北京航空航天大學
Beijing University of Aeronautics and Astronautics

# 数字图像处理
# 傅立叶变换

1768 -1830

计算机学院

# 内容提要

- 内容回顾
- 数字图像的傅立叶变换
- 二维傅立叶变换的性质

# 上节内容

- ✓ 图像算术运算
- ✓ 图像逻辑运算
- ✓ 图像几何变换
- ✓ 图像非几何变换

# 图像运算

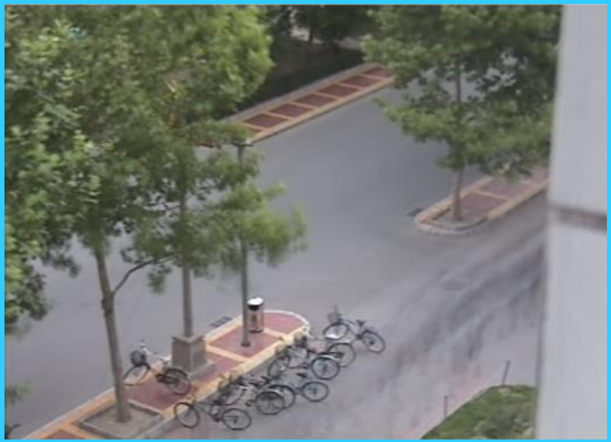
- 算术运算
  - ✓加法、减法
  - ✓乘法、除法
- 逻辑运算
  - ✓求反
  - ✓异或、或
  - ✓与

# 算术运算

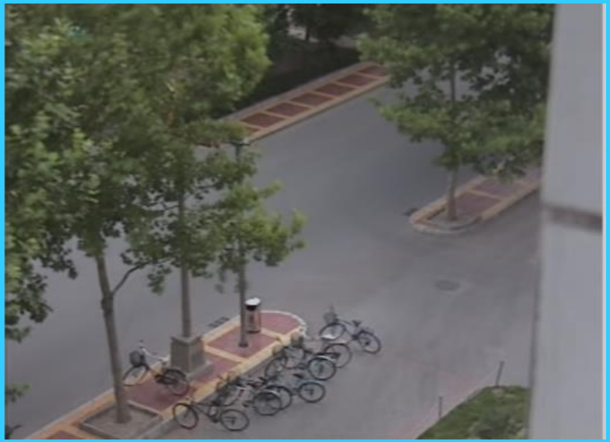
## 加法：去除叠加性噪音，生成图像叠加效果

第100帧

10帧平均



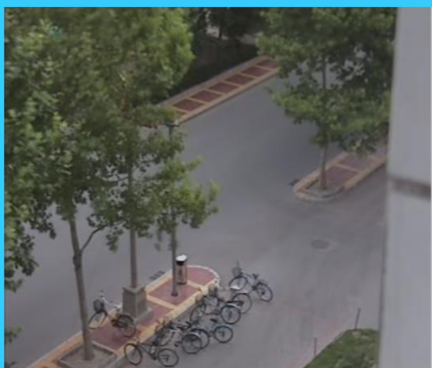
100帧平均



975帧平均

# 算术运算

**减法：去除不需要的叠加性图案；检测运动变化；计算物体边界的梯度**



975帧平均—背景

第100帧

背景帧差

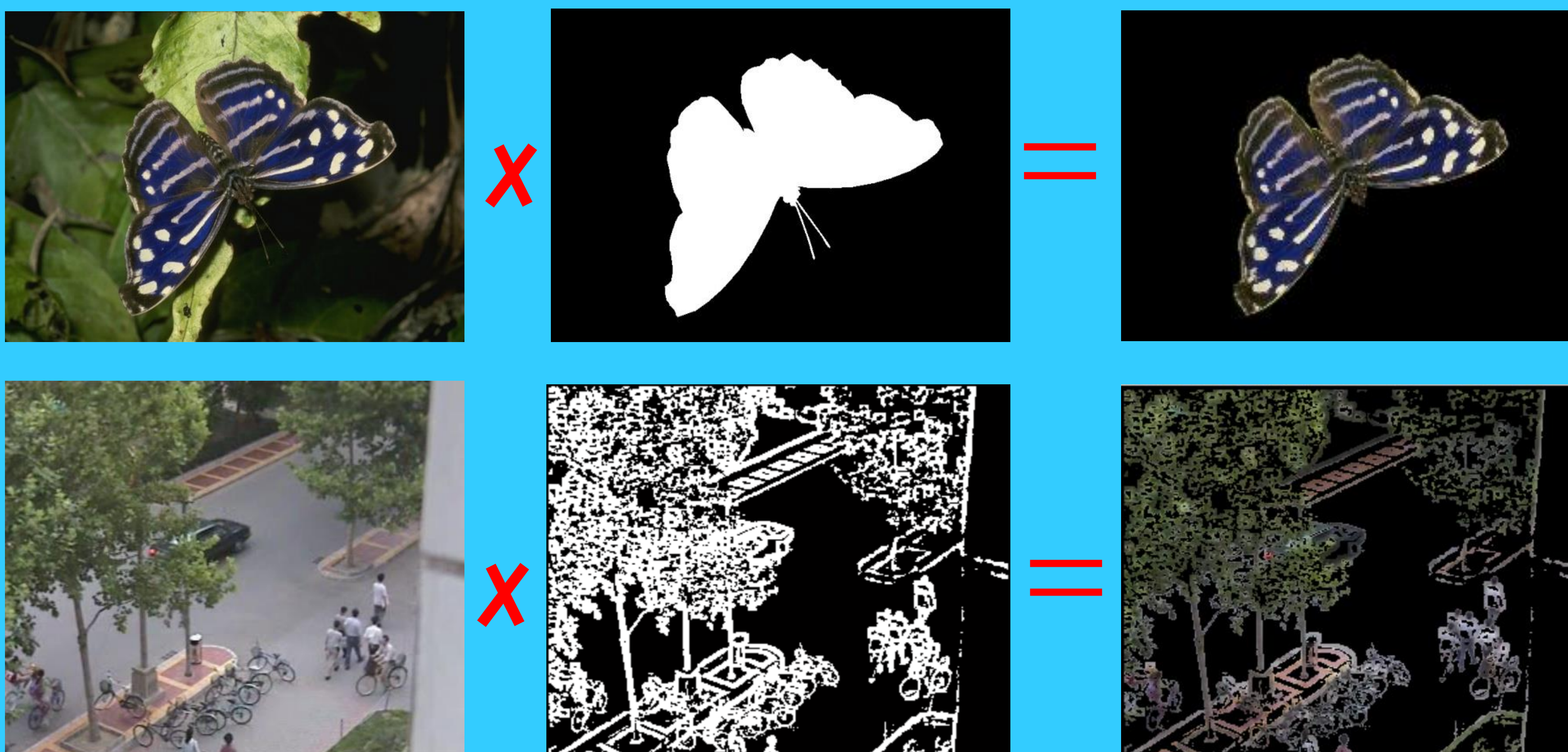
背景帧差二值化

第100帧

邻域梯度变化大于一定阈值

[redacted]

- 乘法：图像局部显示，掩膜图乘



# 算术运算

- **乘法**：一幅图像乘以一个常数通常被称为缩放。缩放通常将产生比简单添加像素偏移量自然得多的明暗效果，这是因为这种操作能够更好的维持图像的相关对比度。

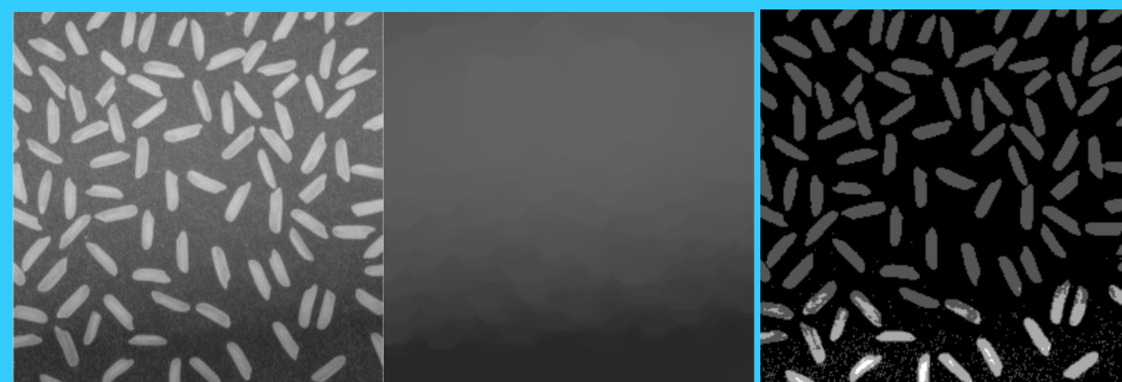
**原始图像**

Scale an image by a constant factor:
immultiply(moon, 2);

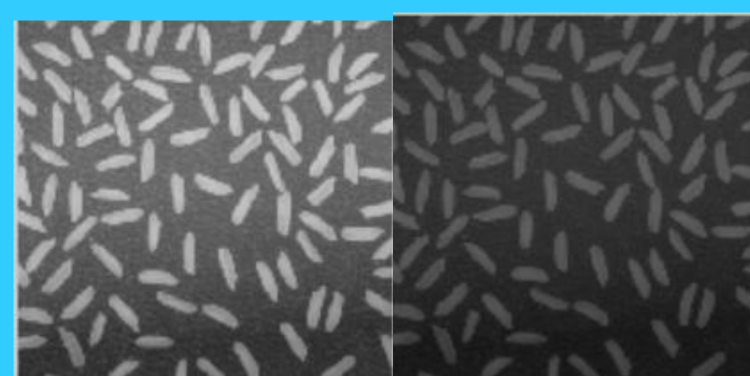
# 算术运算

- **除法：纠正由于照明或传感器的非均匀性造成的图像阴影，或产生比率图像**

```
I = imread('rice.png');
background =
imopen(I,strel('disk',15));
Ip = imdivide(I,background);
imshow(Ip,[])
```



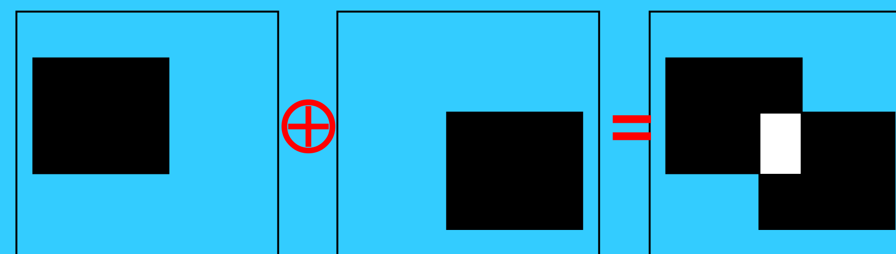
```
I = imread('rice.png');
J = imdivide(I,2);
subplot(1,2,1), imshow(I)
subplot(1,2,2), imshow(J)
```

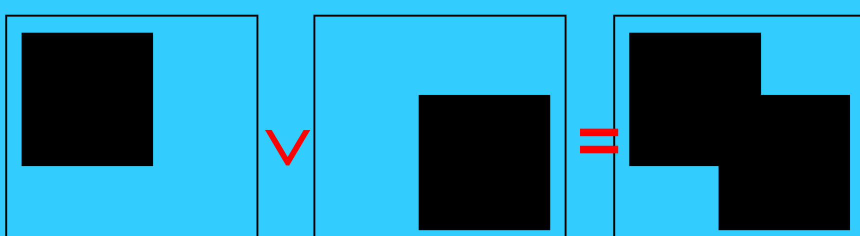


# 逻辑运算

## 逻辑运算

- ✓求反：阴图像
- ✓异或、或：获得相交子图像，合并子图像
- ✓与：相交子图




# 逻辑运算

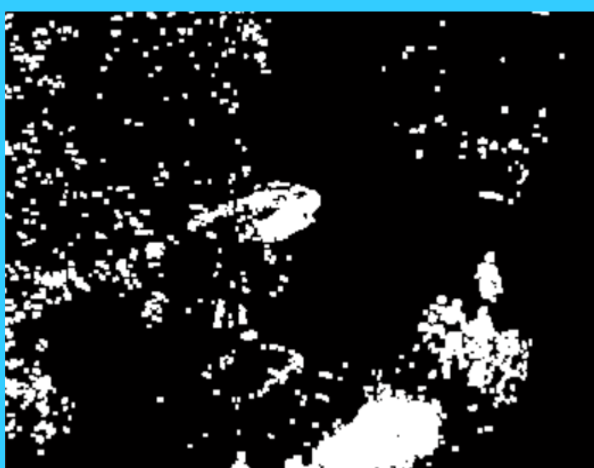
## 逻辑运算—形态学滤波

- ✓**腐蚀：** 用一个结构元素(一般3×3的大小)扫描图像中的每一个像素，用结构元素中的每一个像素与其覆盖的像素做“与”操作，如果都为1，则该像素为1，否则为0。
  —消除物体边界点，使目标缩小，可以消除小于结构元素的噪声点。
- ✓**膨胀：** 用一个结构元素(一般3×3的大小)扫描图像中的每一个像素，用结构元素中的每一个像素与其覆盖的像素做“与”操作，如果都为0，则该像素为0，否则为1。
  —目标增大，可添补目标中的空洞。

# 逻辑运算

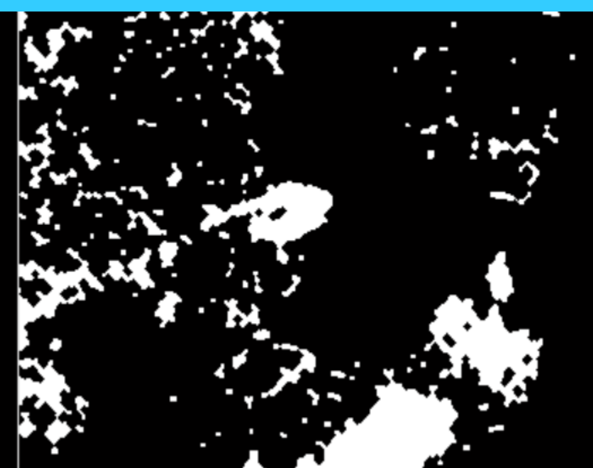
## 逻辑运算—形态学滤波

- ✓**开运算：** 先腐蚀后膨胀，可以消除图像上细小的噪声，并平滑物体边界。
- ✓**闭运算：** 先膨胀后腐蚀，可以填充物体内细小的空洞，并平滑物体边界。



原图

开运算



闭运算

# 空域变换

- **几何变换**
  - 基本变换：平移、旋转、缩放、镜像、拉伸
  - 灰度级插值：最近邻插值法、双线性插值
- **非几何变换**
  - 模板运算：均值变换
  - 灰度级变换：求反、对比度拉伸、动态范围压缩
  - 直方图

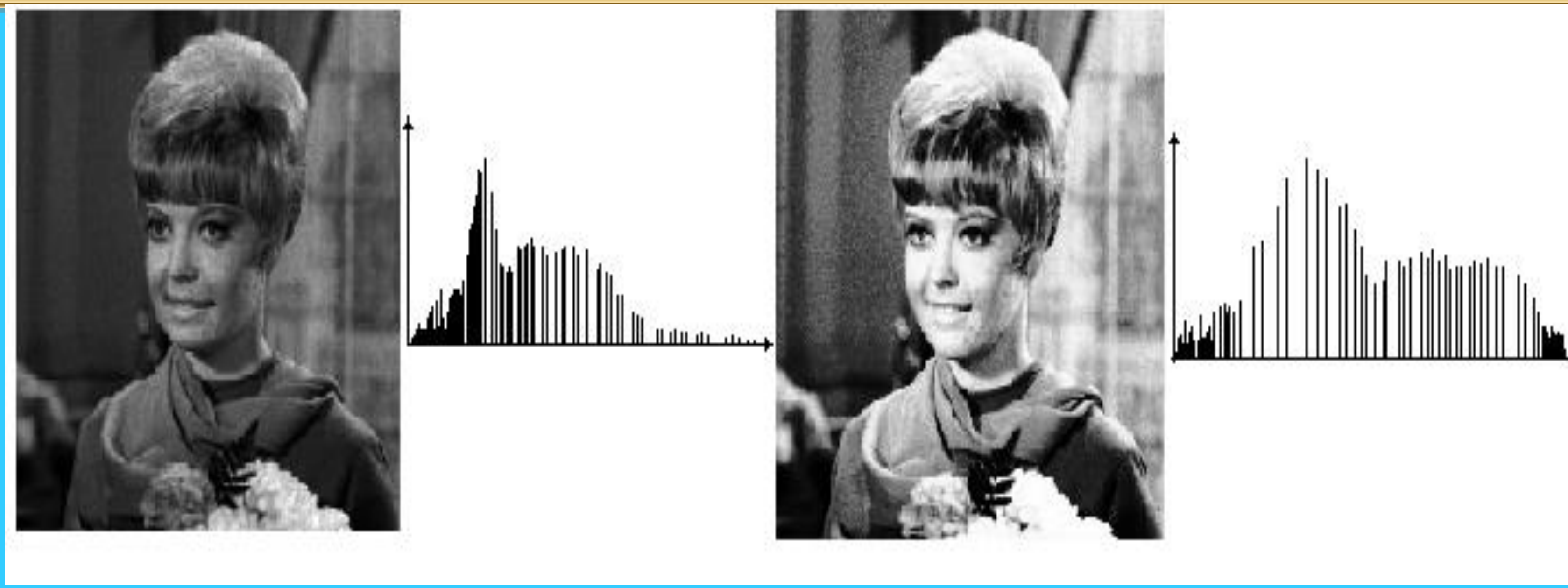
# 非几何变换—直方图

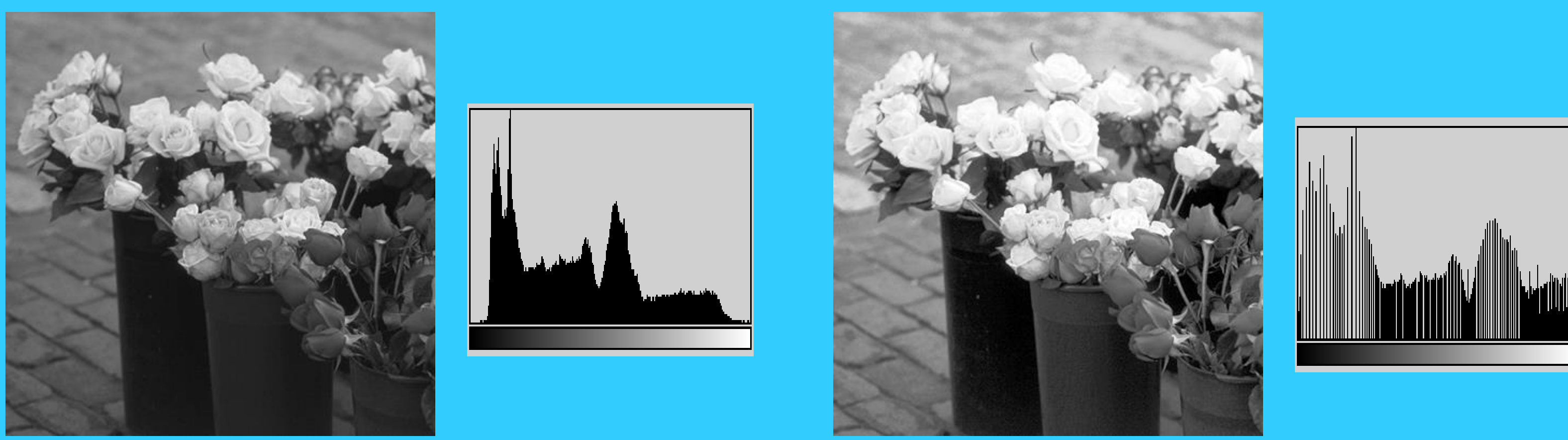
- **直方图变换的内容**
  - **图像直方图的定义**
  - **直方图应用举例**
    - ✓ **直方图均衡化**
    - ✓ **直方图规定化**

