2010 年 1 月 14 日　　矩阵卷 B:

一、设 $A=\begin{bmatrix}6 & i & 1+i\\ 3 & 3+i & 0\\ 2 & 1-i & 4\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}$，$(i^2=-1)$ （1）计算 $\|A\|_1$ 及 $\|A\|_\infty$；

（2）计算 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$；　（3）写出 A 的盖尔圆，A 是否可逆？

二、设 $A\in\mathbb{C}^{8\times 8}$，且 $\lambda I-A$ 等价于准对角阵

$$diag\left\{\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & 1\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda-1\end{bmatrix},(\lambda+2)^2,\lambda+2,\ 1,\ 1\right\}$$

(1)试求 $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子；Smith 标准形(3)写出 A 的最小多项式及 Jordan 形.

三、$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明（1）$\left(e^A\right)^+=e^{-A}$；（2）$A^+=A\Leftrightarrow A^2$ 是幂等 Hermite 阵且秩$\left(A^2\right)=$秩 A

四、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$.（1）证 A 可对角化; (2)求 A 及 e^A 的谱分解;

(3)写出 A 的 Jordan 标准形；(5)求谱半径 $\rho(A)$ 及 $\rho\left(e^A\right)$.

五、已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，试求 A 的奇异值分解.

六、$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.（1）证明 $A^TAx=A^Tb$ 相容;（2）求 $A^TAx=A^Tb$ 通解及极小范数解.

七、已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.（1）计算 e^{At}；（2）试求 $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\left(A^2+A\right)^n$.

八、$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明 $\lim_{m\to\infty}A^m=0\Leftrightarrow\rho(A)<1$.

2009 年 1 月 16 矩阵 B 及参考解答.

一、(15 分)　设 A 是 7 阶方阵，且 $\lambda I-A$　等价于准对角阵：

$$D=diag\left\{\begin{pmatrix}\lambda-2 & \lambda-1\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix},\ \lambda^2-1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)^2,\ 1,\ 1\right\}$$

(1) 写出 $\lambda I-A$　的初等因子, 不变因子. Smith 标准型. (3) 求最小多项式，Jordan 标准形.

二、(15 分)设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，(2) 证明 A 可对角化，求 A 的 Jordan 标准形；

(2)求 A 的谱分解并计算 A^{100} 及 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$；(3)若 A 可逆求 A^{-1} 的谱分解.

三、(10 分)设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, rank(A)=m$，证明 $A\{1,4\}=\{A^{+}\}$.

四、(15 分) $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_r^{n\times n}$，若 $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}$ 证明

（1）$\mathbf{rank(A^2)=rank(A)}$；（2）$\mathbf{A}$ 是可对角化的；

（3）$\mathbf{A}$ 的 Jordan 形为 diag$\{1,\cdots 1,-1,\cdots -1\ ,0,\cdots,0\}$

五、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1+i&2&-1\\-i&-1&2+i\\3&1+2i&2i\end{pmatrix}$（$i^2=-1$），$x=\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）计算 $\|A\|_1$ 与 $\|A\|_\infty$.　（2）计算 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$.（3）估计特征值分布范围.

六、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&6&5\\-1&1&1&-8&-1\\-2&2&1&-14&-6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）求 A 的满秩分解.（2）计算 A^{+}.（3）判断 $Ax=b$ 是否相容，求极小范数解或极小最小二乘解.

七、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\4&5&-2\\2&-2&8\end{pmatrix}$，$b(t)=\begin{pmatrix}e^{9t}\\e^{9t}\\0\end{pmatrix}$，$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}$，（1）计算 e^{At}.

（2）用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+b(t)$ 满足条件 $x(0)=\begin{pmatrix}1,&0,&2\end{pmatrix}^T$ 的解.

八、（附加题）设 $A\in R^{m\times n}$，秩 $A=n$，证明 $\left\|A(A^TA)^{-1}A^T\right\|_2=1$.

