Nội dung trong tập
* **Giải tích cũ:** Nhận dạng $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ rồi giải phương trình

$$F(x, dx, d^2x, \ldots, d^{(n)}x) = 0 \tag{1}$$

Trong đó nếu gặp dạng đặc biệt ta giải phương trình vi phân tuyến tính theo dạng thuần nhất rồi đến dạng không thuần nhất.
Xét: $a_n y_x^{(n)} + a_{n-1} y_x^{(n-1)} + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$ nếu $f(x) = 0$ thì phương trình tuyến tính thuần nhất, ngược lại nếu $f(x) \neq 0$ thì phương trình tuyến tính không thuần nhất.
* Phương pháp giải: Giải phương trình thuần nhất (tương ứng) theo phương pháp biến thiên hằng số tức là:

$$ay'' + by' + cy = f \Rightarrow ay'' + by' + cy = 0$$

Khi đó phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0$ có nghiệm tổng quát là:
$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} & (k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}) \\ y(x) = (c_1 x + c_2) e^{kx} & (k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}) \\ y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & (k_{1,2} = \alpha \pm \beta i) \end{cases}$$
* **Giải tích ngẫu nhiên**: Giải phương trình $dX_t = \alpha(\omega, t)dt + \beta(\omega, t)dW_t$ hay dạng tổng quát $dX_t = \alpha(\omega, t)dt + \beta(\omega, t)d\aleph_t$ với $\aleph_t$ là quá trình có vi phân ngẫu nhiên.
* Phương pháp giải: Khi giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất trước, sau đó ta dùng phương pháp biến đổi hằng số để trừ ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.
* Nhận dạng phương trình vi phân tuyến tính:
$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t \rightarrow$ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.
$dX_t = (\alpha X_t + F)dt + (\beta X_t + G)dW_t$ nếu $F \equiv G \equiv 0$ thì không thuần nhất.
* Phương pháp chung: Dùng công thức Itô $\rightarrow$ Giải phương trình thuần nhất $\Rightarrow$ Dùng phương pháp tách biến để giải phương trình không thuần nhất.
* **Phương trình Black-Scholes**: $dX = \alpha dt + \beta dW$
B1: Giải thuần nhất thiếu (khử α) suy ra X_1.
B2: Dùng phương pháp tách nghiệm $X = X_1.X_2$ để tìm X_2.
B3: Trong X_2 có A, B chưa biết, tìm A, B. B4: Có X_2 kết hợp với X_1 để có $X \Rightarrow$ Giải xong phương trình thuần nhất đủ.
B5: Giải phương trình không thuần nhất từ kết quả trước đó.
B6: Dùng phương pháp tách biến để thực hiện B5.

B7: Sau khi tách biến, kết quả giống với B1, lại tìm A, B chưa biết khác.
B8: Có ξ_2 lại kết hợp ξ_1 để ra ξ là nghiệm cần tìm.

Quyển "Lớp quá trình ngẫu nhiên Itô - Levy và ứng dụng"

1. Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

a. Định nghĩa Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

Định nghĩa: Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy là phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} dX(t) = [\alpha(t,\omega)X(t^-) + A(t,\omega)]dt + [\beta(t,\omega)X(t^-) + B(t,\omega)]dW(t) \\ + \int_{(R_0)^{n_2}} [\gamma(t,z,\omega)X(t^-) + G(t,z,\omega)]\overline{N}(dt,dz) \end{aligned} \tag{2}$$

Trong đó điều kiện ban đầu $X(0) = x_0$, với:

$$\begin{gathered} \alpha(t,\omega); \beta(t,\omega); A(t,\omega); B(t,\omega); \gamma(t,z,\omega); G(t,z,\omega); \\ \forall t \geqslant 0; z \in R_0; \omega \in \Omega \end{gathered}$$

là những quá trình ngẫu nhiên khả đoán cho trước với:

$$\gamma(t,z,\omega) > -1; \forall (t,z,\omega) \in [0,\inf\} \times R_0 \times \Omega$$

và thoả các điều kiện:

$$\begin{gathered} \int_0^t [|\alpha(s,\omega)| - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega) + \int_{R_0} \gamma^2(s,z,\omega)v(dz)]ds < \infty; \text{h.c} \\ \int_0^t [|A(s,\omega) - \frac{1}{2}B^2(s,\omega) + \int_{R_0} G^2(s,z,\omega)v(dz)]ds < \infty; \text{h.c} \end{gathered}$$

khi $A(t,\omega) \equiv B(t,\omega) \equiv G(t,z,\omega) \equiv 0$, h.c; ta gọi đó là quá trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất hay còn gọi là phương trình vi phân ngẫu nhiên hình học.

