《概率论与数理统计 A》

一、填空题

1、若 $A \supset B$， $A \supset C$，$P(A)$=0.9， $P(\overline{B} \cup \overline{C}) = 0.8$，则 $P(A - BC)$=_____ 。

2、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 < x < 1, \\ 0, 其它, \end{cases}$

则使 $P\{X > a\} = P\{X < a\}$成立的常数 $a =$______________________。

3、设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度 $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\{-\dfrac{(x+3)^2}{4}\}$，则 $\mu =$___,$\sigma =$____ 。

4、向上抛掷一枚硬币 n 次，正面向上出现的次数为 X，正面向下出现的次数为 Y；则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} =$__________。

5、若 X 与 Y 独立， 而 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $X+Y \sim$ ________ 。

6、设 (X_1, X_2) 为 X 的一样本，则 $d_1 = \dfrac{1}{4}X_1 + \dfrac{3}{4}X_2$ ， $d_2 = \dfrac{1}{3}X_1 + \dfrac{2}{3}X_2$ 都是

$E(X)$ 的_____________估计， _____________更有效。

7、设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，未知 σ^2，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间是______________________________。

二、选择题

1、设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)$＞0，$P(B)$＞0，则（ ）一定成立。

（A） $P(\overline{A} | \overline{B}) = 1 - P(A)$； （B） $P(A|B) = 0$；

（C） $P(A) = 1 - P(B)$； （D） $P(A|B) = P(B)$.

2、设在 10 个同一型号的元件中有 7 个一等品，从中不放回地连续抽取 3 次，每次取一件，则第三次取到一等品的概率是（ ）。

（A） $\dfrac{5}{8}$； （B） $\dfrac{5}{10}$； （C） $\dfrac{6}{10}$； （D） $\dfrac{7}{10}$.

3、当常数 b=（ ）时， $p_k = \dfrac{b}{k(k+1)} (k = 1, 2, \cdots)$ 为某一离散型随机变量的概率分布。

（A） 2； （B） 1； （C） 1/2； （D） 3.

4、设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（　　）。

（A）单调增加;（B）单调减少;　（C）保持不变;（D）增减不定.

5、设 $X \sim B(n,p)$，　且 $E(X)=2.4,\quad D(X)=1.44,$　则 （　　）。

（A）$n=4, p=0.6$；（B）$n=6, p=0.4$；（C）$n=8, p=0.3$；（D）$n=24, p=0.1$.

6、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，而 σ^2 已知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则以下样本的函数为统计量的是(　)。

（A）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；　（B）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　（C）$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$；　（D）$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$.

7、假设检验时，当样本容量一定，若缩小犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率(　　　)。

（A）变小;　（B）变大;　　（C）不变;　（D）不确定.

三、计算题

1．设 X 的分布律为:

X	-3	-2	-1	0	1	2
P	1/8	1/8	1/4	1/4	1/8	1/8

求(1) $E(X), D(X)$；　(2). $P(X<0)$，$P(X>2)$。

2. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，求 $Y=2X+1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

3．设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy\ , & 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

试求(1)　a；（2）$P\{X+Y\ge 1\}$；　(3)　X 与 Y 是否相互独立?

4. 某网站的电子邮件系统有 **1000** 个用户，在同一时刻每一邮箱的使用率为 **0.05**，试求在同一时刻有 **40~60** 个邮箱被使用的概率(利用中心极限定理，需要数据在试卷尾部)。

5．设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 的均匀分布（$\theta>0$，未知），$(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$ 是来自于总体 X 的样本，试求未知参数 θ 的矩估计值与极大似然估计值。

6. 设机床生产的某种零件的尺寸(mm)服从正态分布，规定零件的标准长度为 **32.50**，；现从某日生产的零件中抽取 **6** 件，测得尺寸为：

32.56,　29.66,　31.64,　30.00,　31.87,　31.03

问：该日机床生产零件的长度工作是否符合要求?

