⒈ 判断下列语句是否为命题，并讨论命题的真值。

## 第一章 命题逻辑习题与解答

⑴ 2*x*  3  0 。

⑵ 前进！

⑶ 如果8  7  20 ，则三角形有四条边。

⑷ 请勿吸烟！

⑸ 你喜欢鲁迅的作品吗？

⑹ 如果太阳从西方升起，你就可以长生不老。

⑺ 如果太阳从东方升起，你就可以长生不老。

**解** ⑶,⑹,⑺表达命题，其中⑶,⑹表达真命题，⑺表达假命题。

⒉ 将下列命题符号化：

⑴ 逻辑不是枯燥无味的。

⑵ 我看见的既不是小张也不是老李。

⑶ 他生于 1963 年或 1964 年。

⑷ 只有不怕困难，才能战胜困难。

⑸ 只要上街，我就去书店。

⑹ 如果晚上做完了作业并且没有其它事情，小杨就看电视或听音乐。

⑺ 如果林芳在家里，那么他不是在做作业就是在看电视。

⑻ 三角形三条边相等是三个角相等的充分条件。

⑼ 我进城的必要条件是我有时间。

⑽ 他唱歌的充分必要条件是心情愉快。

⑾ 小王总是在图书馆看书，除非他病了或者图书馆不开门。

**解** ⑴ *p*：逻辑是枯燥无味的。“逻辑不是枯燥无味的”符号化为*p* 。

⑵ *p*：我看见的是小张。*q*：我看见的是老李。“我看见的既不是小张也不是老李”符号化为*p*  *q* 。

⑶ *p*：他生于 1963 年。*q*：他生于 1964 年。“他生于 1963 年或 1964 年”符号化为 *p*  *q* 。

⑷ *p*： 害 怕 困 难 。 *q*： 战 胜 困 难 。 “只有不怕困难，才能战胜困难”符号化为 *q*  *p* 。

⑸ *p*：我上街。*q*：我去书店。“只要上街，我就去书店”符号化为 *p*  *q* 。

⑹ *p*：小杨晚上做完了作业。*q*：小杨晚上没有其它事情。

*r*：小杨晚上看电视。*s*：小杨晚上听音乐。 “如果晚上做完了作业并且没有其它事情，小杨就看电视或听音乐”符号化为 *p*  *q*  *r*  *s* 。

⑺ *p*：林芳在家里。*q*：林芳做作业。*r*：林芳看电视。“如果林芳在家里，那么他不是在做作业就是在看电视”符号化为 *p*  *q*  *r* 。

⑻ *p*：三角形三条边相等。*q*：三角形三个角相等。“三角形三条边相等是三个角相等的充分条件”符号化为 *p*  *q* 。

⑼ *p*： 我 进 城 。 *q*： 我 有 时 间 。“我进城的必要条件是我有时间”符号化为 *p*  *q* 。

⑽ *p*： 他 唱 歌 。 *q*： 他 心 情 愉 快 。“他唱歌的充分必要条件是心情愉快” 符号化为 *p*  *q* 。

⑾ *p*：小王在图书馆看书。*q*：小王病了。*r*：图书馆开门。“小王总是在图书馆看书，除非他病了或者图书馆不开门”符号化为(*q*  *r*)  *p* 。

⒊ 列出除 ，  ，  ， ， 之外的所有二元联结词的真值表。

**解** 共有 16 个二元联结词，记除 ，  ，  ， ， 之外的二元联结词为Δ1, Δ2 , , Δ11 。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *p* | *q* | *p*Δ1*q* | *p*Δ 2*q* | *p*Δ3*q* | *p*Δ 4*q* | *p*Δ5*q* | *p*Δ6*q* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *p* | *q* | *p*Δ7 *q* | *p*Δ8*q* | *p*Δ9*q* | *p*Δ10*q* | *p*Δ11*q* |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

⒋ 求下列公式在真值赋值( *p*1 /1, *p*2 /1, *p*3 / 0, *p*4 / 0) 下的值：

⑴ *p*1  ( *p*2  *p*3 )

⑵ ( *p*1  *p*2  *p*3 )  (( *p*1  *p*2 )  ( *p*3  *p*4 ))

⑶ ( *p*1  *p*2 )  *p*3  (((*p*1  *p*2 )  *p*3 )  *p*4 )

⑷ ( *p*2  *p*1)  *p*3  *p*4

⑸ ( *p*1  *p*3 )  (*p*2  *p*4 )

⑹ *p*1  ( *p*2  *p*3  *p*1)  *p*2  *p*4

⑺ ( *p*1  *p*3 )  (*p*2  *p*4 )

**解** 记真值赋值( *p*1 /1, *p*2 /1, *p*3 / 0, *p*4 / 0) 为 *v*。

⑴ *v*( *p*1  ( *p*2  *p*3 ))  1 (1 0)  1 。

⑵ *v*(( *p*1  *p*2  *p*3 )  (( *p*1  *p*2 )  ( *p*3  *p*4 )))  (1  1  0)  ((1  1)  (0  0))  1

⑶ *v*(( *p*1  *p*2 )  *p*3  (((*p*1  *p*2 )  *p*3 )  *p*4 ))

 (1  1)  0  (((1  1)  0)  0)  1 。

⑷ *v*(( *p*2  *p*1)  *p*3  *p*4 )  (1  1)  0  0  1 。

⑸ *v*(( *p*1  *p*3 )  (*p*2  *p*4 ))  (1  0)  (1  0)  0 。

⑹ *v*( *p*1  ( *p*2  *p*3  *p*1)  *p*2  *p*4 )  1  (1  0  1)  1  0  1 。

⑺ *v*(( *p*1  *p*3 )  (*p*2  *p*4 ))  (1  0)  (1  0)  0 。

1. 用真值表判断以下公式是不是永真式、永假式、可满足式。

(1) ( *p*  *r*)  ((*q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*))

(2) ( *p*  *p*)  *p*

(3) ( *p*  *q*)  (( *p*  *q*)  *p*)

(4) ( *p*  (*q*  *r*))  (( *p*  *q*)  ( *p*  *r*))

(5) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)  *r*

(6) *p*  ( *p*  *q*)

(7) ( *p*  *q*)  (( *p*  *q*)  *p*)

**解** (1), (2), (4), (5), (7)是永真式，(6)是永假式，(3)是非永真的可满足式。

1. 指出满足下列公式的所有真值赋值。

(1) ( *p*  *q*)  (*p*  *r*)

(2) *p*  (*q*  *r*  ( *p*  *q*))

(3) *p*  *r*  ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

(4) *p*  (*q*  *r*)

**解** (1)

( *p* / 0, *q* / 0, *r* / 0) ， ( *p* / 0, *q* / 0, *r* /1) ， ( *p* / 0, *q* /1, *r* / 0) ， ( *p* / 0, *q* /1, *r* /1) ，

( *p* /1, *q* / 0, *r* /1) ， ( *p* /1, *q* /1, *r* / 0) ， ( *p* /1, *q* /1, *r* /1) 。

(2) ( *p* / 0, *q* /1, *r* / 0) ， ( *p* /1, *q* / 0, *r* / 0) ， ( *p* /1, *q* / 0, *r* /1) ， ( *p* /1, *q* /1, *r* / 0) ，

( *p* /1, *q* /1, *r* /1) 。

(3) ( *p* / 0, *q* / 0, *r* / 0) ， ( *p* / 0, *q* /1, *r* / 0) 。

(4) ( *p* / 0, *q* / 0, *r* / 0) ， ( *p* / 0, *q* /1, *r* /1) ， ( *p* /1, *q* / 0, *r* /1) ， ( *p* /1, *q* /1, *r* / 0) 。

1. 若公式 *A* 既不是永真式，也不是永假式，则 *A* 的每个替换实例一定既不是永真式，也不是永假式。对吗？ **解** 不对。若 *A* 是非永真的可满足式，则它的替换实例中既有永真式，也有永假式，也有非永真的可满足式。8.用真值表证明以下等值式。

(1)

(2)

(3)

(4)

9.用等值演算证明以下等值式。

(1) *p*  (*q*  *r*)  *q*  ( *p*  *r*)

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  *p*  *q*  *r*

(3) ( *p*  *q*)  (*r*  *q*)  *p*  *r*  *q*

(4) *p*  (*q*  *p*)  *p*  ( *p*  *q*)

(5) ( *p*  *q*)  (*r*  *q*)  *p*  *r*  *q*

(6) ( *p*  *q*)  *p*  *q*

**解** (1)

*p*  (*q*  *r*)  *p*  (*q*  *r*)  *q*  (*p*  *r*)  *q*  ( *p*  *r*)

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  (*p*  *q*)  (*p*  *r*)  *p*  (*q*  *r*)  *p*  *q*  *r*

(3) ( *p*  *q*)  (*r*  *q*)  *p*  *q*  *r*  *q*  ( *p*  *r*)  *q*  *p*  *r*  *q*

(4) *p*  (*q*  *p*)  *p*  *q*  *p*  1  *p*  *p*  *q*  *p*  ( *p*  *q*)

(5) ( *p*  *q*)  (*r*  *q*)  (*p*  *q*)  (*r*  *q*)  (*p*  *r*)  *q*

 ( *p*  *r*)  *q*  *p*  *r*  *q*

(6) ( *p*  *q*)  *p*  *q*  ( *p*  (*q* 1)) 1  ( *p*  *q*)  *p*  *q*

10.用等值演算证明以下公式是永真式。

(1) (*q*  *p*)  (*p*  *q*)  *p*

(2) ( *p*  *q*)  (*r*  *s*)  ( *p*  *r*  *q*  *s*)

(3) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*)  ( *p*  *q*  *r*  *s*)

(4) ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

**解** (1)

(*q*  *p*)  (*p*  *q*)  *p*  (*q*  *p*)  ( *p*  *q*)  *p*  *p*  *p*  1

(2) ( *p*  *q*)  (*r*  *s*)  ( *p*  *r*  *q*  *s*)

 (*p*  *q*)  (*r*  *s*)  *p*  *r*  *q*  *s*

 (*p*  *q*)  *p*  (*r*  *s*)  *r*  *q*  *s*

 *q*  *p*  *s*  *r*  *q*  *s*  1

(3) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*)  ( *p*  *q*  *r*  *s*)

 *p*  *q*  *p*  *r*  *p*  *s*  ( *p*  *q*  *r*  *s*)

 *p*  *q*  *r*  *s*  *p*  *q*  *r*  *s*  1

(4) ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

 (( *p*  *q*)  *r*)  *p*  *r*  *q*  *r*

 (( *p*  *q*)  *r*)  *p*  *q*  *r*

 ( *p*  *q*  *p*  *q*  *r*)  (*r*  *p*  *q*  *r*)  11  1

11.用等值演算证明以下公式是永假式。

(1) (*q*  *p*)  (*p*  *q*)  *p*

(2) ( *p*  *q*)  (*q*  *r*)  ( *p*  *r*)

**解** (1)

(*q*  *p*)  (*p*  *q*)  *p*  (*q*  *p*)  ( *p*  *q*)  *p*  *p*  *p*  0

(2) ( *p*  *q*)  (*q*  *r*)  ( *p*  *r*)  (*p*  *q*)  (*q*  *r*)  (*p*  *r*)

 (*p*  *q*)  (*q*  *r*)  *p*  *r*  ((*p*  *q*)  *p*)  ((*q*  *r*)  *r*)

 *p*  *q*  *q*  *r*  0

1. 找出与下列公式等值的尽可能简单的由{, }生成的公式。
2. 找出与下列公式等值的尽可能简单的由{, }生成的公式。

(1) *p*  *q*  (*r*  *p*)

(2) ( *p*  *q*  *r*)  *p*  *q*

(3) *p*  *q*  *p*

**解** (1)

*p*  *q*  (*r*  *p*)  *p*  *q*  (*r*  *p*)

 (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *p*)

 *p*  *q*  *r*  ( *p*  *q*  *r*)

(2) ( *p*  *q*  *r*)  *p*  *q*  (*p*  *q*  *r*)  *p*  *q*  ((*p*  *q*  *r*)  *p*  *q*)

(3) *p*  *q*  *p*  (*p*  *q*  *p*)

1. 设 *A* 是由{} 生成的公式。证明：*A* 是永真式当且仅当每个命题变元在 *A* 中出现偶数次。

**证明** 首先证明：若 *A* 是由{} 生成的仅出现一个命题变元 *p* 的公式，则

对 *p* 在 *A* 中的出现次数进行归纳。

*A*  ⎧1

# ⎩

⎨ *p*

若*p*在*A*中出现偶数次若*p*在*A*中出现奇数次

① 若 *p* 在 *A* 中出现1 次，即 *A* 为 *p*，显然 *A*  *p* 。

② 若 *p* 在 *A* 中出现2 次，即 *A* 为 *p*  *p* ，显然 *A*  1。

③ 设 *p* 在 *A* 中的出现 *n* 次，*A* 为 *B*  *C* ，*p* 在 *B*，*C* 中的出现次数分别为 *k* 和 *l*，则 *n*  *k*  *l* ， *k*  *n* 且*l*  *n* 。若 *n* 为偶数,则 *k* 和

*l* 的奇偶性相同，*B* 和 *C* 等值于同一公式， *A*  1。若 *n* 为奇数,则 *k* 和 *l* 的奇偶性不同，*B* 和 *C* 中一个等值于 *p*，另一个是永真式，因此

*A*  *p*  1  *p* 。

设在 *A* 中的出现的所有命题变元为 *p*1, , *pn* ，它们的出现次数分别为 *k*1, , *kn* 。因为

*A*  *B*  ( *A*  *B*)  (*B*  *A*)  *B*  *A* ，并且

( *A*  *B*)  *C*  (( *A*  *B*)  *C*)  *A*  *B* 1 *C* 1

 *A*  *B*  *C* 11  ( *A*  (*B*  *C*))  *A*  (*B*  *C*)

所以 满足交换律和结合律，存在由{} 生成的公式 *B*1, , *Bn* ，使得 *A*  *B*1    *Bn* ，并且 *Bi* 仅出现命题变元 *pi* ，出

