
Nội dung trong tập

* **Giải tích cũ:** Nhận dạng $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ rồi giải phương trình

$$F(x, dx, d^2x, \dots, d^{(n)}x) = 0 \quad (1)$$

Trong đó nếu gặp dạng đặc biệt ta giải phương trình vi phân tuyến tính theo dạng thuần nhất rồi đến dạng không thuần nhất.

Xét: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$ nếu $f(x) = 0$ thì phương trình tuyến tính thuần nhất, ngược lại nếu $f(x) \neq 0$ thì phương trình tuyến tính không thuần nhất.

* Phương pháp giải: Giải phương trình thuần nhất (tương ứng) theo phương pháp biến thiên hằng số tức là:

$$ay'' + by' + cy = f \Rightarrow ay'' + by' + cy = 0$$

Khi đó phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0$ có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} & (k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}) \\ y(x) = (c_1 x + c_2) e^{kx} & (k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}) \\ y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & (k_{1,2} = \alpha \pm \beta i) \end{cases}$$

* **Giải tích ngẫu nhiên:** Giải phương trình $dX_t = \alpha(\omega, t)dt + \beta(\omega, t)dW_t$ hay dạng tổng quát $dX_t = \alpha(\omega, t)dt + \beta(\omega, t)dN_t$ với N_t là quá trình có vi phân ngẫu nhiên.

* Phương pháp giải: Khi giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất trước, sau đó ta dùng phương pháp biến đổi hằng số để trừ ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

* Nhận dạng phương trình vi phân tuyến tính:

$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t \rightarrow$ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

$dX_t = (\alpha X_t + F)dt + (\beta X_t + G)dW_t$ nếu $F \equiv G \equiv 0$ thì không thuần nhất.

* Phương pháp chung: Dùng công thức Itô \rightarrow Giải phương trình thuần nhất \Rightarrow Dùng phương pháp tách biến để giải phương trình không thuần nhất.

* **Phương trình Black-Scholes:** $dX = \alpha dt + \beta dW$

B1: Giải thuần nhất thiếu (khử α) suy ra X_1 .

B2: Dùng phương pháp tách nghiệm $X = X_1 \cdot X_2$ để tìm X_2 .

B3: Trong X_2 có A, B chưa biết, tìm A, B. B4: Có X_2 kết hợp với X_1 để có $X \Rightarrow$ Giải xong phương trình thuần nhất đủ.

B5: Giải phương trình không thuần nhất từ kết quả trước đó.

B6: Dùng phương pháp tách biến để thực hiện B5.

B7: Sau khi tách biến, kết quả giống với B1, lại tìm A, B chưa biết khác.

B8: Có ζ_2 lại kết hợp ζ_1 để ra ζ là nghiệm cần tìm.

Quyển "Lớp quá trình ngẫu nhiên Itô - Levy và ứng dụng"

1. Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

a. Định nghĩa Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

Định nghĩa: Phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy là phương trình có dạng:

$$dX(t) = [\alpha(t, \omega)X(t^-) + A(t, \omega)]dt + [\beta(t, \omega)X(t^-) + B(t, \omega)]dW(t) + \int_{(R_0)^{n_2}} [\gamma(t, z, \omega)X(t^-) + G(t, z, \omega)]\bar{N}(dt, dz) \quad (2)$$

Trong đó điều kiện ban đầu $X(0) = x_0$, với:

$$\alpha(t, \omega); \beta(t, \omega); A(t, \omega); B(t, \omega); \gamma(t, z, \omega); G(t, z, \omega); \\ \forall t \geq 0; z \in R_0; \omega \in \Omega$$

là những quá trình ngẫu nhiên khả đoán cho trước với:

$$\gamma(t, z, \omega) > -1; \forall (t, z, \omega) \in [0, \inf\} \times R_0 \times \Omega$$

và thoả các điều kiện:

$$\int_0^t [|\alpha(s, \omega)| - \frac{1}{2}\beta^2(s, \omega) + \int_{R_0} \gamma^2(s, z, \omega)\nu(dz)]ds < \infty; \text{h.c} \\ \int_0^t [A(s, \omega) - \frac{1}{2}B^2(s, \omega) + \int_{R_0} G^2(s, z, \omega)\nu(dz)]ds < \infty; \text{h.c}$$

khi $A(t, \omega) \equiv B(t, \omega) \equiv G(t, z, \omega) \equiv 0$, h.c; ta gọi đó là quá trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất hay còn gọi là phương trình vi phân ngẫu nhiên hình học.

