第五章 二维变换及二维观察

- 如何对二维图形进行方向、尺寸和形状方面的变换。
- 如何进行二维观察。

二维变换及二维观察

- 基本几何变换与基本概念
- 二维图形几何变换的计算
- 复合变换
- 变换的性质

6.2 基本几何变换

- 图形的几何变换是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换。(位置、尺寸-形状、方向)
- 基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换。

基本几何变换——平移变换

- 平移是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程。

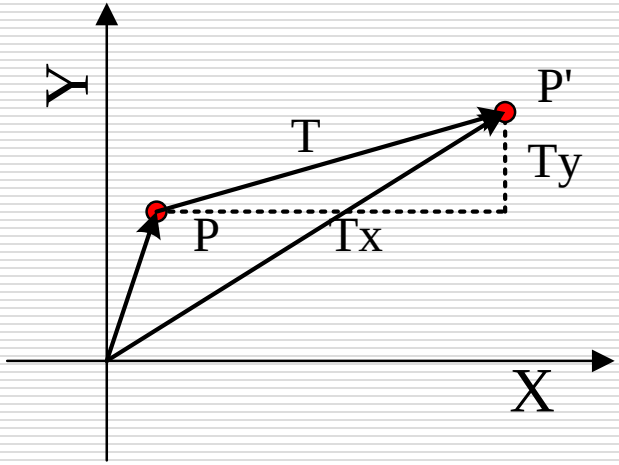


图5-1 平移变换

基本几何变换——平移变换

推导：

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

T_x，T_y称为平移矢量。

基本几何变换——比例变换

推导：

$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

基本几何变换——比例变换

- 比例变换是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为比例系数。

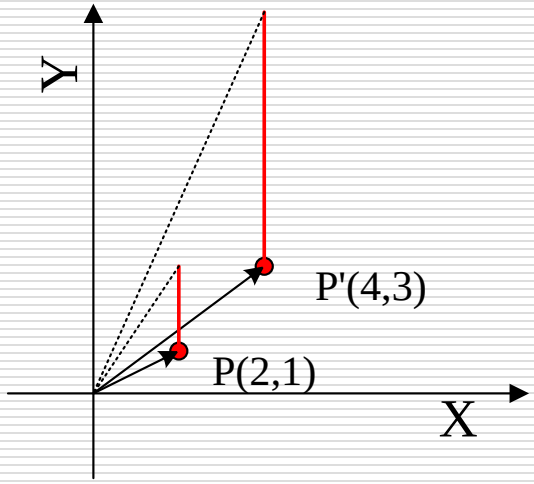
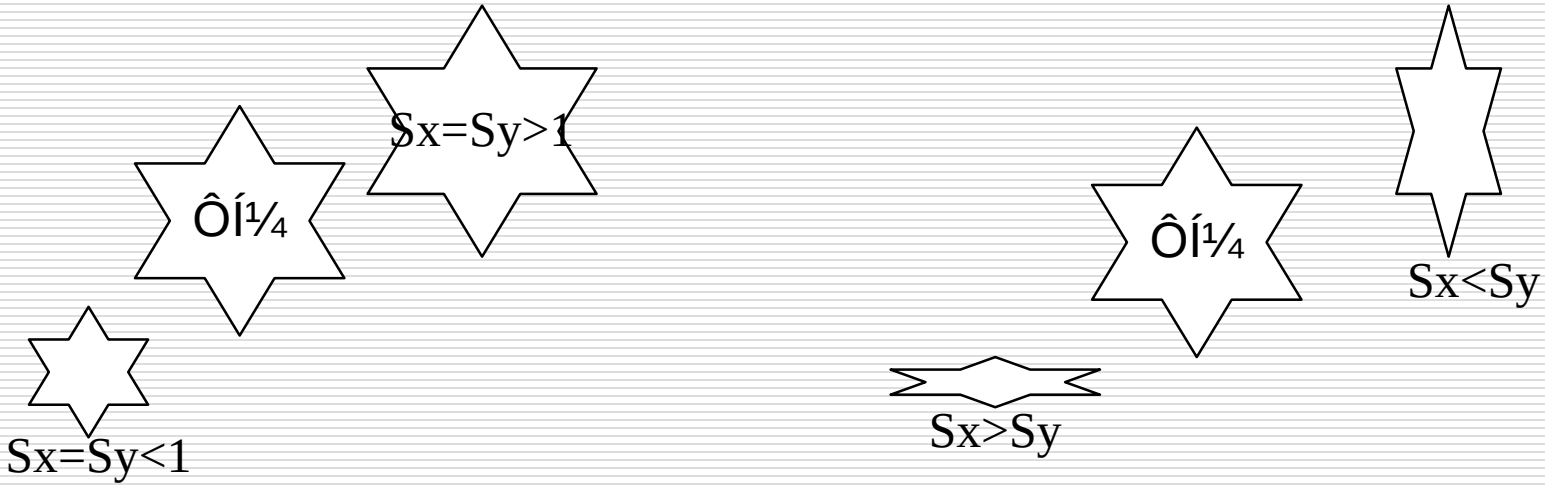


图5-2 比例变换(Sx=2,Sy=3)

基本几何变换——比例变换



(a) Sx=Sy比例　　(b) Sx<>Sy比例

图5-3 比例变换

基本几何变换——旋转变换

- 二维旋转是指将p点绕坐标原点转动某个角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p'的重定位过程。

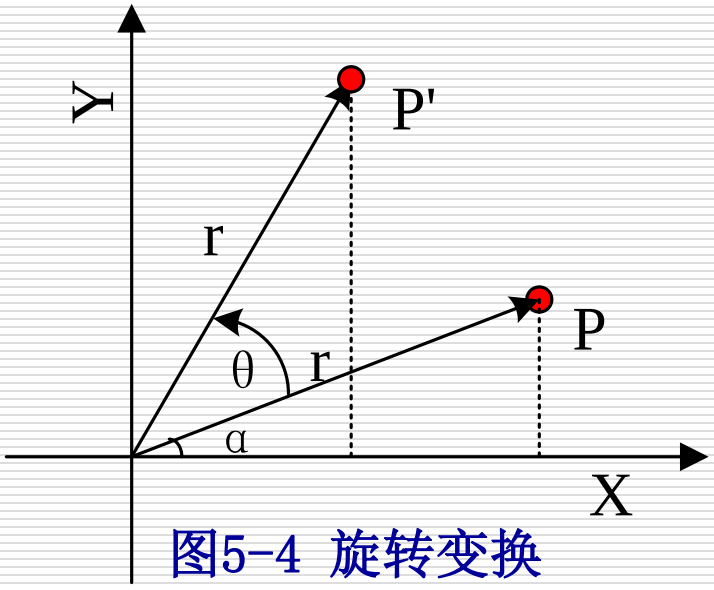


图5-4 旋转变换

基本几何变换——旋转变换

- 推导：（极坐标）

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

- 矩阵：逆时针旋转θ角

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

基本几何变换

- 平移、缩放、旋转变换的矩阵表示：

$$P' = P + T$$

$$P' = P \cdot S$$

$$P' = P \cdot R$$

$$\Rightarrow \quad P' = P \cdot T_1 + T_2$$

- 图形通常要进行一系列基本几何变换，希望能够把二维变换统一表示为矩阵的乘法。

基本几何变换——规范化齐次坐标

- 齐次坐标表示就是用n+1维向量表示一个n维向量。

$$(x, y) \Leftarrow (xh, yh, h) \qquad h \neq 0$$

- 规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示。

$$(x, y) \Leftarrow (x, y, 1)$$

基本几何变换

平移：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

比例:

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

整体比例变换：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

基本几何变换

旋转变换：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

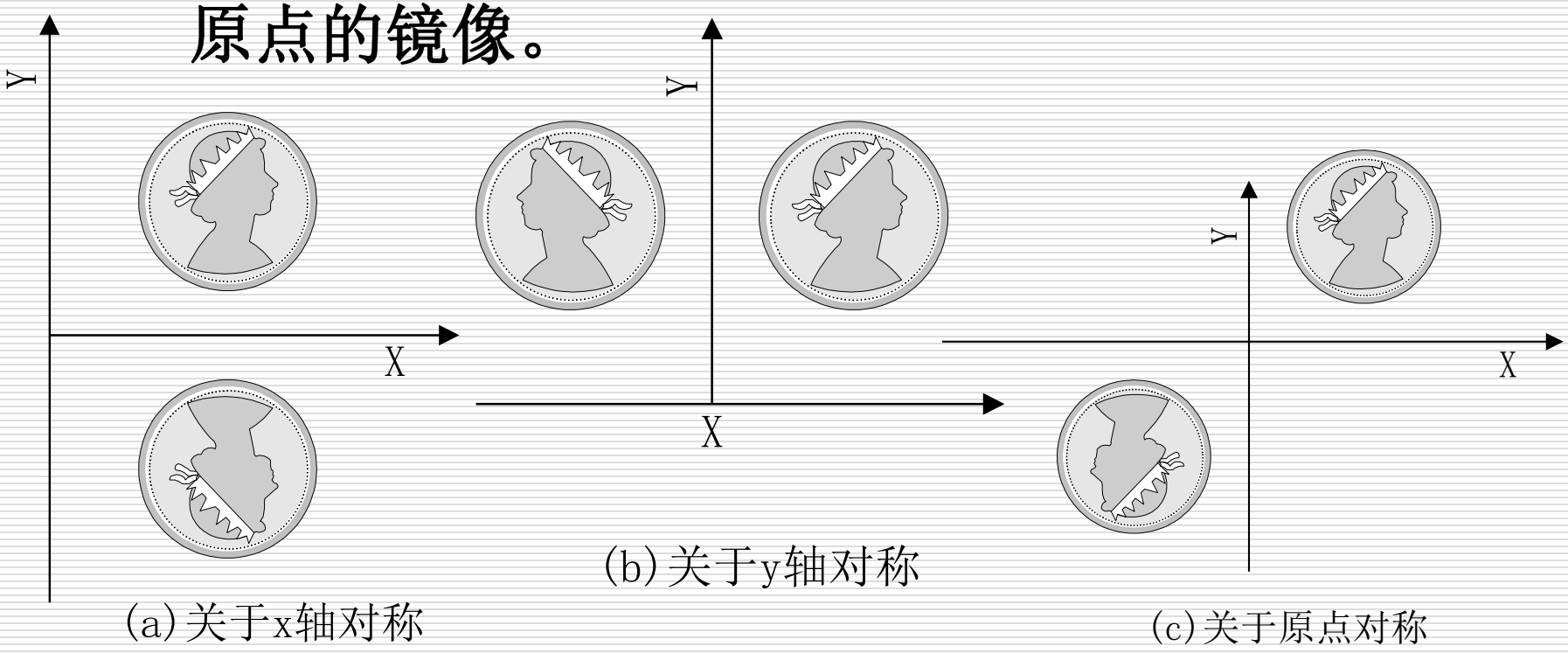
基本几何变换——二维变换矩阵

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{2D} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right]$$

$$x' = \frac{ax + cy + l}{px + qy + s} \qquad y' = \frac{bx + dy + m}{px + qy + s}$$

