to 1)=1$

⑹ $I(\forall xP(x,x))=P^I(a,a)\wedge P^I(b,b)=1\wedge 1=1$

9. 写出一个语句 A，使得 A 有模型，并且 A 的每个模型的论域至少有三个元素。

解　语句 A 为 $\forall x\neg P(x,x)\wedge P(a,b)\wedge P(b,c)\wedge P(c,a)$。给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}\text{为自然数集合，}\quad P^{I'}(x,y)=1\text{当且仅当}x<y\text{，}\quad a^{I'}=1\text{，}b^{I'}=2\text{，}c^{I'}=3$$

则 I' 是 A 的模型，A 有模型。

任取满足语句 A 的解释 I，则 $P^I(a^I,b^I)=P^I(b^I,c^I)=P^I(c^I,a^I)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，所以 a^I，b^I，c^I

是论域 D_I 中三个不同元素，论域 D_I 中至少有三个元素。

10. 写出一个语句 A，使得 A 有模型，并且 A 的每个模型的论域有无穷多个元素。

解　语句 A 为 $\forall x\neg P(x,x)\wedge\forall x\forall y(P(x,y)\wedge P(y,z)\to P(x,z))\wedge\forall x\exists yP(x,y)$。给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}\text{为自然数集合，}\quad P^{I'}(x,y)=1\text{当且仅当}x<y$$

则 I' 是 A 的模型，A 有模型。

任取满足语句 A 的解释 I，取 $d_1\in D_I$，因为 $I(\forall x\exists yP(x,y))=1$，所以有 $d_2\in D_I$ 使得 $P^I(d_1,d_2)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，故 $d_1\neq d_2$。因为 $I(\forall x\exists yP(x,y))=1$，所以有 $d_3\in D_I$ 使得 $P^I(d_2,d_3)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，故 $d_3\neq d_2$。因为 $I(\forall x\forall y(P(x,y)\wedge P(y,z)\to P(x,z)))=1$，所以 $P^I(d_1,d_3)=1$，故 $d_3\neq d_1$。因此，d_1，d_2，d_3 是论域中的三个不同元素。这个过程可以永远进行下去，得到 d_1,d_2,d_3,Λ 因此，论域中必然有无穷多个元素。

11. 判断以下公式是不是永真式、永假式、可满足式，并说明理由。

⑴ $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\vee Q(x))$

⑵ $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

⑶ $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

⑷ $\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y)$

⑸ $(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$

⑹ $(\exists xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$

⑺ $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$

解　⑴ $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\vee Q(x))$ 是永真式。若解释 I 使得 $I(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))=1$，则 $I(\exists xP(x))=1$ 或 $I(\exists xQ(x))=1$。

① 若 $I(\exists xP(x))=1$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)=1$，$P^I(d)\vee Q^I(d)=1$。

② 若 $I(\exists xQ(x))=1$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $Q^I(d)=1$，$P^I(d)\vee Q^I(d)=1$。

因此，$I(\exists x(P(x)\vee Q(x)))=1$。

⑵ $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ 是非永真的可满足式。给定解释 I 如下。

$$D_I=\{d\},\quad P^I(d)=1,\quad Q^I(d)=1$$

则 $I(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=1$。

给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}=\{a,b\},\ P^{I'}(a)=1,\ P^{I'}(b)=0,\ Q^{I'}(a)=0,\ Q^{I'}(b)=1$$

则 $I'(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=0$。

⑶ $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$ 是非永真的可满足式。给定解释 I 如下。

$$D_I=\{d\},\quad P^I(d)=1,\quad Q^I(d)=1$$

则 $I(\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=1$。

给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}=\{a,b\},\ P^{I'}(a)=1,\ P^{I'}(b)=0,\ Q^{I'}(a)=0,\ Q^{I'}(b)=1$$

则 $I'(\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=0$。

⑷ $\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y)$ 是非永真的可满足式。给定解释 I 如下。

$$D_I=\{d\},\quad P^I(d,d)=1$$

则 $I(\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y))=1$。

给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}=\{a,b\},\ P^{I'}(a,a)=P^{I'}(b,b)=1,\ P^{I'}(a,b)=P^{I'}(b,a)=0$$

则 $I'(\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y))=0$。

⑸ $(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$ 是非永真的可满足式。给定解释 I 如下。

$$D_I=\{d\},\quad P^I(d)=1,\quad Q^I(d)=1$$

则 $I((\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x)))=1$。

给定解释 I' 如下。

$$D_{I'}=\{a,b\},\ P^{I'}(a)=1,\ P^{I'}(b)=0,\ Q^{I'}(a)=0,\ Q^{I'}(b)=1$$

则 $I'((\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$。

⑹ $(\exists xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$ 是永真式。若解释 I 使得 $I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)\to Q^I(d)=0$，因此 $P^I(d)=1$ 且 $Q^I(d)=0$，$I(\exists xP(x))=1$ 且 $I(\forall xQ(x))=0$，$I((\exists xP(x)\to\forall xQ(x)))=0$。

(7) $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$ 是永真式。若解释 I 使得 $I((\exists xP(x)\to\exists xQ(x)))=0$，则 $I(\exists xP(x))=1$ 且 $I(\exists xQ(x))=0$。存在 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)=1$，又因为 $I(\exists xQ(x))=0$，所以 $Q^I(d)=0$， $P^I(d)\to Q^I(d)=0$。因此，$I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$。

12. 设 A, B 是任意公式，证明以下公式是永真式。

(1) $A_t^x\to\exists xA$，其中项 t 对于 A 中的 x 是可代入的。

(2) $\neg\forall xA\leftrightarrow\exists x\neg A$

(3) $\neg\exists xA\leftrightarrow\forall x\neg A$

(4) $\exists x(A\wedge B)\to\exists xA\wedge\exists xB$

(5) $\forall xA\vee\forall xB\to\forall x(A\vee B)$

(6) $\forall x(A\to B)\to(A\to\forall xB)$，其中 x 不是 A 的自由变元。

解 (1) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，若 $I(A_t^x)(v)=1$，则 $I(A_t^x)(v)=I(A)(v[x/I(t)(v)])=1$，所以 $I(\exists xA)(v)=1$。这表明 $A_t^x\to\exists xA$ 是永真式。

(2) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，

$I(\neg\forall xA)(v)=1$

当且仅当 $I(\forall xA)(v)=0$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=0$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(\neg A)(v[x/d])=1$

当且仅当 $I(\exists x\neg A)(v)=1$

这表明 $\neg\forall xA\leftrightarrow\exists x\neg A$ 是永真式。

(3) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，

$I(\neg\exists xA)(v)=0$

当且仅当 $I(\exists xA)(v)=1$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=1$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(\neg A)(v[x/d])=0$

当且仅当 $I(\forall x\neg A)(v)=0$

这表明 $\neg\exists xA\leftrightarrow\forall x\neg A$ 是永真式。

(4) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，若 $I(\exists x(A\wedge B))(v)=1$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A\wedge B)(v[x/d])=1$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=1$，$I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=1$，$I(\exists xA\wedge\exists xB)(v)=1$。这表明 $\exists x(A\wedge B)\to\exists xA\wedge\exists xB$ 是永真式。

(5) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，若 $I(\forall x(A\vee B))(v)=0$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A\vee B)(v[x/d])=0$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=0$，$I(\forall xA\vee\forall xB)(v)=0$。这表明 $\forall xA\vee\forall xB\to\forall x(A\vee B)$ 是永真式。