b. Định lý Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính Itô - Levy nêu trong định

nghĩa trên, khi đó phương trình (2) sẽ có nghiệm là:

$$\begin{aligned} \frac{X(t)}{X_1(t^-)} = & \left\{ x_0 \right. \\ & + \int_{R_0} \frac{1}{X_1(s^-)} [A(s, \omega) - \beta(s, \omega)B(s, \omega) - \int_{R_0} \frac{\gamma(s, z, \omega)G(s, z, \omega)}{1 + \gamma(s, z, \omega)} v(dz)] ds \\ & \left. + \int_0^t \frac{B(s, \omega)}{X_1(s)} + \int_0^t \int_{R_0} \frac{G(s, z, \omega)}{X_1(s^-)(1 + \gamma(s, z, \omega))} \bar{N}(ds, dz) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} X_1(t) = \exp & \left\{ \int_0^t \left[\alpha(s, \omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s, \omega) + \int_{R_0} \log(1 + \gamma(s, z, \omega)) - \gamma(s, z, \omega)v(dz) \right] ds \right. \\ & \left. + \int_0^1 \beta(s, \omega)dW(s) + \int_0^1 \int_{R_0} \log(1 + \gamma(s, t, \omega))\bar{N}(ds, dz) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Để chứng minh định lý trên trước hết ta cần chứng minh bổ đề sau:

c. Bổ đề

Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất, nghĩa là phương trình có dạng:

$$\frac{dX_1(t)}{X_1(t^-)} = \left[\alpha(t, \omega)dt + \beta(t, \omega)dW(t) + \int_{R_0} \gamma(t, z, \omega)\bar{N}(dt, dz) \right] \quad (5)$$

Với điều kiện ban đầu $X(0) = 1$, trong đó:

$$\alpha(t, \omega); \beta(t, \omega); \gamma(t, z, \omega); t \geq 0; z \in R_0; \omega \in \Omega$$

là những quá trình ngẫu nhiên khả đoán cho trước với

$$\gamma(t, z, \omega) > -1; \forall (t, z, \omega) \in [0; \infty\} \times R_0 \times \Omega$$

và thoả điều kiện:

$$\int_0^t \left[|\alpha(s, \omega)| - \frac{1}{2}\beta^2(s, \omega) + \int_{R_0} \gamma^2(s, z, \omega)v(dz) \right] ds < \infty, \text{ h.c}$$

khi đó nghiệm của phương trình (5) sẽ được cho bởi hệ thức (4).

Chứng minh bổ đề:

Ta xét hàm $X_1(t) = F(t, H(t)); t \geq 0$ với $F(t, x) = e^x$ và $H(T)$ xác định bởi:

$$H(t) = \int_0^t \left[\alpha(s, \omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s, \omega) + \int_{R_0} \log(1 + \gamma(s, z, \omega)) - \gamma(s, z, \omega)v(dz) \right] ds \\ + \int_0^1 \beta(s, \omega)dW(s) + \int_0^1 \int_{R_0} \log(1 + \gamma(s, z, \omega))\bar{N}(ds, dz)$$

Áp dụng công thức Itô cho $X_1(t) = F(t, H(t))$, ta sẽ thu được:

$$dX_1(t) = e^{H(t)} \left[\left(\alpha(t, \omega) - \frac{1}{2}\beta^2(t, \omega) + \int_{R_0} [\log(1 + \gamma(t, z, \omega)) - \gamma(t, z, \omega)]v(dz) \right) dt \right] \\ + e^{H(t)} \left[\frac{1}{2}\beta^2(t, \omega)dt + \beta(t, \omega)dW(t) \right] \\ + \int_{R_0} e^{H(t)} [\gamma(t, z, \omega) - \log(1 + \gamma(t, z, \omega))]v(dz)dt \\ + \int_{R_0} e^{H(t^-)} \gamma(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz) \\ = X_1(t^-) \left[\alpha(t, \omega)dt + \beta(t, \omega)dW(t) + \int_{R_0} \gamma(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz) \right] \blacksquare$$

