
RÉPUBLIQUE DU BÉNIN

Université Nationale
des Sciences
Technologies Ingénierie
et Mathématiques
(UNSTIM) Abomey



Ecole Nationale
Supérieure de Génie
Mathématique et
Modélisation(ENSGMM)



Résolution numérique

Résolution par éléments finis des problèmes aux limites elliptiques 1D

Réalisé par :

Christophe
VODOUNOU

Supervisé par :

Dr. Jamal ADETOLA

31 mars 2025

Table des matières

1	Introduction	3
2	Problèmes aux limites elliptique	3
2.1	Forme générale d'une EDP elliptique	3
2.2	Forme générale d'un problème aux limites elliptique en une dimension	3
2.3	Formulation variationnelle	4
2.4	Existence et unicité de la solution	6
2.5	Discrétisation et détermination des matrices	9
2.5.1	Discrétisation	9
2.5.2	Détermination des matrices de masse et de rigidité	10
3	Application	12
3.1	Application 1 : Conduction thermique stationnaire dans une barre métallique	12
3.1.1	Contexte physique	12
3.1.2	Modélisation mathématique	13
3.1.3	Résolution analytique	13
3.1.4	Résolution numérique : Par éléments finis	14
3.2	Application 2 : Oscillations acoustiques stationnaires dans un tuyau . . .	17
3.2.1	Contexte physique	17
3.2.2	Modélisation mathématique	17
3.2.3	Résolution analytique	18
3.2.4	Résolution numérique	19

1 Introduction

En science de l'ingénieur, la plupart des problèmes de modélisation que nous rencontrons se ramènent sous forme d'équations aux dérivées partielles. Ce domaine étant incontournable de nos jours et étant en quête permanente de nouvelles méthodes de résolutions de ces équations différentielles, c'est à cet effet la méthode des éléments finis s'affirme comme une méthode redoutable avec une précision extrêmement considérable. On peut même tenter de se dire que la méthode des éléments finis est la meilleure des méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles. Ainsi, dans ce document, nous allons explorer l'approximation des équations aux dérivées partielles elliptiques en une dimension par cette dernière.

2 Problèmes aux limites elliptique

Dans cette section nous introduirons quelques notions élémentaires sur les problèmes aux limites elliptiques en dimension 1 et aborder par la suite son approximations par la méthodes des éléments finis.

2.1 Forme générale d'une EDP elliptique

Les équations aux dérivées partielles de type elliptique en une dimension peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0(x)u(x) = f(x) \quad (2.1)$$

2.2 Forme générale d'un problème aux limites elliptique en une dimension

Ici on va être rigoureux en faisant une nuance stricte entre EDP elliptique et problème aux limites elliptique. Un problème aux limites elliptique va au-delà d'une équation elliptique en ce sens qu'il inclut d'abord l'équation elliptique mais aussi les conditions aux limites et le domaine. Il s'agit donc d'une formulation complète qui peut être analysée ou résolue. De ce fait trouver une fonction inconnue u sur un intervalle $]0;L[$ donné de \mathbb{R} supposé comme le domaine où est défini le problème aux limites elliptique d'une manière générale obéit les conditions suivantes :

1. Une équation aux dérivées partielles de type elliptique

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0(x)u(x) = f(x) \quad x \in]0;L[\quad (2.2)$$

Où f une fonction suffisamment régulière sur $]0;L[$ donnée et a et a_0 sont des fonctions bornées sur $]0;L[$ avec $0 \leq a_0(x) \leq c$ et $0 < c_1 \leq a(x) \leq c_2$ où $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$

2. Des conditions aux limites sur le bord du domaine . Nous en avons deux : les conditions de Dirichlet et celles de Fourier-Robin dont un cas particulier de cette dernière est la condition de Neumann . Ainsi on a :

(a) Condition de Dirichlet

Appliquons cette condition à l'un des bord du domaine $]0;L[$ prenons le point $x = 0$.

$$u(0) = g_0 \quad (2.3)$$

Où g_0 est une fonction donnée et désignant le comportement de la solution recherchée au bord $x = 0$ du domaine d'étude.

(b) Condition de Fourier-Robin

Appliquons cette dernière condition à la frontière $x = L$ du domaine .

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (L) + \lambda u(L) = h_0 \quad (2.4)$$

Avec $\lambda \geq 0$ et h_0 une fonction suffisamment régulière sur $]0;L[$ donnée .

Dans le cas où $\lambda = 0$ on parlera de condition de Neumann.

En effet , un problème aux limites elliptique est indépendant du temps . On dira qu'il est stationnaire .

