第七章 曲线和曲面

- 提出问题

由离散点来近似地决定曲线和曲面，即通过测量或实验得到一系列有序点列，根据这些点列需构造出一条光滑曲线，以直观地反映出实验特性、变化规律和趋势等。

7.1 基本概念

- 曲线曲面数学描述的发展
- 曲线曲面的表示要求
- 曲线曲面的表示
- 插值与逼近
- 连续性条件
- 样条描述

曲线曲面数学描述的发展

- 弗格森双三次曲面片
- 孔斯双三次曲面片
- 样条方法
- **Bezier**方法
- **B**样条方法
- 有理**Bezier**
- 非均匀有理**B**样条方法

曲线曲面的表示要求

- 唯一性
- 几何不变性
- 易于定界
- 统一性
- 易于实现光滑连接
- 几何直观

曲线曲面的表示

- 参数法表示

$$p = p(t) \qquad t \in [0,1]$$

- 参数法表示的优点
  - 点动成线
  - 通常总是能够选取那些具有几何不变性的参数曲线曲面表示形式。
  - 用对参数求导来代替斜率，避免无穷大斜率

曲线曲面的表示

- t∈[0,1]，使其相应的几何分量是有界的。
- 可对参数方程直接进行仿射和投影变换。
- 参数变化对各因变量的影响可以明显地表示出来。

插值与逼近

- 采用模线样板法表示和传递自由曲线曲面的形状称为样条。
- 样条曲线是指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续条件。
- 样条曲面则可以用两组正交样条曲线来描述。

