

École Nationale Supérieure de Génie
Mathématique et Modélisation

Modèle de Stokes

Présenté le 26 août 2025 par :

Christophe VODOUNOU

Sous la supervision de :

Dr. Jamal ADETOLA

Année universitaire : 2024-2025

Table des matières

Introduction	4
1 Origine et fondements du modèle	4
2 Modélisation mathématique	5
3 Analyse numérique du modèle	8
3.1 Existence et unicité de la solution	9
3.2 Cas 1D	10
3.3 Cas 2D : Approche par différences finies	13
3.3.1 Discrétisation : schémas aux différences finies	14
3.3.2 Équations discrètes	15
3.3.3 Écriture matricielle	15
3.3.4 Implémentation	18
3.3.5 Résultats obtenus	20
3.3.6 Interprétations	20
4 Cas d'une géométrie irrégulière	21
4.1 Domaine d'étude	21
4.2 Forme forte du modèle	21
4.3 Existence et unicité	21
4.4 Formulation variationnelle du modèle de Stokes	21
Conclusion et perspectives	22
Références	22

Table des figures

1	Domaine du fluide Ω	5
2	Solution 1D	13
3	Écoulement visqueux lent entre deux plaques parallèles	13
4	Solution 2D	20
5	Illustration d'un gradient de pression régulier dans un canal	20
6	Écoulement visqueux incompressible dans un domaine circulaire	22

Modèle de Stokes

Introduction

Le modèle de Stokes joue un rôle fondamental en mécanique des fluides, notamment lorsqu'il s'agit de décrire les écoulements lents de fluides visqueux et incompressibles. Ce modèle est une dérivée des équations de Navier-Stokes et il est obtenu en négligeant les termes d'inertie lorsque le nombre de Reynolds est très faible, c'est-à-dire lorsque les forces visqueuses dominent très largement les forces d'accélération.

Cette approximation, bien que plus simple sur le plan mathématique, conserve la capacité à modéliser des phénomènes physiques essentiels, notamment dans des contextes où la précision fine des interactions fluides-milieux est cruciale. Par exemple, en micro-fluidique, où les dimensions très réduites des canaux rendent négligeables les effets inertiels, le modèle de Stokes permet d'étudier avec rigueur le comportement des fluides au sein de dispositifs miniaturisés. On le retrouve également en biomécanique (écoulements dans les capillaires, transport intracellulaire), en géophysique (mouvements lents de l'eau dans les roches poreuses), ou encore dans les procédés industriels de lubrification ou de sédimentation de particules.

Sur le plan mathématique, le modèle de Stokes se distingue par sa structure linéaire et incompressible, ce qui permet d'aborder rigoureusement l'analyse de l'existence, de l'unicité et de la stabilité des solutions.

1 Origine et fondements du modèle

Le modèle de Stokes tire son nom de George Gabriel Stokes, qui, au milieu du XIX^e siècle, étudia les effets de la viscosité sur les mouvements des fluides. Le régime de Stokes apparaît naturellement dans des situations où le nombre de Reynolds est très faible, ce qui conduit à négliger les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes. Stokes a apporté des contributions majeures à plusieurs domaines, notamment la mécanique des fluides, l'optique et la géodésie. Son intérêt pour la mécanique des fluides s'est manifesté dès les années 1840, avec des travaux fondamentaux sur la viscosité et les mouvements des fluides visqueux. En 1846, il publia un rapport synthétisant les recherches récentes en hydrodynamique, qui posa les bases scientifiques du domaine.

Le modèle de Stokes, formulé en 1851, décrit la force de traînée exercée sur une sphère rigide se déplaçant lentement dans un fluide visqueux. Cette loi, appelée loi de Stokes, est une solution analytique qui s'applique dans le régime des faibles nombres de Reynolds, où les effets visqueux dominent les forces d'inertie. Ce travail a permis de quantifier précisément la résistance au mouvement dans des fluides comme l'eau ou l'air, et a eu un impact majeur sur la compréhension des phénomènes de sédimentation, de diffusion des particules et de microfluidique.