# 直方图均衡化—步骤

- 直方图应用举例—直方图均衡化步骤
  - 原始图象灰度级k归一化在[0,1]之间， 0≤r≤1；
  - 计算原始图象灰度分布的概率密度函数p(r)；
  - 直方图均衡化处理实际上就是寻找一个灰度变换函数T，使变化后的灰度值s=T（r）,其中s归一化为0≤s≤1 ,即建立r与s之间的映射关系，**求处理后图象灰度分布的概率密度函数，期望所有灰度级出现概率相同。**

# 直方图均衡化——示例





## ■ 直方图规定化

- 在某些情况下，并不一定需要具有均匀直方图的图像，有时需要具有特定的直方图的图像，以便能够增强图像中某些灰度级。
- 直方图规定化方法就是针对上述思想提出来的。**直方图规定化是使原图像灰度直方图变成规定形状的直方图而对图像作修正的增强方法。**
- 可见，它是对直方图均衡化处理的一种有效的扩展。直方图均衡化是直方图规定化的一个特例。

# 直方图规定化

原图像：r→直方图均衡化结果S

希望图像：z →直方图均衡化结果V

→ S=V

- 假设$P_r(r)$和$P_z(z)$分别为原始图像和希望得到的图像的概率密度函数（r和z分别代表原始图像和希望得到的图像的灰度级）
- 首先对原始图像进行直方图均衡化，即求变换函数

$$S = T(r) = \int_0^r P_r \, dr$$

- 假定已得到了所希望的图像，对它进行直方图均衡化，即

$$V = G(z) = \int_0^x P_z \, dz$$

- 它的逆变换为$Z=G^{-1}(V)$

[redacted]

# 直方图规定化

| 序号 | 运算 | 步骤和结果 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 原始图像灰度级 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 原始直方图各灰度级像素 | 790 | 1023 | 850 | 656 | 329 | 245 | 122 | 81 |
| 3 | 原始直方图$P(r)$ | 0.19 | 0.25 | 0.21 | 0.16 | 0.08 | 0.06 | 0.03 | 0.02 |
| 4 | 原始累积直方图$V_1$ | 0.19 | 0.44 | 0.65 | 0.81 | 0.89 | 0.95 | 0.98 | 1.00 |
| 5 | 规定直方图$P(z)$ | 0 | 0 | 0 | 0.15 | 0.20 | 0.30 | 0.20 | 0.15 |
| 6 | 规定累积直方图$V_2$ | 0 | 0 | 0 | 0.15 | 0.35 | 0.65 | 0.85 | 1.00 |
| 7 | 映射$\|V_2-V_1\|$最小 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 确定映射关系 | 0->3 | 1->4 | 2->5 | 3,4->6 | | 5,6,7->7 | | |
| 9 | 变换后直方图 | 0 | 0 | 0 | 0.19 | 0.25 | 0.21 | 0.24 | 0.11 |

S

V

0 1 2 3 4 5 6 7

V1: 0.19 0.44 0.65 0.81 0.89 0.95 0.98 1.00

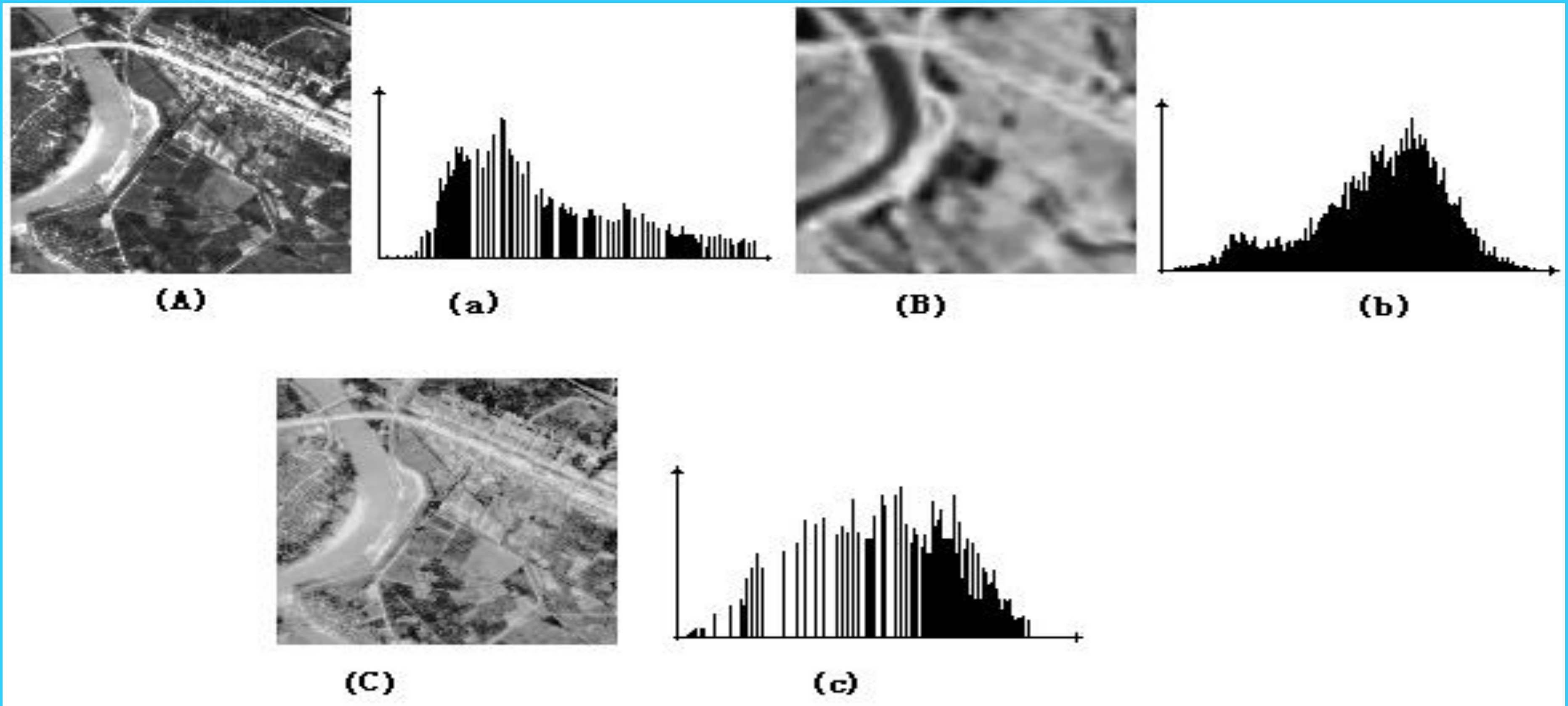
4 5

V2: 0 0 0 0.15 0.35 0.65 0.85 1.00

3

3 4 5 6 6 7 7 7

[redacted]




## 直方图规定化在图像融合中的应用

图像(C)是将图像(A)按图(B)的直方图进行规定化得到的结果及其直方图。通过对比可以看出图(C)的对比度同图（B)接近一致，对应的直方图形状差异也不大。这样有利于影像融合处理，保证融合影像光谱特性变化小。

[redacted]

# 内容提要

- 内容回顾
- 数字图像的傅立叶变换
- 二维傅立叶变换的性质

# 数字图像变换

- 图像变换是数字图像处理与分析中一种常用的、有效的分析手段
- 图像变换的作用
  - 简化图像处理
  - 提取图像特征
  - 增强图像信息的理解
- 广泛应用在图像增强、图像恢复、特征提取、图像压缩编码和形状分析等方面

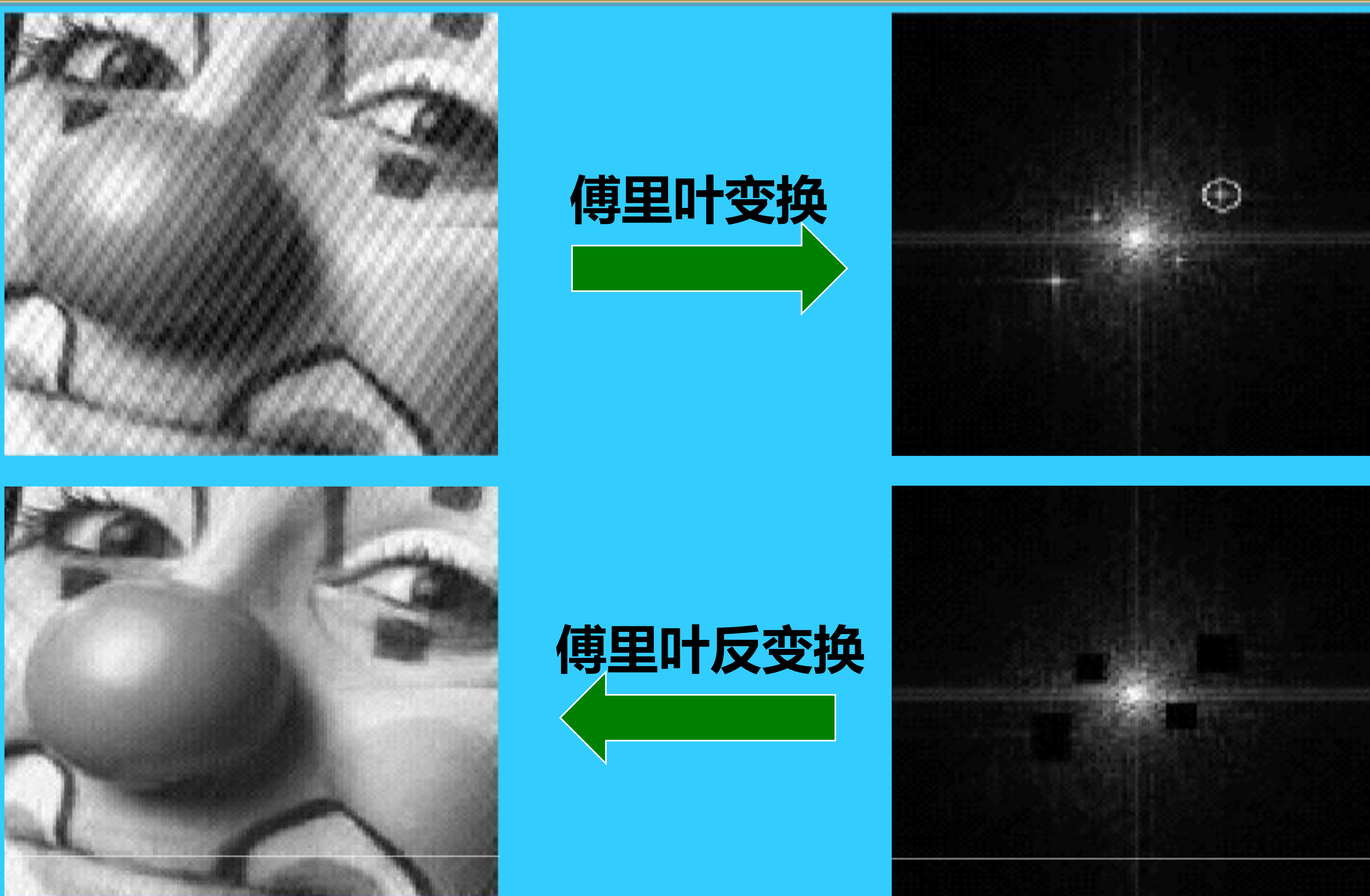
- **图像变换的要求：**
- **–一般是线性变换**
- **–其基本线性运算是严格可逆的**
- **–满足一定的正交条件**

$$F = PfQ \qquad f = P^{-1}FQ^{-1}$$

# 数字图像正交变换

- **傅立叶变换(Fourier)**
- **沃尔什变换**(Walsh)
- **哈达玛变换(Hadamard)**
- **离散余弦变换（DCT）**
- K-L**变换**
- **小波变换(Wavelet)**

# 傅立叶变换




[redacted]

# 傅立叶变换

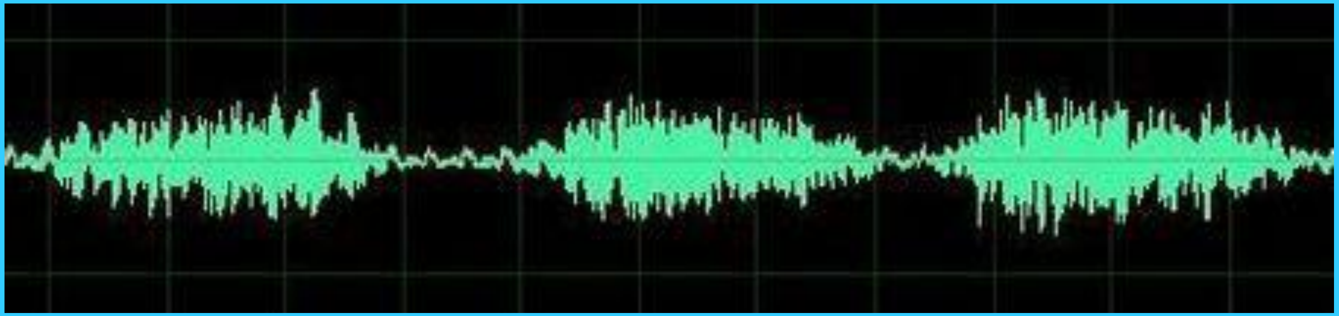
1768 -1830

- 法国数学家Fourier在1807年的出版的传记和1822年的出版的《热分析理论》中提出傅立叶变换FT
- 最初想法是应用于热扩散领域
- 19世纪60年代出现快速傅立叶变换FFT，在信号处理领域产生了巨大变革
- 傅立叶变换域也称为频域

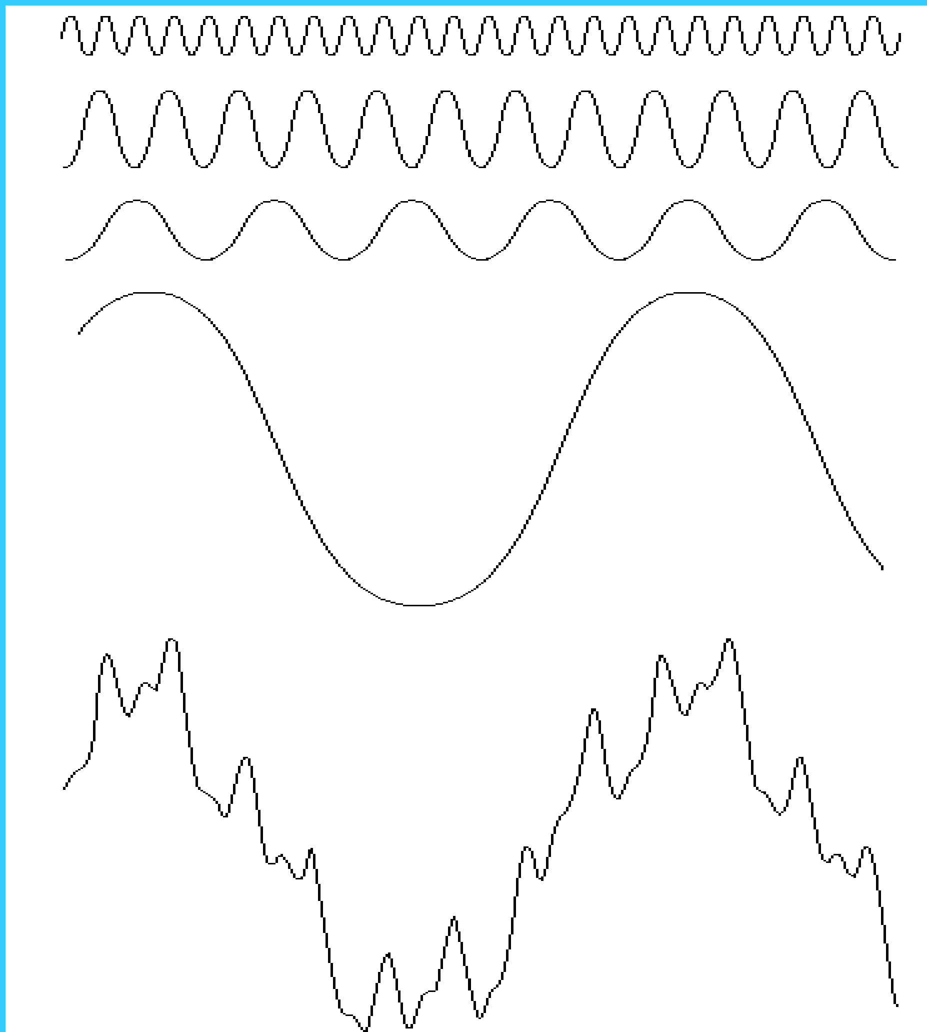
- **傅立叶变换**
  - **线性系统分析的一个有力工具**
  - **定量地分析诸如数字图像之类的数字化系统**
  - **傅立叶变换的理论与物理解释相结合**
  - **有利于解决大多数图像处理问题**

# 傅立叶变换

- 我们看到的世界都以时间贯穿，股票的走势、人的身高、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为**时域分析**。
- 用另一种方法来观察世界，发现世界是永恒不变的，这个静止的世界就叫做**频域**。



