《计算机图形学》5月报告

191870147，屈力，191870147@smail.nju.edu.cn

2022 年 5 月 30 日

1 综述

2 算法介绍

2.1 DDA直线绘制算法

数值微分Digital Differential Analyzer的简称。在一个坐标轴上以单位间隔对线段进行取样，从而确定另一个最靠近路径对应的整数值。相比于naive，DDA算法不同之处在于它会选取哪一个方向步进，另一个方向步进的长度则必然小于1，防止了两个直线上2个相邻像素距离过大的问题。

直线方程的斜截式为$y = kx + b$，给定两点$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$，可以求出斜率$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$和$b$。设$x$方向和$y$方向的间距分别是$\Delta x, \Delta y$。若$\Delta x \geq \Delta y$（也就是$|k| \leq 1$），则选取$x$方向为步进单位；否则选取$y$方向为步进单位。根据步进的方向逐次加1，计算$y$的值并取整，可以求出线段上所有坐标。（维基百科）

2.2 Bresenham

Bresenham算法是DDA算法画线算法的一种改进算法。本质上它也是采取了步进的思想。不过它比DDA算法作了优化，避免了步进时浮点数运算。

首先它和DDA算法一样，根据斜率选择步进单位。这里假设$|k| \leq 1$，选择x方向步进。设当前$(x, y) = (x_m, y_m)$，当x步进一个单位时，y有两个选择：y_m或$y_m + 1$。显然，通过比较两个离散点与真实y值的距离可以做出选择。设当前像素点的y_m值与直线实际y值的差距为$diff$，当x_m增加1，$diff$的值增加k。每当$|diff|$的值超出0.5，则说明上方一个像素点距离实际值更近，因此y_{m+1}的值取$y_m + 1$，然后$diff$减1；否则，仍取y_m。

改进：可以简化运算。设

$$d_1 = y - y_m = k(x_m + 1) + b - y_m$$

$$d_2 = y_m + 1 - y = y_m + 1 - k(x_m + 1) - b$$

两个距离差为$d_1-d_2=2k(x_m+1)-2y_m+2b-1$。为了避免浮点运算，两边同乘$\Delta x(\Delta x>0)$，得$p_m=\Delta x(d_1-d_2)=2\Delta y x_m-2\Delta x y_m+c$，其中$(c=2\Delta y+\Delta x(2b-1))$，该式仅包含整数运算。

若$p_m>0$，即$d_1>d_2$，y_m+1更接近于线段，选择(x_m+1,y_m+1)；否则，选择(x_m+1,y_m)

p_m的递推式：$p_{m+1}-p_m=2\Delta y(x_{m+1-x_m}-2\Delta x(y_{m+1-y_m})=2\Delta y-2\Delta x(y_{m+1}-y_m)$。

$y_{m+1}-y_m$的值取决于p_m的符号。因此，若$p_m>0,y_{m+1}-y_m=1,p_{m+1}=p_m+2\Delta y-2\Delta x$；若$p_m<0,y_{m+1}-y_m=0,p_{m+1}=p_m+2\Delta y$ （维基百科）

2.3 中点圆生成算法

首先考虑圆的画法。不妨设圆心在原点（在其他位置只需平移每个像素点即可）。由圆的对称性，只需考虑圆在第一象限的上半部分（从点$(0,r)$到$(\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r)$部分），其他部分由对称性可以直接算出。假定当前已经绘制到了点$P(x_i,y_i)$，那么P_{i+1}只可能是$P_1(x_i+1,y_i)$或$P_2(x_i+1,y_i-1)$。中点圆生成算法通过计算两点到实际圆弧的距离来进行选择。

构造判别函数：$J(x,y)=x^2+y^2-r^2$。若$J(x,y)=0$，则点在圆上；若$J(x,y)<0$，则点在圆内；否则点在圆外。P_1,P_2的中点M为$x_i+1,y_i-1/2$，将其代入判别函数，若函数值小于0，表示中间在圆内，那么P_1距离圆弧更近；否则，P_2距离圆弧更近。

然后回到椭圆的画法。由于椭圆的对称性比圆较差，不能只考虑八分之一的部分，至少需考虑四分之一（不妨设为第一象限）。为了防止椭圆上2个相邻像素距离过大的问题，需要根据椭圆切线斜率的绝对值是否大于1划分步进单位。设椭圆方程为$F(x)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$，则$F'(x)=2b^2x+2a^2y=0$。当$b^2x<a^y$时，选择$x$为步进单位；否则，选择$y$为步进单位。

由于对每个像素点计算判别式开销过大，需要简化运算，可以提前算出判别式的递推式。对于上述的椭圆方程，以第一象限上半部分为例，$J(m)=F(x_m+1,y_m-1/2)=b^2(x_m+1)^2+a^2(x_m-1/2)-a^2b^2$。若选择$P_1$，$J_{m+1}=F(x_m+2,y_m-1/2)=J_m+b^2(2x_m+3)$；若选择$P_2$，$J_{m+1}=F(x_m+2,y_m-3/2)=J_m+b^2(2x_m+3)+a^2(-2y_m+2)$。
https://blog.csdn.net/qq_42185999/article/details/102377383