一、解：$\begin{bmatrix}\lambda-2&\lambda-1\\0&\lambda+1\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1&0\\0&(\lambda+1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$

所以 $\lambda I-A\cong diag\left\{1,(\lambda+1)(\lambda-2),1,\lambda^2-1,1,(\lambda-2),(\lambda-2)^2\right\}$

初等因子：$\left\{\lambda+1,\lambda-2,\lambda+1,\lambda-1,\lambda-2,(\lambda-2)^2\right\}$

不变因子：$d_7(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$d_6(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$，$d_5(\lambda)=\lambda-2$，

$d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

$m_A(\lambda)=d_d(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

三、证明：由 $A^+=A^H(AA^H)^{-1}$，所以 $AA^+=I$ （1）

任取 $A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$ 有 $\begin{cases} AA^{(1,4)}A=A & (2) \\ (A^{(1,4)}A)^H=A^{(1,4)}A & (3) \end{cases}$

由（1）、（2）及 $AA^{(1,4)}=I$，从而 $A^{(1,4)}AA^{(1,4)}=A^{(1,4)}$ （4）

及 $\left(AA^{(1,4)}\right)^H=AA^{(1,4)}$ （5）

由（2）、（3）、（4）、（5）知，$A^{(1,4)}$ 为 A 的 M-P 逆，由唯一性知 $A\{1,4\}=\{A^+\}$

四、证明：1）、 因为 $A^+=A$，故 $A^3=A$ 所以秩A=秩$\text{A}^3\le$秩$\text{A}^2\le$秩A，所以秩$\text{A}^2=$秩A

2）、由 $A^3-A=0$，故 $\lambda^3-\lambda$ 将 A 零化，且 $\lambda^3-\lambda=0$ 无重根，A 可对角化。

3）、A 的特征根为 1、-1 和 0，而秩A=r 。故非零特根个数为（对角线非零元素的个数为 r）

$$故\ A\sim\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&0& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&0&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{bmatrix}\ 为\ \text{Jordan}\ 标准形$$

五、解：$\|A\|_1=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ji}|=4+\sqrt{2}$（列范），$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|=5+\sqrt{5}$（行范）

$Ax=(i-2,i+3,5i)^T$ 所以 $\|Ax\|_1=|i-2|+|i+3|+|5i|=\sqrt{10}+\sqrt{5}+5$

$\|Ax\|_2=\sqrt{|i-2|^2+|i+3|^2+|5i|^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$；$\|Ax\|_\infty=\max\{|i-2|,|i+3|,|5i|\}=5$

A 的盖尔 $G_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-(1+i)|\le 3\}$ $G_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z+1)|\le\sqrt{5}+1\}$

$G_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-2i| \le \sqrt{5}+3 \right\}$ 所以特征值 $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{3} G_i$，故 $\rho(A) \le \|A\|_1 = 4+\sqrt{2}$

六、解：$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，令 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

故 $A = FG$，　$\Rightarrow A^{+} = G^{+}F^{+} = G^{T}(GG^{T})^{-1}(F^{T}F)^{-1}F^{T}$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{1259}\right) \begin{bmatrix} 21 & -8 \\ -8 & 63 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{11}\right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3777} \begin{bmatrix} 50 & -119 & 31 \\ -50 & 119 & -31 \\ -79 & 465 & 228 \\ 458 & -1644 & -270 \\ -166 & 1265 & 1067 \end{bmatrix}$$

因为 秩$A = 2 <$ 秩$(A, b) = 3$，$Az = b$ 不相容　故极小最小二乘解为 $x_0 = A^{+}b$

七、解：$e^{At} = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 4+5e^{9t} & -4+4e^{9t} & -2+2e^{9t} \\ -4+4e^{9t} & 4+5e^{9t} & 2-2e^{9t} \\ -2+2e^{9t} & 2-2e^{9t} & 1+8e^{9t} \end{bmatrix}$，可得解为：

$$z(t) = e^{At}z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau \;= e^{9t}(1+t, t, 2)^T$$

附加题证明：令 $B = A(A^TA)^{-1}A^T$，则 $B^T = B$ 为实对称矩阵，且 $B^2 = B$

从而 B^TB 与 B 由相同的特征值，且 B 的正奇异值就是 B 的正特征值，$\lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 1)$ 是 B 的零化式，故 B 的最大特征值为 1（否则 B 为零矩阵，从而 $A = 0$，矛盾），所以

$\|B\|_2 = B$的最大奇异值$= \sqrt{1} = 1$