第2章 数据的表示和运算

主要内容：

（一） 数制与编码

1. 进位计数制及其相互转换
2. 真值和机器数
3. BCD 码
4. 字符与字符串
5. 校验码

（二） 定点数的表示和运算

1. 定点数的表示 ：无符号数的表示；有符号数的表示。
2. 定点数的运算 ：定点数的位移运算；原码定点数的加/减运算；补码定点数的加/减运算；定点数的乘/除运算；溢出概念和判别方法。

（三） 浮点数的表示和运算

1. 浮点数的表示 ：浮点数的表示范围；IEEE754 标准
2. 浮点数的加/减运算

（四） 算术逻辑单元 ALU

1. 串行加法器和并行加法器
2. 算术逻辑单元 ALU 的功能和机构

2.2 定点数的表示和运算

2.2.1 定点数的表示

(1) 无符号数的表示

➢机器字长的全部位数均用来表示数值的大小，相当于数的绝对值。对于字长为n位的无符号数的表示范围为：0 — 2^n-1。

(2) 带符号数的表示

➢带符号数是指在计算机中将数的符号数码化。在计算机中，一般规定二进制的最高位为符号位，最高位为“0”表示该数为正，为“1”表示该数为负。这种在机器中使用符号位也被数码化的数称为机器数。根据符号位和数值位的编码方法不同，机器数分为原码、补码和反码等。

(纯小数) 原码，反码，补码的定义

中华人民共和国成立70周年
1949——2019 大连理工大学 建校70周年

定点小数表示: $N_s\ N_1\ N_2 \cdots N_n$

$$[X]_{原} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ 1 - X = 1 + |X| & -1 < X \le 0 \end{cases}$$

$$[X]_{反} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ (2 - 2^{-n}) - |X| & -1 < X \le 0 \end{cases} \quad \text{Mod}\ (2 - 2^{-n})$$

$$[X]_{补} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ 2 + X = 2 - |X| & -1 \le X \le 0 \end{cases} \quad \text{Mod}\ 2$$

海纳百川 自强不息 厚德笃学 知行合一

(纯小数) 原码的定义与说明

中华人民共和国成立70周年 1949——2019 大连理工大学 建校70周年

定点小数表示: $N_s\ N_1\ N_2 \cdots N_n$

定义: $[X]_{原} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ 1 - X = 1 + |X| & -1 < X \le 0 \end{cases}$

实例: X1 = 0.1011 -0.1011 0.0000

$[X]_{原}$ = 0 1011 1 1011 0 0000

1 0000

说明: 原码是符号位加数的绝对值，符号 0正 1负

原码零有两个编码，+0 和 -0 的编码不同

原码难以用于加减运算，但乘除方便

(纯小数) 反码的定义与说明

定点小数表示: $N_s\ N_1\ N_2 \cdots N_n$

$$\text{定义: } [X]_{反} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ (2 - 2^{-n}) - |X| & -1 < X \le 0 \end{cases} \quad \text{Mod}\ (2 - 2^{-n})$$

实例： X1 = 0.1011　　-0.1011　　0.0000

$[X]_{反}$ = 0 1011　　1 0100　　0 0000

1 1111

结论： 反码负数为符号位跟每位的反, 符号 0正 1负

反码零有二个编码，分 +0 和 -0

反码难以用于算术运算，加减有循环进位问题

(纯小数) 补码的定义与说明

定点小数表示: $N_s\ N_1\ N_2 \cdots N_n$

定义: $[X]_{补} = \begin{cases} X & 0 \le X < 1 \\ 2 + X = 2 - |X| & -1 \le X \le 0 \end{cases}$ MOD 2

实例: X1 = 0.1011 -0.1011 0.0000

$[X]_{补}$ = 0 1011 1 0101 0 0000

说明: 补码最高一位是符号位，符号 0 正 1 负

补码表示为: 2×符号位 + 数的真值

补码零只有一个编码，故能表示 -1（10000）

补码能很好地用于加减（乘除）运算

补码的一些补充说明

中华人民共和国成立70周年 1949——2019 大连理工大学 建校70周年

➢ 得到一个数补码表示的简便办法

当X≥0时，$[X]_{补}$的符号位取 0，数值位取X的各数值位上的值，此时有$[X]_{补} = X$

当X<0时，$[X]_{补}$的符号位取 1，将 X 的**各数值位取反,再在最低位加1**，以得到 $[X]_{补}$的各数值位上的值

(见负数 $[X]_{补}$ 与 $[X]_{反}$ 的关系)

➢ $[X]_{原}$与$[X]_{补}$的相互转换简便方法

从$[X]_{原}$求$[X]_{补}$时，对正数或零，有$[X]_{补}=[X]_{原}$，对负数则符号位不变，**各数值位变反后再在最低位执行加 1** 操作。

由$[X]_{补}$求 $[X]_{原}$时，对负数仍是符号位不变，**各数值位变反后再在最低位执行加 1** 操作。

已知 $[y]_{补}$ 如何简单求 $[-y]_{补}$

中华人民共和国成立70周年
1949——2019 大连理工大学 建校70周年

<I> $[y]_{补} = 0\ y_1 y_2 \cdots y_n$

$[y]_{补}$ 连同符号位在内，每位取反，末位加 1

即得 $[-y]_{补}$

$$[-y]_{补} = 1\ \overline{y_1}\ \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} + 2^{-n}$$

<II> $[y]_{补} = 1\ y_1 y_2 \cdots y_n$

$[y]_{补}$ 连同符号位在内，每位取反，末位加 1

即得 $[-y]_{补}$

$$[-y]_{补} = 0\ \overline{y_1}\ \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} + 2^{-n}$$

海纳百川 自强不息 厚德笃学 知行合一

整数的编码表示

中华人民共和国成立70周年
1949—2019 大连理工大学 建校70周年

➢整数的 原码 反码 补码 表示

与小数的三种表示基本相同

差别仅表现在小数点的位置

可以认为整数的小数点在最低数值位的右侧

➢因此整数的模与整数位数有关

讲课中不大用整数讲 原 反 补 码定义

例如：整数6位编码（1 位符号位，5 位数值位)

X = +01110 ⟶ $[X]_{原}$= 0 01110 $[X]_{补}$= 0 01110

X = - 01110 ⟶ $[X]_{原}$= 1 01110 $[X]_{补}$= 1 10010

海纳百川 自强不息 厚德笃学 知行合一

整数的编码表示

x 为真值　　n 为整数的位数

$$[x]_{原} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^n - x & 0 \geq x > -2^n \end{cases}$$

$$[x]_{反} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ (2^{n+1} - 1) + x & 0 \geq x > -2^n \ (\mathrm{mod}\ 2^{n+1}-1) \end{cases}$$

$$[x]_{补} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^{n+1} + x & 0 \geq x \geq -2^n \ (\mathrm{mod}\ 2^{n+1}) \end{cases}$$

•设机器数字长为 8 位 (含一位符号位)，表示整数时，每个编码分别代表无符号数、原码、补码和反码的真值各为多少？

二进制代码	无符号数 对应的真值	原码对应 的真值	补码对应 的真值	反码对应 的真值
00000000	0	+0	0	+0
00000001	1	+1	+1	+1
00000010	2	+2	+2	+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
01111111	127	+127	+127	+127
10000000	128	-0	-128	-127
10000001	129	-1	-127	-126
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11111101	253	-125	-3	-2
11111110	254	-126	-2	-1
11111111	255	-127	-1	-0