Chứng minh định lý

Ta tìm nghiệm phương trình (2) bằng phương pháp tách nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm của nó dưới dạng tích

$$X(t) = X_1(t^-).X_2(t^-) \quad (6)$$

trong đó:

- $X_1(t)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng, nghĩa là nó là nghiệm của phương trình (5) nói trong Bổ đề.
- $X_2(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$dX_2(t) = A^*(t, \omega)dt + B^*(t, \omega)dW(t) + \int_{R_0} G^*(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz)$$

Với điều kiện $X_2(0) = x_0$, trong đó $A^*(t, \omega); B^*(t, \omega); G^*(t, z, \omega)$ là những hàm ta sẽ xác định sau.

Theo bổ đề, ta có nghiệm $X_1(t^-)$ của phương trình (5) cho bởi hệ thức (4). Áp dụng hệ quả cho tích $X(t) = X_1(t^-).X_2(t^-)$ nêu trên, ta thu được:

$$\begin{aligned}
d(X(t)) &= d(X_1(t^-).X_2(t^-)) \\
&= X_1(t^-).dX_2(t) + X_2(t^-)dX_1(t) + \beta(t, \omega)X_1(t^-)B^*(t, \omega)dt \\
&\quad + \int_{R_0} \gamma(t, z, \omega)X_1(t^-)G^*(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz) \\
&= \alpha(t, \omega)X_1(t^-)X_2(t^-) + \beta(t, \omega)X_1(t^-)X_2(t^-) \\
&\quad + \int_{R_0} \gamma(t, z, \omega)X_1(t^-)X_2(t^-)\tilde{N}(dt, dz) + X_1(t^-)A^*(t, \omega)dt \\
&\quad + X_1(t^-)B^*(t, \omega)dW(t) + X_1(t^-) \int_R G^*(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz) \\
&\quad + \beta(t, \omega)X_1(t^-)B^*(t, \omega)dt + \gamma(t, z, \omega)X_1(t^-)G^*(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz)
\end{aligned} \tag{7}$$

Mặt khác, $X(t)$ là nghiệm của phương trình (2), từ đó so sánh giữa (2) và (6), ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases}
A(t, \omega) = X_1(t^-) \left[A^*(t, \omega) + B(t, \omega)B^*(t, \omega) + \int_{R_0} \gamma(t, z, \omega)G(t, z, \omega)v(dz) \right] \\
B(t, \omega) = X_1(t^-)B^*(t, \omega) \\
\int_{R_0} G(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz) = X_1(t^-) \int_{R_0} (1 + \gamma(t, z, \omega))G^*(t, z, \omega)\tilde{N}(dt, dz)
\end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases}
A^*(t, \omega) = \frac{1}{X_1(t^-)} \left[A(t, \omega) - B(t, \omega)\beta(t, \omega) - \int_{R_0} \frac{\gamma(t, z, \omega)G(t, z, \omega)}{1 + \gamma(t, z, \omega)}v(dz) \right] \\
B^*(t, \omega) = \frac{B(t, \omega)}{X_1(t^-)} \\
G^*(t, z, \omega) = \frac{G(t, z, \omega)}{X_1(t^-)(1 + \gamma(t, z, \omega))}
\end{cases}$$

Đặt $X_1(t)$ cho bởi hệ thức (4), và các biểu thức của $A^*(t, \omega); B^*(t, \omega); G^*(t, z, \omega)$ đã xác định được vào biểu thức (6), ta sẽ có nghiệm (2). ■

2. Một số phương trình đặc biệt

a. Phương trình Langevin

Phương trình Langevin là phương trình có dạng:

$$dX(t) = -bX(t)dt + \sigma dW_t, \quad X(0) = 0$$

trong đó b, σ là những hằng số thực.

Phương trình Langevin là một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính, do đó, theo kết quả phần trước ta thu được nghiệm của nó là quá trình ngẫu nhiên:

$$X(t) = e^{-bt} \left[X(0) + \int_0^t \sigma e^{bs} dW_s \right], \quad t \geq 0$$

Quá trình xác định bởi hệ thức trên được gọi là quá trình Ornstein-Uhlenbeck.