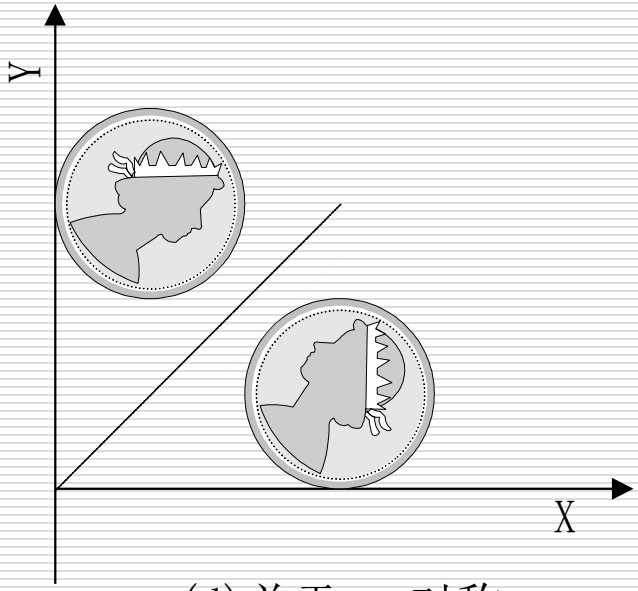
基本几何变换——对称变换

- 对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。

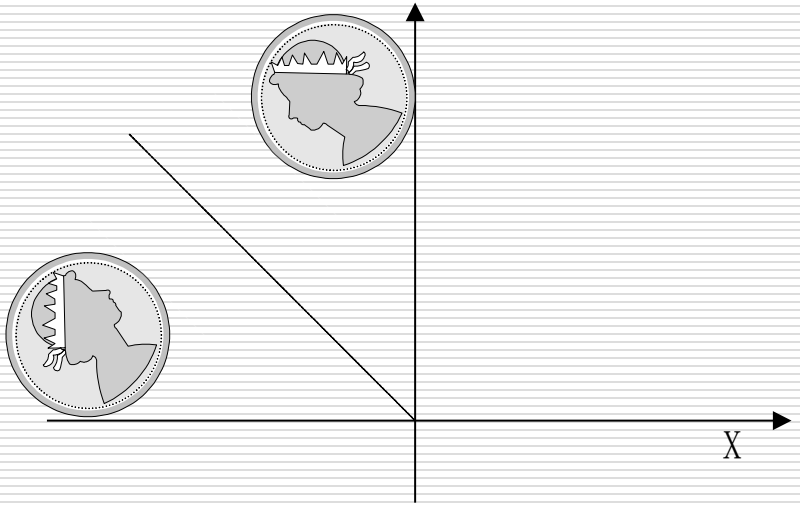


(a)关于x轴对称　(b)关于y轴对称　(c)关于原点对称

基本几何变换——对称变换



(d) 关于x=y对称



(e) 关于x=-y对称

基本几何变换——对称变换

(1)关于x轴对称

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

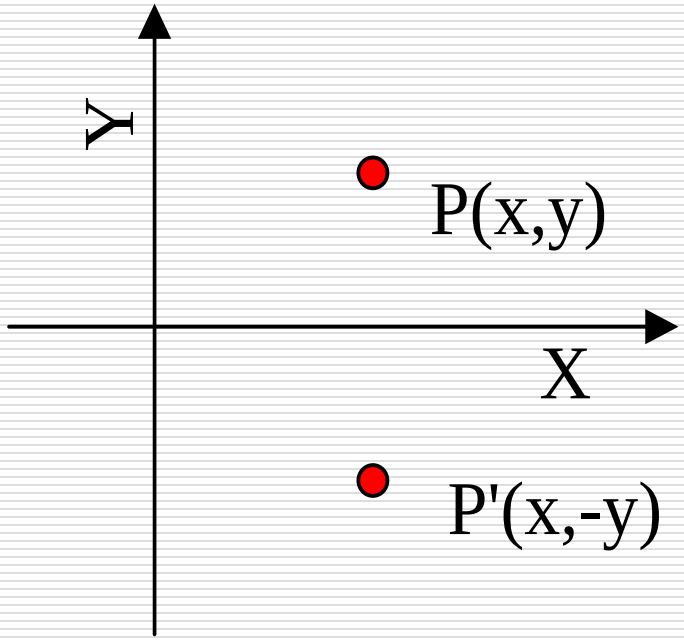


图5-5 关于x轴对称

基本几何变换——对称变换

(2)关于y轴对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

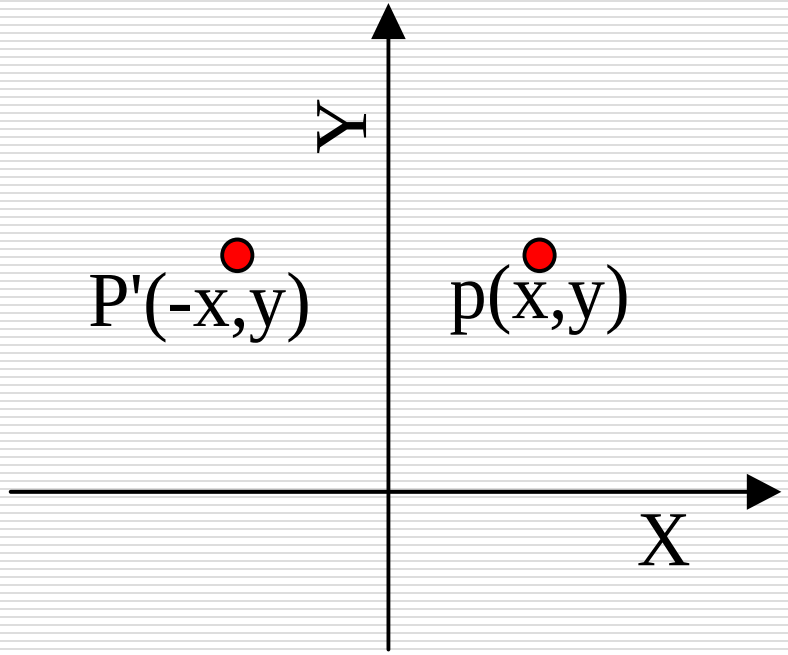


图5-6 关于y轴对称

基本几何变换——对称变换

(3)关于原点对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

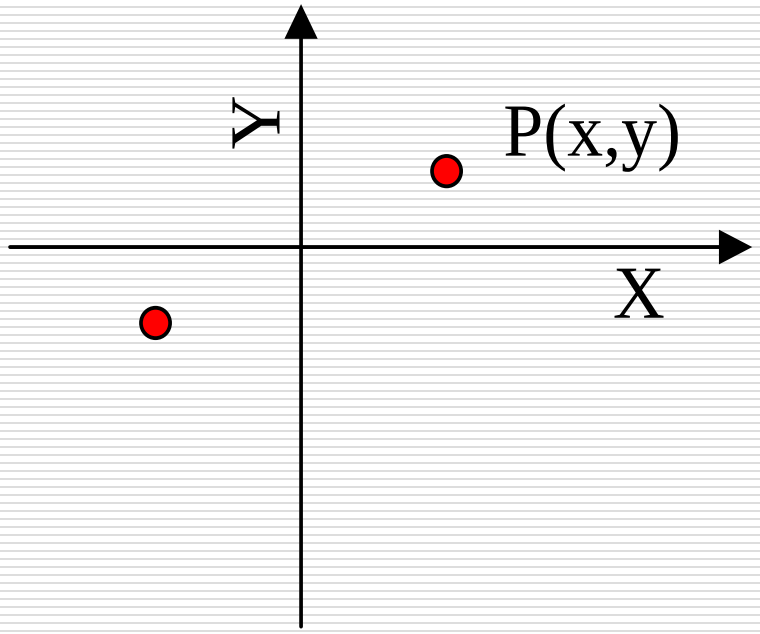


图5-7 关于原点对称

基本几何变换——对称变换

(4)关于y=x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

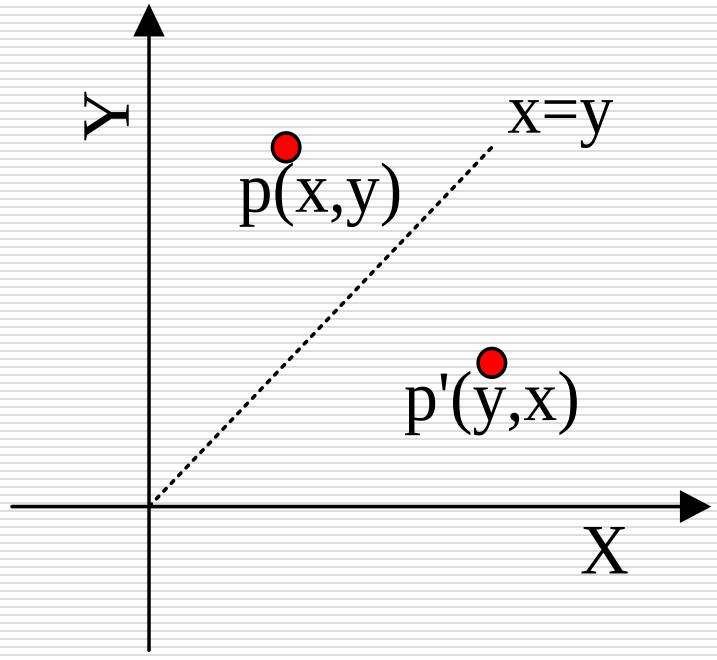


图5-8 关于x=y对称

基本几何变换——对称变换

(5)关于y=-x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

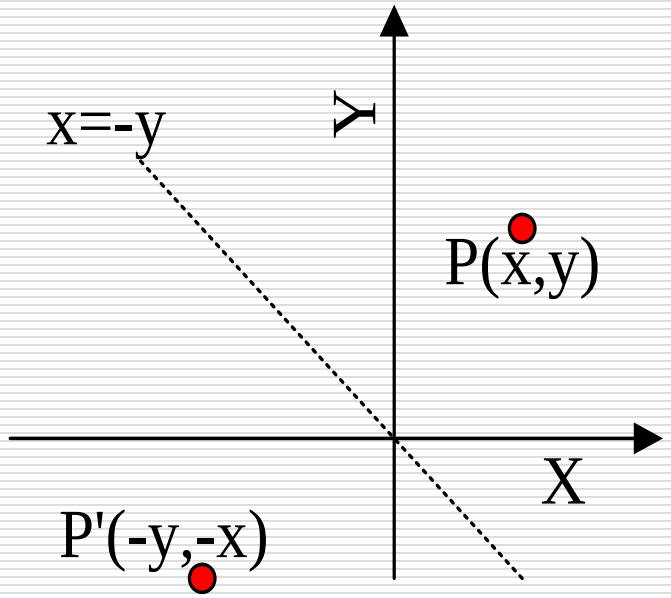


图5-9 关于x=－y对称

基本几何变换——错切变换

- 错切变换，也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

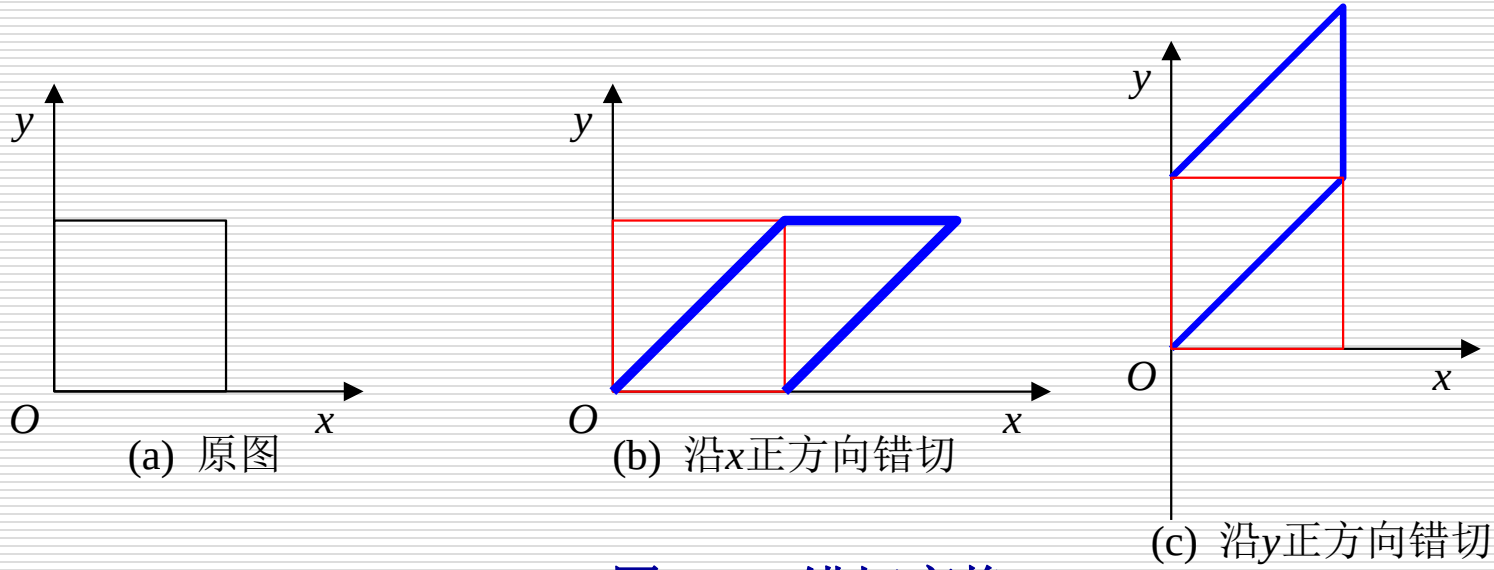


图5-10 错切变换

基本几何变换——错切变换

其变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)沿x方向错切

(2)沿y方向错切

(3)两个方向错切

二维图形几何变换的计算

几何变换均可表示成P'=P*T的形式。

1．点的变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

二维图形几何变换的计算

2. 直线的变换

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

二维图形几何变换的计算

3. 多边形的变换

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

复合变换

- 图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次变换矩阵的乘积。
- 任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。
- 复合变换具有形式：

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n)$$

$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n \qquad (n > 1)$$

复合变换——二维复合平移

$$T_t = T_{t1} \cdot T_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1}+T_{x2} & T_{y1}+T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合比例

$$T_s = T_{s1} \cdot T_{s2} = \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{x1} \cdot S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} \cdot S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合旋转

$$T_r = T_{r1} \cdot T_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_{(\theta_1)} \bullet R_{(\theta_2)} = R(\theta_1+\theta_2)$$

复合变换

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相对任一参考点的二维几何变换

- 相对某个参考点(x_F, y_F)作二维几何变换，其变换过程为：

  (1) 平移；

  (2) 针对原点进行二维几何变换；

  (3) 反平移。

相对任一参考点的二维几何变换

例1．相对点(x_F, y_F)的旋转变换

$$T_{RF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_F & -y_F & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_F & y_F & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ x_F - x_F\cos\theta + y_F\sin\theta & y_F - y_F\cos\theta - x_F\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

相对任意方向的二维几何变换

- 相对任意方向作二维几何变换，其变换的过程是：

  (1) 旋转变换；

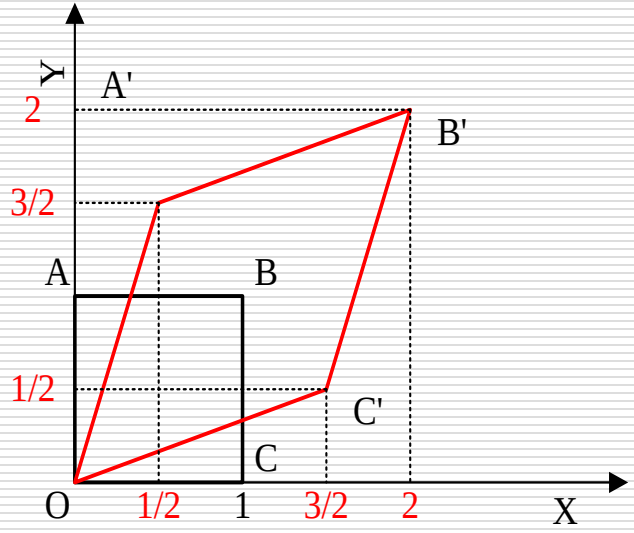
  (2) 针对坐标轴进行二维几何变换；

  (3) 反向旋转。

- 例2. 相对直线y=x的反射变换

复合变换

例3. 将正方形ABCO各点沿下图所示的(0,0)→(1,1)方向进行拉伸，结果为如图所示的，写出其变换矩阵和变换过程。



可能发生的变换：沿（0，0）到（1，1）的比例变换

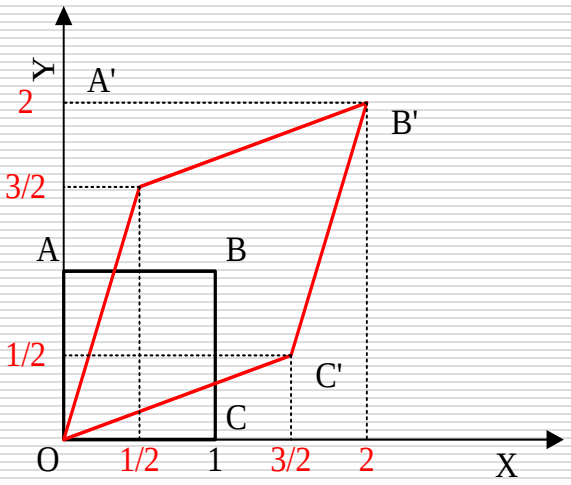


图5-11 沿固定方向拉伸

$$T=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & \sin(-45^\circ) & 0\\ -\sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P'=P\cdot T$$