原、反、补码表示小结

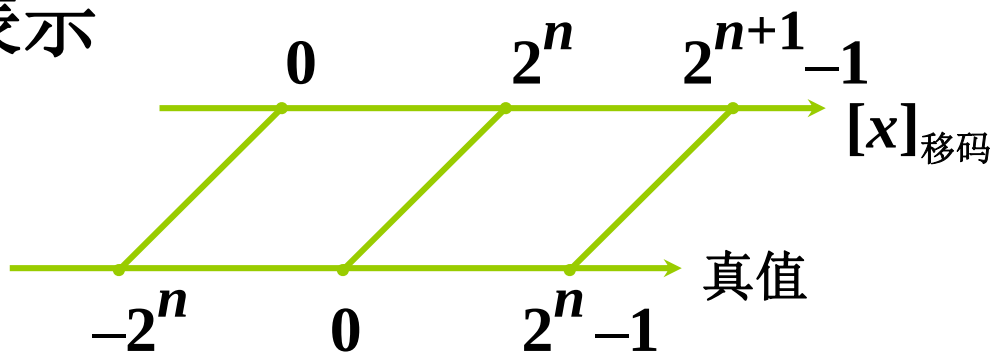
- 正数的 原码、反码、补码表示均相同，符号位为 0，数值位同数的真值。
- 零的原码和反码均有 2个编码，补码只 1个码
- 负数的 原码、反码、补码表示均不同，
  符号位为 1，数值位：原码为数的绝对值
  反码为每一位均取反码
  补码为反码再在最低位+1
- 由 $[X]_{补}$ 求 $[-X]_{补}$：每一位取反后再在最低位+1

整数的移码表示 (用于浮点数阶码)

移码定义　　x 为真值，n 为 整数的位数

$$[x]_{移} = 2^n + x \quad (2^n > x \geq -2^n)$$

移码在数轴上的表示



例如：

$x = 10100$　　$[x]_{移} = 2^5 + 10100 = 100000 + 10100 = 110100$

$x = -10100$　　$[x]_{移} = 2^5 - 10100 = 100000 - 10100 = 001100$

真值、补码和移码的对照表

真值 x (n=5)	$[x]_{补}$	$[x]_{移}$	$[x]_{移}$对应的十进制整数
-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
- 1 1 1 1	1 0 0 0 1	0 0 0 0 1	1
- 1 1 1 0	1 0 0 1 0	0 0 0 1 0	2
⋮	⋮	⋮	⋮
- 0 0 0 1	1 1 1 1 1	0 1 1 1 1	31
± 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	32
+ 0 0 0 1	0 0 0 0 1	1 0 0 0 1	33
+ 0 0 1 0	0 0 0 1 0	1 0 0 1 0	34
⋮	⋮	⋮	⋮
+ 1 1 1 0	0 1 1 1 0	1 1 1 1 0	62
+ 1 1 1 1	0 1 1 1 1	1 1 1 1 1	63

2.2.2 定点数的运算

（1）定点数的移位运算

- 移位是一种常用的操作，例如，在乘法中需要左移，在除法中需要右移，在代码处理中也经常需要移位操作。
- 移位可分为算术移位和逻辑移位，有左移和右移之分。可以对寄存器或存储单元中的数据进行移位。一次可以只移一位，也可以按指令中规定的次数移若干位。

① 算术移位：移位的对象是数值型数据，在移位后会发生数值大小的变化。

- 对于二进制数，左移，绝对值扩大；右移，绝对值缩小。
- 算术移位规则：符号位不变

② 逻辑移位：包括逻辑左移、逻辑右移、循环左移和循环右移等。逻辑移位使代码序列进行循环移位或非循环移位，参与移位的对象被视为纯逻辑意义上的代码组合，逻辑移位只是使数码位置发生变化，没有正、负性质，也没有数值大小问题。

③ 算术移位和逻辑移位的区别：

- 算术移位：有符号数移位
- 逻辑移位：无符号数移位

【例】 选择题：数据每左移1 位相当于原数乘以2 ， 为防止左移操作造成溢出，补码左移的前提条件是其原最高有效位（ ）。

(当运算结果超出机器数所能表示的范围时，称为溢出。)

A．为0　　B．为1

C．与原符号位相同　　D．与原符号位相异

【分析】当最高有效位和符号位不一致时，如果左移1 位，将会发生溢出。

【归纳总结】算术移位是带符号数的移位，移位前后符号位不应该发生变化。如果最高有效位和符号位不一致，则左移1 位，符号位将发生变化。

答案： C

【例】已知[X/2]补=C6H，计算机的字长为8位二进制编码，[X]补=?

解： [X]补= [X/2]补×2 ，

C6H=11000110B，左移1位变成10001100B=8CH

[X]补=8CH

（2）原码定点数的加/减运算

- 对原码表示的两个操作数进行加减运算时，计算机的实际操作是加还是减，不仅取决指令中的操作码，还取决于两个操作数的符号。而且运算结果的符号判断也较复杂。

  - 例如，加法指令指示做（+X）+（-Y），由于一操作数为负，实际操作是做减法（+X）-（+Y），结果符号与绝对值大的符号相同。同理，在减法指令中指示做（+X）-（-Y），实际操作做加法（+X）+（+Y），结果与被减数符号相同。