2.3 Formulation variationnelle

Le problème aux limites elliptiques étant considéré par le système formé par les équations 2.2 , 2.3 et 2.4, est considéré comme un problème continue, ce qui est impossible d'approximer numériquement . De ce fait , la méthode des éléments finis propose une approche pouvant conduire à un problème discret . Ce dernier est appelé la formulation variationnelle. La question que l'on se pose maintenant est comment la déterminer . A cet effet on va considérer une fonction dite de fonction test dans un espace de Sobolev approprié à notre équation question .

Ici vue que nous sommes avec une équation elliptique sur $]0;L[$, il est impératif de travailler avec l'espace de Sobolev $H^1(]0;L[)$ qui est définie par :

$$H^1(]0;L[) = \left\{ v \in L^2(]0;L[) : \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(]0;L[) \right\} \quad (2.5)$$

Si on pose :

$$V = \left\{ v \in H^1(]0;L[) : v(0) = 0 \right\} \quad (2.6)$$

On va alors prendre notre fonction test v de telle façon qu'elle appartiendrait à V

Par la suite on multipliera l'équation 2.1 par cette fonction v .

On obtient après multiplication :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v(x) + a_0(x) u(x) v(x) = f(x) v(x) \quad (2.7)$$

On intègre maintenant 2.7 sur $]0;L[$ ce qui donne :

$$\int_0^L \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v(x) + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx \quad (2.8)$$

Utilisant la distributivité à gauche de l'intégration 2.8 dévient :

$$-\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v(x) dx + \int_0^L a_0(x) u(x) v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx \quad (2.9)$$

Utilisant la propriété de la dérivée du produit de deux fonction on obtient :

$$-\left(\int_0^L \frac{\partial a(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} v(x) dx + \int_0^L a(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} v(x) dx \right) + \int_0^L a_0(x) u(x) v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx \quad (2.10)$$

De 2.10 posons $I = \int_0^L a(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} v(x) dx$ et passons à une intégration par partie de cette dernière.

On pose $w'(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}$ et $z(x) = a(x)v(x)$ et on prend : $w(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$ et $z'(x) = v(x) \frac{\partial a(x)}{\partial x} + a(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x}$.

on a ainsi :

$$I = \left[a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} v(x) \right]_0^L - \int_0^L \left(v(x) \frac{\partial a(x)}{\partial x} + a(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx \quad (2.11)$$

En soustrayant 2.11 dans 2.10 on obtient :

$$-\left[a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} v(x) \right]_0^L + \int_0^L a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a_0(x) u(x) v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

Qu'on peut réécrire sous :

$$-\left[a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} v(x) \right]_0^L + \int_0^L \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx \quad (2.12)$$

Introduisons à présent les conditions aux limites .De 2.4 on a : $\left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (L) + \lambda u(L) = h_0$

soit $\left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right)(L) = h_0 - \lambda u(L)$

Utilisant cette dernière et utilisant le fait que $v \in V$ 2.12 donne :

$$\int_0^L \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx + \lambda u(L) v(L) = \int_0^L f(x) v(x) dx + h_0 v(L) \quad (2.13)$$

qui est la formulation variationnelle du problème elliptique considéré

En posant $a(u, v) = \int_0^L \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx + \lambda u(L) v(L)$ et $L(v) = \int_0^L f(x) v(x) dx + h_0 v(L)$,

La formulation 2.13 peut se réécrire alors sous la forme de :

$$a(u, v) = L(v) \quad (2.14)$$

Où $a(u, v)$ et $L(v)$ sont respectivement des formes bilinéaires et linéaires définies sur $H^1(]0; L[)$ à valeurs dans \mathbb{R}

D'une façon rigoureuse le problème variationnel revient à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(]0; L[) \text{ tel que } u - g_0 \in V, \\ \text{solution de } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.15)$$

2.4 Existence et unicité de la solution

Dans cette section on va prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

Utilisant le théorème de **Lax-Milgram** le problème 2.15 admet une solution et cette dernière est unique si et seulement si :

- La forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue
- La forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive
- La forme linéaire $L(v)$ est continue

En effet nous souhaiterons prouver ces trois points afin de conclure l'existence et l'unicité de la solution

Continuité de la forme bilinéaire

Il suffit de montrer qu'il existe une C positive tel que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(]0; L[)} \|v\|_{H^1(]0; L[)} \quad \forall u, v \in H^1(]0; L[)$$