2.4 Bezier曲线

Bezier曲线可以表示为$P(t)=\Sigma_{i=0}^{n}P_ib_{i,n}(t),t\in[0,1]$，其中$P_i$为控制点，多项式$b_{i,n}(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$。实际应用中，Bezier曲线可以通过De Casteljau算法计算，该算法是递归实现的。

设有$n(n \geq 2)$个控制点$P_1, P_2, ..., P_n$，算法过程为$A(n)$。对于任意$t \in [0,1]$：当$n=2$时，取点$P=tP_0+(1-t)P_1$；当$n \geq 3$时，对于每个$i=1,2,..,n-1$，取点$P=tP_i+(1-t)P_{i+1}$，生成新的控制点，对这$n-1$个控制点继续调用$A(n-1)$。
（维基百科）

2.5 B-spline曲线

B-spline曲线可以表示为$P(t)=\Sigma_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$。这条曲线一共有$n+1$个控制点$P_i$，$k$表示B-spline曲线的阶数，$k-1$表示次数，$N_{i,k}(t)$是基函数，它的计算是基于给定的节点所得到的$k$阶分段多项式。

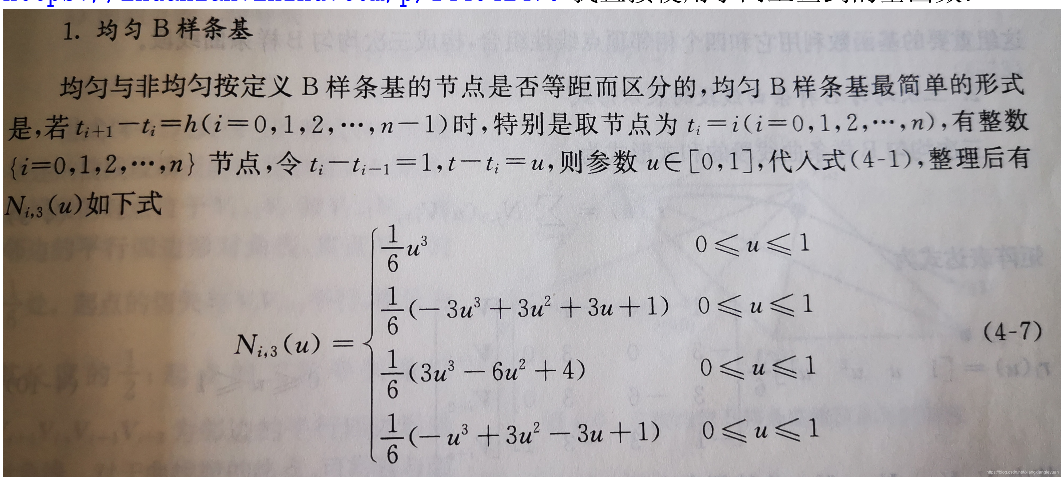
设t是一个非递减数的集合$\{t_0, t_1, \cdots, t_{n+k-1}\}$，这个集合称为节点向量。基函数的递归定义如下：
若$k=1$，

$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

若$k>1$，

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1-t_i}} N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}$$

本次实验中，要求绘制均匀B样条曲线，只需设置节点之间间隔相同。若有n个控制点，次数为3，则可以取节点向量为$\{0,1,2,...,n+3\}$。
（维基百科）
https://zhuanlan.zhihu.com/p/144042470 我直接使用了网上查到的基函数：



1. 均匀 B 样条基

均匀与非均匀按定义 B 样条基的节点是否等距而区分的，均匀 B 样条基最简单的形式是，若 $t_{i+1}-t_i=h(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 时，特别是取节点为 $t_i=i(i=0,1,2,\cdots,n)$，有整数 $\{i=0,1,2,\cdots,n\}$ 节点，令 $t_i-t_{i-1}=1, t-t_i=u$，则参数 $u\in[0,1]$，代入式(4-1)，整理后有 $N_{i,3}(u)$ 如下式

$$N_{i,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{6}u^3 & 0\leqslant u\leqslant 1 \\ \frac{1}{6}(-3u^3+3u^2+3u+1) & 0\leqslant u\leqslant 1 \\ \frac{1}{6}(3u^3-6u^2+4) & 0\leqslant u\leqslant 1 \\ \frac{1}{6}(-u^3+3u^2-3u+1) & 0\leqslant u\leqslant 1\end{cases} \quad (4\text{-}7)$$

2.6 Cohen-Sutherland裁剪算法

算法主要分三步进行：

1 对线段的两个端点$P1$，$P2$编码（分别为$C1$，$C2$）。当点在矩形窗口的上、下、右、左时，分别将第1、2、3、4位置为1，否则为0。例如，若端点在矩形内部，则编码为0000，若在左下角，则编码为0101.

