

Лабораторная работа № 4.3.6  
Саморепродукция

Нехаев Александр. гр. 654

6 октября 2018 г.

# Содержание

# 1. Введение

**Цель работы** Изучение явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

**В работе используются** лазер, кассета с сетками, мира, короткофокусная линза с микрометрическим винтом, экран, линейка.

**Теоретическое введение** Выражение для плоской монохроматической волны имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \psi_0)}, \quad (1)$$

где  $a_0$  - амплитуда,  $\omega$  - круговая частота,  $\mathbf{k} = (u, v, q)$  - волновой вектор,  $\psi_0$  - начальная фаза. Колебания происходят синфазно во всех точках плоскости:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z = \text{const}. \quad (2)$$

Для плоской волны (??) комплексную амплитуду можно представить в виде

$$f(x, y, z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{ux+vy} e^{\sqrt{k^2-u^2-v^2} \cdot z} = f(x, y, 0) e^{\sqrt{k^2-u^2-v^2} \cdot z}. \quad (3)$$

Пусть плоская волна падает нормально на транспарант, расположенный в плоскости  $z = 0$ . Комплексную амплитуду волны в плоскости  $z = 0_+$  получаем, умножив комплексную амплитуду на входе в транспарант на функцию пропускания транспаранта  $t(x, y)$ . Для простоты далее будем рассматривать случай  $t(x, y) = t(x)$ . Если функция пропускания периодична с пространственным периодом  $d$ , то комплексная амплитуда на выходе также будет периодической функцией с периодом  $d$

$$f(x, 0_+) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{iu_n x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{d} n x}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $c_n$  можно найти с помощью формулы

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f(x, 0_+) e^{-i \frac{2\pi}{d} n x} dx \quad (5)$$

Для нахождения комплексной амплитуды волны в произвольной плоскости  $z = \text{const}$  нужно домножить комплексные амплитуды плоских волн в суперпозиции (??) на соответствующий фазовый множитель (равенство ??):

$$f(x, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{iu_n x} e^{\sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z} \quad (6)$$

То есть, каждая плоская волна приобретает дополнительный набег фаз  $\varphi_n$ . Для параксиальных волн ( $u_n \ll 1$ )

$$\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z \approx kz - \frac{u_n^2}{2k} z \quad (7)$$

Таким образом, для любых двух плоских волн разность набегов фазы равна

$$\Delta\varphi_{n,m} = (u_m^2 - u_n^2) \frac{z}{2k} = (m^2 - n^2) \frac{\pi\lambda}{d^2} z. \quad (8)$$

В плоскости

$$z_N = \frac{2d^2}{\lambda} N \quad (9)$$

разница набегов фаз становится кратной  $2\pi$ . Поэтому в результате интерференции волн в этой плоскости получается изображение, тождественное исходному периодическому объекту. Это и есть *эффект саморепродукции*.

## 2. Схема установки

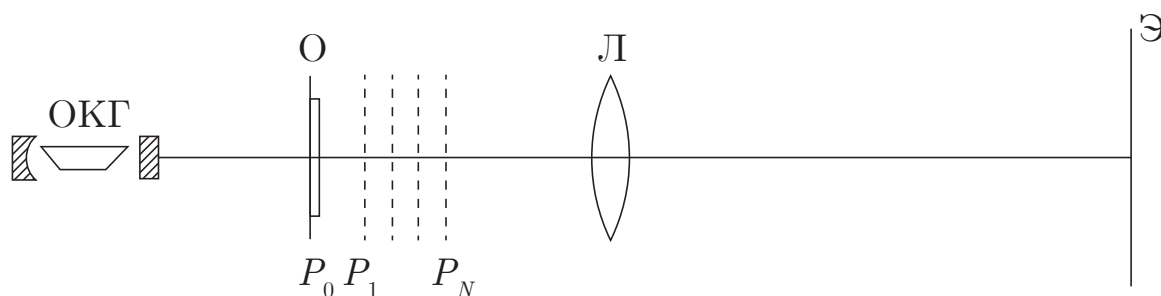


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

## 3. Ход работы

В нашем эксперименте  $\lambda = 532$  нм.