Décomposons chaque terme de $a(u, v)$

$$a(u, v) = \int_0^L \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} + a_0(x) u(x) v(x) \right) dx + \lambda u(L) v(L)$$

$$a(u, v) = \int_0^L a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a_0(x) u(x) v(x) dx + \lambda u(L) v(L)$$

De ce fait majorons chaque terme de $a(u, v)$

Premier terme

$$\left| \int_0^L a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx \right| \leq \|a(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right\|_{L^2(]0;L[)} \left\| \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right\|_{L^2(]0;L[)}$$

Deuxième terme

$$\left| \int_0^L a_0(x) u(x) v(x) dx \right| \leq \|a_0(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} \|u\|_{L^2(]0;L[)} \|v\|_{L^2(]0;L[)}$$

Troisième terme

$$|\lambda u(L) v(L)| \leq |\lambda| \|u\| \|v\| \leq |\lambda| \|u\|_{H^1(]0;L[)} \|v\|_{H^1(]0;L[)}$$

En combinant ces trois termes , on obtient :

$$|a(u, v)| \leq \left(\|a(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} + \|a_0(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} + |\lambda| \right) \|u\|_{H^1(]0;L[)} \|v\|_{H^1(]0;L[)} \quad (2.16)$$

On peu donc prendre $C = \|a(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} + \|a_0(x)\|_{L^\infty(]0;L[)} + |\lambda| = cste > 0$ Ce qui prouve la continuité de la forme bilinéaire .

Coercivité de la forme bilinéaire

Pour le prouver on va montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(]0;L[)}^2, \quad \forall u \in H^1(]0;L[)$$

Pour cela calculons $a(u, u)$ pour tout $u \in H^1(]0;L[)$

$$a(u, u) = \int_0^L a(x) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L a_0(x) (u(x))^2 dx + \lambda (u(L))^2$$

Premier terme

Sous l'hypothèse $a(x) > 0$ sur $[0; L]$, on a :

$$\int_0^L a(x) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 dx \geq \inf_{x \in [0; L]} a(x) \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right\|_{L^2(]0;L[)}^2$$

Deuxième terme

Sous l'hypothèse $a_0(x) > 0$ sur $[0;L]$, on a :

$$\int_0^L a_0(u(x))^2 dx \geq 0$$

Troisième terme

$\lambda \geq 0$ alors :

$$\lambda (u(L))^2 \geq 0$$

Ainsi :

$$a(u, u) \geq \inf_{x \in [0;L]} a(x) \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right\|_{L^2(]0;L[)}^2$$

Utilisant la définition de la norme de $H^1(]0;L[)$ on conclut que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(]0;L[)}^2 \quad (2.17)$$

α ici est égal à $\min \left(\inf_{x \in [0;L]} a(x); 1 \right) > 0$ puisque $a(x) > 0$

Continuité de la forme linéaire $L(v)$

On doit montrer ici qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|L(v)| \leq C \|v\|_{H^1(]0;L[)}$$

De 2.13 on a :

$$L(v) = \int_0^L f(x)v(x)dx + h_0v(L)$$

Premier terme

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left| \int_0^L f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(]0;L[)} \|v\|_{L^2(]0;L[)}$$

Deuxième terme

Par l'inégalité de Sobolev on a : $|v(L)| \leq |v|_{H^1(]0;L[)}$ donc :

$$|h_0v(L)| \leq |h_0| \|v\|_{H^1(]0;L[)}$$

Ainsi :

$$|L(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(]0;L[)} + |h_0| \right) \|v\|_{H^1(]0;L[)} \quad (2.18)$$

Ce qui prouve la continuité de $L(v)$

En somme les trois conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites on a ainsi

l'existence et l'unicité de la solution.

2.5 Discrétisation et détermination des matrices de masse et de rigidité

La méthode des éléments finis étant une méthode de résolution consistant à subdiviser le domaine d'étude en de petits sous-domaines appelés éléments. Cette façon de faire est appelée le maillage du domaine qui va nous permettre de déboucher sur la discrétisation. De ce fait , cette section fera l'objet de la discrétisation et de la détermination des matrices entrant dans la résolution .

2.5.1 Discrétisation

Soit $\Omega = [0; L]$ en faisant un maillage uniforme de Ω en N sous-intervalles ici appelés éléments de taille $h = x_{i+1} - x_i$, on peut réécrire alors Ω comme la réunion de ces N intervalles.

Ainsi on a :

$$\Omega = [0; L] = \bigcup_{i=1}^N [x_i; x_{i+1}] \quad (2.19)$$

Comme $\Omega = [0; L]$ alors $x_1 = 0$ et $x_{N+1} = L$.