坐标系之间的变换

问题：

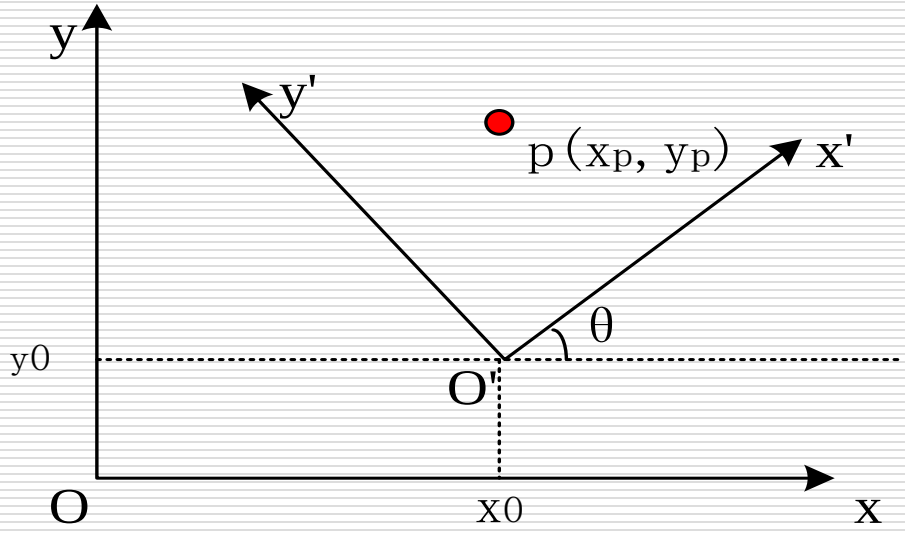


图5-12 坐标系间的变换

坐标系之间的变换

分析：

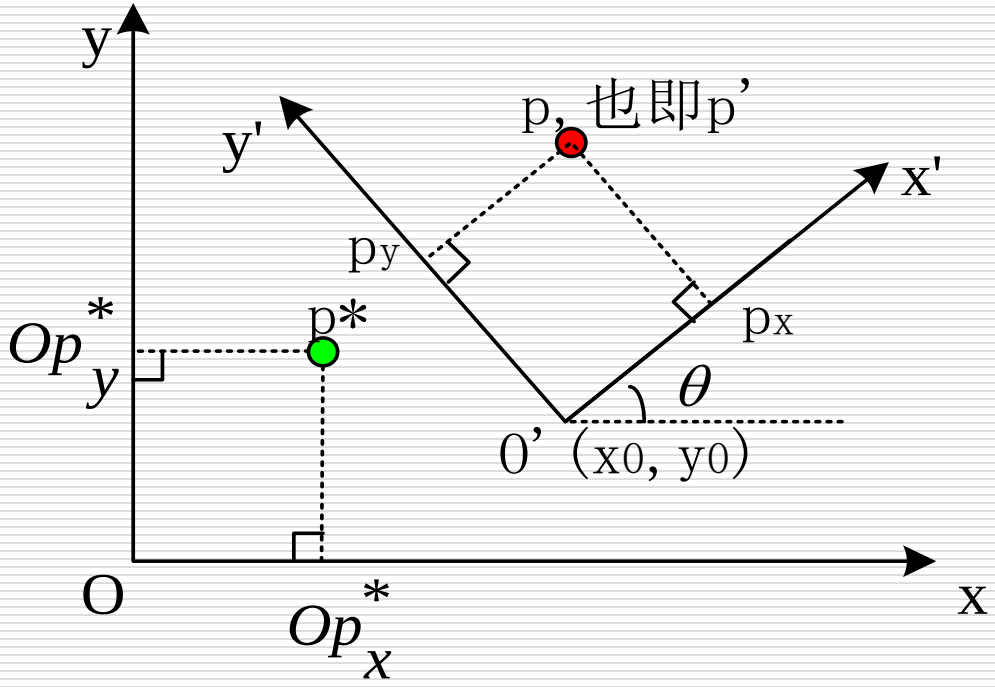
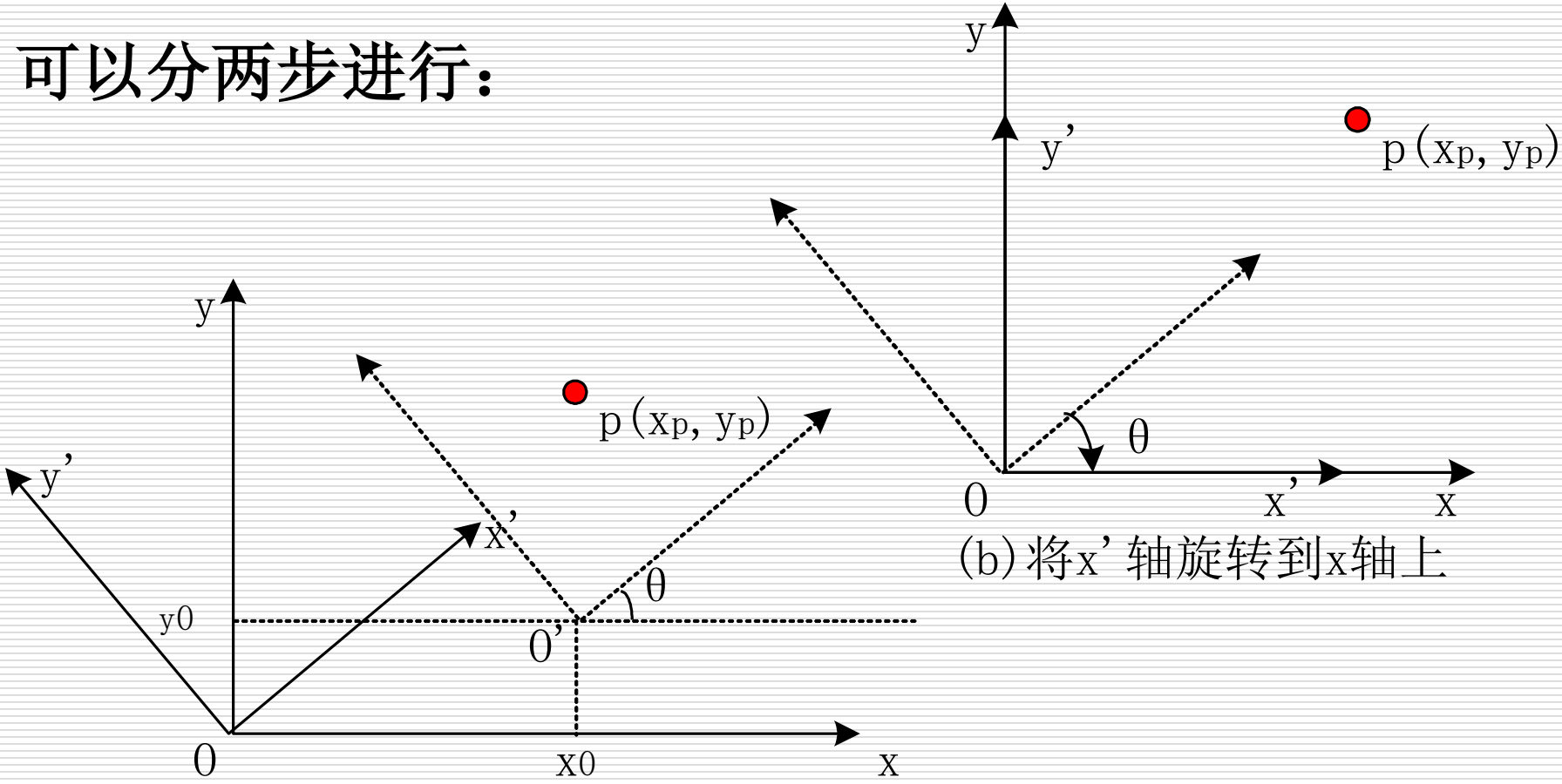


图5-13 坐标系间的变换的原理

可以分两步进行：



(b)将x'轴旋转到x轴上

(a)将x'y'坐标系的原点平移到xy坐标系的原点

图5-14 坐标系间的变换的步骤

于是：

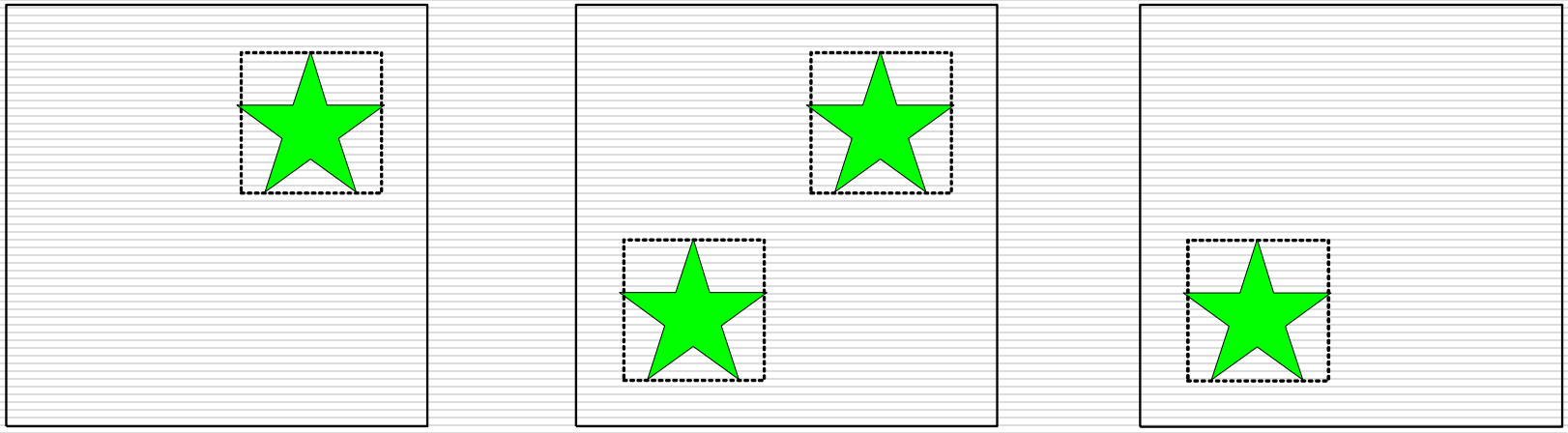
$$p' = \begin{bmatrix} x'_p & y'_p & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$= p \cdot T = p \cdot T_t \cdot T_R$$

$$T = T_t \cdot T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

光栅变换

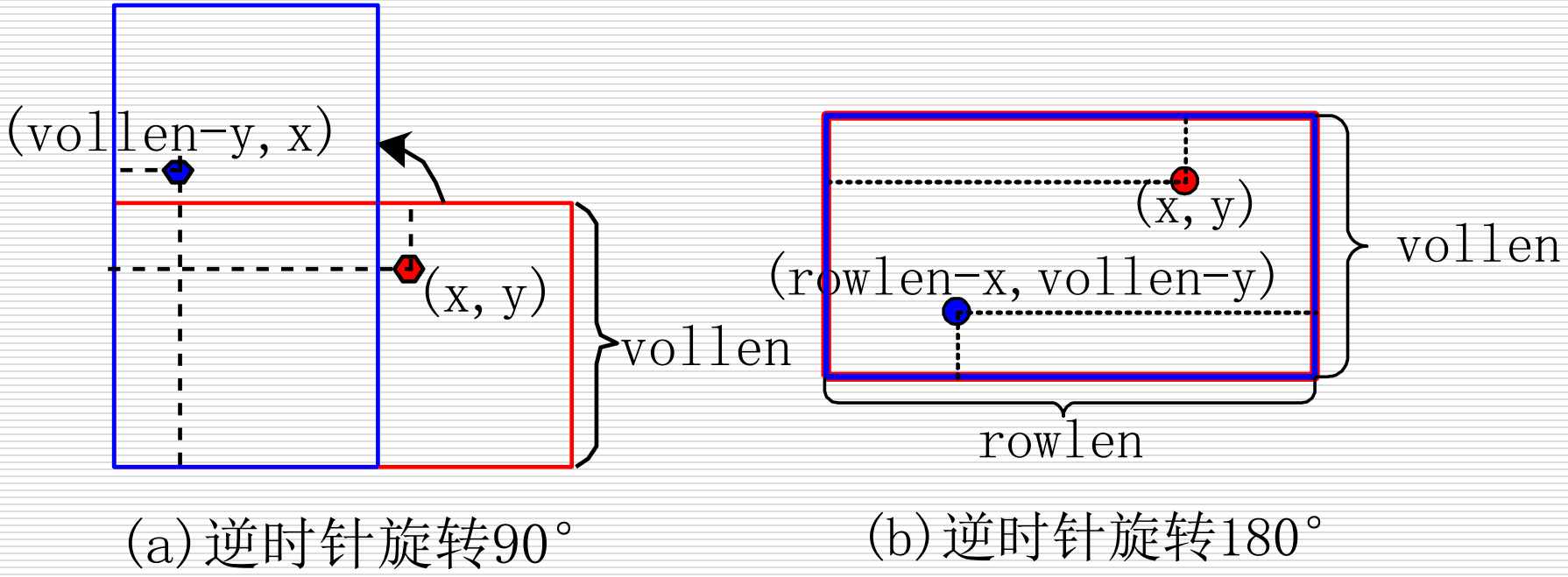
- 直接对帧缓存中象素点进行操作的变换称为光栅变换。
- 光栅平移变换：



(a)读出象素块的内容　(b)复制象素块的内容　(c)擦除原象素块的内容

光栅变换

- 90°、180°和270°的光栅旋转变换：



(a)逆时针旋转90°　　(b)逆时针旋转180°

图5-15 光栅旋转变换

光栅变换

- 任意角度的光栅旋转变换：

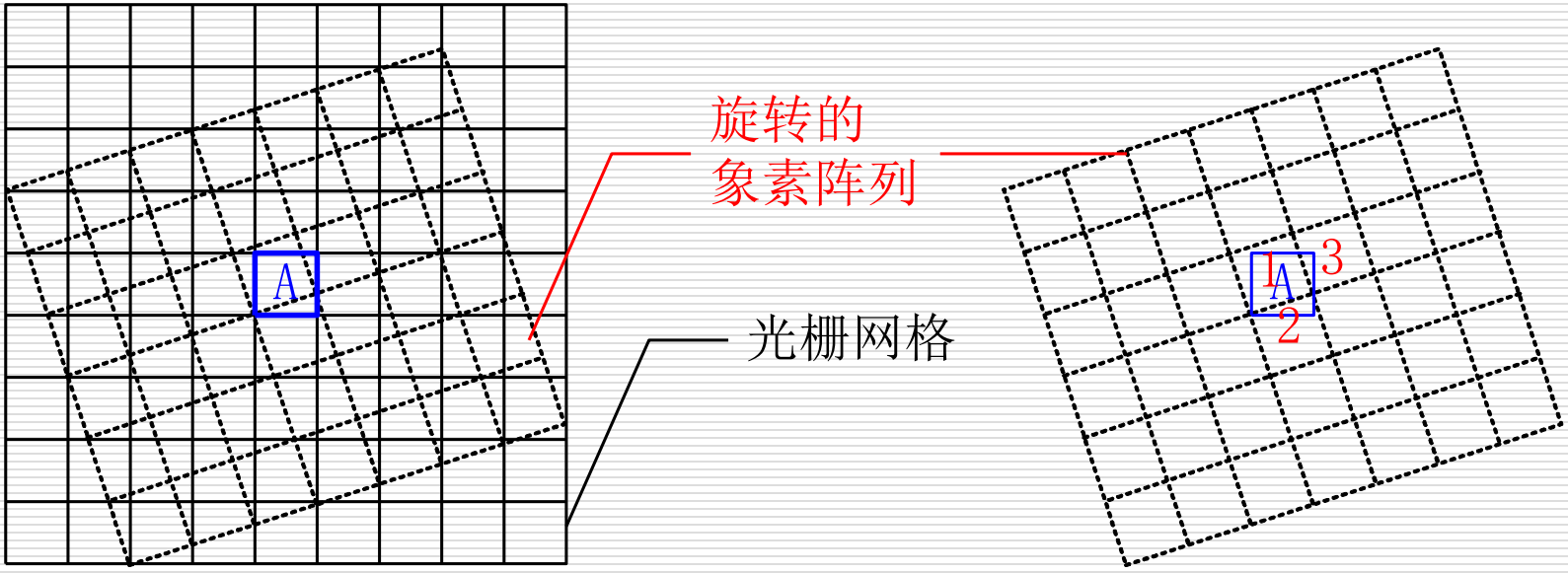


图5-16 任意角度的光栅旋转变换

光栅变换

- 光栅比例变换：进行区域的映射处理。

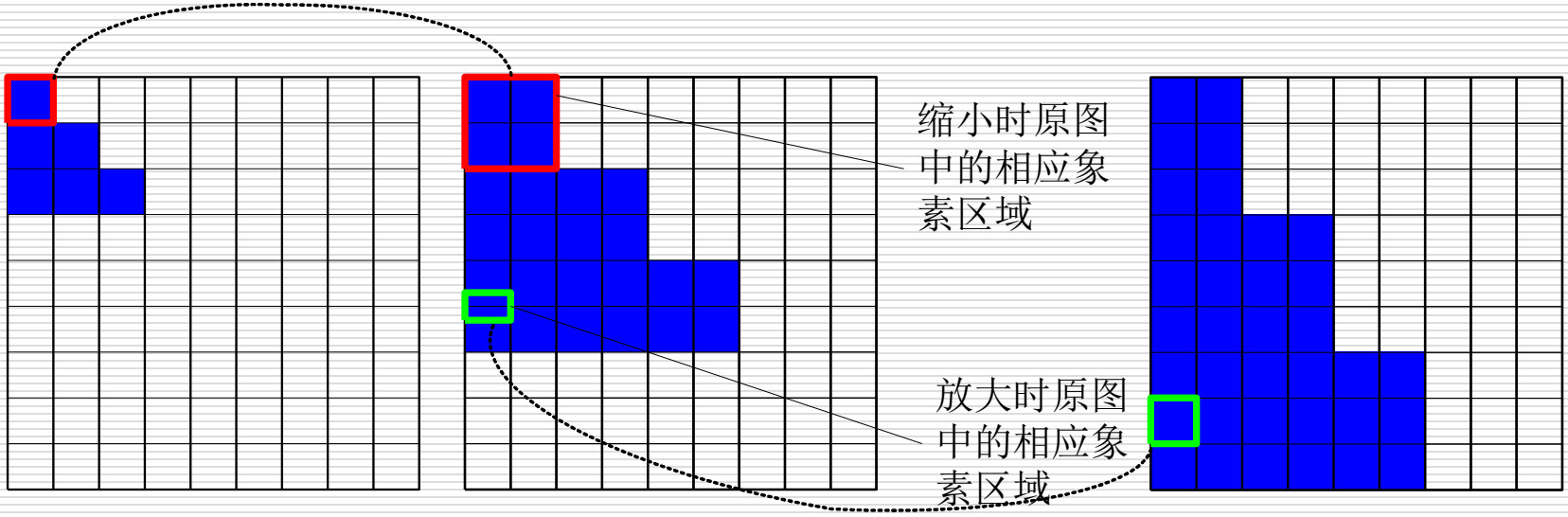


图5-16 光栅比例变换

变换的性质

二维仿射变换是具有如下形式的二维坐标变换：

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

- 平移、比例、旋转、错切和反射等变换均是二维仿射变换的特例，反过来，任何常用的二维仿射变换总可以表示为这五种变换的复合。

变换的性质

- 仅包含旋转、平移和反射的仿射变换维持角度和长度的不变性；
- 比例变换可改变图形的大小和形状；
- 错切变换引起图形角度关系的改变，甚至导致图形发生畸变。

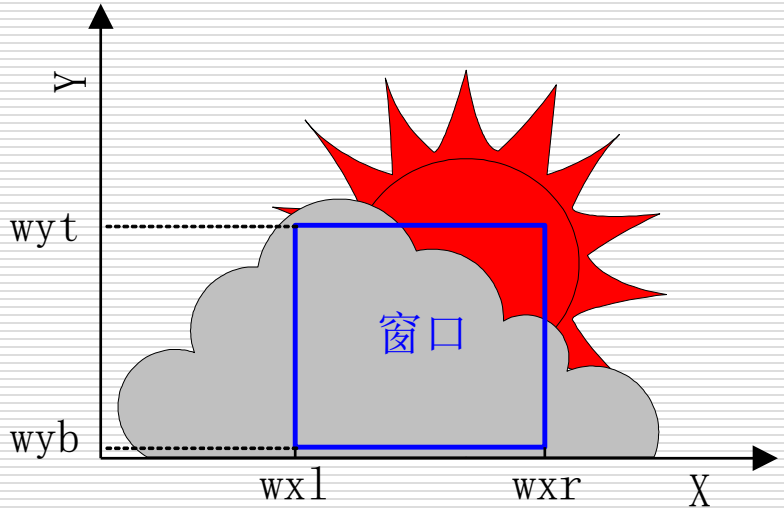
二维观察

- 基本概念
- 二维观察变换
- 二维裁剪
- **OpenGL中的二维观察**

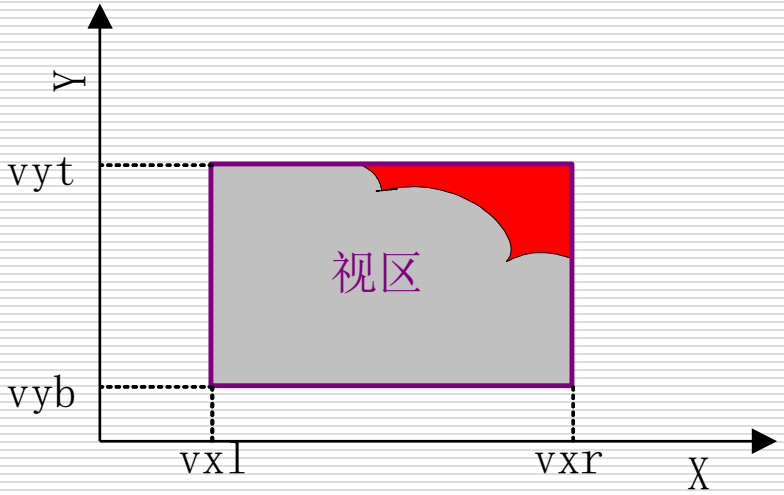
二维观察——基本概念

- 在计算机图形学中，将在用户坐标系中需要进行观察和处理的一个坐标区域称为窗口（Window）。
- 将窗口映射到显示设备上的坐标区域称为视区（Viewport）。

