北京航空航天大学

2019－2020学年 第2学期期末

《离散数学(信息类)》

考 试 A 卷

班 级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_学 号 \_\_\_\_\_\_\_\_\_

姓 名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_成 绩 \_\_\_\_\_\_\_\_\_

2020年07月01日

《离散数学(信息类)》期末考试卷

注意事项：1、考生应自觉服从监考人员的管理，不得以任何理由妨碍监考人员履行职责，不得扰乱考场秩序。

2、考生在考场内必须保持安静，不准喧哗、左顾右盼、打手势等，不准夹带、旁窥、抄袭或有意让他人抄袭，不准传抄答案或交换试卷。

题目：

一、简答题……………………………………………………………………( 20分)

二、论述题……………………………………………………………………( 20分)

三、判断题……………………………………………………………………( 20分)

四、范式题……………………………………………………………………( 10分)

五、证明题……………………………………………………………………( 30分)

**1. 简答题（20分）**

(1). 给出一组命题逻辑联结词完备集，并用真值表表示相应的逻辑操作 （5分）

{∧,∨,¬},{∧,¬},{∨,¬}{¬,→}

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p ∧q | (p∨q) | ¬p | p →q |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

(2).给出谓词逻辑合式公式的定义 (合式公式由联结词集合{∧, ∨, ¬}和量词∀生成)。（5分）

* **合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。**
* **(1) 若t1,…,tn是项，Qin是n元谓词，则Qin(t1,…,tn)是合式公式;**
* **(2) 若Q是合式公式，则(**¬**Q)是合式公式；**
* **(3) 若Q和R是合式公式，则(Q** ∧ **R)、(Q** ∨ **R)、(Q** → **R) 、(Q** ↔ **R)及(Q** ⊕ **R)是合式公式；**
* **(4) 若Q是合式公式，x是变元，则(**∀**xQ),(**∃**xQ)是合式公式。**
* **(5)只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。**

(3) 使用符号├和╞解释公理系统的可靠性和完备性（5分）。

若Γ├α，则Γ╞α。

若Γ╞α，则Γ├α。

(4).给出命题逻辑公理系统 （6分）。

1).公理模式**A** 1：Q→ (R→Q)

2).公理模式**A** 2：(P→ (Q→R)) → ((P→Q) → (P→R))

3).公理模式**A** 3：(¬Q→¬R) → (R→Q)

4) 推理规则：分离规则（简称MP规则）：从Q和Q→ R推出R。

**2. 论述题（20分）**

(1). 请论述谓词逻辑的演绎定理，并说明如何应用。(5分)

演绎定理：若A是句子, Γ ∪ {A} ⊢B当且仅当 Γ ⊢ A → B

举个例子，能说明要证明类似 Γ ⊢ A → B 结构的定理，只需要证明Γ ∪ {A} ⊢B即可。

例如要证明├x(P(x)Q(x))(xP(x)xQ(x)) ，仅需证x(P(x)Q(x))├xP(x)xQ(x)

(2).在自然数论域，Q(x)表示x是自然数，在整数论域，Q(x)表示x是整数。在自然数论域和整数论域上分别求下列命题的逻辑真值。 (6分)

1. ∀x(Q(x) →0≤x)
2. ∀x (Q(x)→∃y(Q(y)→y<x))
3. ∀x∀y(Q(x)∧Q(y)→x+y=y+x)

自然数论域：a) 1 b) 0 c) 1

整数论域： a) 0 b) 1 c) 1

(3). 请论述谓词逻辑公式的永真式、可满足式、永假式，以及它们的关系。(5分)

设A是公式。

• ⑴ 如果A在每个解释中为真，则称A永真式。

• ⑵ 如果A在每个解释中为假，则称A永假式。

• ⑶ 如果有解释I和I中的赋值v使I(A)(v)=1，则称A为可满足式。

永真式一定是可满足式；

永真式一定不是永假式；

可满足式一定不是永假式，可满足式不一定是永真式

(4). 举例说明谓词逻辑的概括规则使用（UG规则）(5分)

概括规则（简称UG规则）：从Q(x)推出(∀xQ(x))

├∀x(P(x)∨¬P(x))