Une formulation variationnelle discrète s'impose , ainsi , on définit un espace discret V_h défini par :

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V}_h : v_h(0) = 0\} \quad (2.20)$$

Avec :

$$\tilde{V}_h = \left\{ v_h \in C^0([0; L]) : v_h|_{[x_i; x_{i+1}]} \in P_1([x_i; x_{i+1}]) \right\}$$

Où $v_h|_{[x_i; x_{i+1}]}$ est la restriction de v_h sur l'élément $[x_i; x_{i+1}]$ et $P_1([x_i; x_{i+1}])$ est un espace vectoriel contenant les polynômes d'interpolation de degrés 1 dont on va associer la base nodale $(\varphi_i)_{i=1}^N$ définie par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.21)$$

Le maillage étant uniforme et régulier alors $h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ ainsi , 2.21 peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.22)$$

On peut alors dire que V_h contient toutes les combinaisons linéaires des fonctions φ_i

pour tout $i = 1, 2, \dots, N + 1$. Autrement dit :

$$V_h = \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce qui nous permet de considérer :

$$V_h = \text{span} \{ \varphi_i(x) \}_{i=1,2,\dots,N+1} \quad (2.23)$$

Dans cet espace V_h , u peut être approximer par $u_h(x)$ défini par :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N \zeta_i \varphi_i \quad (2.24)$$

Où les ζ_i sont les coefficient nodaux (combinaison linéaire) qui sont des constantes et $\varphi_i(x)$ pour tout i . On rappelle que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ qui est le chroniqueur défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La formulation variationnelle 2.13 se réécrire alors sous la forme discrétisée suivante :

$$\int_0^L \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \varphi_i(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j(x) + \sum_{i=1}^N a_0(x) \zeta_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right) dx + \lambda \sum_{i=1}^N \zeta_i \varphi_i(L) \varphi_j(L) = \int_0^L f(x) \varphi_j(x) dx \quad (2.25)$$

Avec $j = 1, 2, \dots, N$ Après réarrangement , on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \zeta_i \left(\int_0^L \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j(x) + a_0 \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right) dx + \lambda \varphi_i(L) \varphi_j(L) \right) = \int_0^L f(x) \varphi_j(x) dx + h_0 \varphi_j(L) \quad (2.26)$$

Telle est la formulation variationnelle discrète.

2.5.2 Détermination des matrices de masse et de rigidité

De la formulation variationnelle discrète 2.26 ,on va calculer les matrices de masse et de rigidité .

En effet , les termes de cette formulation prenant en compte les dérivées partielles seront rangés dans la matrice de rigidité . Pour le faire on va d'abord déterminer ces matrices de façon élémentaires c'est-à-dire sur un élément donné du maillage .

Soit donc , $E = [x_i; x_{i+1}]$ un élément du maillage . Définissons par A^E et par M^E les matrices de rigidité et de masse respectives sur cet élément .

Ainsi ,

$$\begin{aligned} A_{ij}^E &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j(x) dx \\ M_{ij}^E &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_0(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \lambda \varphi_i(L) \varphi_j(L) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Par ailleurs , si on note par F le seconde membre alors :

$$F_j^E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) f(x) \varphi_j(x) dx + h_0 \varphi_j(L) \quad (2.28)$$

Avec $j \in \{i; i+1\}$

Alors les éléments de A^E sont $A_{ii}^E, A_{ii+1}^E, A_{i+1i}^E$ et A_{i+1i+1}^E ; il en est de même pour la matrice M^E

Passons à la détermination

De 2.22 on a : $\varphi_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h}$ et $\varphi_{i+1}(x) = \frac{x-x_i}{h}$

La matrice A étant symétrique (*Preuve facile*) on a donc :

$$\begin{aligned} A_{ii}^E &= A_{i+1i+1}^E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right) \right)^2 dx \\ A_{ii+1}^E &= A_{i+1i}^E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

Après calcul des dérivées on trouve :

$$\begin{aligned} A_{ii}^E &= A_{i+1i+1}^E = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) dx \\ A_{ii+1}^E &= A_{i+1i}^E = \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

En ce qui concerne la matrice de masse on procède de la même manière.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} M_{ii}^E &= M_{i+1i+1}^E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_0(x) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right)^2 dx + \lambda \left(\frac{x_{i+1}-L}{h} \right)^2 \\ M_{ii+1}^E &= M_{i+1i}^E = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_0(x) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right) \left(\frac{x-x_i}{h} \right) dx + \lambda \left(\frac{x_{i+1}-L}{h} \right) \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

