卡尔曼滤波理论及其应用

国防科技大学-中山大学军民融合教学协作活动

协作课程：《统计信号处理》

教学主题：卡尔曼滤波理论及其应用

课时：6学时

主讲教师团队：罗鹏飞教授（国防科技大学）

杜小勇副研究员（国防科技大学）

王涛教授（中山大学）

张昀剑助理教授（中山大学）

时间：2021年6月

课程概述

教学目标

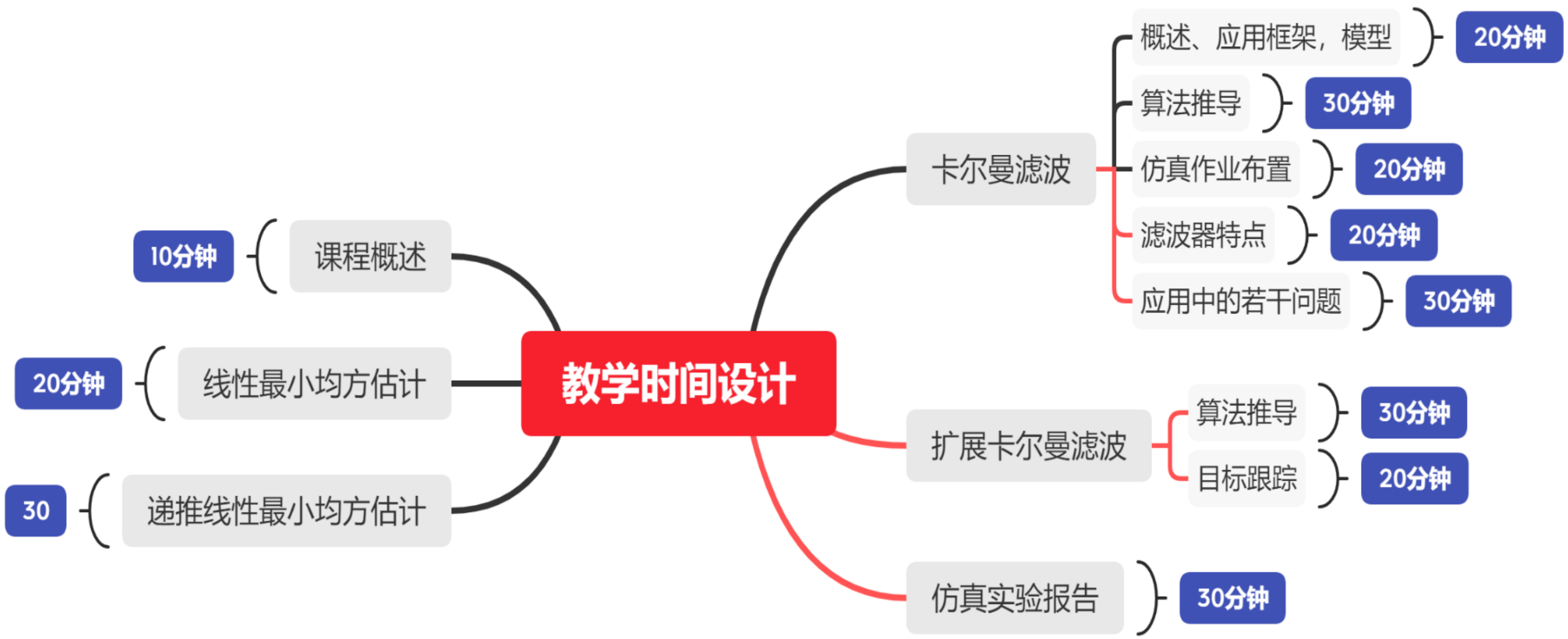
- 知识目标
  - 掌握随机矢量空间、正交投影的概念
  - 了解卡尔曼滤波的基本概念和应用框架
  - 掌握卡尔曼滤波算法推导
  - 掌握卡尔曼滤波的应用方法
- 能力目标
  - 数学推导能力
  - 统计思维能力
  - 仿真分析能力
  - 解决工程实际问题能力
- 情感与价值
  - 克服畏难情绪
  - 培养严谨求实的科学精神
  - 树立打牢基础，服务国防的意识

课程概述

教学内容

- 基于随机矢量空间的线性最小均方估计
- 线性卡尔曼滤波
- 扩展卡尔曼滤波
- 案例分析与研讨

课程概述



教学时间设计
课程概述
10分钟
线性最小均方估计
20分钟
递推线性最小均方估计
30
卡尔曼滤波
概述、应用框架，模型
20分钟
算法推导
30分钟
仿真作业布置
20分钟
滤波器特点
20分钟
应用中的若干问题
30分钟
扩展卡尔曼滤波
算法推导
30分钟
目标跟踪
20分钟
仿真实验报告
30分钟

