

# Лабораторная работа 4.7.1

## Двойное лучепреломление

Нехаев Александр, гр. 654

22 марта 2018 г.

## Содержание

1. Введение	2
2. Теоретические основы	2
3. Экспериментальная установка	8
4. Ход работы	8
5. Вывод	11

# 1. Введение

**Цель работы:** изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления  $n_0$  — обыкновенной и  $n_e$  — необыкновенной волны в кристалле; наблюдение эффекта полного внутреннего отражения.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

## 2. Теоретические основы

**Двойное лучепреломление.** При падении световой волны на границу изотропной среды и этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропна, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется *двойным лучепреломлением*.

**Плоские волны в кристаллах.** В отсутствие электрических зарядов и токов уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны. Запишем такую волну в комплексном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{B} = \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \quad (2)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота,  $\vec{k}$  — волновой вектор, а амплитуды  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$ ,  $\vec{D}_0$  постоянны. Вектор  $\vec{B}$  совпадает с  $\vec{H}$ , так как  $\mu = 1$ . Обозначим координатные орты через  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  и получим:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i [\vec{k} \vec{H}] \quad (3)$$

Аналогично для  $\operatorname{rot} \vec{E}$ . В результате (1) перейдут в

$$[\vec{k} \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}; \quad [\vec{k} \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \quad (4)$$

Введем единичный вектор нормали  $\vec{N}$  к фронту волны и скорость распространения фронта в направлении этой нормали  $v$ . Тогда  $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{N}$  и предыдущие соотношения перейдут в

$$\vec{D} = -\frac{c}{v} [\vec{N} \vec{H}]; \quad \vec{B} = \frac{c}{v} [\vec{N} \vec{E}]. \quad (5)$$

Отсюда видно, что векторы  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{N}$  взаимно перпендикулярны. Значит плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . Однако в общем случае они не поперечны в отношении векторов  $\vec{E}$ .

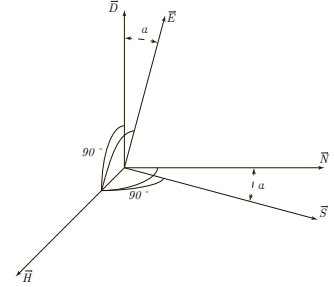
В изотропной среде:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (6)$$

$\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость

В анизотропной среде:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad (7)$$



Плоскость  $(\vec{E}, \vec{H})$  обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$ , т.е. направление распространения световых волн. Четыре вектора  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{S}$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{H}$ . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

Рис. 1: Расположение векторов  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{S}$  в анизотропной среде

**Оптически одноосные кристаллы.** Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипса.

$e_x, e_y, e_z$  — главные значения диэлектрической проницаемости  
 $\sqrt{e_x}, \sqrt{e_y}, \sqrt{e_z}$  — главные показатели преломления.

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z \quad (8)$$

В оптически одноосном кристалле эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нем оптическая ось совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрической проницаемостей приняты обозначения:  $\varepsilon_z = \varepsilon_{||}$  и  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$ . Связь между проекциями

векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на оптическую ось кристалла ( $\vec{D}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\parallel}$ ) и на плоскость, перпендикулярную оси ( $\vec{D}_{\perp}$  и  $\vec{E}_{\perp}$ ):

$$\vec{D}_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp}. \quad (9)$$

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции  $\vec{D}_o$  которой перпендикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции  $\vec{D}_e$ , лежащим в главном сечении (рис. 2). Главным сечением кристалла называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, в которой вектор  $\vec{D}_o$  перпендикулярен главному сечению. Тогда  $D_{oz} = 0$ , и из условия  $D_z = \varepsilon_z E_z$  следует, что  $E_{oz} = 0$ .

Кроме того, так как  $D_{oy} = \varepsilon_{\perp} E_{oy}$  и  $D_{ox} = \varepsilon_{\perp} E_{ox}$ , то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_o. \quad (10)$$

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответствующий показатель преломления. Из (5) имеем

$$D_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o \quad (11)$$

или, учитывая (10),

$$\varepsilon_{\perp} E_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o, \quad (12)$$

откуда

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \quad \text{и} \quad n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}. \quad (13)$$

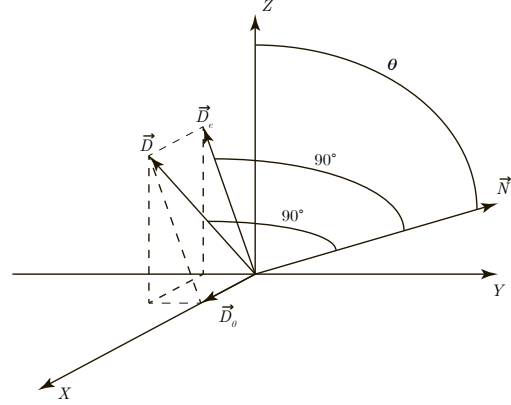


Рис. 2: Расположение векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{D}$  в анизотропной среде:  $(\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e; \vec{D}_o \perp \vec{D}_e; \vec{D} \perp \vec{N})$ ;  $\vec{N}$  и  $\vec{D}_e$  лежат в плоскости  $(Z, Y)$ ;  $\vec{D}_o$  перпендикулярен плоскости  $(Z, Y)$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и её показатель преломления не зависят от направления распространения.