On obtient après calcul :

$$\begin{aligned} M_{ii}^E &= M_{i+1i+1}^E = \frac{1}{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_0(x) dx + \frac{\lambda}{h^2} (x_{i+1}-L)^2 \\ M_{ii+1}^E &= M_{i+1i}^E = \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_0(x) dx + \frac{\lambda}{h^2} (x_{i+1}-L) (x-x_i) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les composantes de la matrice colonne F^E du second membre sur l'élément E sera

donc :

$$\begin{aligned} F_i^E &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)f(x) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h} \right) dx + h_0 \left(\frac{x_{i+1}-L}{h} \right) \\ F_{i+1}^E &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)f(x) \left(\frac{x-x_i}{h} \right) dx + h_0 \left(\frac{L-x_i}{h} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} F_i^E &= \frac{-1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)f(x)dx + \frac{h_0}{h} (x_{i+1} - L) \\ F_{i+1}^E &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)f(x)dx + \frac{h_0}{h} (L - x_i) \end{aligned} \quad (2.34)$$

On fait la même chose sur tous les éléments de façon intuitive et on passe à l'assemblage. On obtient alors un système d'équation linéaire de la forme :

$$RU = F \quad (2.35)$$

Où R est la combinaison des matrices de rigidité et de masse et U la matrice colonne de l'approximation.

3 Application

Dans cette section , nous allons nous donner comme tâche de passer à des modélisation des phénomènes réels pouvant se ramener sous la forme d'un modèle elliptique en une dimension .

3.1 Application 1 : Conduction thermique stationnaire dans une barre métallique

3.1.1 Contexte physique

On considère une barre métallique de longueur L , de section constante , isolée thermiquement sur ses deux cotés. Faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

1. On va maintenir la température à extrémité gauche ($x = 0$) à une valeur constante disons T_0 .
2. A l'autre extrémité ($x = L$) , on la met en contact avec le milieu extérieur . Elle échangera donc avec le milieu extérieure de la chaleur avec un coefficient d'échange qu'on notera h et la température du milieu extérieure (Temp ambiante) sera notée T_a .
3. On met à l'intérieure de la barre une résistance électrique qui fournit une source thermique $Q(x)$ et une conductivité thermique $k(x)$.

Nous nous fixons comme objectif de déterminer la distribution de température $T(x)$ dans la barre métallique à un temps fixe donné .

3.1.2 Modélisation mathématique

A l'état stationnaire , l'équation de conduction thermique est donnée par :

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) + r(x)T(x) = Q(x) \quad (3.1)$$

Où :

- $k(x)$ désigne la conductivité thermique qui est une fonction positive
- $r(x)$ est le terme de réaction lié aux termes internes s'il en existe
- $Q(x)$ est la densité volumique de la résistance électrique.

En supposant que la conductivité est constante c'est-à-dire $k(x) = k = cste > 0$ et il n'y a pas de réaction interne ($r(x) = 0$);

Nous avons ainsi le modèle suivant :

$$\begin{cases} -k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = Q(x) \\ T(0) = 0 \\ -k \frac{dT}{dx}(L) + hT(L) = T_a \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour des raisons de simplicité ramenons les conditions de Fourier-Robin aux conditions de Neumann ($h = 0$) et en prenant comme terme source $Q(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, l'équation 3.2 donne :

$$\begin{cases} -k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ T(0) = 0 \\ -k \frac{dT}{dx}(L) = T_a \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1.3 Résolution analytique

Après une première intégration , on obtient :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

Une seconde intégration nous permet d'avoir :

$$T(x) = \frac{L^2}{k\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 x + C_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Appliquons maintenant les conditions aux limites afin de trouver les constantes

$$\begin{aligned} T(0) = 0 &\Leftrightarrow C_2 = 0 \\ -k \frac{dT}{dx}(L) = T_a &\Leftrightarrow -k \left(\frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{\pi L}{L}\right) + C_1 \right) = T_a \\ &\Leftrightarrow C_1 = \frac{L}{k\pi} - \frac{T_a}{k} \end{aligned}$$

En somme la solution exacte est alors :

$$T(x) = \frac{L^2}{k\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{k\pi} - \frac{T_a}{k}\right) x \quad (3.6)$$

3.1.4 Résolution numérique : Par éléments finis

Rappel du problème modèle

$$\begin{cases} -k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ T(0) = 0 \\ -k \frac{dT}{dx}(L) = T_a \end{cases} \quad (3.7)$$