Son influence fut telle qu'en 1889 il fut anobli (baronnet) par la reine Victoria, et la

médaille Copley lui fut décernée en 1893, la plus haute distinction scientifique de l'époque. La viscosité cinématique porte aujourd'hui son nom avec l'unité « stokes » (St). En résumé, le modèle de Stokes s'inscrit dans une carrière scientifique exceptionnelle, où rigueur mathématique et applications physiques se conjuguent pour fonder la science moderne des fluides visqueux.

2 Modélisation mathématique

On considère un fluide incompressible, dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n ($n \leq 3$), avec :

- \mathbf{u} : vecteur vitesse du fluide
- p : la pression du fluide
- \mathbf{f} : vecteur des forces externes
- ρ : masse volumique
- \mathbf{n} : vecteur normal sortant au bord
- σ : le tenseur des contraintes
- $\sigma \cdot \mathbf{n}$: force exercée par le fluide sur le bord

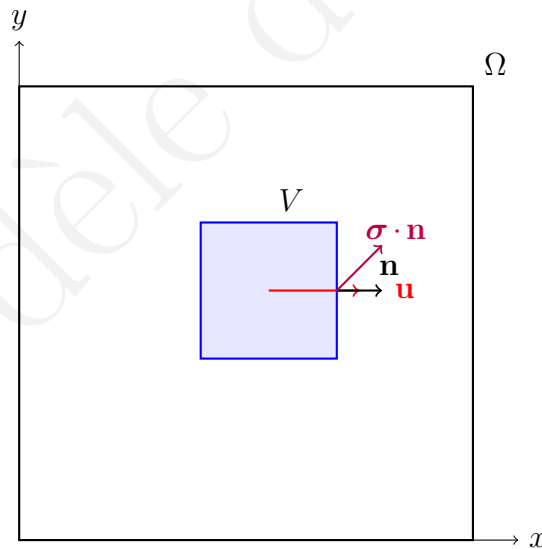


FIGURE 1 – Domaine du fluide Ω .

En appliquant la loi de Newton à un volume de contrôle V du domaine du fluide, On a :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_{\partial V} \sigma \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (2.1)$$

Hypothèses simplificatrices

1. V est fixe dans l'espace

2. ρ est constante dans le temps (fluide incompressible et homogène)

Ainsi pour le membre de gauche on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV \\ &= \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} dV\end{aligned}$$

Comme la quantité de mouvement évolue aussi par convection (transport par le fluide lui-même), il nous faut ajouter le terme convectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

Utilisant le théorème de transport (formule de Reynolds) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV$$

En appliquant le théorème de la divergence on a :

$$\int_{\partial V} \sigma \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \sigma dV$$

L'équation 2.1 donne alors :

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \sigma dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (2.2)$$

Comme cette égalité est vraie pour tout volume arbitraire $V \subset \Omega$ (avec des fonctions régulières), on en déduit que les intégrands sont égaux presque partout dans Ω . Ce qui nous permet d'avoir :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} \quad (2.3)$$

Par ailleurs, pour un fluide newtonien incompressible, on a :

$$\sigma = -pI + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)$$

Où :

- p : pression statique
- μ : viscosité dynamique
- $\nabla \mathbf{u}$ gradient du vecteur vitesse donnant la matrice jacobienne.

Donc :

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}$$

L'équation 2.3 dévient donc :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Ce qui donne :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (2.5)$$

En posant $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

2.5 dévient

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (2.6)$$

Telle est l'équation de Navier-Stokes

Soit maintenant $U \in \mathbb{R}$ une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié et L une longueur caractéristique . On considère le temps caractéristique T .

On a donc $T = \frac{L}{U}$ puisque par définition $U = \frac{L}{T}$.

Posons : $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}$, $\tilde{t} = \frac{t}{T}$, $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{U}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho U^2}$ Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial U \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\partial t} \\ &= U \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\partial t} \\ &= U \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\partial T \tilde{t}} \\ &= \frac{U}{T} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= U^2 \left(\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{U^2}{L} \left(\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \\ \Delta \mathbf{u} &= \Delta \left(U \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \right) \\ \Delta \mathbf{u} &= \frac{U}{L^2} \Delta \left(\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \right) \\ \nabla p &= \nabla \left(\rho U^2 \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \right) \\ \nabla p &= \frac{\rho U^2}{L} \nabla \left(\tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \right) \end{aligned}$$

L'équation 2.5 dévient :

$$\begin{cases} \rho \frac{U^2}{L} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \right) - \nu \frac{U}{L^2} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\rho U^2}{L} \nabla \tilde{p} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.7)$$

Posons $Re = \frac{LU}{\nu} \rho$ où Re désigne le nombre de Reynolds du fluide considéré .