插值与逼近

- 曲线曲面的拟合：当用一组型值点来指定曲线曲面的形状时，形状完全通过给定的型值点列。

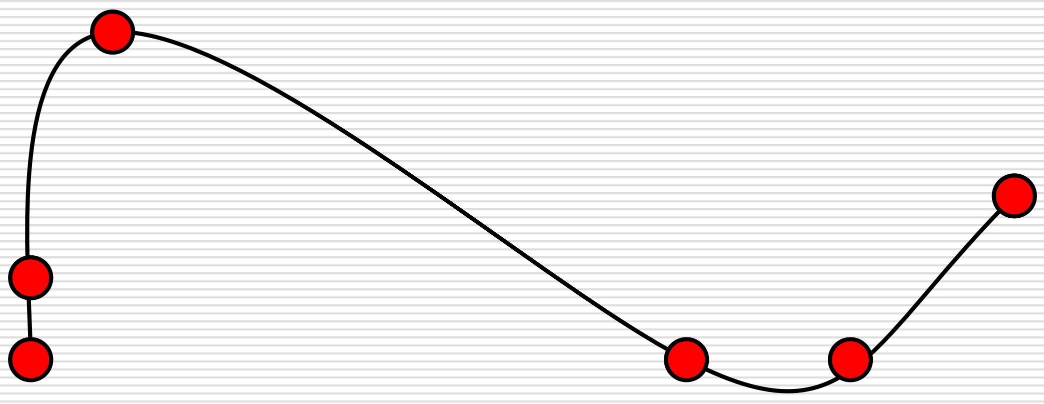


图7.1 曲线的拟合

插值与逼近

- 曲线曲面的逼近：当用一组控制点来指定曲线曲面的形状时，求出的形状不必通过所有控制点。

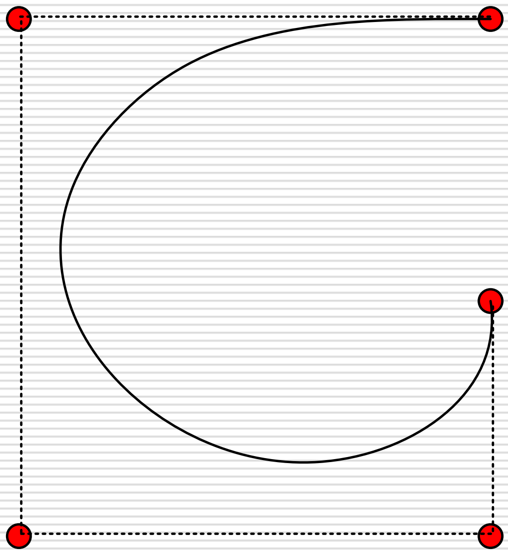


图7.2 曲线的逼近

插值与逼近

- 求给定型值点之间曲线上的点称为曲线的*插值*。
- 将连接有一定次序控制点的直线序列称为控制多边形或特征多边形。

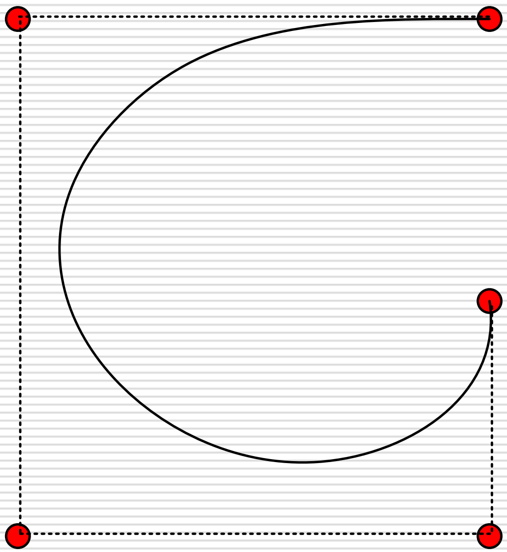


图**7.2** 曲线的逼近

连续性条件

- 假定参数曲线段**p_i**以参数形式进行描述：

$$p_i = p_i(t) \qquad t \in [t_{i0}, t_{i1}]$$

- 参数连续性
  - **0**阶参数连续性，记作**C^0**连续性，是指曲线的几何位置连接，即

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

连续性条件

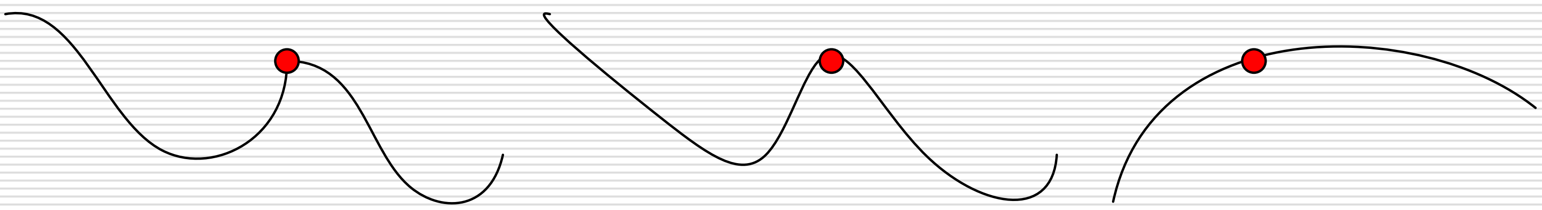
- **1**阶参数连续性，记作**C¹**连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

$$且 p_i'(t_{i1}) = p_{(i+1)}'(t_{(i+1)0})$$

连续性条件

- **2**阶参数连续性，记作**C**^{2}连续性，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。



(a) 0阶连续性　(b) 1阶连续性　(c) 2阶连续性

图**7.3** 曲线段的参数连续性

连续性条件

- 几何连续性
  - **0**阶几何连续性，记作**G⁰**连续性，与**0**阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

连续性条件

- 1阶几何连续性，记作G^1连续性，指一阶导数在相邻段的交点处成比例
- 2阶几何连续性，记作G^2连续性，指相邻曲线段在交点处其一阶和二阶导数均成比例。

样条描述

- n次样条参数多项式曲线的矩阵

$$\begin{cases} x(t) = a_n t^n + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 \\ y(t) = b_n t^n + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0 \\ z(t) = c_n t^n + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

样条描述

$$p(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^n & \cdots & t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$=T\cdot C=\boxed{T\cdot M_S}\cdot G \qquad t\in[0,1]$$

