Лабораторная работа №5

Методы решения уравнения переноса

Вариант 3, задача 1

Условие задачи

Дифференциальная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0; & 0 < t \le 1,\ 0 \le x < 1; \\ u[x,\ 0] = \mathrm{Cos}[x]; & u[1,\ t] = \mathrm{Cos}[1 + 2\,t]; \end{cases}$$

Разностная схема

$$D_h = \left\{(x_l,\ t^n) : x_l = h\,l,\ \ h\,L = 1,\ \ l = \overline{0,\ L};\ t^n = n\,\tau;\ \tau\,N = 1,\ \ n = \overline{0,\ N}\right\},$$

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + \frac{\tau}{3\,h}\,(2\,u_{l+3}^n - 9\,u_{l+2}^n + 18\,u_{l+1}^n - 11\,u_l^n) + & l = \overline{0,\ L-3},\ n = \overline{0,\ N-1} \\ \frac{2\,\tau^2}{h^2}\,(-u_{l+3}^n + 4\,u_{l+2}^n - 5\,u_{l+1}^n + 2\,u_l^n) + \frac{4\,\tau^2}{3\,h^2}\,(u_{l+3}^n - 3\,u_{l+2}^n + 3\,u_{l+1}^n - u_l^n) & \\ u_l^0 = \mathrm{Cos}[x_l] & l = \overline{0,\ L} \\ u_L^n = \mathrm{Cos}[1 + 2\,t^n] & n = \overline{1,\ N} \\ u_{L-1}^n = ? & n = \overline{1,\ N} \\ u_{L-2}^n = ? & n = \overline{1,\ N} \end{cases}$$

Решение

Основные этапы:

1. Аналитическое решение дифференциальной задачи и построение следа в выбранном конечномерном пространстве;
2. Вывод дополнительных разностных уравнений, где это необходимо;
3. Исследование разностной схемы на аппроксимацию и спектральную устойчивость, используя принцип замороженных коэффициентов;
4. Разработка алгоритма решения разностной задачи и его реализация в виде программы, написанной на алгоритмическом языке высокого уровня;
5. Отладка программы с учетом вычисленных значений следа аналитического решения;
6. Проведение практических исследований свойств используемой разностной схемы на последовательно удваиваемых сетках:
   a. соответствует ли порядок сходимости численного решения порядку аппроксимации на решении, установленному в пункте 3;
   b. насколько сильно зависят численные результаты от выполнения условий устойчивости и что происходит, когда они нарушаются;
   c. как изменится порядок сходимости, если при задании дополнительных разностных уравнений оставить меньшее число слагаемых в разложении в ряд Тейлора значений следа;
   d. предложить и опытным путем проверить свои варианты задания дополнительных граничных уравнений;
   e. выяснить, насколько сильно значения решения при t=1 зависят от начальных или граничных условий, и объяснить полученный результат.

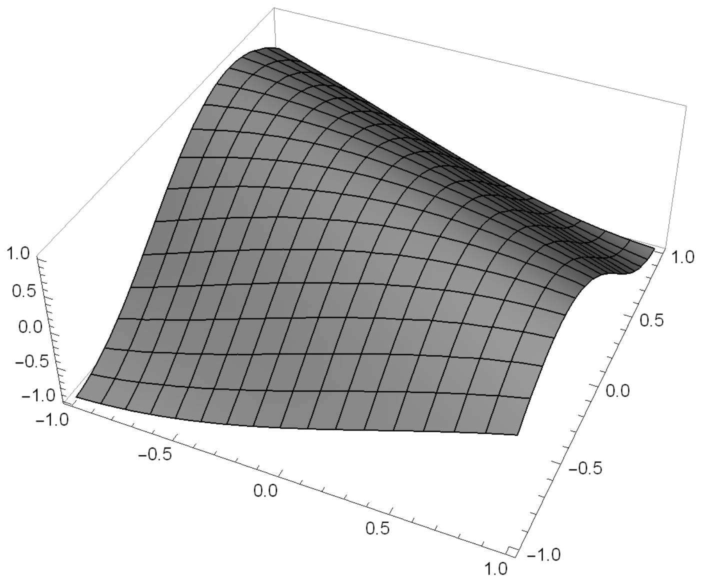
Аналитическое решение задачи

Найдем аналитическое решение уравнения:

In[1]:=
```
pde=D[u[x,t],t]-2D[u[x,t],x]==0;
sol=DSolve[{pde,u[x,0]==Cos[x]},u[x,t],{x,t}]
analyticPlot=Plot3D[u[x,t]/.sol,{x,-1,1},{t,-1,1}]
```

Out[2]= {{u[x, t] → Cos[2 t + x]}}

Out[3]=



Установим решение в качестве функции для вычисления значений на сетке:

In[4]:=
```
AnalyticEval[x_,t_]:=N[Cos[2 t+x]];
```

В качестве конечномерного пространства, на котором будет происходить сравнение получаемых на последовательно удваиваемых сетках численных решений, предлагается брать $D_n = \{(x,\ t = 1) : x_l = h\,l,\ \ h\,L = 1,\ \ l = \overline{0,\ L},\ \ L = 10\}$, т.е. равномерную по x сетку с одиннадцатью узлами, расположенными на временном слое $t = T = 1$. Следующим шагом является построение следа, т.е. вычисление значений аналитического решения в одиннадцати равноудаленных точках при $t = 1$.

In[5]:=
```
L=10;
Nm=10;
trail=Table[AnalyticEval[x,1],{x,0,1,1/L}]
```

Out[7]= {-0.416147, -0.504846, -0.588501, -0.666276, -0.737394, -0.801144, -0.856889, -0.904072, -0.942222, -0.970958, -0.989992}

Построение разностных схем

Разностная схема дана в условии задачи. Однако нам не хватает разностных уравнений $u^n_{L-1},\ \ n = \overline{1,\ N}$ и $u^n_{L-2},\ \ n = \overline{1,\ N}$.

Запишем разложение значений следа $[u]_l{}^n,\ \ n = \overline{1,\ N}$ в ряд Тейлора до третьего порядка по h включительно:

$$[u]^n_l = [u]^n_0 + [u_x{}']^n_0\,h + [u_{x\,x}{}'']^n_0\,\frac{h^2}{2} + [u_{x\,x\,x}{}''']^n_0\,\frac{h^3}{6} + O\big[h^4\big].$$

Для нахождения $[u_x{}']^n_0$, $[u_{x\,x}{}'']^n_0$ можно воспользоваться формулами:

$$[u_x']^n_0 = \frac{1}{a^n_0}\,(-[\,\dot{u}_t]^n_0 + b^n_0),\ \ n = \overline{1,\ N}$$

$$\left[u''_{xx}\right]_0^n = \frac{1}{(a_0^n)^2}\left\{\left(\ddot{\psi}_{tt}\right)_0^n + [(\dot{a}_t)_0^n - a_0^n(a'_x)_0^n]\,\frac{1}{a_0^n}\left[b_0^n - (\dot{\psi}_t)_0^n\right] - (\dot{b}_t)_0^n + a_0^n(b'_x)_0^n\right.$$

Третью частную производную по x будем выражать через третью частную производную по времени, последовательно выполняя следующие преобразования: во-первых, вычислим частную производную по времени от левой и правой частей уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(x,\ t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial a(x,\ t)}{\partial t} - a(x,\ t)\,\frac{\partial a(x,\ t)}{\partial x}\right]\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,\ t)}{\partial t} - a(x,\ t)\,\frac{\partial b(x,\ t)}{\partial x}$$

и получим:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2\,\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + 2\,a\,\frac{\partial a}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial a}{\partial t} - a\,\frac{\partial a}{\partial x}\right]\frac{\partial u^2}{\partial t\,\partial x} - \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - a\,\frac{\partial^2 a}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t}\,\frac{\partial a}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - a\,\frac{\partial^2 b}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t}\,\frac{\partial b}{\partial x} \qquad (1)$$

Также определим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = -a(x,\ t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}$$

и продифференцируем один раз по x:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} = -a(x,\ t)\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 2\,\frac{\partial a}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

