

# 《计算机图形学》5月报告

191870147, 屈力, [191870147@smail.nju.edu.cn](mailto:191870147@smail.nju.edu.cn)

2022 年 6 月 17 日

## 1 综述

本次图形学大作业中, 我实现了核心算法模块、命令行界面程序、用户交互界面 (GUI) 程序。

## 2 算法介绍

### 2.1 DDA直线绘制算法

数值微分Digital Differential Analyzer的简称。在一个坐标轴上以单位间隔对线段进行取样, 从而确定另一个最靠近路径对应的整数值。相比于naive, DDA算法不同之处在于它会选取哪一个方向步进, 另一个方向步进的长度则必然小于1, 防止了两个直线上2个相邻像素距离过大的问题。

直线方程的斜截式为 $y = kx + b$ , 给定两点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ , 可以求出斜率 $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ 和 $b$ 。设 $x$ 方向和 $y$ 方向的间距分别是 $\Delta x, \Delta y$ 。若 $\Delta x \geq \Delta y$  (也就是 $|k| \leq 1$ ), 则选取 $x$ 方向为步进单位; 否则选取 $y$ 方向为步进单位。根据步进的方向逐次加1, 计算 $y$ 的值并取整, 可以求出线段上所有坐标。

### 2.2 Bresenham

Bresenham算法是DDA算法画线算法的一种改进算法。本质上它也是采取了步进的思想。不过它比DDA算法作了优化, 避免了步进时浮点数运算。

首先它和DDA算法一样, 根据斜率选择步进单位。这里假设 $|k| \leq 1$ , 选择 $x$ 方向步进。设当前 $(x, y) = (x_m, y_m)$ , 当 $x$ 步进一个单位时,  $y$ 有两个选择:  $y_m$ 或 $y_m + 1$ 。显然, 通过比较两个离散点与真实 $y$ 值的距离可以做出选择。设当前像素点的 $y_m$ 值与直线实际 $y$ 值的差距为 $diff$ , 当 $x_m$ 增加1,  $diff$ 的值增加 $k$ 。每当 $|diff|$ 的值超出0.5, 则说明上方一个像素点距离实际值更近, 因此 $y_{m+1}$ 的值取 $y_m + 1$ , 然后 $diff$ 减1; 否则, 仍取 $y_m$ 。

改进：可以简化运算。设

$$\begin{aligned}d_1 &= y - y_m = k(x_m + 1) + b - y_m \\d_2 &= y_m + 1 - y = y_m + 1 - k(x_m + 1) - b\end{aligned}$$

两个距离差为 $d_1 - d_2 = 2k(x_m + 1) - 2y_m + 2b - 1$ 。为了避免浮点运算，两边同乘 $\Delta x (\Delta x > 0)$ ，得 $p_m = \Delta x(d_1 - d_2) = 2\Delta y x_m - 2\Delta x y_m + c$ ，其中 $(c = 2\Delta y + \Delta x(2b - 1))$ ，该式仅包含整数运算。

若 $p_m > 0$ ，即 $d_1 > d_2$ ， $y_m + 1$ 更接近于线段，选择 $(x_m + 1, y_m + 1)$ ；否则，选择 $(x_m + 1, y_m)$

$p_m$ 的递推式： $p_{m+1} - p_m = 2\Delta y(x_{m+1} - x_m) - 2\Delta x(y_{m+1} - y_m) = 2\Delta y - 2\Delta x(y_{m+1} - y_m)$ 。

$y_{m+1} - y_m$ 的值取决于 $p_m$ 的符号。因此，若 $p_m > 0, y_{m+1} - y_m = 1, p_{m+1} = p_m + 2\Delta y - 2\Delta x$ ；若 $p_m < 0, y_{m+1} - y_m = 0, p_{m+1} = p_m + 2\Delta y$

### 2.3 中点圆生成算法

首先考虑圆的画法。不妨设圆心在原点（在其他位置只需平移每个像素点即可）。由圆的对称性，只需考虑圆在第一象限的上半部分（从点 $(0, r)$ 到 $(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ 部分），其他部分由对称性可以直接算出。假定当前已经绘制到了点 $P(x_i, y_i)$ ，那么 $P_{i+1}$ 只可能是 $P_1(x_i + 1, y_i)$ 或 $P_2(x_i + 1, y_i - 1)$ 。中点圆生成算法通过计算两点到实际圆弧的距离来进行选择。

构造判别函数： $J(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ 。若 $J(x, y) = 0$ ，则点在圆上；若 $J(x, y) < 0$ ，则点在圆内；否则点在圆外。 $P_1, P_2$ 的中点 $M$ 为 $x_i + 1, y_i - 1/2$ ，将其代入判别函数，若函数值小于0，表示中间在圆内，那么 $P_1$ 距离圆弧更近；否则， $P_2$ 距离圆弧更近。