现次数为 *ki* ， *i*  1, , *n* 。若 *k*1, , *kn* 全为偶数，则 *A*  *B*1  

 *Bn*  1 1  1。若 *k*1, , *kn* 中有 *kl*1 , , *klm*

是奇数，则 *A*  *B*1  

 *Bn*  *pl*1  

 *plm* ，显然 *A* 不是永真式。

1. 设 *A* 是由{} 生成的公式。证明：*A* 是永假式当且仅当每个命题变元在 *A* 中出现偶数次。**证明** 首先证明：若 *A* 是由{} 生成的仅出现一个命题变元 *p* 的公式，则

⎨ *p*

对 *p* 在 *A* 中的出现次数进行归纳。

*A*  ⎧0

# ⎩

若*p*在*A*中出现偶数次若*p*在*A*中出现奇数次

① 若 *p* 在 *A* 中出现1 次，即 *A* 为 *p*，显然 *A*  *p* 。

② 若 *p* 在 *A* 中出现2 次，即 *A* 为 *p*  *p* ，显然 *A*  0 。

③ 设 *p* 在 *A* 中的出现 *n* 次，*A* 为 *B*  *C* ，*p* 在 *B*，*C* 中的出现次数分别为 *k* 和 *l*，则 *n*  *k*  *l* ， *k*  *n* 且*l*  *n* 。若 *n* 为偶数,则 *k* 和 *l*

的奇偶性相同，*B* 和 *C* 等值于同一公式， *A*  0 。若 *n* 为奇数,则 *k* 和 *l* 的奇偶性不同，*B* 和 *C* 中一个等值于 *p*，另一个是永假式，因此

*A*  *p*  0  *p* 。

设在 *A* 中的出现的所有命题变元为 *p*1, , *pn* ，它们的出现次数分别为 *k*1, , *kn* 。因为  满足交换律和结合律，所以存在由{} 生成的公式 *B*1, , *Bn* ，使得 *A*  *B*1   *Bn* ，并且 *Bi* 仅出现命题变元 *pi* ，出现次数为 *ki* ， *i*  1, , *n* 。若 *k*1, , *kn* 全为偶数，

则 *A*  *B*1 

 *Bn*  0 

 0  0 。 若

*k*1, , *kn*

中 有 *kl*1 , , *klm*

是 奇 数 ， 则

*A*  *B*1 

 *Bn*  *pl*1 

 *plm* ，显然 *A* 不是永假式。

16.北京、上海、天津、广州四市乒乓球队比赛，三个观众猜测比赛结果。甲说：“天津第一，上海第二。”

乙说：“天津第二，广州第三。”丙说：“北京第二，广州第四。”

比赛结果显示，每人猜对了一半，并且没有并列名次。问：实际名次怎样排列？

**解** 用字母表示命题如下：

*p*2 :北京第二， *q*2 : 上海第二， *r*1 : 天津第一，

*r*2 :天津第二， *s*3 : 广州第三， *s*4 : 广州第四。

由已知条件列出以下方程：

甲猜对了一半： *r*1  *q*2  1 ，乙猜对了一半： *r*2  *s*3  1， 丙猜对了一半： *p*2  *s*4  1 ，

每个城市只能得一个名次： *r*1  *r*2  0 ， *s*3  *s*4  0 ；

没有并列名次： *p*2  *q*2  0 ， *p*2  *r*2  0 ， *r*2  *q*2  0 。解以上8个方程组成的方程组。

*r*2  *r*2 1  *r*2  (*r*1  *q*2 )  (*r*2  *r*1)  (*r*2  *q*2 )  0  0  0

将 *r*2  0 代入 *r*2  *s*3  1得 *s*3  1，将 *s*3  1代入 *s*3  *s*4  0 得 *s*4  0 ，将 *s*4  0 代入 *p*2  *s*4  1 得 *p*2  1，将 *p*2  1代

入 *p*2  *q*2  0 得 *q*2  0 ，将 *q*2  0 代入 *r*1  *q*2  1 得 *r*1  1。因此，天津第一，北京第二，广州第三，上海第四。17.某勘探队取回一块矿样，三人判断如下。

甲说：“矿样不含铁，也不含铜。”乙说：“矿样不含铁，含锡。”

丙说：“矿样不含锡，含铁。”

已经知道，这三人中有一个是专家，一个是老队员，一个是实习队员。化验结果表明：这块矿样只含一种金属，专家的两个判断皆对，老队员的判断一对一错，实习队员的两个判断皆错。问：这三人的身分各是什么？

**解** *p* :矿样含铁，

甲说的两句话为： *p* ， *q* 乙说的两句话为： *p* ， *r* 丙说的两句话为： *r* ， *p*

*q* :矿样含铜，

*r* :矿样含锡。

如果用一个公式表达出这三人中有一个是专家，一个是老队员，一个是实习队员，公式会非常复杂。其实我们不必完全写出这样的公式。

因为矿样只含一种金属，所以 *p*  *q*  0 ， *q*  *r*  0 ， *r*  *p*  0 。甲是实习队员，即甲说的两句话都是错的，可表示为： *p*  *q* 。乙是实习队员，即乙说的两句话都是错的，可表示为： *p*  *r* 。丙是实习队员，即丙说的两句话都是错的，可表示为： *r*  *p* 。甲、乙、丙三人中至少有一个是实习队员，可表示为：

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  (*r*  *p*)  1

因为 *p*  *q*  0 ，所以( *p*  *r*)  (*r*  *p*)  1，即 *p*  *r*  1 ， *p* 和 *r* 中恰好有一个为 1，因此 *q*  0 。甲是老队员，即甲说的话一半对一半错，可表示为： *p*  *q* 。乙是老队员，即乙说的话一半对一半错，可表示为： *p*  *r* 。丙是老队员，即丙说的话一半对一半错，可表示为： *r*  *p* 。甲、乙、丙三人中有奇数个老队员，可表示为：

(*p*  *q*)  (*p*  *r*)  (*r*  *p*)  1

由教材上的等值式可得到

(*p*  *q*)  (*p*  *r*)  (*r*  *p*)

 (*p*  *p*)  (*r*  *r*)  (*q*  *p*)

 0  1  (*q*  1  *p*)  *q*  *p*

又知道 *q*  0 ，所以 *p*  1。因为 *r*  *p*  0 ，所以 *r*  0 。因此，甲说的话一半对一半错，甲是老队员。乙说的话全错，乙是实习队

员。丙说的话全对，丙是专家。

1. 先用等值演算证明下列等值式，再用对偶定理得出新等值式。

(1) (*p*  *q*)  (*p*  *q*)  *p*

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  (*p*  *q*)

(3) *q*  ((*p*  *q*)  *p*)  1

**解** (1)

(*p*  *q*)  (*p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  *p*  (*q*  *q*)  *p*

由对偶定理得(*p*  *q*)  (*p*  *q*)  *p* 。

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  ( *p*  (*q*  *q*))  (*p*  *q*)

 *p*  (*p*  *q*)  ( *p*  *p*)  ( *p*  *q*)  *p*  *q*  (*p*  *q*)

由对偶定理得( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  (*p*  *q*) 。(3)

1. 设 *A* 是由{0,1,, , }生成的公式， *A*\* 与 *A* 互为对偶式。

⑴ 若 *A* 是永真式，则 *A*\* 是永假式。

⑵ 若 *A* 是永假式，则 *A*\* 是永真式。

**证明** (1) 设 *A* 是永真式，则 *A*  1 ，由对偶定理得 *A*\*  0 ，因此 *A*\* 是永假式。

(2) 设 *A* 是永假式，则 *A*  0 ，由对偶定理得 *A*\*  1 ，因此 *A*\* 是永真式。

20.证明以下联结词集合是极小完全集。

(1) {0,}

(2) { , }

(3) { ,  , }

(4) {, , }

**证 明** (1)

*p*  *p*  0  *p*  0 ，因为{, } 是完全集，所以{0,} 是完全集。任取由{0 } 生成的不出现除命题变元 *p* 之

外的命题变元的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* / 0) ，则 *v*( *A*)  0 ，而 *v*(*p*)  1 ，因此{0 } 不能定义 。所以{0 } 不是完全集。任取由{ } 生成的仅出现命题变元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* /1) ，则 *v*( *A*)  1，而 *v*(*p*)  0 ，因此{  } 不能定义 。所以{  }

不是完全集。所以{, } 是极小完全集。

1. *p*  *p* 1  *p*  ( *p*  *p*) ，因为{, } 是完全集，所以{ , }是完全集。任取由{ } 生成的仅出现除命题变元 *p* 的

公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* / 0) ，则 *v*( *A*)  0 ，而 *v*(*p*)  1 ，因此{ } 不能定义 。所以{ } 不是完全集。{ } 不是完全集。所以{ , }是极小完全集。

1. *p*  *p* 1  *p*  ( *p*  *p*) ，因为{, } 是完全集，所以{ ,  , } 是完全集。任取由{ ,  } 生成的仅出现除命题变

元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* / 0) ，则 *v*( *A*)  0 ，而 *v*(*p*)  1 ，因此{ ,  } 不能定义 。所以{ ,  } 不是完全集。任取由{, } 生成的仅出现命题变元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* /1) ，则 *v*( *A*)  1，而 *v*(*p*)  0 ，因此{ , } 不能定义 。所以{, } 不是完全集。{ , }不是完全集。所以{ ,  , } 是极小完全集。

1. *p*  *p* 1  *p*  ( *p*  *p*) ，因为{, } 是完全集，所以{, , } 是完全集。任取由{,  } 生成的仅出现除命题变

元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* / 0) ，则 *v*( *A*)  0 ，而 *v*(*p*)  1 ，因此{,  } 不能定义 。所以{,  } 不是完全集。任取

由{ , } 生成的仅出现命题变元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* /1) ，则 *v*( *A*)  1，而 *v*(*p*)  0 ，因此{ , } 不能定义 。所

以{ , } 不是完全集。{ , }不是完全集。所以{,, } 是极小完全集。

21.证明以下联结词集合不是完全集。

(1) {, , , }

(2) { ,  , }

**证明** (1) 任取由{, , , } 生成的仅出现命题变元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* /1) ，则 *v*( *A*)  1，而 *v*(*p*)  0 ，因此

{, , , } 不能定义 。所以{, , , } 不是完全集。

(2) 任取由{ ,  , }生成的仅出现命题变元 *p* 的公式 *A*，令真值赋值 *v*  ( *p* / 0) ，则 *v*( *A*)  0 ，而 *v*(*p*)  1 ，因此{ ,  , }不能定义 。所以{ ,  , }不是完全集。

1. 二元联结词 （称为“与非”）和 （称为“或非”）的真值表如下。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *p* | *q* | *p*  *q* | *p*  *q* |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

证明：

1. {  } 是完全集。
2. {  } 是完全集。
3. 若Δ 是二元联结词且{ Δ } 是完全集，则Δ 是 或 。

**证 明** (1)

*p*  *p*  *p* ,

*p*  *q*  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)

因为{, }是完全集，所以{  } 是完全集。

(2)

*p*  *p*  *p* ,

*p*  *q*  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)

因为{, }是完全集，所以{  } 是完全集。

(3) 若 0 Δ 0  0 或1Δ1  1，则 不能由{ Δ } 定义。因此， 0 Δ 0  1且1Δ1  0 。

若 0 Δ1  1Δ 0 ，则Δ 的真值表的最后一列有偶数个 1，真值表最后一列有奇数个 1 的 不能由{ Δ } 定义。所以， 0 Δ1  1Δ 0 。若

0 Δ1  1Δ 0  1，则Δ 是 。若 0 Δ1  1Δ 0  0 ，则Δ 是 。

1. 三元联结词Δ 的真值表如下。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *p* | *q* | *r* | Δ( *p*, *q*, *r*) |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

证明{ Δ } 是极小完全集。

**证明** *p*  *q*  Δ*pqq* ，因为{  } 是完全集，所以{ Δ } 是极小完全集。

24.在下列公式中，哪些是析取范式，哪些是合取范式?