- 由于原码加减法比较繁琐，相应地需要由复杂的硬件逻辑才能实现，因此在计算机中很少被采用。

（3）补码定点数的加/减运算

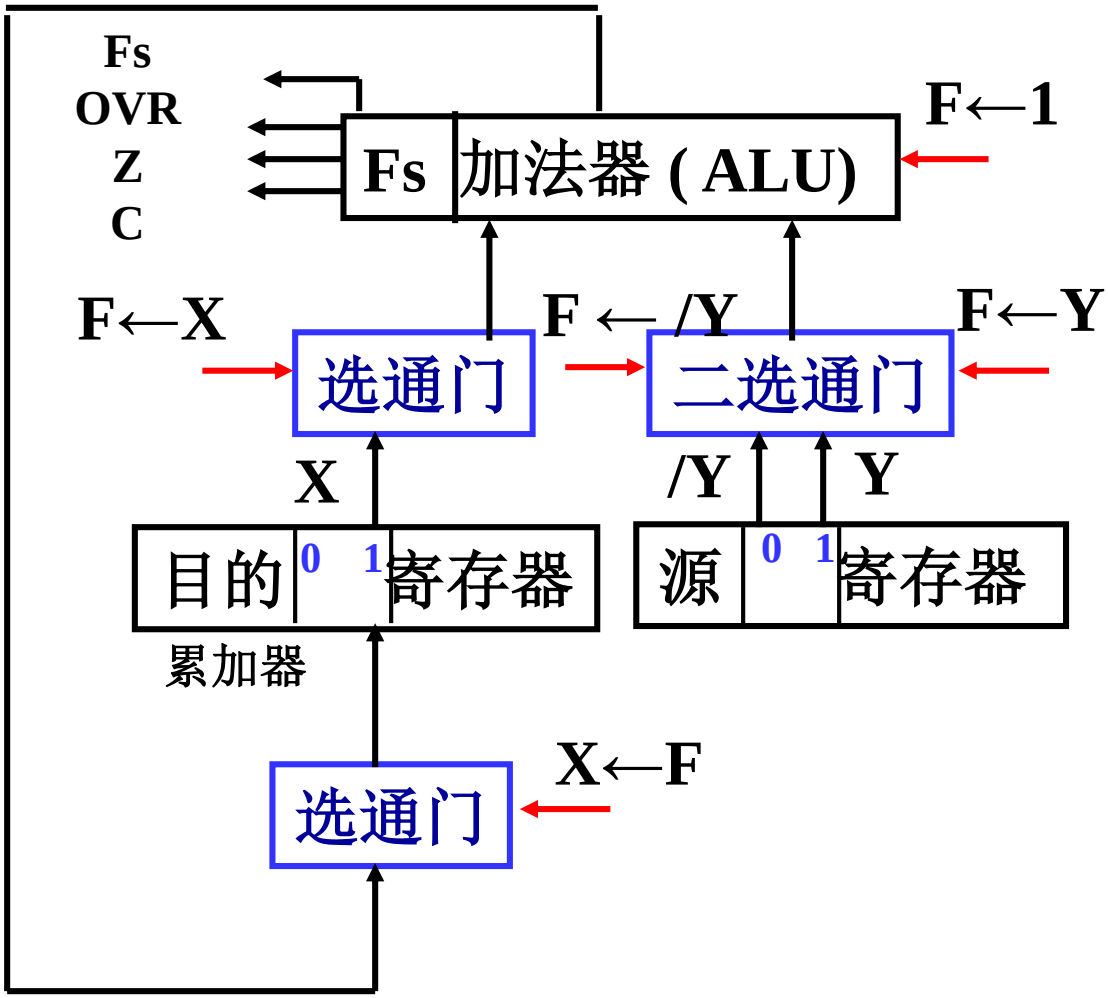
① 加法

- 整数 $[X+Y]_{补}=[X]_{补}+[Y]_{补}$ （mod 2^{n+1}）
- 小数 $[X+Y]_{补}=[X]_{补}+[Y]_{补}$ （mod 2）

② 减法

- 整数 $[X-Y]_{补}=[X+(-Y)]_{补}=[X]_{补}+[-Y]_{补}$ （mod 2^{n+1}）
- 小数 $[X-Y]_{补}=[X+(-Y)]_{补}=[X]_{补}+[-Y]_{补}$ （mod 2）
- 无需符号判定，数值位连同符号位一起相加，符号位产生的进位自然丢掉。
- 关键是由$[Y]_{补}$ 求$[-Y]_{补}$，$[-Y]_{补}$= 对 $[Y]_{补}$ 逐位取反再在最低位加 1。（包括符号位）