У необыкновенной волны вектор  $\vec{D}_e$  не параллелен  $\vec{E}_e$ , и связь между сложнее, чем в (10).

Для того чтобы найти скорость распространения  $v$  и показателя преломления необыкновенной волны  $n = c/v$ , достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны  $\vec{D}_e$  и проекцией на него вектора электрического поля волны  $E_{eD}$ . Тогда, подставляя  $D_e = \varepsilon E_{eD}$  в (5), приходим к соотношениям

$$\varepsilon E_{eD} = \frac{c}{v} H_e; \quad H_e = \frac{c}{v} E_{eD}, \quad (14)$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Роль величины  $\varepsilon_\perp$  теперь играет величина  $\varepsilon$ , а показатель преломления необыкновенной волны равен  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Найдем связь между  $D_e$  и  $E_{eD}$ . Для этого разложим векторы  $\vec{D}_e$  и  $\vec{E}_e$  на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\vec{D}_e = \vec{D}_{e\parallel} + \vec{D}_{e\perp}. \quad (15)$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp}. \quad (16)$$

Учитывая (9), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_e \vec{D}_e}{D_e} = \frac{E_{e\parallel} D_{e\parallel} + E_{e\perp} D_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\parallel}^2 / \varepsilon_\parallel + D_{e\perp}^2 / \varepsilon_\perp}{D_e} \quad (17)$$

или

$$E_{eD} = D_e \left( \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_\perp} \right) = \frac{D_e}{\varepsilon}, \quad (18)$$

где  $\theta$  — угол между оптической осью  $Z$  и волновой нормалью  $N$  (рис. 2):

$$\sin \theta = \frac{D_{e\parallel}}{D_e}, \quad \cos \theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e}. \quad (19)$$

Таким образом,  $\varepsilon$  и соответственно скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны  $n = \sqrt{\varepsilon}$  через главные показатели преломления  $n_o$ ,  $n_e$  и угол  $\theta$ :

$$\frac{1}{[n(\theta)]^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (20)$$

При  $n_o - n_e \ll n_o$  и  $n_e$  (для исландского шпата  $n_o = 1,655$ ,  $n_e = 1,485$  для  $\lambda = 0,63$  мкм (20) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta. \quad (21)$$

**Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата.** Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3).

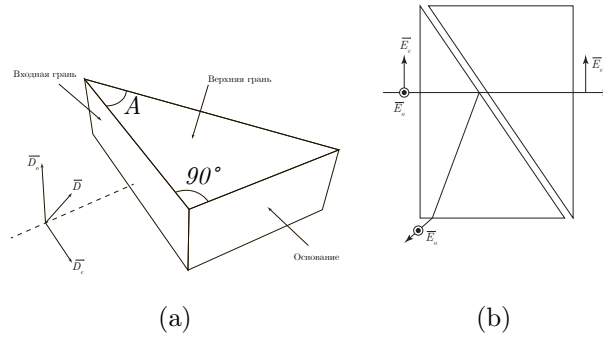


Рис. 3: (а) Исследуемая призма из исландского шпата. (б) Ход лучей в поляризационной призме.

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор  $\vec{D}_o$  перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор  $\vec{D}_e$  параллелен верхней грани.

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух волн ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор  $\vec{D}$  направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для нее равен  $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Волна, в которой