Phương trình Langevin mở rộng là phương trình có dạng:

$$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad X(0) = X_0$$

trong đó $\alpha(t)$ và $\sigma(t)$ là những quá trình ngẫu nhiên liên tục.

Từ lời giải của phương trình vi phân tuyến tính tổng quát, ta sẽ có nghiệm của phương trình Langevin mở rộng là:

$$X(t) = \exp \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right) \left[X_0 + \int_0^t \exp \left(- \int_0^r \alpha(s) ds \right) \sigma(r) dW_r \right]$$

b. Phương trình vi phân tuyến tính với chuyển động Brown nhiều chiều

Phương trình vi phân tuyến tính với chuyển động Brown nhiều chiều là phương trình có dạng:

$$dX(t) = [\alpha(t)X(t) + f(t)]dt + \sum_{i=1}^m [\beta_i(t)X(t) + g_i(t)]dW_t^{(i)}, \quad X(0) = X_0$$

Khi đó nghiệm của nó sẽ là:

$$\frac{X(t)}{V(t)} = X_0 + \int_0^t \frac{1}{V(s)} \left(\alpha(s) - \sum_{i=1}^m [\beta_i(s)]g_i(s) \right) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m \frac{1}{V(s)} g_i(s) dW_s^i$$

trong đó: $V(t) = \exp \left\{ \int_0^t [\alpha(s) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \beta_i^2(s)] ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m \beta_i(s) dW_s^i \right\}$.

c. Phương trình Black - Scholes

Trong toán tài chính, người ta hay nhắc đến phương trình mô tả sự biến động giá $S(t)$ một loại cổ phiếu nào đó theo thời gian:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \beta S(t)dW_t, \quad S(0) = S_0$$

trong đó α, β là những hằng số. Đây là phương trình vi phân hình học mà ta đã nói ở phần trên, và nghiệm của nó sẽ là:

$$S = (t) = S_0 \exp \left[\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) t + \beta W_t \right]$$

Chú ý: Khi giải bài toán về định giá quyền chọn mua theo kiểu Châu Âu sẽ dẫn đến một loại phương trình đạo hàm riêng cấp hai khác với phương trình trên nhưng người ta cũng gọi là phương trình Black-Scholes, đó là phương trình:

$$\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + rS \frac{\partial G}{\partial S} - rG = 0$$

Trong đó: $G = G(S, t)$ là giá quyền chọn tại thời điểm t ; giá chứng khoán $S = S(t)$; và lãi suất không rủi ro r .

3. Ứng dụng trong tài chính

a. Bài toán về chọn danh mục đầu tư rủi ro

Trước hết, ta mô hình hoá bài toán về tài sản và phương án đầu tư trên thị trường bằng các công cụ của giải tích ngẫu nhiên. Khi xét đến biến động của dòng tài sản trên thị trường, người ta thường xét đến hai loại tài sản: phi rủi ro (như trái phiếu...) và tài sản rủi ro (như cổ phiếu, bất động sản...)

Loại tài sản phi rủi ro với biến động giá $X_0(t)$ được xét qua phương trình vi phân:

$$dX_0(t) = \lambda(t, \omega) X_0(t) dt, \quad X_0(0) = 1, t \in [0, T]$$

Loại tài sản rủi ro với biến động giá $X_1(t)$ thường được xét qua phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô có dạng:

$$dX_1(t) = \alpha(t, \omega) X_1(t) dt + \beta(t, \omega) X_1(t) dB_t(\omega), \quad X_1(0) > 0, t \in [0, T] \quad (8)$$

trong đó: $\lambda(t, \omega) = \lambda(t); \alpha(t, \omega) = \alpha(t); \beta(t, \omega) = \beta(t)$ là những quá trình ngẫu nhiên thoả điều kiện:

$$E \int_0^T [|\lambda(t)| + \alpha(t) + \beta^2(t)] dt < \infty;$$

Ta ký hiệu: $\tau_0(t) = \tau_0(t, \omega); \tau_1(t) = \tau_1(t, \omega); t \in [0, T]; \omega \in \Omega$ là những đơn vị vốn đầu tư cho loại tài sản phi rủi ro và rủi ro tương ứng. Khi đó ta gọi: $\tau(t) := (\tau_0(t), \tau_1(t))$ là một phương án đầu tư (một danh mục đầu tư) với tổng giá trị tài sản tại thời điểm t bằng:

$$V^\tau(t) = \tau_0(t) X_0(t) + \tau_1(t) X_1(t) \quad (9)$$

Phương án đầu tư được gọi là tự tài trợ (seft-financing) nếu ta có:

$$dV^T\tau(t) = \tau_0(t)dX_0(t) + \tau_1(t)dX_1(t) \quad (10)$$

Từ giả định: $\tau(t); t \in [0, T]$ là tự tài trợ, từ hệ thức (9) ta sẽ có:

$$\tau_0(t) = \frac{V^\tau(t) - \tau_1(t)X_1(t)}{X_0(t)}$$

Từ các hệ thức trên suy ra:

$$dV^\tau(t) = \lambda(t)(V^\tau(t) - \tau_1(t)X_1(t))dt + \tau_1(t)dX_1(t)$$

Sử dụng (8), dựa vào phương trình trên ta sẽ thu được:

$$dV^\tau(t) = [\lambda(t)V^\tau(t) + (\alpha(t) - \lambda(t))\tau_1(t)X_1(t)]dt + \beta(t)\tau_1(t)X_1(t)dB_t \quad (11)$$

Đến đây ta thấy rằng phương trình (11) là một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính mà ta sẽ nói đến phương pháp giải ở mục phía sau.

Mặc khác, trong thực tế thường xét đến việc tìm phương án đầu tư $\tau(t); t \in [0, T]$ để thu được tổng giá trị tài sản là: $V^\tau(T) = \mathring{A}$. Đại lượng ngẫu nhiên \mathring{A} tương ứng với quyền tài chính (financial claim), phương án đầu tư như vậy được gọi là phương án đáp ứng (replicating portfolio).

Mở rộng vấn đề nêu trên vào trường hợp nhiều chiều, tương ứng với việc có n khối tài sản rủi ro với biến động giá $X_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, được cho bởi:

$$dX_i(t) = X_i(t^-) \left[\beta_i(t)dB_t + \int_{R_0} \gamma_i(t, x)\bar{N}(dt, dx) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

trong đó $B(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))^T; t \geq 0$ là quá trình Wiener n -chiều với:

$$\bar{N}(dt, dx) = (\bar{N}_1(dt, dx_1), \dots, \bar{N}_n(dt, dx_n))^T, \quad x \in R_0 := R \setminus \{0\}$$

là độ đo ngẫu nhiên Poisson bù (compensated Poisson random measure) và còn:

$$\beta_i(t) = (\beta_{i_1}(t), \dots, \beta_{i_n}(t)); \gamma_i(t, x) = (\gamma_{i_1}(t, x), \dots, \gamma_{i_n}(t, x))$$

là các quá trình ngẫu nhiên thoả điều kiện:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left[\beta_{ij}^2(t) + \int_{R_0} \gamma_{ij}^2(t, x)v(dx) \right] dt < \infty, \quad \text{h.c}$$

Quyền \mathring{A} sẽ có thể đáp ứng nếu tồn tại quá trình ngẫu nhiên:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T, \quad t \geq 0 \text{ sao cho:}$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \varphi_i^2(t) X_i(t^-) \left[\sum_{j=1}^n \beta_{ij}^2(t) + \int_{R_0} \gamma_{ij}^2(t, x) v(dx) \right] dt < \infty, \quad \text{h.c}$$

cùng với việc thoả điều kiện $\mathring{A} = E\{\mathring{A}\} + \sum_{i=1}^n \int_0^T \varphi_i(t) dX_i(t)$. Trong trường hợp này, ta nói rằng φ là phương án đáp ứng đối với quyền tài chính.

b. Giải quyết bài toán đầu tư đáp ứng

Để giải quyết bài toán theo hướng đầu tư đáp ứng đã nêu, thường nó dẫn đến phương trình (11) và (12) mà ta xét chúng dưới dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên tổng quát sau:

Định lý: Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính có dạng:

$$dX(t) = [\alpha(t)X(t^-) + \mathcal{A}(t)]dt + [\beta(t)X(t^-) + \mathcal{B}(t)]dB_t + \int_{R_0} [\gamma(t, x) + \mathcal{T}(t, x)]\bar{N}(dt, dx), \quad X(0) = x_0$$

trong đó: $\alpha(t) = \alpha(t, \omega)$; $\beta(t) = \beta(t, \omega)$; $\gamma(t, x) = \gamma(t, x, \omega)$; $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t, \omega)$; $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(t, \omega)$; $\mathcal{T}(t, x) = \mathcal{T}(t, x, \omega)$ là những quá trình ngẫu nhiên thoả các điều kiện:

$$\int_0^T \left[\alpha(t) + \beta^2(t) + \int_{R_0} \gamma^2(t, x) v(dx) \right] dt < \infty$$

$$\int_0^T \left[\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}^2(t) + \int_{R_0} \mathcal{T}^2(t, x) v(dx) \right] dt < \infty$$

Khi đó, ta sẽ có nghiệm của phương trình cho bởi hệ thức:

$$\frac{X(t)}{X_1(t^-)} = x_0 + \int_0^t X_1^{-1}(s^-) \left[\mathcal{A}(s) - \beta(s)\mathcal{B}(s) - \int_{R_0} \frac{\gamma(s, x)\mathcal{T}(s, x)}{1 + \gamma(s, x)} v(dx) \right] ds + \int_0^t \frac{\mathcal{B}(s)}{X_1^{-1}(s^-)} dB(s) + \int_0^t \int_{R_0} \frac{\mathcal{T}(s, x)}{X_1(s^-)(1 + \gamma(s, x))} \bar{N}(ds, dx).$$

trong đó:

$$X_1(t^-) = \exp \left\{ \int_0^t \left[\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s) + \int_{R_0} [\log(1 + \gamma(s, x)) - \gamma(s, x)] v(dx) \right] ds + \int_0^t \beta(s) dB(s) + \int_{R_0} \int_0^t \log(1 + \gamma(s, x)) \bar{N}(ds, dx) \right\}$$

Để chứng minh định lý này ta dùng phương pháp tách nghiệm đã xét ở phần trước. Ngoài ra, để giải quyết cụ thể hơn các vấn đề về bài toán đầu tư rõ ràng ta phải xét thêm đến những loại quyền chọn cụ thể trên thị trường (quyền chọn Châu Âu, quyền chọn Châu Á...). Việc xem xét và giải chúng trong một vài trường hợp đã cho ta những kết quả nhất định như các kết quả kinh điển của Black-Scholes, Floyd B. Hanson.

Quyển "Quá trình ngẫu nhiên - Phần 1"

1. Khái niệm về phương trình vi phân ngẫu nhiên

Điều kiện 3.1.1: Về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên trong các điều kiện sau:

- (1) Không gian xác suất (Ω, \mathcal{F}, P) với σ -trường $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$
- (2) Quá trình Wiener m -chiều $W(t) = \{W^{(1)}(t), W^{(2)}, \dots, W^{(m)}(t)\}$ thích nghi với họ σ -trường $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ (điều đó có nghĩa là $W(0) = 0; \forall t \in [0, T]$ đại lượng $W(t)\mathcal{F}_t$ -đo được và số gia $W(t+s) - W(t)$ khi $s \geq 0$ không phụ thuộc vào σ -trường \mathcal{F}_t).
- (3) ξ_0 là vectơ ngẫu nhiên \mathcal{F}_0 -đo được và vectơ ξ_0 không phụ thuộc vào quá trình $W(t)$.
- (4) Các hàm số $a(t, x)$ và $\delta(t, x)$ ($t \in [0, T]; x \in \mathbb{R}^m$) nhận các giá trị trong \mathbb{R}^m và $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tương ứng, với $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ là tập các toán tử tuyến tính từ \mathbb{R}^m .