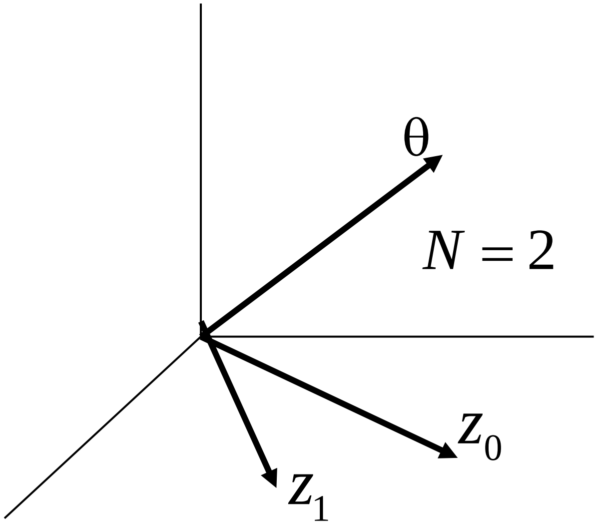
基于随机矢量空间的线性最小均方估计

- 线性最小均方估计
  - 随机矢量空间
  - 基于矢量空间的LMMSE
  - 计算举例

1、随机矢量空间

LMMSE的几何解释能清楚地揭示估计的本质，并且能得出一些附加的特性。

假定θ和观测 $z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}$ 的均值都为零，我们可以把它们看成矢量空间里的元素。很容易验证矢量空间的性质，如矢量相加和乘一个标量仍在这个空间。



1、随机矢量空间

矢量x的长度定义为： $\|x\| = \sqrt{E(x^2)}$

方差越大、矢量越长。零矢量是指方差为零的随机变量，也即确定性的常数就是零矢量。

两个矢量x和y的内积定义为： $(x, y) = E(xy)$

根据这一定义， $(x, x) = \|x\|^2$

如果 $(x, y) = 0$ ，则称x与y垂直（或正交），

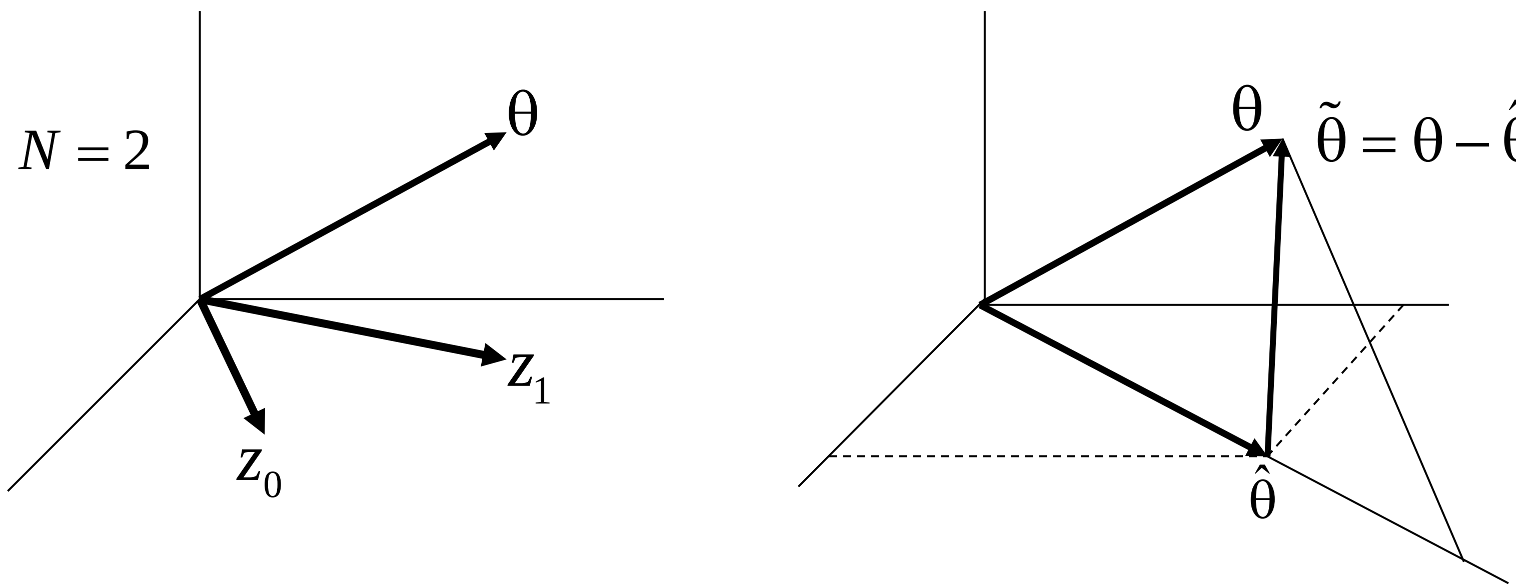
记为 $x \perp y$

2、基于随机矢量空间的LMMSE

$$\hat{\theta} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_i = \mathbf{a}^T \mathbf{z}$$