*p*， *p*  *q* ， ( *p*  *q*)  *r* ， *p*  *r* ， *p*  *p* ， (( *p*  *q*)  *q*)  *r*

**解** *p*， *p*  *q* ， *p*  *r* ， *p*  *p* 是析取范式，*p*， *p*  *q* ， ( *p*  *q*)  *r* ， *p*  *r* ， *p*  *p* 是合取范式。25.在下列公式中，哪些是关于 *p*, *q*, *r* 的主析取范式，哪些是关于 *p*, *q*, *r* 的主合取范式？

*p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* , ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*) , *p*  (*q*  *r*) , ( *p*  *p*  *q*)  ( *p*  *q*  *r*)

**解** *p*  *q*  *r* 是关于 *p*, *q*, *r* 的主析取范式， *p*  *q*  *r* 是关于 *p*, *q*, *r* 的主合取范式。

26.是否有这样的公式，它既是主合取范式，又是主析取范式？如果有，举出一例。**解** 有。*p* 既是关于 *p* 的主析取范式，又是关于 *p* 的主合取范式。27.求下列公式的主范式，进而判断其是否永真式、永假式、可满足式。

* 1. *p*  *q*  *r*

(2) ( *p*  *q*)  *r*

(3) *p*  *q*  ( *p*  *q*)

(4) *p*  ( *p*  *q*  (*q*  *r*))

(5) ( *p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

(6) *p*  *q*  (*p*  *q*)

**解** (1)

*p*  *q*  *r*  (*p*  *q*)  *r*  *p*  *q*  *r*

*p*  *q*  *r* 的主合取范式是 *p*  *q*  *r* ，包含一个极大项，因此它是非永真的可满足式。

(2) ( *p*  *q*)  *r*  (*p*  *q*)  *r*

 (*p*  *q*)  *r*  ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

 ( *p*  (*q*  *q*)  *r*)  (( *p*  *p*)  *q*  *r*)

 ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

( *p*  *q*)  *r* 的主合取范式是( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*) ，包含了三个极大项，因此它是非永真的可

满足式。

(3)

*p*  *q*  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  ((*p*  *q*)  ( *p*  *q*))

 (*p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  *p*  *q*  *p*  *q*

*p*  *q*  ( *p*  *q*) 的主合取范式为 *p*  *q* ，包含了一个极大项，因此它是非永真的可满足式。

(4) *p*  ( *p*  *q*  (*q*  *r*))  *p*  (*p*  *q*  (*q*  *r*))  1

*p*  ( *p*  *q*  (*q*  *r*)) 的主合取范式为1，不包含任何极大项，因此它是永真式。

(5) ( *p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

 (*p*  (*q*  *r*))  (*p*  (*q*  *r*))

 (*p*  *p*)  (*p*  *q*  *r*)  (*q*  *r*  *p*)  (*q*  *r*  *q*  *r* )

 (*p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*)

( *p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*) 的主析取范式为(*p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*) ，包含了两个极小项，因此它是非永真的可满足式。

(6) *p*  *q*  (*p*  *q*)

 ( *p*  (*q*  *q*))  (( *p*  *p*)  *q*)  (*p*  *q*)

 ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  (*p*  *q*)

*p*  *q*  (*p*  *q*) 的主合取范式为( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  (*p*  *q*)  (*p*  *q*) ，包含了所有的四个极大项，因此它

是永假式。 28.用主范式证明下列等值式。

(1) ( *p*  *q*)  *p*  *q*  (*p*  *p*)  (*r*  *p*)

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  *p*  *q*  *r*

**解** (1)

( *p*  *q*)  *p*  *q*  (*p*  *q*)  ( *p*  *q*)

 ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*)  ( *p*  *q*  (*r*  *r*))  ( *p*  *q*  (*r*  *r*))

 ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*))  ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*)

(*p*  *p*)  (*r*  *p*)  (*p*  *p*)  (*r*  *p*)

 *p*  ( *p*  *r*)  *p*  *p*  (*q*  *q*)  (*r*  *r*)

 ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*))  ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*)

( *p*  *q*)  *p*  *q* 和(*p*  *p*)  (*r*  *p*) 等值于同一个关于 *p* , *q* , *r* 的主析取范式

( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*))  ( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*  *r*) ，因此，

( *p*  *q*)  *p*  *q*  (*p*  *p*)  (*r*  *p*) 。

(2) ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  (*p*  *q*)  (*p*  *r*)

 (*p*  *q*  (*r*  *r*))  (*p*  (*q*  *q*)  *r*)

 (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

 (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

*p*  *q*  *r*  *p*  (*q*  *r*)  (*p*  *q*)  (*p*  *r*)

 (*p*  *q*  (*r*  *r*))  (*p*  (*q*  *q*)  *r*)

 (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

 (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)  (*p*  *q*  *r*)

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*) 和 *p*  *q*  *r* 的主合取范式相同，所以，

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  *p*  *q*  *r* 。29.判断以下关系是否成立，并说明理由。

(1) *p*  *q* , *p* | *q*

(2) *p*  *q* , , *q* | *p*

(3) *p*1  *q*1 , *p*2  *q*2 , *p*1  *p*2 | *q*1  *q*2

1. *p*  *q* , *q*  *p* | *p*  *q*

(5) *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* | *p*  *q*  *r*

**解** (1) 若真值赋值 *v* 使得 *v*( *p*  *q*)  *v*(*p*)  1，则 *v*(*q*)  1 。所以 *p*  *q* , *p* | *q* 。

(2) 真值赋值 *v*  ( *p* / 0, *q* /1) 使得 *v*( *p*  *q*)  *v*( *p*  *q*)  *v*(*q*)  1，但 *v*( *p*)  0 ，所以 *p*  *q* , *p*  *q* , *q* |/ *p* 。

(3) 若真值赋值 *v* 使得 *v*( *p*1  *q*1)  *v*( *p*2  *q*2 )  *v*( *p*1  *p*2 )  1 ，则 *v*( *p*1)  *v*( *p*2 )  1 ，因而 *v*(*q*1)  *v*(*q*2 )  1 ，

*v*(*q*1  *q*2 )  1。所以 *p*1  *q*1 , *p*2  *q*2 , *p*1  *p*2 | *q*1  *q*2 。

(4) 真值赋值 *v*  ( *p* / 0, *q* / 0) 使得 *v*( *p*  *q*)  *v*(*q*  *p*)  1 ，但 *v*( *p*  *q*)  0 。所以 *p*  *q* , *q*  *p* |/ *p*  *q* 。

1. 真 值 赋 值

*v*  ( *p* / 0, *q* /1, *r* / 0)

使 得 *v*( *p*  *q*  *r*)  *v*( *p*  *q*  *r*)  1 ， 但

*v*( *p*  *q*  *r*)  0

* 所 以

*p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* |/ *p*  *q*  *r* 。 30.判断以下公式组成的集合是否可满足，并说明理由。

(1) ( *p*  *q*)  (*s*  *r*) ， (*s*  *r*)

(2) *p*1 ， *p*1  *p*2 ， *p*1  *p*2  *p*3 ,…， *p*1   *pn*  *pn* 1 ,…

(3) *p*  *q* ， *p*  *q* ， *p*  *q*

**解** (1) 可满足。真值赋值( *p* /1, *q* / 0, *r* /1, *s* / 0) 满足它。

1. 可满足。若真值赋值 *v* 使得 *v*( *pi* )  1, *i*  1, 2,

，则 *v* 满足它。

1. 可满足。真值赋值( *p* / 0, *q* /1) 满足它。
2. 设 *A*,*B*,*C* 是任意公式。 *A*  *B* | *C* 当且仅当 *A* | *C* 且 *B* | *C* 。

**证明 1** （  ）设 *A*  *B* | *C* 。任取满足 *A* 的真值赋值 *v*，则 *v*( *A*  *B*)  1 ，因为 *A*  *B* | *C* ，所以 *v*(*C*)  1 。这表明 *A* | *C* 。任取满足 *B* 的真值赋值 *v*，则 *v*( *A*  *B*)  1 ，因为 *A*  *B* | *C* ，所以 *v*(*C*)  1 。这表明 *B* | *C* 。

（  ）设 *A* | *C* 且 *B* | *C* 。任取满足 *A*  *B* 的真值赋值 *v*，则 *v*( *A*)  1或 *v*(*B*)  1。

① 若 *v*( *A*)  1，因为 *A* | *C* ，所以 *v*(*C*)  1 。

② 若 *v*(*B*)  1，因为 *B* | *C* ，所以 *v*(*C*)  1 。

因此， *A*  *B* | *C* 。

## 证明 2

*A*  *B*  *C*  ( *A*  *B*)  *C*  (*A*  *B*)  *C*

 (*A*  *C*)  (*B*  *C*)  ( *A*  *C*)  (*B*  *C*)

*A*  *B* | *C*

当且仅当 *A*  *B*  *C* 是永真式

当且仅当( *A*  *C*)  (*B*  *C*) 是永真式当且仅当 *A*  *C* 和 *B*  *C* 都是永真式当且仅当 *A* | *C* 且 *B* | *C*

1. 设 1 和2 是公式集合，*B* 是公式， 2 | *B* ，对于2 中每个公式 *A*， 1 | *A* 。证明： 1 | *B* 。

**证明** 任取满足 1 的真值赋值 *v*。对于2 中每个公式 *A*，因为 1 | *A* ，所以 *v*( *A*)  1。这表明 *v* 满足2 。又因为2 | *B* ，所以

*v*(*B*)  1。因此， 1 | *B* 。33.公式集合 不可满足当且仅当 | 0 。

**证明** （  ）设 |/ 0 ，则存在真值赋值 *v* 满足 且 *v*(0)  0 ，因此 可满足。

（  ）设 | 0 。若 可满足，有真值赋值 *v* 满足 ，由 | 0 得出 *v*(0)  1，这是不可能的。因此，  不可满足。

34. 设 *n* 是 正 整 数 ，

  { *p*1  *q*1, , *pn*  *qn* , *p*1   *pn* } {(*qi*  *q j* ) |1  *i*  *j*  *n*}

* 证 明 ：

 | (*q*1  *p*1)   (*qn*  *pn* ) 。

**证明** 设真值赋值 *v* 满足 ，则 *v*( *p*1   *pn* )  1 ，存在*i*  *n* 使 *v*( *pi* )  1。因为 *v*( *pi*  *qi* )  1 ，所以 *v*(*qi* )  1。若1  *j*  *i* ，

因为 *v*((*q j*  *qi* ))  1 ，因 此

*v*(*q j* )  0

。若 *i*  *j* *n*

，因 为

*v*((*qi*  *q j* ))  1

，因 此

*v*(*q j* )  0

。所以

*v*((*q*1  *p*1)    (*qn*  *pn* ))  1 。

⒈ 将下列命题符号化：

⑴ 所有的火车都比某些汽车快。

⑵ 任何金属都可以溶解在某种液体中。

⑶ 至少有一种金属可以溶解在所有液体中。

⑷ 每个人都有自己喜欢的职业。

⑸ 有些职业是所有的人都喜欢的。

## 第二章 谓词逻辑习题与解答

**解** ⑴ 取论域为所有交通工具的集合。令*T* (*x*) : *x* 是火车，

*C*(*x*) : *x* 是汽车，

*F* (*x*, *y*) : *x* 比 *y* 跑得快。

“所有的火车都比某些汽车快”可以符号化为*x*(*T* (*x*)  *y*(*C*( *y*)  *F* (*x*, *y*))) 。

⑵ 取论域为所有物质的集合。令 *M* (*x*) : *x* 是金属，

*L*(*x*) : *x* 是液体，

*D*(*x*, *y*) : *x* 可以溶解在 *y* 中。

“任何金属都可以溶解在某种液体中” 可以符号化为*x*(*M* (*x*)  *y*(*L*( *y*)  *D*(*x*, *y*))) 。

⑶ 论域与谓词与(2)同。“至少有一种金属可以溶解在所有液体中” 可以符号化为*x*(*M* (*x*)  *y*(*L*( *y*)  *D*(*x*, *y*))) 。

⑷ 取论域为所有事物的集合。令

*M* (*x*) : *x* 是人，

*J* (*x*) : *x* 是职业，

*L*(*x*, *y*) : *x* 喜欢 *y*。

“每个人都有自己喜欢的职业” 可以符号化为*x*(*M* (*x*)  *y*(*J* ( *y*)  *L*(*x*, *y*)))

⑸论域与谓词与(4)同。“有些职业是所有的人都喜欢的”可以符号化为 *x*(*J* (*x*)  *y*(*M* ( *y*)  *L*( *y*, *x*))) 。

⒉ 取论域为正整数集，用函数 （加法），  （乘法）和谓词 ，  将下列命题符号化：

⑴ 没有既是奇数，又是偶数的正整数。

⑵ 任何两个正整数都有最小公倍数。

⑶ 没有最大的素数。

⑷ 并非所有的素数都不是偶数。**解** 先引进一些谓词如下：

*D*(*x*, *y*) : *x* 能被 *y* 整除， *D*(*x*, *y*) 可表示为*v*(*v*  *x*  *y*) 。

*J* (*x*) : *x* 是奇数， *J* (*x*) 可表示为*v*(*v*  2  *x*) 。

*E*(*x*) : *x* 是偶数， *E*(*x*) 可表示为*v*(*v*  2  *x*) 。

*P*(*x*) : *x* 是素数， *P*(*x*) 可表示为(*x*  1)  *u*(*v*(*v*  *u*  *x*)  *u*  1 *u*  *x*) 。

⑴ “没有既是奇数，又是偶数的正整数”可表示为*x*(*J* (*x*)  *E*(*x*)) ， 并可进一步符号化为*x*(*v*(*v*  2  *x*)  *v*(*v*  2  *x*)) 。

⑵ “任何两个正整数都有最小公倍数”可表示为

*x**y**z*(*D*(*z*, *x*)  *D*(*z*, *y*)  *u*(*D*(*u*, *x*)  *D*(*u*, *y*)  *z*  *u*  *z*  *u*)) ， 并可进一步符号化为

*x**y**z*(*v*(*v*  *x*  *z*)  *v*(*v*  *y*  *z*)  *u*(*v*(*v*  *x*  *u*)  *v*(*v*  *y*  *u*)  *z*  *u*  *z*  *u*)) ⑶ “没有最大的素数”可表

示为*x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *y*  *x*  *y*  *x*)) ，

并可进一步符号化为

*x*((*x*  1)  *u*(*v*(*v*  *u*  *x*)  *u*  1 *u*  *x*)  *y*(( *y*  1)  *u*(*v*(*v*  *u*  *y*)  *u*  1 *u*  *y*)  *y*  *x*  *y*  *x*))

⑷ “ 并 非 所 有 的 素 数 都 不 是 偶 数 ” 可 表 示 为

*x*(*P*(*x*)  *E*(*x*))

， 并 可 进 一 步 符 号 化 为

*x*((*x*  1)  *u*(*v*(*v*  *u*  *x*)  *v*(*v*  2  *x*))

⒊ 取论域为实数集合，用函数 ，－（减法）和谓词 ，  将下列命题符号化：

⑴ 没有最大的实数。

⑵ 任何两不同的实数之间必有另一实数。

⑶ 函数 *f* (*x*) 在点 *a* 处连续。

⑷ 函数 *f* (*x*) 恰有一个根。

⑸ 函数 *f* (*x*) 是严格单调递增函数。

**解** ⑴ “没有最大的实数”符号化为*x**y*( *y*  *x*  *y*  *x*) 。

⑵ “任何两不同的实数之间必有另一实数”符号化为*x**y*(*x*  *y*  *z*(*x*  *z*  *z*  *y*)) 。

⑶“函数 *f* (*x*) 在点 *a* 处连续”的定义是：

任给**  0 ，总可以找到**  0 ，使得只要| *x*  *a* | ** 就有| *f* (*x*)  *f* (*a*) | ** 。

“函数 *f* (*x*) 在点 *a* 处连续”符号化为

** (0  **  ** (0  **  *x*(*a*  **  *x*  *x*  *a*  **  *f* (*a*)  **  *f* (*x*)  *f* (*x*)  *f* (*a*)  ** )))

⑷ “函数 *f* (*x*) 恰有一个根”符号化为*x*( *f* (*x*)  0  *y*( *f* ( *y*)  0  *y*  *x*)) 。

⑸ “函数 *f* (*x*) 是严格单调递增函数”符号化为*x**y*(*x*  *y*  *f* (*x*)  *f* ( *y*)) 。

⒋ 指出下列公式中变元的约束出现和自由出现，并对量词的每次出现指出其辖域。

(1) *x*(*P*( *y*, *x*)  *P*(*x*, *a*))