二维观察——基本概念



(a)用户坐标系中的窗口



(b)屏幕坐标系中的视区

- 要将窗口内的图形在视区中显示出来，必须经过将窗口到视区的变换（Window-Viewport Transformation）处理，这种变换就是观察变换（Viewing Transformation）。

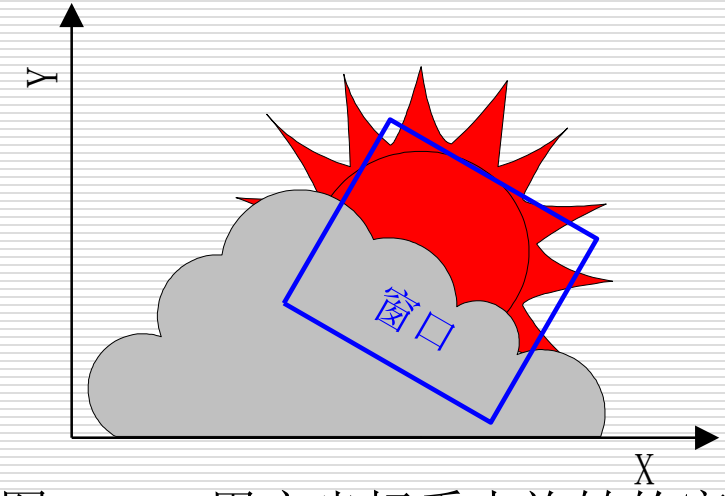
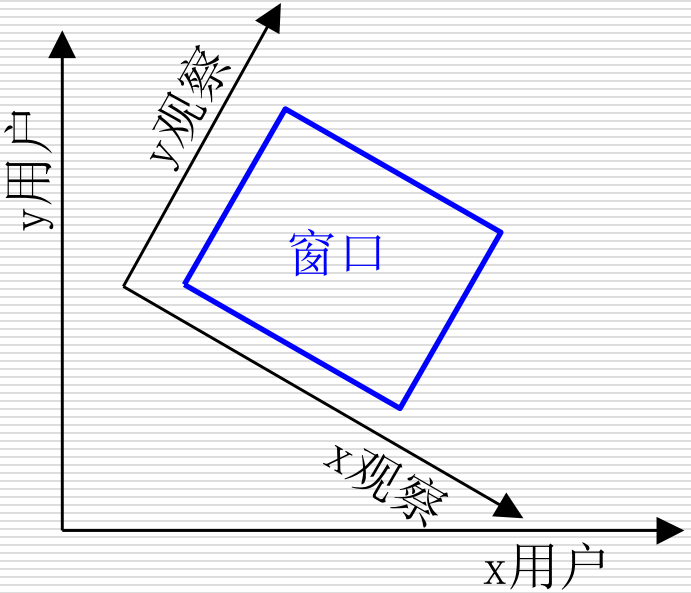
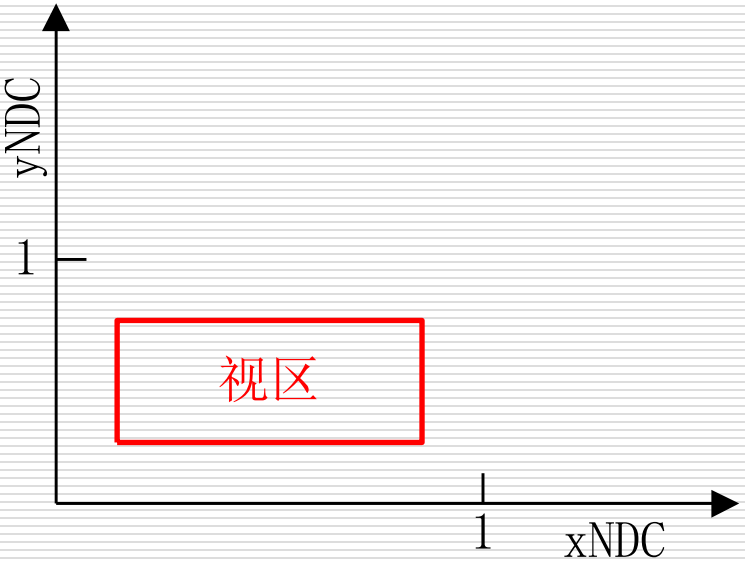


图6-17　用户坐标系中旋转的窗口



(a) 观察坐标系



(b) 规格化设备坐标系

二维观察——基本概念

- 观察坐标系(View Coordinate)是依据窗口的方向和形状在用户坐标平面中定义的直角坐标系。
- 规格化设备坐标系(Normalized Device Coordinate)也是直角坐标系，它是将二维的设备坐标系规格化到（0.0，0.0）到（1.0，1.0）的坐标范围内形成的。

二维观察——基本概念

- 引入了观察坐标系和规格化设备坐标系后，观察变换分为如下图所示的几个步骤，通常称为二维观察流程。

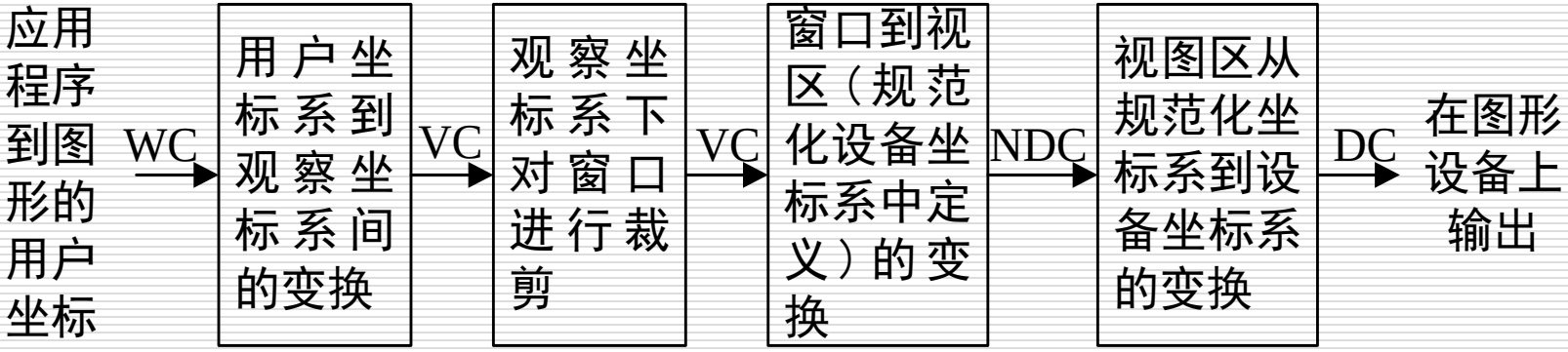
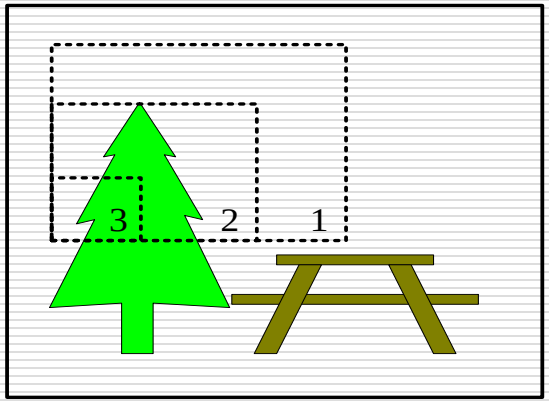