7.2 三次样条

- 给定n+1个点，可得到通过每个点的分段三次多项式曲线：

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

三次Hermite样条

- 定义：假定型值点P_k和P_{k+1}之间的曲线段为p(t),t∈[0,1]，给定矢量P_k、P_{k+1}、R_k和R_{k+1}，则满足下列条件的三次参数曲线为三次Hermite样条曲线：

$$p(0)=P_k,\ p(1)=P_{k+1}$$

$$p'(0)=R_k,\ p'(1)=R_{k+1}$$

□ 推导

$$p(t)=[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$=[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=T\cdot C$$

$$C=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}=M_h \cdot G_h$$

- **M_h是Hermite矩阵。G_h是Hermite几何矢量。**

三次Hermite样条

- 三次Hermite样条曲线的方程为：

$$p(t) = T \cdot M_h \cdot G_h \qquad \mathrm{t} \in [0,1]$$

$$T \cdot M_h = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

三次Hermite样条

- 通常将$T \bullet M_k$称为Hermite基函数（或称混合函数，调和函数）：

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

$$p(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + R_k H_2(t) + R_{k+1} H_3(t)$$

三次Hermite样条

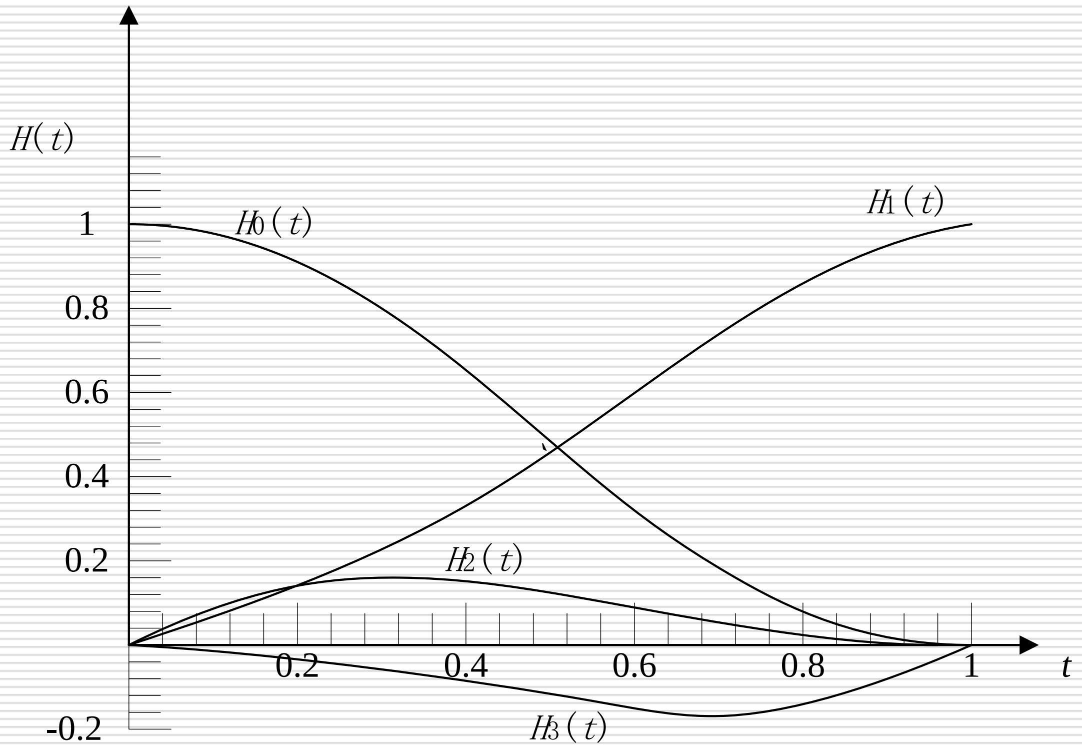


图7.4 Hermite基函数

三次Hermite样条

- 特点
  - 可以局部调整，因为每个曲线段仅依赖于端点约束。
  - Hermite曲线具有几何不变性。

7.3 Bezier曲线曲面

- Bezier曲线的定义
- Bezier曲线的性质
- Bezier曲线的生成
- Bezier曲面

Bezier曲线的定义