# 傅立叶变换



| 频率 | 权重 |
| --- | --- |
| $f_1$ | $w_1$ |
| $f_2$ | $w_2$ |
| $f_3$ | $w_3$ |
| $f_4$ | $w_4$ |

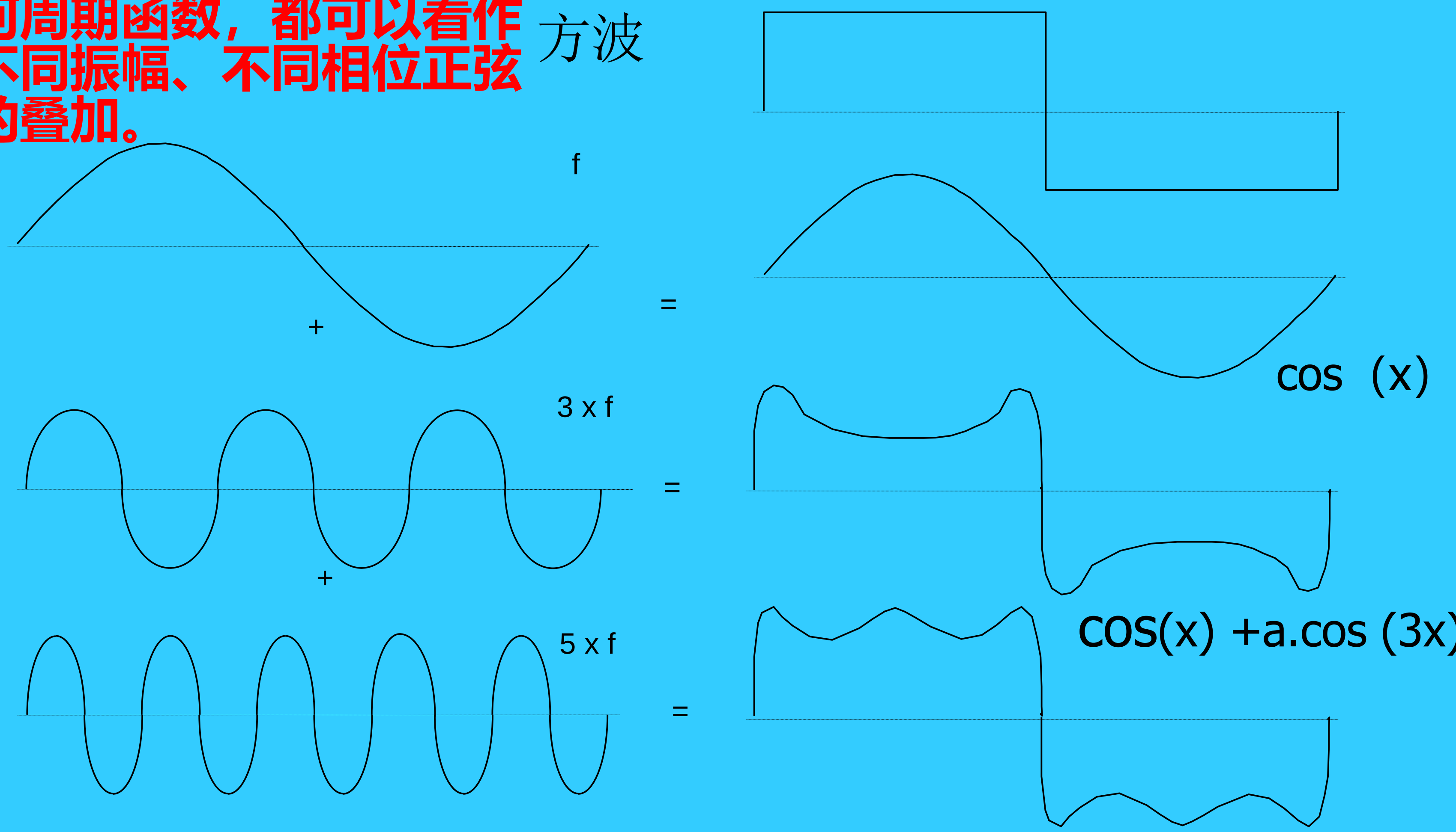
||

**周期函数 f**

**把一个复杂的输入信号分解成复指数信号的线性组合**

# 变换问题的引入

**任何周期函数，都可以看作是不同振幅、不同相位正弦波的叠加。**




$$g(x) = \sum_{i=0}^{i=N/2-1} g_i(x) = \sum_{i=0}^{i=N/2-1} A_i \cos\left(x \cdot 2\pi\, i / N + \phi_i\right)$$

[redacted]

- 连续与离散的傅立叶变换
  - 一维连续傅立叶变换
  - 二维连续傅立叶变换
  - 离散傅立叶变换
  - 离散傅立叶变换的计算与显示

# 一维傅立叶变换

- **连续函数f(x)的傅立叶变换F(u)：**

**傅立叶变换：**

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$\boxed{j=\sqrt{-1}}$$

**傅立叶反变换：**

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du$$

# 一维离散傅立叶变换

- f(x), x=0,1,...,N-1. 离散函数
- F(u), u=0,1,...,N-1

**离散傅立叶变换：**

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi\frac{u}{N}x}$$

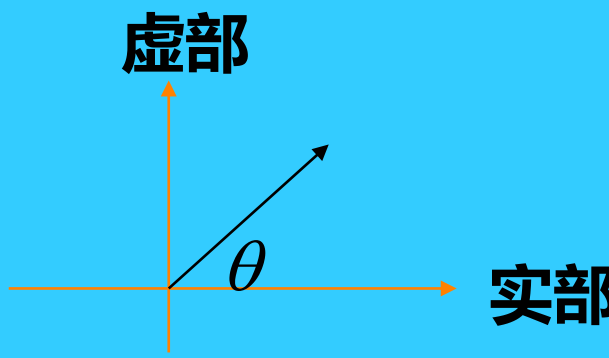
**离散傅立叶反变换：**

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi\frac{u}{N}x}$$

# 复数→实数

欧拉公式 $e^{j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + j\sin(2\pi ux)$

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$
$$= |F(u)| e^{-j\theta(u)}$$



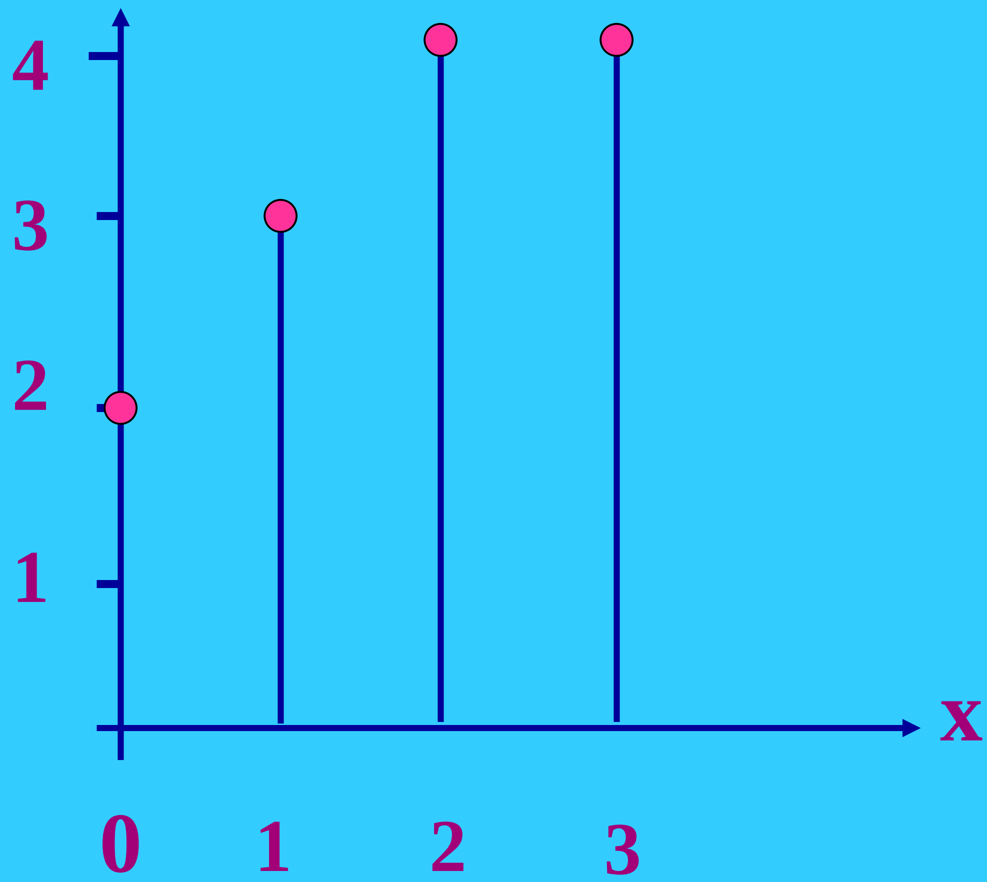

幅值谱 $|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$

相位谱 $\theta(u) = \tan^{-1}[\frac{I(u)}{R(u)}]$

能量谱 $P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$

[redacted]

# 一维DFT—举例




**N=4**

**f(0)=2**

**f(1)=3**

**f(2)=4**

**f(3)=4**

[redacted]

# 一维DFT—举例

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi\frac{u}{N}x}$$

F(0) = 1/4Σf(x)exp[0]
= 1/4[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]
= 1/4(2 + 3 + 4 + 4)
= 3.25

F(1) = 1/4Σf(x)exp[-j2πx/4)]
= $1/4(2e^{0} + 3e^{-j2\pi/4} + 4e^{-j2\pi 2/4} + 4e^{-j2\pi 3/4})$
= 1/4(-2 + j)

F(2) = 1/4Σf(x)exp[-j 2*2πx/4)]
= -1/4(1 + j)

F(3) = -1/4(2 + j)

$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

[redacted]

北京航空航天大學
Beijing University of Aeronautics and Astronautics

# 一维DFT—举例

- **离散傅立叶变换的计算举例**
  - 函数f(x,y)的傅立叶变换F(u,v)是f(x,y)积分的函数，因此计算每一个傅立叶变换值，原函数f(x,y)的每一个点都需要参与
  - 通过对傅立叶变换求模，来显示傅立叶变换图象。由于模的值域大于显示的值域，因此要进行动态值域的压缩

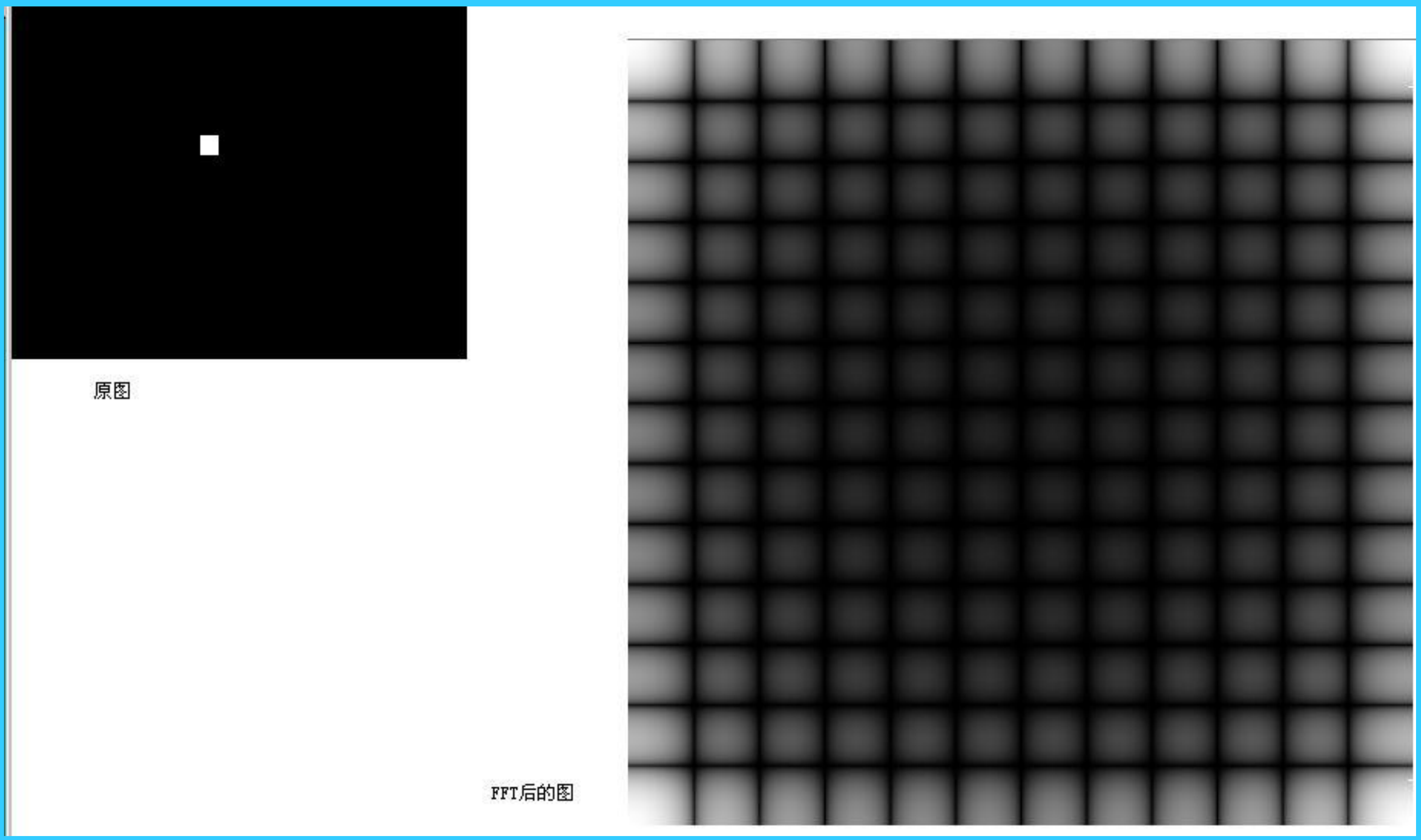
$$D(u,v) = c \log(1 + |F(u,v)|)$$

其中： $c = 255 / k;$

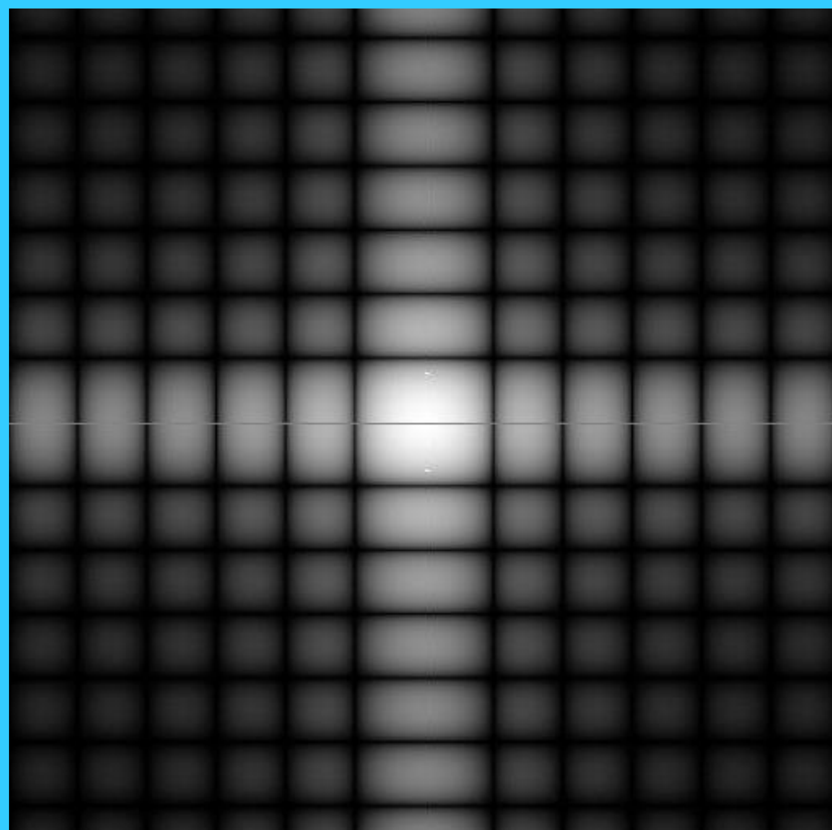
$$k = \max(\log(1 + |F(u,v)|))$$

值域[0,k]的上限（最大值）

# • 离散傅立叶变换的显示



- 离散傅立叶变换的显示



# 一维扩展到二维

## 二维傅立叶变换

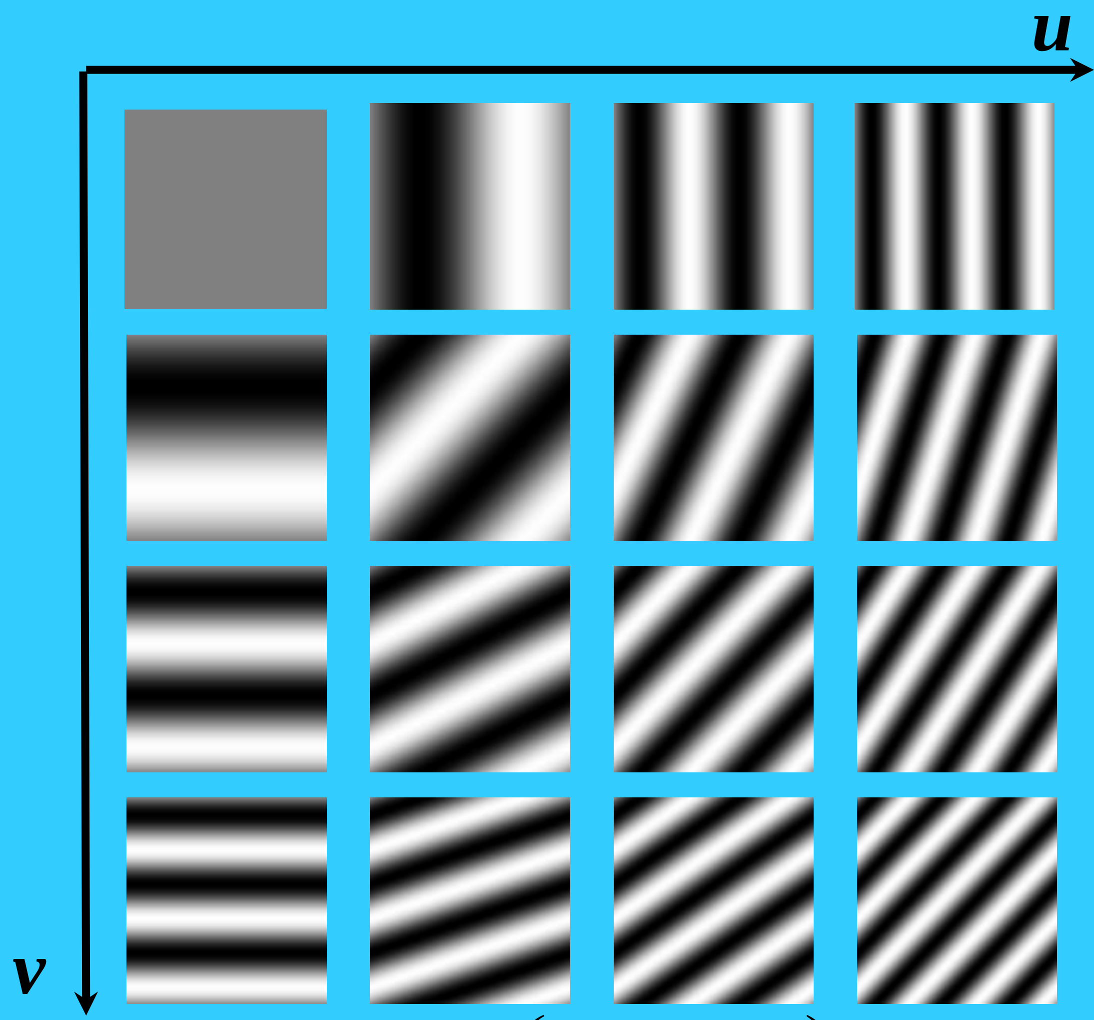
$$
\begin{cases}
F(u,v)=\dfrac{1}{MN}\displaystyle\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{M-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)} \\[2ex]
f(x,y)=\displaystyle\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}
\end{cases}
$$