(6) 任取解释 I 和 I 中赋值 v，若 $I(\forall x(A\to B))(v)=I(A)(v)=1$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=1$，因为 x 不是 A 的自由变元，所以 $I(A)(v[x/d])=I(A)(v)=1$，因此 $I(B)(v[x/d])=1$，$I(\forall xB)(v)=1$。这表明 $\forall x(A\to B)\to(A\to\forall xB)$ 是永真式。

13. 设 A_1 是公式 A 的闭包，A_2 是 $\exists x_1\Lambda\ \exists x_n A$，其中 $\mathrm{Var}(A)=\{x_1,\Lambda\ ,x_n\}$。证明：

(1) A 是永真式当且仅当 A_1 是永真式；

(2) A 是可满足式当且仅当 A_2 是可满足式。

证明 (1)（$\Rightarrow$）首先证明：若 A 是永真式，则 $\forall xA$ 是永真式。设 A 是永真式。任取解释 I 和 I 中赋值 v，任取 $d\in D_I$，因为 $v[x/d]$ 也是 I 中赋值，所以 $I(A)(v[x/d])=1$，$I(\forall xA)(v)=1$。$\forall xA$ 是永真式。若 A 是永真式，则 $\forall x_n A$ 是永真式，⋯，$\forall x_1\Lambda\ \forall x_n A$ 是永真式。

（$\Leftarrow$）因为 $\forall x_1\Lambda\ \forall x_n A\to A$ 是永真式，所以若 $\forall x_1\Lambda\ \forall x_n A$ 是永真式，则 A 是永真式。

(2) （$\Rightarrow$）因为 $A\to\exists x_1\Lambda\ \exists x_n A$ 是永真式，所以若解释 I 和 I 中赋值 v 满足 A，则 I 和 v 满足 $\exists x_1\Lambda\ \exists x_n A$。

（$\Leftarrow$）若解释 I 和 I 中赋值 v 满足 $\exists x_1\Lambda\ \exists x_n A$，则有 $d_1,\Lambda\ ,d_n\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x_1/d_1,\Lambda\ ,x_n/d_n])=1$，$I$ 和 I 中赋值 $v[x_1/d_1,\Lambda\ ,x_n/d_n]$ 满足 A。

14. 判断以下等值式是否成立，并说明理由。

(1) $\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$

(2) $\forall x(P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$

(3) $\forall xP(x)\Leftrightarrow P(x)$

(4) $\forall x\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)$

(5) $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)$

(6) $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))\Leftrightarrow\exists xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)$

解 (1) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=0,\quad P^I(b)=1,\quad Q^I(a)=1,\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x)))=0$ 且 $I(\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x))=1$。

(2) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=0,\quad P^I(b)=1,\quad Q^I(a)=1,\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$ 且 $I(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))=1$。

(3) 不成立。取解释 I 和 I 中赋值 v 下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=0,\quad P^I(b)=1,\quad v(x)=b$$

则 $I(\forall xP(x))(v)=0$ 且 $I(P(x))(v)=1$。

(4) 成立。任取解释 I 和 I 中赋值 v，因为 x 不是 $\forall xP(x)$ 中的自由变元，所以对于每个 $d\in D_I$，$I(\forall xP(x))(v[x/d])=I(\forall xP(x))(v)$。

$I(\forall x\forall xP(x))(v)=1$

当且仅当对于每个 $d\in D_I$，$I(\forall xP(x))(v[x/d])=1$

当且仅当 $I(\forall xP(x))(v)=1$

(5) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=0,\quad P^I(b)=1,\quad Q^I(a)=1,\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)))=0$ 且 $I(\forall xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))=1$。

(6) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=1,\quad P^I(b)=0,\quad Q^I(a)=Q^I(b)=1$$

则 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)))=0$ 且 $I(\exists xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))=1$。

15. 设 A, B 是任意公式，证明以下等值式。

(1) $\exists xA\Leftrightarrow\exists yA_y^x$，其中 y 在 A 中不出现。

(2) $\exists x(A\to B)\Leftrightarrow\forall xA\to\exists xB$

(3) $\forall x\forall y(A\vee B)\Leftrightarrow\forall xA\vee\forall yB$，其中 x 不是 B 的自由变元，y 不是 A 的自由变元。

(4) $\exists x\exists y(A\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA\wedge\exists yB$，其中 x 不是 B 的自由变元，y 不是 A 的自由变元。

(5) $\exists x\forall y(A\to B)\Leftrightarrow\forall xA\to\forall yB$，其中 x 不是 B 的自由变元，y 不是 A 的自由变元。

(6) $\forall x\forall yA\Leftrightarrow\forall y\forall xA$

证明 (1) $\exists xA\Leftrightarrow\neg\forall x\neg A\Leftrightarrow\neg\forall y\neg A_y^x\Leftrightarrow\exists yA_y^x$

⑵ $\exists x(A\to B)\Leftrightarrow\exists x(\neg A\vee B)\Leftrightarrow\exists x\neg A\vee\exists xB\Leftrightarrow\neg\forall xA\vee\exists xB\Leftrightarrow\forall xA\to\exists xB$

⑶ $\forall x\forall y(A\vee B)\Leftrightarrow\forall x(A\vee\forall yB)\Leftrightarrow\forall xA\vee\forall yB$

⑷ $\exists x\exists y(A\wedge B)\Leftrightarrow\exists x(A\wedge\exists yB)\Leftrightarrow\exists xA\wedge\exists yB$

⑸ $\exists x\forall y(A\to B)\Leftrightarrow\exists x(A\to\forall yB)\Leftrightarrow\forall xA\to\forall yB$

⑹ 任取解释 I 和 I 中赋值 v，

$$I(\forall x\forall yA)(v)=0$$

当且仅当有 $d\in D_I$ 使得 $I(\forall yA)(v[x/d])=0$

当且仅当有 $d,c\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d][y/c])=0$

当且仅当有 $d,c\in D_I$ 使得 $I(A)(v[y/c][x/d])=0$

当且仅当有 $c\in D_I$ 使得 $I(\forall xA)(v[y/c])=0$

当且仅当 $I(\forall y\forall xA)(v)=0$

16. 判断以下逻辑推论关系是否成立，并说明理由。

⑴ $\forall x(P(x)\vee Q(x))\models\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

⑵ $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\models\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

⑶ $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall xQ(x))\models\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$

⑷ $\forall x(P(x)\to\forall xQ(x))\models\forall x(P(x)\to Q(x))$

⑸ $\exists x(P(x)\to Q(x)),\exists xP(x)\models\exists xQ(x)$

⑹ $\exists x\exists yP(x,y)\models\exists xP(x,x)$

解 (1) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=0，\quad P^I(b)=1，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\vee Q(x)))=1$ 且 $I(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=0$。这表明 $\forall x(P(x)\vee Q(x))\not\models\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$。

⑵ 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=0，\quad P^I(b)=1，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))=1$ 且 $I(\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=0$。这表明 $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\not\models\exists x(P(x)\wedge Q(x))$。

⑶ 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=P^I(b)=0，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)))=1$ 且 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x)))=0$。这表明 $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall xQ(x))\not\models\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$。

(4) 若解释 I 使得 $I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$，则有 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)\to Q^I(d)=0$，$P^I(d)=1$ 且 $Q^I(d)=0$，$I(\forall xQ(x))=0$，$I(\forall x(P(x)\to\forall xQ(x)))=0$。这表明 $\forall x(P(x)\to\forall xQ(x))\models\forall x(P(x)\to Q(x))$。

(5) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a)=1,\quad P^I(b)=0,\quad Q^I(a)=Q^I(b)=0$$