(2) *xP*(*x*)  *zQ*(*x*, *y*)

(3) *x*(*P*(*x*)  *R*(*x*))  *xP*(*x*)  *Q*(*x*)

(4) *y*(*P*( *f* (*x*, *y*), *x*)  *xP*(*z*, *g*(*x*, *y*)))

(5) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)  *xR*(*x*))  *R*(*x*)

1. 归纳证明：若 *t*， *t* 是项，则*t x* 也是项。

*t* 

**证明** ① 若 *t* 是 *x*，则*t x* 是*t* ， *t x* 是项。

*t*  *t* 

② 若 *t* 是不同于 *x* 的变元 *y*，则*t x* 仍是 *y*， *t x* 是项。

*t*  *t* 

③若 *t* 是常元 *a*，则*t x* 仍是 *a*， *t x* 是项。

*t*  *t* 

④若 *t* 是 *f* (*t* , ,*t*

) ，则*t x* 是 *f* ((*t* ) *x* , ,(*t*

) *x* ) ，由归纳假设知(*t* ) *x* , , (*t*

) *x* 都是项，所以*t x* 是项。

1 *n t* 

1 *t* 

*n t* 

1 *t* 

*n t*  *t* 

1. 归纳证明：若 *t* 是项，*A* 是公式，则 *Ax* 也是公式。

*t*

**证明** ①若 *A* 是 *P*(*t*1, , *tn* ) ，则 *Ax* 是 *P*((*t* ) *x* , ,(*t*

*t*

1

*t*

*n*

*t*

) *x* ) ，由上题知(*t* ) *x* , , (*t*

) *x* 都是项，所以 *Ax* 是公式。

*n*

*t*

*t*

②若 *A* 是*B* ，则 *Ax* 是*Bx* ，由归纳假设知 *Bx* 是公式，所以 *Ax* 是公式。

1

*t*

*t t t t*

③若 *A* 是 *B*  *C* ，则 *Ax* 是 *Bx*  *C x* ，由归纳假设知 *Bx* 和*Cx* 都是公式，所以 *Ax* 是公式。

*t t t t t t*

④若 *A* 是*xB* ，则 *Ax* 仍是 *A*， *Ax* 是公式。

*t t*

⑤若 *A* 是*yB* ，其中 *y* 是不同于 *x* 的变元，则 *Ax* 是*yBx* ，由归纳假设知 *Bx* 是公式，所以 *Ax* 是公式。

*t t t t*

1. 给定解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 如下：

*DI*  {1, 2}， *a I*

 1， *b I*

 2 ， *f I* (1)  2 ， *f I* (2)  1

*PI* (1,1)  *PI* (1, 2)  1， *PI* (2,1)  *PI* (2, 2)  0 ， *v*(*x*)  1， *v*( *y*)  1

计算下列公式在解释 *I*，赋值 *v* 下的真值。

(1) *P*(*a*, *f* (*x*))  *P*(*x*, *f* (*b*))  *P*( *f* ( *y*), *x*)

(2) *x**yP*( *y*, *x*)

(3) *x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *f* (*x*), *f* ( *y*)))

**解** (1)

*I* (*P*(*a*, *f* (*x*))  *P*(*x*, *f* (*b*))  *P*( *f* ( *y*), *x*))(*v*)

 *PI* (*a I* , *f I* (*v*(*x*)))  *PI* (*v*(*x*), *f I* (*b I* ))  *PI* ( *f I* (*v*( *y*)),*v*(*x*))

 *PI* (1, *f I* (1))  *PI* (1, *f I* (2))  *PI* ( *f I* (1), 1)

#  *PI* (1, 2)  *PI* (1, 1)  *PI* (2, 1)  11 0  0

(2) *I* (*x**yP*( *y*, *x*))(*v*)

 *I* (*yP*( *y*, *x*))(*v*[*x* /1])  *I* (*yP*( *y*, *x*))(*v*[*x* / 2])

 (*I* (*P*( *y*, *x*))(*v*[*x* /1][ *y* /1])  *I* (*P*( *y*, *x*))(*v*[*x* /1][ *y* / 2]))

 (*I* (*P*( *y*, *x*))(*v*[*x* / 2][ *y* /1])  *I* (*P*( *y*, *x*))(*v*[*x* / 2][ *y* / 2]))

 (*PI* (1, 1)  *PI* (2, 1))  (*PI* (1, 2)  *PI* (2, 2))

#  (1 0)  (1 0)  1

(3) *I* (*x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *f* (*x*), *f* ( *y*))))(*v*)

 (*PI* (1, 1)  *PI* ( *f I* (1), *f I* (1)))  (*PI* (1, 2)  *PI* ( *f I* (1), *f I* (2)))

 (*PI* (2, 1)  *PI* ( *f I* (2), *f I* (1)))  (*PI* (2, 2)  *PI* ( *f I* (2), *f I* (2)))

 (*PI* (1, 1)  *PI* (2, 2))  (*PI* (1, 2)  *PI* (2, 1))  (*PI* (2, 1)  *PI* (1, 2))  (*PI* (2, 2)  *PI* (1, 1))

#  (1  0)  (1  0)  (0  1)  (0  1)  0  0 11  0

7. 给定解释 *I* 如下： *DI*  {*a* , *b*}， 判断 *I* 是不是以下语句的模型。

*PI* (*a* , *a*)  *PI* (*b* , *b*)  1，

*PI* (*a* , *b*)  *PI* (*b* , *a*)  0

1. *x**yP*(*x*, *y*)
2. *x**yP*(*x*, *y*)
3. *x**yP*(*x*, *y*)

(4) *x**y**P*(*x*, *y*)

(5) *x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *x*))

(6) *xP*(*x*, *x*)

**解** (1)

*I* (*x**yP*(*x*, *y*))

 (*PI* (*a*, *a*)  *PI* (*a*,*b*))  (*PI* (*b*, *a*)  *PI* (*b*,*b*))  (1 0)  (0 1)  1

(2) *I* (*x**yP*(*x*, *y*))

 *PI* (*a*, *a*)  *PI* (*a*,*b*)  *PI* (*b*, *a*)  *PI* (*b*,*b*)  1 0  0 1  0

(3) *I* (*x**yP*(*x*, *y*))

 (*PI* (*a*, *a*)  *PI* (*a*,*b*))  (*PI* (*b*, *a*)  *PI* (*b*,*b*))  (1 0)  (0 1)  0

(4) *I* (*x**y**P*(*x*, *y*))

 *PI* (*a*, *a*)  *PI* (*a*,*b*)  *PI* (*b*, *a*)  *PI* (*b*,*b*)  0 11 0  1

(5) *I* (*x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *x*)))

 (*PI* (*a*, *a*)  *PI* (*a*, *a*))  (*PI* (*a*,*b*)  *PI* (*b*, *a*))

 (*PI* (*b*, *a*)  *PI* (*a*,*b*))  (*PI* (*b*,*b*)  *PI* (*b*,*b*))

#  (1  1)  (0  0)  (0  0)  (1  1)  1

(6) *I* (*xP*(*x*, *x*))  *PI* (*a*, *a*)  *PI* (*b*, *b*)  1  1  1

1. 写出一个语句 *A*，使得 *A* 有模型，并且 *A* 的每个模型的论域至少有三个元素。

**解** 语句 *A* 为*x* *P*(*x*, *x*)  *P*(*a*,*b*)  *P*(*b*,*c*)  *P*(*c*, *a*) 。给定解释 *I* 如下。

*DI*  为自然数集合， 则 *I* 是 *A* 的模型，*A* 有模型。

*PI*  (*x*, *y*)  1 当且仅当 *x*  *y* ，

*a I*   1 ， *bI*   2 ， *c I*   3

任取满足语句 *A* 的解释 *I*，则 *PI* (*a I* , *b I* )  *PI* (*bI* , *c I* )  *PI* (*c I* , *a I* )  1 ，又因为 *I* (*x* *P*(*x*, *x*))  1，所以 *a I* ， *bI* ， *c I*

是论域 *DI* 中三个不同元素，论域 *DI* 中至少有三个元素。

1. 写出一个语句 *A*，使得 *A* 有模型，并且 *A* 的每个模型的论域有无穷多个元素。

**解** 语句 *A* 为*x* *P*(*x*, *x*)  *x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *z*)  *P*(*x*, *z*))  *x**yP*(*x*, *y*) 。给定解释 *I* 如下。

则 *I* 是 *A* 的模型，*A* 有模型。

*DI*  为自然数集合，

*PI*  (*x*, *y*)  1 当且仅当 *x*  *y*

任取满足语句 *A* 的解释 *I* ，取 *d*1  *DI* ，因为 *I* (*x**yP*(*x*, *y*))  1 ，所以有 *d*2  *DI* 使得 *PI* (*d*1 , *d*2 )  1 ，又因为

*I* (*x* *P*(*x*, *x*))  1 ，故 *d*1  *d*2

。因为 *I* (*x**yP*(*x*, *y*))  1 ，所以 有

*d*3  *DI*

使得 *PI* (*d*2 , *d*3 )  1 ， 又因为

*I* (*x* *P*(*x*, *x*))  1，故 *d*3  *d*2 。因为 *I* (*x**y*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *z*)  *P*(*x*, *z*)))  1 ，所以 *PI* (*d*1 , *d*3 )  1，故 *d*3  *d*1 。

因此，*d*1 ，*d*2 ，*d*3 是论域中的三个不同元素。这个过程可以永远进行下去，得到 *d*1 , *d*2 , *d*3 ,

因此，论域中必然有无穷多个元素。

11.判断以下公式是不是永真式、永假式、可满足式，并说明理由。

(1) *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(2) *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(3) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)

(4) *xP*(*x*, *x*)  *x**yP*(*x*, *y*)

(5) (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(6) (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(7) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))

**解** (1)

*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 是永真式。若解释 *I* 使得 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  1 ，则 *I* (*xP*(*x*))  1 或

*I* (*xQ*(*x*))  1。

① 若 *I* (*xP*(*x*))  1，则存在 *d*  *DI* 使得 *PI* (*d* )  1 ， *PI* (*d* )  *QI* (*d* )  1 。

② 若 *I* (*xQ*(*x*))  1，则存在 *d*  *DI* 使得*QI* (*d* )  1， *PI* (*d* )  *QI* (*d* )  1 。

因此， *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  1 。

1. *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 是非永真的可满足式。给定解释 *I* 如下。

*DI*  {*d*}，

则 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  1 。给定解释 *I* 如下。

*PI* (*d* )  1 ，

*QI* (*d* )  1

*DI*   {*a* , *b*} ， *PI*  (*a*)  1， *PI*  (*b*)  0 ， *QI*  (*a*)  0 ， *QI*  (*b*)  1

则 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 。

1. *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*) 是非永真的可满足式。给定解释 *I* 如下。

*DI*  {*d*}，

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  1。给定解释 *I* 如下。

*PI* (*d* )  1 ，

*QI* (*d* )  1

*DI*   {*a* , *b*} ， *PI*  (*a*)  1， *PI*  (*b*)  0 ， *QI*  (*a*)  0 ， *QI*  (*b*)  1

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  0 。

1. *xP*(*x*, *x*)  *x**yP*(*x*, *y*) 是非永真的可满足式。给定解释 *I* 如下。

则 *I* (*xP*(*x*, *x*)  *x**yP*(*x*, *y*))  1。给定解释 *I* 如下。

*DI*  {*d*}，

*PI* (*d* , *d* )  1

*DI*   {*a* , *b*} ， *PI*  (*a* , *a*)  *PI*  (*b*,*b*)  1， *PI*  (*a* ,*b*)  *PI*  (*b* , *a*)  0

则 *I* (*xP*(*x*, *x*)  *x**yP*(*x*, *y*))  0 。

1. (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 是非永真的可满足式。给定解释 *I* 如下。

*DI*  {*d*}，

*PI* (*d* )  1 ，

*QI* (*d* )  1

则 *I* ((*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  1 。给定解释 *I* 如下。

*DI*   {*a* , *b*} ， *PI*  (*a*)  1， *PI*  (*b*)  0 ， *QI*  (*a*)  0 ， *QI*  (*b*)  1

则 *I* ((*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 。

1. (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 是永真式。若解释 *I* 使得 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 ，则存在 *d*  *DI* 使得

*PI* (*d* )  *QI* (*d* )  0 ，因此 *PI* (*d* )  1 且*QI* (*d* )  0 ， *I* (*xP*(*x*))  1且 *I* (*xQ*(*x*))  0 ， *I* ((*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)))  0 。

(7) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)) 是永真式。若解释 *I* 使得 *I* ((*xP*(*x*)  *xQ*(*x*)))  0 ，则 *I* (*xP*(*x*))  1且

*I* (*xQ*(*x*))  0 。存在*d*  *DI* 使得 *PI* (*d* )  1 ，又因为 *I* (*xQ*(*x*))  0 ，所以*QI* (*d* )  0 ， *PI* (*d* )  *QI* (*d* )  0 。因此，

*I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 。

1. 设 *A*,*B* 是任意公式，证明以下公式是永真式。

(1) *Ax*  *xA* ,其中项 *t* 对于 *A* 中的 *x* 是可代入的。

*t*

(2) *xA*  *x* *A*

(3) *xA*  *x* *A*

(4) *x*( *A*  *B*)  *xA*  *xB*

(5) *xA*  *xB*  *x*( *A*  *B*)

(6) *x*( *A*  *B*)  ( *A*  *xB*) ，其中 *x* 不是 *A* 的自由变元。

**解** (1) 任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，若 *I* ( *Ax* )(*v*)  1,则 *I*

 *I* ( *A*)(*v* [*x* / *I* (*t*)(*v*)])