- **有用的表述**

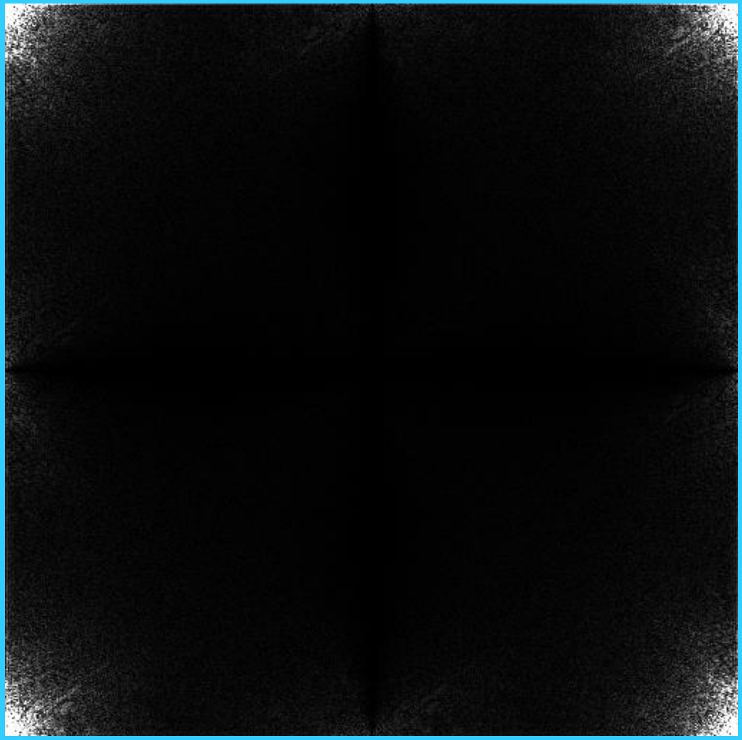
$$\begin{cases} |F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} & \text{幅值谱} \\ \phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\dfrac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] & \text{相位谱} \end{cases}$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v) \qquad \text{能量谱}$$

# 基图像




$$e^{-j2\pi(xu+yv)/N}$$



# 幅值的对数变换

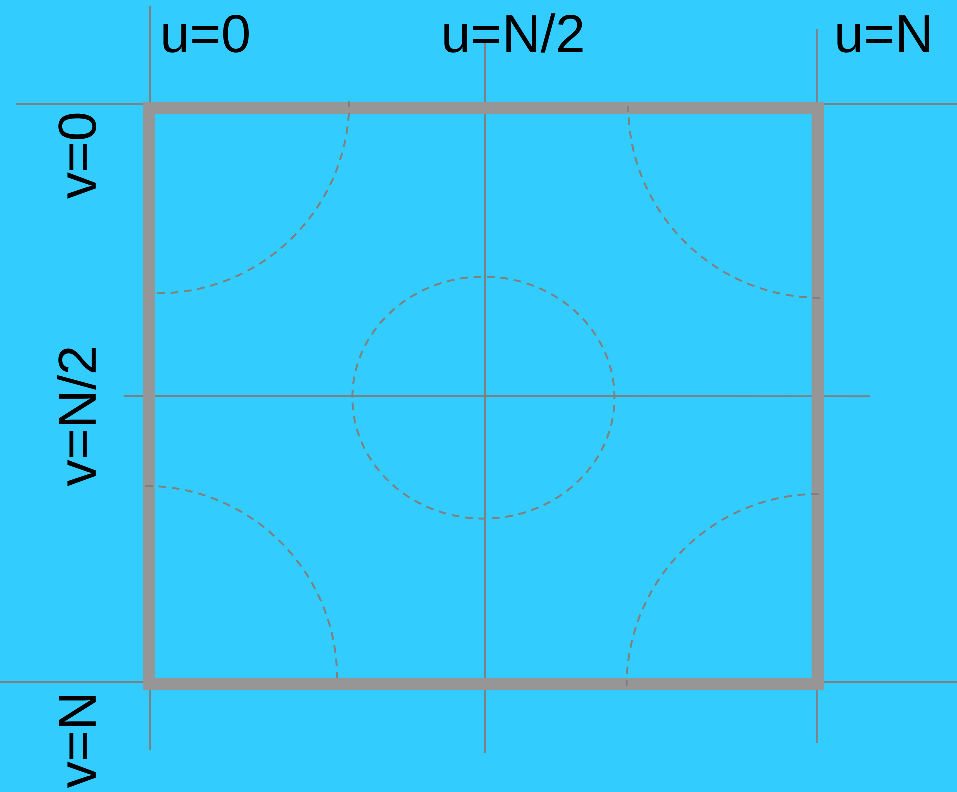
- 完成DFT后再进行幅值的对数变换

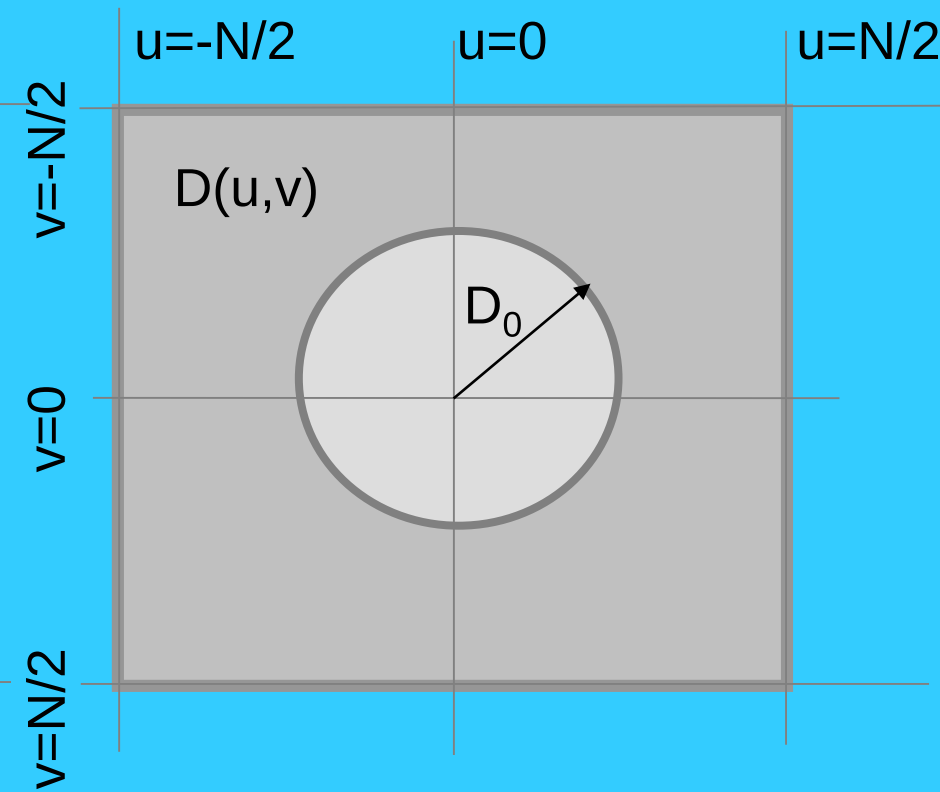
$$\mathrm{F(u,v)} = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi(ux+vy)}{N}\right]$$

- 变换公式
  - D(u,v) = c log(1 + |F(u,v)|)

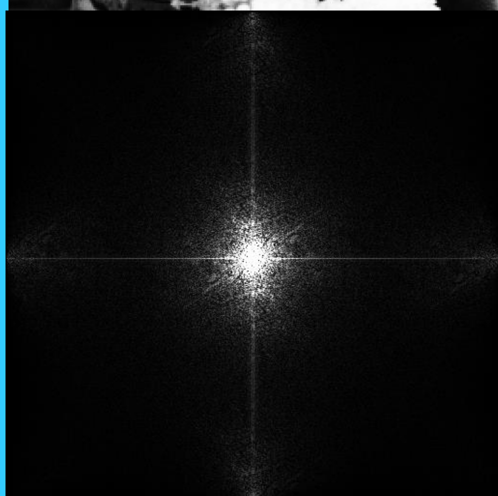
    其中： c = 255 / k;
  - k = max(log(1 + |F(u,v)|))

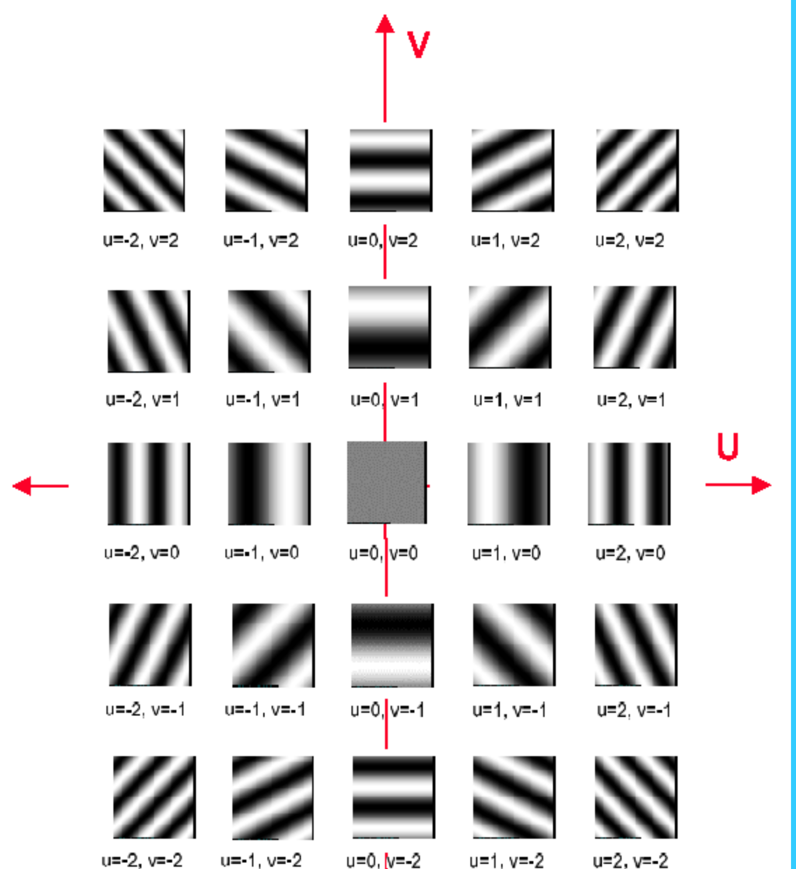
# 中心化平移问题




$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2, v-N/2)$$

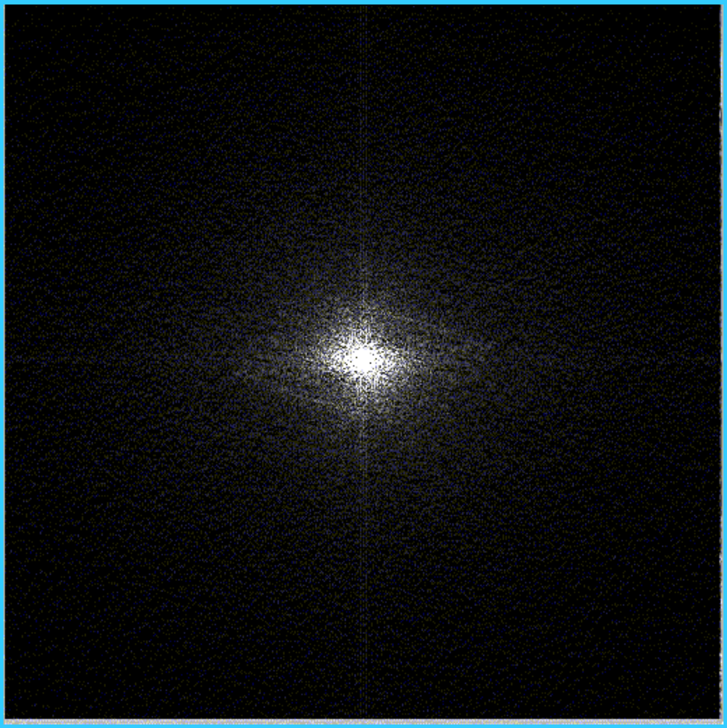





$$e^{-j2\pi\left(xu+yv\right)/N}$$

# 变换问题的引入

- 空间域
  灰度
- 频率域
  幅值与频率



# 图像一维傅立叶变换

- 设 x(n):x(0),x(1),……,x(N-1);
  X(m): X(0), X(1),……,X(N-1)是数字序列，
  则序列x(n)的傅立叶变换生成序列X(m)表示如下：

正变换 $$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi mn/N}$$

反变换 $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X(m)e^{j2\pi mn/N}$$

缩写 $$W=e^{\frac{-j2\pi}{N}}$$

函数W的周期为N

# 图像一维傅立叶变换

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0*0} & W^{0*1} & W^{0*2} & W^{0*3} & W^{0*4} & W^{0*5} & W^{0*6} & W^{0*7} \\ W^{1*0} & W^{1*1} & W^{1*2} & W^{1*3} & W^{1*4} & W^{1*5} & W^{1*6} & W^{1*7} \\ W^{2*0} & W^{2*1} & W^{2*2} & W^{2*3} & W^{2*4} & W^{2*5} & W^{2*6} & W^{2*7} \\ W^{3*0} & W^{3*1} & W^{3*2} & W^{3*3} & W^{3*4} & W^{3*5} & W^{3*6} & W^{3*7} \\ W^{4*0} & W^{4*1} & W^{4*2} & W^{4*3} & W^{4*4} & W^{4*5} & W^{4*6} & W^{4*7} \\ W^{5*0} & W^{5*1} & W^{5*2} & W^{5*3} & W^{5*4} & W^{5*5} & W^{5*6} & W^{5*7} \\ W^{6*0} & W^{6*1} & W^{6*2} & W^{6*3} & W^{6*4} & W^{6*5} & W^{6*6} & W^{6*7} \\ W^{7*0} & W^{7*1} & W^{7*2} & W^{7*3} & W^{7*4} & W^{7*5} & W^{7*6} & W^{7*7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

- **x(n)是输入函数，X(m)是输出函数，N=8**

$$X(m) = \sum_{n=0}^{n=7} x(n) e^{-j2\pi mn/8}$$

- **函数W周期为 [redacted]8**

$$W = e^{\frac{-j2\pi}{8}}$$

$$W^0 = 1, \qquad W^1 = (1-j)/\sqrt{2}$$

$$W^2 = -j \qquad W^3 = (-1-j)/\sqrt{2}$$

$$W^4 = -1, \qquad W^5 = (-1+j)/\sqrt{2}$$

$$W^6 = j \qquad W^7 = (1+j)/\sqrt{2}$$

# 图像一维傅立叶变换

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W^{0*0} & W^{0*1} & W^{0*2} & W^{0*3} & W^{0*4} & W^{0*5} & W^{0*6} & W^{0*7} \\
W^{1*0} & W^{1*1} & W^{1*2} & W^{1*3} & W^{1*4} & W^{1*5} & W^{1*6} & W^{1*7} \\
W^{2*0} & W^{2*1} & W^{2*2} & W^{2*3} & W^{2*4} & W^{2*5} & W^{2*6} & W^{2*7} \\
W^{3*0} & W^{3*1} & W^{3*2} & W^{3*3} & W^{3*4} & W^{3*5} & W^{3*6} & W^{3*7} \\
W^{4*0} & W^{4*1} & W^{4*2} & W^{4*3} & W^{4*4} & W^{4*5} & W^{4*6} & W^{4*7} \\
W^{5*0} & W^{5*1} & W^{5*2} & W^{5*3} & W^{5*4} & W^{5*5} & W^{5*6} & W^{5*7} \\
W^{6*0} & W^{6*1} & W^{6*2} & W^{6*3} & W^{6*4} & W^{6*5} & W^{6*6} & W^{6*7} \\
W^{7*0} & W^{7*1} & W^{7*2} & W^{7*3} & W^{7*4} & W^{7*5} & W^{7*6} & W^{7*7}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ \text{[redacted]} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\
W^{0} & W^{1} & W^{2} & W^{3} & W^{4} & W^{5} & W^{6} & W^{7} \\
W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} & W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} \\
W^{0} & W^{3} & W^{6} & W^{1} & W^{4} & W^{7} & W^{2} & W^{5} \\
W^{0} & W^{4} & W^{0} & W^{4} & W^{0} & W^{4} & W^{0} & W^{4} \\
W^{0} & W^{5} & W^{2} & W^{7} & W^{4} & W^{1} & W^{6} & W^{3} \\
W^{0} & W^{6} & W^{4} & W^{2} & W^{0} & W^{6} & W^{4} & W^{2} \\
W^{0} & W^{7} & W^{6} & W^{5} & W^{4} & W^{3} & W^{2} & W^{1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}
$$

# 图像二维傅立叶变换

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n-1,0) & f(n-1,1) & \dots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- 图像矩阵
- 实数