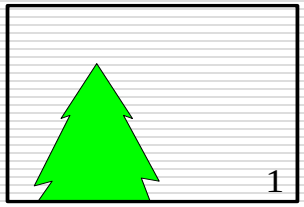
图5-17 二维观察流程

二维观察——基本概念

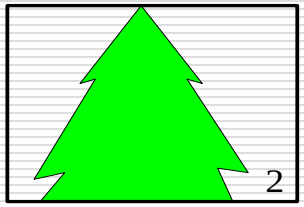
变焦距效果



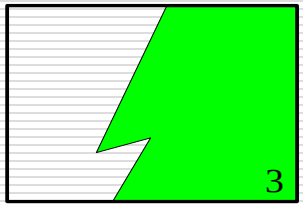
(a) 原图及变化的窗口



(b)与窗口对应的视区1



(c)与窗口对应的视区2

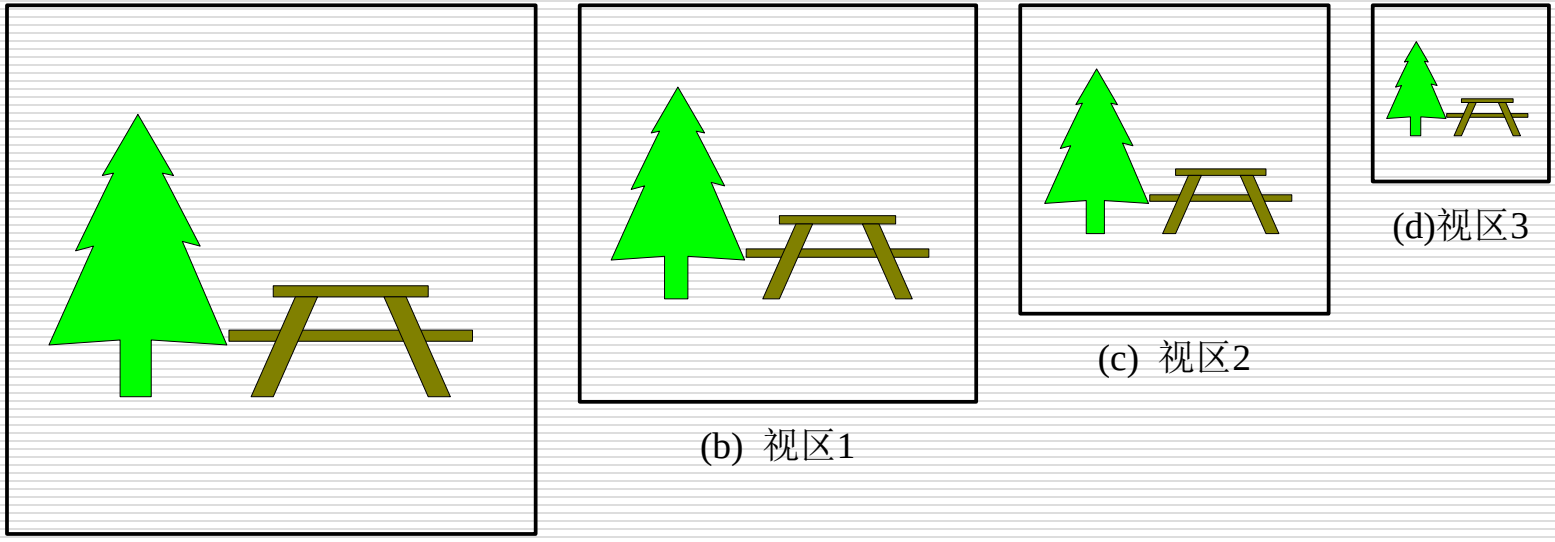


(d)与窗口对应的视区3

图5-18 变焦距效果（窗口变、视区不变）

二维观察——基本概念

- 整体放缩效果



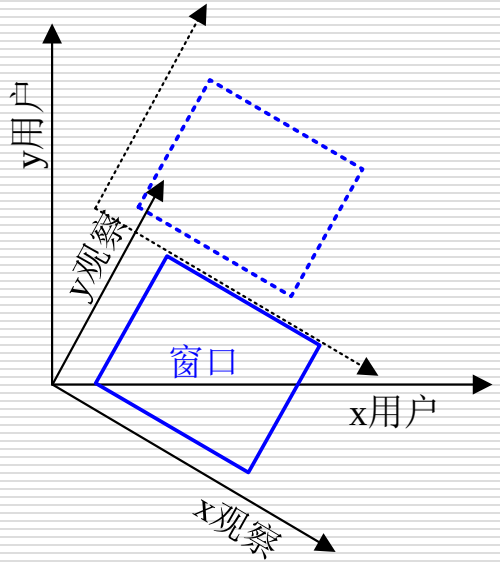
(a) 原图及窗口　(b) 视区1　(c) 视区2　(d)视区3

图5-17 整体放缩效果（窗口不变、视区变）

- 漫游效果

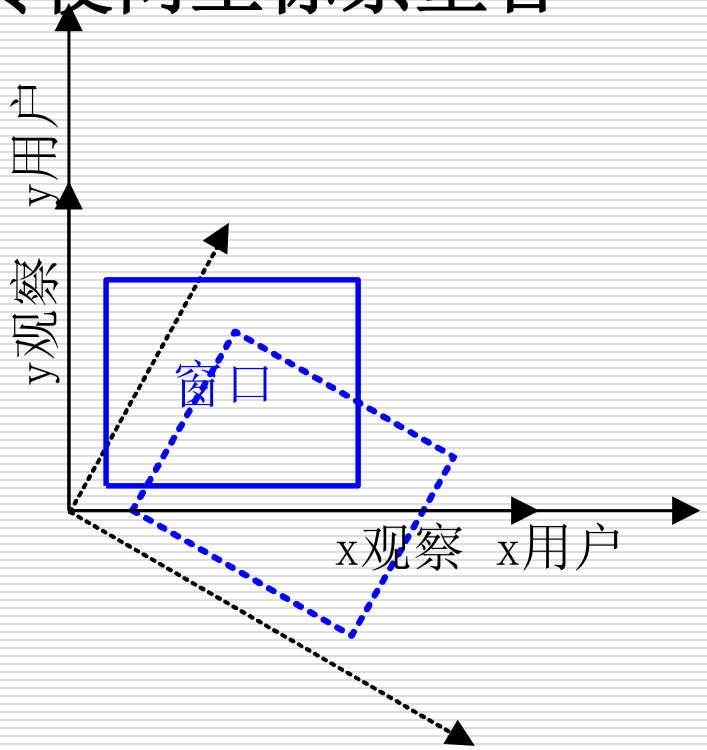
用户坐标系到观察坐标系的变换

- 用户坐标系到观察坐标系的变换分由两个变换步骤合成：
  - 将观察坐标系原点移动到用户坐标系原点；



用户坐标系到观察坐标系的变换

- 绕原点旋转使两坐标系重合



(b)　旋转变换

窗口到视区的变换

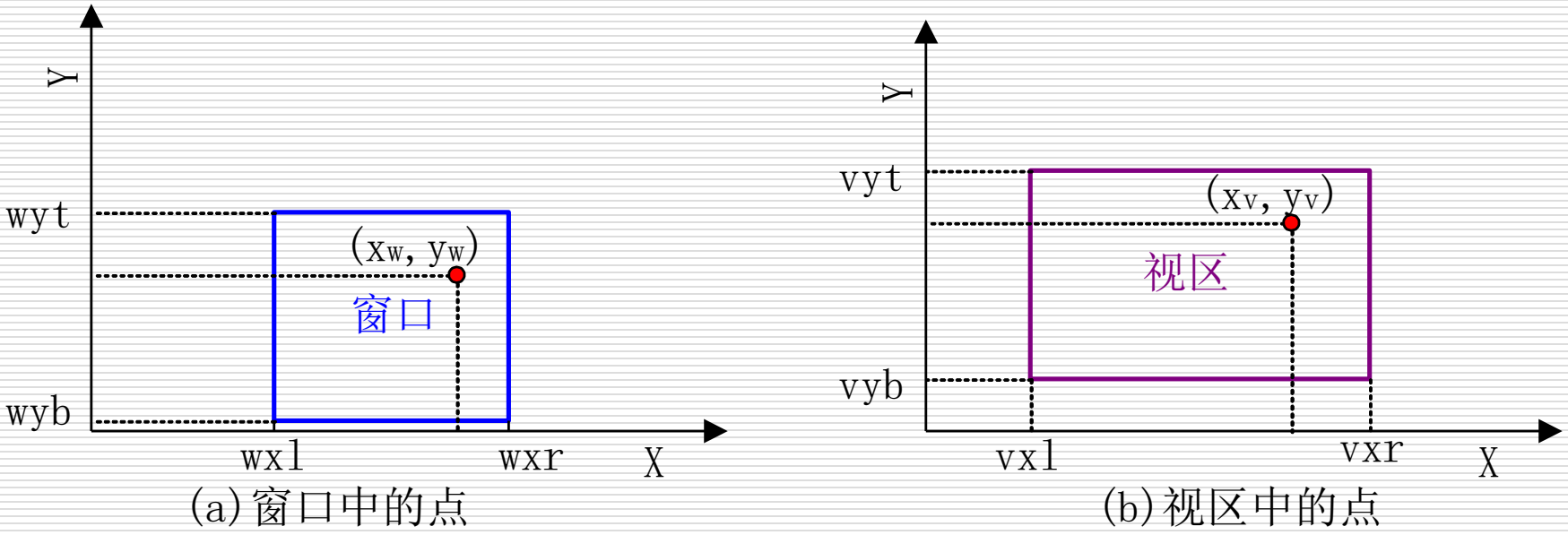


图6-23　窗口到视区的变换

窗口到视区的变换

- 要将窗口内的点（x_w, y_w）映射到相对应的视区内的点（x_v, y_v）需进行以下步骤：

  (1) 将窗口左下角点移至用户系统系的坐标原点；

  (2) 针对原点进行比例变换；

  (3) 进行反平移。

裁剪

- 在二维观察中，需要在观察坐标系下对窗口进行裁剪，即只保留窗口内的那部分图形，去掉窗口外的图形。
- 假设窗口是标准矩形，即边与坐标轴平行的矩形，由上（y=wyt）、下（y=wyb）、左（x=wxl）、右（x=wxr）四条边描述。

裁剪——点的裁剪

$$wxl \le x \le wxr,$$

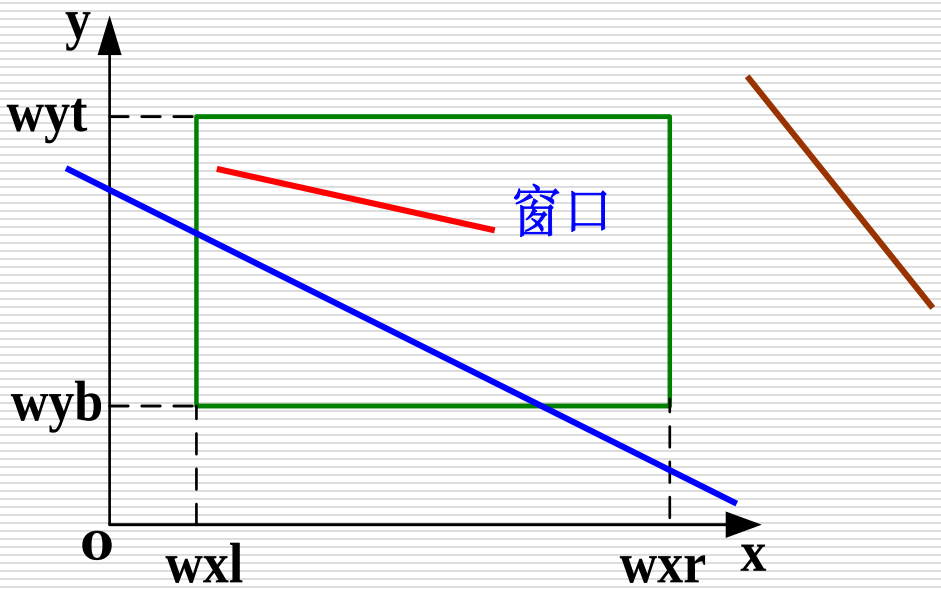
且$$wyb \le y \le wyt$$

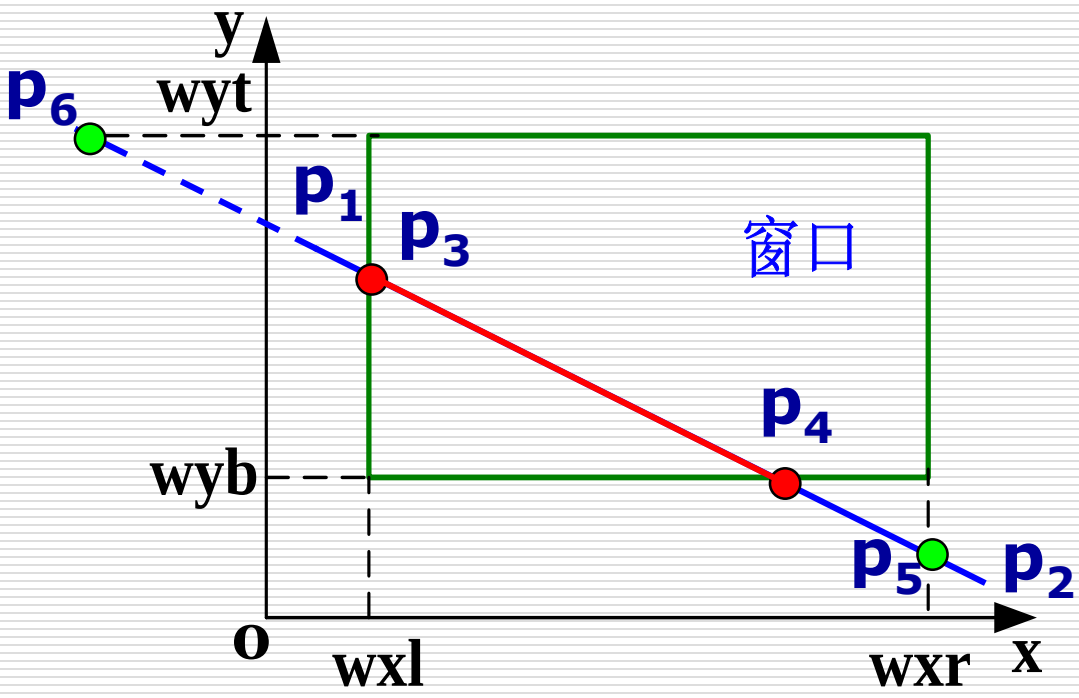
二维直线段的裁剪

已知条件：

（1）窗口边界wxl，wxr，wyb，wyt的坐标值；

（2）直线段端点p_1p_2的坐标值x_1, y_1, x_2, y_2。





- 实交点：直线段与窗口矩形边界的交点；
- 虚交点：处于直线段延长线或窗口边界延长线上的交点。

Cohen-Sutherland算法

编码：对于任一端点(x,y)，根据其坐标所在的区域，赋予一个4位的二进制码$D_3D_2D_1D_0$。

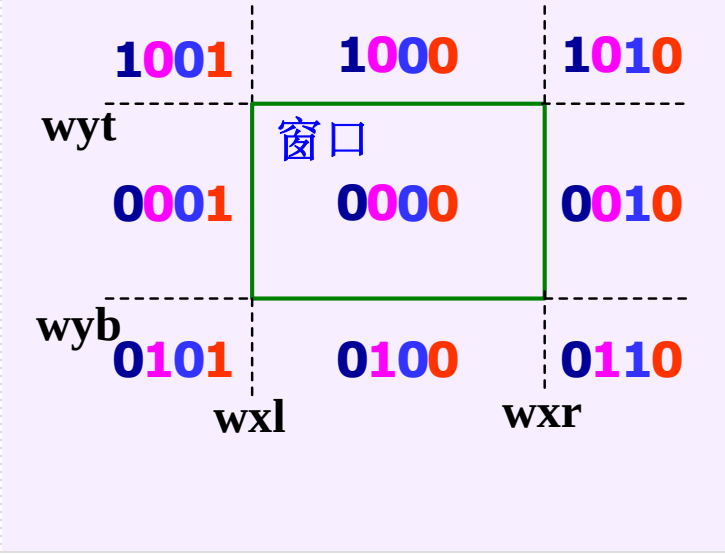
编码规则如下：

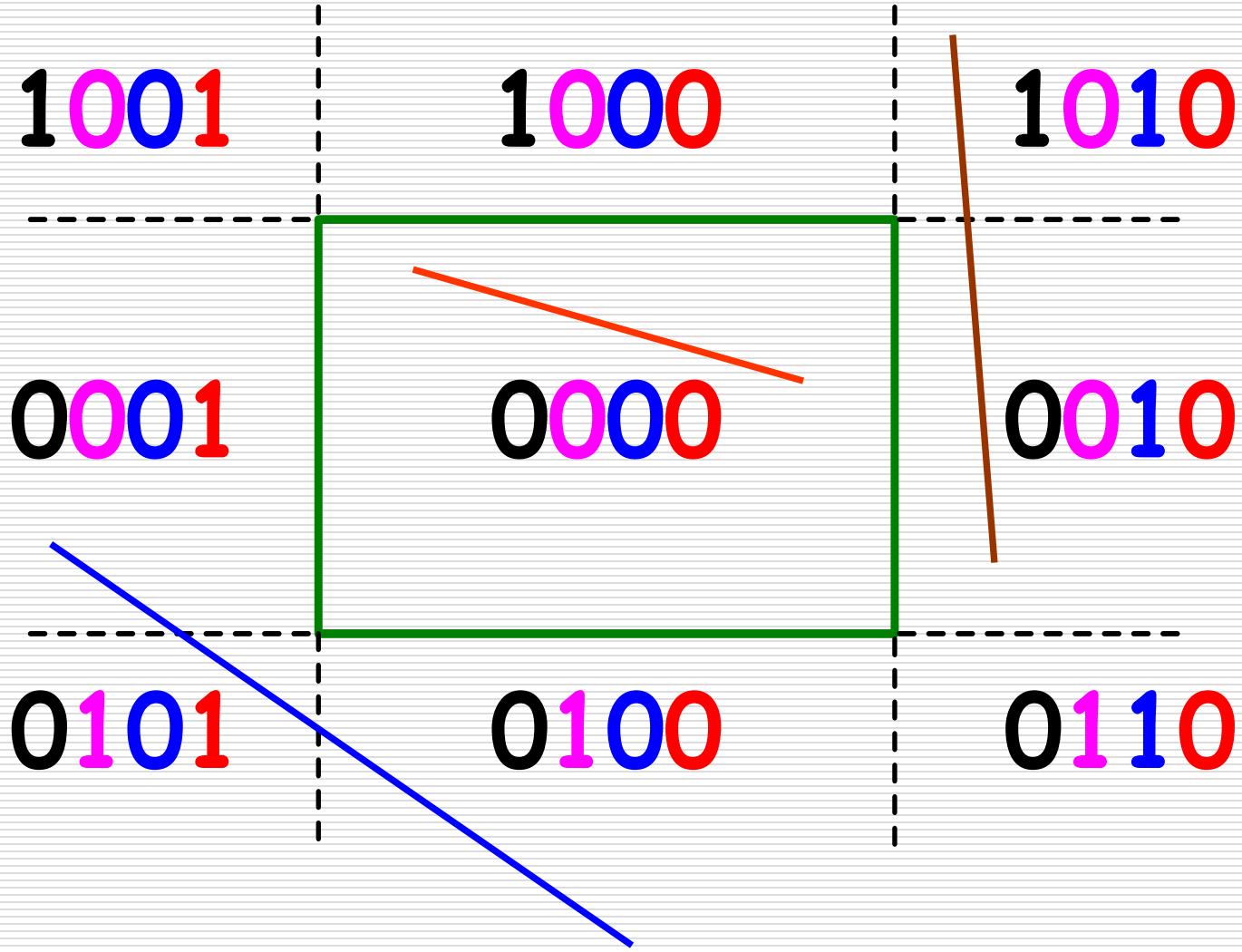
（1）若x<wxl，D_0=1，否则D_0=0；

（2）若x>wxr，D_1=1，否则D_1=0；

（3）若y<wyb，D_2=1，否则D_2=0；

（4）若y>wyt，D_3=1，否则D_3=0。




1001
1000
1010
0001
0000
0010
0101
0100
0110

Cohen-Sutherland算法

（1）判断

裁剪一条线段时，先求出直线段端点p_1和p_2的编码code1和code2，然后：

a.若code1|code2=0，对直线段简取之；

b.若code1&code2≠0，对直线段简弃之；

Cohen-Sutherland算法

（2）求交

若上述判断条件不成立，则需求出直线段与窗口边界的交点。

a. 左、右边界交点的计算：$y = y_1 + k(x - x_1)$;

b. 上、下边界交点的计算：$x = x_1 + (y-y_1)/k$。

其中，$k=（y_2-y_1）/（x_2-x_1）$。

Cohen-Sutherland算法

```
#define LEFT    1
#define RIGHT   2
#define BOTTOM  4
#define TOP     8

void dda_line(float x1,float y1,float x2,float y2);

typedef struct ClipWindow
{
    float XL,XR,YB,YT;
 } *TPtrClipWindow;
```