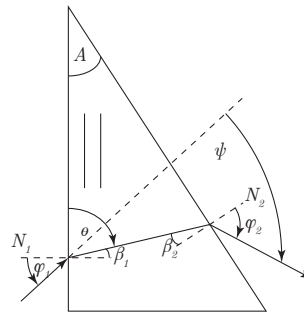


Рис. 4: Ход лучей в призме

вектор  $\vec{D}$  направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы  $\varphi_1$  и угол  $\varphi_2$  на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1;$$

$$\sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin (A - \beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы  $\beta_2$  через угол преломления на первой грани призмы  $\beta_1$  и угол при вершине призмы  $A$ . Как видно из рис. 4, эти углы связаны простым соотношением  $A = \beta_1 + \beta_2$ . Учитывая, что угол преломления  $\beta_1$  связан с углом  $\theta$  между осью кристалла и волновой нормалью  $\vec{N}$  соотношением  $\theta + \beta_1 = \pi/2$ , найдем  $n$  и  $\theta$ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}; \quad (22)$$

$$\cos \varphi = \frac{\sin \varphi_1}{n}.$$

Для обыкновенной волны  $n$  не будет зависеть от угла  $\theta$ , а для необыкновенной волны зависимость  $n$  от  $\theta$  должна описываться выражением (20).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой ( $\psi$  на рис. 4) минимален для симметричного хода лучей, т.е. когда  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin \left( \frac{\psi_m + A}{2} \right)}{\sin \left( \frac{A}{2} \right)}, \quad (23)$$

где  $\psi_m$  — угол наименьшего отклонения.

Если призма не изотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к  $\pi/2$ , то в качестве оценки формулу (23) можно использовать для определения  $n_e$ .



### 3. Экспериментальная установка

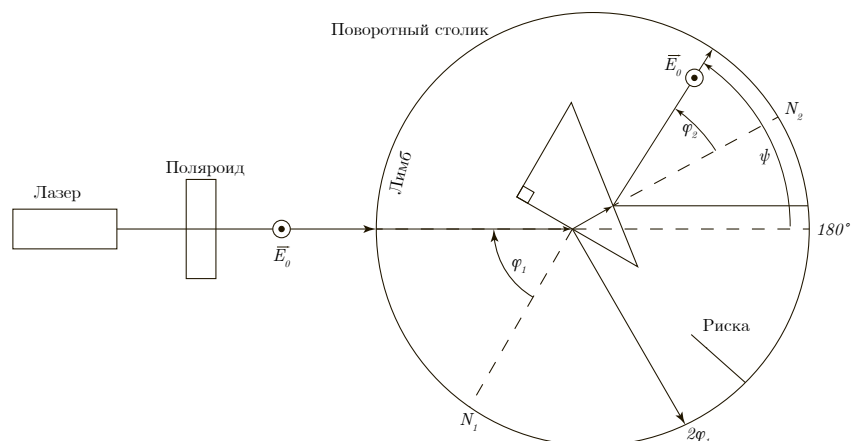


Рис. 5: Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 5. Источником излучения служит He-Ne лазер ( $\lambda = 0.63$  мкм). Излучение лазера, поляризовано линейно за счет наличия брюстеровских окошек в кювете лазера. Направление вектора  $\vec{E}$  в луче можно изменять с помощью поляриоида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

### 4. Ход работы

- 1) Определим угол  $A$  при вершине призмы:

$$\sin \frac{AC}{BC} = \frac{15}{23} \quad \angle A = \arcsin \frac{15}{23} = 38^\circ$$

- 2) Определим разрешенное направление поляризатора: глядя через него на отраженный от горизонтальной поверхности стола дневной свет, установим его в положение минимального пропускания. Так как отраженный свет преимущественно поляризован так, что

вектор  $\vec{E}$  направлении параллельно отражающей поверхности, у настроенного на минимум пропускания поляризатора разрешенное направление  $\vec{E}$  вертикально.

- 3) Получим на лимбе изображения преломлённых лучей так, как показано, на рис. 5 (падающий и преломлённый лучи отклоняются от нормалей к преломляющим граням в сторону основания призмы). Установим поляризатор в луче лазера перед призмой. Вращая поляризатор, определим, какой луч соответствует вертикально поляризованному свету, а какой — горизонтально поляризованному; определим, какой из лучей представляет обыкновенную волну, а какой — необыкновенную.

Необыкновенная волна:  $\vec{E}(\rightarrow)$ , Обыкновенная волна:  $\vec{E}(\uparrow)$

- 4) Вращая столик с призмой, снимем зависимость углов отклонения на выходе из призмы для обыкновенной и необыкновенной волн от угла падения луча на призму; удобно определять координату  $2\varphi_1$  луча, отраженного от входной грани призмы — длинного катет и координаты каждого из преломлённых лучей  $(180^\circ + \psi)$  (или  $180^\circ - \psi$ ).

Для проверки качества юстировки сначала проведите предварительную серию измерений, меняя угол падения  $\varphi_1$  в диапазоне  $10 - 70^\circ$  через  $10^\circ$  ( $2\varphi_1$  — через  $20^\circ$  до  $140^\circ$ ).

Для расчёта показателей преломления на компьютере с установленной программой SIGMA PLOT подготовим таблицу 1.

