判断题

1. 一个正确的算法，对于每个合法输入，都会在有限的时间内输出一个满足要求的结果。
2. NP完全问题比其他所有NP问题都要难。
3. 回溯法用深度优先法或广度优先法搜索状态空间树。
4. 在动态规划中，各个阶段所确定的策略就构成一个策略序列，通常称为一个决策。
5. 类和类问题的关系用来表示是错误的。
6. 若近似算法A求解某极小化问题一实例的解为，且已知该问题的最优解为，则该近似算法的性能比为3。
7. 通常来说，算法的最坏情况的时间复杂行比平均情况的时间复杂性容易计算。
8. 若P2多项式时间转化为(polynomial transforms to) P1，则P2至少与P1一样难。
9. 快速排序算法的平均时间复杂度是，使用随机化快速排序算法可以将平均时间复杂度降得更低。
10. 基于比较的寻找数组中最大元素的问题下届是。
11. 若，，则
12. 若，则
13. 贪婪技术所做的每一步选择所产生的部分解，不一定是可行性的。
14. Las Vegas算法只要给出解就是正确的。
15. 一个完全多项式近似方案是一个近似方案，其中每一个算法在输入实例的规模的多项式时间内运行。

**判断题：**

1-5: T F F T F 6-10: F T T F F 11-16: F T T T T F

问答题

1. 二叉查找树属于减治策略的三个变种中的哪一个的应用？什么情况下二叉查找树表现出最差的效率？此时的查找和插入算法的复杂性如何？
2. 何谓为多项式算法？如何将一Monte Carlo算法转化为Las Vegas算法？
3. 构造AVL树和2-3数的主要目的是什么？它们各自有什么样的查找和插入的效率？
4. 写出0/1背包问题的一个多项式等价(Polynomial Equivalent)的判定问题，并说明为什么它们是多项式等价的。
5. 下面问题是否属于NP问题？为什么？

问题表述：给定图中的两个点、，整数和，图中每条边的长度及便利这条边的时间，问图中是否存在一条由到的路径，使得其长度大于，且遍历时间小于？

**问答题：**

1.（1）属于减可变规模的应用。（2）当关键字的个数等于二叉查找树的高度时表现出最差的效率。时间复杂度为O(n)。（3）此时查找和插入算法在最坏情况（查找当前序列的最大值或者插入最大值）的时间复杂度都是O(n)。

2.（1）伪多项式时间算法是NPC的一种，存在复杂度是关于实例规模和实例所有参数中绝对值最大数是成多项式关系的算法。

（2）Monte Carlo算法每次都能得到问题的解，但不保证所得解的准确性；Las Vegas算法是每次不一定得到问题的解，只要得到的解一定是正确的解；可以在Monte Carlo算法后加上一个验证算法，如果正确就得到解，如果错误就不能生成问题的解，这样Monte Carlo算法便转化为了Las Vegas算法。

3. 构建AVL树和2-3树能够平衡左右子树的高度，减少树的层数，使得平均搜索效率更高。

插入和查找的时间复杂度均为O(logn)。

4. 0/1背包问题的一个多项式等价判定问题是整数划分问题。

5. 属于NP问题。

分治题

1. 写出一个求解下列问题的分治算法，推导其时间复杂性并与蛮力法相比较。

给定互不相等的n个数的一个序列，若其中某两个数和的关系为：且，则称和是逆序的。要求计算该序列中的逆序个数，即具有逆序关系的元素对的总数目。

1. 为一个整数序列，中的整数如果在中出现次数多余，那么称为多数元素。例如，在序列中3是多数元素，因为出现了4次，大于。求A的多数元素问题的蛮力算法复杂性如何？设计一个具有变治思想的算法，提高蛮力算法的效率，写出伪代码并分析其事件复杂性。

动态规划题

1. 某工厂调查了解市场情况，估计在今后四个月内，市场对其产品的需求量如下表所示。

|  |  |
| --- | --- |
| 时期（月） | 需要量（产品单位） |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 4 |

已知：对每个月来讲，生产一批产品的固定成本费为3（千元），若不生成，则为零。每生产单位产品的成本费为1（千元）。同时，在任何一个月内，生产能力所允许的最大生产批量为不超过6个单位。

又知：每单位产品的库存费用为每月0.5（千元），同时要求在第一个月开始之初，及在第四个月末，均无产品库存。

问：在满足上述条件下，该厂应如何安排各个时期的生产与库存，使所花的总成本费用最低？写出你所设的状态变量、决策变量、状态转移方程与递推关系式，和手工求解的详细步骤及结果。