实现补码加减运算的逻辑电路



加

F ← X
F ← Y
X ← F

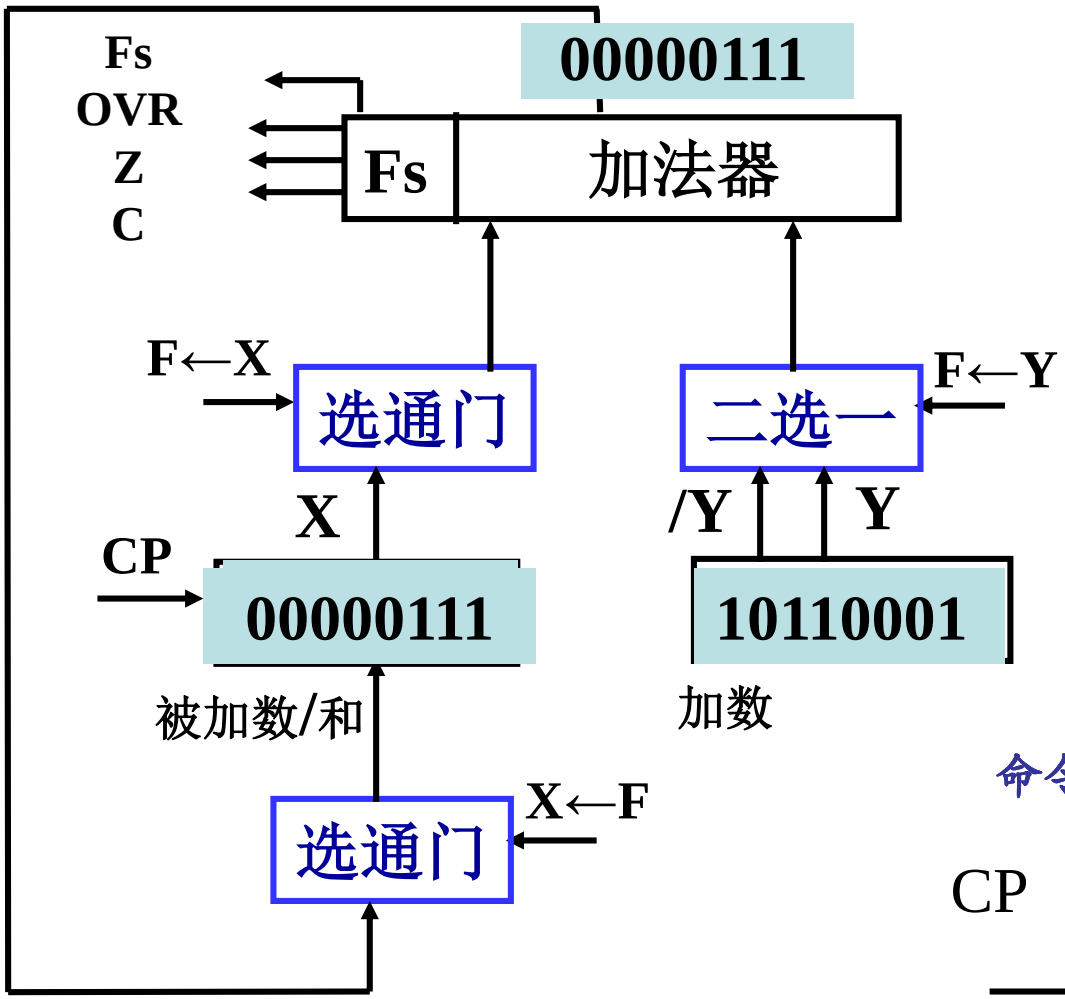
X ← X+Y

X ← X-Y

减

F ← X
F ← /Y
F ← 1
X ← F

实现补码加运算的执行过程



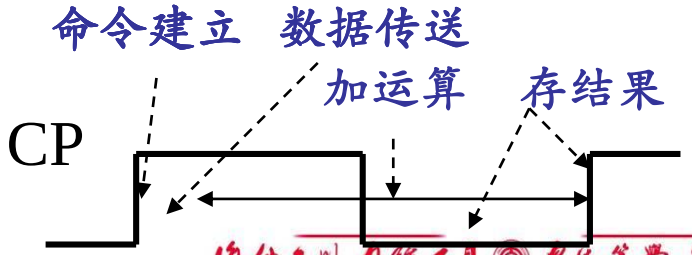
X ← X+Y

完成加运算，需要把被加数和加数送ALU的输入端，运算结果要接收到累加器，需要给出命令：

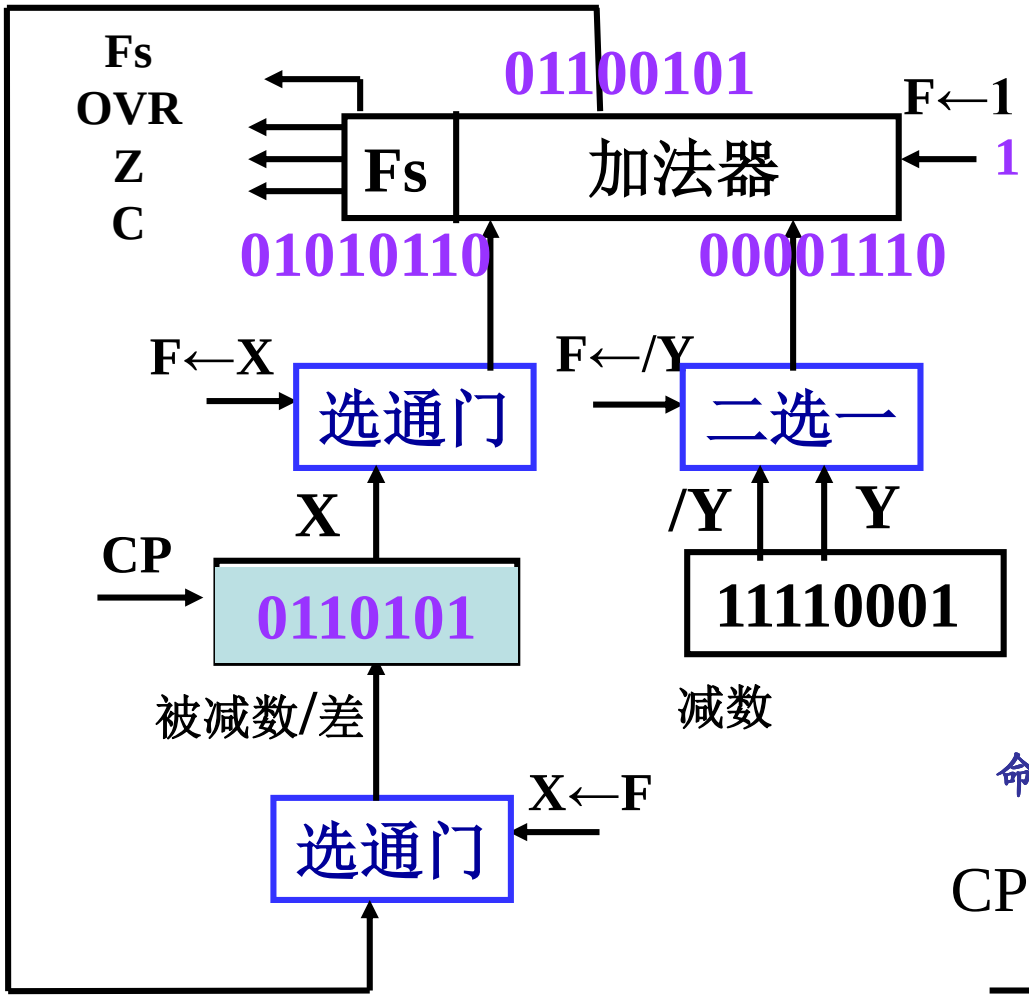
F ← X

F ← Y

X ← F



实现补码减运算的逻辑电路



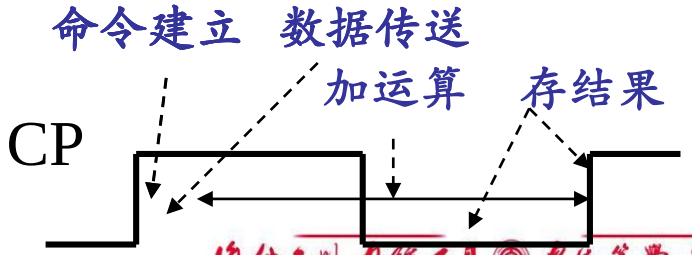
$X \leftarrow X - Y$

完成减运算，需要把被减数和减数送ALU的输入端，运算结果要接收到累加器，需要给出命令：

$F \leftarrow X$

$F \leftarrow /Y$，$F \leftarrow 1$

$X \leftarrow F$



（4）溢出概念和判别方法

- 当运算结果超出机器数所能表示的范围时，称为溢出。两个异号数相加或两个同号数相减，其结果是不会溢出的。仅当两个同号数相加或者两个异号数相减时，才有可能发生溢出，一旦溢出，运算结果就不正确了，因此必须将溢出的情况检查出来。判别方法有三种：

① 当符号相同的两数相加时，如果结果的符号与加数（或被加数）不相同，则为溢出。

② 当任意符号两数相加时，如果**C=Cf**，运算结果正确，其中**C**为数值最高位的进位，**Cf**为符号位的进位。如果**C≠Cf**，则为溢出，所以溢出条件=**C⊕Cf** 。

③ 采用双符号**fs2fs1**，正数的双符号位为**00**，负数的双符号位为**11**。符号位参与运算，当结果的两个符号位不相同时为溢出。所以溢出条件= **fs2⊕fs1**。

