Implementación de la matriz Non-Backtracking/Hashimoto

Ollin Demian Langle Chimal, Raúl Zagal Rojo, Ana Isabel Millán

8 de mayo de 2017

Introducción

El área de sistemas complejos es un enfoque que ocupa la ciencia para investigar cómo las relaciones entre un conjunto de individuos generan patrones colectivos de comportamiento y cómo las interacciones del sistema afectan su ambiente.
Con el objetivo de analizar los sistemas complejos se hace uso de representaciones en redes que codifican las interacciones entre los componentes de un sistema.

IMAGEN RED

La principal representación de una gráfica finita es una matriz de adyacencias. Los elementos de una matriz de adyacencias indican si un par de nodos están conectados en un grafo de tal forma que un elemento con valor de cero indica que no existe una conexión mientras que un valor distinto de cero indica que si existe una conexión. La conexión entre dos nodos puede denotar la dirección de la relación existente entre ellos. Cuando una conexión puede ir hacia cualquiera de los nodos decimos que el grafo es no dirigido, y por lo tanto su matriz de adyacencias es simétrica. En el caso que una conexión solo permita una única dirección en la relación, decimos que el grafo es dirigido y su matriz de adyacencias puede no ser simétrica.

IMAGEN

La matriz non backtracking o matriz de Hashimoto, es una representación de la estructura de conexiones de una red que es una forma alternativa a la matriz de adyacencias usual. Fue definida por Kiichoro Hashimoto en 1989. La matriz de Hashimoto puede ser usada para identificar caminatas “non-backtracking” en una red. Esto se refiere a que las caminatas no son de un nodo ii a un nodo jj solo para inmediatamente regresar al nodo ii. Esta propiedad de la matriz de Hashimoto la hace úil para definir medidas de centralidad, que corrigen la importancia exagerada que se le da a los nodos de alto grado en métricas comunes como la de centralidad por eigenvectores.

Definición de la matriz

Sea G un grafo con N nodos y M potenciales conexiones potencialmente dirigidas. La matriz de Hashimoto es una matrix M x M con un renglón y una columna para cada conexión en la red. La matriz está definida para conexiones dirigidas, pero frecuentemente se aplica para redes no dirigidas reemplazando cada conexión no dirigida entre ii y jj con un par de conexiones dirigidas $i \to ji \to j$ y $j \to ij \to i$

La matriz codifica información de secuencias de conexiones que podemos seguir en una caminata en la red. Es decir, si pasamos por la conexión $i \to ji \to j$ la matriz de Hashimoto nos dice que conexiones $k \to l$ son permitidas en el siguiente paso de la caminata.

Matemáticamente la matriz de Hashimoto BB está dada por:

$$ B_{kl , i j} = {

$$
\begin{matrix} 1 & si & j = k & y & l \neq i \\ 0 & de & cualquier & otra & forma \end{matrix}
$$

. $$

Si consideramos una red con tres nodos y 4 conexiones dirigidas.

IMAGEN 3 NODOS

La matriz de adyacencias está dada por:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Mientras que la matrix de Hashimoto está dada por:

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Las potencias de la matriz de Hashimoto generan caminatas non-backtracking en la red. Los elementos de la diagonal de las potencias de B corresponden a caminatas cerradas que regresan al punto de inicio mientras cumplen el principio de non-backtracking.

Si obtenemos B cuadrada:

$$
B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Esta matriz indica que no hay caminatas no cerradas, non-backtracking con dos saltos en esta red. Observavmos que la única caminata cerrada de longitud 2 (conexión 11 seguida de la 22) viola la condición non-backtracking. No hay caminatas con dos saltos que sean cerradas y non-backtracking al mismo tiempo, esto es verdad en general para todas las redes.

Metodología

Implementación

Resultados

Conclusiones