Alors 2.7 dévient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Posons $p = LU \rho \tilde{p} = \nu Re \tilde{p}$ et $\mathbf{f} = \nu Re \tilde{\mathbf{f}}$, 2.8 donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\nu Re} \nabla p = \frac{1}{\nu Re} \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Hypothèse de Stokes (écoulement lent)

1. Le régime est stationnaire : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$
2. Inertie négligeable : $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \approx 0$
3. Incompressibilité : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
4. $Re \rightarrow 0$

On obtient le modèle suivant qu'est le modèle de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Quelques propriétés du modèle de Stokes

- *Linéarité* : Cela signifie que si \mathbf{u}, p_1 et \mathbf{v}, p_2 sont des solutions, alors toute combinaison linéaire alors $c_1(\mathbf{u}, p_1) + c_2(\mathbf{v}, p_2)$ est aussi une solution.
- *Absence d'inertie* : Les écoulements de Stokes n'ont pas d'inertie, ce qui implique qu'ils dissipent leur énergie cinétique très rapidement
- *Le laplacien de la pression est nul* : $\Delta p = 0$

3 Analyse numérique du modèle

Nous considérons le modèle de Stokes stationnaire sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où :

- $\mathbf{u} = (u, v)$: vitesse du fluide
- p : pression

- $\nu > 0$: viscosité du fluide
- $\mathbf{f} = (f, g)$: force extérieure
- $\partial\Omega$: le bord de Ω

3.1 Existence et unicité de la solution

On se fixe comme objectif de montrer que ce problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$. Où $H_0^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) | \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Formulation faible du problème

On multiplie l'équation par une fonction test $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ et on intègre par parties .
Après intégration par parties , on obtiens :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0 \quad q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.2)$$

Problème variationnel

Posons $V = [H_0^1(\Omega)]^2$ et $Q = L_0^2(\Omega)$.

Le problème variationnel revient à :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\mathbf{u}, p) \in V \times Q \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \end{cases}$$

Avec :

- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}$
- $b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$
- $l(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$
- $b(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}$

Le théorème de Brezzi assure que le problème a une solution unique si :

1. $a(.,.)$ est coercive sur le noyau de b i.e :
 $\exists \alpha > 0, a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{H^1}^2$ si $b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q$
2. $b(.,.)$ satisfait la condition d'inf-sup i.e :
 $\exists \beta > 0, \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}} \geq \beta \|q\|_{L^2} \quad \forall q \in Q$

En effet,

Soit $\mathbf{v} \in V$.

D'après l'inégalité de Poincaré (vectorielle), on a :

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}$$

Où C_p est la constante de Poincaré, qui dépend uniquement du domaine Ω .

On définit sur V la norme suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_V^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré , il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_V^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Ce qui nous permet de dire que sur V la semi-norme $\|\nabla \mathbf{v}\|$ est équivalente à la norme complète.

$a(.,.)$ est elle coercive sur le noyau de b ?

On suppose que $\mathbf{v} \in \text{Ker } b \subset V$ i.e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Alors :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} = \nu \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Et grâce à l'inégalité de Poincaré , on a bien :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \nu \frac{1}{1 + C^2} \|\mathbf{v}\|_V^2 \Rightarrow a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2$$

Avec $\alpha = \frac{\nu}{1 + C^2}$ qui est bien positif.

Nous venons de montrer ainsi la coercivité de a

3.2 Cas 1D

Considérons un fluide visqueux incompressible dans un domaine unidimensionnel $x \in \Omega = [0, L]$. Le fluide est soumis à une force volumique $f(x)$

Ainsi l'équation 3.1 devient :

$$\begin{cases} -\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dp}{dx} = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{du}{dx} = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

La condition $\frac{du}{dx} = 0$ implique que la vitesse $u(x) = 0$ est constante sur Ω .

Ce qui nous permet décrire :

$$\frac{dp}{dx} = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3.4)$$

Puisque $u = cste \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$.