*x* )(*v*)

( *At*

*t*

1 ，所以 *I*

∃*xA*)(*v*)  1 。这表明

*Ax*  *xA* 是永真式。

(

*t*

***others***

*2010-11-11 16:11:20*

--------------------------------------------

不明白这一步。。。

现在有点明白了

1. 任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，

*I* (*xA*)(*v*)  1

当且仅当

*I* (*xA*)(*v*)  0

当且仅当 存在 *d*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  0

当且仅当 存在 *d*  *DI* 使得 *I* (*A*)(*v*[*x* / *d* ])  1

当且仅当

*I* (*x* *A*)(*v*)  1

这表明*xA*  *x* *A* 是永真式。

1. 任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，

*I* (*xA*)(*v*)  0

当且仅当

*I* (*xA*)(*v*)  1

当且仅当 存在 *d*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  1

当且仅当 存在 *d*  *DI* 使得 *I* (*A*)(*v*[*x* / *d* ])  0

当且仅当

*I* (*x**A*)(*v*)  0

这表明*xA*  *x* *A* 是永真式。

1. 任取解 释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* ，若 *I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  1

，则存在 *d*  *DI*

使得 *I* ( *A*  *B*)(*v* [*x* / *d* ])  1 ，

*I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  *I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ，

*I* (*xA*)(*v*)  1 且

*I* (*xB*)(*v*)  1 ，

*I* (*xA*  *xB*)(*v*)  1

* 这 表 明

*x*( *A*  *B*)  *xA*  *xB* 是永真式。

1. 任取解 释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* ，若 *I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  0

，则存在 *d*  *DI*

使得 *I* ( *A*  *B*)(*v*[*x* / *d* ])  0 ，

*I* ( *A*)(*v* [*x* / *d* ])  *I* (*B*)(*v* [*x* / *d* ])  0 ， *I* (*xA*  *xB*)(*v*)  0 。这表明*xA*  *xB*  *x*( *A*  *B*) 是永真式。

1. 任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，若 *I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  *I* ( *A*)(*v*)  1 ，则对于每个 *d*  *DI* ， *I* ( *A*  *B*)(*v*[*x* / *d* ])  1，因为 *x* 不

是 *A* 的自 由变元， 所以 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  *I* ( *A*)(*v*)  1 ，因此 *I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ， *I* (*xB*)(*v*)  1 。这表明

*x*( *A*  *B*)  ( *A*  *xB*) 是永真式。

1. 设 *A*1 是公式 *A* 的闭包， *A*2 是*x*1  *xn A* ，其中 Var( *A*)  {*x*1, , *xn* }。证明：
2. *A* 是永真式当且仅当 *A*1 是永真式；
3. *A* 是可满足式当且仅当 *A*2 是可满足式。

**证明** (1)（  ）首先证明：若 *A* 是永真式，则*xA* 是永真式。设 *A* 是永真式。任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，任取 *d*  *DI* ，因为 *v*[*x* / *d* ]

也是 *I* 中赋值，所以 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ，*I* (*xA*)(*v*)  1 。*xA* 是永真式。若 *A* 是永真式，则*xn A* 是永真式，… ，*x*1  *xn A*

是永真式。

（  ）因为*x*1  *xn A*  *A* 是永真式，所以若*x*1  *xn A* 是永真式，则 *A* 是永真式。

(2) （  ）因为 *A*  *x*1  *xn A* 是永真式，所以若解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足 *A*，则 *I* 和 *v* 满足*x*1  *xn A* 。

（  ）若解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足*x*1  *xn A* ，则有 *d*1, , *dn*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[*x*1 / *d*1, , *xn* / *dn* ])  1 ，*I* 和 *I* 中赋值

*v*[*x*1 / *d*1, , *xn* / *dn* ] 满足 *A*。

14.判断以下等值式是否成立，并说明理由。

(1) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)

(2) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))  *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)

(3) *xP*(*x*)  *P*(*x*)

(4) *x**xP*(*x*)  *xP*(*x*)

(5) *x*(*P*(*x*)  *yQ*( *y*))  *xP*(*x*)  *yQ*( *y*)

(6) *x*(*P*(*x*)  *yQ*( *y*))  *xP*(*x*)  *yQ*( *y*)

**解** (1) 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 且 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  1 。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 且 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  1 。

1. 不成立。取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 下。

*DI*  {*a*, *b*} ， 则 *I* (*xP*(*x*))(*v*)  0 且 *I* (*P*(*x*))(*v*)  1 。

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*v*(*x*)  *b*

1. 成立。任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* ，因为 *x* 不是 *xP*(*x*)

*I* (*xP*(*x*))(*v*[*x* / *d* ])  *I* (*xP*(*x*))(*v*) 。

中的自由变元，所以对于每个 *d*  *DI* ，

*I* (*x**xP*(*x*))(*v*)  1

当且仅当对于每个 *d*  *DI* ， *I* (*xP*(*x*))(*v*[*x* / *d* ])  1

当且仅当 *I* (*xP*(*x*))(*v*)  1

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *yQ*( *y*)))  0 且 *I* (*xP*(*x*)  *yQ*( *y*))  1。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  1 ，

*PI* (*b*)  0 ，

*QI* (*a*)  *QI* (*b*)  1

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *yQ*( *y*)))  0 且 *I* (*xP*(*x*)  *yQ*( *y*))  1 。15.设 *A*,*B* 是任意公式，证明以下等值式。

(1) *x A*  *y Ax* ，其中 *y* 在 *A* 中不出现。

*y*

(2) *x*( *A*  *B*)  *x A*  *xB*

1. *x**y*( *A*  *B*)  *x A*  *y B* ，其中 *x* 不是 *B* 的自由变元，*y* 不是 *A* 的自由变元。
2. *x**y*( *A*  *B*)  *x A*  *y B* ，其中 *x* 不是 *B* 的自由变元，*y* 不是 *A* 的自由变元。
3. *x**y*( *A*  *B*)  *x A*  *y B* ，其中 *x* 不是 *B* 的自由变元，*y* 不是 *A* 的自由变元。
4. *x**y A*  *y**x A*

**证 明** (1)

*x A*  *x**A*  *y**Ax*  *y Ax*

*y y*

(2) *x*( *A*  *B*)  *x*(*A*  *B*)  *x**A*  *xB*  *x A*  *xB*  *x A*  *xB*

(3) *x**y*( *A*  *B*)  *x*( *A*  *y B*)  *x A*  *y B*

(4) *x**y*( *A*  *B*)  *x*( *A*  *yB*)  *x A*  *y B*

(5) *x**y*( *A*  *B*)  *x*( *A*  *yB*)  *x A*  *y B*

(6) 任取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v*，

*I* (*x**yA*)(*v*)  0

当且仅当有 *d*  *DI* 使得 *I* (*yA*)(*v*[*x* / *d* ])  0

当且仅当有 *d* , *c*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ][ *y* / *c*])  0 当且仅当有 *d* , *c*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[ *y* / *c*][*x* / *d* ])  0 当且仅当有 *c*  *DI* 使得 *I* (*xA*)(*v*[ *y* / *c*])  0

当且仅当 *I* (*y**xA*)(*v*)  0

16.判断以下逻辑推论关系是否成立，并说明理由。

(1) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) | *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)

(2) *xP*(*x*)  *xQ*(*x*) | *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(3) *x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)) | *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(4) *x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)) | *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*))

(5) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)), *xP*(*x*) | *xQ*(*x*)

(6) *x**yP*(*x*, *y*) | *xP*(*x*, *x*)

**解** (1) 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  1且 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  0 。这表明*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) |/ *xP*(*x*)  *xQ*(*x*) 。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  0 ，

*PI* (*b*)  1，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*xP*(*x*)  *xQ*(*x*))  1 且 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 。这表明*xP*(*x*)  *xQ*(*x*) |/ *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  *PI* (*b*)  0 ，

*QI* (*a*)  1，

*QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)))  1且 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 。这表明*x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)) |/ *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 。

1. 若解释 *I* 使得 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  0 ，则有 *d*  *DI* 使得 *PI* (*d* )  *QI* (*d* )  0 ， *PI* (*d* )  1 且 *QI* (*d* )  0 ，

*I* (*xQ*(*x*))  0 ， *I* (*x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)))  0 。这表明*x*(*P*(*x*)  *xQ*(*x*)) | *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a*)  1 ，

*PI* (*b*)  0 ，

*QI* (*a*)  *QI* (*b*)  0

则 *I* (*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)))  *I* (*xP*(*x*))  1且 *I* (*xQ*(*x*))  0 ，这表明*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)), *xP*(*x*) |/ *xQ*(*x*) 。

1. 不成立。取解释 *I* 如下。

*DI*  {*a*, *b*} ，

*PI* (*a* ,*b*)  1，

*PI* (*a* , *a*)  *PI* (*b* , *a*)  *PI* (*b*,*b*)  1

则 *I* (*x**yP*(*x*, *y*))  1，但 *I* (*xP*(*x*, *x*))  0 。所以*x**yP*(*x*, *y*) |/ *xP*(*x*, *x*) 。17.设 *A*,*B* 是任意公式，证明以下结论。

(1) *x*( *A*  *B*) | *xA*  *xB*

(2) *x*( *A*  *B*), *xA* | *xB*

(3) *x Ay* | *x**y A* ，其中 *x* 对于 *A* 中的 *y* 是可代入的。(4) *x A*  *xB* | *x*( *A*  *B*)

*x*

**证明** (1) 若解释 *I* 和 *I* 中赋 值 *v* 使得 *I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  1 ，则有 *d*  *DI*

使得 *I* ( *A*  *B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ，

*I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  *I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ，

*I* (*xA*)(*v*)  1 且

*I* (*xB*)(*v*)  1 ，

*I* (*xA*  *xB*)(*v*)  1

* 这 表 明

*x*( *A*  *B*) | *xA*  *xB* 。

1. 若 解 释 *I* 和 *I* 中 赋 值 *v* 使 得

*I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  *I* (*xA*)(*v*)  1

， 则 对 于 每 个

*d*  *DI* ，

*I* ( *A*  *B*)(*v*[*x* / *d* ])  *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  1， *I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ， *I* (*xB*)(*v*)  1。这表明*x*( *A*  *B*), *xA* | *xB* 。

1. 若 解 释 *I* 和 *I* 中 赋 值 *v* 使 得

*I* (*x Ay* )(*v*)  1 ， 则 有 *d*  *D* 使 得 *I* ( *Ay* )(*v*[*x* / *y*])  1

， 因 为

*x I x*

*I* ( *Ay* )(*v*[*x* / *d* ])  *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ][ *y* / *I* (*x*)(*v*[*x* / *d* ])])  *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ][ *y* / *d* ])

*x*

*I* (*yA*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ， *I* (*x**yA*)(*v*)  1 。这表明*x Ay* | *x**y A* 。

*x*

， 所 以

*I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ][ *y* / *d* ])  1 ，

1. 若解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 使得 *I* (*x*( *A*  *B*))(*v*)  0 ，则对于每个 *d*  *DI* ， *I* ( *A*  *B*)(*v*[*x* / *d* ])  0 ， *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  1 且*I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  0 ，因此 *I* (*xA*)(*v*)  1且 *I* (*xB*)(*v*)  0 ， *I* (*xA*  *xB*)(*v*)  0 。所以*x A*  *xB* | *x*( *A*  *B*) 。18.设变元 *x* 既不是公式 *B* 中的自由变元，也不是公式集  中任何公式的自由变元，*A* 是公式。若  {*A*} | *B* ，则 {*x A*} | *B* 。

**证明** 设解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足 {*x A*} ，则 *I* (*xA*)(*v*)  1，有 *d*  *DI* 使得 *I* ( *A*)(*v*[*x* / *d* ])  1 。因为 *x* 不是公式集 中任何公式的自由变元，所以 *I* 和 *v*[*x* / *d* ] 也满足 ，*I* 和 *v*[*x* / *d* ] 满足 {*A*}。又因为 {*A*} | *B* ，所以 *I* (*B*)(*v*[*x* / *d* ])  1 ，因

为 *x* 不是 *B* 中的自由变元，因此 *I* (*B*)(*v*)  1。这表明 {*x A*} | *B* 。

19. 设 是公式集合，*A* 是公式，则 | *A* 当且仅当 { *A*} 不可满足。

**证明** 设 { *A*} 可满足，解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足 { *A*}，则 *I* 和 *v* 满足 且 *I* ( *A*)(*v*)  0 ，所以 |/ *A* 。设 |/ *A* ，则有解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足 且 *I* ( *A*)(*v*)  0 ，所以 *I* 和 *v* 满足 { *A*}。因此，  { *A*} 可满足。

20.判断以下公式集合是否可满足，并说明理由。

(1) {*P*(*t*) | *t*是项}{*xP*(*x*)}

(2) {*x* *P*(*x*, *x*), *x**y**z*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *z*)  *P*(*x*, *z*)), *x**yP*(*x*, *y*)}

**解** (1) 可满足。取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 如下。

对每个常元 *a*， *a I*

 1；

*DI*  {1, 2}，

*PI* (1)  0 ，

*PI* (2)  1，

对每个 *n* 元函数符号 *f*， *f I* (*x*1, , *xn* )  1； 对每个变元 *x*， *v*(*x*)  1。

可归纳证明：对每个项 *t*， *I* (*t*)(*v*)  1。

*I* 和 *v* 满足{*P*(*t*) | *t*是项}{*xP*(*x*)} 。

(2) 可满足。取解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 如下。

*DI* 为自然数集，

*PI* (*x*, *y*)  1

当且仅当

*x*  *y*

则 *I* 和 *v* 满足{*x* *P*(*x*, *x*), *x**y**z*(*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *z*)  *P*(*x*, *z*)), *x**yP*(*x*, *y*)}。

## 第三章 公理系统

1. 证明

(1) ├(A→B) →**((**B→C) →(A→C)**)**

(2) ├**(**A→(B→C)) →(B→(A→C))

(3) ├¬¬A→A

(4) ├A→¬¬A

(5) ├(A→B) →(¬B→¬A)

(6) ├(A→(¬B→¬(A→B)))

1. ├A→A∨B
2. ├A→B∨A
3. ├A∧B →A

## ├A∧B →B

1.(6)

├(A→(¬B→¬(A→B))) A, A →B ├B

A├(A →B) →B A├¬B →¬(A →B)

├A→(¬B →¬(A →B))

1.(7)

├A→A∨B

***A***1=A→(¬B →A)

***A***2= (¬B →A)→(¬A→¬¬B)

***A***3=¬¬B →B ***A***4=(¬A→¬¬B )→(¬A→B) ***A***5= (¬B →A)→(¬A→B) ***A***6=A→(¬A→B) ***A***7=A→A∨B

1.(8) A∨B=(¬A→B)

├A→B∨A

***A***1= A→(¬B →A)

***A***2= A→B∨A

2.(1)

├A→(¬B→¬(A→B))

├A, ├B当且仅当├A∧B 证明如果├A, ├B则├A∧B ***A***1= A

***A***2= B

***A***3= A→(¬¬B→¬(A→¬B)))

***A***4=B→¬¬B

***A***5=(¬¬B→¬(A→¬B))→(B →¬(A→¬B))

***A***6= A→(B →¬(A→¬B))

***A***7= B →¬(A→¬B)

***A***8= ¬(A→¬B)

2.(1)

证明如果├A∧B则├A, ├B

***A***1= A∧B ***A***2= A∧B→A ***A***3= A

***A***4= A∧B→B

***A***5= B

├A, ├B

2.(2)

├A 或├B 当且仅当├A∨B 不对├ A→A

├珹∨A

├珹和├A

3 证明空集是协调的公式集证明:

由可靠性定理可知若├A 则A 是永真式

因此对于任意命题变元p,├p 空集是协调的公式集

4.

