Вторая контрольная работа по вычислительной математике
Вариант №37

Нехаев Александр, гр. 654

21 декабря 2018 г.

Задача №1

Условие

Сформулировать теорему о сходимости итерационного метода Ньютона $f(x) = 0$. Показать, что при выполнении условий теоремы о сходимости метода Ньютона для скалярного уравнения $f(x) = 0$ последовательность приближений

$$\{x_n : x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$$

является ограниченной либо снизу, либо сверху.

Решение

Теорема Если $f(a)f(b) < 0$, ($[a, b]$ – отрезок локализации) причем f'_x, f''_{xx} непрерывные и знакопостоянные на $[a, b]$ в области локализации корня x^*, то исходя из начального приближения x_0, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''_{xx}(x_0) > 0$ можно получить по формуле итерационного метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'_x(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, ...$, единственный корень уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности.

Доказательство Рассмотрим только случай $f'_x, f''_{xx} > 0$. Также предположим, что $x^* < x_0$ (тогда выполнено $f(x_0)f''_{xx}(x_0) > 0$). Докажем, что $\{x_n\}$ ограничена снизу.

Рассмотрим значение $f(x^*)$. Оно равно 0. Разложим функцию в ряд Тейлора:

$$f(x^*) = 0 = f(x_n) + f'_x(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''_{xx}(\xi)(x^* - x_n)^2}{2}, \quad \xi \in [a, b]$$

Далее запишем формулу метода Ньютона в виде

$$0 = f(x_n) = f'_x(x_n)(x_{n-1} - x_n)$$

После простого преобразования легко видеть:

$$f'_x(x_n)(x^* - x_{n+1}) + \frac{f''_{xx}(\xi)(x^* - x_n)^2}{2} = 0 \tag{1}$$

В области локализации $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ все второе слагаемое левой части (**??**) положительно.

Следовательно:

$$f'_x(x_n)(x^* - x_{n+1}) < 0 \to x^* - x_{n+1} < 0 \Rightarrow x^* < x_{n+1}$$

значит последовательность ограничена снизу.

Аналогично доказывается ограниченность сверху.

Задача №2

Условие

Для решения задачи Коши (а) предложена разностная схема (б). Исследовать разностную задачу (б) на аппроксимацию и определить порядок сходимости её решения к следу решения дифференциальной задачи (а) при $h = 1/L \to 0$.

а) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = a, \quad a = \text{const} \\ y(0) = 0, \quad y'_x(0) = 0, \quad x \in [0, 1] \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = a, \quad l = \overline{1, L-1} \\ y_0 = 0, \quad (-y_2 + 4y_1 - 3y_0)/2h = 0 \end{cases}$

Решение

Вектор невязки:

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \frac{[y]_{l+1} - 2[y]_l + [y]_{l-1}}{h^2} - a \\ [y]_0 - 0 \\ \frac{-[y]_2 - 4[y]_1 - 3[y]_0}{2h} - 0 \end{cases}$$

Ряды:

$$[y]_{l\pm1} = [y]_l \pm [y'_x]_l h + [y''_x]_l \frac{h^2}{2} \pm [y'''_x]_l \frac{h^3}{6} + [y''''_x]_l \frac{h^4}{24} + o(h^3)$$

$$[y]_1 = [y]_0 + [y'_x]_0 h + [y''_x]_0 \frac{h^2}{2} + [y'''_x]_0 \frac{h^3}{6} + o(h^4)$$

$$[y]_2 = [y]_0 + [y'_x]_0 2h + [y''_x]_0 \frac{4h^2}{2} + [y'''_x]_0 \frac{8h^3}{6} + o(h^4)$$

Подставив, получим:

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} [y''_x]_l - a + [y''''_x] \cdot \frac{h^2}{12} + o(h^3) \\ 0 \\ [y'_x]_0 + [y'''_x]_0 \cdot \frac{h^3}{2} + o(h^4) \end{cases} = \begin{cases} ch^2 \\ 0 \\ ch^3 \end{cases}$$

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\| = \max_l \left(|\delta f_l|\right) \leqslant ch^2$$

2-й порядок аппроксимации

Сходимость:

Решим ЗК:

$$y(x) = \frac{ax^2}{2}$$

След:

$$[y]_h = \left\{ [y]_l = \frac{al^2h^2}{2}, \ l \in \overline{0; L}, \ Lh = 1 \right\}$$

Система уравнениий:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ -y_2 + 4y_1 - 3y_0 = 0 \\ y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1} = ah^2 \end{cases}$$