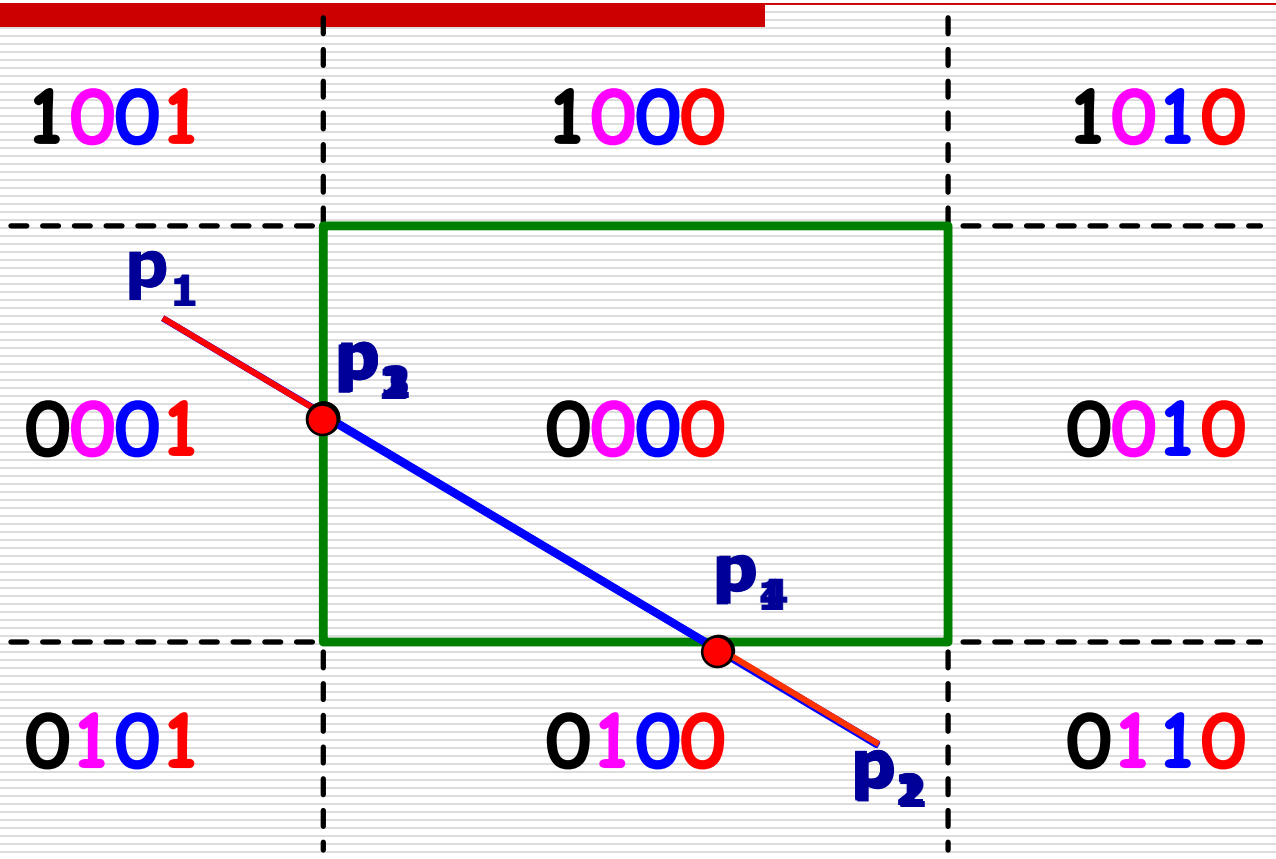

Cohen-Sutherland算法

```
void encode(float x,float y,int *code,TPtrClipWindow win)
{
    int c;
    c=0;
    if (x<win->XL) c=c|LEFT;
    else if (x>win->XR) c=c|RIGHT;

    if (y<win->YB) c=c|BOTTOM;
    else if (y>win->YT) c=c|TOP;

    *code=c;
    return;

}
```


```
void C_S_LineClip(float x1,float y1,float x2,float
    y2,TPtrClipWindow win)
{
    int code , code1,code2;
    float x,y;
    encode(x1,y1,&code1,win);
    encode(x2,y2,&code2,win);
    while (code1!=0 || code2!=0) {
        if ((code1 & code2) != 0) return;
        code=code1;
        if (code==0) code=code2;  //让code为窗口外的端点的编码
        if ( (code & LEFT) != 0) //线段与左边界相交
       {        x=win->XL;
                y=y1+(y2-y1)*(win->XL-x1)/(x2-x1);
        }
        else if ( (code & RIGHT)!=0) //线段与右边界相交
        {       x=win->XR;
                y=y1+(y2-y1)*(win->XR-x1)/(x2-x1);
        }
```

```
        else if ((code & BOTTOM) != 0) //线段与下边界相交
        {       y=win->YB;
                x=x1+(x2-x1)*(win->YB-y1)/(y2-y1);
        }
        else if ((code & TOP) != 0) //线段与上边界相交
        {       y=win->YT;
                x=x1+(x2-x1)*(win->YT-y1)/(y2-y1);
        }
        if (code == code1) {
                x1=x; y1=y;    encode(x,y,&code1,win);
        }
        else
        {       x2=x; y2=y;  encode(x,y,&code2,win);
        }
    }
        //显示直线的可见部分
    dda_line(x1,y1,x2,y2);
    return;
}
```


Cohen-Sutherland算法

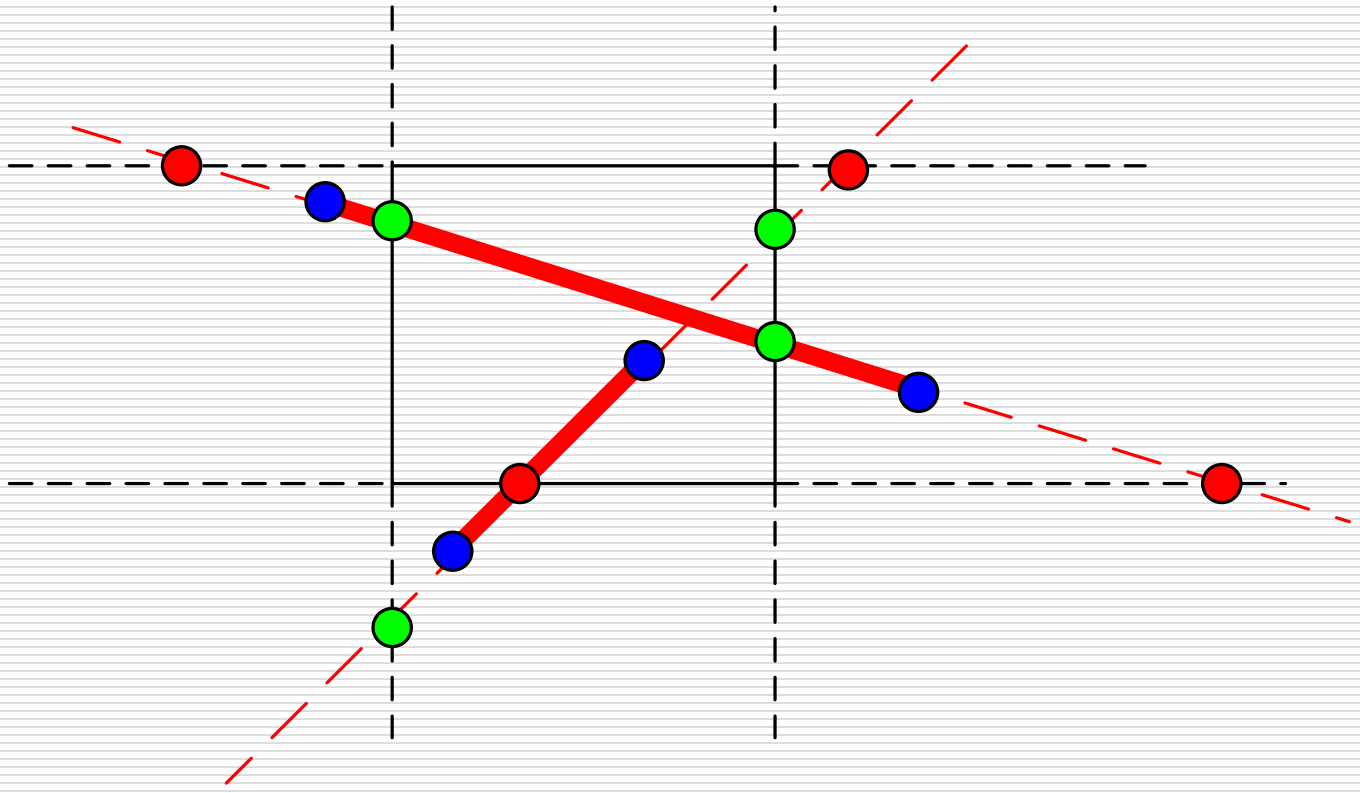


Cohen-Sutherland算法

- 用编码方法实现了对完全可见和不可见直线段的快速接受和拒绝；
- 求交过程复杂，有冗余计算，并且包含浮点运算，不利于硬件实现。

Liang-Barsky算法

分析



Liang-Barsky算法

直线的参数方程

$$x = x_1 + u \cdot (x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + u \cdot (y_2 - y_1)$$
$$0 \le u \le 1$$

对于直线上一点（x,y），若它在窗口内则有

$$wxl \le x_1 + u \cdot (x_2 - x_1) \le wxr$$
$$wxb \le y_1 + u \cdot (y_2 - y_1) \le wyt$$

$$u \cdot (x_1 - x_2) \le x_1 - wxl$$

$$u \cdot (x_2 - x_1) \le wxr - x_1$$

$$u \cdot (y_1 - y_2) \le y_1 - wyb$$

$$u \cdot (y_2 - y_1) \le wyt - y_1$$

令

$$p_1 = -(x_2 - x_1) \qquad q_1 = x_1 - wxl$$

$$p_2 = x_2 - x_1 \qquad q_2 = wxr - x_1$$

$$p_3 = -(y_2 - y_1) \qquad q_3 = y_1 - wyb$$

$$p_4 = y_2 - y_1 \qquad q_4 = wyt - y_1$$

则有 $u \cdot p_k \le q_k$

- 任何平行于剪切边界之一的直线$p_k=0$,其中k对应于该剪切边界（$k=1,2,3,4$对应于左、右、下、上边界）。如果还满足$q_k<0$, 则线段完全在边界之外，因此舍弃该线段。如果$q_k \geq 0$，则线段位于边界之内。
- 当$p_k<0$, 线段从剪切边界延长线的外部延长到内部。 当$p_k>0$,线段从剪切边界延长线的内部延长到外部。当$p_k \neq 0$, 可以计算出线段与边界k的延长线的交点的u值：

$$u = \frac{q_k}{p_k}$$

Liang-Barsky算法

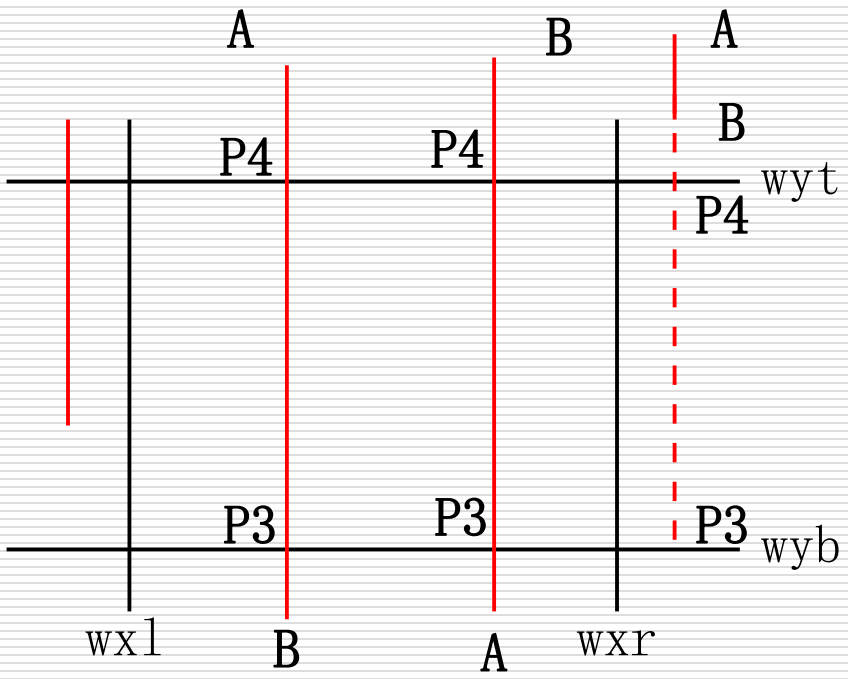
由 $u \cdot p_k \le q_k$

$$\begin{cases} q_k / p_k \ (p_k < 0) \le u \cdot \le q_k / p_k \ (p_k > 0) & k = 1,2 \\ q_k / p_k \ (p_k < 0) \le u \cdot \le q_k / p_k \ (p_k > 0) & k = 3,4 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

特殊处理：

$p_3 = -(y_2 - y_1)$　　$q_3 = y_1 - wyb$

$p_4 = y_2 - y_1$　　$q_4 = wyt - y_1$



(a)直线段与窗口边界wxl和wxr平行的情况

求出参数值：

$u3=q_3/p_3$，　$u4=q_4/p_4$

$u_A=0$，　$u_B=1$，

$$u_{\max} = \max(0, u_k \mid p_k < 0)$$

$$u_{\min} = \min(u_k \mid p_k > 0, 1)$$

$$p_1 = -(x_2 - x_1) \qquad q_1 = x_1 - wxl$$

$$p_2 = x_2 - x_1 \qquad q_2 = wxr - x_1$$

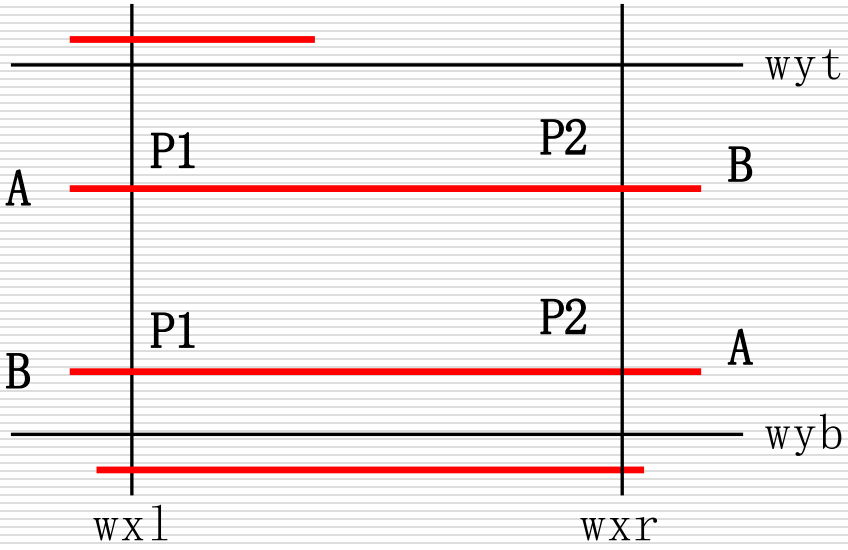
求出参数值：

$u_1 = q_1/p_1$，　$u_2 = q_2/p_2$

$u_A = 0$，　$u_B = 1$，

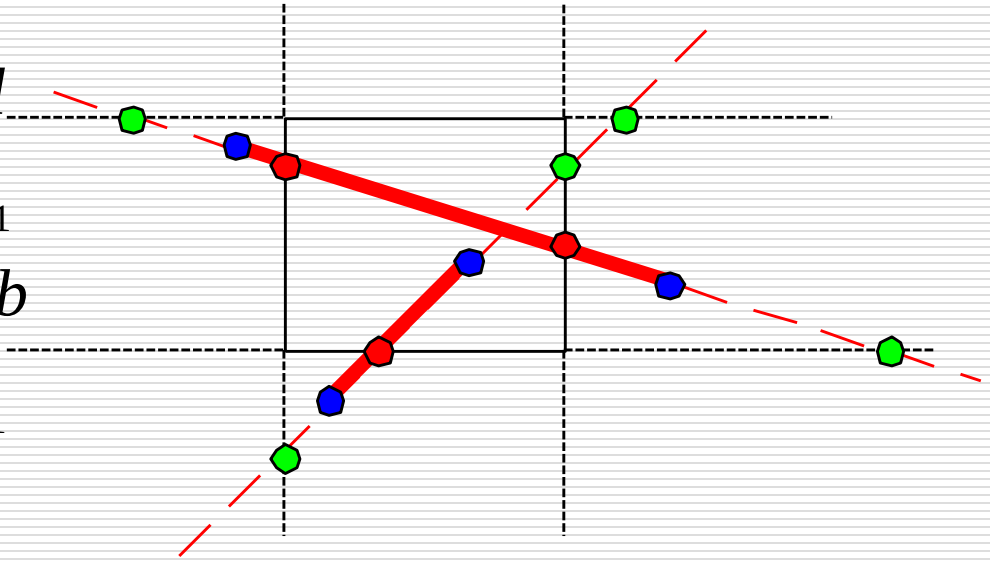
$$u_{\max} = \max(0, u_k \mid p_k < 0)$$

$$u_{\min} = \min(u_k \mid p_k > 0, 1)$$



(b) 直线段与窗口边界wyb和wyt平行的情况

$$p_1 = -(x_2 - x_1) \qquad q_1 = x_1 - wxl$$
$$p_2 = x_2 - x_1 \qquad q_2 = wxr - x_1$$
$$p_3 = -(y_2 - y_1) \qquad q_3 = y_1 - wxb$$
$$p_4 = y_2 - y_1 \qquad q_4 = wyt - y_1$$



一般情况：

$$u_{\max} = \max(0, u_k \mid p_k < 0, u_k \mid p_k < 0)$$
$$u_{\min} = \min(u_k \mid p_k > 0, u_k \mid p_k > 0, 1)$$

算法步骤：

(1)输入直线段的两端点坐标：(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，以及窗口的四条边界坐标：wyt、wyb、wxl和wxr。

(2)若$\Delta x=0$，则$p_1=p_2=0$。此时进一步判断是否满足$q_1<0$或$q_2<0$，若满足，则该直线段不在窗口内，算法转(7)。否则，满足$q_1>0$且$q_2>0$，则进一步计算u_1和u_2。算法转(5)。

(3)若$\Delta y=0$，则$p_3=p_4=0$。此时进一步判断是否满足$q_3<0$或$q_4<0$，若满足，则该直线段不在窗口内，算法转(7)。否则，满足$q_3>0$且$q_4>0$，则进一步计算u_3和u_4。算法转(5)。