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(n-1,0) & F(n-1,1) & \dots & F(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- 频域矩阵
- 复数

# 图像二维傅立叶变换

- **傅立叶变换：** $F(u,v)=|F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$
- **傅立叶谱：**

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

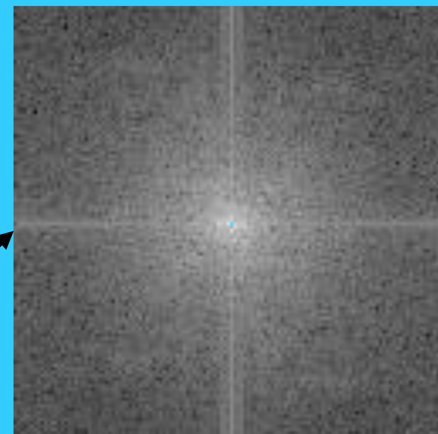
- **相位**

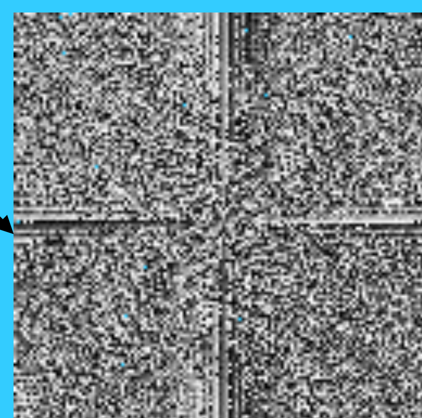
$$\phi(u,v)=\arctan(I(u,v)/R(u,v))$$

- **能量谱：** $E=|F(u,v)|^2$

# 图像傅立叶变换

$$\left|F(x)\right|$$





$$\angle F(x)$$

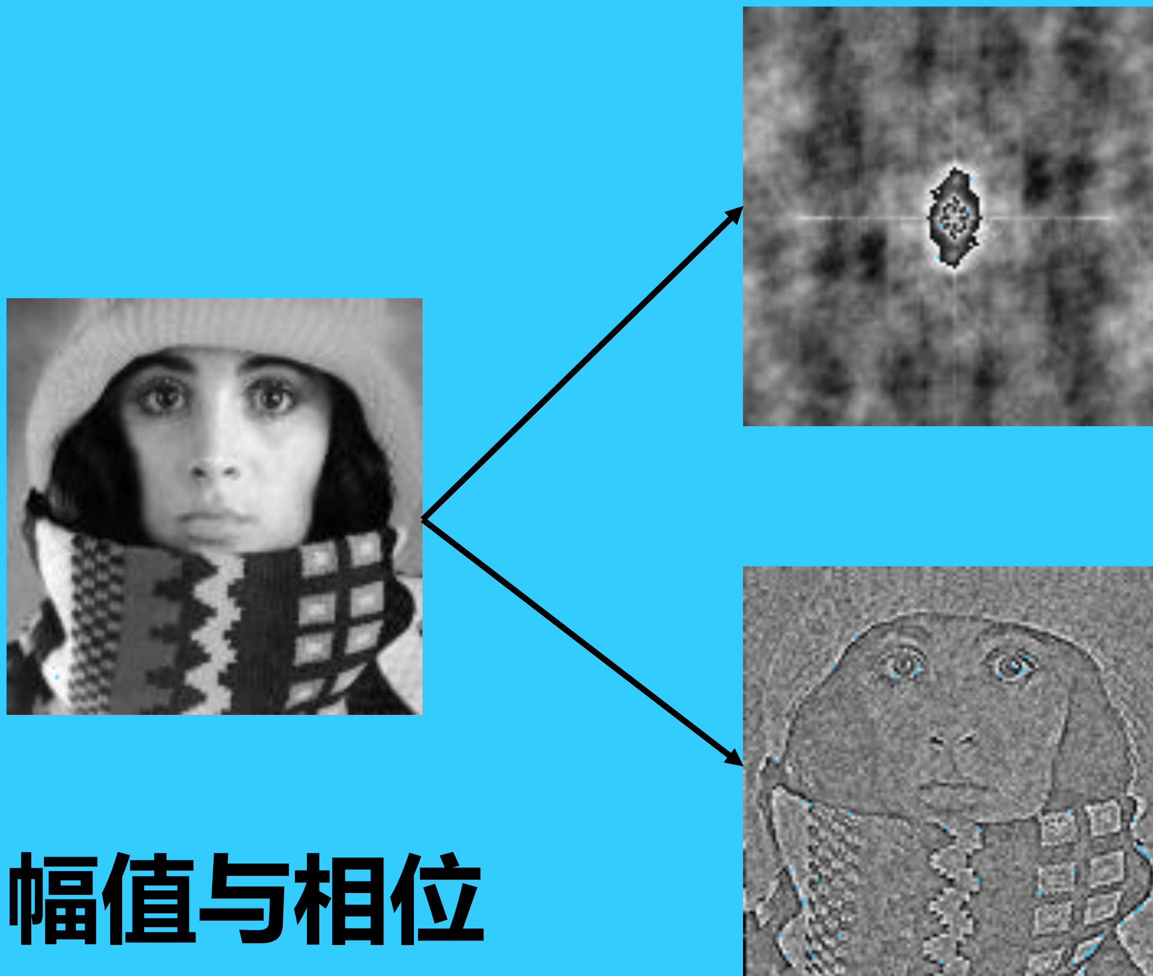
- **傅立叶谱：**

  $|F(u,v)| = [R^2(u,v)+I^2(u,v)]^{1/2}$

- **相位：**

  $\phi(u,v) = \arctan(I(u,v)/R(u,v))$

# 图像傅立叶变换



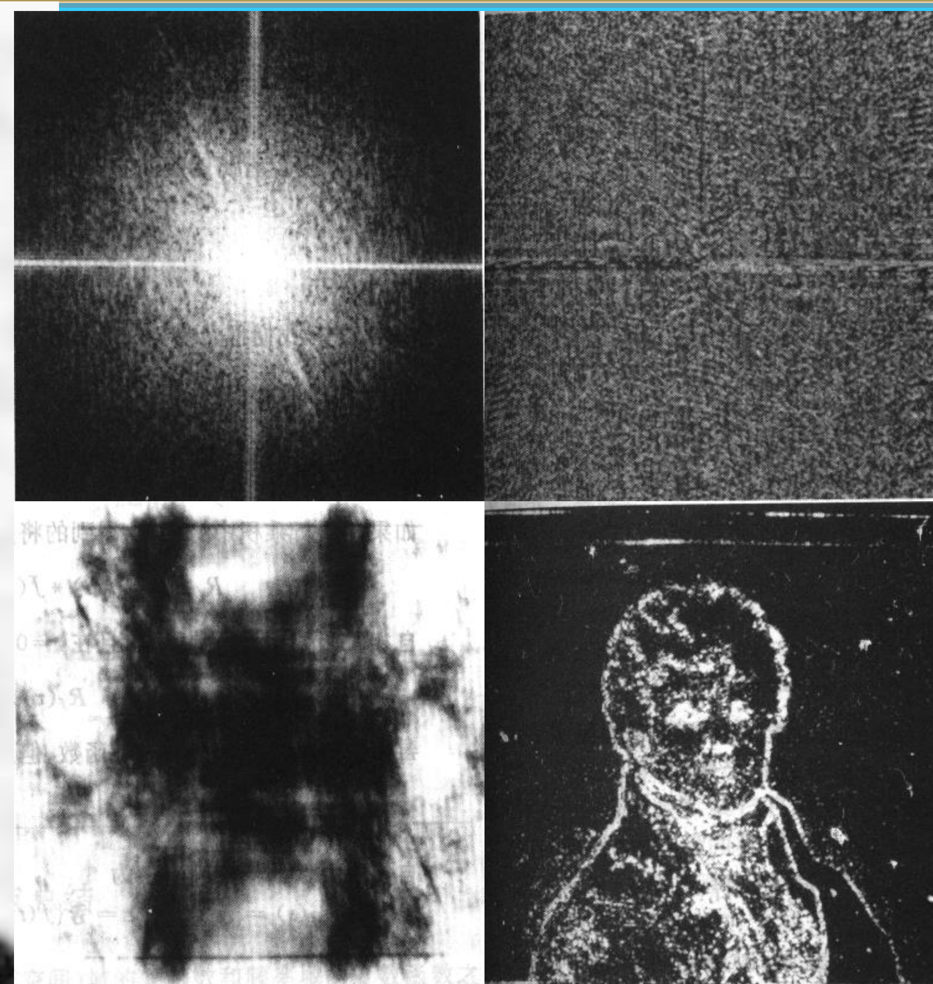
$$F^{-1}\left(\left|F(x)\right|\right)$$

$$F^{-1}\left(F(x)/\left|F(x)\right|\right)$$

- **幅值与相位**

[redacted]

# 图像傅立叶变换



•幅值谱 •相位谱 •幅值重构图像 •相位重构图像

[redacted]

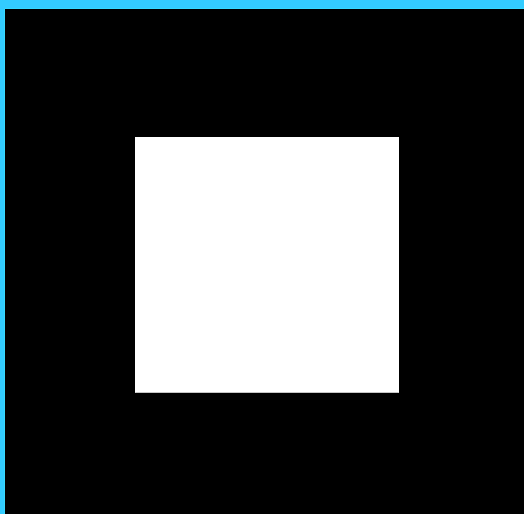
# 图像傅立叶变换

- **傅立叶变换的作用是全局的**
  - 图像中的特定成分与频率没有直接关系
- **关于频谱的直觉**
  - 变化最慢的频率成分(u=0, v=0)对应图像平均灰度
  - 低频（原点附近）对应图像灰度变化慢的像素
  - 高频（远离原点）对应图像灰度变化快的像素

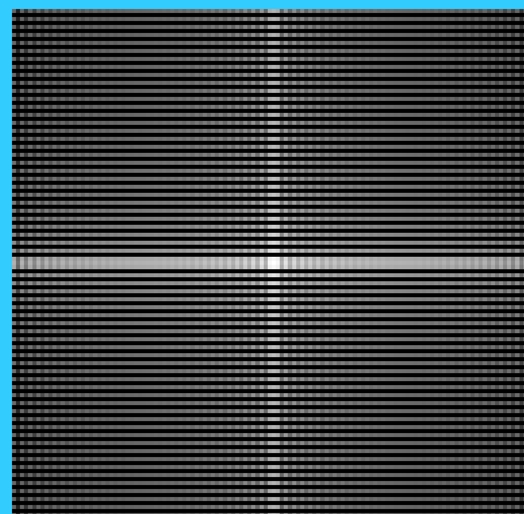
(a) (b)

[redacted]

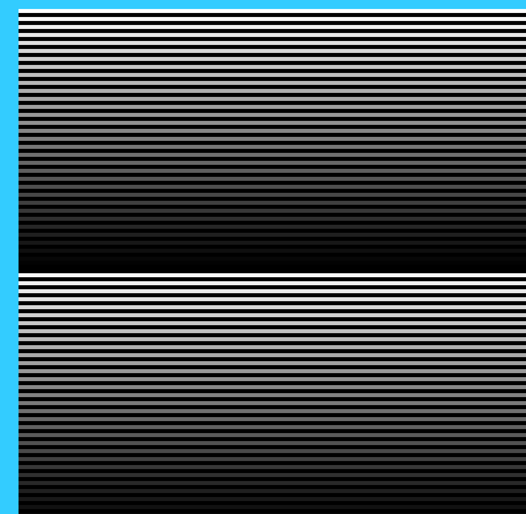
# 图像傅立叶变换



原图像



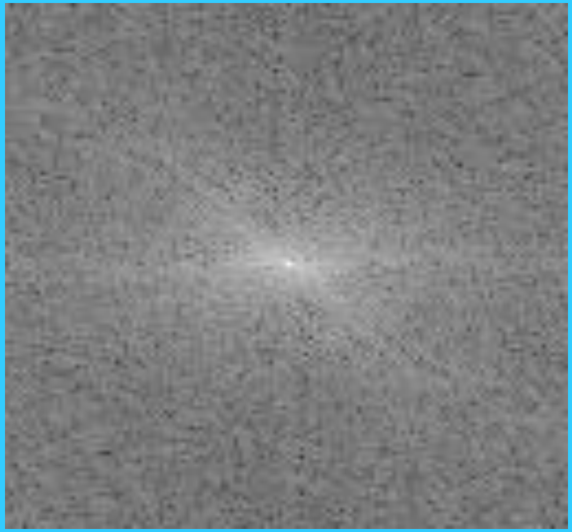
幅度谱



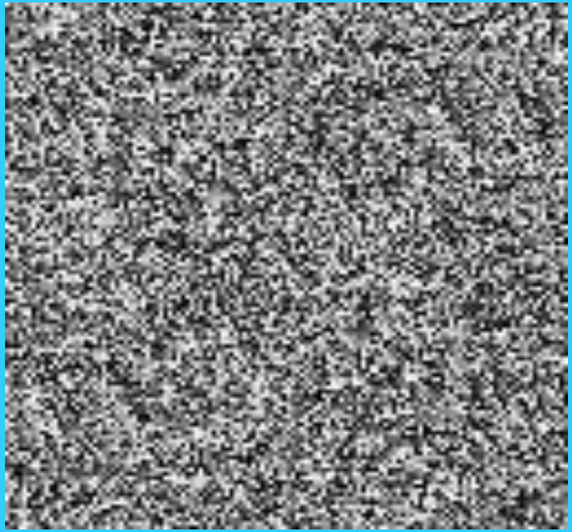
相位谱

# 图像傅立叶变换

原图像



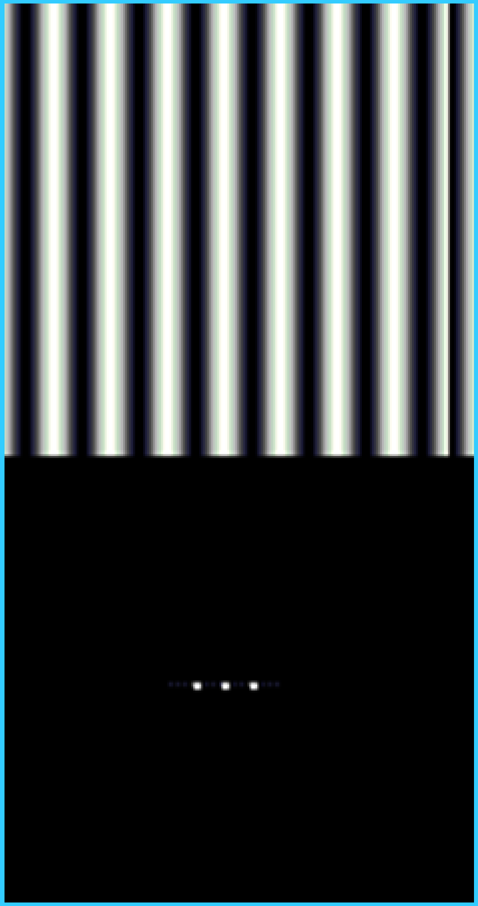
幅度谱

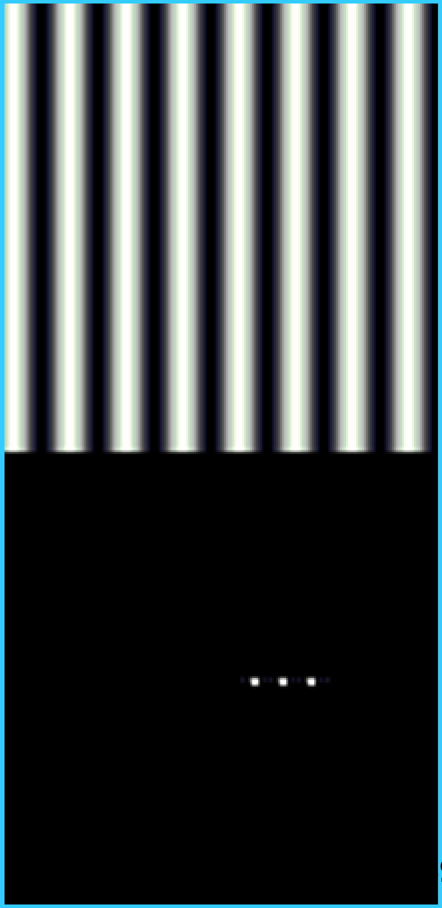


相位谱

# 图像二维傅立叶变换

- 幅度谱说明图像中某种频率的成份有多少
- 相位谱说明频率成份位于图像的什么位置
  - 通常关心幅度谱
  - 下面两个图对应的幅度谱是一样（只显示了其幅度谱，当然相位谱是不一样的）