En intégrant 3.4, on obtient :

$$p(x) = p(0) + \int_0^x f(s) ds$$

Conditions aux limites

— $u(0) = u_0$ où la valeur de u est constante sur Ω .

— $p(0) = p_0$

Le problème dévient :

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 \\ p(x) &= p_0 + \int_0^x f(s) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

Résolution analytique

Prenons $f(x) = \sin(\pi x)$

Comme $u' = 0 \Rightarrow u'' = 0$

On cherche seulement à résoudre :

$$\frac{dp}{dx} = f(x) \quad (3.6)$$

Ainsi

$$p(x) = \int f(x) dx + c \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Si $p(1) = 0$ alors $c = \frac{1}{\pi} \cos(\pi)$

D'où :

$$p(x) = -\frac{1}{\pi} (\cos(\pi x) + 1)$$

Maintenant discrétisons l'intervalle $[0, L]$ en N points : $x_i = ih$ avec $h = \frac{L}{N}$.

L'approximation de l'intégrale par la méthode du trapèze donne :

$$p_i = p_0 + \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_i)) + h \sum_{k=1}^{i-1} f(x_k)$$

Implémentation en python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 pi = np.pi
4 f = lambda x: np.sin(pi * x) # Fonction f
5 p_exact = lambda x: -1/pi * (np.cos(pi * x) + 1) # Solution
   analytique de la pression
```