Характеристические уравнения:

$$q^{l+1} - 2q^l + q^{l-1} = 0$$

$$q^{l-1}(q^2 - 2q + 1) = 0 \Rightarrow q = 1 \text{ кр. } 2$$

$$y_{l_{oy}} = C_1 + C_2 l$$

Ищем частные решения в виде $y_{\text{чр}} = Al^2$:

$$A(l+1)^2 - 2Al^2 + A(l-1)^2 = ah^2$$

$$l(A - 2A + A) + l(2A - 2A) + (A + A) = ah^2$$

$$A = \frac{ah^2}{2}$$

$$y_l = C_1 + C_2 l + \frac{ah^2}{2} l^2$$

Из начальных условий: $y_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
$-y_2 + 4y_1 - 3y_0 = 0 \Rightarrow -(0 + 2C_2 + 2ah^2) + 4(0 + C_2 + \frac{ah^2}{2}) - 3 = 0$
$2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$
$y_l = 0 + \frac{ah^2}{2} l^2$
Разность: $\left\| [y]_h - y^{(h)} \right\| = \max_l \left(\left| \frac{a}{2} h^2 l^2 - 0 - \frac{a}{2} h^2 l^2 \right| \right)$

$$\left| \frac{a}{2} h^2 l^2 - 0 - \frac{a}{2} h^2 l^2 \right| = 0$$

Бесконечный порядок сходимости.

Задача №3

Условие

Построить кубический сплайн для таблично заданной функции и её первой производной.

x	-1	0	1
$y(x)$	-2	1	1
$y'_x(x)$	2	3/2	1

Решение

Общий вид функций кубического сплайна:

$$\begin{cases} S_1(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ S_2(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{cases}$$

Применим условия из таблицы к этим уравнениям:

$$\begin{cases} S_1(-1) = -2 \\ S_1'(-1) = 2 \\ S_1(0) = 1 \\ S_1'(0) = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -2 \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3/2 \\ a_2 = -4 \\ a_3 = -5/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2(0) = 1 \\ S_2'(0) = 3/2 \\ S_2(1) = 1 \\ S_2'(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 3/2 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 3/2 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 5/2 \end{cases}$$

Итоговый ответ:

$$\begin{cases} S_1(x) = 1 + \frac{3x}{2} - 4x^2 - \frac{5x^3}{2} \\ S_1(x) = 1 + \frac{3x}{2} + 4x^2 + \frac{5x^3}{2} \end{cases}$$

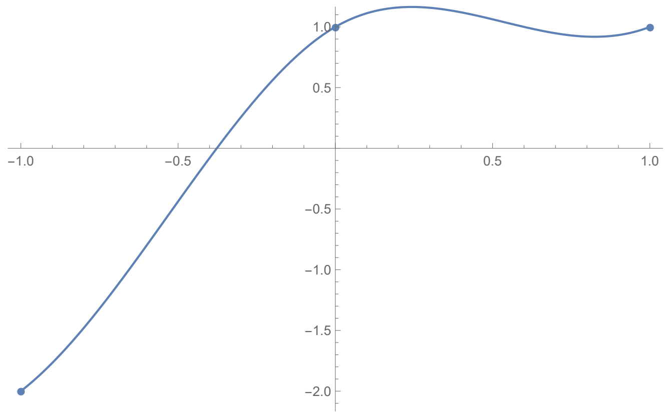

Рис. 1: Полученный сплайн

Задача №4

Условие

Написать итерационную формулу метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} xy = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

Решение

В данном случае $f_1(x,y) = xy - 1$, $f_2(x,y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2\sin x \cos x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2\sin y \cos y$. Таким образом,

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{\xi}} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2\cos x \sin x & 2\cos y \sin y \end{pmatrix}, \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{\xi}}\right]^{-1} = \frac{1}{2y\cos y \sin y - 2x \cos x \sin x} \begin{pmatrix} 2\cos y \sin y & -x \\ -2\cos x \sin x & y \end{pmatrix},$$

где использованы обозначения $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{F}\left(\vec{\xi}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$. В итоге получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n y_n - 1)\sin y_n \cos y_n - (\sin^2 x_n + \sin^2 y_n - 1)x_n}{2y_n \cos y_n \sin y_n - 2x_n \cos x_n \sin x_n},$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n(\sin^2 x_n + \sin^2 y_n - 1) - 2(x_n y_n - 1)\cos x_n \sin x_n}{2y_n \cos y_n \sin y_n - 2x_n \cos x_n \sin x_n}.$$

Задача №5

Условие

При каких значениях параметра τ метод $\vec{x}_{n+1} = (E = \tau A)\vec{x}_n + \tau\vec{b}$, $n = 0, 1, \ldots$ решения $A\overline{x} = \overline{b}$ сходится при произвольном приближении $\overline{x}_0$ в случае $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение

$\det|A-\lambda E| = (4-\lambda)(7-\lambda) - 30 = 28 - 4\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 30 = \lambda^2 - 11\lambda - 2.$
$\lambda_1 = \frac{1}{2}(11-\sqrt{129}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(11+\sqrt{129}).$

$$\begin{cases} |1-\lambda_1\tau| < 1 \\ |1-\lambda_2\tau| < 1 \end{cases}$$

Нет пересечений $\Rightarrow$ ни при каком.