然后回到椭圆的画法。由于椭圆的对称性比圆较差，不能只考虑八分之一的部分，至少需考虑四分之一（不妨设为第一象限）。为了防止椭圆上2个相邻像素距离过大的问题，需要根据椭圆切线斜率的绝对值是否大于1划分步进单位。设椭圆方程为 $F(x) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ，则 $F'(x) = 2b^2x + 2a^2y = 0$ 。当 $b^2x < a^2y$ 时，选择 $x$ 为步进单位；否则，选择 $y$ 为步进单位。

由于对每个像素点计算判别式开销过大，需要简化运算，可以提前算出判别式的递推式。对于上述的椭圆方程，以第一象限上半部分为例， $J(m) = F(x_m + 1, y_m - 1/2) = b^2(x_m + 1)^2 + a^2(x_m - 1/2) - a^2b^2$ 。若选择 $P_1$ ， $J_{m+1} = F(x_m + 2, y_m - 1/2) = J_m + b^2(2x_m + 3)$ ；若选择 $P_2$ ， $J_{m+1} = F(x_m + 2, y_m - 3/2) = J_m + b^2(2x_m + 3) + a^2(-2y_m + 2)$ 。

## 2.4 Bezier曲线

Bezier曲线可以表示为 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , 其中 $P_i$ 为控制点, 多项式 $b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ 。实际应用中, Bezier曲线可以通过De Casteljau算法计算, 该算法是递归实现的。

设有 $n(n \geq 2)$ 个控制点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ , 算法过程为 $A(n)$ 。对于任意 $t \in [0, 1]$ : 当 $n = 2$ 时, 取点 $P = tP_0 + (1-t)P_1$ ; 当 $n \geq 3$ 时, 对于每个 $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 取点 $P = tP_i + (1-t)P_{i+1}$ , 生成新的控制点, 对这 $n-1$ 个控制点继续调用 $A(n-1)$ 。  
(维基百科)

## 2.5 B-spline曲线

B-spline曲线可以表示为 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$ 。这条曲线一共有 $n+1$ 个控制点 $P_i$ ,  $k$ 表示B-spline曲线的阶数,  $k-1$ 表示次数,  $N_{i,k}(t)$ 是基函数, 它的计算是基于给定的节点所得到的 $k$ 阶分段多项式。

设 $t$ 是一个非递减数的集合 $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+k-1}\}$ , 这个集合称为节点向量。基函数的递归定义如下:

若 $k = 1$ ,

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

若 $k > 1$ ,

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}$$

本次实验中, 要求绘制均匀B样条曲线, 只需设置节点之间间隔相同。若有 $n$ 个控制点, 次数为3, 则可以取节点向量为 $\{0, 1, 2, \dots, n+3\}$ 。

对于这次实验要求的三次均匀B样条曲线, 我直接使用了网上查到的基函数:

### 1. 均匀 B 样条基

均匀与非均匀按定义 B 样条基的节点是否等距而区分的, 均匀 B 样条基最简单的形式是, 若 $t_{i+1} - t_i = h (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 时, 特别是取节点为 $t_i = i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ , 有整数 $\{i=0, 1, 2, \dots, n\}$  节点, 令 $t_i - t_{i-1} = 1, t - t_i = u$ , 则参数 $u \in [0, 1]$ , 代入式(4-1), 整理后有 $N_{i,3}(u)$ 如下式

$$N_{i,3}(u) = \begin{cases} \frac{1}{6}u^3 & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1) & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4) & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{6}(-u^3 + 3u^2 - 3u + 1) & 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \quad (4-7)$$

## 2.6 Cohen-Sutherland裁剪算法

算法主要分三步进行：

- 1 对线段的两个端点 $P_1, P_2$ 编码（分别为 $C_1, C_2$ ）。当点在矩形窗口的上、下、右、左时，分别将第1、2、3、4位置为1，否则为0。例如，若端点在矩形内部，则编码为0000，若在左下角，则编码为0101。
- 2 根据 $C_1, C_2$ 尽可能多的提前判断出特殊情况，尽可能避免求交点的计算。若 $C_1 = C_2 = 0$ ，则线段完全在窗口内，保留整条线段。若 $C_1 \wedge C_2 \neq 0$ ，说明两端点在矩形的同侧，也就是整个在矩形外部，整个丢弃。若为其他情况，则进入第三步。
- 3 根据 $P_1$ 的编码值，确定其在哪条边界线之外，求线段与该边界线的交点 $P$ ，交点把线段分成两段，舍去 $P_1P$ 段，把交点 $P$ 作为剩余线段的 $P_1$ 端点重新进行第二步。

## 2.7 Liang-Barsky

Liang-Barsky从直线的参数方程角度出发，直接求出直线在窗口内的部分。考虑直线的参数方程：

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t(x_1 - x_0) = x_0 + t\Delta x, \\y &= y_0 + t(y_1 - y_0) = y_0 + t\Delta y\end{aligned}$$

其中 $t \in [0, 1]$

如果线段上一点 $P(x, y)$ 位于坐标 $(x_{min}, y_{min})$ 和 $(x_{max}, y_{max})$ 确定的窗口内，则有下列不等式成立：

$$\begin{aligned}x_{min} &\leq x_0 + t\Delta x \leq x_{max} \\y_{min} &\leq y_0 + t\Delta y \leq y_{max}\end{aligned}$$