Подставим эти два выражения, умноженные на $a^2(x,\ t)$ в (1) и разрешим относительно третьей частной производной по x при $x = 0$ и $t = t^n$:

$$\left[u'''_{xxx}\right]_0^n =$$

$$-\frac{1}{(a_0^n)^3}[\dddot{u}_{ttt}]_0^n + \frac{3}{(a_0^n)^2}[(\dot{a}_t)_0^n - a_0^n(a'_x)_0^n]\left[u''_{xx}\right]_0^n - \frac{1}{(a_0^n)^3}\left\{(\ddot{a}_{tt})_0^n - a_0^n(\dot{a}'_{tx})_0^n + (a_0^n)^2\left(a''_{xx}\right)_0^n - 2\,(\dot{a}_t)_0^n\,(a'_x)_0^n + a_0^n[(a'_x)_0^n]^2\right\}\times[u'_x]_0^n +$$

$$\frac{1}{(a_0^n)^3}\left[\left(\ddot{b}_{tt}\right)_0^n - a_0^n(\dot{b}'_{tx})_0^n + (a_0^n)^2\left(b''_{xx}\right)_0^n - 2\,(\dot{a}_t)_0^n\,(b'_x)_0^n + a_0^n(a'_x)_0^n\,(b'_x)_0^n\right]$$

где значения $[u'_x]_0^n$ и $\left[u''_{xx}\right]_0^n$ найдены в пособии.

Найдем все недостающие члены разложения:

$[u]_0^n$:

$$\left[u'_x\right]_0^n = \frac{1}{a_0^n}\left(-[\dot{u}_t]_0^n + b_0^n\right),\ \ n = \overline{1,\ N},\ \text{ где } [\dot{u}_t]_0^n = \left(\dot{\psi}_t\right)_0^n,\ \ n = \overline{1,\ N}.$$

$\left[u''_{xx}\right]_0^n$:

$$\left[u''_{xx}\right]_0^n = \frac{1}{(a_0^n)^2}\left\{(\ddot{\psi}_{tt})_0^n + \left[(\dot{a}_t)_0^n - a_0^n\left(a'_x\right)_0^n\right]\frac{1}{a_0^n}\left[b_0^n - \left(\dot{\psi}_t\right)_0^n\right] - \left(\dot{b}_t\right)_0^n + a_0^n\left(b'_x\right)_0^n\right\}.$$

В данной задаче $a_l^n = a(x_l,\ t^n) \equiv 2$, $b_l^n = b(x_l,\ t^n) \equiv 0$, $[u]_l^n = u(x_l,\ t^n) = \cos(2\,t^n + x_l) = \cos(2\,n\,\tau + h\,l)$. Для упрощения, напишем несколько вспомогательных функций:

In[170]:=

```
ClearAll[n]
a[x_,t_]=2;
b[x_,t_]:=0;
u[x_,t_]:=Cos[2 t+x];
InNet[eq_,l_,n_]:=eq/.{t→2n*1/(Nm+1),x→l*1/(L+1)}; (*То же самое что [eq]^n_l*)
```

In[175]:=
$$u1x = \left(\frac{1}{\text{"}a_0^n\text{"}}\left(-\text{"}[\dot{u}_t]_0^n\text{"} + \text{"}b_0^n\text{"}\right)\right) /.$$
$$\{\text{"}a_0^n\text{"} \to \text{InNet}[a[x,t],0,n],\ \text{"}[\dot{u}_t]_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],t],0,n],$$
$$\text{"}b_0^n\text{"} \to \text{InNet}[b[x,t],0,n]\}$$

Out[175]= $\text{Sin}\left[\frac{4n}{11}\right]$

In[176]:= u2x =
$$\left(\frac{1}{\text{"}a_0^n\text{"}^2}\left(\text{"}(\ddot{\psi}_{tt})_0^n\text{"} + \left(\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"} - \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(a_x')_0^n\text{"}\right)\frac{1}{\text{"}a_0^n\text{"}}\left(\text{"}b_0^n\text{"} - \text{"}(\dot{\psi}_t)_0^n\text{"}\right) - \text{"}(\dot{b}_t)_0^n\text{"} + \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(b_x')_0^n\text{"}\right)\right) /.$$
$$\{\text{"}a_0^n\text{"} \to \text{InNet}[a[x,t],0,n],\ \text{"}(\dot{\psi}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],t],0,n],$$
$$\text{"}b_0^n\text{"} \to \text{InNet}[b[x,t],0,n],\ \text{"}(\ddot{\psi}_{tt})_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],\{x,2\}],0,n],$$
$$\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],t],0,n],\ \text{"}(a_x')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],x],0,n],$$
$$\text{"}(\dot{b}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],t],0,n],\ \text{"}(b_x')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],x],0,n]\}$$