(4)若上述两条均不满足，则有$p_k\neq0$（k=1,2,3,4）。此时计算u_1u2,u3和u_4。求出（umax,umin)赋值给（u1，u2）

(5)求得u_1和u_2后，进行判断：若$u_1>u_2$，则直线段在窗口外，算法转(7)。若$u_1<u_2$，利用直线的参数方程求得直线段在窗口内的两端点坐标。

(6)利用直线的扫描转换算法绘制在窗口内的直线段。算法结束。

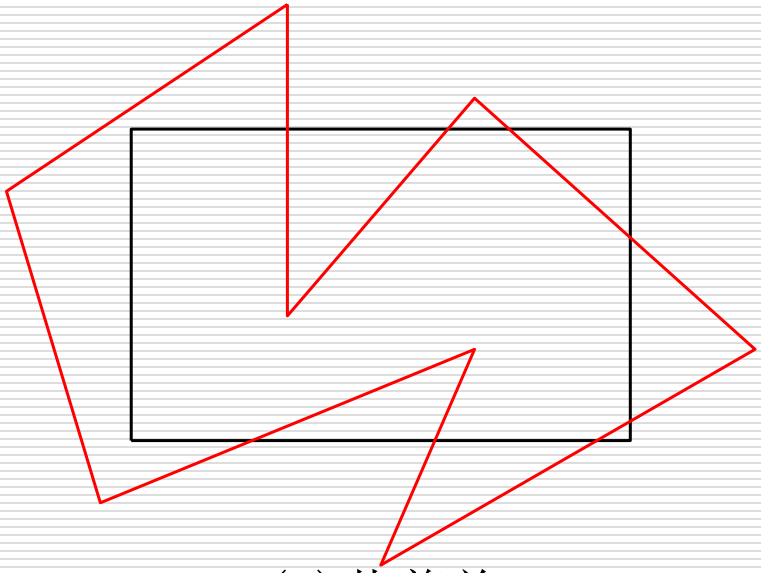
(7)算法结束。

```
#define TRUE 1
#define FALSE 0
int clip(float d, float q, float *t1, float *t2)
{
    float t;  int retVal=TRUE;

    if(d<0.0){
       t=q/d;
       if(t>*t2)
          retVal=FALSE;
       else
          if(t>*t1)        //t1 中取最大的
    **************************
             *t1=t;
    }else
       if(d>0.0){
          t=q/d;
          if(t<*t1)
             retVal=FALSE;
          else
             if(t<*t2)   //t2 中取最小的
    **************************
                *t2=t;
       }else//此时d==0.0
          if(q<0.0) retVal=FALSE;
    return(retVal);
}
```

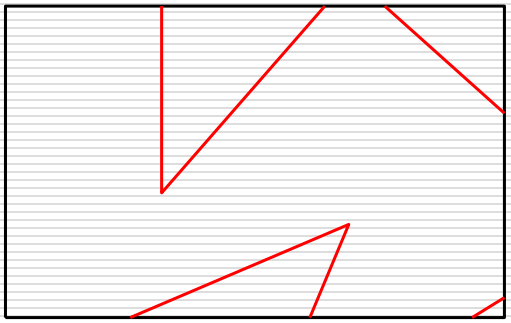
```
void  LiangBarskyClipLine(int xwmin, int ywmin, int xwmax,
    int ywmax, float x1, float y1, float x2, float y2)
{
    float t1=0,t2=1,dx=x2-x1,dy;
    if(clip(-dx, x1-xwmin, &t1, &t2))
       if(clip(dx, xwmax-x1, &t1, &t2)){
          dy=y2-y1;
              if(clip(-dy, y1-ywmin, &t1, &t2))
             if(clip(dy, ywmax-y1, &t1, &t2)){

                if(t2<1.0){
                   x2=x1+t2*dx;
                   y2=y1+t2*dy;
                }
                if(t1>0.0){
                   x1=x1+t1*dx;
                   y1=y1+t1*dy;
                }
                dda_line(x1, y1, x2, y2);
             }
       }
}
```

多边形的裁剪

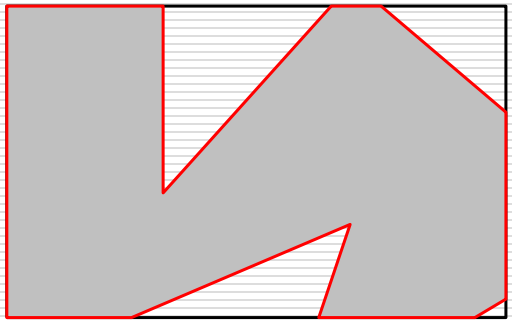
问题的提出：



(a) 裁剪前



(b) 直接采用直线段裁剪的结果



(c) 正确的裁剪结果

Sutherland-Hodgeman多边形裁剪

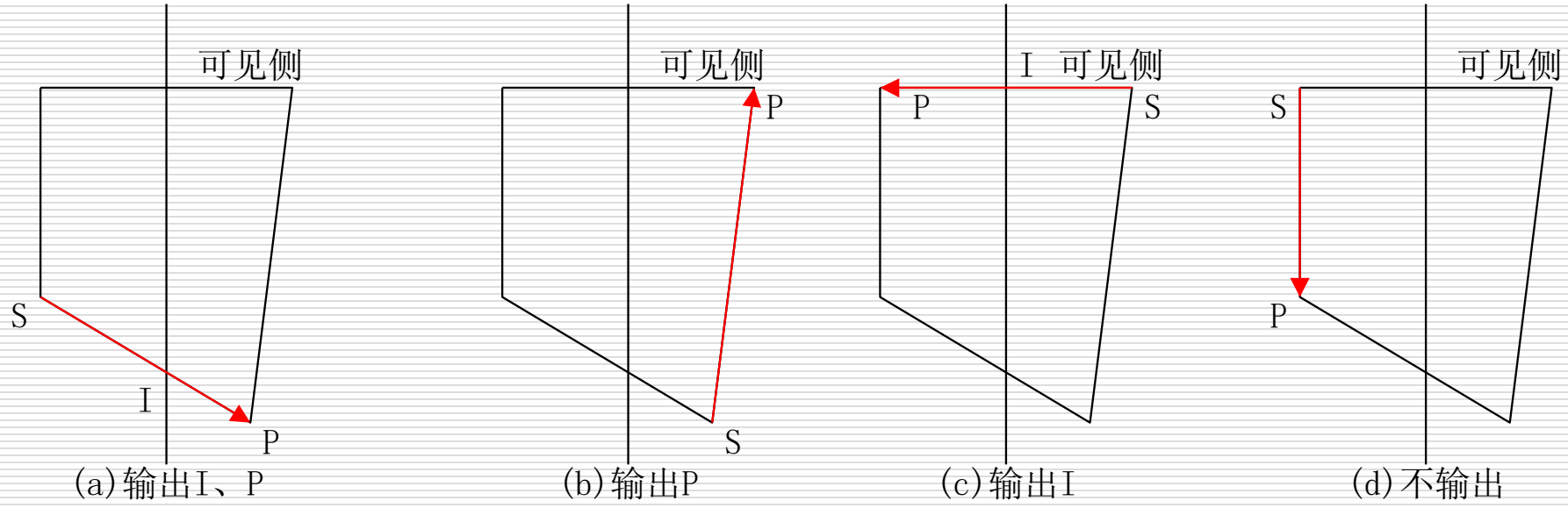
- 基本思想：将多边形的边界作为一个整体，每次用窗口的一条边界对要裁剪的多边形进行裁剪，体现分而治之的思想。

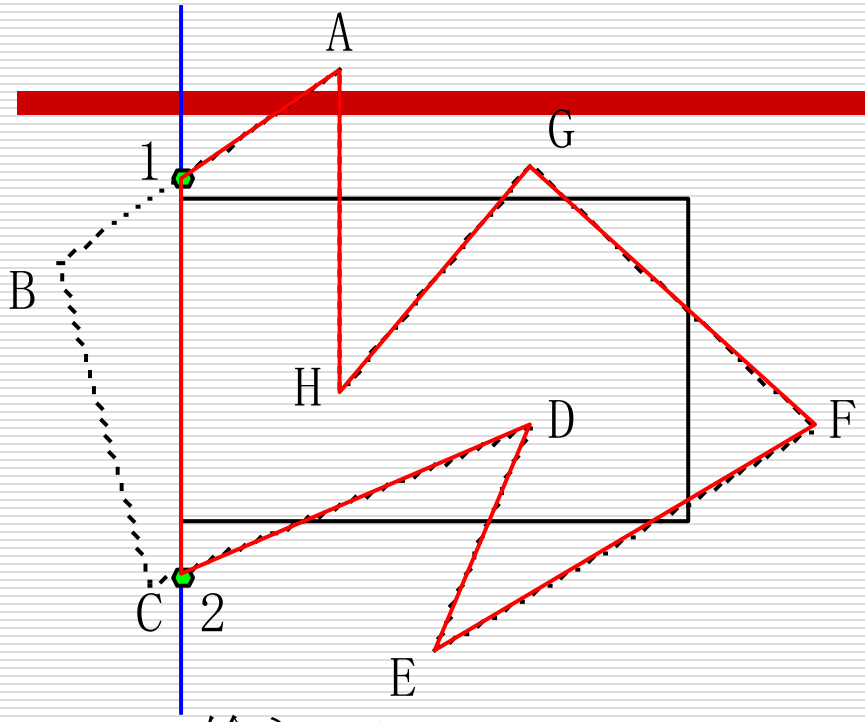
Sutherland-Hodgeman多边形裁剪

- 算法实施策略：
  - 为窗口各边界裁剪的多边形存储输入与输出顶点表。在窗口的一条裁剪边界处理完所有顶点后，其输出顶点表将用窗口的下一条边界继续裁剪。
  - 窗口的一条边以及延长线构成的裁剪线把平面分为两个区域，包含窗口区域的区域称为可见侧；不包含窗口区域的域为不可见侧。