这四个不等式可以表示为：

$$tp_i \leq q_i, i = 1, 2, 3, 4(\star)$$

其中，

$$\begin{aligned}p_1 &= -\Delta x, q_1 = x_0 - x_{min} \\p_2 &= \Delta x, q_2 = x_{max} - x_0 \\p_3 &= -\Delta y, q_3 = y_0 - y_{min} \\p_4 &= \Delta y, q_4 = y_{max} - y_0\end{aligned}$$

根据\*式,

- 1 若对于某个 $i$ ,  $p_i = 0$ , 即直线与窗口的某一条边平行, 若 $q_i < 0$ , 则第 $i$ 个不等式恒不成立, 说明线段全部在裁剪窗口外, 整个舍去。
- 2 否则, 可以直接求解\*式。若 $p_i < 0$ , 线段从裁剪边界延长线的外部延伸到内部; 若 $p_i > 0$ , 线段从裁剪边界延长线的内部延伸到外部。然后求出 $t$ 的上下界 $u_1$ 和 $u_2$ 。初始时,  $u_1 = 0, u_2 = 1$ 。若 $p_i < 0, u_1 = \max(u_1, \frac{q_i}{p_i})$ ; 若 $p_i > 0, u_2 = \min(u_2, \frac{q_i}{p_i})$ 。若 $u_1 > u_2$ , 说明线段全部在裁剪窗口外, 整个舍去; 否则, 根据 $t$ 的取值范围算出 $x, y$ 的取值集合。(维基百科)

## 3 系统介绍

### 3.1 命令行程序

`cg_cli.py`是输入处理程序, 从`input`逐行读入并解析指令。当遇到“drawxxxx”时, 将指令封装成`item_dict`中的一个条目, 然后在图片保存时, 通过调用`cg_algorithms.py`中的算法将其绘制在`canvas` (画布) 上; 当遇到“rotate”, “scale”, “clip”时, 直接从`item_dict`中查找对应的条目并调用`algorithm`模块对该条目中的属性进行修改, 达到放缩、旋转、裁剪图形的效果。

### 3.2 图形界面程序

我直接在助教写的框架基础上扩展。框架的交互逻辑大致如下:

首先, `main`函数调用了`MainWindow`构造函数, `MainWindow`类继承了`QMainWindow`类, 创建并初始化了图元选择表 (使用`QListWidget`类)、画布 (使用`MyCanvas`类, 该类也需要自己实现) 和菜单栏 (使用`menuBar`成员函数)。然后需要设置主窗口的布局, 我按照默认框架使用了水平布局, 先按顺序将画布和图元选择表加入布局`hbox_layout`, 然后将主窗口的布局设置为`hbox_layout`, 即可实现从左到右依次为画布和图元选择表的效果。为了实现鼠标点击使用菜单栏的效果, 需要为菜单栏加入功能组件, 然后为每个组件编写一个槽函数, 并将两者进行信号连接。

如上文所提到的, `MyCanvas`类继承自`QGraphicsView`类, 是自定义的画布类, 该类中, 除去一些必要的画图/编辑操作前后的函数 (设置选择图元编号、设置当前画图状态、算法等), 最重要的就是重写鼠标的点击/移动/松开事件, 以实现鼠标操纵画图/对图元编辑的效果。对于不同的画图操作, 它们的共同点是, 首先通过`MyItem`类创建一个`item`, 添加到成员变量`scene`中 (`scene`由`QGraphicsScene`类创建, 用来记录画布中的图元信息), 然后通过鼠标所在的位置, 计算必要的参数 (`cg_algorithms`中的算法所需要的)。对于旋转裁剪等编辑操作, 则需要通过选择的编号找出对应的`item`, 计算必要的参数, 根据对应的算法函数修改`item`。

MyItem类继承自QGraphicsItem类，用于定义一个图元，根据文档规定，需要重写boundingRect（用矩形定义图元的外部边界）和paint函数（逐个像素点绘制即可），然后在MyCanvas类的成员函数中调用updateScene时会将图元绘制到画布上。

## 4 总结

通过本次图形学大作业，我对课程所学的算法使用代码自己实现了一遍，加深了理解；另外，我还学习了pyqt5框架的使用，收获很大。

## 5 参考资料

包括学习算法所用的资料和编写gui界面所需的资料

[https://en.wikipedia.org/wiki/Digital\\_differential\\_analyzer\\_\(graphics\\_algorithm\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_differential_analyzer_(graphics_algorithm))

[https://en.wikipedia.org/wiki/Bresenham%27s\\_line\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Bresenham%27s_line_algorithm)

[https://blog.csdn.net/qj\\_42185999/article/details/102377383](https://blog.csdn.net/qj_42185999/article/details/102377383)

[https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve)

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/144042470>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Cohen%E2%80%93Sutherland\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Cohen%E2%80%93Sutherland_algorithm)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Liang%E2%80%93Barsky\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Liang%E2%80%93Barsky_algorithm)

<https://doc.qt.io/qt-5/>