补码加减法溢出判断

- 方法之一：

  单符号位，正 + 正 得负　或　负 + 负 得正

- 方法之二：

  数值位有向符号位的进位，但符号位不产生向更高位的进位，数值位没有向符号位的进位，但符号位产生向更高位的进位

- 方法之三：

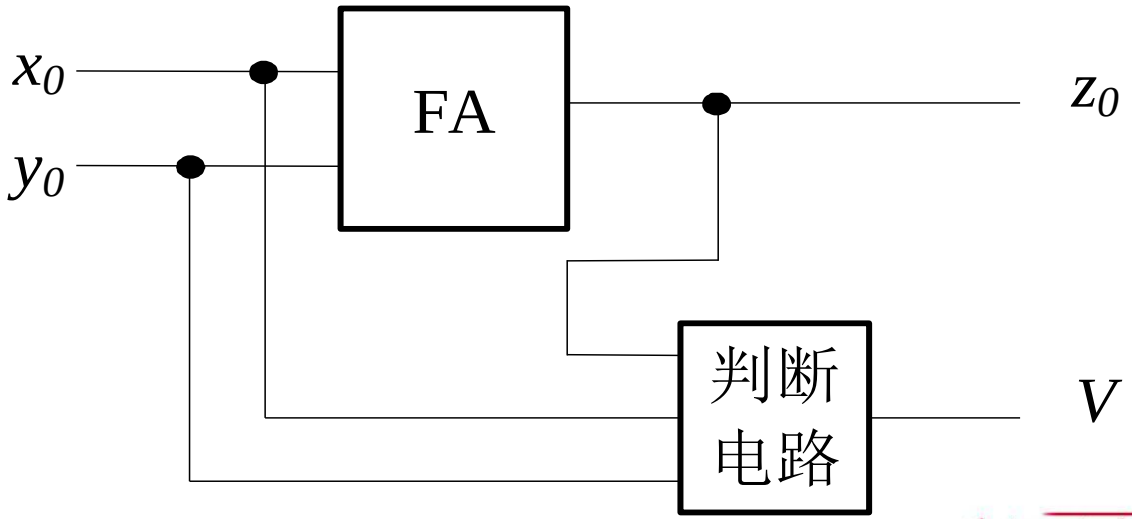
  双符号位的结果为 01 或 10，最高符号位 代表其 真正的符号

单符号位判断

正加正得负或负加负得正表明溢出

$$V = x_0\ y_0\ \overline{z_0} + \overline{x_0}\ \overline{y_0}\ z_0$$

判断电路



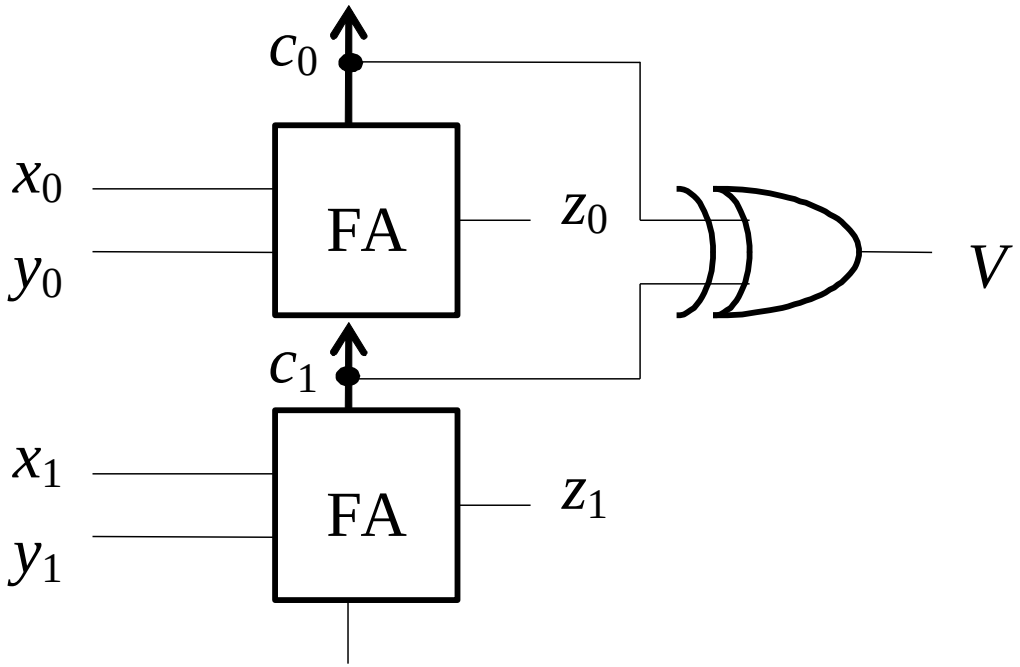
符号位与最高数值位判断

数值位向符号位有进位但符号位无进位输出或

数值位向符号位没有进位但符号位本身有进位输出是溢出

$$V = C_0 \overline{C_1} + \overline{C_0} C_1$$

判断电路

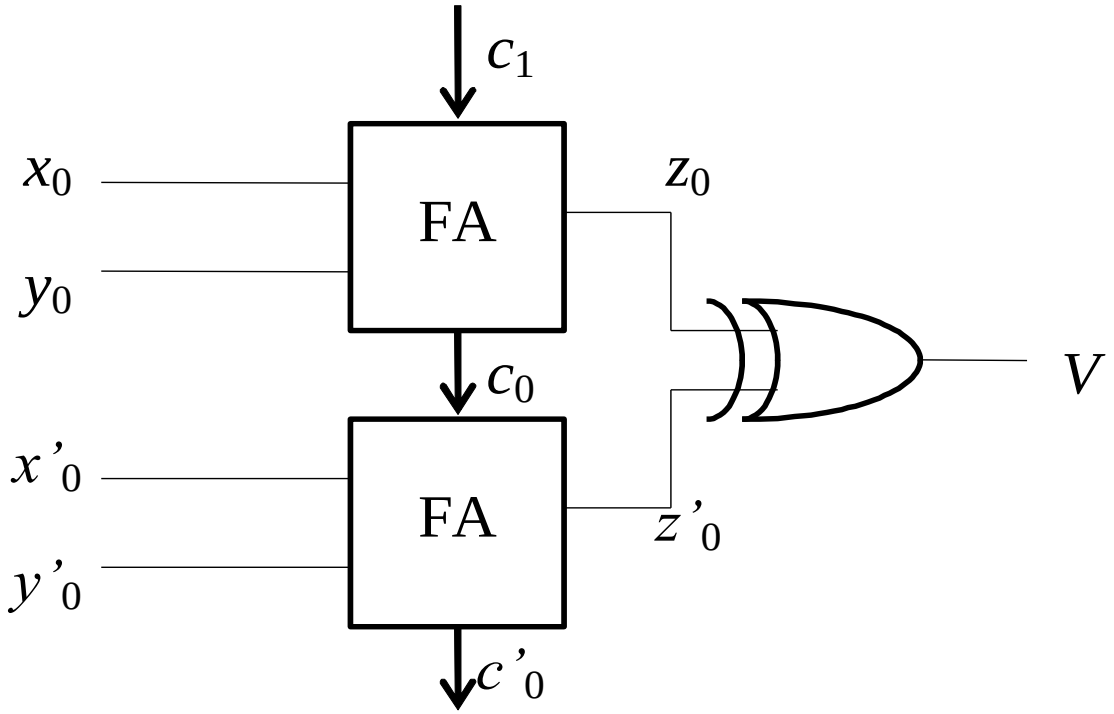


双符号位判断

$$V = z_0' \overline{z_0} + \overline{z'_0}\, z_0 = z_0' \oplus z_0$$

运算结果的2个符号位的值不相同表明有溢出

判断电路



补码加减法运算实例

判断溢出的3套方案是一个事实的3种不同的表述

X = 0.1011　　y = -0.0101

$[X]_{补}$ = 00 1011,　$[Y]_{补}$ = 11 1011　　补码

$[-Y]_{补}$ = 00 0101

```
  00 1011
+ 11 1011
-----------
  100 0110
```

X+Y (不溢出)

正数加负数不会溢出

符号位和数值位都产生进位

双符号位结果相同不是溢出

```
  00 1011
+ 00 0101
-----------
  01 0000
```

X-Y (溢出)

正数加正数结果为负是溢出

数值位有进位符号位无进位是溢出

双符号位结果不相同是溢出

真题解析

单选题：（2009年）一个 C 语言机器在一台32位机器上运行。程序中定义了三个变量 x,y和z，其中x和z是int型，y 为 short型。当 x = 127,y = -9 时，执行赋值语句 z = x+y 后，x,y和z的值分别是（ ）。