误差矢量长度的平方

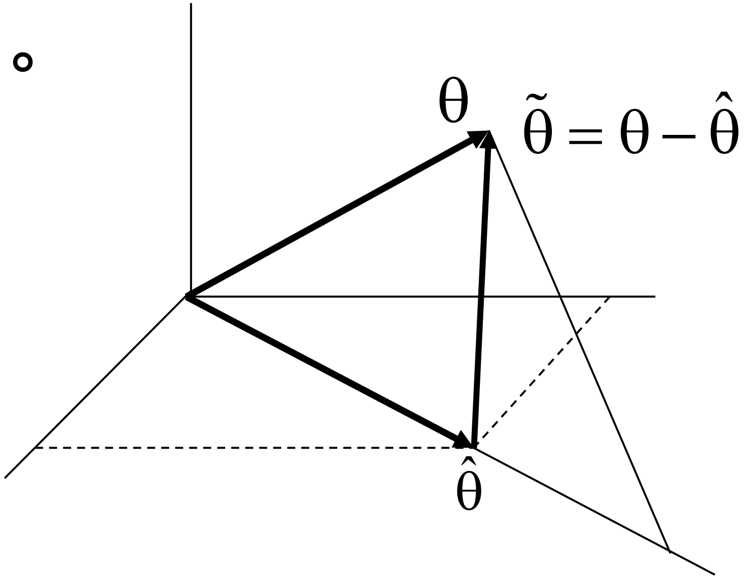
$$Mse(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2] = \left\| \theta - \hat{\theta} \right\|^2 = \left\| \tilde{\theta} \right\|^2$$



使均方误差最小等价于误差矢量长度最短。

很显然，只有当误差矢量与由观测数据所张成的子空间正交时，误差矢量才是最短的。

LMMSE可以看作为被估计量在观测空间上的投影。



简记为 $\hat{\theta}=\hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z})$

2、基于随机矢量空间的LMMSE

误差矢量与每个观测矢量正交：$\tilde{\theta} \perp z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}$

$$E[(\theta - \hat{\theta})z_j] = 0 \quad j = 0,1,\ldots,N-1$$

$$E\left[(\theta - \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_i) z_j\right] = 0 \quad j = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i E(z_i z_j) = E(\theta z_j) \quad j = 0,1,\ldots,N-1$$

2、基于随机矢量空间的LMMSE

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i E(z_i z_j) = E(\theta z_j) \quad j = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E(z_0^2) & E(z_0 z_1) & \cdots & E(z_0 z_{N-1}) \\ E(z_1 z_0) & E(z_1^2) & \cdots & E(z_1 z_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(z_{N-1} z_0) & E(z_{N-1} z_1) & \cdots & E(z_{N-1}^2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} E(\theta z_0) \\ E(\theta z_1) \\ \vdots \\ E(\theta z_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{z\theta}}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}_z^{-1} \mathbf{C}_{z\theta}$$

$$\hat{\theta} = \mathbf{a}^T \mathbf{z} = \mathbf{C}_{z\theta}^T \mathbf{C}_z^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{C}_{\theta z} \mathbf{C}_z^{-1} \mathbf{z}$$

2、基于随机矢量空间的LMMSE

均方误差：$Mse(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2]$

$$= \|\tilde{\theta}\|^2 = E(\tilde{\theta}(\theta - \hat{\theta})) = E(\tilde{\theta}\theta) - E(\tilde{\theta}\hat{\theta})$$

由于

$$E(\tilde{\theta}\hat{\theta}) = E(\tilde{\theta}\mathbf{C}_{\theta z}\mathbf{C}_z^{-1}\mathbf{z}) = \mathbf{C}_{\theta z}\mathbf{C}_z^{-1}E(\tilde{\theta}\mathbf{z}) = 0$$

所以

$$Mse(\hat{\theta}) = E(\tilde{\theta}\theta)$$

$$= E\left[(\theta - \mathbf{C}_{\theta z}\mathbf{C}_z^{-1}\mathbf{z})\theta\right]$$