（$\bar{x}=31.127$ ，$s^2=1.26$ $(s\approx 1.123)$ $\alpha=0.01$）

四、证明题

设随机事件 A 与 B 满足 $0<P(A)<1$， $0<P(B)<1$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，证明：事件 A 和 B 相互独立。

分布表:

$\Phi(1)=0.8413$，， $\Phi(1.645)=0.95$， $\Phi(1.45)=0.9265$， $t_{0.005}(5)=4.032$，
$t_{0.005}(6)=3.707$，$t_{0.01}(5)=3.365$，$\chi^2_{0.025}(35)=53.2033$，$\chi^2_{0.975}(35)=20.5694$

参考答案

一、填空题

1、0.7 ； 2、$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ ； 3、$\mu=-3,\sigma=\sqrt{2};$ 4、 -1；

5、$N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ ； 6、无偏， d_2； 7、$(\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}})$

二、选择题

1	2	3	4	5	6	7
A	D	B	C	B	B	B

三、计算题

1．解：（1） $E(X)=(-3)\times\frac{1}{8}+(-2)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}$

$E(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{8}+(-2)^2\times\frac{1}{8}+(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$ ；

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{9}{4}$

（2） $P(X<0)=\frac{1}{2}$， $P(X>2)=0$

2. 解： $\forall y\in R$, Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+1\le y)=P(X\le\frac{y-1}{2})$

$\therefore F_Y(y)=F_X(\frac{y-1}{2})$

所以，Y 的概率密度函数

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=(F_X(\frac{y-1}{2}))'=f_X(\frac{y-1}{2})(\frac{y-1}{2})'=\frac{1}{2}f_X(\frac{y-1}{2})$$

3、解: (1) 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2(x^2+kxy)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+2kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+k\overset{令}{=}1,\ 得\ k=\frac{1}{3}$$

(2) $$P\{X+Y\ge1\}=\iint\limits_{x+y\ \ge\ 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{3}+\frac{5x^3}{6})\mathrm{d}x=\frac{65}{72}$$ ；

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \ =\begin{cases}\int_0^2 (x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}y=2x^2+\dfrac{2x}{3}, & 0\le x\le 1,\\ 0, 其它.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \ =\begin{cases}\int_0^1 (x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}, & 0\le y\le 2,\\ 0, 其它.\end{cases}$

在 $f(x,y)$ 的非零区域内 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

4. 解：设 X 为同一时刻被使用的邮箱数，则 $X\sim B(1000, 0.05)$，

由 **De Moivre-Laplace** 中心极限定理得 $\dfrac{X-50}{\sqrt{47.5}}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为

$$P\{40\le X\le 60\}=P\{\frac{-10}{\sqrt{47.5}}\le\frac{X-50}{\sqrt{47.5}}\le\frac{10}{\sqrt{47.5}}\}\approx 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{47.5}})-1 \ \approx 2\Phi(1.45)-1=0.853$$

5．解：（1）$E(X)=\dfrac{1}{2}\theta,$，则 $\theta=2E(X)$，所以 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=2\bar{x}$；

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<\theta\\ 0, & others.\end{cases}$，

由于 $L(\theta)$ 是 θ 的单调递减函数，故 θ 最大似然估计为 $\hat{\theta}=\max(x_1,\dots,x_n)$

6. 解：设该种零件的尺寸为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 μ 及 σ^2，

需检验 $H_0:\mu=32.50$， $H_1:\mu\neq 32.50$；

取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-32.50}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$，

在 $\alpha=0.01$ 下， H_0 的拒绝域为 $\{|t|>t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(5)=4.032\}$；

由样本值算得 $\bar{x}=31.127$ ，$s^2=1.26$ $(s\approx 1.123)$，$t\approx -2.995$，没有落在拒绝域中，

故在 $\alpha=0.01$ 不能拒绝 H_0，即认为该日机床生产零件的长度工作符合要求。

四、证明题

证：因为 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，所以 $\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=1$；

$$\therefore \frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=1$$

$\therefore P(AB)(1-P(B))+P(B)(1-P(A\cup B))=P(B)1-P(B);$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$， 即事件 A 和 B 相互独立