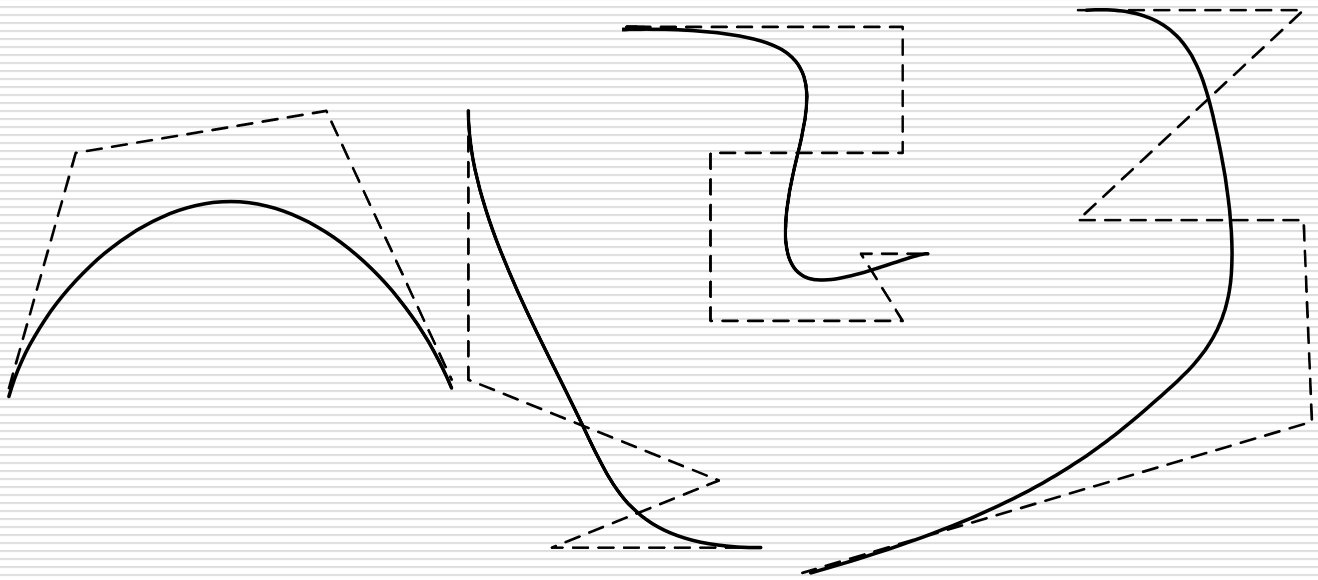


图7.5 Bezier曲线

Bezier曲线的定义

- 定义

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_k BEN_{k,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

- **Bernstein基函数具有如下形式：**

$$BEN_{k,n}(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}=C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$$

$$k=0,1,\cdots,n$$

- **注意：当k=0，t=0时，$t^k=1$，k!=1。**

Bezier曲线的定义

- 一次Bezier曲线（n=1）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{1}P_k BEN_{k,1}(t)=(1-t)P_0+tP_1 \qquad t\in[0,1]$$

Bezier曲线的定义

- 二次Bezier曲线（n=2）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{2}P_k BEN_{k,n}(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2$$

$$=(P_2-2P_1+P_0)t^2+2(P_1-P_0)t+P_0 \qquad t\in[0,1]$$

Bezier曲线的定义

- 三次Bezier曲线（n=3）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{3}P_k BEN_{k,n}(t)$$

$$=BEN_{0,3}(t)P_0+BEN_{1,3}(t)P_1+BEN_{2,3}(t)P_2+BEN_{3,3}(t)P_3$$

$$=(1-t)^3P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)P_2+t^3P_3 \qquad t\in[0,1]$$

$$p(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}=T\cdot M_{be}G_{be} \qquad t\in[0,1]$$