```

6   Ns = [10, 100]
7   fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 4)) #Subplots
      pour chaque valeur de N
8
9   for i, N in enumerate(Ns):
10      h = 1 / (N + 1)
11      x = np.linspace(0, 1, N+2)
12      f_vals = f(x[:-1])
13      p_num = np.zeros_like(x)
14      for j in range(1, len(x)):
15          p_num[j] = p_num[j-1] + h * f(x[j-1])
16
17
18      p_num = p_num - p_num[N+1]
19      #p_num[-1],p_num[N+1]=0,0
20
21      p_ex = p_exact(x)
22      axes[i].plot(x, p_num, 'r--', label='Pression numerique')
23      axes[i].plot(x, p_ex, 'b-', label='Pression exacte')
24      axes[i].set_title(f"N = {N}")
25      axes[i].set_xlabel("x")
26      axes[i].set_ylabel("p(x)")
27      axes[i].legend()
28      axes[i].grid(True)
29      plt.suptitle("Comparaison pression numerique vs exacte (
      Stokes 1D)")
30      plt.tight_layout()
31      plt.savefig('1D')
32      plt.show()

```

Resultats obtenus

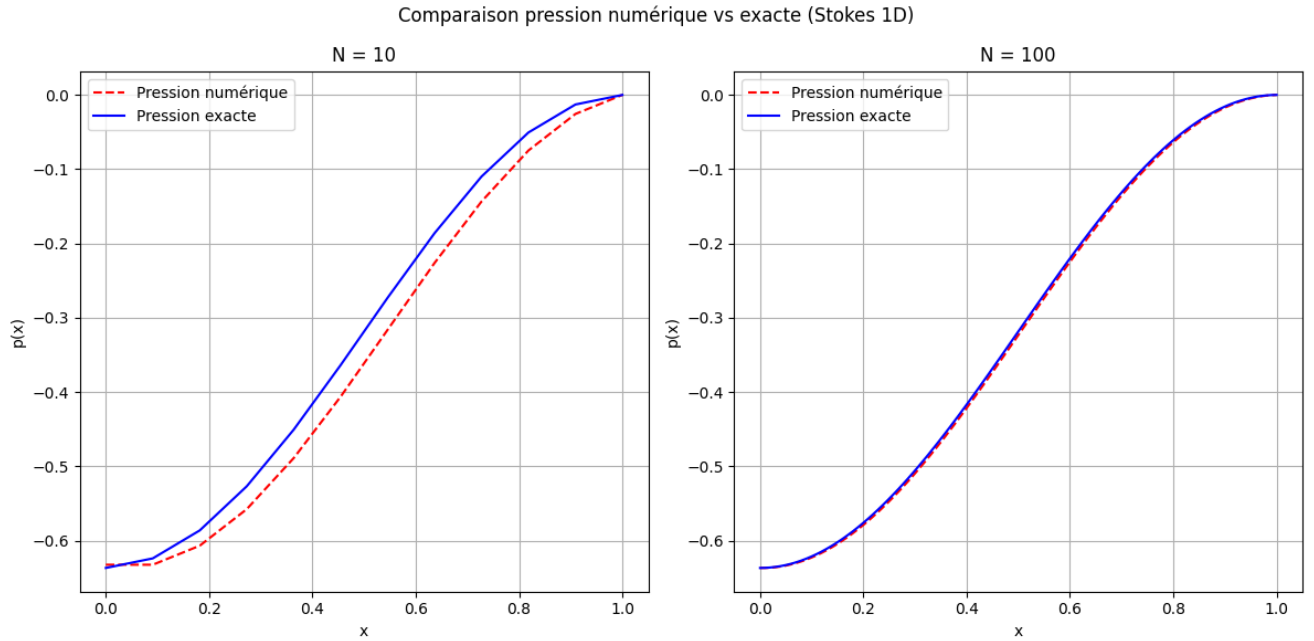


FIGURE 2 – Solution 1D

Interprétations

La courbe de pression montre comment la pression statique évolue le long de la direction x sous l'effet de la force volumique variable $f(x)$. La variation non uniforme de f (ici modulée par une sinusoïde) crée une pression qui varie de façon non linéaire, avec des zones où la pente de la pression est plus forte.

3.3 Cas 2D : Approche par différences finies

On désire étudier l'écoulement visqueux lent entre deux plaques parallèles.

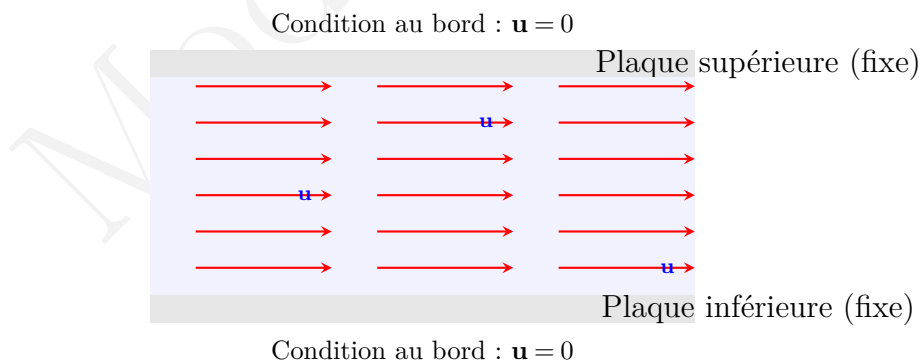


FIGURE 3 – Écoulement visqueux lent entre deux plaques parallèles

Considérant un régime stationnaire ($\nu = 1$) pour des hypothèses simplificatrices et

tenant compte de la dimension du domaine Ω , le système 3.1 peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= f & \text{dans } \Omega \\ -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= g & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ (u, v) &= (0, 0) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

Considérons Ω de \mathbb{R}^2 tel que $\Omega = [0, 1]^2$

3.3.1 Discrétisation : schémas aux différences finies

On va discrétiser le modèle de Stokes considéré sur Ω avec un pas $h = \frac{1}{n+1}$. On suppose une grille régulière et uniforme. Soit (x_i, y_j) un point de la grille tel que :

$$\begin{cases} x_i = ih \\ y_j = jh \end{cases}$$

Avec : $1 \leq i, j \leq n$.

On notera les fonctions discrètes par :

- $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ pour les vitesses
- $p_{i,j}$ pour la pression
- $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ pour les sources.

En utilisant les différences centrées d'ordre 2 pour les dérivées secondes et centrées d'ordre 1 pour les dérivées premières on a :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)\right) &\approx -\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}\right) \\ &= -\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \end{aligned}$$

De la même façon on a :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, y_j)\right) &\approx -\left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h^2}\right) \\ &= -\frac{1}{h^2}(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) \end{aligned}$$