Dạng của phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + \delta(t, \zeta(t))dW(t) \quad (13)$$

với điều kiện ban đầu: $\zeta(0) = \xi_0$

Phương trình (13) có thể viết dưới dạng tích phân:

$$\zeta(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \zeta(s))ds + \int_0^t \delta(s, \zeta(s))dW(s), \quad t \in [0, T]$$

trong đó $\zeta(t)$ là quá trình ngẫu nhiên cần tìm. Nghiệm của phương trình (13) với điều kiện ban đầu $\zeta(0) = \xi_0$ là quá trình ngẫu nhiên m -chiều $\zeta(t), t \in [0, T]$ sao cho:

- a) Quá trình $\zeta(t)$ đo được dần đối với họ σ -trường $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$
- b) Mọi toạ độ của vectơ ngẫu nhiên $\{a(t, \zeta(t)), t \in [0, T]\}$ khả tích tuyệt đối trên đoạn $[0, T]$ với xác suất 1.

c) Mọi phần tử của ma trận ngẫu nhiên $\{\delta(t, \zeta(t)), t \in [0, T]\}$ bình phương khả tích trên đoạn $[0, T]$ với xác suất 1.

d) Quá trình $\zeta(t)$ có vi phân ngẫu nhiên xác định bởi

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + \delta(t, \zeta(t))dW(t) \text{ và } \zeta(0) = \zeta_0$$

Chú ý rằng khi $\delta(t, x) = 0$ thì phương trình (13) sẽ là phương trình vi phân thường, thoả điều kiện ngẫu nhiên ban đầu. Như vậy ta sẽ giải phương trình vi phân thường với mỗi ω xác định.

Ta nói rằng phương trình (13) có nghiệm duy nhất nếu đối với 2 nghiệm bất kỳ $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ ta có hệ thức:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)| > 0 \right\} = 0$$

Ta làm quen với định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

ĐỊNH LÝ 3.1.2

Giả sử các hệ số của phương trình (13) thoả các điều kiện:

(1) Với mọi $t \in [0, T], x \in R^m$ ta có:

$$|a(t, x)|^2 + |\delta(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2)$$

trong đó k là một hằng số; còn $|\delta(t, x)|^2 = \sum_{i,j=1}^m (\delta^{ij}(t, x))^2 \delta^{ij}(t, x)$ là các phần tử của ma trận $\delta(t, x)$

(2) Với mọi $R > 0$, tồn tại hằng số c_R sao cho, với $|x| \leq R; y \leq R$ và $t \in [0, T]$ ta sẽ có:

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\delta(t, x) - \delta(t, y)|^2 \leq c_R |x - y|^2$$

Khi đó sẽ tồn tại duy nhất nghiệm liên tục $\zeta(t), t \in [0, T]$ của phương trình (13). Chứng minh định lý trong quyển **Stochastic Differential Equations - An Introduction with Application** của B. Oksendal.

Mặc khác ta thấy rằng nghiệm của phương trình (13) có thể xác định bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp như sau:

Giả sử các hệ số $a(t, x), \delta(t, x)$ thoả điều kiện (1) của định lý 3.1.1 và điều kiện (2*) tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $\forall t \in [0, T], x, y \in R^m$

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\delta(t, x) - \delta(t, y)|^2 \leq c|x - y|^2$$

Ngoài ra ta còn giả định rằng $M|\xi_0|^2 < \infty$. Khi đó, đặt $\eta_0(t) = \xi_0$ và:

$$\eta_{n+1}(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \eta_n(s))ds + \int_0^t \delta(s, \eta_n(s))dW(s), \quad n=1,2,\dots$$

Sau khi bổ sung thêm những mệnh đề phụ trợ ta sẽ có được bất đẳng thức:

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t)|^2 \leq \frac{M^n T^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\dots$$

trong đó M là một hằng số nào đó.

Các bất đẳng thức trên cho ta kết luận được rằng chuỗi:

$$\eta_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t))$$

hội tụ đều với xác suất 1, nó chính là nghiệm của phương trình (13) khi các hệ số của phương trình thoả các điều kiện (1), (2) và điều kiện ban đầu $M|\xi_0|^2 < \infty$.

Nếu các điều kiện của định lý 3.1.2 được thoả và $M|\xi_0|^{2p} < \infty$ với một số p nguyên bất kỳ thì nghiệm của phương trình (13) với điều kiện ban đầu ξ_p thoả điều kiện $E|\xi(t)|^{2p} \leq k_p(1 + E|\xi_0|^{2p})$ với $t \in [0, T]$ và $E|\xi(t) - \xi_0|^{2p} \leq k'_p(1 + E|\xi_0|^{2p})$ với $t \in [0, T]$, trong đó k_p, k'_p là những hằng số chỉ phụ thuộc vào p, k và T .