Bezier曲线的定义

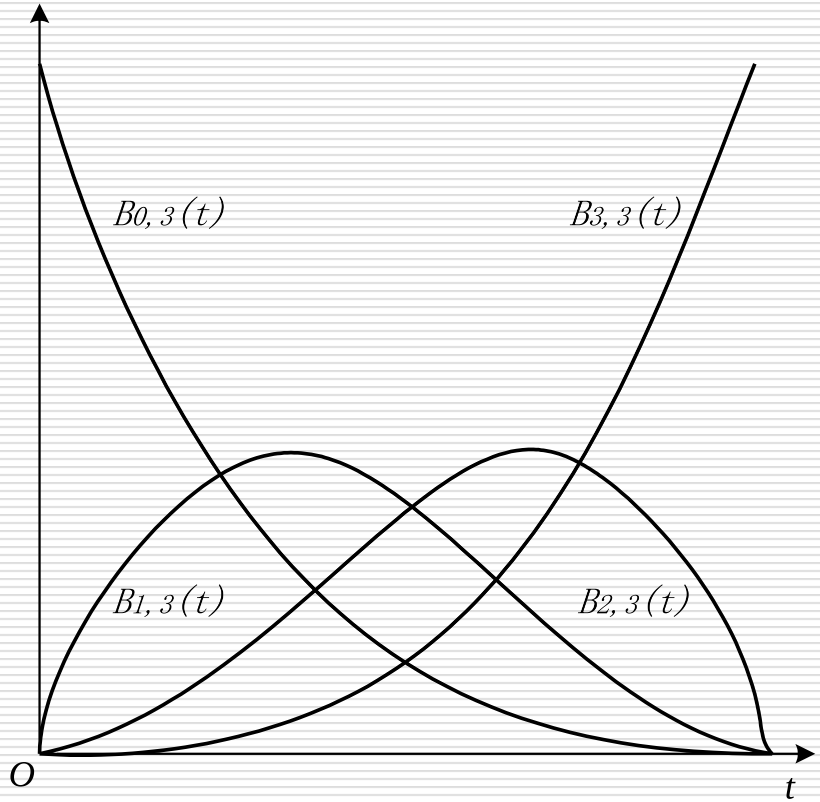


图7.6 三次Bezier曲线的四个Bezier基函数

Bezier曲线的性质

- 端点

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \sum_{k=0}^{n} P_k BEN_{k,n}(0) \\
&= P_0 BEN_{0,n}(0) + P_1 BEN_{1,n}(0) + \cdots + P_n BEN_{n,n}(0) \\
&= P_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(1) &= \sum_{k=0}^{n} P_k BEN_{k,n}(1) \\
&= P_0 BEN_{0,n}(1) + P_1 BEN_{1,n}(1) + \cdots + P_n BEN_{n,n}(1) \\
&= P_n
\end{aligned}
$$

Bezier曲线的性质

- 一阶导数

$$BEN'_{k,n}(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}(k\cdot t^{k-1}(1-t)^{n-k}-(n-k)(1-t)^{n-k-1}\cdot t^{k})$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot t^{k-1}\cdot(1-t)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$-\frac{n(n-1)!}{k!((n-1)-k)!}\cdot t^{k}\cdot(1-t)^{(n-1)-k}$$

$$=n(BEN_{k-1,n-1}(t)-BEN_{k,n-1}(t))$$

Bezier曲线的性质

$$p'(t) = n\sum_{k=0}^{n} P_k (BEN_{k-1,n-1}(t) - BEN_{k,n-1}(t))$$

$$= n((P_1 - P_0)BEN_{0,n-1}(t) + (P_2 - P_1)BEN_{1,n-1}(t) + \ldots + (P_n - P_{n-1})BEN_{n-1,n-1}(t))$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})BEN_{k-1,n-1}(t)$$

$$p'(0) = n\sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})BEN_{k-1,n-1}(0) = n(P_1 - P_0)$$

$$p'(1) = n\sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})BEN_{k-1,n-1}(0) = n(P_n - P_{n-1})$$

Bezier曲线的性质

- 二阶导数

$$p''(0) = n(n-1)((P_2 - P_1) - (P_1 - P_0))$$

$$p''(1) = n(n-1)((P_{n-2} - P_{n-1}) - (P_{n-1} - P_n))$$

- **Bezier**曲线在起始点和终止点处的二阶导数分别取决于最开始和最后的三个控制点。

Bezier曲线的性质

- 对称性

  保持控制多边形的顶点位置不变，仅仅把它们的顺序颠倒一下，将下标为k的控制点P_k改为下标为$n-k$的控制点P_{n-k}时，曲线保持不变，只是走向相反而已。

Bezier曲线的性质

- 凸包性

$$BEN_{k,n}(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}\geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}BEN_{k,n}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}=((1-t)+t)^n\equiv 1$$