A. x = 0000007FH, y = FFF9H, z = 00000076H

B. x = 0000007FH, y = FFF9H, z = FFFF0076H

C. x = 0000007FH, y = FFF7H, z = FFFF0076H

D. x = 0000007FH, y = FFF7H, z = 00000076H

分析： short型数据为16位；int型为32位（从选择项中也可知）。

对于y=-9，在机器中用补码表示为FFF7H（关键），计算

z=x+y=0000007FH+FFFFFFF7H（符号扩展为32位）= 00000076H

技巧：可用排除法，得到 =-9的补码为FFF7H 可排除A和B，再由127+（-9）=118可知z为正数，即可排除C，再验证D中z=76H=118，确认选D。

考查知识点： 16 进制负数的补码表示，符号扩展，补码运算。

答案： D

P47 二.4 题

(5) 舍入处理

- 对于 固定字长的数，右移将舍去低位部分。

- 两种常用的舍入规则：

  - **0舍1入法：**

  - **末位恒置1法：**

（6）定点数的乘/除运算

■ 定点乘法运算

- 原码一位乘法 ：两个原码数相乘，其乘积的符号为相乘两数的异或值，数值为两数绝对值之积。

- 定点补码一位乘法：有的机器为方便加减法运算，数据以补码形式存放。校正法和比较法

✓校正法：乘法直接用补码进行，以减少转换次数。具体规则如下：

$$[X\times Y]_{补}=[X]_{补}\times(\ 0.\ \ Y1Y2\cdots\ Yn\ )+[-X]_{补}Y0$$

当Y为负时，求$[X\times Y]_{补}$，需要用$[X]_{补}$乘上$[Y]_{补}$的数值位，再加上$[-X]_{补}$

该算法需要区分乘数的符号，不方便。

✓比较法—布斯（Booth）法：用相邻两位乘数比较的结果决定加[X]补、 [－X]补或0。

布斯公式：在乘数Y_n后添加Y_{n+1}=0。按照Y_{n+1}，Y_n相邻两位的三种情况，其运算规则如下：

Y_{n+1} Y_n =00或11，部分积加0，右移1位;

Y_{n+1} Y_n =10，部分积加[X]补，右移1位;

Y_{n+1} Y_n =01，部分积加[－X]补，右移1位

最后一步不移位。

原码乘运算-手算方案

$[X^*Y]_{原} = (X_S \oplus Y_S)(|X| * |Y|)$

符号异或，
绝对值相乘

例如： X = 0.1101　　Y = 0.1011

```
    0.1101
  * 0.1011
  ---------
      1101
     1101
    0000
   1101
  ---------
  0.10001111
```

手工运算过程

最终乘积原码表示：
0 1 0 0 0 1 1 1 1

该方案用于计算机会有问题：

1. 加法器只有两个数据输入端
2. 加法器与乘运算数据位数相同
3. 如何判断乘数每一位是 0 或者 1

解决方案：

1. 每次求出部分积,不是一次总累加
2. 变每次左移被乘数为右移部分积，移出的部分保存起来
3. 乘数放到一个移位寄存器中，用最低的一位来控制相加数（取被乘数或0）。

原码一位乘法

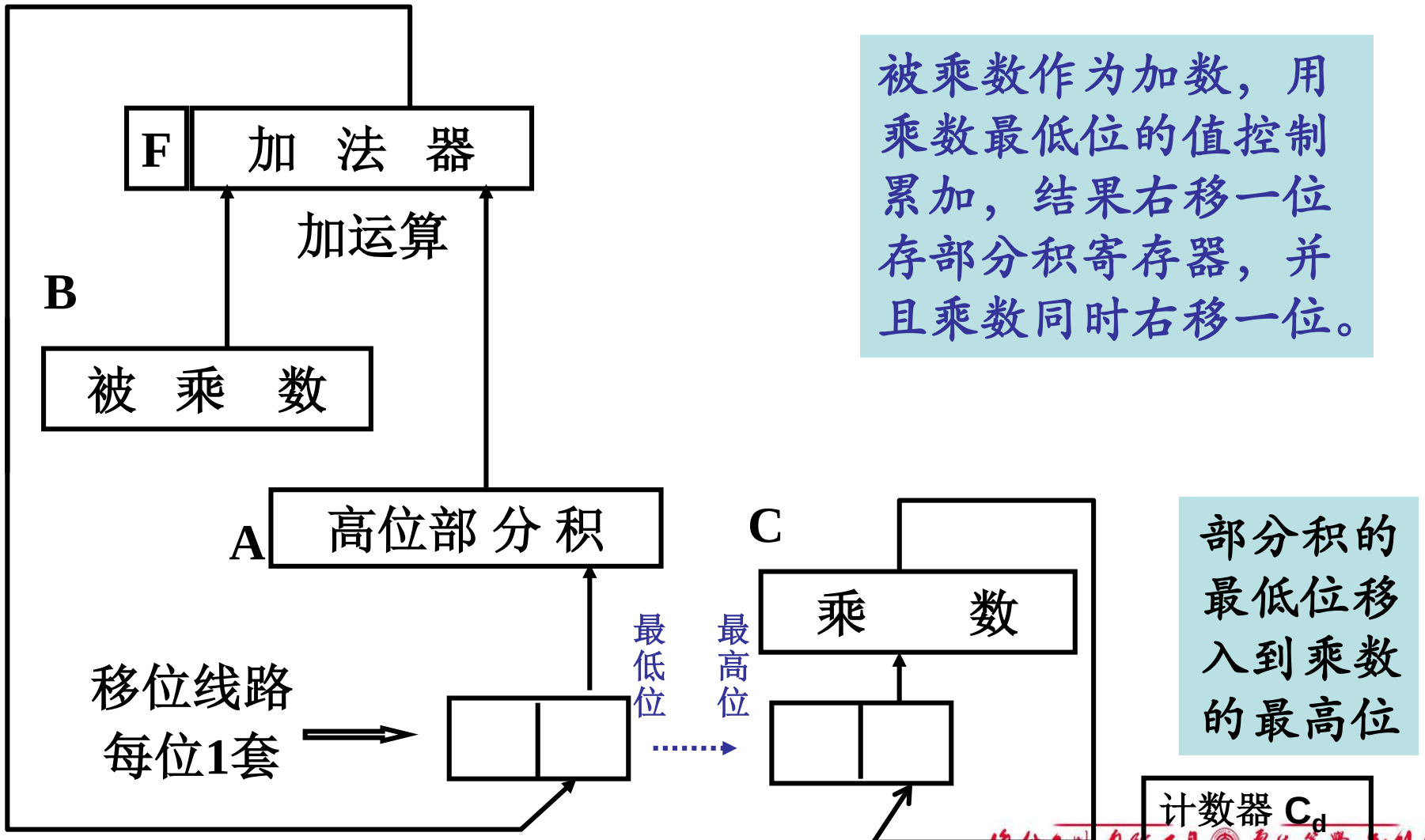
- 涉及三个寄存器：A寄存器初始为零，作为初始部分积；B寄存器，用来存放被乘数；C寄存器，用来存放乘数。

- 实现部分积与被乘数相加是在ALU中完成的。

原码一位乘运算规则

① 操作数、结果用原码表示
② 绝对值运算，符号单独处理
③ 被乘数(B)、部分积(A)取双符号位
④ 乘数末位(Cn)为判断位，其状态决定下步操作
⑤ 作n次循环（累加、右移）

实现原码一位乘法的逻辑线路图



被乘数作为加数，用乘数最低位的值控制累加，结果右移一位存部分积寄存器，并且乘数同时右移一位。

部分积的最低位移入到乘数的最高位

原码一位乘法

- 乘法开始时，A寄存器被清为零，作为初始部分积。被乘数放在B寄存器中，乘数放在C寄存器中。实现部分积与被乘数相加是在ALU中完成的。
- 每步运算，部分积最低一位的值将右移入C寄存器的最高数值位，使相乘之积的低位部分保存进C寄存器中，原来的乘数在逐位右移过程中丢失掉。寄存器A最终存放为乘积的高n位，寄存器C最终存放乘积的低n位。
- 另外还需要一个计数器C_d用来控制逐位相乘的次数，它的初值存放为乘数的位数值，在计算的过程中每完成一位乘计算就执行减1操作，待计数到0时，给出结束乘运算的控制信号。