若1⊆2且1 ├A则2 ├A 证明

若 1⊆2 且 1 ├A 则存在一个A 的从 1 的推演该推演也是A 的从 2 的推演因此 2 ├A

5若 1⊆2 且 2 是协调的则 1 也是协调的证明

若是 2 协调的则存在公式A 使得 2 ├A 由上题知道若 1⊆21 ├A 所以 1 也是协调的

9.

(1) ├Atx→∃xA 其中t对于A中的x是可代入的(2) ├∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)

(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

(4) ├∃x(A∨B) ↔(∃xA∨∃xB)

(5) ├∃x(A∧B) →(∃xA∧∃xB)

(6) ├∀xA↔¬∃x¬A

1. ├∀x(A→B) →(∃xA→B) 其中x不是B的自由变元
2. ├∃x∀yA→∀y∃xA

9.(1)

(1) ├Atx→∃xA 其中t对于A中的x是可代入的

***A***1=∀x¬A→¬Atx ***A***2= ¬¬Atx→¬∀x¬A ***A***3= Atx→¬¬Atx ***A***4= Atx→¬∀x¬A ***A***5= Atx→∃xA

9.(2)

(2) ├∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)

***A***1= ∃xA→A

***A***1=∀x(A→B) →(A→B)

***A***1= B→∃xB

***A***1= (A→B)→(A→∃xB)

***A***1= (A→∃xB) →(∃xA→∃xB) ***A***1= (A→B)→(∃xA→∃xB) ***A***1=∀x(A→B) →(∃xA→∃xB)

9.(3)

(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB) 证 ├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB) 证 ├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B) 则├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB)

***A***1= ∀x(A∧B) →A∧B

***A***2= A∧B →A

***A***3= A →∀xA ***A***4= A∧B →∀xA ***A***5= A∧B →B

***A***6= B →∀xB

***A***7= A∧B →∀xB

***A***8= ∀x(A∧B) →∀xA

***A***9= ∀x(A∧B) →∀xB

***A***10= ∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

9.(3)

├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B)

***A***1= ∀xA∧∀xB→∀xA

***A***2= ∀xA→A

***A***3= ∀xA∧∀xB→A ***A***4= ∀xA∧∀xB→∀xB ***A***5= ∀xB→B

***A***6= ∀xA∧∀xB→B ***A***7= ∀xA∧∀xB→A∧B ***A***8= A∧B →∀x(A∧B)

***A***9= ∀xA∧∀xB→∀x(A∧B)

(3) ├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB) 证 ├∀x(A∧B) →(∀xA∧∀xB) 证 ├(∀xA∧∀xB) →∀x(A∧B) 则├∀x(A∧B) ↔(∀xA∧∀xB)

9.(4)

(4) ├∃x(A∨B) ↔(∃xA∨∃xB) 如果├A ↔B , 则├∀xA↔∀xB ***A***1= A ↔B

***A***2= (A ↔B) →(A→B)

***A***3= (A→B) →(∀x A →∀xB) ***A***4= (A ↔B) →(∀x A →∀xB) ***A***5= (A ↔B) →(B→A)

***A***6= (A→B) →(∀x B→∀xA)

***A***7= (A ↔B) →(∀x B→∀xA)

***A***8= (A ↔B) →∀xA↔∀xB

9.(4)

***A***1= ¬(A∨B) ↔¬A∧¬B

***A***2= ∀x¬(A∨B) ↔∀x( ¬A∧¬B) ***A***3=∀x( ¬A∧¬B) ↔(∀x ¬A∧∀x¬B) ***A***4= ∀x¬(A∨B) ↔(∀x ¬A∧∀x¬B) ***A***5=(∀x ¬A∧∀x¬B) ↔∀x¬(A∨B) ***A***6=¬∀x¬(A∨B) ↔¬(∀x ¬A∧∀x¬B) ***A***7=¬(∀x ¬A∧∀x¬B) ↔¬∀x A∨¬∀x¬B) ***A***8=¬∀x¬(A∨B) ↔¬∀x A∨¬∀x¬B) ***A***9=∃x(A∨B) ↔(∃xA∨∃xB)

9.(5)

(5) ├∃x(A∧B) →(∃xA∧∃xB)

***A***1= ∃x(A∧B)→A∧B

***A***2= A∧B →A

***A***3= A→∃xA

***A***4= A∧B →B

***A***5= B→∃xB

***A***6= A∧B →∃xA∧∃xB

***A***7=∃x(A∧B)→∃xA∧∃xB

9.(6)

(6) ├∀xA↔¬∃x¬A ***A***1=A↔¬¬A ***A***2=∀xA↔∀x¬¬A ***A***3=∀xA↔¬¬∀x¬¬A ***A***4=∀xA↔¬∃x¬A

9.(7)

1. ├∀x(A→B) →(∃xA→B) 其中x不是B的自由变元

***A***1= ∃xA→A

***A***2= (A→B) →(∃xA→B) ***A***3= ∀x(A→B) →(A→B) ***A***4= ∀x(A→B) →(∃xA→B)

9.(8)

1. ├∃x∀yA→∀y∃xA ***A***1=∃x∀yA(x,y)→∀yA(c,y) ***A***2=∀yA(c,y)→A(c,y) ***A***3=A(c,y) →∃x A(x,y) ***A***4=∀y∃x A(x,y)

10.(1)

若├A→B则├∃xA→∃xB

***A***1= A →B

***A***2= **(**A →B) →(¬B →¬A)

***A***3= ¬B →¬A

***A***4= ∀x(¬B →¬A)

***A***5= ∀x(¬B →¬A) →(∀x ¬B→∀x ¬A)

***A***6= ∀x ¬B→∀x ¬A ***A***7= ¬∀x ¬A→¬∀x ¬B ***A***8= ∃x A→∃x B

10.(2)

若├A→B且x不是B的自由变元则├∃xA→B

***A***1= A →B

***A***2= **(**A →B) →(¬B →¬A)

***A***3= ¬B →¬A

***A***4= ∀x(¬B →¬A)

***A***5= ∀x(¬B →¬A) →(¬B→∀x ¬A)

***A***6= ¬B→∀x ¬A ***A***7= ¬∀x ¬A→¬¬B ***A***7= ¬¬B →B

***A***8= ∃x A→B

1.用归结法证明：

(1) *p*  *q* , *p*  *r* |

*p*  *q*  *r*

## 第四章 归结法原理

(2)

*p*  *r* ， *q*  *r* |

*p*  *q*  *r*

(3) *p*  *q*  *r* | ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)

(4) *p*  *q*  *r* | ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

(5) *p*  *q*  *r* ， *p*  *r* | *q*  *r*

(6)

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*) |

*p*  (*q*  *r*)

**解** (1) 首先将 *p*  *q* , *p*  *r* ， ( *p*  *q*  *r*) 化为合取范式。

*p*  *q*  *p*  *q*

*p*  *r*  *p*  *r*

( *p*  *q*  *r*)  (*p*  (*q*  *r*))  *p*  (*q*  *r*)

给出子句集{*p*  *q* , *p*  *r* , *p* , *q*  *r*}的反驳如下。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ①  ② | *p*  *q*  *p*  *r* |  |
| ③  ④ | *p*  *q*  *r* |
| ⑤ | *q* | ①由和③ |
| ⑥ | *r* | 由②和③ |
| ⑦ | *r* | 由④和⑤ |
| ⑧ |  | 由⑥和⑦ |

因此， *p*  *q* , *p*  *r* | *p*  *q*  *r*

1. 首先将 *p*  *r* ， *q*  *r* ， ( *p*  *q*  *r*) 化为合取范式。

*p*  *r*  *p*  *r*

*q*  *r*  *q*  *r*

( *p*  *q*  *r*)  ( *p*  *q*)  *r*

给出子句集{ *p*  *r* , *q*  *r* , *p*  *q* , *r* }的反驳如下。

① *p*  *r*

② *q*  *r*

③ *p*  *q*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ④ | *r* |  |
| ⑤ | *q*  *r* | 由①和③ |
| ⑥ | *r* | 由②和⑤ |
| ⑦ |  | 由④和⑥ |

因此， *p*  *r* ， *q*  *r* | *p*  *q*  *r*

1. 首先将 *p*  *q*  *r* , (( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)) 化为合取范式。

*p*  *q*  *r*  *p*  *q*  *r*

(( *p*  *q*)  ( *p*  *r*))  ((*p*  *q*)  (*p*  *r*))  *p*  *q*  *r*

给出子句集{ *p*  *q*  *r* ,*p*, *q* , *r* }的反驳如下。

① *p*  *q*  *r*

② *p*

③ *q*

④ *r*

⑤ *q*  *r*

由①和②

⑥ *r* 由③和⑤

⑦ 由④和⑥

因此， *p*  *q*  *r* | ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)

1. 首先将 *p*  *q*  *r* , (( *p*  *r*)  (*q*  *r*)) 化为合取范式。

*p*  *q*  *r*  ( *p*  *q*)  *r*  *p*  *q*  *r*

(( *p*  *r*)  (*q*  *r*))  ((*p*  *r*)  (*q*  *r*))  *p*  *q*  *r*

给出子句集{ *p*  *q*  *r* ,*p*,*q*, *r* }的反驳如下。

① *p*  *q*  *r*

② *p*

③ *q*

④ *r*

⑤ *q*  *r*

由①和②

⑥ *r* 由③和⑤

⑦ 由④和⑥

因此， *p*  *q*  *r* | ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

1. 首先将 *p*  *r* ， (*q*  *r*) 化为合取范式。

*p*  *r*  *p*  *r*

(*q*  *r*)  *q*  *r*

给出子句集{ *p*  *q*  *r* , *p*  *r* , *q* , *r* }的反驳如下。

① *p*  *q*  *r*

② *p*  *r*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ③ | *q* |  |
| ④  ⑤ | *r*  *q*  *r* | 由①和② |
| ⑥ | *r* | 由③和⑤ |
| ⑦ |  | 由④和⑥ |

因此， *p*  *q*  *r* ， *p*  *r* | *q*  *r*

1. 首先将( *p*  *q*)  ( *p*  *r*) ， ( *p*  (*q*  *r*)) 化为合取范式。

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  (*p*  *q*)  (*p*  *r*)

 ( *p*  *q*)  (*p*  *r*)  *p*  *q*  *r*

( *p*  (*q*  *r*))  *p*  *q*  *r*

给出子句集{*p*  *q*  *r*, *p*, *q*, *r*} 的反驳如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ① | *p*  *q*  *r* |  |
| ② | *p* |  |
| ③ | *q* |  |
| ④  ⑤ | *r*  *q*  *r* | 由①和② |
| ⑥ | *r* | 由③和⑤ |
| ⑦ |  | 由④和⑥ |

因此， ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*) | *p*  (*q*  *r*) 。

2.用归结法判断以下结论是否成立：

(1) *p*  *q*  *r* | ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

(2)

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*) |

*p*  *q*  *r*  *s*

(3) ( *p*  *q*)  (*q*  *r*) ， *r*  *p* | *q*  *p*

(4) *p*  *q*  *r* ， *p*  *q*  *r* | *p*  *q*  *r*

**解** (1) 首先将 *p*  *q*  *r* , (( *p*  *r*)  (*q*  *r*)) 化为合取范式。

*p*  *q*  *r*  ( *p*  *q*)  *r*  (*p*  *q*)  *r*  (*p*  *r*)  (*q*  *r*)

(( *p*  *r*)  (*q*  *r*))  ((*p*  *r*)  (*q*  *r*))  *p*  *q*  *r*

给出子句集{ *p*  *r* , *q*  *r* ,*p*,*q*, *r* }的反驳如下。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ①  ② | *p*  *r*  *q*  *r* |  |
| ③ | *p* |
| ④  ⑤ | *q*  *r* |
| ⑥ | *r* | 由①和③ |
| ⑦ |  | 由⑥和⑤ |

因此， *p*  *q*  *r* | ( *p*  *r*)  (*q*  *r*)

1. 首先将( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*) , ( *p*  *q*  *r*  *s*) 化为合取范式。

( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*) (*p*  *q*)  (*p*  *r*)  (*p*  *s*)  *p*  *q*  *r*  *s*