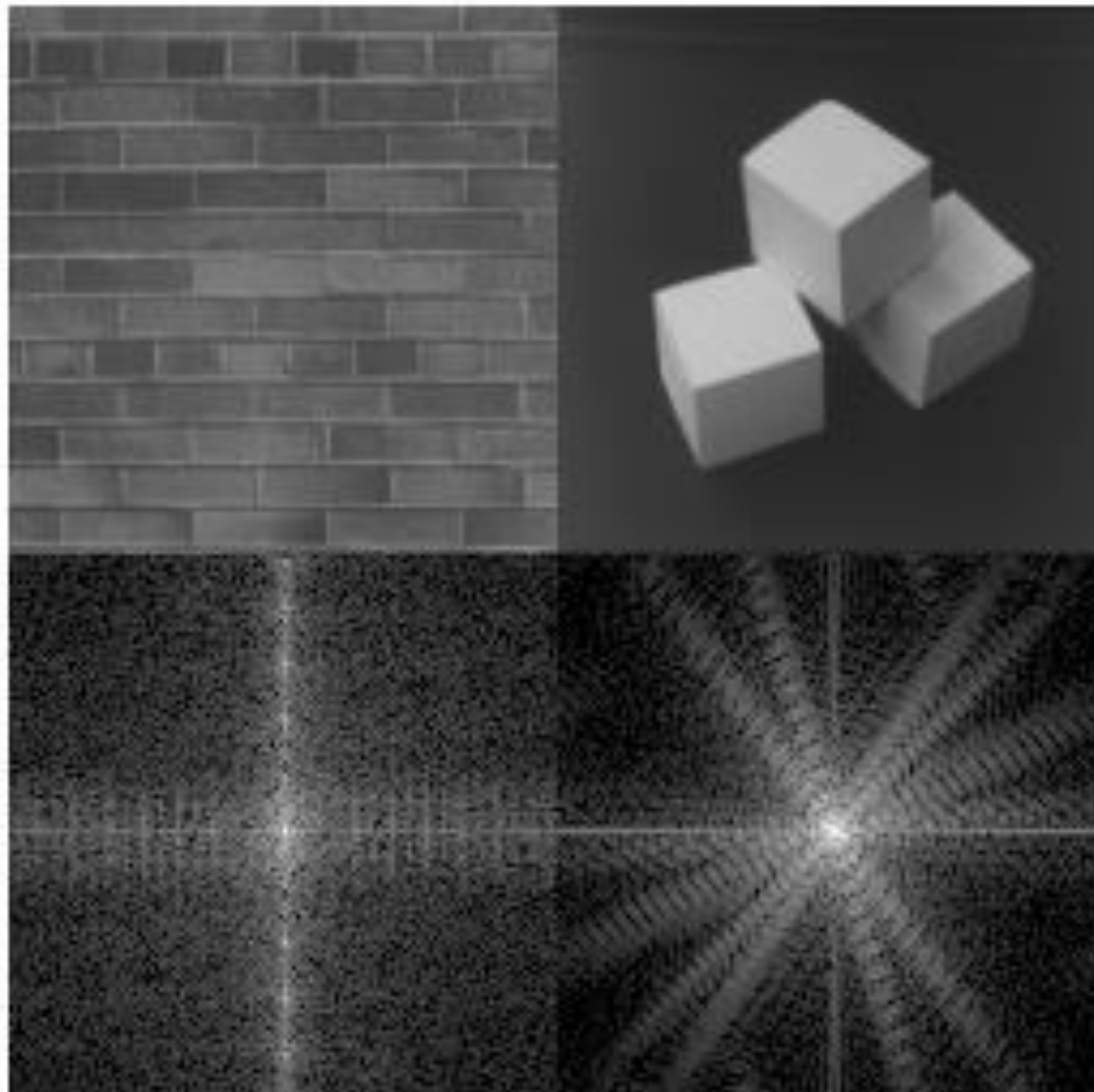




[redacted]

# 图像傅立叶变换

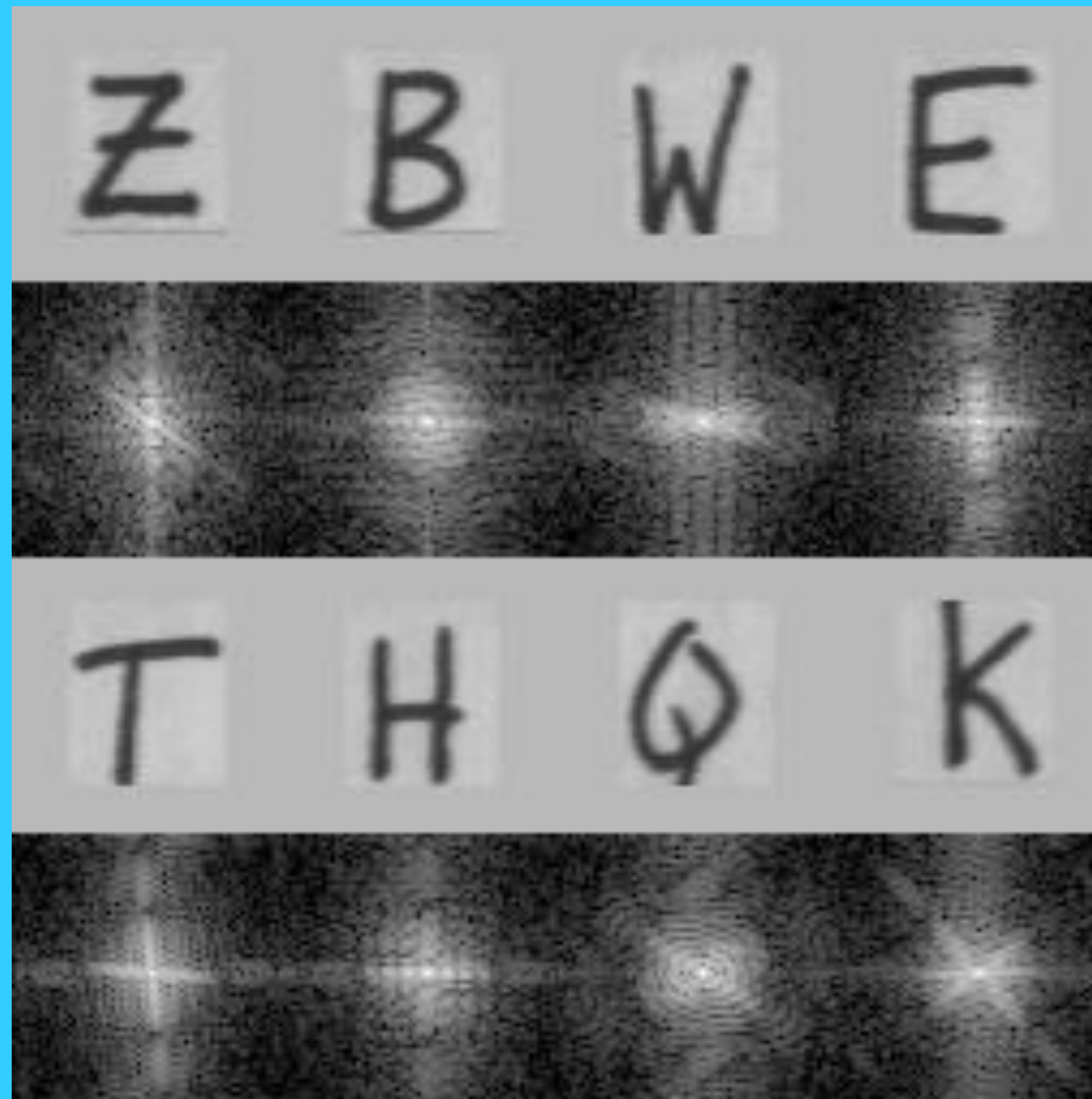
- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边



[redacted]

# 图像傅立叶变换

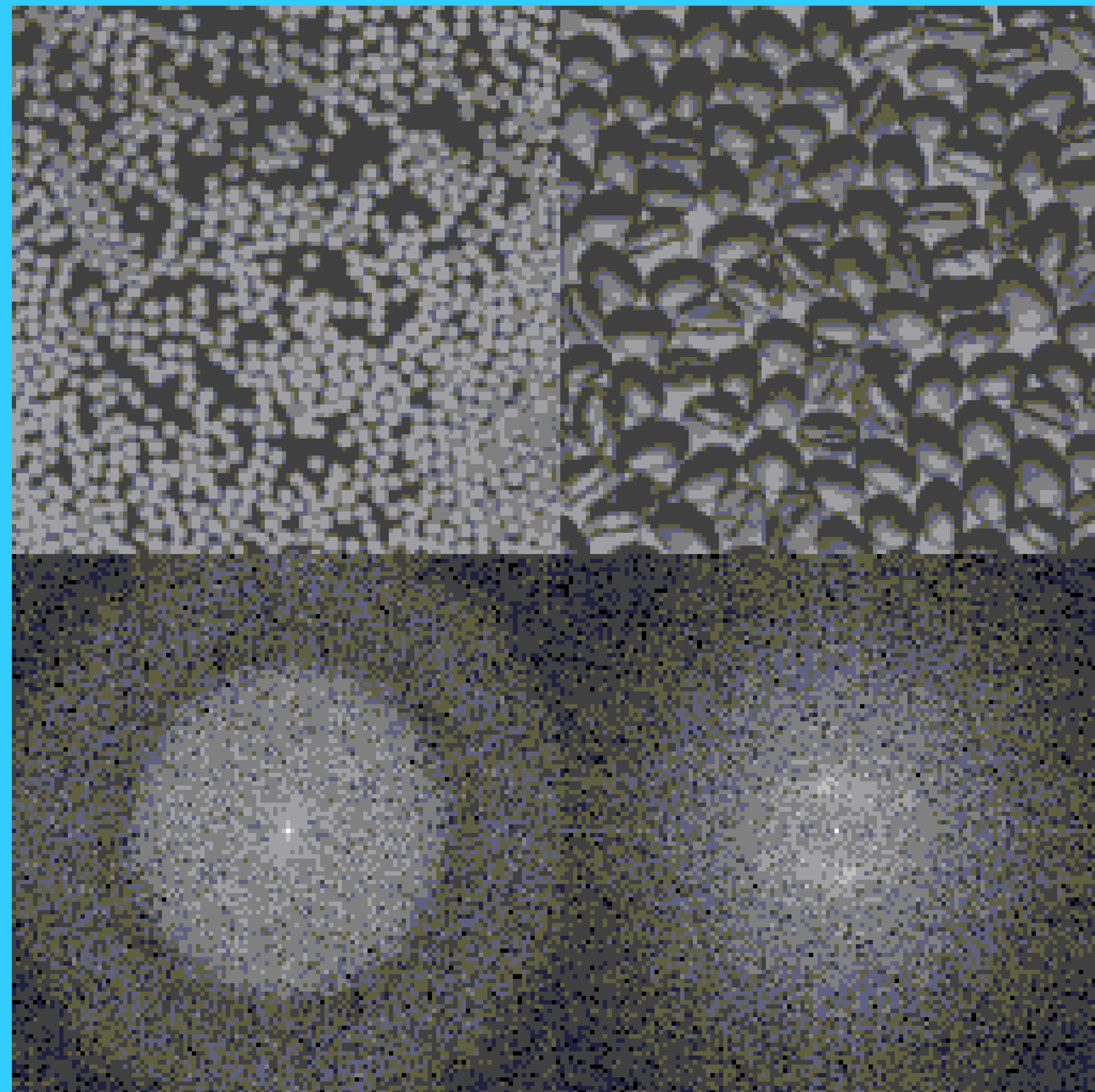
- **从幅度谱中我们可以看出明亮线和原始图像中对应的轮廓线是垂直的。如果原始图像中有圆形区域那么幅度谱中也呈圆形分布**




[redacted]

# 图像傅立叶变换

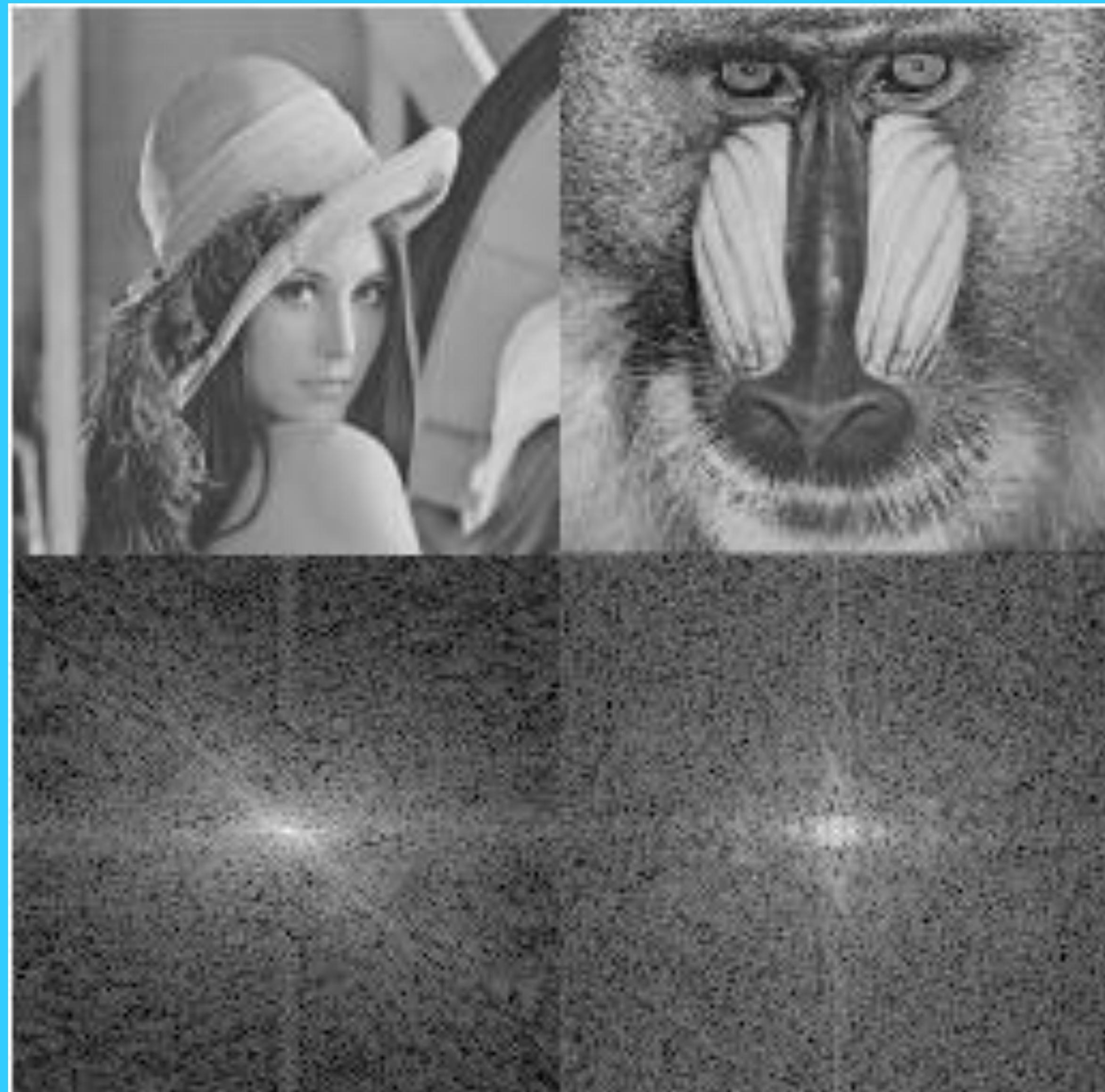
- 图像中的颗粒状对应的幅度谱呈环状，但即使只有一颗颗粒，其幅度谱的模式还是这样。



[redacted]

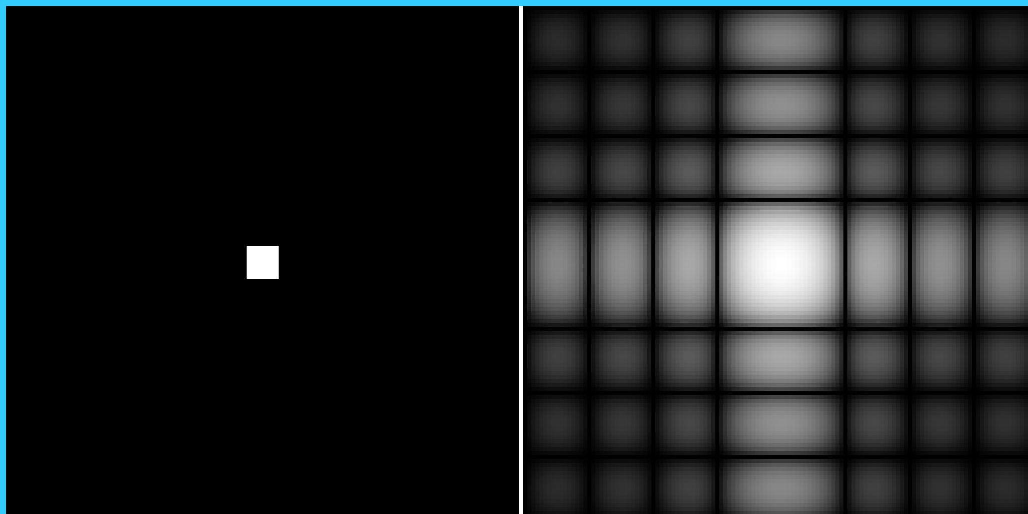
# 图像傅立叶变换

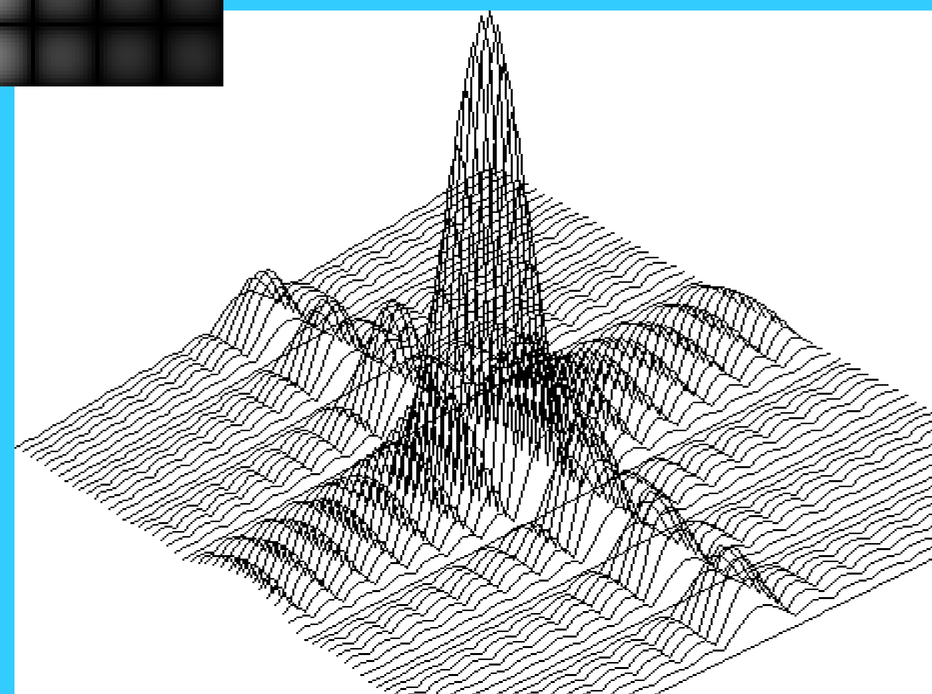
- 这些图像没有特定的结构，左上角到右下角有一条斜线，它可能是由帽子和头发之间的边线产生的
- 两个图像都存在一些小边界



[redacted]

# 傅立叶变换示例(1)





[redacted]