则 $I(\exists x(P(x)\to Q(x)))=I(\exists xP(x))=1$ 且 $I(\exists xQ(x))=0$，这表明 $\exists x(P(x)\to Q(x)),\exists xP(x)\not\models\exists xQ(x)$。

(6) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\},\quad P^I(a,b)=1,\quad P^I(a,a)=P^I(b,a)=P^I(b,b)=1$$

则 $I(\exists x\exists yP(x,y))=1$，但 $I(\exists xP(x,x))=0$。所以 $\exists x\exists yP(x,y)\not\models\exists xP(x,x)$。

17. 设 A,B 是任意公式，证明以下结论。

(1) $\exists x(A\land B)\models\exists xA\land\exists xB$

(2) $\forall x(A\to B),\forall xA\models\forall xB$

(3) $\exists xA_x^y\models\exists x\exists yA$，其中 x 对于 A 中的 y 是可代入的。

(4) $\exists xA\to\exists xB\models\exists x(A\to B)$

证明 (1) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists x(A\land B))(v)=1$，则有 $d\in D_I$ 使得 $I(A\land B)(v[x/d])=1$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=1$，$I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=1$，$I(\exists xA\land\exists xB)(v)=1$。这表明 $\exists x(A\land B)\models\exists xA\land\exists xB$。

(2) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\forall x(A\to B))(v)=I(\forall xA)(v)=1$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=I(A)(v[x/d])=1$，$I(B)(v[x/d])=1$，$I(\forall xB)(v)=1$。这表明 $\forall x(A\to B),\forall xA\models\forall xB$。

(3) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists xA_x^y)(v)=1$，则有 $d\in D_I$ 使得 $I(A_x^y)(v[x/y])=1$，因为 $I(A_x^y)(v[x/d])=I(A)(v[x/d][y/I(x)(v[x/d])])=I(A)(v[x/d][y/d])$，所以 $I(A)(v[x/d][y/d])=1$，$I(\exists yA)(v[x/d])=1$，$I(\exists x\exists yA)(v)=1$。这表明 $\exists xA_x^y\models\exists x\exists yA$。

(4) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists x(A\to B))(v)=0$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=0$，$I(A)(v[x/d])=1$ 且 $I(B)(v[x/d])=0$，因此 $I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=0$，$I(\exists xA\to\exists xB)(v)=0$。所以 $\exists xA\to\exists xB\models\exists x(A\to B)$。

18. 设变元 x 既不是公式 B 中的自由变元，也不是公式集 Γ 中任何公式的自由变元，A 是公式。若 $\Gamma\cup\{A\}\models B$，则 $\Gamma\cup\{\exists xA\}\models B$。

证明 设解释 I 和 I 中赋值 v 满足 $\Gamma\cup\{\exists xA\}$，则 $I(\exists xA)(v)=1$，有 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=1$。因为 x 不是公式集 Γ 中任何公式的自由变元，所以 I 和 $v[x/d]$ 也满足 Γ，I 和 $v[x/d]$ 满足 $\Gamma\cup\{A\}$。又因为 $\Gamma\cup\{A\}\models B$，所以 $I(B)(v[x/d])=1$，因

为 x 不是 B 中的自由变元，因此 $I(B)(v)=1$。这表明 $\Gamma \cup \{\exists x A\} \models B$。

19. 设 Γ 是公式集合，A 是公式，则 $\Gamma \models A$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不可满足。

证明 设 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 可满足，解释 I 和 I 中赋值 v 满足 $\Gamma \cup \{\neg A\}$，则 I 和 v 满足 Γ 且 $I(A)(v)=0$，所以 $\Gamma \not\models A$。

设 $\Gamma \not\models A$，则有解释 I 和 I 中赋值 v 满足 Γ 且 $I(A)(v)=0$，所以 I 和 v 满足 $\Gamma \cup \{\neg A\}$。因此，$\Gamma \cup \{\neg A\}$ 可满足。

20. 判断以下公式集合是否可满足，并说明理由。

(1) $\{\neg P(t) \mid t\text{是项}\} \cup \{\exists x P(x)\}$

(2) $\{\forall x \neg P(x,x), \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)), \forall x \exists y P(x,y)\}$

解 (1) 可满足。取解释 I 和 I 中赋值 v 如下。

$$D_I = \{1, 2\}, \qquad P^I(1)=0, \quad P^I(2)=1,$$

对每个常元 a，$a^I = 1$；

对每个 n 元函数符号 f，$f^I(x_1, \Lambda, x_n)=1$；

对每个变元 x，$v(x)=1$。

可归纳证明：对每个项 t，$I(t)(v)=1$。

I 和 v 满足 $\{\neg P(t) \mid t\text{是项}\} \cup \{\exists x P(x)\}$。

(2) 可满足。取解释 I 和 I 中赋值 v 如下。

$$D_I \text{ 为自然数集}, \qquad P^I(x,y)=1 \quad \text{当且仅当} \quad x<y$$

则 I 和 v 满足 $\{\forall x \neg P(x,x), \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)), \forall x \exists y P(x,y)\}$。

第三章　公理系统

1. 证明

(1) ├(A→B) →((B→C) →(A→C))

(2) ├(A→(B→C)) →(B→(A→C))

(3) ├¬¬A→A

(4) ├A→¬¬A

(5) ├(A→B) →(¬B→¬A)

(6) ├(A→(¬B→¬(A→B)))

(7) ├A→A∨B

(8) ├A→B∨A

(9) ├A∧B →A

(10) ├A∧B →B

1.(6)

├(A→(¬B→¬(A→B)))

A, A →B ├B

A├(A →B) →B

A├¬B →¬(A →B)

├A→(¬B →¬(A →B))

1.(7)

├A→A∨B

A1=A→(¬B →A)

A2= (¬B →A)→(¬A→¬¬B)

A3=¬¬B →B

A4=(¬A→¬¬B)→(¬A→B)

A5= (¬B →A)→(¬A→B)

A6=A→(¬A→B)

A7=A→A∨B

1.(8)

A∨B=(¬A→B)

├A→B∨A

A1= A→(¬B →A)

A2= A→B∨A

2.(1)

├A→(¬B→¬(A→B))

├A, ├B当且仅当├A∧B

证明如果├A, ├B则├A∧B

A1= A

A2= B

A3= A→(¬¬B→¬(A→¬B)))

A4=B→¬¬B

A5=(¬¬B→¬(A→¬B))→(B →¬(A→¬B))

A6= A→(B →¬(A→¬B))

A7= B →¬(A→¬B)

A8= ¬(A→¬B)

2.(1)

证明如果 ├A∧B则 ├A, ├B
A1= A∧B
A2= A∧B→A
A3= A
A4= A∧B→B
A5= B
├A, ├B

2.(2)
├A 或 ├B 当且仅当 ├A∨B
不对 ├ A→A
├珷∨A
├珷和 ├A

3 证明空集是协调的公式集
证明:
由可靠性定理可知若 ├A 则 A 是永真式
因此对于任意命题变元 p, ├p 空集是协调的公式集

4.
若1⊆2且1 ├A则2 ├A
证明
若 1⊆2 且 1 ├A 则存在一个 A 的从 1 的推演该推演也是 A 的从 2 的推演因此 2 ├A

5 若 1⊆2 且 2 是协调的则 1 也是协调的
证明
若是 2 协调的则存在公式 A 使得 2 ├A 由上题知道若 1⊆21 ├A 所以 1 也是协调的

9.
(1) ├Atx→∃xA 其中t对于A中的x是可代入的
(2) ├∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)
(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)
(4) ├∃x(A∨B) ↔(∃xA∨∃xB)
(5) ├∃x(A∧B) →(∃xA∧∃xB)
(6) ├∀xA↔¬∃x¬A
(7) ├∀x(A→B) →(∃xA→B) 其中x不是B的自由变元
(8) ├∃x∀yA→∀y∃xA