Out[176]= $-\frac{1}{4}\text{Cos}\left[\frac{4n}{11}\right]$

In[177]:=
$$u3x = -\frac{1}{(\text{"}a_0^n\text{"})^3}\text{"}[\dddot{u}_{ttt}]_0^n\text{"} + \frac{3}{(\text{"}a_0^n\text{"})^2}\left(\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"} - \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(a_x')_0^n\text{"}\right)\text{"}[u_{xx}'']_0^n\text{"} -$$
$$\frac{1}{(\text{"}a_0^n\text{"})^3}\left(\text{"}(\ddot{a}_{tt})_0^n\text{"} - \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(\dot{a}_{tx}')_0^n\text{"} + (\text{"}a_0^n\text{"})^2\,\text{"}(a_{xx}'')_0^n\text{"} - 2\,\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"}\,\text{"}(a_x')_0^n\text{"} + \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(a_x')_0^n\text{"}^2\right) *$$
$$\text{"}[u_x']_0^n\text{"} +$$
$$\frac{1}{(\text{"}a_0^n\text{"})^3}\left(\text{"}(\ddot{b}_{tt})_0^n\text{"} - \text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(\dot{b}_{tx}')_0^n\text{"} + (\text{"}a_0^n\text{"})^2\,\text{"}(b_{xx}'')_0^n\text{"} - 2\,\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"}\,\text{"}(b_x')_0^n\text{"} +\right.$$
$$\left.\text{"}a_0^n\text{"}\,\text{"}(a_x')_0^n\text{"}\,\text{"}(b_x')_0^n\text{"}\right) /.$$
$$\{\text{"}a_0^n\text{"} \to \text{InNet}[a[x,t],0,n],\ \text{"}(\dot{\psi}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],t],0,n],$$
$$\text{"}b_0^n\text{"} \to \text{InNet}[b[x,t],0,n],\ \text{"}(\ddot{\psi}_{tt})_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],\{x,2\}],0,n],$$
$$\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],t],0,n],\ \text{"}(a_x')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],x],0,n],$$
$$\text{"}(\dot{b}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],t],0,n],\ \text{"}(b_x')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],x],0,n],$$
$$\text{"}[\dddot{u}_{ttt}]_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[u[x,t],\{t,3\}],0,n],\ \text{"}(\ddot{b}_{tt})_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],\{t,2\}],0,n],$$
$$\text{"}(b_{xx}'')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],\{x,2\}],0,n],\ \text{"}(\dot{b}_{tx}')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[b[x,t],t,x],0,n],$$
$$\text{"}(\ddot{a}_{tt})_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],\{t,2\}],0,n],\ \text{"}(a_x')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],x],0,n],$$
$$\text{"}(a_{xx}'')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],\{x,2\}],0,n],\ \text{"}(\dot{a}_{tx}')_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],t,x],0,n],$$
$$\text{"}(\dot{a}_t)_0^n\text{"} \to \text{InNet}[D[a[x,t],t],0,n]\}$$

Out[177]= $-\text{Sin}\left[\frac{4n}{11}\right]$

Получаем формулу для разложения:

In[178]:=
```
ru[l_, n_] :=
  N[
  численное приближение
   (InNet[u[x, t], 0, n] + InNet[u1x, 0, n] * h * l + InNet[u2x, 0, n] * (h * l)^2/2 +
     InNet[u3x, 0, n] * (h * l)^3/6) /. h → 1/L];
```

Таким образом, формула для u^n_{L-1} имеет вид:

In[179]:=
```
Clear[n];
очистить
ru[L - 1, n]
```

Out[180]= 0.89875 Cos[0.363636 n] + 0.7785 Sin[0.363636 n]

Формула для u^n_{L-2}:

In[181]:=
```
Clear[n];
очистить
ru[L - 2, n]
```

Out[182]= 0.92 Cos[0.363636 n] + 0.714667 Sin[0.363636 n]

Вычисление значений в точках

Выделяем необходимый массив точек и заполняем первый слой согласно первому граничному условию:

In[315]:=
```
ClearAll[numerical]
numerical=Table[0,{x,L+1},{t,Nm+1}];
For[l=1,l<=L+1,l++,
numerical[[1,l]]=N[Cos[1/L*l]];
]
numerical
```

Out[318]= {{0.995004, 0.980067, 0.955336, 0.921061, 0.877583, 0.825336, 0.764842, 0.696707, 0.62161, 0.540302, 0.453596}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}

Теперь заполняем согласно второму граничному условию:

In[319]:=
```
For[n=2,n<=Nm+1,n++,
numerical[[n,L+1]]=N[Cos[1+2*1/Nm*n]];
]
numerical
```

Out[320]=
```
{{0.995004, 0.980067, 0.955336, 0.921061, 0.877583,
  0.825336, 0.764842, 0.696707, 0.62161, 0.540302, 0.453596},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.169967}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.0291995},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.227202}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.416147},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.588501}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.737394},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.856889}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.942222},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.989992}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.998295}}
```

Теперь воспользуемся полученными выражениями для u^n_{L-1} и u^n_{L-2}:

In[321]:=
```
For[n = 2, n <= Nm+1, n++,
 numerical[[n,L-1]] = ru[L-1, n];
 numerical[[n,L]] = ru[L, n];
 ]
numerical
```

Out[322]=
```
{{0.995004, 0.980067, 0.955336, 0.921061, 0.877583, 0.825336, 0.764842, 0.696707,
  0.62161, 0.540302, 0.453596}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.18893, 1.20765, 0.169967},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.1055, 1.14318, -0.0291995},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.877491, 0.929199, -0.227202},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.534722, 0.593702, -0.416147},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.122023, 0.18056, -0.588501},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.306635, -0.256196, -0.737394},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.695191, -0.659446, -0.856889},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.992829, -0.976453, -0.942222},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1.16062, -1.16576, -0.989992},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1.17663, -1.20261, -0.998295}}
```

Наконец, используем рекурсивную формулу для заполнения остальных точек:

In[323]:=

```
τ = 1/Nm;
h = 1/L;
For[l=1,l≤ L-2,l++,
For[n=1,n≤ Nm,n++,
numerical[[l,n+1]]=numerical[[l,n]]+ τ/(3h) (2numerical[[l+3,n]]-9numerical[[l+2,n]]+18numerica
]
]
N[numerical]
```

Out[326]=

```
{{0.995004, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1.1055, 1.14318},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.877491, 0.929199},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.534722, 0.593702},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.122023, 0.18056},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.306635, -0.256196},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.695191, -0.659446},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.992829, -0.976453},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -1.16062, -1.16576},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -0.992829, -0.976453, -0.942222},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -1.16062, -1.16576, -0.989992},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., -1.17663, -1.20261, -0.998295}}
```

In[327]:=

```
Plot3D[u[x, t] /. sol, {x, 0, 1}, {t, 0, 1}]
```

⌊график функции 2-х переменных

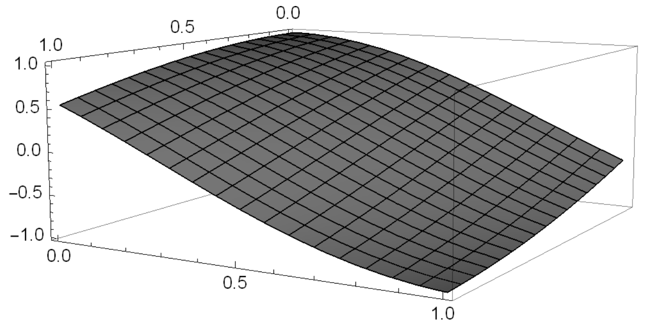
```
ListPlot3D[numerical]
```

⌊3-мерная диаграмма разброса данных

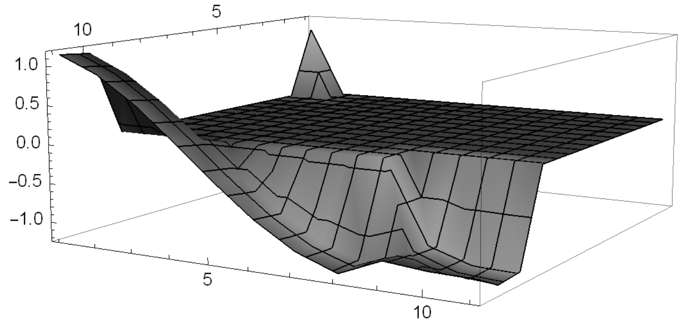
```
Show[ListPlot[trail, PlotStyle → Red], ListPlot[numerical[[All, L + 1]]]]
```

⌊пок··· ⌊диаграмма разбро··· ⌊стиль графика ⌊кра··· ⌊диаграмма разброса да··· ⌊всё

Out[327]=



Out[328]=



Out[329]=