- **Bezier**曲线各点均落在控制多边形各顶点构成的凸包之中。
- **Bezier**曲线的凸包性保证了曲线随控制点平稳前进而不会振荡。

Bezier曲线的性质

- 几何不变性

指几何特性不随坐标变换而变化的性质。**Beizer**曲线的位置和形状仅与特征多边形的顶点的位置有关，不依赖与坐标系的选择。

- 差变减少性

若**Beizer**曲线**C(t)**的特征多边形是一个平面图形，则平面内的任意直线与**C(t)**的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数，即**Bezer**曲线比其特征多边所在的折线更光滑。

Bezier曲线的生成

- 绘制一段Bezier曲线

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{n} C_n^{k-1} \qquad n \geq k$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k BEN_{k,n}(t)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k BEN_{k,n}(t) \qquad t \in [0, 1]$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k BEN_{k,n}(t)$$

Bezier曲线的生成

- **Bezier曲线的拼接**：如何保证连接处具有G^1和G^2连续性。
  - 在两段三次Bezier曲线间得到G^1连续性

$$p_1'(1)=3(P_3-P_2)$$

$$p_2'(0)=3(Q_1-Q_0)$$

为实现G^1连续，则有：

$$p_2'(0)=\alpha\cdot p_1'(1) \Rightarrow Q_1-Q_0=\alpha\cdot(P_3-P_2)$$

Bezier曲线的生成

- 在两段三次Bezier曲线间得到G^2连续性

$$p_2''(0) = \beta \cdot p_1''(1)$$

$$(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = \beta \cdot (P_1 - 2P_2 + P_3)$$