9.(1)
(1) ├Atx→∃xA 其中t对于A中的x是可代入的
A1=∀x¬A→¬Atx
A2= ¬¬Atx→¬∀x¬A
A3= Atx→¬¬Atx
A4= Atx→¬∀x¬A
A5= Atx→∃xA

9.(2)
(2) ├∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)
A1= ∃xA→A

A1=∀x(A→B) →(A→B)

A1= B→∃xB

A1= (A→B)→(A→∃xB)

A1= (A→∃xB) →(∃xA→∃xB)

A1= (A→B)→(∃xA→∃xB)

A1=∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)

9.(3)

(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

证├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB)

证├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B)

则├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB)

A1= ∀x(A∧B) →A∧B

A2= A∧B →A

A3= A →∀xA

A4= A∧B →∀xA

A5= A∧B →B

A6= B →∀xB

A7= A∧B →∀xB

A8= ∀x(A∧B) →∀xA

A9= ∀x(A∧B) →∀xB

A10= ∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

9.(3)

├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B)

A1= ∀xA∧∀xB→∀xA

A2= ∀xA→A

A3= ∀xA∧∀xB→A

A4= ∀xA∧∀xB→∀xB

A5= ∀xB→B

A6= ∀xA∧∀xB→B

A7= ∀xA∧∀xB→A∧B

A8= A∧B →∀x(A∧B)

A9= ∀xA∧∀xB→∀x(A∧B)

(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

证├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB)

证├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B)

则├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

9.(4)

(4) ├∃x(A∨B) ↔(∃xA∨∃xB)

如果├A ↔B， 则├∀xA↔∀xB

A1= A ↔B

A2= (A ↔B) →(A→B)

A3= (A→B) →(∀x A →∀xB)

A4= (A ↔B) →(∀x A →∀xB)

A5= (A ↔B) →(B→A)

A6= (A→B) →(∀x B→∀xA)

A7= (A ↔B) →(∀x B→∀xA)

$A8= (A \leftrightarrow B) \to \forall xA \leftrightarrow \forall xB$

9.(4)

$A1= \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$A2= \forall x \neg(A \vee B) \leftrightarrow \forall x(\neg A \wedge \neg B)$

$A3= \forall x(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B)$

$A4= \forall x \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B)$

$A5= (\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B) \leftrightarrow \forall x \neg(A \vee B)$

$A6= \neg\forall x \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B)$

$A7= \neg(\forall x \neg A \wedge \forall x \neg B) \leftrightarrow \neg\forall x A \vee \neg\forall x \neg B)$

$A8= \neg\forall x \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg\forall x A \vee \neg\forall x \neg B)$

$A9= \exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$

9.(5)

(5) $\vdash \exists x(A \wedge B) \to (\exists xA \wedge \exists xB)$

$A1= \exists x(A \wedge B) \to A \wedge B$

$A2= A \wedge B \to A$

$A3= A \to \exists xA$

$A4= A \wedge B \to B$

$A5= B \to \exists xB$

$A6= A \wedge B \to \exists xA \wedge \exists xB$

$A7= \exists x(A \wedge B) \to \exists xA \wedge \exists xB$

9.(6)

(6) $\vdash \forall xA \leftrightarrow \neg\exists x \neg A$

$A1= A \leftrightarrow \neg\neg A$

$A2= \forall xA \leftrightarrow \forall x \neg\neg A$

$A3= \forall xA \leftrightarrow \neg\neg\forall x \neg\neg A$

$A4= \forall xA \leftrightarrow \neg\exists x \neg A$

9.(7)

(7) $\vdash \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B)$ 其中x不是B的自由变元

$A1= \exists xA \to A$

$A2= (A \to B) \to (\exists xA \to B)$

$A3= \forall x(A \to B) \to (A \to B)$

$A4= \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B)$

9.(8)

(8) $\vdash \exists x \forall yA \to \forall y \exists xA$

$A1= \exists x \forall yA(x,y) \to \forall yA(c,y)$

$A2= \forall yA(c,y) \to A(c,y)$

$A3= A(c,y) \to \exists x A(x,y)$

$A4= \forall y \exists x A(x,y)$

10.(1)

若$\vdash A \to B$则$\vdash \exists xA \to \exists xB$

$A1= A \to B$

$A2= (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$A3= \neg B \to \neg A$

$A4= \forall x(\neg B \to \neg A)$

$A5 = \forall x(\neg B \to \neg A) \to (\forall x \neg B \to \forall x \neg A)$

$A6 = \forall x \neg B \to \forall x \neg A$

$A7 = \neg\forall x \neg A \to \neg\forall x \neg B$

$A8 = \exists x A \to \exists x B$

10.(2)

若$\vdash A \to B$且x不是B的自由变元则$\vdash \exists x A \to B$

$A1 = A \to B$

$A2 = (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$A3 = \neg B \to \neg A$

$A4 = \forall x(\neg B \to \neg A)$

$A5 = \forall x(\neg B \to \neg A) \to (\neg B \to \forall x \neg A)$

$A6 = \neg B \to \forall x \neg A$

$A7 = \neg\forall x \neg A \to \neg\neg B$

$A7 = \neg\neg B \to B$

$A8 = \exists x A \to B$

第四章　归结法原理

1. 用归结法证明：

⑴ $p \to q$，$p \to r \models p \to q \wedge r$

⑵ $p \to r$， $q \to r \models p \vee q \to r$

⑶ $p \to q \vee r \models (p \to q) \vee (p \to r)$

⑷ $p \wedge q \to r \models (p \to r) \vee (q \to r)$

⑸ $p \vee q \vee r$， $p \to r \models q \vee r$

⑹ $(p \to q) \to (p \to r) \models p \to (q \to r)$

解　⑴ 首先将 $p \to q$，$p \to r$， $\neg(p \to q \wedge r)$ 化为合取范式。

$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$p \to r \Leftrightarrow \neg p \vee r$

$\neg(p \to q \wedge r) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

给出子句集 $\{\neg p \vee q, \neg p \vee r, p, \neg q \vee \neg r\}$ 的反驳如下。

① $\neg p \vee q$
② $\neg p \vee r$
③ p
④ $\neg q \vee \neg r$
⑤ q　　①由和③
⑥ r　　由②和③
⑦ $\neg r$　　由④和⑤
⑧ 　　由⑥和⑦

因此， $p \to q$，$p \to r \models p \to q \wedge r$

⑵ 首先将 $p \to r$， $q \to r$， $\neg(p \vee q \to r)$ 化为合取范式。

$p \to r \Leftrightarrow \neg p \vee r$
$q \to r \Leftrightarrow \neg q \vee r$

$\neg(p \vee q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$

给出子句集{$\neg p \vee r$，$\neg q \vee r$，$p \vee q$，$\neg r$}的反驳如下。

① $\neg p \vee r$
② $\neg q \vee r$
③ $p \vee q$
④ $\neg r$
⑤ $q \vee r$　　由①和③
⑥ r　　由②和⑤
⑦ 　　由④和⑥

因此， $p \to r$， $q \to r \models p \vee q \to r$

⑶ 首先将 $p \to q \vee r$，$\neg((p \to q) \vee (p \to r))$ 化为合取范式。

$p \to q \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$

$\neg((p \to q) \vee (p \to r)) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r$