### 3.1. Исследование двумерных решеток

#### 3.1.1. Определение периода решеток по их пространственному спектру

- 1) Закрепим кассету с двумерными решетками (сетками) вблизи выходного окна лазера так, чтобы в окошке под отверстием с сеткой был виден её номер.
- 2) Для каждой сетки определим расстояние  $x$  между соседними дифракционными максимумами на экране: измерим расстояние  $X$  между двумя достаточно удалёнными друг от друга максимумами и поделим на число промежутков  $m$  между ними ( $x = X/m = f(N)$ ). По формуле  $d = \frac{L\lambda}{x}$ , определим период решетки  $d$ . Результаты занесем в таблицу ??.

№	1	2	3	4	5
$X$ , см	7	4.8	4.8	2.5	1.4
$m$	2	2	4	4	3
$x$ , мм	35	24	12	6.25	4.67
$d$ , мкм	20.52	29.925	59.85	114.912	153.9

Таблица 1: Исследование с помощью спектра.  $L = 135$  см.

### 3.1.2. Определение периода решёток по изображению, увеличенному с помощью линзы

- 1) Закрепим короткофокусную линзу на небольшом расстоянии от лазера. Временно удалив кассету с сетками из луча и центрировкой линзы совместим световое пятно, сформированное линзой, с положением луча на экране в отсутствие линзы. Передвигая линзу с помощью микрометрического винта, сначала убедимся, что световое пятно на экране неподвижно, затем переместим линзу как можно ближе к кассете.
- 2) Установим кассету с сетками между лазером и линзой и, перемещая её вдоль оси системы, получим на экране увеличенное изображение одной из сеток. Изображение сетки периодически повторяется в пространстве, поэтому для того, чтобы среди множества репродуцированных изображений сетки можно было выделить её геометрическое изображение, на одну из сеток наложена тонкая проволочка, т. е. непериодический объект, изображение которого не репродуцируется. Найдем резкое изображение проволочки; убедимся, что при смене сеток резкость изображений не нарушается.
- 3) Определим размеры  $D$  клеток на экране. Результаты занесем в таблицу ??

№	1	2	3	4	5
$D$ , мм	0.5	5.5	9	3	4.5
$m$	1	7	6	1	1
$d$ , мкм	67.06	105.38	201.17	402.35	603.52

Таблица 2: Исследование по изображению.  $a = 16$  см,  $b = 119.3$  см.

### 3.1.3. Исследование эффекта саморепродукции с помощью сеток

Получим на экране геометрическое изображение сетки. Перемещая линзу с помощью микровинта, определим по нониусной шкале координаты  $z_N$  плоскостей саморепродукции, соответствующих чёткому изображению сетки на экране.

Повторим измерения для других сеток.

Для крупных сеток полезно при измерениях строить графики  $z_N = f(N)$ , чтобы по формуле (??) рассчитать период сеток  $d_{\text{реп}} = f(N)$ . Рассчитаем значения для  $d$  и занесем