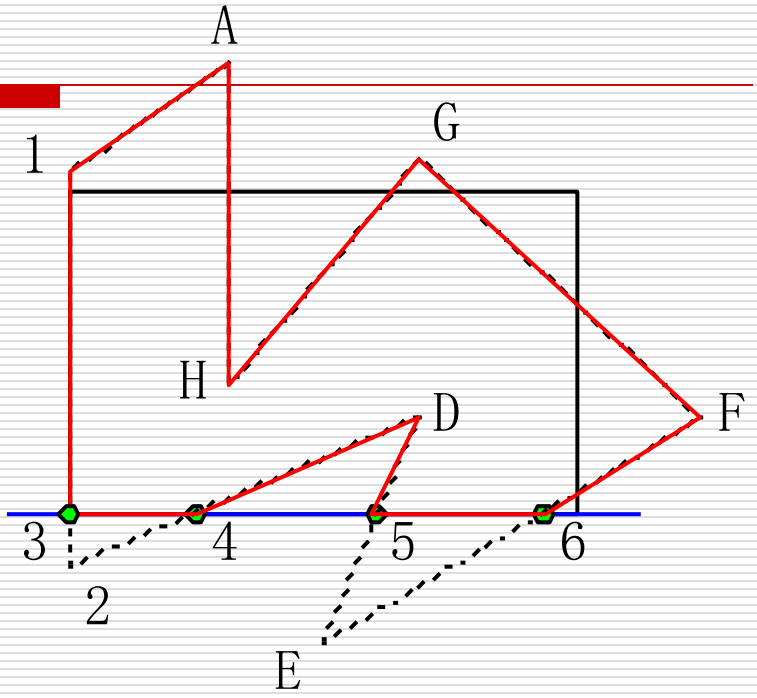
Sutherland-Hodgeman多边形裁剪

- 沿着多边形依次处理顶点会遇到四种情况：

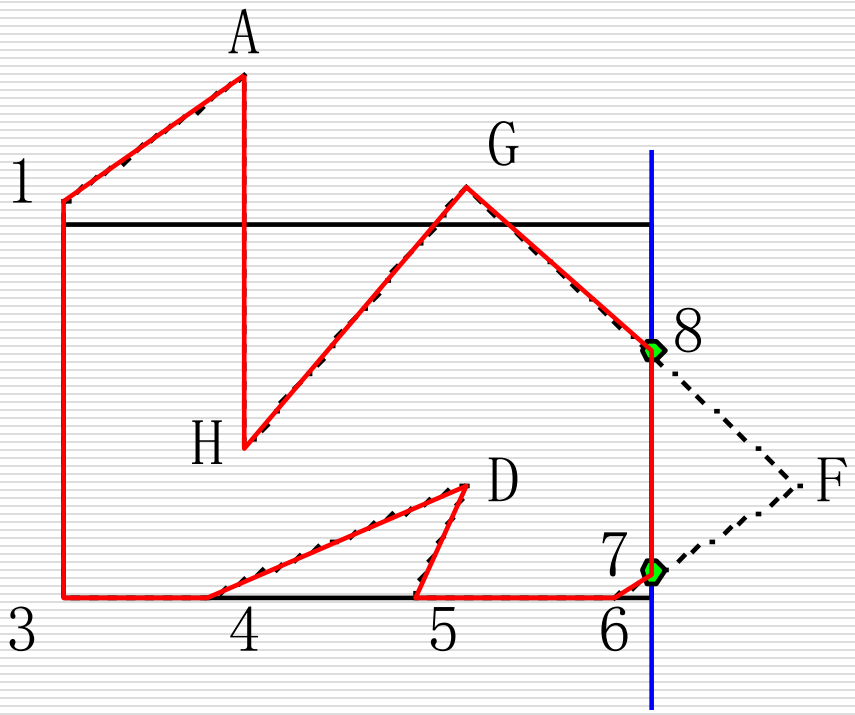




输入：ABCDEFGH
输出：12DEFGHA
(a)用左边界裁剪

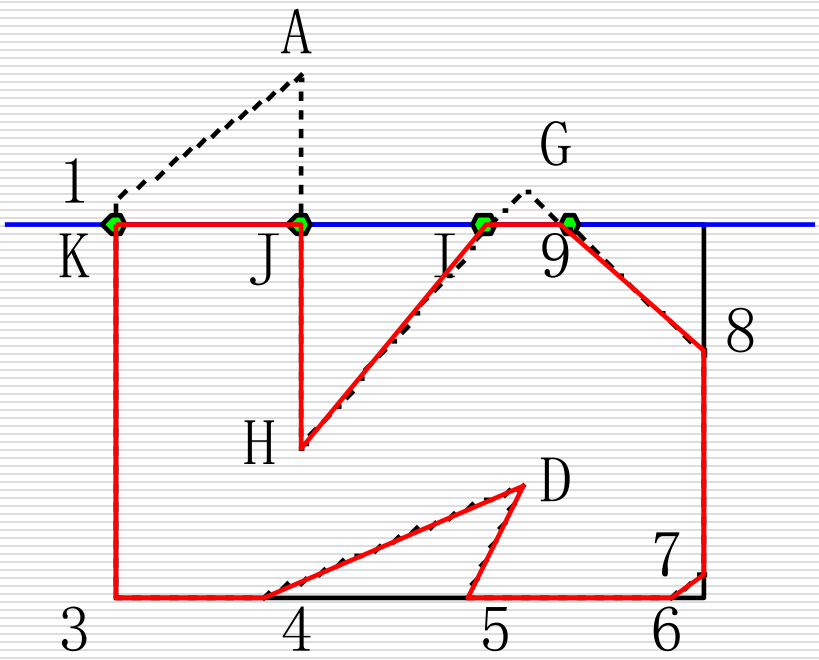


输入：12DEFGHA
输出：34D56FGHA1
(b)用下边界裁剪



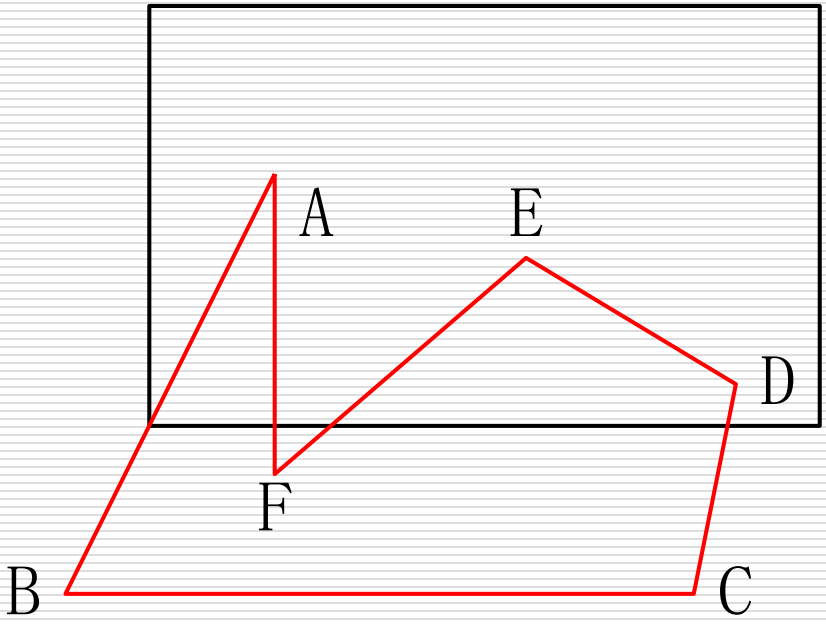
输入：34D56FGHA1

(c)用右边界裁剪

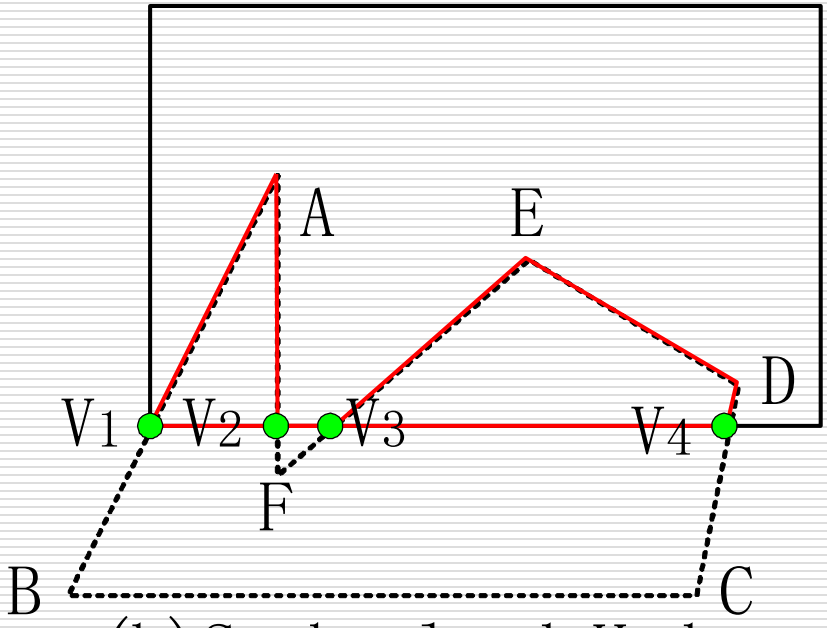


(d)用上边界裁剪

特点



(a)裁剪前



(b)Sutherland-Hodgeman算法的裁剪结果

```
typedef enum { Left, Right, Bottom, Top } Boundary;
const GLint nClip = 4;

class wcPt2D
{
public:
        GLfloat x, y;
};

GLint inside ( wcPt2D p, Boundary b, wcPt2D wMin, wcPt2D wMax)
{
        switch (b)
        {
        case Left:          if (p.x < wMin.x) return (false); break;
        case Right:         if (p.x > wMax.x) return (false); break;
        case Bottom:        if (p.y < wMin.y) return (false); break;
        case Top:           if (p.y > wMax.y) return (false); break;
        }
        return (true);
}
```


```
GLint cross ( wcPt2D p1, wcPt2D p2, Boundary winEdge,
wcPt2D wMin, wcPt2D wMax)
{
        if ( inside (p1, winEdge, wMin, wMax)
           == inside (p2, winEdge, wMin, wMax))
                return (false);
        else
                return (true);
}
```

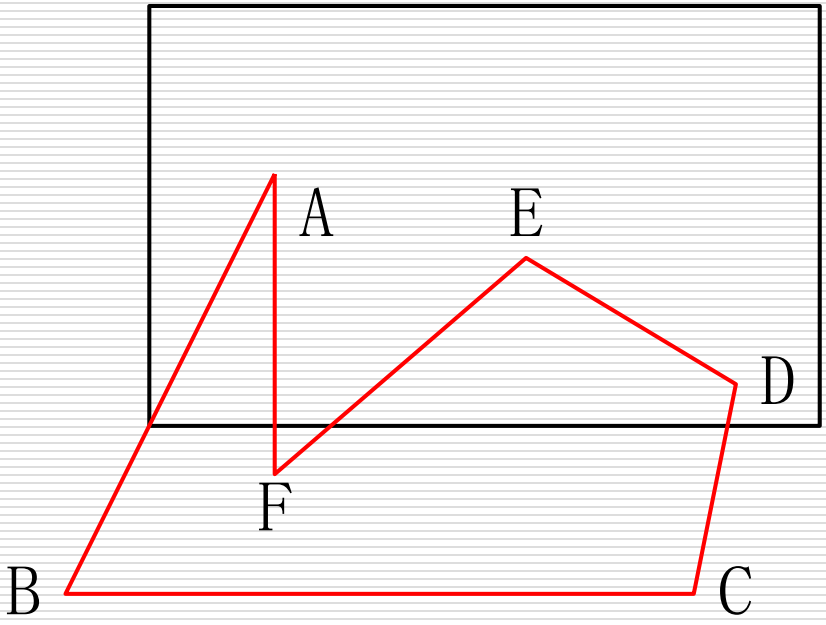

```
wcPt2D intersect ( wcPt2D p1, wcPt2D p2, Boundary winEdge, wcPt2D wMin, wcPt2D wMax)
{
        wcPt2D iPt;
        GLfloat m;

        //if (p1.x != p2.x) m = (p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);    不用判断
        switch (winEdge)
        {
        case Left:
                iPt.x = wMin.x;
                iPt.y = p2.y + ( wMin.x - p2.x) * m;
                break;
        case Right:
                iPt.x = wMax.x;
                iPt.y = p2.y + ( wMax.x - p2.x) * m;
                break;
        case Bottom:
                iPt.y = wMin.y;
                if (p1.x != p2.x) iPt.x = p2.x + (wMin.y - p2.y) / m;
                else iPt.x = p2.x;
                break;
        case Top:
                iPt.y = wMax.y;
                if (p1.x != p2.x) iPt.x = p2.x + (wMax.y - p2.y) / m;
                else iPt.x = p2.x;
                break;
        }
        return (iPt);
}
```


```
void clipPolygon(wcPt2D *pIn, GLint n, Boundary b, wcPt2D wMin, wcPt2D wMax, wcPt2D *pOut, GLint *cnt)
{
        int cnt_tmp ,k, k1;
        wcPt2D iPt;

        cnt_tmp = -1;
        for (k=0; k < n; k++)
        {
                k1 = k+1;
                if( k1 == n ) k1 = 0;
                //clip the line segment pIn[k]-pIn[k+1]
                //decide which kind of relations between the line segment and the boundary b
                // case 1 : from outside to inside
                // case 2 : both are  inside
                // case 3 : from inside to outside
                // case 4 : both are outside
                if ( !inside(pIn[k],  b,  wMin, wMax) && inside( pIn[k1],  b,  wMin, wMax))
                {       Pt= intersect (pIn[k], pIn[k1],b, wMin, wMax);
                        cnt_tmp++;
                        pOut[cnt_tmp]=iPt;
                        cnt_tmp++;
                        pOut[cnt_tmp]=pIn[k1];
                }
                else if ( inside(pIn[k],  b,  wMin, wMax) && inside( pIn[k1],  b,  wMin, wMax))
                {       cnt_tmp++;
                        pOut[cnt_tmp]=pIn[k1];
                }
                else if( inside(pIn[k],  b,  wMin, wMax) && !inside( pIn[k1],  b,  wMin, wMax))
                {
                        iPt= intersect (pIn[k], pIn[k1],b, wMin, wMax);
                        cnt_tmp++;
                        pOut[cnt_tmp]=iPt;
                }
                else if( !inside(pIn[k],  b,  wMin, wMax) && !inside( pIn[k1],  b,  wMin, wMax))
                {
                }
        } // for (k=0; k < n-1; k++)

        *cnt = cnt_tmp + 1;}
}
```

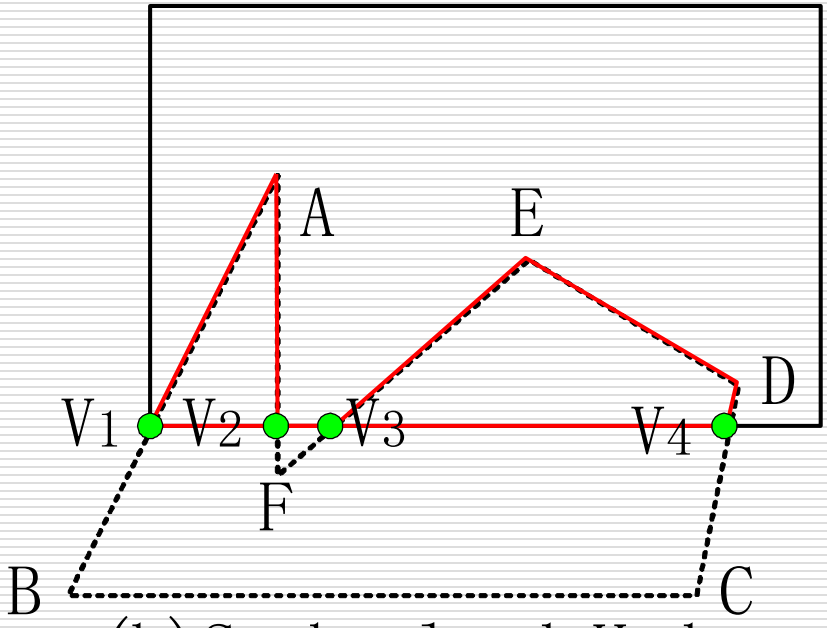

```
GLint polygonClipSuthHodg2 (wcPt2D wMin, wcPt2D wMax, GLint n, wcPt2D
*pIn, wcPt2D *pOut)
{
        GLint  cnt = 0;

        wcPt2D pOutLeft[20],pOutRight[20],pOutBottom[20];

        GLint cntLeft, cntRight, cntBottom;

        clipPolygon(pIn, n, Left, wMin, wMax, pOutLeft, &cntLeft);
        clipPolygon(pOutLeft, cntLeft, Right, wMin, wMax, pOutRight,
&cntRight);
        clipPolygon(pOutRight, cntRight, Bottom, wMin, wMax, pOutBottom,
&cntBottom);
        clipPolygon(pOutBottom,cntBottom, Top,wMin, wMax, pOut, &cnt);
        return (cnt);
}
```


Sutherland-Hodgeman多边形裁剪

特点



(a)裁剪前



(b)Sutherland-Hodgeman算法的裁剪结果

Weiler-Atherton多边形裁剪

- 假定按顺时针方向处理顶点，且将用户多边形定义为Ps，窗口矩形为Pw。算法从Ps的任一点出发，跟踪检测Ps的每一条边，当Ps与Pw相交时（实交点），按如下规则处理：

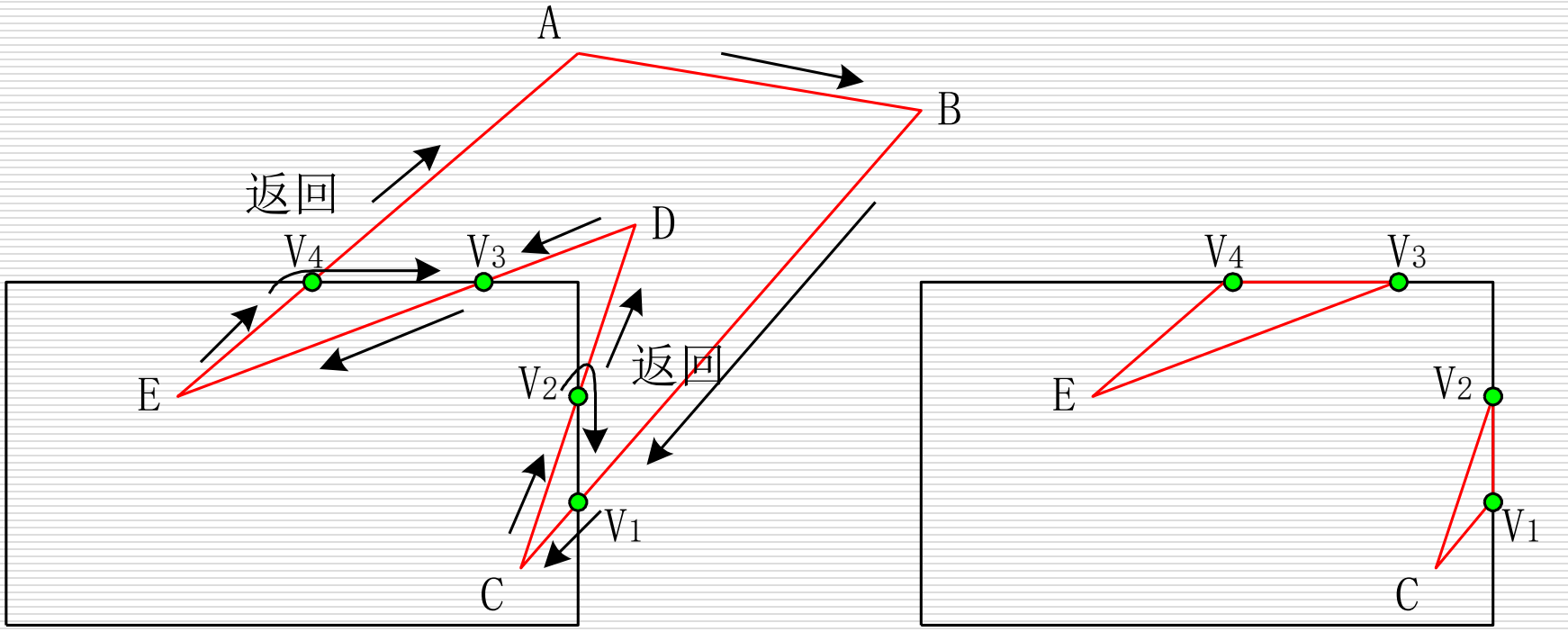
  (1)若是由不可见侧进入可见侧，则输出可见直线段，转(3)；

Weiler-Atherton多边形裁剪

(2)若是由可见侧进入不可见侧，则从当前交点开始，沿窗口边界顺时针检测Pw的边，即用窗口的有效边界去裁剪Ps的边，找到Ps与Pw最靠近当前交点的另一交点，输出可见直线段和由当前交点到另一交点之间窗口边界上的线段，然后返回处理的当前交点；

(3)沿着Ps处理各条边，直到处理完Ps的每一条边，回到起点为止。

- 下图示了Weiler-Atherton算法裁剪凹多边形的过程和结果。



(a)裁剪前　　(b)Weiler-Atherton算法的裁剪结果

图6-34 Weiler-Atherton算法裁剪凹多边形

其他裁剪

2. 文字裁剪

文字裁剪的策略包括几种：

- 串精度裁剪
- 字符精度裁剪
- 笔划、象素精度裁剪

3. 外部裁剪

保留落在裁剪区域外的图形部分、去掉裁剪区域内的所有图形，这种裁剪过程称为外部裁剪，也称空白裁剪。

6.6 OpenGL中的二维观察

- 指定矩阵堆栈
- 指定裁剪窗口
- 指定视区

指定矩阵堆栈

- 指定当前操作的是投影矩阵堆栈

  glMatrixMode（GL_PROJECTION）

- 初始化，即指定当前操作的矩阵堆栈的栈顶元素为单位矩阵。

  glLoadIdentity()；

指定裁剪窗口

- 定义二维裁剪窗口

  gluOtho2D(xwmin, xwmax, ywmin, ywmax);

- 其中，双精度浮点数**xwmin，xwmax，ywmin，ywmax**分别对应裁剪窗口的左、右、下、上四条边界。

- 默认的裁剪窗口，四条边界分别为**wxl=-1.0，wxr=1.0，wyb=-1.0，wyt=1.0**。

指定裁剪窗口

- 指定视区

glViewPort（xvmin，yvmin，vpWidth，vpHeighht）；

- **xvmin**和**yvmin**指定了对应于屏幕上显示窗口中的矩形视区的左下角坐标，单位为像素。
- 整型值**vpWidth**和**vpHeighht**则指定了视区的宽度和高度。
- 默认的视区大小和位置与显示窗口保持一致。