给出子句集{$\neg p \vee q \vee r$, p, $\neg q$, $\neg r$ }的反驳如下。

① $\neg p \vee q \vee r$

② p

③ $\neg q$

④ $\neg r$

⑤ $q \vee r$ 由①和②

⑥ r 由③和⑤

⑦ 由④和⑥

因此， $p \to q \vee r \models (p \to q) \vee (p \to r)$

(4) 首先将 $p \wedge q \to r$, $\neg((p \to r) \vee (q \to r))$ 化为合取范式。

$p \wedge q \to r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

$\neg((p \to r) \vee (q \to r)) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$

给出子句集{$\neg p \vee \neg q \vee r$, p, q, $\neg r$ }的反驳如下。

① $\neg p \vee \neg q \vee r$

② p

③ q

④ $\neg r$

⑤ $\neg q \vee r$ 由①和②

⑥ r 由③和⑤

⑦ 由④和⑥

因此， $p \wedge q \to r \models (p \to r) \vee (q \to r)$

(5) 首先将 $p \to r$ ， $\neg(q \vee r)$ 化为合取范式。

$p \to r \Leftrightarrow \neg p \vee r$

$\neg(q \vee r) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg r$

给出子句集{ $p \vee q \vee r$, $\neg p \vee r$, $\neg q$, $\neg r$ }的反驳如下。

① $p \vee q \vee r$

② $\neg p \vee r$

③ $\neg q$

④ $\neg r$

⑤ $q \vee r$ 由①和②

⑥ r 由③和⑤

⑦ 由④和⑥

因此， $p \vee q \vee r$ ， $p \to r \models q \vee r$

(6) 首先将 $(p \to q) \to (p \to r)$ ， $\neg(p \to (q \to r))$ 化为合取范式。

$(p \to q) \to (p \to r) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

$\neg(p \to (q \to r)) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$

给出子句集$\{\neg p \vee \neg q \vee r, p, q, \neg r\}$的反驳如下：

① $\neg p \vee \neg q \vee r$

② p

③ q

④ $\neg r$

⑤ $\neg q \vee r$　　由①和②

⑥ r　　由③和⑤

⑦ 　　由④和⑥

因此，$(p \to q) \to (p \to r) \models p \to (q \to r)$。

2. 用归结法判断以下结论是否成立：

⑴ $p \vee q \to r \models (p \to r) \vee (q \to r)$

⑵ $(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s) \models p \to q \vee r \vee s$

⑶ $(p \to q) \to (q \to r)$，$r \to p \models q \to p$

⑷ $p \wedge q \to r$，$p \wedge q \to \neg r \models \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

解　⑴ 首先将$p \vee q \to r$，$\neg((p \to r) \vee (q \to r))$化为合取范式。

$p \vee q \to r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$\neg((p \to r) \vee (q \to r)) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$

给出子句集{$\neg p \vee r$，$\neg q \vee r$，p, q, $\neg r$}的反驳如下。

① $\neg p \vee r$

② $\neg q \vee r$

③ p

④ q

⑤ $\neg r$

⑥ r　　由①和③

⑦ 　　由⑥和⑤

因此，$p \vee q \to r \models (p \to r) \vee (q \to r)$

⑵ 首先将$(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s)$，$\neg(p \to q \vee r \vee s)$化为合取范式。

$(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s)$ $(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \vee (\neg p \vee s) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r \vee s$

$\neg(p \to q \vee r \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q \vee r \vee s) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$

给出子句集{$\neg p \vee q \vee r \vee s$，$p$, $\neg q$，$\neg r$，$\neg s$}的反驳如下。

① $\neg p \vee q \vee r \vee s$

② p

③ $\neg q$

④ $\neg r$

⑤ $\neg s$

⑥　$q \vee r \vee s$　　　　由①和②
⑦　$r \vee s$　　　　由③和⑥
⑧　s　　　　由④和⑦
⑨　　　　　由⑤和⑧

因此，$(p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s) \models p \to q \vee r \vee s$

(3) 首先将 $(p \to q) \to (q \to r)$，$r \to p$，$\neg(q \to p)$ 化为合取范式。

$$(p \to q) \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee r \Leftrightarrow \neg q \vee r$$

$$r \to p \Leftrightarrow p \vee \neg r$$

$$\neg(q \to p) \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

给出子句集$\{\neg q \vee r, p \vee \neg r, \neg p, q\}$的反驳如下。

①　$\neg q \vee r$
②　$p \vee \neg r$
③　$\neg p$
④　q
⑤　$\neg r$　　　　由②和③
⑥　r　　　　由④和①
⑦　　　　　由⑤和⑥

因此，$(p \to q) \to (q \to r)$，$r \to p \models q \to p$。

(4) 首先将 $p \wedge q \to r$，$p \wedge q \to \neg r$，$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ 化为合取范式。

$$p \wedge q \to r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$p \wedge q \to \neg r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg r \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

$$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$$

为了判断子句集$\{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee q \vee r\}$是否可满足，消去命题变元 r，用子句$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 分别与子句 $p \vee q \vee r$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r$ 归结均得到子句 $\neg p \vee \neg q \vee p \vee q$，因为子句集$\{\neg p \vee \neg q \vee p \vee q\}$可满足，所以子句集$\{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee q \vee r\}$可满足。

因此，$p \wedge q \to r$，$p \wedge q \to \neg r \not\models \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$。

3. 求下列公式的斯科伦范式。

(1) $\neg\forall x(P(x) \to \forall y(P(y) \to P(f(x,y)))) \wedge \neg\forall y(Q(x,y) \to P(y)))$

(2) $\forall x \exists y(P(x,y) \to Q(y,x)) \wedge (Q(y,x) \to R(x,y))$

(3) $\forall x P(x,y) \to (Q(x) \to \neg\exists x R(y,x))$

(4) $\forall x P(x,y) \oplus \exists y Q(x,y)$

解　(1) $\neg\forall x(P(x) \to \forall y(P(y) \to P(f(x,y)))) \wedge \neg\forall y(Q(x,y) \to P(y)))$

$$\Leftrightarrow \neg\forall x(P(x) \to \forall y(P(y) \to P(f(x,y)))) \wedge \neg\forall z(Q(x,z) \to P(z)))$$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(P(x)\to\forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge\neg\forall z(Q(x,z)\to P(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge\neg(\forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge\neg\forall z(Q(x,z)\to P(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge(\neg\forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\vee\forall z(Q(x,z)\to P(z))))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge(\exists y\neg(P(y)\to P(f(x,y)))\vee\forall z(Q(x,z)\to P(z))))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\forall z(P(x)\wedge(\neg(P(y)\to P(f(x,y)))\vee(Q(x,z)\to P(z))))$

$\neg\forall x(P(x)\to\forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge\neg\forall y(Q(x,y)\to P(y)))$ 的斯科伦范式是

$\forall z(P(a)\wedge(\neg(P(b)\to P(f(a,b)))\vee(Q(a,z)\to P(z))))$。

⑵ $\forall x\exists y(P(x,y)\to Q(y,x))\wedge(Q(y,x)\to R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall z\exists u(P(z,u)\to Q(u,z))\wedge(Q(y,x)\to R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall z\exists u((P(z,u)\to Q(u,z))\wedge(Q(y,x)\to R(x,y)))$

