一、判断题　（本题共 7 分，每小题 0.5 分）

请在正确的陈述前面括号中打√，在错误的陈述前面括号中打×。

（×）一个完全多项式近似方案是一个近似方案{ A_ε}，其中每一个算法 A_ε在输入实例 I 的规模的多项式时间内运行。

（√）贪心法所做的每一步选择所产生的部分解，不一定是可行性的。

（√）一个正确的算法，对于每一个合法输入，都会在有限的时间内输出一个满足要求的结果。

（×）NP 完全问题比其它所有 NP 问题都要难。

（×）回溯法用深度优先法或广度优先法搜索状态空间树。

（×）在动态规划中，各个阶段所确定的策略就构成一个策略序列，通常称为一个决策。

（×）P 类和 NP 类问题的关系用 $p \subset NP$ 来表示是错误的。

（×）若近似算法 A 求解某极小化问题一实例的解为 s_a，且已知该问题的最优解为 $s_a/3$，则该近似算法的性能比为 3。

（√）通常来说，算法的最坏情况的时间复杂性比平均情况的时间复杂性容易计算。

（√）若 P2 多项式时间转化为(polynomially transforms to) P1，则 P2 至少与 P1 一样难。

（×）快速排序算法的平均时间复杂度是 O(nlogn)，使用随机化快速排序算法可以将平均时间复杂度降得更低。

（×）基于比较的寻找数组 A[1...n]中最大值元素问题的下界是 $\Omega(n/3)$。

（×）$O(f(n))+O(g(n)) = O(\min\{f(n),g(n)\})$ 。

（√）若 $f(n)= O(g(n))$， 则 $g(n)= \Omega(f(n))$ 。

二、问答题　（本题共 12 分）

1、二叉查找树属于减治策略的三个变种中哪一个的应用？什么情况下二叉查找树表现出最差的效率？此时的查找和插入算法的复杂性如何？（本题 2 分）

2、何谓伪多项式算法？如何将一 Monte Carlo 算法转化为 Las Vegas 算法？以子集和问题为例说明伪多项式时间算法和 FPAS 可以有的关系。（本题 3 分）

3、构造 AVL 数和 2-3 树的主要目的是什么？它们各自有什么样的查找和插入的效率？（本题 2 分）

4、写出 0/1 背包问题的一个多项式等价(Polynomially equivalent) 的判定问题，并说明为什么它们是多项式等价的。（本题 3 分）

5、下面问题是否属于 NP 问题？为什么？（本题 2 分）

给定图 G=(N,A)中的两个点 p、q，整数 c 和 t，图 G 中每条边的长度 c_{ij} 及遍历这条边的时间 t_{ij}，问图 G 中是否存在一条由 p 到 q 的路径，使得其长度大于 C，且遍历时间小于 t?

三、A[1...n]为一整数序列，A 中的整数 a 如果在 A 中的出现次数多于$\lfloor n/2 \rfloor$，那么 a 称为多数元素。例如，在序列 1，3，2，3，3，4，3 中，3 是多数元素，因其出现 4 次，大于$\lfloor 7/2 \rfloor$。求 A 的多数元素问题的蛮力算法复杂性如何？设计一具有变治思想的算法，提高蛮力算法的效率，写出伪代码并分析其时间复杂性。（本题 5 分）

四、某工厂调查了解市场情况，估计在今后四个月内，市场对其产品的需求量如下表所示。

时期（月）	需要量（产品单位）
1	2
2	3
3	2
4	4

已知：对每个月来讲，生产一批产品的固定成本费为 3 (千元)，若不生产，则为零。每生产单位产品的成本费为 1 （千元)。同时，在任何一个月内，生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位。

又知每单位产品的库存费用为每月 0.5 （千元)，同时要求在第一个月开始之初， 及在第四个月末，均无产品库存。

问：在满足上述条件下，该厂应如何安排各个时期的生产与库存，使所花的总成本费用最低？写出你所设的状态变量、决策变量、状态转移方程与递推关系

式，和手工求解的详细步骤及结果。

五、用分支定界法求解以下问题：（本题 8 分）

某部门欲建立联通分布于五个区的共 50 个站点的有线通信网络。每两个站点之间的线路敷设费用由对称矩阵 C 给出。任意两站点之间敷设线路需建设的地井数目由对称矩阵 U 给出。
设计一线路敷设总费用为最小的无环网络，使得需建设的总地井数目不超过 UMAX，且需跨区敷设的线路总数目不超过 DMAX（各站点所属的区由向量 D 给出）。

1. 说明你是如何构造搜索树的。（要求是二叉搜索树）。
2. 说明算法遍历搜索树的原则（何时以及如何前进、分支、回溯、剪枝等等）。
3. 你设计的分支定界算法的“界”是什么，它为什么是正确的和有效的？
4. 写出伪代码。

1. 构造二叉树，节点表示站点，若 a_i 的左子树为 a_j，则表示选 的边，若 a_i 的右子树为 a_j，则表示不选择 a_i, a_j 之间的边

2. 当线路费用小于DMAX，地井数目小于UMAX时前进。

分支：当一个节点的下一步有多个选择时，进行分支。

回溯：当前线路路径不满足要求时回溯，如果是从左孩子回 搜索父结点的右孩子，如果从右孩子回溯，则回溯到

剪枝：当前路径不满足要求，或者超出界时。

3. ① 路线无环

② 总费用小于DMAX

③ 总地井小于UMAX

A

一. 1× 2√ 3√ 4× 5× 6~10 ××× √√

11~16 ×××√

二.

1. 二叉查找树属于减治策略中减去的规模是可变的策略
二叉树平均在倾斜的情况下表现出最差的效率
此时查找和插入算法在最坏情况下的时间复杂度是 $O(n)$.

2. 伪多项式算法是关于 L 的多项式算法. L 是输入数据中的最大值.
Monte Carlo 算法每次都能得出问题的解. 但不能保证解的正确性.
Las Vegas 算法要么给出正确解. 要么得不出解.
可以在 Monte Carlo 算法给出的解上加一个验证算法. 如果该解正确.
则得到正确解. 如果该解不正确则无法给出解. 故
这样能把 Monte Carlo 算法转变为 Las Vegas 算法.

3. ~~AL~~ AVL 树和 2-3 树能使树的左右子树更加平衡. 目的是减小树的层数. 使平均搜索效率更高.
AVL 树的查找和插入效率为 ~~$\log_2 n$~~ $O(\log_2 n)$
2-3 树的查找和插入效率为 $O(\log_2 n)$

4. 0-1 背包问题可以与一个化合问题多项式等价.