Pour la pression on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h}$$

Et enfin ,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j) \right) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h}$$

3.3.2 Équations discrètes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) + \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h} = f_{i,j} \\ -\frac{1}{h^2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h} = g_{i,j} \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} = 0 \\ \left((u_{0,j}, v_{0,j}) = (u_{i,0}, v_{i,0}) \right) = (0, 0) \\ \left((u_{n+1,j}, v_{n+1,j}) = (u_{i,n+1}, v_{i,n+1}) \right) = (0, 0) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Il ne nous reste maintenant qu'à écrire ce système sous forme matricielle.

3.3.3 Écriture matricielle

Matrice liée au Laplacien.

Soit A cette matrice

$$A = \frac{2}{h^2} (I \oplus L_1 D + L_1 D \oplus I) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

Avec $m = n \times n$ qui est le nombre total de point.

Où $L_1 D$ est la matrice du Laplacien $1D$ et donc :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

I est la matrice identité de taille n

Et \oplus est le produit de Kronecker Alors :

$$A = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \right) +$$

$$\frac{1}{h^4} \left(\begin{array}{c} -2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} -2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} -2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Construisons à présent la matrice liée à l'opérateur de divergence.
En $1D$, la forme matricielle de l'opérateur de dérivée centrée est :

$$D = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En $2D$ si on la nomme B alors :

$$B = (B_x, B_y) \quad (3.9)$$

Avec $B_x = I \oplus D$ et $B_y = D \oplus I$. La matrice globale du système 3.8 donne :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_x^T \\ 0 & A & B_y^T \\ B_x & B_y & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3m}(\mathbb{R}) \quad (3.10)$$

On cherche maintenant à résoudre le système :

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{F} \quad (3.11)$$

$$\text{Où } \mathcal{X} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En effet , $u \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$, $p \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$.

Donc $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_{3m \times 1}$.

Ce qui justifie bien la possibilité du calcul de $\mathcal{A} \times \mathcal{X}$.

Solutions synthétiques

Prenons :

$$(u_{ex}, v_{ex}) = \left(\sin^2(\pi x) \sin(\pi y), \sin(\pi x) \sin^2(\pi y) \right)$$

Et

$$p_{ex}(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

On a bien $u_{ex}(0) = u(1) = v_{ex}(0) = v(1) = 0$

Et également $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

3.3.4 Implémentation

Pour l'implémentation numérique on prend f et g telle que :

$$f = -\nu \left(\frac{\partial^2 u_{ex}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{ex}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p_{ex}}{\partial x}$$

$$g = -\nu \left(\frac{\partial^2 v_{ex}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{ex}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p_{ex}}{\partial y}$$