A1 = ¬P(x) →¬P(x) Q→Q

A2 = P(x)∨¬P(x) Q∨ R≡(¬Q→R)

A3 = ∀x(P(x)∨¬P(x)) UG

**3. 判断题(20分，每题5分)**

(1).命题逻辑可满足性问题

(a).设Γ╞¬Q∧Q，Γ是否可满足？。

答：Γ不可满足。

(b).存在一个合式公式Q，使得Γ|≠Q，Γ是否可满足？给出理由。

答：Γ可满足。若任意公式都是Γ的推论，则Γ不可满足，否则，Γ可满足。

(2). ∃x(Q(x)∧R(x)) ⇔ (∃xQ(x) ∧ ∃xR(x))是否成立?不成立给出反例。

不等价，构造模型M=(D, I, σ)（或者解释I），

<1>Q(d1) = 1, Q(y) = 0 对于任意y**∈**D且y≠d1；

<2>R(d2) = 1, R(y) = 0 对于任意y**∈**D且y≠d2, d2≠d1

则M满足(∃xQ(x) ∧ ∃xR(x))，但M不满足∃x(Q(x)∧R(x))。

(3). ∃x∀yP(x,y)∀y∃xP(x,y)是否成立?不成立给出反例。

成立。

(4). ∀x (Q(x)∨R(x))∀xQ(x) ∨∀ xR(x) 是否成立?不成立给出反例。

不成立。

比如论域{1,2}， Q(1) = 1, Q(2) = 0，R(1) = 0, R(2) = 1

则∀x (Q(x)∨R(x))成立，而∀xQ(x) ∨∀ xR(x)不成立。

**4．范式题（10分）**

1）求下列命题公式的主析取范式

(¬p∨¬q)→(p↔¬q) (4分)

解：

令A=(¬p∨¬q) →(p↔¬q)

= (¬p∨¬q) →((p→¬q) ∧(¬p→q))

=¬ (¬p∨¬q) ∨ ((¬p∨¬q) ∧(p∨q))

=(p∧q) ∨ ((¬p∨¬q) ∧(p∨q))

=(p∧q) ∨ ((¬p∧p) ∨ (¬p∧q ) ∨ (¬q∧ p) ∨ (¬q∧q))

=(p∧q) ∨(¬p∧q ) ∨ (p∧¬q)

2)求下列谓词公式的前束范式(6分)

∀x(A(x)→(∃zB(z)→∃yC(x,y)))

解：∀x(A(x)→(∃zB(z)→∃yC(x,y)))

=∀x(A(x)→( ¬∃zB(z) ∨ ∃yC(x,y)))

=∀x(A(x)→( ∀z¬B(z) ∨ ∃yC(x,y)))

=∀x(¬A(x) ∨ ( ∀z¬B(z) ∨ ∃yC(x,y)))

=∀x(¬A(x) ∨ ∃y ( ∀z¬B(z) ∨ C(x,y)))

=∀x∃y (¬A(x) ∨ ( ∀z¬B(z) ∨ C(x,y)))

=∀x∃y (¬A(x) ∨ ∀z (¬B(z) ∨ C(x,y)))

=∀x∃y∀z (¬A(x) ∨ ¬B(z) ∨ C(x,y))

**5.证明题（30分，每题10分）**

（1）用命题逻辑语义方法判断下列推论是否成立？若命题成立，给出证明；若命题不成立给出反例。

(Q→P)→(Q→R) ╞Q∧ (P→R)

解:设赋值v，使得v((Q→P)→(Q→R))=1，即有v(Q→P)→v(Q→R)=1

若v(Q→P)=1，则v(Q→R)=1。

则1.v(Q) = 1，则v(P) = 1，v(R) = 1，此时v(Q∧ (P→R))=1

2.v(Q) = 0，此时v((Q∧ (P→R))=0

综上,当v(Q)=0，v(P),v(R)为任意值时，推论不成立

（2）用公理方法证明(不可用演绎定理，使用演绎定理按照50%等比例减分)。

证明：

（3）用公理方法证明(不可用演绎定理，使用演绎定理按照50%等比例减分)。

**证明：**