Formulation variationnelle

Utilisant 2.15 , la formulation variationnelle de ce problème revient à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } T(x) \in H^1([0;L]) \text{ tel que :} \\ k \int_0^L \frac{dT}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) v(x) dx + T_a v(L) \quad v \in H^1([0;L]) \end{cases} \quad (3.8)$$

Discrétisation

Nous souhaiterons approximer $T(x)$ par une combinaison linéaire de fonctions de base nodale :

$$T(x) \approx T_h(x) = \sum_{i=1}^N T_i \varphi_i(x) \quad (3.9)$$

Ce qui nous permet d'avoir la forme discrétisée de la formulation variationnelle comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } T_h(x) \in V_h \text{ tel que :} \\ k \sum_{i=1}^N T_i \int_0^L \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \varphi_j(x) dx + T_a \varphi_j(x) \quad v = \varphi_j(x) \in V_h \end{cases} \quad (3.10)$$

Où V_h est l'espace tel que défini en 2.23 et $j = \{i; i + 1\}$.

Matrice de rigidité élémentaire

Soit $E = [x_i; x_{i+1}]$ un élément du maillage , désignons par K^E la matrice de rigidité sur cet élément :

De 2.30 obtient :

$$\begin{aligned} K_{ii}^E &= K_{i+1i+1}^E = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k dx \\ K_{ii+1}^E &= K_{i+1i}^E = \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_{ii}^E &= K_{i+1i+1}^E = \frac{k}{h} \\ K_{ii+1}^E &= K_{i+1i}^E = \frac{-k}{h} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc on a :

$$K^E = \frac{k}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Notons par F^E la matrice élémentaire du second membre .

On a :

$$\begin{aligned} F_1^E &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + T_a \left(\frac{x_{i+1} - L}{h} \right) \\ F_2^E &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + T_a \left(\frac{L - x_i}{h} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} F_1^E &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right) + T_a \left(\frac{x_{i+1} - L}{h} \right) \\ F_2^E &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x_i \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right) + T_a \left(\frac{L - x_i}{h} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Après intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} F_1^E &= \frac{1}{h} \left(\frac{L}{\pi} (x_{i+1} - x_i) \cos\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) - \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) \right) \right) + T_a \left(\frac{x_{i+1} - L}{h} \right) \\ F_2^E &= \frac{1}{h} \left(-\frac{L}{\pi} (x_{i+1} - x_i) \cos\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) \right) \right) + T_a \left(\frac{L - x_i}{h} \right) \end{aligned}$$

Puisque $x_{i+1} - x_i = h$ on a :

$$\begin{aligned} F_1^E &= \frac{1}{h} \left(\frac{Lh}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) - \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) \right) \right) + T_a \left(\frac{x_{i+1} - L}{h} \right) \\ F_2^E &= \frac{1}{h} \left(-\frac{Lh}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_{i+1}}{L}\right) \right) \right) + T_a \left(\frac{L - x_i}{h} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ainsi :

$$F^E = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \left(\frac{Lh}{\pi} \cos \left(\frac{\pi x_i}{L} \right) - \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin \left(\frac{\pi x_{i+1}}{L} \right) - \sin \left(\frac{\pi x_i}{L} \right) \right) \right) + T_a \left(\frac{x_{i+1} - L}{h} \right) \\ \frac{1}{h} \left(-\frac{Lh}{\pi} \cos \left(\frac{\pi x_{i+1}}{L} \right) + \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sin \left(\frac{\pi x_i}{L} \right) - \sin \left(\frac{\pi x_{i+1}}{L} \right) \right) \right) + T_a \left(\frac{L - x_i}{h} \right) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, N$

En posant : $K = \sum K^E$ et $F = \sum F^E$, autrement dit après assemblage des matrices élémentaires on a la notation matricielle suivante :

$$KT = F \quad (3.17)$$

Avec T la matrice colonne de l'approximation de la distribution de la température
Résultats obtenus

Pour la simulation, nous avons considéré une barre métallique de longueur $L = 10$. En utilisant les bibliothèques numpy et matplotlib de python, nous avons créé quatre graphiques afin de faire varier le nombre N d'éléments. On a obtenu les graphiques suivant :