- 5) Построим графики  $n_o$  и  $n_e(\theta)$  от  $\cos^2 \theta$  (см. рис. 6) и определим главные показатели преломления  $n_o$  и  $n_e$ . Сравним рассчитанные значения с табличными, приведенными в описании работы и оценим погрешность.

$$n_{o0} = 1.66 \pm 0.009 \quad n_{e0} = 1.491 \pm 0.008$$

- 6) Из основной серии измерений определим средние значения углов наименьшего отклонения  $\psi_m$ ; по формуле (23) рассчитаем показатели преломления  $n_o$  и  $n_e$ .

$$n_o = 1.65 \quad n_e = 1.489$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\varphi_1$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\psi_0$	40	33	30	29	28	27	27	28	29	30	31	32	35	37
$\psi_e$	25	29	31	21	20	21	21	22	23	24	25	27	30	32
$\varphi_{2o}$	73	61	53	47	41	35	30	26	22	18	14	10	8	5
$\varphi_{2e}$	58	51	44	39	33	29	24	20	16	12	8	5	3	0
$\theta_o$	87	83,97	80,97	78,12	75,26	72,35	69,65	67,28	64,96	62,67	60,39	58,08	56,82	55,05
$\theta_o$	86,65	83,33	79,94	76,82	73,49	70,70	67,65	65,00	62,40	59,84	57,27	55,29	53,95	52,00
$\cos^2 \theta_o$	0,00	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,28	0,30	0,33
$\cos^2 \theta_e$	0,00	0,01	0,03	0,05	0,08	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	0,29	0,32	0,35	0,38
$n_o$	1,667	1,652	1,649	1,661	1,661	1,649	1,649	1,664	1,671	1,669	1,658	1,638	1,656	1,640
$n_e$	1,492	1,495	1,482	1,499	1,478	1,512	1,508	1,521	1,526	1,525	1,515	1,521	1,540	1,526

Таблица 1: Результат из SIGMA PLOT

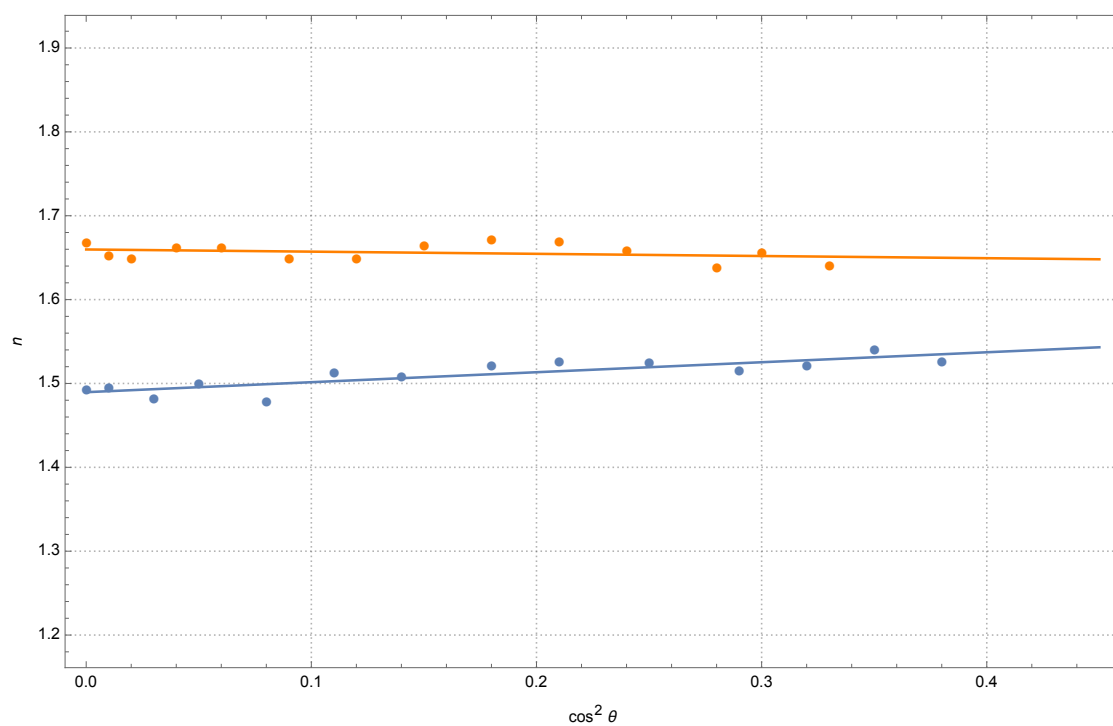


Рис. 6: График, построенный в SIGMA PLOT

## 5. Вывод

Изучили зависимость показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определили главные показатели преломления.