b. Định lý Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính Itô - Levy nêu trong định nghĩa trên, khi đó phương trình (2) sẽ có nghiệm là:

$$\frac{X(t)}{X_1(t^-)} = \Big\{x_0 + \int_{R_0} \frac{1}{X_1(s^-)}[A(s,\omega) - \beta(s,\omega)B(s,\omega) - \int_{R_0} \frac{\gamma(s,z,\omega)G(s,z,\omega)}{1+\gamma(s,z,\omega)}v(dz)]ds + \int_0^t \frac{B(s,\omega)}{X_1(s)} + \int_0^t \int_{R_0} \frac{G(s,z,\omega)}{X_1(s^-)(1+\gamma(s,z,\omega))}\overline{N}(ds,dz)\Big\} \quad (3)$$

Trong đó:

$$X_1(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[\alpha(s,\omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega) + \int_{R_0} \log(1+\gamma(s,z,\omega)) - \gamma(s,z,\omega)v(dz)\right] ds + \int_0^1 \beta(s,\omega)dW(s) + \int_0^1 \int_{R_0} \log(1+\gamma(s,t,\omega))\overline{N}(ds,dz)\right\} \quad (4)$$

Để chứng minh định lý trên trước hết ta cần chứng minh bổ đề sau:
c. Bổ đề
Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất, nghĩa là phương trình có dạng:

$$\frac{dX_1(t)}{X_1(t^-)} = \left[\alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dW(t) + \int_{R_0} \gamma(t,z,\omega)\overline{N}(dt,dz)\right] \quad (5)$$

Với điều kiện ban đầu X(0) = 1, trong đó:

$$\alpha(t,\omega); \beta(t,\omega); \gamma(t,z,\omega); t \geq 0; z \in R_0; \omega \in \Omega$$

là những quá trình ngẫu nhiên khả đoán cho trước với

$$\gamma(t,z,\omega) > -1; \forall(t,z,\omega) \in [0;\infty\} \times R_0 \times \Omega$$

và thoả điều kiện:

$$\int_0^t \left[|\alpha(s,\omega)| - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega) + \int_{R_0} \gamma^2(s,z,\omega)v(dz)\right] ds < \infty, \;\; \text{h.c}$$

khi đó nghiệm của phương trình (5) sẽ được cho bởi hệ thức (4).
Chứng minh bổ đề:
Ta xét hàm $X_1(t) = F(t, H(t)); t \geq 0$ với $F(t, x) = e^x$ và $H(T)$ xác định bởi:

$$H(t) = \int\limits_0^t \left[\alpha(s,\omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega) + \int_{R_0} \log(1+\gamma(s,z,\omega)) - \gamma(s,z,\omega)v(dz)\right] ds$$
$$+ \int_0^1 \beta(s,\omega)dW(s) + \int_0^1 \int_{R_0} \log(1+\gamma(s,z,\omega))\overline{N}(ds,dz)$$

Áp dụng công thức Itô cho $X_1(t) = F(t, H(t))$, ta sẽ thu được:

$$\begin{aligned}
dX_1(t) = e^{H(t)} &\left[\left(\alpha(t,\omega) - \frac{1}{2}\beta^2(t,\omega) + \int_{R_0}[\log(1+\gamma(t,z,\omega)) - \gamma(t,z,\omega)]v(dz)\right) dt\right] \\
&+ e^{H(t)} \left[\frac{1}{2}\beta^2(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dW(t)\right] \\
&+ \int_{R_0} e^{H(t)}[\gamma((t,z,\omega) - \log(1+\gamma(t,z,\omega)))]v(dz)dt \\
&+ \int_{R_0} e^{H(t^-)}\gamma(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz) \\
= X_1(t^-) &\left[\alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dW(t) + \int_{R_0}\gamma(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Chứng minh định lý
Ta tìm nghiệm phương trình (2) bằng phương pháp tách nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm của nó dưới dạng tích

$$X(t) = X_1(t^-).X_2(t^-) \tag{6}$$

trong đó:

- $X_1(t)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng, nghĩa là nó là nghiệm của phương trình (5) nói trong Bổ đề.
- $X_2(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$dX_2(t) = A^*(t,\omega)dt + B^*(t,\omega)dW(t) + \int_{R_0} G^*(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz)$$

Với điều kiện $X_2(0) = x_0$, trong đó $A^*(t,\omega); B^*(t,\omega); G^*(t,z,\omega)$ là những hàm ta sẽ xác định sau.