$\forall x\exists y(P(x,y)\to Q(y,x))\wedge(Q(y,x)\to R(x,y))$ 的斯科伦范式是

$\forall z((P(z,f(z))\to Q(u,f(z)))\wedge(Q(y,x)\to R(x,y)))$。

⑶ $\forall xP(x,y)\to(Q(x)\to\neg\exists xR(y,x))$

$\Leftrightarrow \forall zP(z,y)\to(Q(x)\to\neg\exists uR(y,u))$

$\Leftrightarrow \forall zP(z,y)\to(Q(x)\to\forall u\neg R(y,u))$

$\Leftrightarrow \exists z\forall u(P(z,y)\to(Q(x)\to\neg R(y,u)))$

$\forall xP(x,y)\to(Q(x)\to\neg\exists xR(y,x))$ 的斯科伦范式是 $\forall u(P(a,y)\to(Q(x)\to\neg R(y,u)))$。

⑷ $\forall xP(x,y)\oplus\exists yQ(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall xP(x,y)\wedge\neg\exists yQ(x,y))\vee(\neg\forall xP(x,y)\wedge\exists yQ(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall zP(z,y)\wedge\neg\exists uQ(x,u))\vee(\neg\forall vP(v,y)\wedge\exists wQ(x,w))$

$\Leftrightarrow (\forall zP(z,y)\wedge\forall u\neg Q(x,u))\vee(\exists v\neg P(v,y)\wedge\exists wQ(x,w))$

$\Leftrightarrow \forall z\forall u(P(z,y)\wedge\neg Q(x,u))\vee\exists v\exists w(\neg P(v,y)\wedge Q(x,w))$

$\Leftrightarrow \exists v\exists w\forall z\forall u((P(z,y)\wedge\neg Q(x,u))\vee(\neg P(v,y)\wedge Q(x,w)))$

$\forall xP(x,y)\oplus\exists yQ(x,y)$ 的斯科伦范式是

$\forall z\forall u((P(z,y)\wedge\neg Q(x,u))\vee(\neg P(a,y)\wedge Q(x,b)))$。

4. 证明：前束范式 A 是永假式当且仅当 A 的无∃前束范式是永假式。

证明　设 A' 是前束范式 A 的无∃前束范式。

$(\Leftarrow)$ 设 A 可满足，即有解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(A)(v)=1$，我们证明 A' 可满足。

对 A 中∃的出现次数进行归纳。

若 A 中不出现∃，则 A' 与 A 相同，A' 可满足。

设 A 中∃的出现次数为 $m+1$。

若 A 为 $\exists yB$，A' 为 $(B_a^y)'$。因为 $I(A)(v)=1$，故有 $d\in D_I$ 使得 $I(B)(v[y/d])=1$。令解释 I' 与 I 的区别仅在于 $a^{I'}=d$，则

$$I'(B_a^y)(v)=I'(B)(v[y/I'(a)(v)])=I'(B)(v[y/d])=1$$

B_a^y 可满足，由归纳假设知，$(B_a^y)'$ 可满足，即 A' 可满足。

若 A 为 $\forall x_1\Lambda\ \forall x_n\exists yB$，$A'$ 为 $(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})'$。定义 D_I 上的 n 元运算 g 如下：对于任意 $a_1,\Lambda,a_n\in D_I$，令 $g(a_1,\Lambda,a_n)$ 为集合 $\{b\mid I(B)(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n,y/b])=1\}$ 中的一个元素，这个集合是非空的，因为 $I(\exists yB)(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n])=1$。令解释 I' 与 I 的区别仅在于 $f^{I'}=g$。对于任意 $a_1,\Lambda,a_n\in D_I$，

$$I'(B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n])=I'(B)(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n,y/I'(f(x_1,\Lambda,x_n))(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n])])$$

$$=I'(B)(v[x_1/a_1,\Lambda,x_n/a_n,y/g(a_1,\Lambda,a_n)])=1$$

所以，$I'(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})(v)=1$，$\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)}$ 可满足，由归纳假设知，$(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})'$ 可满足，即 A' 可满足。

$(\Rightarrow)$ 我们证明 $A'\models A$。由谓词逻辑公理系统的可靠性定理知，只需证明 $A'\vdash A$。

对 A 中∃的出现次数进行归纳。

若 A 中不出现∃，则 A' 与 A 相同，$A'\vdash A$。

设 A 中∃的出现次数为 $m+1$。

若 A 为 $\exists yB$，A' 为 $(B_a^y)'$。由第三章习题 9（1）知，$\vdash B_a^y\to\exists yB$，故 $B_a^y\vdash\exists yB$。由归纳假设知，$(B_a^y)'\vdash B_a^y$，因此 $(B_a^y)'\vdash\exists yB$。

若 A 为 $\forall x_1\Lambda\ \forall x_n\exists yB$，$A'$ 为 $(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})'$。由归纳假设知，$(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})'\vdash\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)}$。由第三章习题 9（1）知，$\vdash B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)}\to\exists yB$，再次应用例 3.8 得到 $\vdash\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)}\to\forall x_1\Lambda\ \forall x_n\exists yB$。所以，$(\forall x_1\Lambda\ \forall x_n B^y_{f(x_1,\Lambda,x_n)})'\vdash\forall x_1\Lambda\ \forall x_n\exists yB$，即 $A'\vdash A$，$A'\models A$。

若 A' 可满足，有解释 I 和 I 中赋值 v 满足 A'，则 I 和 v 满足 A，A 可满足。

5. 前束范式 A 的无∀前束范式 A' 定义如下：

(1) 若 A 中不出现，则 A' 是 A；

(2) 若 A 是 $\forall yB$，则 A' 是 $(B_a^y)'$，其中 a 是在 B 中不出现的常元；

(3) 若 A 是 $\exists x_1\Lambda\ \exists x_n\forall yB$，其中 n 是正整数，则 A' 为 $(\exists x_1\Lambda\ \exists x_n\forall yB^y_{f(x_1,\Lambda\ x_n)})'$，其中 f 是在 B 中不出现的 n 元函数符号。

证明：A 是永真式当且仅当 A' 是永真式。

6. 证明：若 I 是赫布兰德解释，则对每个基项 t，$I(t)=t$。

证明 对 t 进行归纳。

(1) 若 t 是常元 a，则 $I(a)=a^I=a$。

(2) 若 t 是 $f(t_1,\Lambda ,t_n)$，由归纳假设知：$I(t_1)=t_1$，…，$I(t_n)=t_n$。

$$I(f(t_1,\Lambda ,t_n))=f^I(I(t_1),\Lambda ,I(t_n))=f^I(t_1,\Lambda ,t_n)=f(t_1,\Lambda ,t_n)$$

7. 证明：若语句集 Γ 可满足，则有赫布兰德解释满足 Γ。

8. 用归结法证明以下子句构成的集合不可满足。

(1) $P(x,f(x),b)$，$\neg Q(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg P(x,f(y),z)\vee Q(z)$，$Q(a)$，$\neg Q(b)$

(2) $Q(a)\vee R(x)$，$\neg Q(x)\vee R(x)$，$\neg R(x)\vee\neg P(a)$，$P(x)$

(3) $P(y,a)\vee P(f(y),y)$，$P(y,a)\vee P(y,f(y))$，$\neg P(x,y)\vee\neg P(y,a)$，$\neg P(x,y)\vee P(f(y),y)$，$\neg P(x,y)\vee P(y,f(y))$

(4) $\neg E(x)\vee V(x)\vee S(x,f(x))$，$\neg E(x)\vee V(x)\vee C(f(x))$，$P(a)$，$E(a)$，$\neg S(a,y)\vee P(y)$，$\neg P(x)\vee\neg V(x)$，$\neg P(x)\vee\neg C(x)$