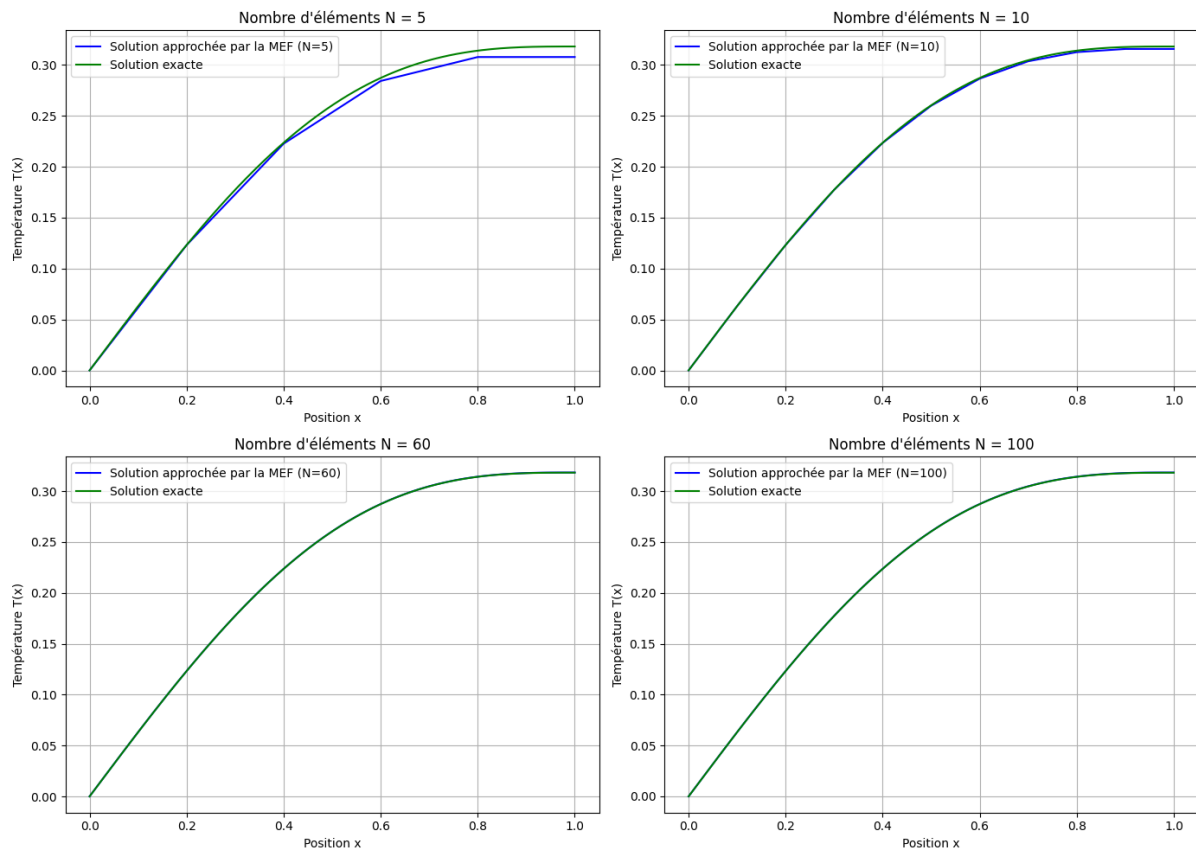


FIGURE 1 – Solution approchée vs solution exacte pour $N = 5, 10, 60$ et 100 éléments

Interprétation des résultats obtenus

Après analyse des résultats obtenus de la simulation, nous avons constaté que la

solution approchée converge vers la solution exacte . Déjà avec $N = 60$ éléments , les deux courbes sont presque confondues . Il faut noter il est impératif de prendre en compte le flux thermique à $x = L$ qu'on a noter ici Ta . Il va falloir tenir compte de ce paramètre afin d'assurer la convergence de la méthode . On a remarqué que pour $Ta > 0.05$ on n'a pas la convergence et aussi plus il est faible plus la convergence est atteinte en un nombre petit d'éléments.

3.2 Application 2 : Oscillations acoustiques stationnaires dans un tuyau

3.2.1 Contexte physique

Considérons un tuyau cylindrique de longueur L , fermé à une extrémité et rempli d'air . Nous nous fixons comme objectif d'étudier les oscillations des ondes sonores à l'intérieur de ce tuyau .

3.2.2 Modélisation mathématique

En supposant que l'onde sonore est une onde harmonique , nous pouvons modéliser ces oscillations par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.18)$$

Où :

- $u(x, t)$ est la perturbation de pression au point x et à l'instant t .
- c est la vitesse de propagation du son dans l'air .

Supposons qu'une solution harmonique peut s'écrire sous la forme de :

$$u(x, t) = \phi(x) e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

Avec ω la fréquence angulaire de l'onde et $\phi(x)$ l'amplitude spatiale de l'onde .