2 根据$C1$，$C2$尽可能多的提前判断出特殊情况，尽可能避免求交点的计算。若$C1 = C2 = 0$，则线段完全在窗口内，保留整条线段。若$C1 \wedge C2 \neq 0$，说明两端点在矩形的同侧，也就是整个在矩形外部，整个丢弃。若为其他情况，则进入第三步。

3 根据$P1$的编码值，确定其在哪条边界线之外，求线段与该边界线的交点P，交点把线段分成两段，舍去$P1P$段，把交点P作为剩余线段的$P1$端点重新进行第二步。

2.7 Liang-Barsky

Liang-Barsky从直线的参数方程角度出发，直接求出直线在窗口内的部分。考虑直线的参数方程：

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0) = x_0 + t\Delta x,$$

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0) = x_0 + t\Delta y$$

其中$t \in [0, 1]$

如果线段上一点$P(x, y)$位于坐标(x_{min}, y_{min})和(x_{max}, y_{max})确定的窗口内，则有下列不等式成立：

$$x_{min} \leq x_0 + t\Delta x \leq x_{max}$$

$$y_{min} \leq y_0 + t\Delta y \leq y_{max}$$

这四个不等式可以表示为：

$$tp_i \leq q_i, i = 1, 2, 3, 4(\star)$$

其中，

$$p_1 = -\Delta x, q_1 = x_0 - x_{min}$$

$$p_2 = \Delta x, q_2 = x_{max} - x_0$$

$$p_3 = -\Delta y, q_3 = y_0 - y_{min}$$

$$p_4 = \Delta y, q_4 = y_{max} - y_0$$

根据$\star$式，

1 若对于某个i，$p_i = 0$，即直线与窗口的某一条边平行，若$q_i < 0$，则第i个不等式恒不成立，说明线段全部在裁剪窗口外，整个舍去。

2 否则，可以直接求解$\star$式。若$p_i < 0$，线段从裁剪边界延长线的外部延伸到内部；若$p_i > 0$，线段从裁剪边界延长线的内部延伸到外部。然后求出t的上下界u_1和u_2。初始时，$u_1 = 0, u_2 = 1$。若$p_i < 0, u_1 = \max(u_1, \frac{q_i}{p_i})$；若$p_i > 0, u_2 = \min(u_2, \frac{q_i}{p_i})$。若$u_1 > u_2$，说明线段全部在裁剪窗口外，整个舍去；否则，根据$t$的取值范围算出$x, y$的取值集合。（维基百科）

3 系统介绍

3.1 命令行程序

cg_cli.py是输入处理程序，从input逐行读入指令。当遇到"drawxxxx"时，将指令封装成$item_dict$中的一个条目，然后在图片保存时，通过调用cg_algorithms.py中的算法将其绘制在canvas（画布）上；当遇到"rotate","scale","clip"时，直接从$item_dict$中查找对应的条目并调用algorithm模块对该条目中的属性进行修改，达到放缩、旋转、裁剪图形的效果。

3.2 图形界面程序

我直接在助教写的框架基础上扩展。框架的交互逻辑大致如下：

首先，main函数调用了MainWindow构造函数，MainWindow类继承了QMainWindow类，创建并初始化了图元选择表（使用QListWidget类）、画布（使用MyCanvas类，编写的另一个类）和菜单栏（使用menuBar成员函数）。然后需要设置主窗口的布局，我按照默认框架使用了水平布局，先按顺序将画布和图元选择表加入布局hbox_layout，然后将主窗口的布局设置为hbox_layout，即可实现从左到右依次为画布和图元选择表的效果。为了实现鼠标点击使用菜单栏的效果，需要为菜单栏加入功能组件，然后为每个组件编写一个槽函数，并将两者连接信号。

如上图所提到的，MyCanvas类继承自QGraphicsView类，是自定义的画布类，该类中，除去一些必要的画图/编辑操作前后的函数（设置选择图元编号、设置当前画图状态、算法等），最重要的就是重写鼠标的点击/移动/松开事件，以实现鼠标操纵画图/对图元编辑的效果。对于不同的画图操作，它们的共同点是，首先通过MyItem类创建一个item，添加到成员变量scene中（由QGraphicsScene类创建，供画图等使用），然后通过鼠标所在的位置，计算一些必要的参数（算法所需要的）。对于不同的编辑操作，则是通过选择的编号找出对应的item，然后计算必要的参数传入算法函数中，根据返回值修改item。

MyItem类继承自QGraphicsItem类，用于定义一个图元，根据文档规定，需要重写boundingRect（用矩形定义图元的外部边界）和paint函数，然后在MyCanvas类的成员函数中调用updateScene时会将图元绘制到画布上。

4 总结

5 参考资料

https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_differential_analyzer_(graphics_algorithm)
https://en.wikipedia.org/wiki/Bresenham%27s_line_algorithm
https://blog.csdn.net/qq_42185999/article/details/102377383
https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve
https://zhuanlan.zhihu.com/p/144042470
https://en.wikipedia.org/wiki/Cohen%E2%80%93Sutherland_algorithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Liang%E2%80%93Barsky_algorithm
https://doc.qt.io/qt-5/(qt5文档)