(5) $\neg P(x,y,u)\vee\neg P(y,z,v)\vee\neg P(x,v,w)\vee P(u,z,w)$，$P(g(x,y),x,y)$，$P(x,h(x,y),y)$，$\neg P(f(x),x,f(x))$

解 (1) 给出该子句集的一个反驳如下：

(1) $P(x,f(x),b)$

(2) $\neg Q(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg P(x,f(y),z)\vee Q(z)$

(3) $Q(a)$

(4) $\neg Q(b)$

(5) $\neg P(a,f(a),z)\vee Q(z)$ 由(2) $\{x/a,y/a\}$ 和(3) ε

(6) $Q(b)$ 由(1) $\{x/a\}$ 和(5) $\{z/b\}$

(7) 由(4) ε 和(6) ε

所以该子句集不可满足。

(2) 给出该子句集的一个反驳如下：

(1) $Q(a)\vee R(x)$

(2) $\neg Q(x)\vee R(x)$

(3) $\neg R(x)\vee\neg P(a)$

(4) $P(x)$

(5) $R(a)$ 由(1) $\{x/a\}$ 和(2) $\{x/a\}$

(6) $\neg P(a)$ 由(3) $\{x/a\}$ 和(5) ε

(7) 由(4) $\{x/a\}$ 和(6) ε

所以该子句集不可满足。

(3) 给出该子句集的一个反驳如下：

(1) $P(y,a)\vee P(f(y),y)$

(2) $P(y,a)\vee P(y,f(y))$

(3) $\neg P(x,y)\vee\neg P(y,a)$

(4) $\neg P(x,y)\vee P(f(y),y)$

(5) $\neg P(x,y)\vee P(y,f(y))$

(6) $\neg P(f(a),a)\vee P(a,a)$ 由(3) $\{x/a, y/f(a)\}$ 和(2) $\{y/a\}$

(7) $P(f(a),a)$ 由(1) $\{y/a\}$ 和(4) $\{x/a, y/a\}$

(8) $P(a,a)$ 由(6) ε 和(7) ε

(9) 由(3) $\{x/a, y/a\}$ 和(8) ε

所以该子句集不可满足。

(4) 给出该子句集的一个反驳如下：

(1) $\neg E(x)\vee V(x)\vee S(x,f(x))$

(2) $\neg E(x)\vee V(x)\vee C(f(x))$

(3) $P(a)$

(4) $E(a)$

(5) $\neg S(a,y)\vee P(y)$

(6) $\neg P(x)\vee\neg V(x)$

(7) $\neg P(x)\vee\neg C(x)$

(8) $\neg E(a)\vee V(a)\vee P(f(a))$ 由(1) $\{x/a\}$ 和(5) $\{y/f(a)\}$

(9) $V(a)\vee P(f(a))$ 由(4) ε 和(8) ε

(10) $\neg C(f(a))\vee V(a)$ 由(9) ε 和(7) $\{x/f(a)\}$

(11) $\neg E(a)\vee V(a)$ 由(2) $\{x/a\}$ 和(10) ε

⑿ $V(a)$ 由⑷ε和⑾ε

⒀ $\neg P(a)$ 由⑹$\{x/a\}$和⑿ε

⒁ 由⑶ε和⒀ε

所以该子句集不可满足。

(5) 给出该子句集的一个反驳如下：

⑴ $\neg P(x,y,u)\vee\neg P(y,z,v)\vee\neg P(x,v,w)\vee P(u,z,w)$

⑵ $P(g(x,y),x,y)$

⑶ $P(x,h(x,y),y)$

⑷ $\neg P(f(x),x,f(x))$

⑸ $\neg P(x,z,x)\vee P(u,z,u)$ 由⑴$\{x/g(x,u), y/x, v/x, w/u\}$和⑵$\{y/u\}$

⑹ $P(u,h(x,x),u)$ 由⑸$\{z/h(x,x)\}$和⑶$\{y/x\}$

⑺ □ 由⑹$\{u/f(h(x,x))\}$和⑷$\{x/h(x,x)\}$

所以该子句集不可满足。

9. 用归结法证明：

⑴ $\forall y(P(y)\to Q(y))\models\forall x(\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\to\exists z(Q(z)\wedge R(x,z)))$

⑵ $\forall x(\exists y(S(x,y)\wedge P(y))\to\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))$,

$\neg\exists xQ(x)\models\forall x\forall y(S(x,y)\to\neg P(y))$

⑶ $\forall x(Q(x)\wedge\neg R(x)\to\exists y(S(x,y)\wedge C(y)))$, $\exists x(P(x)\wedge Q(x)\wedge\forall y(S(x,y)\to P(y)))$,

$\forall x(P(x)\to\neg R(x))\models\exists x(P(x)\wedge C(x))$

⑷ $\forall x(P(x)\vee Q(x))\not\models\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

⑸ $\forall x\exists yP(x,y)\not\models\exists y\forall xP(x,y)$

解 ⑴ 由语句$\forall y(P(y)\to Q(y))$得到子句$\neg P(y)\vee Q(y)$，由语句$\neg\forall x(\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\to\exists z(Q(z)\wedge R(x,z)))$得到子句$P(b)$，$R(a,b)$以及$\neg Q(z)\vee\neg R(x,z)$。

构造子句集{ $\neg P(y)\vee Q(y)$，$P(b)$，$R(a,b)$，$\neg Q(z)\vee\neg R(x,z)$ }的一个反驳如下：

⑴ $\neg P(y)\vee Q(y)$

⑵ $P(b)$

⑶ $R(a,b)$

⑷ $\neg Q(z) \vee \neg R(x,z)$

⑸ $Q(b)$ 由⑴和⑵

⑹ $\neg Q(b)$ 由⑶和⑷

⑺ 由⑸和⑹

因此，$\forall y(P(y) \to Q(y)) \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists z(Q(z) \wedge R(x,z)))$。

⑵ 由语句 $\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge P(y)) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$ 得到子句 $\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee Q(f(x))$ 和 $\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee R(x,f(x))$，由语句 $\neg \exists x Q(x)$ 得到子句 $\neg Q(x)$，由语句 $\neg \forall x \forall y(S(x,y) \to \neg P(y))$ 得到子句 $S(a,b)$ 和 $P(b)$。

构造子句集{ $\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee Q(f(x))$，$\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee R(x,f(x))$，$\neg Q(x)$，$S(a,b)$，$P(b)$ }的一个反驳如下：

⑴ $\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee Q(f(x))$

⑵ $\neg S(x,y) \vee \neg P(y) \vee R(x,f(x))$

⑶ $\neg Q(x)$

⑷ $S(a,b)$

⑸ $P(b)$

⑹ $\neg S(x,y) \vee \neg P(y)$ 由⑴和⑶

⑺ $\neg P(b)$ 由⑷和⑹

⑻ 由⑸和⑺

因此，

$\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge P(y)) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$，$\neg \exists x Q(x) \models \forall x \forall y(S(x,y) \to \neg P(y))$。

⑶ 由语句 $\forall x(Q(x) \wedge \neg R(x) \to \exists y(S(x,y) \wedge C(y)))$ 得到子句 $\neg Q(x) \vee R(x) \vee S(x,f(x))$ 和 $\neg Q(x) \vee R(x) \vee C(f(x))$；由语句 $\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ 得到子句 $P(a)$，$Q(a)$，$\neg S(a,y) \vee P(y)$；由语句 $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ 得到子句 $\neg P(x) \vee \neg R(x)$；由语句 $\neg \exists x(P(x) \wedge C(x))$ 得到子句 $\neg P(x) \vee \neg C(x)$。