En substituant 3.19 dans 3.18 on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi(x) e^{i\omega t}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi(x) e^{i\omega t}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.20)$$

Utilisant les règles de la dérivées des fonctions à plusieurs variable on a :

$$-\omega^2 \phi(x) e^{i\omega t} - c^2 e^{i\omega t} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = 0$$

Ce qui donne après simplification :

$$\omega^2 \phi(x) + c^2 \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.21)$$

En posant $k = \frac{\omega}{c}$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + k^2 \phi(x) = 0 \quad (3.22)$$

Qui est l'équation d'Helmholtz en une dimension

A présent faisons les hypothèses suivantes afin de construire le modèle :

1. Le tuyau est fermé aux deux extrémités
2. $\phi(0) = 0$
3. $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$

On a ainsi le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + k^2 \phi(x) = 0 & \text{si } x \in]0; L[\\ \phi(0) = 0 & \text{Condition de Dirichlet homogène} \\ \frac{d\phi}{dx}(L) = 0 & \text{Condition de Neumann} \end{cases} \quad (3.23)$$

3.2.3 Résolution analytique

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est : $r^2 + k^2 = 0$.

Le discriminant associé est $\Delta = (2ki)^2 < 0$ donc la solution générale de cette équation peut se mettre sous la forme de :

$$\phi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

Appliquons maintenant les conditions aux limites afin de trouver les constantes

$$\phi(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(kL) = 0$$

Si $B = 0$ la solution donnerait 0 donc on va prendre le cas où $\cos(kL) = 0$.

$$\begin{aligned} \cos(kL) = 0 &\Leftrightarrow kL = (2p + 1) \frac{\pi}{2} \quad p \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow k_p &= \frac{(2p + 1) \pi}{2L} \end{aligned}$$

Ainsi la solution exacte est alors :

$$\phi_p(x) = B_p \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{2L}\right) \quad p \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (3.25)$$

3.2.4 Résolution numérique

Rappel du modèle

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + k^2\phi(x) = 0 & \text{si } x \in]0; L[\\ \phi(0) = 0 \\ \frac{d\phi}{dx}(L) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Formulation variationnelle

Utilisant 2.15 , la formulation variationnelle de ce problème revient à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi(x) \in H^1([0; L]) \text{ tel que :} \\ \int_0^L \frac{d\phi}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \int_0^L v(x) k^2 \phi(x) dx = 0 \quad v \in H^1([0; L]) \end{cases} \quad (3.27)$$

Discretisation

Subdivisons $[0; L]$ en N éléments finis de longueur $h = \frac{L}{N}$. Les nœuds seront notés x_0, x_1, \dots, x_N avec $x_0 = 0$ et $x_N = L$.

Approximons $\phi(x)$ comme une combinaison linéaire des fonctions de forme :

$$\phi(x) \approx \phi_p(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i \quad (3.28)$$

Où Φ_i sont les inconnues à déterminer .

Nous avons alors la forme discrétisée de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi(x) \in V_h \text{ tel que :} \\ \sum_{i=1}^N \Phi_i \left(\int_0^L \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx - k^2 \int_0^L \varphi_j \varphi_i dx \right) = 0 \quad ; \quad v = \varphi_j(x) \in V_h \end{cases} \quad (3.29)$$

Où V_h est l'espace tel que défini en 2.23 et $j = \{i; i+1\}$.

Soit $E = [x_i; x_{i+1}]$ un élément du maillage , désignons par K^E la matrice de rigidité sur cet élément :

De 2.30 on a :

$$\begin{aligned}
K_{ii}^E &= K_{i+1i+1}^E = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k dx \\
K_{ii+1}^E &= K_{i+1i}^E = \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k dx
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
K_{ii}^E &= K_{i+1i+1}^E = \frac{k}{h} \\
K_{ii+1}^E &= K_{i+1i}^E = \frac{-k}{h}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$K^E = \frac{k}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Par ailleurs si on désigne par M^E la matrice de masse élémentaire sur cet élément , en utilisant 2.32 on a :

$$\begin{aligned}
M_{ii}^E &= M_{i+1i+1}^E = \frac{1}{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\
M_{ii+1}^E &= M_{i+1i}^E = \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
M_{ii}^E &= M_{i+1i+1}^E = \frac{h}{3} \\
M_{ii+1}^E &= M_{i+1i}^E = \frac{h}{6}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

D'où :

$$M^E = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

En posant : $K = \sum K^E$, $M = \sum M^E$ et $A = K - k^2 \times M$, on aura donc a résoudre le système matriciel suivant :

$$A\Phi = 0 \tag{3.34}$$

Résultats obtenus