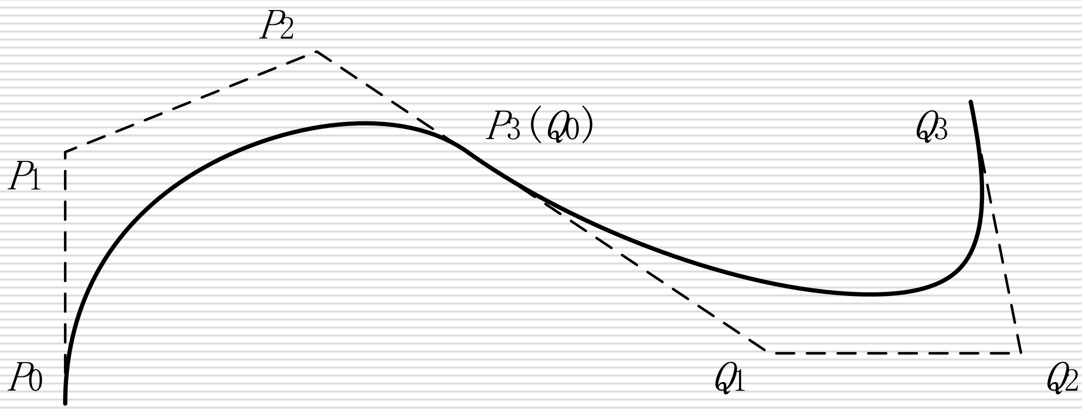


图7.7 两段三次Bezier曲线的连接

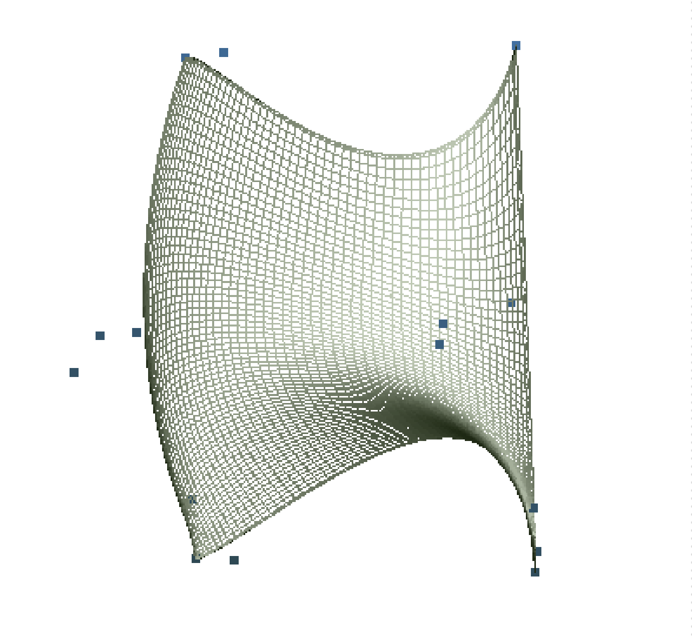
Bezier曲面

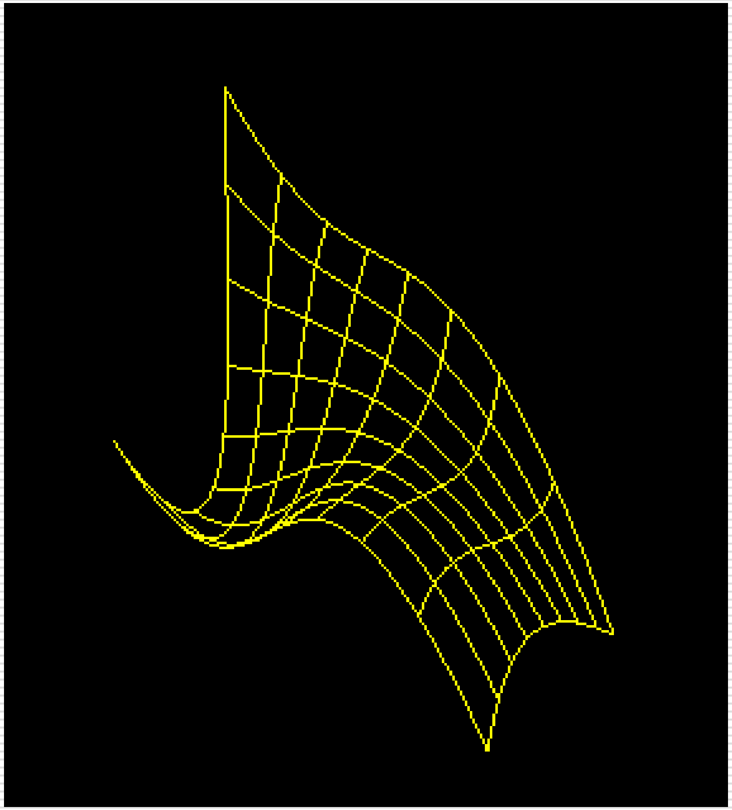
- 定义

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}BEN_{i,m}(u)BEN_{j,n}(v) \quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

$BEN_{i,m}$(u)与$BEN_{j,n}$(v)是Bernstein基函数

Bezier曲面





Bezier曲面

- 双三次Bezier曲面(*m*=*n*=3)

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}P_{i,j}BEN_{i,3}(u)BEN_{j,3}(v)\quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

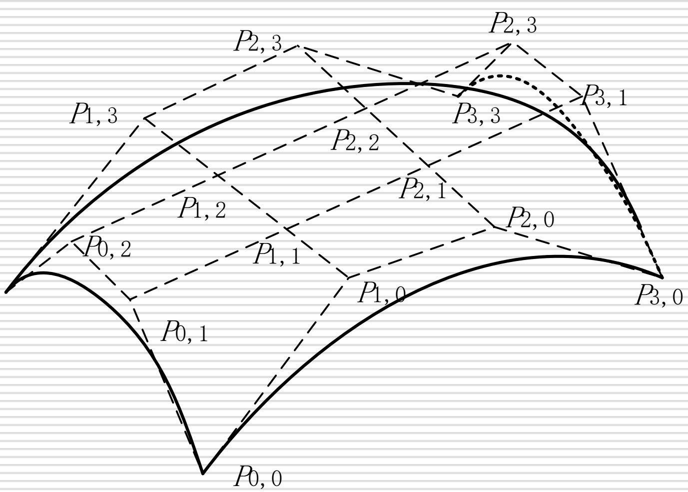


图7.8 双三次Bezier曲面及其控制网格

Bezier曲面

$$p(u,v)=UM_{be}PM_{be}^{T}V^{T}$$

$U=[u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1]$, $\qquad V=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}$

$$M_{be}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3}\\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3}\\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3}\\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3}\end{bmatrix}$$

Bezier曲面的性质

- 控制网格的四个角点正好是**Bezier**曲面的四个角点。
- 控制网格最外一圈顶点定义Bezier曲面的四条边界，这四条边界均为Bezier曲线。
- 几何不变性、对称性、凸包性等。