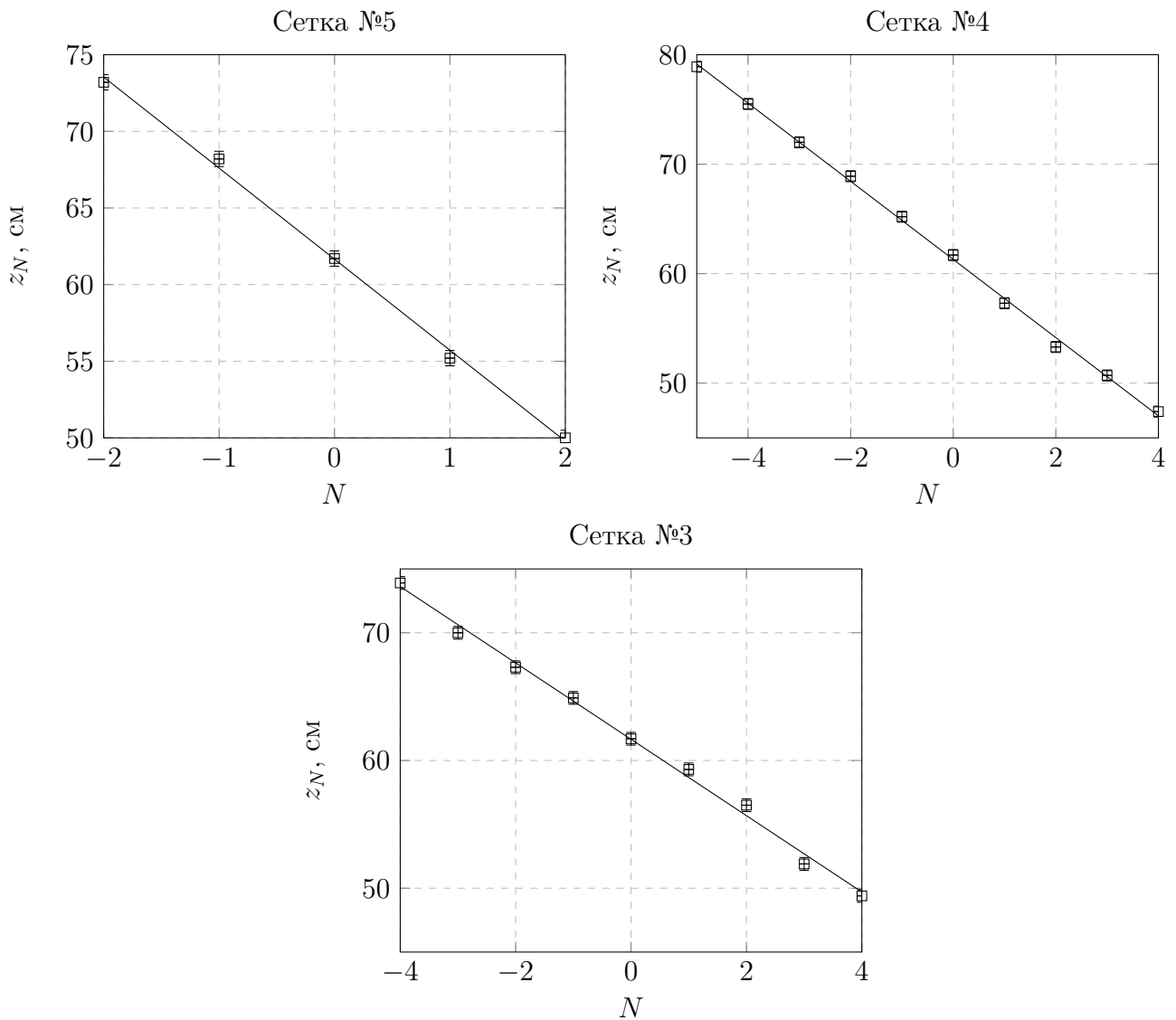
		№		5						
		N		-2	-1	0	1	2		
		$z_N$ , CM		73.2	68.2	61.7	55.2	50		

№	4									
N	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$z_N$ , CM	78.9	75.5	72	68.9	65.1	61.7	57.3	53.3	50.7	47.4

№		3								
N		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$z_N$ , CM		78.9	75.5	72	68.9	65.1	61.7	57.3	53.3	50.7

Таблица 3: Исследование репродукции

их в таблицу ??.



№	3	4	5
$d$ , мкм	$89.2 \pm 17.8$	$97.4 \pm 19.5$	$125.6 \pm 25.1$

Таблица 4: Расчет  $d$  через репродукцию.

### 3.2. Исследование решеток мира

Ввиду сложности настройки на определенный элемент мира предлагается следующий порядок измерения периодов: для одного элемента сначала по саморепродукции, затем по увеличенному изображению и, наконец, по спектру.

- 1) Рассмотрим миру в отраженном свете. Убедимся, что самые мелкие решетки расположены внизу. Найдем элемент мира с номером 25.
- 2) Установим миру на место кассеты (стекло мира обращено к линзе) таким образом, чтобы на экране было видно резкое увеличенное изображение цифры 25. Перемещая рейтер с мирой перпендикулярно лучу, осветим одну из ближайших сеток. Перемещением мира подведем пятно лазера к центру выбранной решетки и уточним настройку на геометрическое изображение с помощью микровинта.
- 3) Перемещая линзу с помощью микрометрического винта, определим по нониусной

шкале координату плоскости, соответствующей изображению миры на экране по законам геометрической оптики, и координаты плоскостей саморепродукции.