原码一位乘运算规则

① 操作数、结果用原码表示

② 绝对值运算，符号单独处理

③ 被乘数(B)、部分积(A)取双符号位

④ 乘数末位(Cn)为判断位，其状态决定下步操作

⑤ 作n次循环（累加、右移）

特点

- 绝对值运算；
- 用移位的次数判断乘法是否结束；
- 逻辑移位。

原码一位乘运算规则推导

以小数为例

设$[x]_{原} = x_0.x_1x_2 \quad \cdots \quad x_n$

$[y]_{原} = y_0.y_1y_2 \quad \cdots \quad y_n$

$[x \cdot y]_{原} = (x_0 \oplus y_0).(0.x_1x_2 \cdots x_n)(0.y_1y_2 \cdots y_n)$

$= (x_0 \oplus y_0).\ x^*y^*$

式中 $x^* = 0.x_1x_2 \cdots x_n$ 为 x 的绝对值

$y^* = 0.y_1y_2 \cdots y_n$ 为 y 的绝对值

乘积的符号位单独处理 $x_0 \oplus y_0$

数值部分为绝对值相乘 $x^* \cdot y^*$

原码一位乘运算过程举例

中华人民共和国成立70周年 1949——2019 大连理工大学 建校70周年

X = 0.1101　　Y = 0.0011

高位部分积	低位部分积/乘数	说明
00 0000	0 0 1 1	起始情况
+ 00 1101		乘数最低位为 1，加 X
00 1101		
00 0110	1 0 0 1 1（丢失）	右移部分积和乘数
+ 00 1101		乘数最低位为 1，加 X
01 0011		
00 1001	1 1 0 0 1（丢失）	右移部分积和乘数
+ 00 0000		乘数最低位为 0，加 0
00 1001		
00 0100	1 1 1 0 0（丢失）	右移部分积和乘数
+ 00 0000		乘数最低位为 0，加 0
00 0100		
00 0010	0 1 1 1 0（丢失）	右移部分积和乘数

【例】设X=0.8125,Y=0.6875,用原码1位乘的方法，求X×Y。 其中寄存器B=X ,计数器Cd=4。计算过程:

$[X]_{原}$=0.1101,
$[Y]_{原}$=0.1011,

	部分积 A	乘数 C	
	0 0 0 0 0	1 0 1 1	
+x	0 0 1 1 0 1		
	0 0 1 1 0 1		
右移一位→	0 0 0 1 1 0	1 1 0 1	1(丢失)
+x	0 0 1 1 0 1		
	0 1 0 0 1 1		
右移一位→	0 0 1 0 0 1	1 1 1 0	1(丢失)
+0	0 0 0 0 0		
	0 0 1 0 0 1		
右移一位→	0 0 0 1 0 0	1 1 1 1	0(丢失)
+x	0 0 1 1 0 1		
	0 1 0 0 0 1		
右移一位→	0 0 1 0 0 0	1 1 1 1	1(丢失)
	乘积高位	乘积低位	

符号位：

$x0 \oplus y0=0$

$X \cdot Y=0.10001111$

原码一位乘运算规则

中华人民共和国成立70周年 1949——2019 大连理工大学 建校70周年

① 操作数、结果用原码表示

② 绝对值运算，符号单独处理

③ 被乘数(B)、部分积(A)取双符号位

④ 乘数末位(Cn)为判断位，其状态决定下步操作

⑤ 作n次循环（累加、右移）

特点

绝对值运算

用移位的次数判断乘法是否结束

逻辑移位

原码一位分步乘法

每次将一位乘数所对应的部分积与原部分积的累加和相加，并移位。

硬件：设置3个寄存器（具有右移位功能）：

A：存放部分积累加和、乘积高位

B：存放被乘数

C：存放乘数、乘积低位

一个全加器

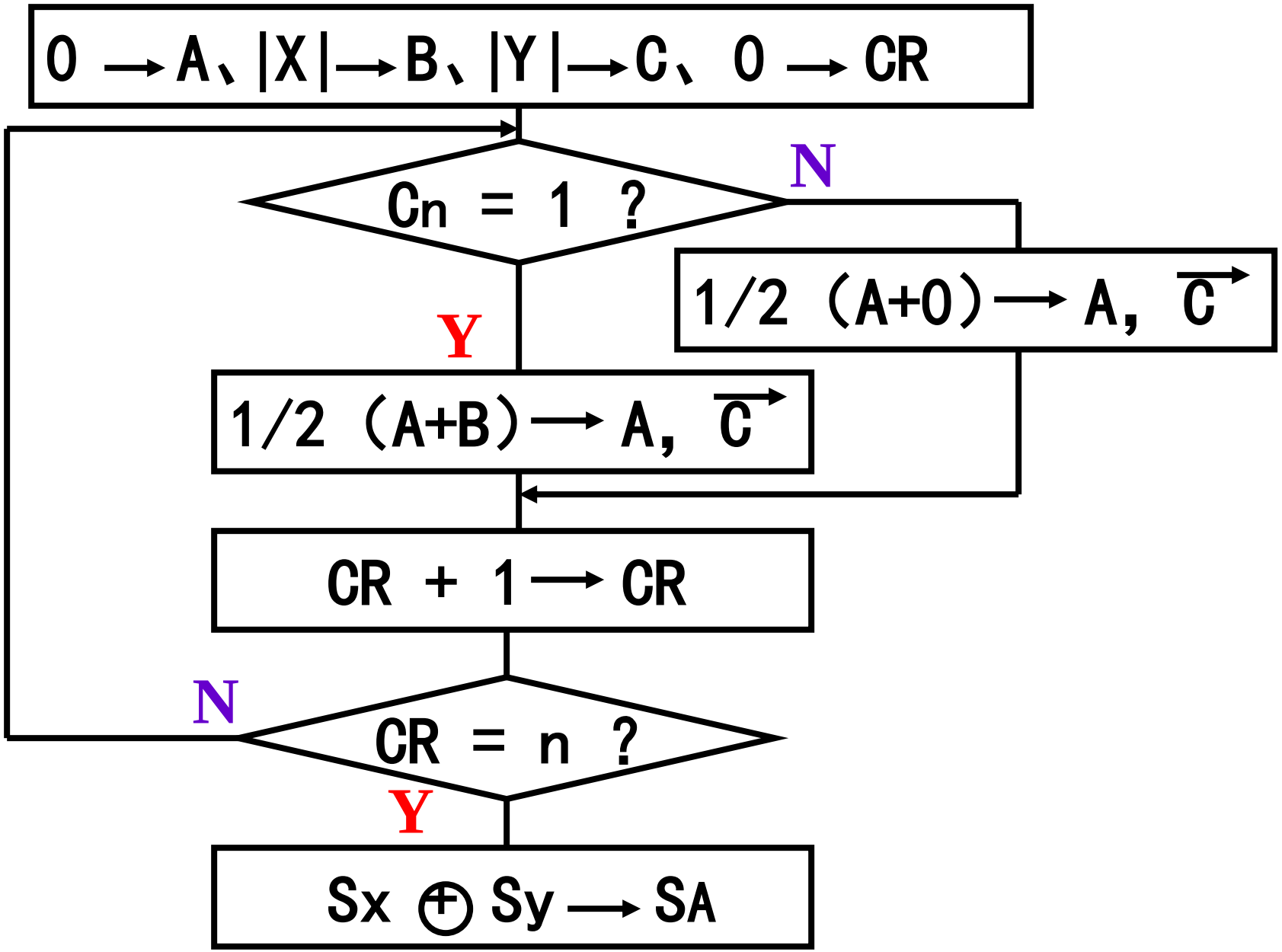
设置初值：

A = 00.0000

B = |X| = 00.1101

C = |Y| = .1011

算法流程



定点补码一位乘法

- 原码乘法存在的缺点是符号位需要单独运算，并要在最后给乘积冠以正确的符号。
- 补码乘法是指采用操作数的补码进行乘法运算，最后乘积仍为补码，能自然得到乘积的正确符号。