Trong các điều kiện của định lý 3.1.2, nghiệm $\xi(t), t \in [0, T]$ của phương trình (13) có tính chất Markov đối với họ σ -trường $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$. Điều đó đồng nghĩa với mọi $0 \leq s \leq t \leq T, G \in \mathcal{B}, \mathcal{B}$ là σ -trường các tập Borel của R^m , với xác suất 1 ta sẽ có hệ thức:

$$P\{\xi(t) \in G/\mathcal{F}_s\} = P\{\xi(t) \in G/\xi(s)\}$$

Như vậy quá trình ngẫu nhiên $\xi(t), t \in [0, T]$ là một hàm ngẫu nhiên Markov với phân phối ban đầu:

$$\mu(G) = P\{\xi_0 \in G\}, G \in \mathcal{B}$$

Xác suất chuyển $p(s, x, t, G)$ của hàm ngẫu nhiên Markov $\xi(t)$ xác định bởi công thức:

$$p(s, x, t, G) = P\{\xi_{sx}(t) \in G\}, 0 \leq s \leq t \leq T, x \in R^m, G \in \mathcal{B}$$

trong đó $\xi_{sx}(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\xi_{sx}(t) = x + \int_s^t a(\tau, \xi_{sx}(\tau))d\tau + \int_s^t \delta(\tau, \xi_{sx}(\tau))dW(\tau) \quad (14)$$

Trong (14), x là vectơ ngẫu nhiên trong R^m , $t \in [s, T]$

Định lý 3.1.3

Giả sử các hàm số $a(t, x)$ và $\delta(t, x)$ thoả các điều kiện của định lý 3.1.2, ngoài ra chúng là những hàm liên tục theo tập hợp các biến số. Khi đó quá trình ngẫu nhiên $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ là nghiệm của phương trình (13) sẽ là một quá trình khuếch tán với vectơ chuyển dịch $a(t, x)$ và ma trận khuếch tán:

$$B(t, x) = \delta(t, x)\delta^T(t, x)$$

Như vậy, lý thuyết về quá trình vi phân ngẫu nhiên cho ta khả năng xây dựng các quá trình khuếch tán trong những điều kiện khá rộng đối với các hệ số $a(t, x)$ và $B(t, x)$.

Ngoài ra, nếu bổ sung thêm về tính trơn của các hàm $a(t, x)$, $\delta(t, x)$ ta có thể chứng minh sự tồn tại đạo hàm liên tục của hàm số:

$$u(s, x) = E\{(\xi_{sx}(t)), 0 \leq s \leq t \leq T, x \in R^m$$

theo biến x , khi đó ta sẽ thu được phương trình ngược Kolmogorov.

Định lý 3.1.4 Giả sử các hàm số $a(t, x)$ và $\delta(t, x)$ thoả điều kiện của định lý 3.1.2, chúng là những hàm liên tục và khả vi 2 lần theo biến x . Ngoài ra, với những số xác định $p > 0$ và $k > 0$ ta có bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} & \sum_{t,k=1}^m \left| \frac{\partial a^i(t, x)}{\partial x^k} \right| + \sum_{i,j,k=1}^m \left| \frac{\partial^2 a^i(t, x)}{\partial x^i \partial x^k} \right| + \sum_{i,j,k=1}^m \left| \frac{\partial \delta^{ij}(t, x)}{\partial x^k} \right| + \sum_{i,j,k,l=1}^m \left| \frac{\partial^2 \delta^{ij}(t, x)}{\partial x^k \partial x^l} \right| \\ & \leq k(1 + |x|^p) \end{aligned}$$

2. Một số phương trình đặc biệt

Quyển "Quá trình ngẫu nhiên - Phần 2"

Giải phương trình vi phân tuyến tính Itô - Levy

Phương trình vi phân ngẫu nhiên

Yêu cầu: Dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên

Nghiệm yếu và nghiệm mạnh
Các dạng đặc biệt của phương trình vi phân ngẫu nhiên
Phương trình vi phân tuyến tính.