2011—2012 学年 第一学期末试卷(A)

学号________ 姓名________ 成绩________

考试科目：《 矩阵理论 》(A)

考试日期：2012 年 1 月 5 日

注意事项：1、共 6 个题目，考试时间 120 分钟

2、注: A^H 表示 H 转置，det(A) 表示行列式，I 表示单位阵

题目：

一、(本题 26 分)

二、(本题 15 分)

三、(本题 14 分)

四、(本题 15 分)

五、(本题 20 分)

六、(本题 10 分)

姓名： 学号： A

一、填空(**26 分**) (**注:** A^H 表示 H 转置，det(A) 表示行列式，**I** 表示单位阵)

(1) 若 3 阶阵 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = 0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J}_A =$ __________

(2) $(A \otimes B)^+ - A^+ \otimes B^+ =$ ______；若 A 可逆，则 $A^+ - A^{-1} =$ ______

(3) $(e^A)^+ e^{-A} e^{2A} =$ ______；$e^{-tr(A)} \det(e^A) =$ ______

(4) 若 $A = A^2 = A^H$，则 $\mathbf{A}^+ =$ __________

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $A \otimes B$ 的特征根为__________

(6) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 则谱半径 $\rho(A)$ 取值范围是__________

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\det(e^{\pi A}) =$ __________

(8) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}^+ =$ __________

(9) 矩阵 **A** 中各列都可用 **B** 的列线性表示($\mathbf{R(A)} \subset \mathbf{R(B)}$)，则有矩阵 **P** 使 $\mathbf{BP} =$ ______

(10) 方阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是__________

(11) A 是方阵(k 是自然数)，则 $\rho(A)^k$, $\|A^k\|$, $\|A\|^k$ 之间关系为__________

(12) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ 的满秩分解为__________；

(13) $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots =$ __________

二.1 设 $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$，计算 $f(A)=(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)$

2 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$求：$\det(e^A)$ ，$\rho(e^A)$；$\det(e^B)$，$\rho(e^B)$

3 设 $\mathbf{A}$是 3 阶正规阵，$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}$(特征根)．写出 $\mathbf{A}^{+}$的特征根与 $\mathbf{A}$的奇异值

三.设 $A=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$，(1)求 A 的最小式与 A 的 Jordan 标准形;.

(2)判断 $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}A\right)^n$ 是否收敛; (3)**不要计算** $f(A)$，直接求谱半径 $\rho(f(A))$

四. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，(1)求 A 的奇异值分解，或简化奇异值分解；

(2)利用奇异值分解求 A^{+}；　(3)求 $Ax=b$ 的极小范数解　或最小二乘解.

五.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}$ 求 e^{tA}，$(e^{tA})^{-1}$，e^{tB}，e^{tD}

六.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$\mathrm{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明：$\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$是正规阵 $\Leftrightarrow$ A,B 均是正规阵且 $C=0$