1. 用动态规划方法手工求解以下问题

有8万元的投资可以投给3个过目，每个项目在不同筒子数额下（以万元为单位）的利润如下表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 投资额  盈利  项目 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 项目1 | 0 | 5 | 15 | 40 | 80 | 90 | 95 | 98 | 100 |
| 项目2 | 0 | 5 | 15 | 40 | 60 | 70 | 73 | 74 | 75 |
| 项目3 | 0 | 4 | 26 | 40 | 45 | 50 | 51 | 52 | 53 |

请安排投资计划，使总的利润最大。

写出你所设的状态变量、决策变量、状态转移方程与递推关系式和手工求解的详细步骤及结构。

分支定界题

1. 用分支定界法求解以下问题：

某部门欲建立联通分布于五个区的共50个站点的有线通讯网络，每两个站点之间的线路敷设费用由对成矩阵C给出，任意两站点之间敷设线路需建设的地井数目由对称矩阵U给出。

设计一线路敷设总费用为最小的无环网络，使得徐建设的总地井数目不超过UMAX，且需跨区敷设的线路总数目不超过DMAX(个站点所属的区由向量D给出)。

1. 说明你是如何构造搜索树的。（要求是二叉搜索树）
2. 说明算法遍历搜索树的原则。（何时以及如何前进、分支、回溯、剪枝等等）
3. 你设计的分支定界算法的“界”是什么，他为什么是正确的和有效的？
4. 写出伪代码。
5. 用分支定界法求解以下问题：

A国与B国之间尚未直接通商。与A国直接通商的有20个国家（C1, C2, …, C20）；与B国直接通商的为另外30个国家（C21, C22, …, C50）。上述50个国家之间并不是每两个国家都直接通商，任意两国之间的贸易税率由对称矩阵R给出，其中代表两国不能直接通商。

A国某公司与B国一公司欲通过某几个中间国家的公司完成一笔贸易，各个国家的进出口贸易通关等手续所需办理时间由向量T给出。请安排一中转贸易计划，使得该交易所产生的向各中转国缴纳的税费最低，且整个交易能够在时间t内完成。

1. 说明你是如何构造搜索树的。（要求是二叉搜索树）
2. 说明算法遍历搜索树的原则。（何时以及如何前进、分支、回溯、剪枝等等）
3. 你设计的分支定界算法的“界”是什么，他为什么是正确的和有效的？
4. 写出伪代码。

**分治题：**

1. *// num : 逆序数*

num **<-** 0**;**

Merge**(**Type a**[],** Type left**,** Type mid**,** Type right**)**

**{**

i **<-** left**,** j **<-** right**;**

while**(** i **<** mid **&&** j **<** right**)**

**{**

if**(**a**[**j**])** **>** a**[**i**])**

**{**

num **+=** mid **-** i**;**

**}**

**}**

**}**

MergeSort**(**Type a**[],** Type left**,** Type right**)**

**{**

if**(**left **<** right**)**

**{**

mid **<-** **(**left **+** right**)** **/** 2**;**

MergeSort**(**a**,** left**,** i**);**

MergeSort**(**a**,** mid **+** 1**,** right**);**

Merge**(**a**,** left**,** i**,** right**);**

**}**

**}**

算法思路：以归并排序为基础，在两两集合合并的时候如果前一个集合的元素a[i]>a[j]，那么说明需要调整次序，逆序数num=num+mid-i。

时间复杂度的迭代公式为 因此算法的时间复杂度为T(n)=O(nlogn)；

蛮力法的时间复杂度为O(n2)，当n数目较大时，分治法计算规模远小于蛮力法。

2. num **<-** src**[**0**];**

count **<-** 0**;**

for i **<-** 0 to n**-**1 do

**{**

if**(**num **==** src**[**i**])**

**{**

count**++;**

**}**

else

**{**

count**--;**

if**(**count **<** 0**)**

**{**

num **<-** src**[**i**];**

**}**

**}**

**}**

采用减治的思想每一个减去一个元素，时间复杂度为O(n)，蛮力法的时间复杂度为O(n2)。

**动态规划题：**

1.