```
1 import numpy as np
2 import scipy.sparse as sp
3 import scipy.sparse.linalg as spla
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Parametres
7 mu = 1.0
8 N = 30
9 h = 1.0 / (N + 1)
10 x = np.linspace(h, 1 - h, N)
11 y = np.linspace(h, 1 - h, N)
12 X, Y = np.meshgrid(x, y)
13 u_exact = lambda x, y: np.sin(np.pi * x)**2 * np.sin(np.pi * y)
14 v_exact = lambda x, y: -np.sin(np.pi * x) * np.sin(np.pi * y)**2
15 p_exact = lambda x, y: np.cos(np.pi * x) * np.cos(np.pi * y)
16 fx = lambda x, y: -mu * (
17     -2 * (np.pi**2) * np.sin(np.pi * x)**2 * np.sin(np.pi * y)
18     - np.pi**2 * np.sin(np.pi * y) * np.sin(2*np.pi * x)
19 ) - np.pi * np.sin(np.pi * x) * np.cos(np.pi * y)
20
21 fy = lambda x, y: -mu * (
22     -2 * (np.pi**2) * np.sin(np.pi * y)**2 * np.sin(np.pi * x)
23     - np.pi**2 * np.sin(np.pi * x) * np.sin(2*np.pi * y)
24 ) - np.pi * np.cos(np.pi * x) * np.sin(np.pi * y)
25
26 F1 = fx(X, Y).flatten()
27 F2 = fy(X, Y).flatten()
28 e = np.ones(N)
29 D1 = sp.diags([e, -2*e, e], [-1, 0, 1], shape=(N, N)) / h**2
30 I = sp.eye(N)
31 L = sp.kron(I, D1) + sp.kron(D1, I)
32 A = mu * L
```