( *p*  *q*  *r*  *s*)  (*p*  *q*  *r*  *s*)  *p*  *q*  *r*  *s*

给出子句集{ *p*  *q*  *r*  *s* ,*p*, *q* , *r* , *s* }的反驳如下。

① *p*  *q*  *r*  *s*

② *p*

③ *q*

④ *r*

⑤ *s*

⑥ *q*  *r*  *s*

⑦ *r*  *s*

由①和② 由③和⑥

⑧ *s* 由④和⑦

⑨ 由⑤和⑧

因此， ( *p*  *q*)  ( *p*  *r*)  ( *p*  *s*) |

*p*  *q*  *r*  *s*

1. 首先将( *p*  *q*)  (*q*  *r*) , *r*  *p* , (*q*  *p*) 化为合取范式。

( *p*  *q*)  (*q*  *r*)  (*p*  *q*)  (*q*  *r*)  ( *p*  *q*)  *q*  *r*  *q*  *r*

*r*  *p*  *p*  *r*

(*q*  *p*)  (*q*  *p*)  *p*  *q*

给出子句集{ *q*  *r* , *p*  *r* , *p* ,*q*}的反驳如下。

① *q*  *r*

② *p*  *r*

③ *p*

④ *q*

⑤ *r*

由②和③

⑥ *r* 由④和①

⑦ 由⑤和⑥

因此， ( *p*  *q*)  (*q*  *r*) ， *r*  *p* | *q*  *p* 。

1. 首先将 *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* , (*p*  *q*  *r*) 化为合取范式。

*p*  *q*  *r*  ( *p*  *q*)  *r*  *p*  *q*  *r*

*p*  *q*  *r*  ( *p*  *q*)  *r*  *p*  *q*  *r*

(*p*  *q*  *r*)  *p*  *q*  *r*

为了判断子句集{ *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* }是否可满足，消去命题变元 *r*，用子句*p*  *q*  *r* 分别与子句

*p*  *q*  *r* 和 *p*  *q*  *r* 归结均得到子句 *p*  *q*  *p*  *q* ,因为子句集{ *p*  *q*  *p*  *q* }可满足，所以子句集

{ *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* , *p*  *q*  *r* }可满足。因此， *p*  *q*  *r* ， *p*  *q*  *r* |/ *p*  *q*  *r* 。3.求下列公式的斯科伦范式。

(1) *x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *y*(*Q*(*x*, *y*)  *P*( *y*)))

(2) *x**y*(*P*(*x*, *y*)  *Q*( *y*, *x*))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*))

(3) *xP*(*x*, *y*)  (*Q*(*x*)  *xR*( *y*, *x*))

(4) *xP*(*x*, *y*)  *yQ*(*x*, *y*)

**解** (1) *x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *y*(*Q*(*x*, *y*)  *P*( *y*)))

 *x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *z*(*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*)))

 *x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *z*(*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*)))

 *x*(*P*(*x*)  (*y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *z*(*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*)))

 *x*(*P*(*x*)  (*y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *z*(*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*))))

 *x*(*P*(*x*)  (*y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *z*(*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*))))

 *x**y**z*(*P*(*x*)  ((*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  (*Q*(*x*, *z*)  *P*(*z*))))

*x*(*P*(*x*)  *y*(*P*( *y*)  *P*( *f* (*x*, *y*)))  *y*(*Q*(*x*, *y*)  *P*( *y*))) 的斯科伦范式是

*z*(*P*(*a*)  ((*P*(*b*)  *P*( *f* (*a*,*b*)))  (*Q*(*a*, *z*)  *P*(*z*)))) 。

(2) *x**y*(*P*(*x*, *y*)  *Q*( *y*, *x*))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*))

 *z**u*(*P*(*z*,*u*)  *Q*(*u*, *z*))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*))

 *z**u*((*P*(*z*,*u*)  *Q*(*u*, *z*))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*)))

*x**y*(*P*(*x*, *y*)  *Q*( *y*, *x*))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*)) 的斯科伦范式是

*z*((*P*(*z*, *f* (*z*))  *Q*(*u*, *f* (*z*)))  (*Q*( *y*, *x*)  *R*(*x*, *y*))) 。(3) *xP*(*x*, *y*)  (*Q*(*x*)  *xR*( *y*, *x*))

 *zP*(*z*, *y*)  (*Q*(*x*)  *uR*( *y*,*u*))

 *zP*(*z*, *y*)  (*Q*(*x*)  *u**R*( *y*,*u*))

 *z**u*(*P*(*z*, *y*)  (*Q*(*x*)  *R*( *y*,*u*)))

*xP*(*x*, *y*)  (*Q*(*x*)  *xR*( *y*, *x*)) 的斯科伦范式是*u*(*P*(*a*, *y*)  (*Q*(*x*)  *R*( *y*,*u*))) 。

(4) *xP*(*x*, *y*)  *yQ*(*x*, *y*)

 (*xP*(*x*, *y*)  *yQ*(*x*, *y*))  (*xP*(*x*, *y*)  *yQ*(*x*, *y*))

 (*zP*(*z*, *y*)  *uQ*(*x*,*u*))  (*vP*(*v*, *y*)  *wQ*(*x*, *w*))

 (*zP*(*z*, *y*)  *u**Q*(*x*,*u*))  (*v**P*(*v*, *y*)  *wQ*(*x*, *w*))

 *z**u*(*P*(*z*, *y*)  *Q*(*x*,*u*))  *v**w*(*P*(*v*, *y*)  *Q*(*x*, *w*))

 *v**w**z**u*((*P*(*z*, *y*)  *Q*(*x*,*u*))  (*P*(*v*, *y*)  *Q*(*x*, *w*)))

*xP*(*x*, *y*)  *yQ*(*x*, *y*) 的斯科伦范式是

*z**u*((*P*(*z*, *y*)  *Q*(*x*,*u*))  (*P*(*a*, *y*)  *Q*(*x*,*b*))) 。

4.证明：前束范式 *A* 是永假式当且仅当 *A* 的无 前束范式是永假式。**证明** 设 *A* 是前束范式 *A* 的无 前束范式。

() 设 *A* 可满足，即有解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 使得 *I* ( *A*)(*v*)  1，我们证明 *A* 可满足。

对 *A* 中 的出现次数进行归纳。

若 *A* 中不出现 ，则 *A* 与 *A* 相同， *A* 可满足。设 *A* 中 的出现次数为 *m* 1。

若 *A* 为*yB* ， *A* 为(*B y* ) 。因为 *I* ( *A*)(*v*)  1，故有 *d*  *DI* 使得 *I* (*B*)(*v*[ *y* / *d* ])  1 。令解释 *I* 与 *I* 的区别仅在于 *a I*   *d* ，则

*a*

*I* (*B y* )(*v*)  *I* (*B*)(*v*[ *y* / *I* (*a*)(*v*)])  *I* (*B*)(*v*[ *y* / *d* ])  1

*a*

*B y* 可满足，由归纳假设知， (*B y* ) 可满足，即 *A* 可满足。

*a a*

若 *A* 为*x*1  *xn**yB* ， *A* 为(*x*1  *xn By* ) 。定义 *DI* 上的 *n* 元运算 *g* 如下：对于任意 *a*1, , *an*  *DI* ，令

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

*g*(*a*1, , *an* )

为 集 合 {*b* | *I* (*B*)(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* , *y* / *b*])  1}

中 的 一 个 元 素 ， 这 个 集 合 是 非 空 的 ， 因 为

*I* (*yB*)(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* ])  1 。令解释 *I* 与 *I* 的区别仅在于 *f I*   *g* 。对于任意 *a*1, , *an*  *DI* ，

*y*

*I* (*B*

*f* ( *x*1 , , *xn* )

)(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* ])  *I* (*B*)(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* , *y* / *I* ( *f* (*x*1, , *xn* ))(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* ])])

 *I* (*B*)(*v*[*x*1 / *a*1, , *xn* / *an* , *y* / *g*(*a*1, , *an* )])  1

所以， *I* (*x*1  *xn B y*

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

)(*v*)  1， *x*1  *xn B y*

可满足，由归纳假设知， (*x*1  *xn B y*

) 可满

足，即 *A* 可满足。

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

() 我们证明 *A* | *A* 。由谓词逻辑公理系统的可靠性定理知，只需证明 *A* | *A* 。

对 *A* 中 的出现次数进行归纳。

若 *A* 中不出现 ，则 *A* 与 *A* 相同， *A* | *A* 。设 *A* 中 的出现次数为 *m* 1。

若 *A* 为*yB* ， *A* 为(*B y* ) 。由第三章习题 9（1）知， | *B y*  *yB* ，故 *B y* | *yB* 。由归纳假设知， (*B y* ) | *B y* ，因此

*a*

(*B y* ) | *yB* 。

*a*

(*x*1  *xn B*

*y*

*a a a a*

若 *A* 为

*x*1  *xn**yB* ，

*A* 为

*f* ( *x*1 , , *xn* ) )

* 由 归 纳 假 设 知 ，

*y*

(*x*1  *x Bn*

*f* ( *x*1 , , *xn* )

) | *x*1  *xn B y*

。由第三章习题 9（1）知， | *B y*

1 *n*

*f* ( *x* , , *x* )

 *yB* ，再次应用例 3.8 得

到 | *x*1  *xn B y*

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

 *x*1  *xn**yB* 。所以，(*x*1  *xn B y*

) | *x*1  *xn**yB* ，即 *A* | *A* ，*A* | *A* 。

若 *A* 可满足，有解释 *I* 和 *I* 中赋值 *v* 满足 *A* ，则 *I* 和 *v* 满足 *A*，*A* 可满足。5.前束范式 *A* 的无 前束范式 *A* 定义如下：

*f* ( *x*1 , , *x* )*n*

1. 若 *A* 中不出现，则 *A* 是 *A*；
2. 若 *A* 是*yB* ，则 *A* 是(*B y* ) ，其中 *a* 是在 *B* 中不出现的常元；

*a*

1. 若 *A* 是*x*1  *xn**yB* ，其中 *n* 是正整数，则 *A* 为(*x*1  *xn**yBy*

*f* ( *x*1 , *x* )*n*

) ，其中 *f* 是在 *B* 中不出现的 *n* 元函数符号。

证明：*A* 是永真式当且仅当 *A* 是永真式。

1. 证明：若 *I* 是赫布兰德解释，则对每个基项 *t*， *I* (*t*)  *t* 。**证明** 对 *t* 进行归纳。
2. 若 *t* 是常元 *a*，则 *I* (*a*)  *a I*  *a* 。
3. 若 *t* 是 *f* (*t*1, ,*tn* ) ，由归纳假设知： *I* (*t*1)  *t*1 ,…， *I* (*tn* )  *tn* 。

*I* ( *f* (*t*1, , *tn* )) 

*f I* (*I* (*t*1), , *I* (*tn* )) 

*f I* (*t*1, , *tn* ) 

*f* (*t*1, , *tn* )

1. 证明：若语句集 可满足，则有赫布兰德解释满足 。

8.用归结法证明以下子句构成的集合不可满足。

(1) *P*(*x*, *f* (*x*),*b*) ， *Q*(*x*)  *Q*( *y*)  *P*(*x*, *f* ( *y*), *z*)  *Q*(*z*) ， *Q*(*a*) ， *Q*(*b*) (2) *Q*(*a*)  *R*(*x*) ， *Q*(*x*)  *R*(*x*) ， *R*(*x*)  *P*(*a*) ， *P*(*x*)

1. (3)

*P*( *y*, *a*)  *P*( *f* ( *y*), *y*) ，

*P*( *y*, *a*)  *P*( *y*, *f* ( *y*))

， *P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *a*) ，

*P*(*x*, *y*)  *P*( *f* ( *y*), *y*) ，

*P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *f* ( *y*))

(4) *E*(*x*)  *V* (*x*)  *S* (*x*, *f* (*x*)) ， *E*(*x*)  *V* (*x*)  *C*( *f* (*x*)) ， *P*(*a*) ， *E*(*a*) ， *S* (*a*, *y*)  *P*( *y*) ， *P*(*x*)  *V* (*x*) ，

*P*(*x*)  *C*(*x*)

(5) *P*(*x*, *y*,*u*)  *P*( *y*, *z*,*v*)  *P*(*x*, *v*, *w*)  *P*(*u*, *z*, *w*) ， *P*(*g*(*x*, *y*), *x*, *y*) ， *P*(*x*, *h*(*x*, *y*), *y*) ， *P*( *f* (*x*), *x*, *f* (*x*))

**解** (1) 给出该子句集的一个反驳如下：

⑴ *P*(*x*, *f* (*x*),*b*)

⑵ *Q*(*x*)  *Q*( *y*)  *P*(*x*, *f* ( *y*), *z*)  *Q*(*z*)

⑶ *Q*(*a*)

⑷ *Q*(*b*)

⑸ *P*(*a*, *f* (*a*), *z*)  *Q*(*z*)

由⑵{*x* / *a*, *y* / *a*}和⑶

⑹ *Q*(*b*) 由⑴{*x* / *a*}和⑸{*z* / *b*}

⑺ 由⑷ 和⑹

所以该子句集不可满足。

* 1. 给出该子句集的一个反驳如下：

⑴ *Q*(*a*)  *R*(*x*)

⑵ *Q*(*x*)  *R*(*x*)

⑶ *R*(*x*)  *P*(*a*)

⑷ *P*(*x*)

⑸ *R*(*a*)

⑹ *P*(*a*)

由⑴{*x* / *a*}和⑵{*x* / *a*}

由⑶{*x* / *a*}和⑸

⑺ 由⑷{*x* / *a*}和⑹

所以该子句集不可满足。

* 1. 给出该子句集的一个反驳如下：

⑴ *P*( *y*, *a*)  *P*( *f* ( *y*), *y*)

⑵ *P*( *y*, *a*)  *P*( *y*, *f* ( *y*))

⑶ *P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *a*)

⑷ *P*(*x*, *y*)  *P*( *f* ( *y*), *y*)

⑸ *P*(*x*, *y*)  *P*( *y*, *f* ( *y*))

⑹ *P*( *f* (*a*), *a*)  *P*(*a*, *a*)

由⑶{*x* / *a*, *y* / *f* (*a*)}和⑵ {*y* / *a*}

⑺ *P*( *f* (*a*), *a*) 由⑴{*y* / *a*}和⑷{*x* / *a*, *y* / *a*}

⑻ *P*(*a*, *a*)