# 傅立叶变换示例(2)

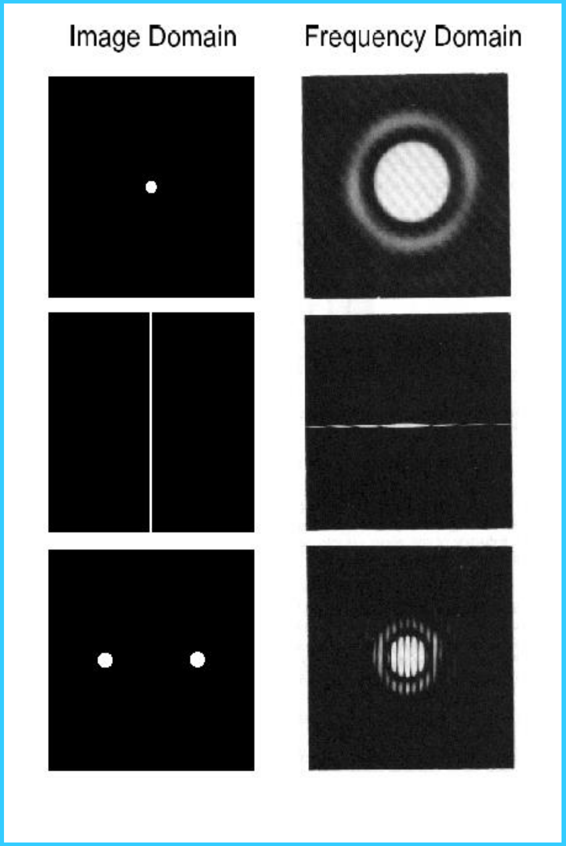


Image Domain
Frequency Domain

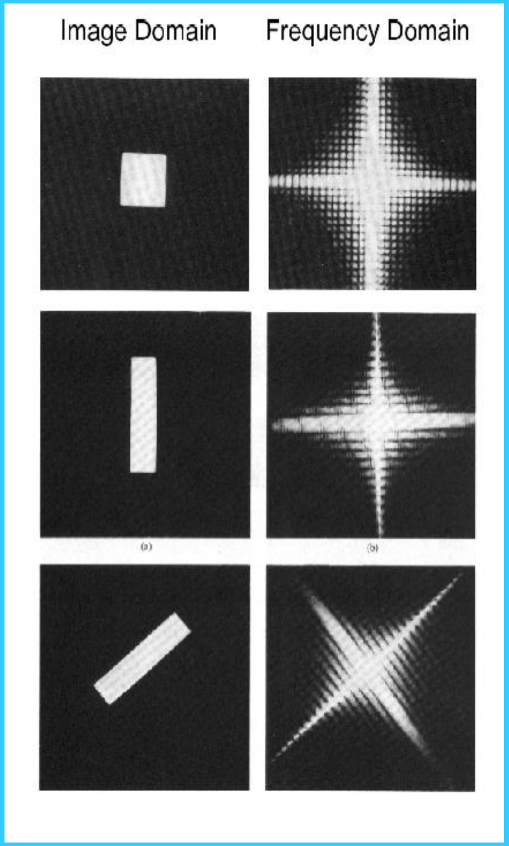


Image Domain
Frequency Domain

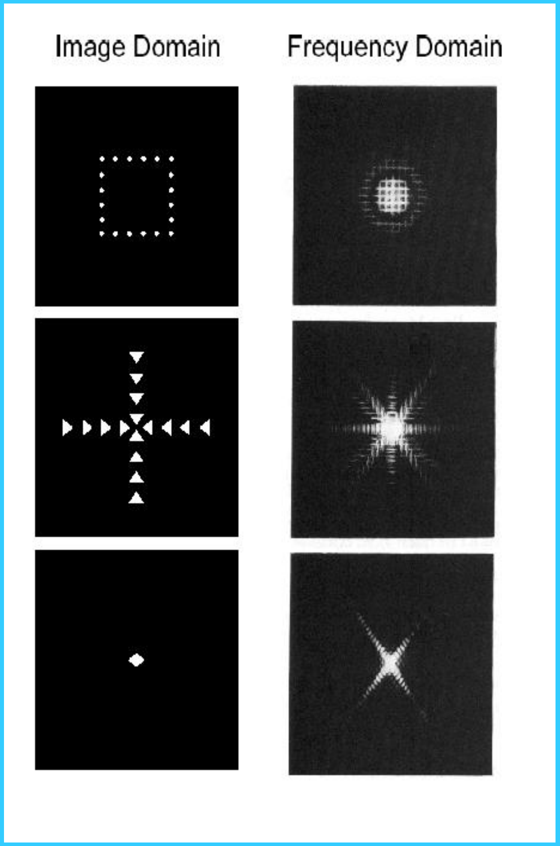
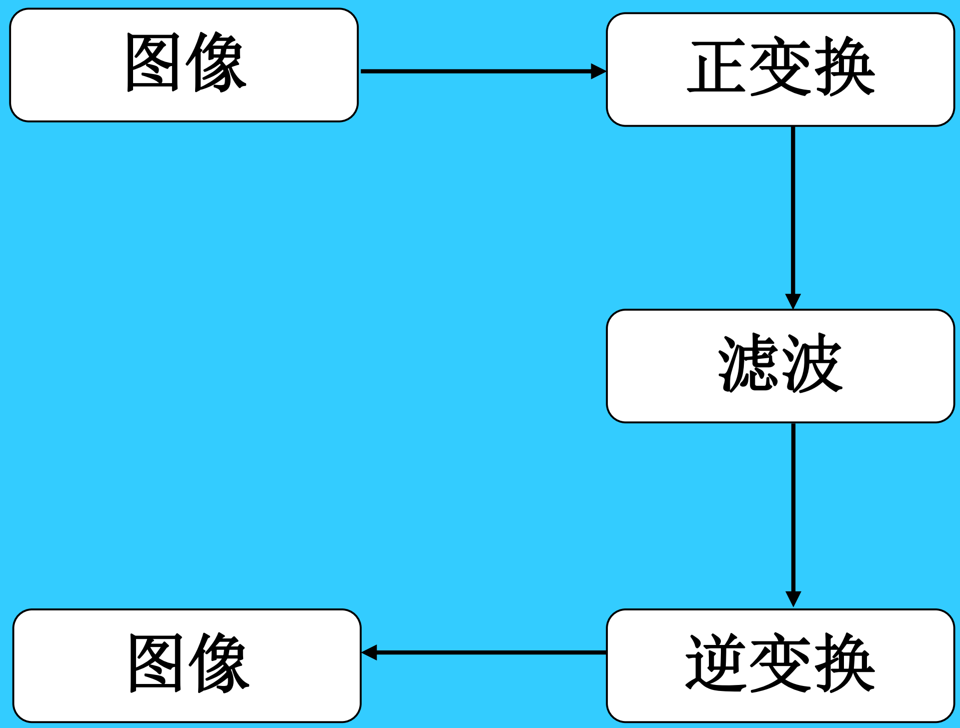
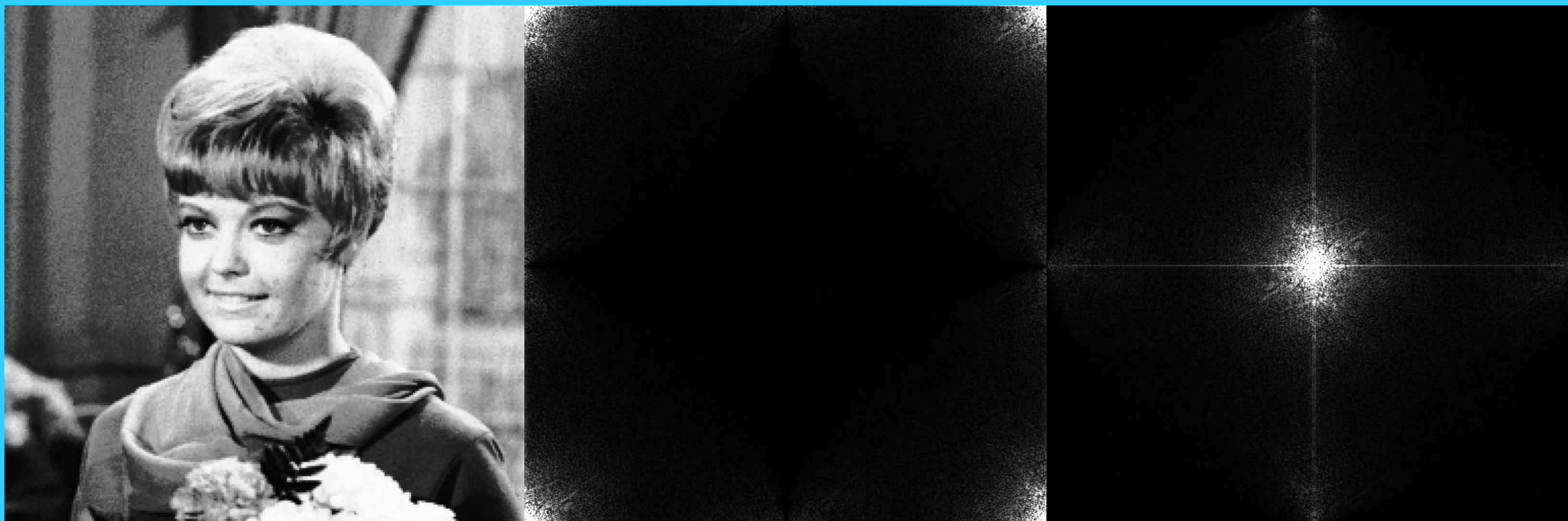


Image Domain
Frequency Domain

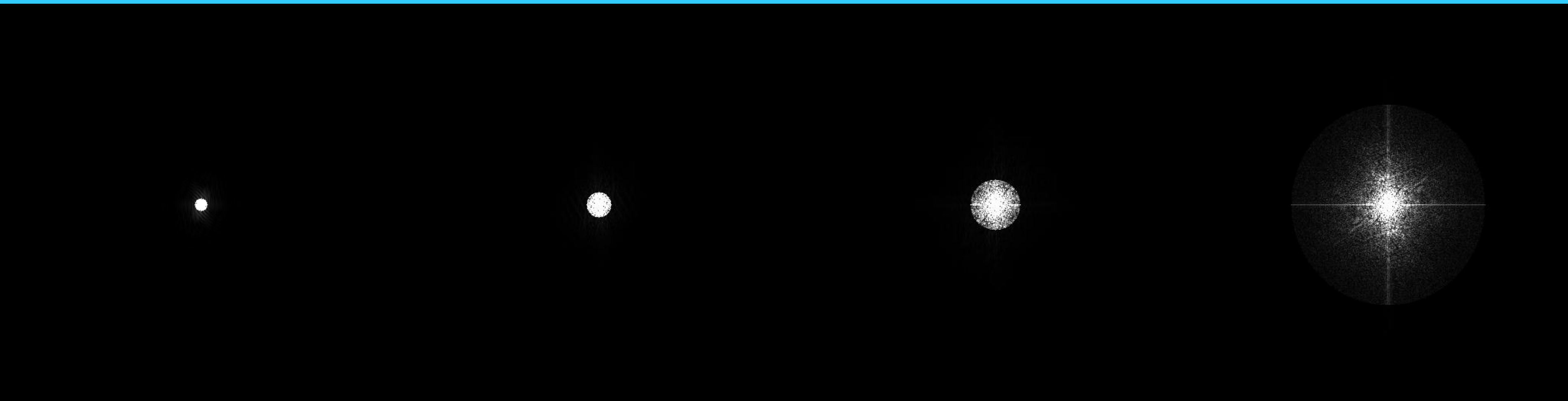
# 二维图像频域处理



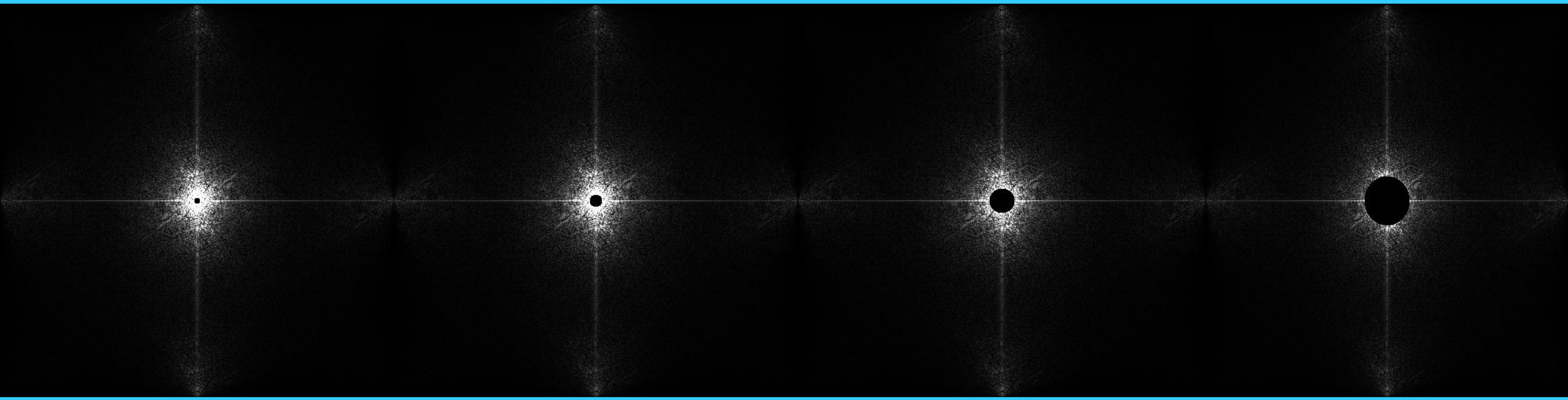
# 二维图像频域处理



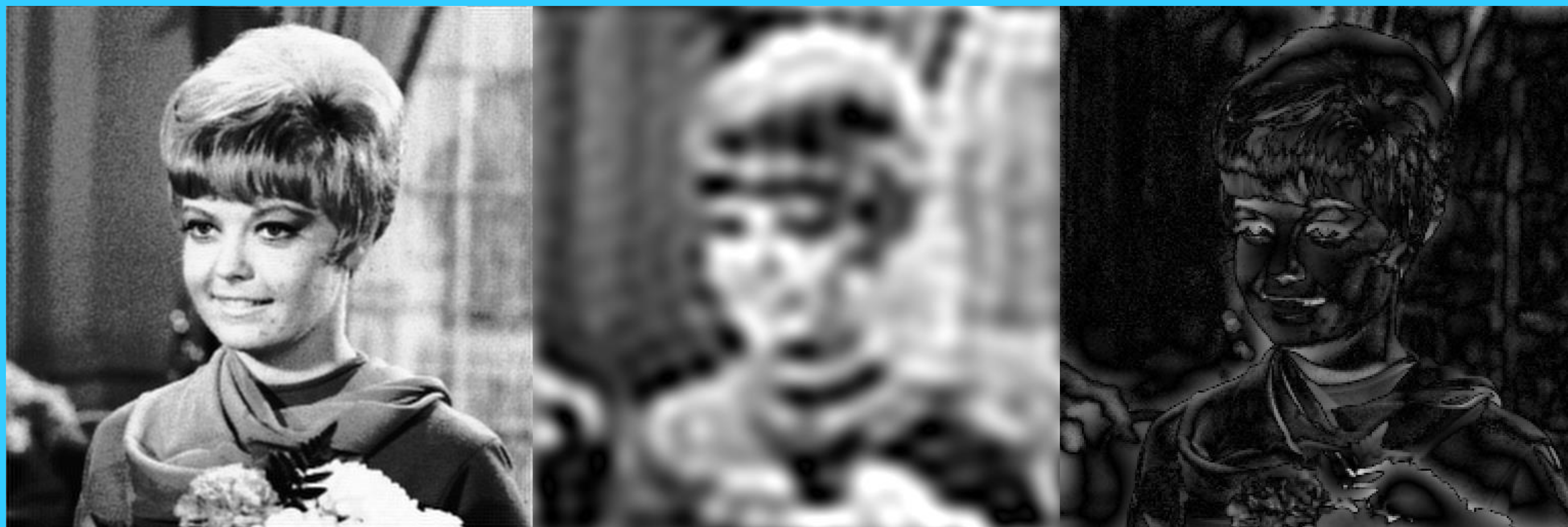
# 二维图像频域处理



# 二维图像频域处理



# 二维图像频域处理



(a) 原图　　(b) 低通滤波（细微部消失）　　(c) 高通滤波（突出边界）

# 内容提要

- 内容回顾
- 数字图像的傅立叶变换
- 二维傅立叶变换的性质

# 二维傅立叶变换性质

- 可分离性
- 周期性
- 平移性
- 线性
- 共轭对称
- 相似性
- 旋转性

# 1 可分离性

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)W^{(ux+vy)}$$

$$=\sum_{x=0}^{N-1}W^{ux}(\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)W^{vy})$$

- **二维傅立叶变换可以分离为一维傅立叶变换处理**

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)W^{-(ux+vy)}$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}W^{-ux}(\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)W^{-vy})$$

# 1 可分离性

**二维DFT可视为由沿x,y方向的两个一维DFT所构成。**

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$
$$=\sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}\right]\cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}$$
$$=\sum_{x=0}^{M-1}F(x,v)\cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cdot e^{j2\pi\frac{vy}{N}}\right]\cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}}$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u,y)\cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}}$$

**其中：**

$$\begin{cases} F(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \sim y\text{方向的}DFT \\ F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}F(x,v)\cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \sim x\text{方向的}DFT \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u,y)=\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cdot e^{j2\pi\frac{vy}{N}} \sim y\text{方向的}IDFT \\ f(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u,y)\cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \sim x\text{方向的}IDFT \end{cases}$$

# 可分离性

- **二维离散傅立叶变换DFT可分离性的基本思想是：**
  - 二维DFT可分离为两次一维DFT
- **应用：**
  - 二维快速傅立叶算法FFT，是通过计算两次一维FFT实现的

# 1 可分离性

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- 图像

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} F'(0,0) & F'(0,1) & \cdots & F'(0,N-1) \\ F'(1,0) & F'(1,1) & \cdots & F'(1,N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F'(N-1,0) & F'(N-1,1) & \cdots & F'(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- 横向

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \cdots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \cdots & F(1,N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F(N-1,0) & F(N-1,1) & \cdots & F(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- 纵向

## 2 周期性

- **如果**f(x, y) ⇔F(u, v), **则**

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= F(u+kN,v) \\
&= F(u,v+kN) \\
&= F(u+kN,v+kN)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x+kN,y) \\
&= f(x,y+kN) \\
&= f(x+kN,y+kN)
\end{aligned}
$$

# 2 周期性

## 证明： 周期性

$$\begin{cases} F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\ f(x,y)=\frac{1}{MN}\cdot\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \end{cases}$$

$$e^{-j2\pi m}=1 \longrightarrow \begin{cases} F(u+mM,v+nN)=F(u,v) \\ f(x+mM,y+nN)=f(x,y) \end{cases}$$