构造子句集{ $\neg Q(x) \vee R(x) \vee S(x,f(x))$，$\neg Q(x) \vee R(x) \vee C(f(x))$，$P(a)$，$Q(a)$，$\neg S(a,y) \vee P(y)$，$\neg P(x) \vee \neg R(x)$，$\neg P(x) \vee \neg C(x)$ }的一个反驳如下：

⑴ $\neg Q(x) \vee R(x) \vee S(x,f(x))$

⑵ $\neg Q(x) \vee R(x) \vee C(f(x))$

⑶ $P(a)$

⑷ $Q(a)$

⑸ $\neg S(a,y)\vee P(y)$

⑹ $\neg P(x)\vee\neg R(x)$

⑺ $\neg P(x)\vee\neg C(x)$

⑻ $\neg Q(a)\vee R(a)\vee P(f(a))$ 由⑴和⑸

⑼ $\neg R(a)$ 由⑶和⑹

⑽ $R(a)\vee P(f(a))$ 由⑷和⑻

⑾ $P(f(a))$ 由⑼和⑽

⑿ $R(a)\vee C(f(a))$ 由⑵和⑷

⒀ $C(f(a))$ 由⑼和⑿

⒁ $\neg P(f(a))$ 由⑺和⒀

⒂ 由⑾和⒁

因此，$\forall x(Q(x)\wedge\neg R(x)\to\exists y(S(x,y)\wedge C(y)))$，

$\exists x(P(x)\wedge Q(x)\wedge\forall y(S(x,y)\to P(y)))$，$\forall x(P(x)\to\neg R(x))\models\exists x(P(x)\wedge C(x))$。

(4) 由语句$\forall x(P(x)\vee Q(x))$得到子句$P(x)\vee Q(x)$，由语句$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$得到子句$\neg P(x)\vee\neg Q(x)$。显然，这两个子句的归结子句是永真子句。因此，$\forall x(P(x)\vee Q(x))\not\models\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

(5) 由语句$\forall x\exists yP(x,y)$得到子句$P(x,f(x))$，由语句$\neg\exists y\forall xP(x,y)$得到子句$\neg P(g(y),y)$。我们证明这两个子句没有归结子句。若有代换$\{x/t_1\}$和代换$\{y/t_2\}$使

$$t_1=g(t_2)\qquad\qquad f(t_1)=t_2$$

可得出$t_1=g(f(t_1))$，这是不可能的，因为这里的＝表示作为符号串的相同。因此，$\forall x\exists yP(x,y)\not\models\exists y\forall xP(x,y)$

10. 每个一年级学生至少有一个高年级学生作他的辅导员。凡理科学生的辅导员皆是理科学生。小王是理科一年级学生。因此，至少有一个理科高年级学生。

解 首先将前提和结论符号化。取个体域为学生的集合。

$F(x):x$是一年级学生。 $H(x):x$是高年级学生。 $L(x):x$是理科学生。 $W(x):x$ 是文科学生。

$G(x,y):x$是y的辅导员。 a:小王。

“每个一年级学生至少有一个高年级学生作他的辅导员”符号化为：$\forall x(F(x)\to\exists y(H(y)\wedge G(y,x)))$。

“凡理科学生的辅导员皆是理科学生”符号化为：$\forall x(L(x)\rightarrow\forall y(G(y,x)\rightarrow L(y)))$。

“小王是理科一年级学生”符号化为：$L(a)\wedge F(a)$。

“至少有一个理科高年级学生”符号化为：$\exists x(L(x)\wedge H(x))$。

将$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(H(y)\wedge G(y,x)))$化为斯科伦范式

$\forall x((\neg F(x)\vee H(f(x)))\wedge(\neg F(x)\vee G(f(x),x)))$，得出子句$\neg F(x)\vee H(f(x))$和$\neg F(x)\vee G(f(x),x)$。

将 $\forall x(L(x)\rightarrow\forall y(G(y,x)\rightarrow L(y)))$ 化 为 斯 科 伦 范 式 $\forall x\forall y(\neg L(x)\vee\neg G(y,x)\vee L(y))$ ， 得 出 子 句 $\neg L(x)\vee\neg G(y,x)\vee L(y)$。

$L(a)\wedge F(a)$本身即为斯科伦范式，得出子句$L(a)$和$F(a)$。

将$\neg\exists x(L(x)\wedge H(x))$化为斯科伦范式$\forall x(\neg L(x)\vee\neg H(x))$，得出子句$\neg L(x)\vee\neg H(x)$。

构造子句集$\{\neg F(x)\vee H(f(x))$，$\neg F(x)\vee G(f(x),x)$，$\neg L(x)\vee\neg G(y,x)\vee L(y)$，$L(a)$，$F(a)$，$\neg L(x)\vee\neg H(x)\}$的一个反驳如下：

⑴ $\neg F(x)\vee H(f(x))$

⑵ $\neg F(x)\vee G(f(x),x)$

⑶ $\neg L(x)\vee\neg G(y,x)\vee L(y)$

⑷ $L(a)$

⑸ $F(a)$

⑹ $\neg L(x)\vee\neg H(x)$

⑺ $H(f(a))$ 由⑴和⑸

⑻ $G(f(a),a)$ 由⑵和⑸

⑼ $\neg G(y,a)\vee L(y)$ 由⑶和⑷

⑽ $L(f(a))$ 由⑻和⑼

⑾ $\neg L(f(a))$ 由⑹和⑺

⑿ 由⑽和⑾

11. 任何喜欢步行的人都不喜欢乘汽车。每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不喜欢骑自行车。因此，有的人不喜欢步行。

解 首先将前提和结论符号化。取个体域为人的集合。

$W(x):x$喜欢步行。 $C(x):x$喜欢乘汽车。 $B(x):x$喜欢骑自行车。

“任何喜欢步行的人都不喜欢乘汽车”符号化为：$\forall x(W(x)\rightarrow\neg C(x))$。

“每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车”符号化为：$\forall x(C(x) \vee B(x))$。

“有的人不喜欢骑自行车”符号化为：$\exists x \neg B(x)$。

“有的人不喜欢步行”符号化为：$\exists x \neg W(x)$。

需要证明

$\forall x(W(x) \to \neg C(x))$，$\forall x(C(x) \vee B(x))$，$\exists x \neg B(x) \models \exists x \neg W(x)$

将 $\forall x(W(x) \to \neg C(x))$ 化为斯科伦范式 $\forall x(\neg W(x) \vee \neg C(x))$，得出子句 $\neg W(x) \vee \neg C(x)$。

$\forall x(C(x) \vee B(x))$ 本身即是斯科伦范式，得出子句 $C(x) \vee B(x)$。

将 $\exists x \neg B(x)$ 化为斯科伦范式 $\neg B(a)$，得出子句 $\neg B(a)$。

将 $\neg \exists x \neg W(x)$ 化为斯科伦范式 $\forall x W(x)$，得出子句 $W(x)$。

构造子句集 $\{ \neg W(x) \vee \neg C(x)$，$C(x) \vee B(x)$，$\neg B(a)$，$W(x) \}$ 的一个反驳如下：

① $\neg W(x) \vee \neg C(x)$

② $C(x) \vee B(x)$

③ $\neg B(a)$

④ $W(x)$

⑤ $\neg C(x)$　　由①和④

⑥ $B(x)$　　由②和⑤

⑦ 　　由③和⑥