k=1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| month=1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| cost | 5 | 6.5 | 8 | 9.5 | 11 |
| reservation | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k=2 | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |  | |  | |
| 0 | |  | |  | |  | | **9.5** | | **11.5** | |  | |  | |
| 1 | |  | |  | | 12 | | 14 | | 17.5 | |  | |  | |
| 2 | |  | | 11.5 | | 13.5 | | 15.5 | | 19 | |  | |  | |
| 3 | | 11 | | 13 | | 15 | | 17 | | 20.5 | |  | |  | |
| 4 | | 12.5 | | 14.5 | | 16.5 | | 18.5 | | 22 | |  | |  | |
| 5 | | **14** | | **16** | | 18 | | 20 | | 23.5 | |  | |  | |
| 6 | | 16.5 | | **17.5** | | **19.5** | | **21.5** | |  | |  | |  | |
| curproduction | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | |
| curmincost | | 9.5 | | 11.5 | | 14 | | 16 | | 17.5 | | 19.5 | | 21.5 | |
| reservation | | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| month=3 |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | |
| 0 |  | |  | | **14** | | 16.5 | | 18.5 | | 21 | | 23.5 | |
| 1 |  | | 15.5 | | 18.5 | | 21 | | 23 | | 25.5 | |  | |
| 2 | 14.5 | | 17 | | 20 | | 22.5 | | 24.5 | |  | |  | |
| 3 | **16** | | 18.5 | | 21.5 | | 24 | |  | |  | |  | |
| 4 | **17.5** | | 20 | | 23 | |  | |  | |  | |  | |
| 5 | **19** | | 21.5 | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 6 | **20.5** | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| curproduction | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | 11 | |  | |  | |
| curmincost | 14 | | 16 | | 17.5 | | 19 | | 20.5 | |  | |  | |
| reservation | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |  | |  | |

month=4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 0 |  |  |  |  | **20.5** |
| 1 |  |  |  | 23 |  |
| 2 |  |  | 22.5 |  |  |
| 3 |  | 22 |  |  |  |
| 4 | 21 |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |

故最小生产投入为20.5（千元），其中投入策略如下表格：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| month | 1 | 2 | 3 | 4 |
| input | 5 | 0 | 6 | 0 |

2.

K：项目的编号，k=1,2,3；

Xk：投资的数目，显然xk=0,1,2,3,4,5,6,7,8；

gk(xk)：把数目为xk钱投资到项目k得到的收益；

fk(xk)：把数目为xk的钱投资得到的最大收益（可以投资的范围为项目k~n）；

状态变量xk: 表示投资的数目；

决策变量uk: 表示投给项目k的投资额；

状态转移方程：fk(xk)=max{gk(uk)+fk+1(xk-uk)}, uk=0,1,……,xk;

fn(xn)= gn(xn)

项目个数n=3，xk最大取8，问题划分为三个阶段：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k=3 | |  | |  | |  | |  | |  | |  |  |  | |  | |
|  | | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | 6 | 7 | | 8 | |
| 1 | | 0 | | 4 | | 26 | | 40 | | 45 | | 50 | 51 | 52 | | 53 | |
| k=2 | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  | | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
| 0 | | **0** | | 4 | | **26** | | **40** | | 45 | | 50 | | 51 | | 52 | | 53 | |
| 1 | | **5** | | 9 | | 31 | | 45 | | 50 | | 55 | | 56 | | 57 | |  | |
| 2 | | 15 | | 24 | | 41 | | 55 | | 60 | | 65 | | 66 | |  | |  | |
| 3 | | **40** | | 44 | | 66 | | 80 | | 85 | | 90 | |  | |  | |  | |
| 4 | | **60** | | 64 | | **86** | | **100** | | 105 | |  | |  | |  | |  | |
| 5 | | **70** | | 74 | | 96 | | **110** | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 6 | | 73 | | 77 | | 99 | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 7 | | 74 | | 78 | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 8 | | 75 | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k=1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0 | 5 | 26 | 40 | 60 | 70 | 86 | 100 | 110 |
| 1 | 5 |  |  |  |  |  |  | 105 |  |
| 2 | 15 |  |  |  |  |  | 101 |  |  |
| 3 | 40 |  |  |  |  | 110 |  |  |  |
| 4 | 80 |  |  |  | **140** |  |  |  |  |
| 5 | 90 |  |  | 130 |  |  |  |  |  |
| 6 | 95 |  | 121 |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 98 | 103 |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 100 |  |  |  |  |  |  |  |  |

由上表可知：最大获益为140万元，其中对项目1投资4万，项目2投资4万，项目3投资0元。

**分支限界题：**

1.

（1）因为解空间每个解容量为50，存在250种解的情况，故需要构建的二叉搜索树的层数为50，父节点ai的左孩子结点a2i-1表示选择该结点，右孩子a2i+1表示不选择该结点。

（2）前进：线路费用小于DMAX，地井数目小于UMAX；

分支：一个节点的下一步有多个可行的选择时进行分支；

回溯：当前路径归纳当前节点后不满足DMAX和UMAX限制时进行回溯，如果当前节点是左孩子结点，则回溯到其兄弟结点的右孩子结点；如果当前结点是右孩子结点则回溯到其祖先结点的右孩子结点；

减枝：当不满足DMAX和UMAX的限制时对该节点所在的进行减枝，出现环时进行减枝；

（3）界：线路费用，地井数目，当前的最小花费；

（4）