- 4) Вернем линзу в положение, соответствующее изображению по законам геометрической оптики. Определим параметры изображения миры на экране; измерим расстояние от линзы до экрана и до миры.
- 5) Поворотом линзы в рейтере вокруг вертикальной оси выведем линзу из луча и проведем измерения спектра миры.
- 6) Потворим всю серию измерений для миры с номером 20.
- 7) Занесем результаты измерений в таблицу 6.

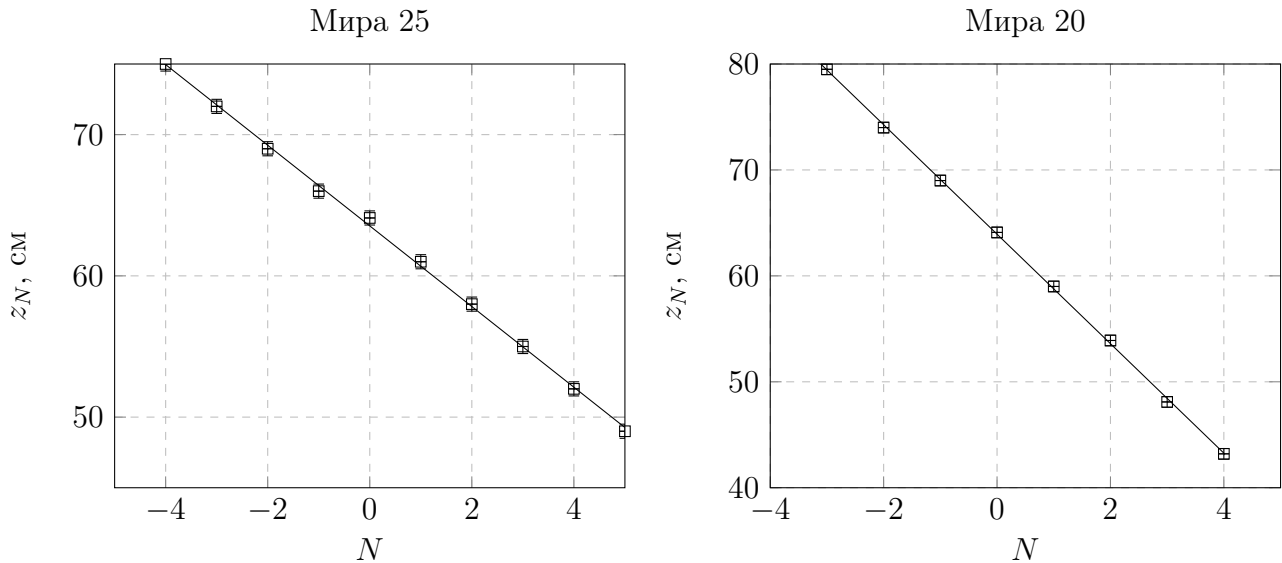
По спектру		По изображению	
Мира 25	Мира 20	Мира 25	Мира 20
$l = 1.8$	$l = 1.35$	$p = 0.1$	$p = 0.14$

Таблица 5: Исследование решеток миры

Мира 25										
N	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$z_N$	75	72	69	66	64,1	61	58	55	52	49
Мира 20										
N	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
$z_N$	79,5	74	69	64,1	59	53,9	48,1	43,2		

Таблица 6: Репродукция на решетках миры

Для решеток миры проведем расчеты, аналогичные расчетам для сеток.



Сведем все результаты для миры в одну таблицу:

Таблица 7: Периоды решеток миры в микрометрах

	Спектр	Увеличенное изображение	Репродукция
Мира 25	$39.8 \pm 4.8$	$42.63 \pm 5.5$	$43.57 \pm 8.7$
Мира 20	$53.0 \pm 6.4$	$58.1 \pm 7.6$	$58.6 \pm 11.7$

## 4. Вывод

В проделанной работе было изучено явление саморепродукции изображения периодической структуры при освещении монохроматическим светом. Также были изучены методы определения параметров периодических структур и получены их значения.