Theo bổ đề, ta có nghiệm $X_1(t^-)$ của phương trình (5) cho bởi hệ thức (4). Áp dụng hệ quả cho tích $X(t) = X_1(t^-).X_2(t^-)$ nêu trên, ta thu được:

$$\begin{aligned}
d(X(t)) &= d(X_1(t^-).X_2(t^-)) \\
&= X_1(t^-).dX_2(t) + X_2(t^-)dX_1(t) + \beta(t,\omega)X_1(t^-)B^*(t,\omega)dt \\
&\quad + \int_{R_0} \gamma(t,z,\omega)X_1(t^-)G^*(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz) \\
&= \alpha(t,\omega)X_1(t^-)X_2(t^-) + \beta(t,\omega)X_1(t^-)X_2(t^-) \\
&\quad + \int_{R_0} \gamma(t,z,\omega)X_1(t^-)X_2(t^-)\tilde{N}(dt,dz) + X_1(t^-)A^*(t,\omega)dt \\
&\quad + X_1(t^-)B^*(t,\omega)dW(t) + X_1(t^-)\int_R G^*(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz) \\
&\quad + \beta(t,\omega)X_1(t^-)B^*(t,\omega)dt + \gamma(t,z,\omega)X_1(t^-)G*(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz)
\end{aligned} \tag{7}$$

Mặt khác, $X(t)$ là nghiệm của phương trình (2), từ đó so sánh giữa (2) và (6), ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases}
A(t,\omega) = X_1(t^-)\left[A^*(t,\omega) + B(t,\omega)B^*(t,\omega) + \int\limits_{R_0} \gamma(t,z,\omega)G(t,z,\omega)v(dz)\right] \\
B(t,\omega) = X_1(t^-)B^*(t,\omega) \\
\int\limits_{R_0} G(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz) = X_1(t^-)\int\limits_{R_0}(1+\gamma(t,z,\omega))G^*(t,z,\omega)\tilde{N}(dt,dz)
\end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases}
A^*(t,\omega) = \dfrac{1}{X_1(t^-)}\left[A(t,\omega) - B(t,\omega)\beta(t,\omega) - \int_{R_0}\dfrac{\gamma(t,z,\omega)G(t,z,\omega)}{1+\gamma(t,z,\omega)}v(dz)\right] \\
B^*(t,\omega) = \dfrac{B(t,\omega)}{X_1(t^-)} \\
G^*(t,z,\omega) = \dfrac{G(t,z,\omega)}{X_1(t^-)(1+\gamma(t,z,\omega)}
\end{cases}$$

Đặt $X_1(t)$ cho bởi hệ thức (4), và các biểu thức của $A^*(t,\omega); B^*(t,\omega); G^*(t,z,\omega)$ đã xác định được vào biểu thức (6), ta sẽ có nghiệm (2). ■

2. Một số phương trình đặc biệt

a. Phương trình Langevin

Phương trình Langevin là phương trình có dạng:

$$dX(t) = -bX(t)dt + \sigma dW_t, \quad X(0) = 0$$

trong đó b, σ là những hằng số thực.
Phương trình Langevin là một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính, do đó, theo kết quả phần trước ta thu được nghiệm của nó là quá trình ngẫu nhiên:

$$X(t) = e^{-bt}\left[X(0) + \int_0^t \sigma e^{bs} dW_s\right], \quad t \geq 0$$

Quá trình xác định bởi hệ thức trên được gọi là quá trình Ornstein-Uhlenbeck.
Phương trình Langevin mở rộng là phương trình có dạng:

$$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad X(0) = X_0$$

trong đó $\alpha(t)$ và $\sigma(t)$ là những quá trình ngẫu nhiên liên tục.
Từ lời giải của phương trình vi phân tuyến tính tổng quát, ta sẽ có nghiệm của phương trình Langevin mở rộng là:

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)\left[X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^r \alpha(s)ds\right)\sigma(r)dW_r\right]$$

b. Phương trình vi phân tuyến tính với chuyển động Brown nhiều chiều
c. Phương trình Black - Scholes

Quyển "Quá trình ngẫu nhiên - Phần 1"
1. Khái niệm về phương trình vi phân ngẫu nhiên
2. Một số phương trình đặc biệt

Quyển "Quá trình ngẫu nhiên - Phần 2"
Giải phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

Phương trình vi phân ngẫu nhiên
Yêu cầu: Dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên
Nghiệm yếu và nghiệm mạnh
Các dạng đặc biệt của phương trình vi phân ngẫu nhiên
Phương trình vi phân tuyến tính.