$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

[redacted]

# 3 平移性

**空间位移：**

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$

**频率位移：**

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

## 平移性定理

1. 函数自变量的位移的傅立叶变换产生一个复系数
2. 因为复系数具有单位幅值，所以平移不改变其傅立叶变换的幅值，但是改变了实部与虚部之间的能量分布

# 3 平移性

$$f(x,y) \leftrightarrow F(u,v) \Rightarrow \begin{cases} f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left[\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right]} \leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \\ f(x-x_0, y-y_0) \leftrightarrow F(u,v)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)} \end{cases}$$

$$DFT\left[ f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \right]$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N}\right)}$$

$$= F(u-u_0, v-v_0)$$

# 3 平移性

**当$x_0=u_0=M/2$和$y_0=v_0=N/2$时，**

$$f(x-M/2,y-N/2)\Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}$$

$$f(x,y)(-1)^{x+y}\Leftrightarrow F(u-M/2,v-N/2)$$

**应用：图像中心化**

# 3 平移性

**结论：**

$$f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

**当** $u_0=\dfrac{M}{2},v_0=\dfrac{N}{2}$

$$e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

$$\Rightarrow f(x,y)\cdot(-1)^{x+y}\leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2}\right)$$

**即如果需要将频域的坐标原点从显示屏起始点（0，0）移至显示屏的中心点只要将f(x,y)乘以$(-1)^{x+y}$因子再进行傅里叶变换即可实现。**

# 3 平移性


(a) 简单的方块图像　(b) 无平移的付立叶谱　(c) 原点移到中心的付立叶谱

图像谱移动示例

# 4线性

- **如果**$f_1(x, y) \Leftrightarrow F_1(u, v)$，$f_2(x, y) \Leftrightarrow F_2(u, v)$，**则**

$$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} (af_1(x,y) + bf_2(x,y))W^{(ux+vy)}$$

$$= a\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f_1(x,y)W^{(ux+vy)} + b\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f_2(x,y)W^{(ux+vy)}$$

$$= aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$$

# 4线性


数字水印

[redacted]

# 5 共轭对称性

- **如果**f (x, y) ⇔ F (u, v)， F* (−u, −v) **是共轭复数，则**

  ➢ F (u, v) = F* (−u, −v)

  ➢ |F (u, v)| = |F* (−u, −v)|

**共轭对称性：**

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} = \left\{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left[\frac{(-u)x}{M}+\frac{(-v)y}{N}\right]}\right\}^{*} = F^{*}(-u,-v)$$

$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$，即$F(u,v)$关于原点对称

[redacted]

# 6 旋转不变性

- 设f (x, y) ⇔F (u, v),

$$x=\gamma\cos\varphi \qquad y=\gamma\sin\varphi$$

$$u=\omega\cos\phi \qquad v=\omega\sin\phi$$

已知 $$f(\gamma,\varphi)\Leftrightarrow F(\omega,\phi)$$

有: $$f(\gamma,\varphi+\alpha_0)\Leftrightarrow F(\omega,\phi+\alpha_0)$$

[redacted]

# 6 旋转不变性

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}\cdot dxdy$$

若 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$ $\begin{cases} u=\omega\cos\varphi \\ v=\omega\sin\varphi, \end{cases}$ 则：

$$F(\omega,\varphi)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)\cdot e^{-j2\pi\cdot\omega\cdot r\cdot\cos(\varphi-\theta)}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta$$

$$F(\omega,\varphi+\theta_0)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)\,e^{-j2\pi r\omega\cos[\varphi-(\theta-\theta_0)]}\cdot rdrd\theta$$

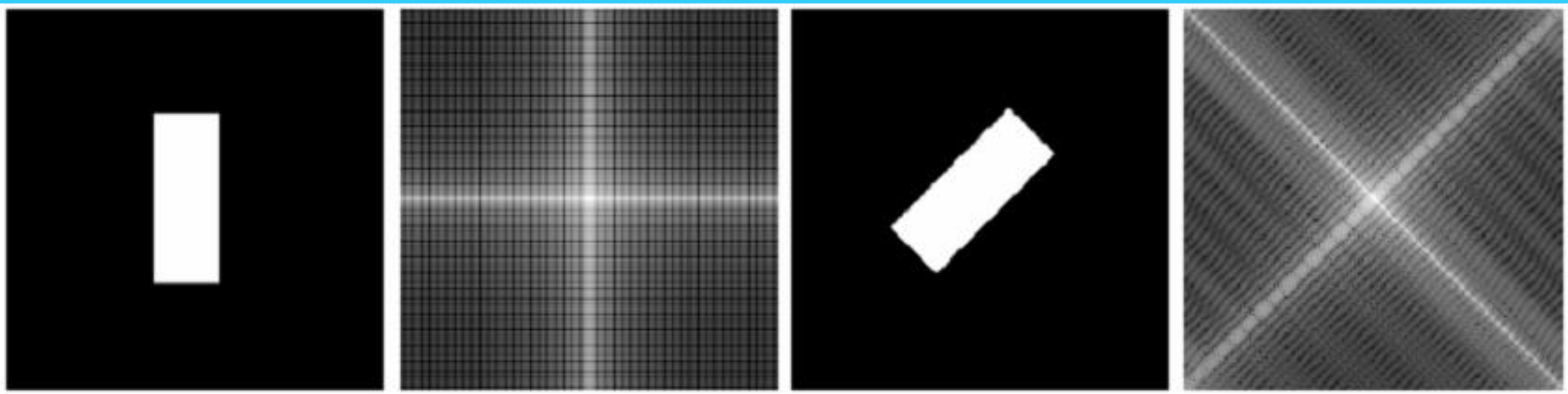
$$f(r,\theta)=f(r,\theta+2\pi)$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} f(r,\theta+\theta_0)\,e^{-j2\pi r\omega\cos(\varphi-\theta)}\cdot rdrd\theta$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta+\theta_0)\,e^{-j2\pi r\omega\cos(\varphi-\theta)}\cdot rdrd\theta$$

[redacted]

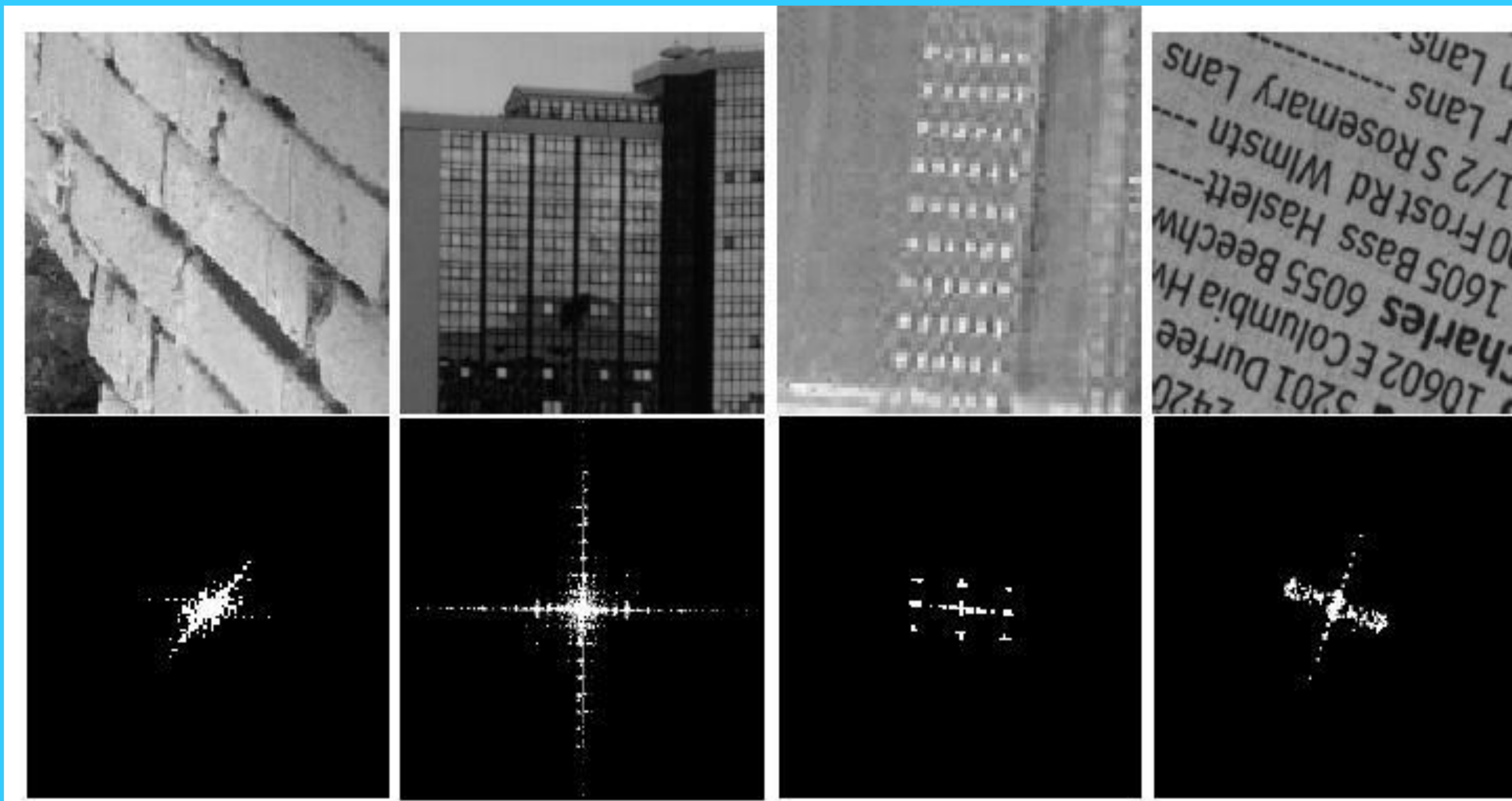
# 傅立叶变换旋转性质示例



(a) (b) (c) (d)

傅里叶变换旋转性质示例

# 6 旋转不变性



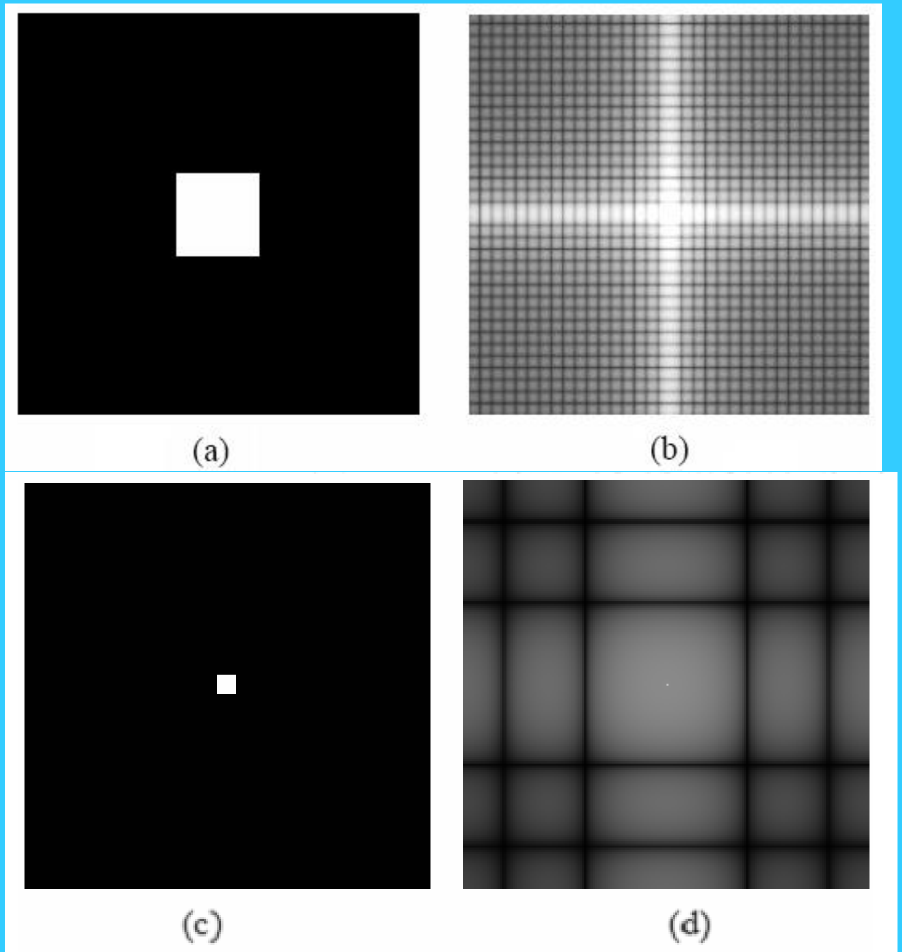
# 7 相似性

- **也称为比例性**
- **如果**f (x, y) ⇔F (u, v) , **则**

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|a||b|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

# 7 相似性

**正方形收缩导致其傅立叶频谱网格在频谱空间的增大**

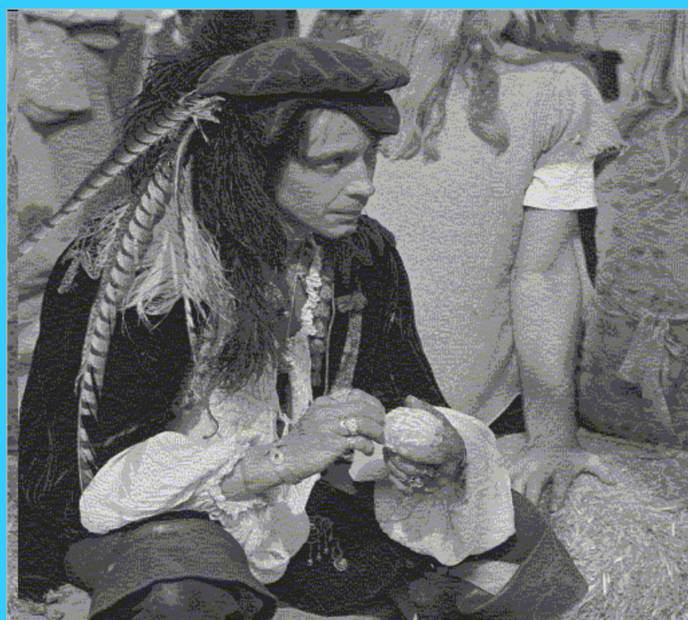


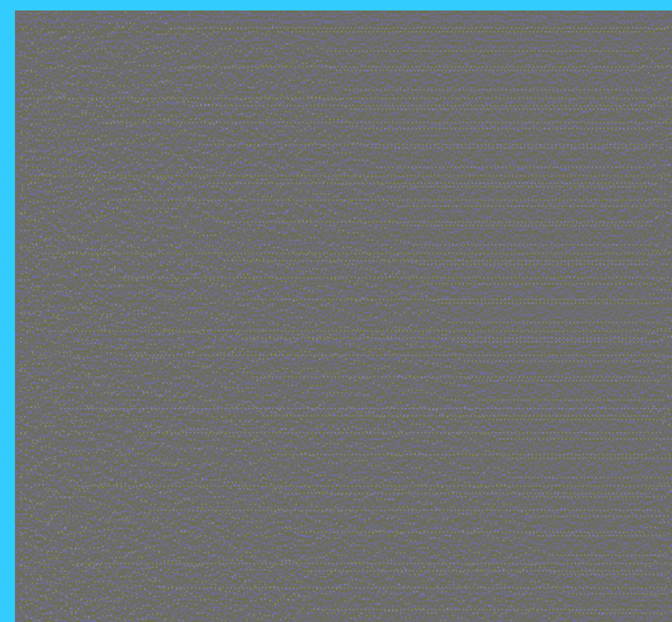
(a) (b)

(c) (d)

# 平均值

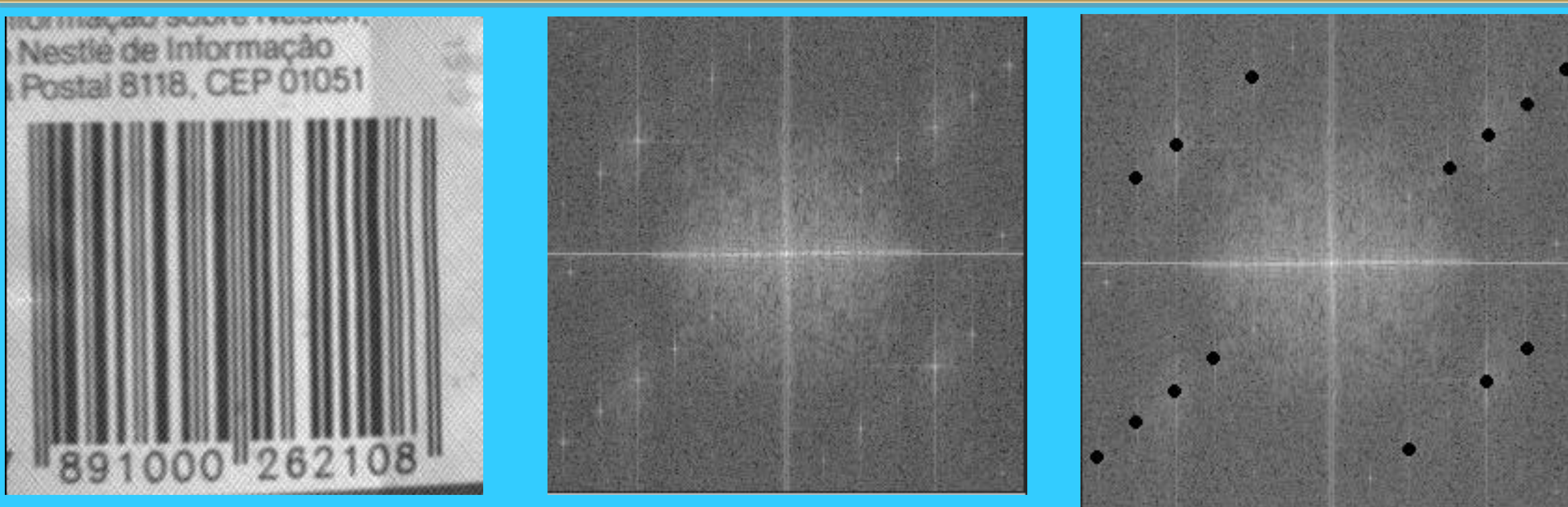
$$\bar{f} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = F(0,0)$$





[redacted]

# 傅立叶变换示例(1)




- 图像中的周期性噪声产生了变换中的尖峰信号

[redacted]