```

33
34 D = sp.diags([-0.5*e, 0.5*e], [-1, 1], shape=(N, N)) / h
35 Bx = sp.kron(I, D)
36 By = sp.kron(D, I)
37
38 Z = sp.csr_matrix((N*N, N*N))
39 M = sp.bmat([
40 [A, Z, Bx.T],
41 [Z, A, By.T],
42 [Bx, By, None]
43 ], format='csr')
44 rhs = np.concatenate([F1, F2, np.zeros(N*N)])
45 M = M.tolil()
46 M[-1, :] = 0
47 M[-1, -1] = 1
48 rhs[-1] = 0
49 M = M.tocsr()
50 sol = spla.spsolve(M, rhs)
51 U = sol[:N*N].reshape((N, N))
52 V = sol[N*N:2*N*N].reshape((N, N))
53 P = sol[2*N*N:].reshape((N, N))
54 fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 5))
55 pcm = axs[0].contourf(X, Y, P, levels=30, cmap='viridis', alpha
    =0.7)
56 axs[0].contour(X, Y, p_exact(X, Y), levels=30, colors='red',
    linestyles='--')
57 axs[0].set_title("Pression ")
58 fig.colorbar(pcm, ax=axs[0])
59 axs[1].quiver(X, Y, U, V, color='red', scale=5, label="Numerique"
    )
60 axs[1].quiver(X, Y, u_exact(X, Y), v_exact(X, Y), color='blue',
    scale=5, alpha=0.5, label="Exacte")
61 axs[1].set_title("Champ de vitesse")
62 axs[1].legend()
63 axs[1].axis("equal")
64 plt.savefig("2D")
65 plt.tight_layout()
66 plt.show()

```

3.3.5 Résultats obtenus

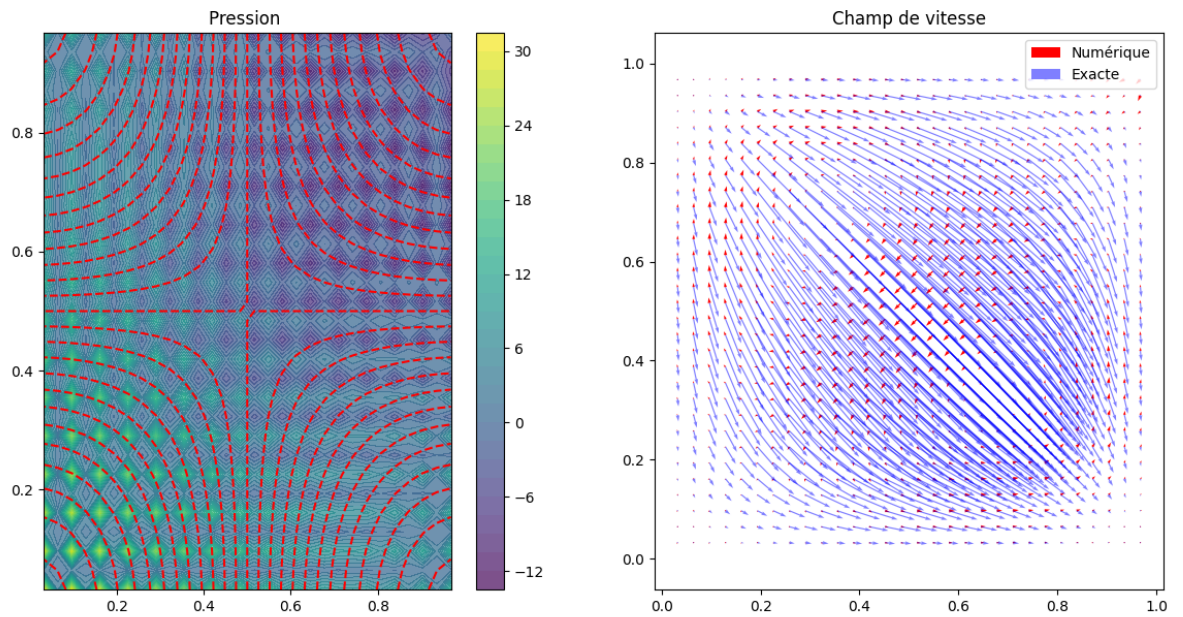


FIGURE 4 – Solution 2D

3.3.6 Interprétations

De l'analyse de ces graphiques, on constate que la vitesse est faible ou nulle près des bords, ce qui est cohérent avec les conditions aux limites imposées : $\mathbf{u} = 0$ sur le bord du carré. À l'intérieur du domaine, la vitesse est plus élevée et orientée selon un motif régulier, ce qui reflète un écoulement lent, stable et visqueux.

Du côté de la pression, on observe un gradient de pression régulier dans le domaine. Cela signifie que la pression décroît dans la direction du mouvement du fluide, ce qui est aussi attendu : le fluide se déplace des zones de haute pression vers les zones de basse pression.

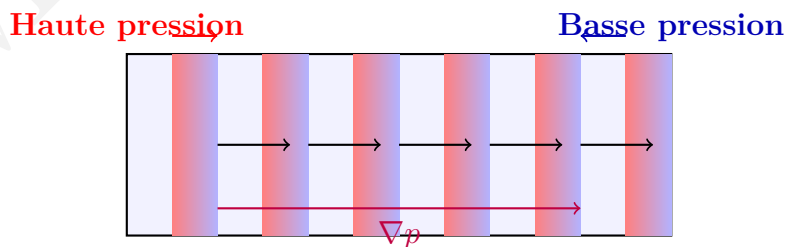


FIGURE 5 – Illustration d'un gradient de pression régulier dans un canal

4 Cas d'une géométrie irrégulière

4.1 Domaine d'étude

Soit Ω un domaine irrégulier tel que :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad (4.1)$$

Ω est un domaine non cartésien.

En effet, on va créer un maillage du disque.

4.2 Forme forte du modèle

Dans tout Ω on cherche (\mathbf{u}, p) tels que :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \left(x^2 + y^2 = 1 \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3 Existence et unicité

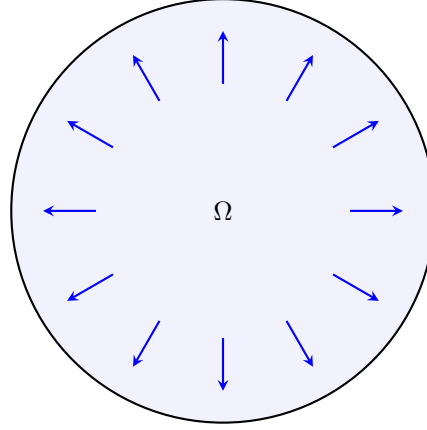
L'existence et l'unicité de la solution sont garanties par le théorème de Brezzi (ou condition inf-sup) telles que c'est énoncé dans la section 3.1

4.4 Formulation variationnelle du modèle de Stokes

On cherche le champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ et la pression p tels que :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\nu > 0$ est la viscosité du fluide et \vec{f} une force donnée.



Condition au bord : $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$

FIGURE 6 – Écoulement visqueux incompressible dans un domaine circulaire

La formulation variationnelle consiste à rechercher $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation et à la simulation numérique du comportement des fluides visqueux qui s'écoulent lentement. Ces types d'écoulements interviennent dans de nombreuses situations concrètes, comme les mouvements de fluides dans des canaux microscopiques, le déplacement de liquides visqueux ou encore certains phénomènes biologiques ou géophysiques.

Nous avons étudié un modèle mathématique appelé modèle de Stokes, qui permet de décrire ces écoulements en tenant compte de deux éléments fondamentaux qui sont , la vitesse du fluide et la pression qui agit sur ce dernier.

Ce travail ouvre plusieurs pistes intéressantes pour la suite. Tout d'abord, on pourrait étendre le modèle au cas instationnaire. Ensuite, on pourrait changer les conditions aux bords, pour représenter des parois mobiles ou des interactions avec d'autres milieux. Nous envisageons également coupler ce modèle à d'autres phénomènes physiques, comme la température (thermo-fluides).

Références

- [1] G. P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*. Springer, 2011.
- [2] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [3] R. Temam. *Navier-Stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [4] F. Brezzi. 'On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers.' *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2) :129–151, 1974.
- [5] H. Elman, D. Silvester, and A. Wathen. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers : with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2014.
- [6] C. Pozrikidis. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1997.
- [7] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. Elsevier, 1983.
- [8] Logg , M. , Martdal , K.-A., Wells,G. N. (2012). *Automated solution of differential equations by the finite elements method*.
- [9] Quartapelle , L. (1993). *Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes Equations*.
- [10] Open source codes :[FEnicsproject](#)