Лабораторная работа №5

Методы решения уравнения переноса

Вариант 3, задача 1

Дифференциальная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0; & 0 < t \le 1,\ 0 \le x < 1; \\ u[x, 0] = \text{Cos}[x]; & u[1, t] = \text{Cos}[1 + 2t]; \end{cases}$$

Разностная схема

$$D_h = \left\{ \left(x_l, t^n\right) : x_l = h\,l,\ h\,L = 1,\ l = \overline{0, L};\ t^n = n\,\tau;\ \tau\,N = 1,\ n = \overline{0, N} \right\},$$

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + \frac{\tau}{3h}\left(2u_{l+3}^n - 9u_{l+2}^n + 18u_{l+1}^n - 11u_l^n\right) + & l = \overline{0, L-3},\ n = \overline{0, N-1} \\ \frac{2\tau^2}{h^2}\left(-u_{l+3}^n + 4u_{l+2}^n - 5u_{l+1}^n + 2u_l^n\right) + \frac{4\tau^2}{3h^2}\left(u_{l+3}^n - 3u_{l+2}^n + 3u_{l+1}^n - u_l^n\right) & \\ u_l^0 = \text{Cos}[x_l] & l = \overline{0, L} \\ u_L^n = \text{Cos}\left[1 + 2t^n\right] & n = \overline{1, N} \\ u_{L-1}^n = ? & n = \overline{1, N} \\ u_{L-1}^n = ? & n = \overline{1, N} \end{cases}$$

Решение

Основные этапы:

1. Аналитическое решение дифференциальной задачи и построение следа в выбранном конечномерном пространстве;
2. Вывод дополнительных разностных уравнений, где это необходимо;
3. Исследование разностной схемы на аппроксимацию и спектральную устойчивость, используя принцип замороженных коэффициентов;
4. Разработка алгоритма решения разностной задачи и его реализация в виде программы, написанной на алгоритмическом языке высокого уровня;
5. Отладка программы с учетом вычисленных значений следа аналитического решения;
6. Проведение практических исследований свойств используемой разностной схемы на последовательно удваиваемых сетках:
   - **a.** соответствует ли порядок сходимости численного решения порядку аппроксимации на решении, установленному в пункте 3;
   - **b.** насколько сильно зависят численные результаты от выполнения условий устойчивости и что происходит, когда они нарушаются;
   - **c.** как изменится порядок сходимости, если при задании дополнительных разностных уравнений оставить меньшее число слагаемых в разложении в ряд Тейлора значений следа;
   - **d.** предложить и опытным путем проверить свои варианты задания дополнительных граничных уравнений;
   - **e.** выяснить, насколько сильно значения решения при t=1 зависят от начальных или граничных условий, и объяснить полученный результат.

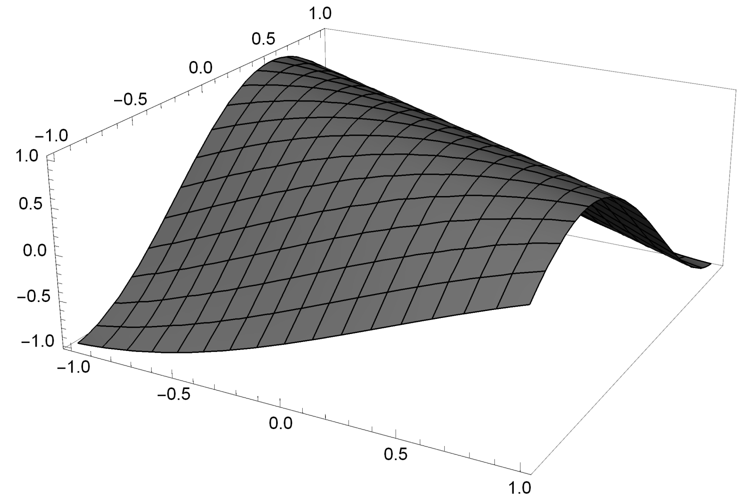
Аналитическое решение задачи

Найдем аналитическое решение уравнения:

In[7]:=
```
pde=D[u[x,t],t]-2D[u[x,t],x]==0;
sol=DSolve[{pde,u[x,0]==Cos[x]},u[x,t],{x,t}]
Plot3D[u[x,t]/.sol,{x,-1,1},{t,-1,1}]
```

Out[8]= {{u[x, t] → Cos[2 t + x]}}

Out[9]=



Установим решение в качестве функции для вычисления значений на сетке:

In[10]:=
```
AnalyticEval[x_,t_]:=N[Cos[2 t+x]];
```

В качестве конечномерного пространства, на котором будет происходить сравнение получаемых на последовательно удваиваемых сетках численных решений, предлагается брать $D_n = \{(x,\ t = 1) : x_l = h\,l,\ \ h\,L = 1,\ \ l = \overline{0,\ L},\ \ L = 10\}$, т.е. равномерную по x сетку с одиннадцатью узлами, расположенными на временном слое $t = T = 1$. Следующим шагом является построение следа, т.е. вычисление значений аналитического решения в одиннадцати равноудаленных точках при $t = 1$.

In[11]:=
```
L=10;
trail=Table[AnalyticEval[x,1],{x,0,1,1/L}]
```

Out[12]= {−0.416147, −0.504846, −0.588501, −0.666276, −0.737394, −0.801144, −0.856889, −0.904072, −0.942222, −0.970958, −0.989992}

Построение разностных схем

Разностная схема дана в условии задачи. Однако нам не хватает разностных уравнений $u_{L-1}^n,\ n = \overline{1,\ N}$ и $u_{L-2}^n,\ n = \overline{1,\ N}$.

Запишем разложение значений следа $[u]_l{}^n,\ n = \overline{1,\ N}$ в ряд Тейлора до третьего порядка по h включительно:

$$[u]_l^n = [u]_0^n + [u_x{}']_0^n\,h + [u_{x\,x}{}'']_0^n\,\frac{h^2}{2} + [u_{x\,x\,x}{}''']_0^n\,\frac{h^3}{6} + O\big[h^4\big].$$

Для нахождения $[u_x{}']_0^n$, $[u_{x\,x}{}'']_0^n$ можно воспользоваться формулами:

$$\big[u_x^{'}\big]_0^n = \frac{1}{a_0^n}\,(-[\,\dot{u}_t]_0^n + b_0^n),\ \ n = \overline{1,\ N}$$

$$\left[u''_{x\,x}\right]_0^n = \frac{1}{(a_0^n)^2} \left\{\left(\ddot{\psi}_{t\,t}\right)_0^n + \left[(\dot{a}_t)_0^n - a_0^n\left(a'_x\right)_0^n\right] \frac{1}{a_0^n}\left[b_0^n - \left(\dot{\psi}_t\right)_0^n\right] - \left(\dot{b}_t\right)_0^n + a_0^n\left(b'_x\right)_0^n\right.$$

Третью частную производную по x будем выражать через третью частную производную по времени, последовательно выполняя следующие преобразования: во-первых, вычислим частную производную по времени от левой и правой частей уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(x,\ t)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial a(x,\ t)}{\partial t} - a(x,\ t)\ \frac{\partial a(x,\ t)}{\partial x}\right] \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,\ t)}{\partial t} - a(x,\ t)\ \frac{\partial b(x,\ t)}{\partial x}$$

и получим:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2\ \frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + 2\,a\ \frac{\partial a}{\partial t}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial a}{\partial t} - a\ \frac{\partial a}{\partial x}\right] \frac{\partial u^2}{\partial t\,\partial x} - \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - a\ \frac{\partial^2 a}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t}\ \frac{\partial a}{\partial x}\right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - a\ \frac{\partial^2 b}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t}\ \frac{\partial b}{\partial x}$$