算法分析:校正法

$X_{补} = X_0.X_1X_2\cdots\cdots X_n$

① Y为正：$Y_{补} = 0.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n$

$$(XY)_{补} = X_{补} + (0.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n)$$

② Y为负：$Y_{补} = 1.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n$

由$Y = -Y_0 + 0.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n$，得

$$(XY)_{补} = X_{补} + (0.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n) + (-X)_{补}$$

③ Y符号任意：

$$(XY)_{补} = X_{补} + (0.Y_1Y_2\cdots\cdots Y_n) + (-X)_{补} \quad Y_0$$

符号位

算法分析:校正法

$X_{补} = X_0.X_1X_2\ldots\ldots X_n$

校正法的过程是先按原码乘法那样直接乘，最后再根据乘数符号进行校正。

其算法规则如下：不管被乘数$X_{补}$的符号如何，只要乘数$Y_{补}$为正，则可像原码乘法一样进行运算，其结果不需校正。如果乘数$Y_{补}$为负，则先按原码乘法运算，结果再加上一个校正量$-X_{补}$。

③ Y符号任意：

$$(XY)_{补} = X_{补}(0.Y_1Y_2\ldots\ldots Y_n) + (-X)_{补}Y_0$$

符号位

比较法算法 （Booth算法）：

Yi（高位）	Yi+1（低位）	操作（A补为部分积累加和）
0	0	1/2A补
0	1	1/2（A补+X补）
1	0	1/2（A补−X补）
1	1	1/2A补

比较法— Booth算法：用相邻两位乘数比较的结果决定 +X补、−X补或+0。

Booth算法运算规则

①部分积A、被乘数B取双符号位，符号位参加运算；

② 乘数C取单符号位，符号参加移位，以决定最后是否修正；

③ C末位设置附加位Cn+1，初值为0，CnCn+1组成判断位，决定运算操作，作n步循环；

④ 第n+1，仅修正，不移位。

注意，最后一步不移位，因为这一步是用来处理符号位的。

【例】X=-0.1101，Y=0.1011，求[XY]补。

初值：A=00.0000，B=X补=11.0011，

-B=[-X]补=00.1101，C =[Y]补=0.1011

计算过程：

A=00.0000,
B =[X]补=11.0011,
-B=[-X]补=00.1101,
C =[Y]补=0.1011

	部分积	乘数Y Yi Yi+1	说明
	0 0 0 0 0 0	0. 1 0 1 1 0	初始值,最后一位补0
+	0 0 1 1 0 1		Y4Y5=10 +[-X]补
	0 0 1 1 0 1		
→	0 0 0 1 1 0	1 0 1 0 1 1	右移一位
+	0 0 0 0 0 0		Y3Y4=11 +0
	0 0 0 1 1 0		
→	0 0 0 0 1 1	0 1 0 1 0 1	右移一位
+	1 1 0 0 1 1		Y2Y3=01 +[X]补
	1 1 0 1 1 0		
→	1 1 1 0 1 1	0 0 1 0 1 0	右移一位
+	0 0 1 1 0 1		Y1Y2=10 +[-X]补
	0 0 1 0 0 0		
→	0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 0 1	右移一位
+	1 1 0 0 1 1		Y0Y1=01 +[X]补
	1 1 0 1 1 1	0 0 0 1	不移位
	乘积高位	乘积低位	

[XY]补=1.01110001, XY= - 0.10001111

定点除法运算

- 定点原码一位除法

✓ 恢复余数法：被除数（余数）减去除数，如果为0或者为正值时，上商为1，不恢复余数；如果结果为负，上商为0，再将除数加到余数中，恢复余数。余数左移1位。

✓ 加减交替法：当余数为正时，商上1，求下一位商的办法，余数左移一位，再减去除数；当余数为负时，商上0，求下一位商的办法，余数左移一位，再加上除数。

- 定点补码一位除法（加减交替法）

✓ 如果被除数与除数同号，用被除数减去除数；若两数异号，被除数加上除数。如果所得余数与除数同号商上1，否则，商上0，该商为结果的符号位。

✓ 求商的数值部分。如果上次商上1，将除数左移一位后减去除数；如果上次商上0，将余数左移一位后加除数。然后判断本次操作后的余数，如果余数与除数同号商上1，如果余数与除数异号商上0。如此重复执行n-1次（设数值部分n位）。

✓ 商的最后一位一般采用恒置1的办法，并省略了最低+1的操作。此时最大的误差为2^{-n}。

【例】设被除数X=0.1011, Y=0.1101, 用原码加减交替法求X/Y=?

中华人民共和国成立70周年 1949——2019 大连理工大学 建校70周年

解：设置寄存器：

A寄存器中开始时存放被除数的绝对值，以后将存放各次余数，取双符号位。

B寄存器存放除数的绝对值，取双符号位。

C寄存器同来存放商，取单符号位。

加减交替法处理思想：先减后判，如减后发现不够减，则在下一步改作加除数操作。要点：

- ✓ 被除数|X|<除数|Y|，取原码尾数的绝对值相除，符号位单独处理，商的符号为相除两数符号的异或。
- ✓ 被除数的位数要扩展成除数位数n的两倍(2n位)，其低位的数值部分开始时放在商寄存器中。在具体运算中，放被除数和商的A、C寄存器同时移位，并将商寄存器C中最高位移到被除数寄存器A的最低位中。

$[|Y|]_{补}$=00.1101, $[-|Y|]_{补}$=11.0011

计算过程:

	被除数(余数R)	（被除数)(商）	操作说明
	00 1011	0 0 0 0 0	开始情形
+)	11 0011		+[-Y]补
	11 1110	0 0 0 0 0	不够减,商上0
	11 1100	0 0 0 0 0	左移
+)	00 1101		+Y
	00 1001	0 0 0 0 1	够减,商上1
	01 0010	0 0 0 1 0	左移
+)	11 0011		+[-Y]补
	00 0101	0 0 0 1 1	够减,商上1
	00 1010	0 0 1 1 0	左移
+)	11 0011		+[-Y]补
	11 1101	0 0 1 1 0	不够减,商上0
	11 1010	0 1 1 0 0	左移
+)	00 1101		+Y
	00 0111	0 1 1 0 1	够减,商上1
	余数	商	

商

X/Y=0.1101,

余数

R=0.0111