由⑹ 和⑺

⑼ 由⑶{*x* / *a*, *y* / *a*}和⑻

所以该子句集不可满足。

* 1. 给出该子句集的一个反驳如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ⑴  ⑵ | *E*(*x*)  *V* (*x*)  *S* (*x*, *f* (*x*))  *E*(*x*)  *V* (*x*)  *C*( *f* (*x*)) |  |
| ⑶ | *P*(*a*) |
| ⑷  ⑸  ⑹  ⑺  ⑻ | *E*(*a*)  *S* (*a*, *y*)  *P*( *y*)  *P*(*x*)  *V* (*x*)  *P*(*x*)  *C*(*x*)  *E*(*a*)  *V* (*a*)  *P*( *f* (*a*)) | 由⑴{*x* / *a*}和⑸{*y* / *f* (*a*)} |
| ⑼ | *V* (*a*)  *P*( *f* (*a*)) | 由⑷ 和⑻ |
| ⑽ | *C*( *f* (*a*))  *V* (*a*) | 由⑼ 和⑺{*x* / *f* (*a*)} |
| ⑾ | *E*(*a*)  *V* (*a*) | 由⑵{*x* / *a*}和⑽ |

⑿ *V* (*a*)

由⑷ 和⑾

⒀ *P*(*a*)

由⑹{*x* / *a*}和⑿

⒁ 由⑶ 和⒀

所以该子句集不可满足。

* 1. 给出该子句集的一个反驳如下：

⑴ *P*(*x*, *y*,*u*)  *P*( *y*, *z*,*v*)  *P*(*x*, *v*, *w*)  *P*(*u*, *z*, *w*)

⑵ *P*(*g*(*x*, *y*), *x*, *y*)

⑶ *P*(*x*, *h*(*x*, *y*), *y*)

⑷ *P*( *f* (*x*), *x*, *f* (*x*))

⑸ *P*(*x* ,*z* , *x* ) *P*(*u*,*z* ,*u*)

由⑴{*x* /

*g*(*x* ,*u*), *y*/ *x* ,*v*/ *x* ,*w*/ *u*}和⑵{ *y*/ *u*}

⑹ *P*(*u*,*h*(*x* ,*x* ),*u*) 由⑸{*z* / *h*(*x* , *x* )}和⑶{ *y*/ *x* }

⑺ □ 由⑹{*u*/ *f* (*h*(*x* , *x* ))}和⑷{*x* / *h*(*x* ,*x* )}

所以该子句集不可满足。

9. 用归结法证明：

(1) *y*(*P*( *y*)  *Q*( *y*)) | *x*(*y*(*P*( *y*)  *R*(*x*, *y*))  *z*(*Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*)))

(2) *x*(*y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))  *y*(*Q*( *y*)  *R*(*x*, *y*))) ,

*xQ*(*x*) | *x**y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))

(3) *x*(*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *C*( *y*))) , *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))) ,

*x*(*P*(*x*)  *R*(*x*)) | *x*(*P*(*x*)  *C*(*x*))

(4) *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) |/ *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)

(5) *x**yP*(*x*, *y*) |/ *y**xP*(*x*, *y*)

**解** (1) 由语句*y*(*P*( *y*)  *Q*( *y*)) 得到子句*P*( *y*)  *Q*( *y*) ，由语句 *x*(*y*(*P*( *y*)  *R*(*x*, *y*))  *z*(*Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*))) 得到子句 *P*(*b*) ， *R*(*a*,*b*) 以及*Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*) 。

构造子句集{ *P*( *y*)  *Q*( *y*) ， *P*(*b*) ， *R*(*a*,*b*) ， *Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*) } 的一个反驳如下：

⑴ *P*( *y*)  *Q*( *y*)

⑵ *P*(*b*)

⑶ *R*(*a*,*b*)

⑷ *Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*)

⑸ *Q*(*b*)

⑹ *Q*(*b*)

由⑴和⑵

由⑶和⑷

⑺ 由⑸和⑹

因此， *y*(*P*( *y*)  *Q*( *y*)) | *x*(*y*(*P*( *y*)  *R*(*x*, *y*))  *z*(*Q*(*z*)  *R*(*x*, *z*))) 。

1. 由 语 句

*x*(*y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))  *y*(*Q*( *y*)  *R*(*x*, *y*)))

得 到 子 句

*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *Q*( *f* (*x*)) 和

*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *R*(*x*, *f* (*x*)) ，由语句 *xQ*(*x*) 得到子句*Q*(*x*) ，由语句 *x**y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)) 得到子句 *S* (*a*,*b*)

和 *P*(*b*) 。

构造子句集{ *S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *Q*( *f* (*x*)) ， *S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *R*(*x*, *f* (*x*)) ， *Q*(*x*) ， *S* (*a*,*b*) ， *P*(*b*) } 的一个反驳如

下：

⑴ *S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *Q*( *f* (*x*))

⑵ *S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)  *R*(*x*, *f* (*x*))

⑶ *Q*(*x*)

⑷ *S* (*a*,*b*)

⑸ *P*(*b*)

⑹ *S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)

⑺ *P*(*b*)

由⑴和⑶ 由⑷和⑹

⑻ 由⑸和⑺

因此，

*x*(*y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))  *y*(*Q*( *y*)  *R*(*x*, *y*))) , *xQ*(*x*) | *x**y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*)) 。

1. 由 语 句

*x*(*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *C*( *y*)))

得 到 子 句

*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *S* (*x*, *f* (*x*)) 和

*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *C*( *f* (*x*)) ；由语句 *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))) 得到子句 *P*(*a*) ，*Q*(*a*) ，*S* (*a*, *y*)  *P*( *y*) ； 由语句*x*(*P*(*x*)  *R*(*x*)) 得到子句*P*(*x*)  *R*(*x*) ；由语句*x*(*P*(*x*)  *C*(*x*)) 得到子句*P*(*x*)  *C*(*x*) 。

构 造 子句集 {

*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *S* (*x*, *f* (*x*))

， *Q*(*x*)  *R*(*x*)  *C*( *f* (*x*))

， *P*(*a*)

， *Q*(*a*)

， *S* (*a*, *y*)  *P*( *y*) ，

*P*(*x*)  *R*(*x*) ， *P*(*x*)  *C*(*x*) } 的一个反驳如下：

⑴ *Q*(*x*)  *R*(*x*)  *S* (*x*, *f* (*x*))

⑵ *Q*(*x*)  *R*(*x*)  *C*( *f* (*x*))

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ⑶ | *P*(*a*) |  |
| ⑷ | *Q*(*a*) |
| ⑸ | *S* (*a*, *y*)  *P*( *y*) |
| ⑹ | *P*(*x*)  *R*(*x*) |
| ⑺ | *P*(*x*)  *C*(*x*) |
| ⑻ | *Q*(*a*)  *R*(*a*)  *P*( *f* (*a*)) | 由⑴和⑸ |
| ⑼ | *R*(*a*) | 由⑶和⑹ |
| ⑽ | *R*(*a*)  *P*( *f* (*a*)) | 由⑷和⑻ |
| ⑾ | *P*( *f* (*a*)) | 由⑼和⑽ |
| ⑿ | *R*(*a*)  *C*( *f* (*a*)) | 由⑵和⑷ |
| ⒀ | *C*( *f* (*a*)) | 由⑼和⑿ |
| ⒁  ⒂ | *P*( *f* (*a*)) | 由⑺和⒀ 由⑾和⒁ |

因此， *x*(*Q*(*x*)  *R*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *C*( *y*))) ,

*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)  *y*(*S* (*x*, *y*)  *P*( *y*))) , *x*(*P*(*x*)  *R*(*x*)) | *x*(*P*(*x*)  *C*(*x*)) 。

1. 由语句*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 得到子句 *P*(*x*)  *Q*(*x*) ，由语句*x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) 得到子句*P*(*x*)  *Q*(*x*) 。显然，这两个子句的归结子句是永真子句。因此， *x*(*P*(*x*)  *Q*(*x*)) |/ *xP*(*x*)  *xQ*(*x*)
2. 由语句*x**yP*(*x*, *y*) 得到子句 *P*(*x*, *f* (*x*)) ，由语句*y**xP*(*x*, *y*) 得到子句*P*(*g*( *y*), *y*) 。我们证明这两个子句没有归结子

句。若有代换{*x* / *t*1} 和代换{*y* / *t*2}使

*t*1  *g*(*t*2 )

*f* (*t*1)  *t*2

可得出*t*1  *g*( *f* (*t*1)) ，这是不可能的，因为这里的 表示作为符号串的相同。因此， *x**yP*(*x*, *y*) |/ *y**xP*(*x*, *y*)

10.每个一年级学生至少有一个高年级学生作他的辅导员。凡理科学生的辅导员皆是理科学生。小王是理科一年级学生。因此，至少有一 个理科高年级学生。

**解** 首先将前提和结论符号化。取个体域为学生的集合。

*F* (*x*) : *x* 是一年级学生。

*H* (*x*) : *x* 是高年级学生。

*L*(*x*) : *x* 是理科学生。

*W* (*x*) : *x*

是 文 科 学 生 。

*G*(*x*, *y*) : *x* 是 *y* 的辅导员。 *a* : 小王。

“每个一年级学生至少有一个高年级学生作他的辅导员”符号化为： *x*(*F* (*x*)  *y*(*H* ( *y*)  *G*( *y*, *x*))) 。

“凡理科学生的辅导员皆是理科学生”符号化为： *x*(*L*(*x*)  *y*(*G*( *y*, *x*)  *L*( *y*))) 。“小王是理科一年级学生”符号化为： *L*(*a*)  *F* (*a*) 。

“至少有一个理科高年级学生”符号化为： *x*(*L*(*x*)  *H* (*x*)) 。

将*x*(*F* (*x*)  *y*(*H* ( *y*)  *G*( *y*, *x*))) 化为斯科伦范式

*x*((*F* (*x*)  *H* ( *f* (*x*)))  (*F* (*x*)  *G*( *f* (*x*), *x*))) ，得出子句*F* (*x*)  *H* ( *f* (*x*)) 和*F* (*x*)  *G*( *f* (*x*), *x*) 。

将 *x*(*L*(*x*)  *y*(*G*( *y*, *x*)  *L*( *y*)))

化 为 斯 科 伦 范 式

*x**y*(*L*(*x*)  *G*( *y*, *x*)  *L*( *y*))

， 得 出 子 句

*L*(*x*)  *G*( *y*, *x*)  *L*( *y*) 。

*L*(*a*)  *F* (*a*) 本身即为斯科伦范式，得出子句 *L*(*a*) 和 *F* (*a*) 。

将*x*(*L*(*x*)  *H* (*x*)) 化为斯科伦范式*x*(*L*(*x*)  *H* (*x*)) ，得出子句*L*(*x*)  *H* (*x*) 。

构造子句集{ *F* (*x*)  *H* ( *f* (*x*)) ，*F* (*x*)  *G*( *f* (*x*), *x*) ，*L*(*x*)  *G*( *y*, *x*)  *L*( *y*) ，*L*(*a*) ，*F* (*a*) ，*L*(*x*)  *H* (*x*) }

的一个反驳如下：

⑴ *F* (*x*)  *H* ( *f* (*x*))

⑵ *F* (*x*)  *G*( *f* (*x*), *x*)

⑶ *L*(*x*)  *G*( *y*, *x*)  *L*( *y*)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ⑷ | *L*(*a*) |  |
| ⑸ | *F* (*a*) |
| ⑹ | *L*(*x*)  *H* (*x*) |
| ⑺ | *H* ( *f* (*a*)) | 由⑴和⑸ |
| ⑻ | *G*( *f* (*a*) , *a*) | 由⑵和⑸ |
| ⑼ | *G*( *y*, *a*)  *L*( *y*) | 由⑶和⑷ |
| ⑽ | *L*( *f* (*a*)) | 由⑻和⑼ |
| ⑾  ⑿ | *L*( *f* (*a*))  由⑽和⑾ | 由⑹和⑺ |

11.任何喜欢步行的人都不喜欢乘汽车。每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不喜欢骑自行车。因此，有的人不喜欢步行 。**解** 首先将前提和结论符号化。取个体域为人的集合。

*W* (*x*) : *x* 喜欢步行。

*C*(*x*) : *x* 喜欢乘汽车。

*B*(*x*) : *x* 喜欢骑自行车。

“任何喜欢步行的人都不喜欢乘汽车”符号化为： *x*(*W* (*x*)  *C*(*x*)) 。

“每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车”符号化为： *x*(*C*(*x*)  *B*(*x*)) 。“有的人不喜欢骑自行车”符号化为： *x**B*(*x*) 。“有的人不喜欢步行”符号化为： *x**W* (*x*) 。

需要证明

*x*(*W* (*x*)  *C*(*x*)) ， *x*(*C*(*x*)  *B*(*x*)) ， *x**B*(*x*) | *x**W* (*x*)

将*x*(*W* (*x*)  *C*(*x*)) 化为斯科伦范式*x*(*W* (*x*)  *C*(*x*)) ，得出子句*W* (*x*)  *C*(*x*) 。

*x*(*C*(*x*)  *B*(*x*)) 本身即是斯科伦范式，得出子句*C*(*x*)  *B*(*x*) 。将*x**B*(*x*) 化为斯科伦范式*B*(*a*) ，得出子句*B*(*a*) 。

将*x**W* (*x*) 化为斯科伦范式*xW* (*x*) ，得出子句*W* (*x*) 。

构造子句集{ *W* (*x*)  *C*(*x*) ， *C*(*x*)  *B*(*x*) ， *B*(*a*) ，*W* (*x*) } 的一个反驳如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ① | *W* (*x*)  *C*(*x* | ) |
| ② | *C*(*x*)  *B*(*x*) |  |
| ③ | *B*(*a*) |  |
| ④ | *W* (*x*) |  |
| ⑤ | *C*(*x*) | 由①和④ |
| ⑥  ⑦ | *B*(*x*) | 由②和⑤ 由③和⑥ |