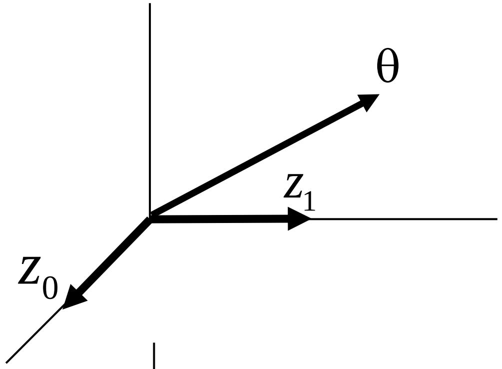
$$= C_\theta - \mathbf{C}_{\theta z}\mathbf{C}_z^{-1}\mathbf{C}_{z\theta}$$

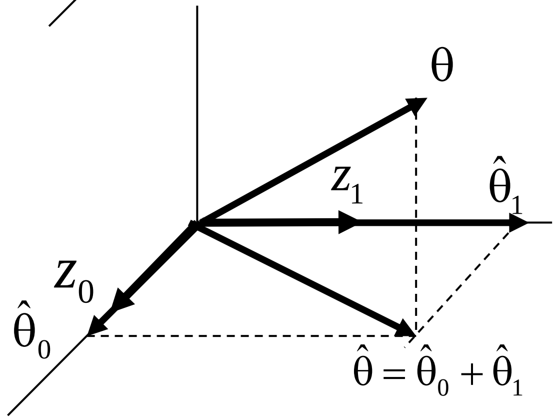
3、计算举例

例1: 假定 z_0, z_1 是零均值、互不相关的，但与θ相关，求θ（零均值）的线性最小均方估计。

解：θ的估计是θ在 z_0 的投影与 z_1 上的投影 之和，

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta} &= \hat{E}(\theta|z_0, z_1) = \hat{E}(\theta|z_0) + \hat{E}(\theta|z_1) \\
&= \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \\
&= \left(\theta, \frac{z_0}{\|z_0\|}\right)\frac{z_0}{\|z_0\|} + \left(\theta, \frac{z_1}{\|z_1\|}\right)\frac{z_1}{\|z_1\|} \\
&= \frac{(\theta, z_0)}{(z_0, z_0)} z_0 + \frac{(\theta, z_1)}{(z_1, z_1)} z_1
\end{aligned}
$$





3、计算举例

$$\hat{\theta}=\frac{(\theta,z_0)}{(z_0,z_0)}z_0+\frac{(\theta,z_1)}{(z_1,z_1)}z_1=\frac{E(\theta z_0)}{E(z_0^2)}z_0+\frac{E(\theta z_1)}{E(z_1^2)}z_1$$

$$=C_{\theta z_0}C_{z_0}^{-1}z_0+C_{\theta z_1}C_{z_1}^{-1}z_1$$

$$\hat{\theta}=\begin{bmatrix}C_{\theta z_0} & C_{\theta z_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{z_0} & 0\\ 0 & C_{z_1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}z_0\\ z_1\end{bmatrix}=\mathbf{C}_{\theta z}\mathbf{C}_z^{-1}\mathbf{z}$$

如果z_0, z_1不是正交的，则首先需要将数据正交化。

4、正交投影的性质

(1) 比例性 $\hat{E}(a\theta\,|\,\mathbf{z}) = a\hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z})$

(2) 线性性 $\hat{E}(a_1\theta_1 + a_2\theta_2\,|\,\mathbf{z}) = a_1\hat{E}(\theta_1\,|\,\mathbf{z}) + a_2\hat{E}(\theta_2\,|\,\mathbf{z})$

(3) 正交性 $E[\left\{[\theta - \hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z})]\mathbf{z}^T\right\} = 0$

(4) 正交投影的计算

$$\hat{\theta} = \hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z}) = \mathbf{C}_{\theta\mathbf{z}}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{z}$$

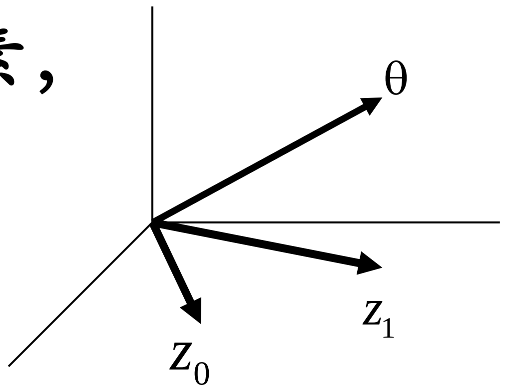
$$\hat{\theta} = \hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z}) = E(\theta) + \mathbf{C}_{\theta\mathbf{z}}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - E(\mathbf{z}))$$ （非零均值）

(5) 可加性（正交数据集） $\hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = \hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z}_0) + \hat{E}(\theta\,|\,\mathbf{z}_1)$

小结：

1. 随机矢量空间的定义

把随机变量看作为矢量空间的元素，

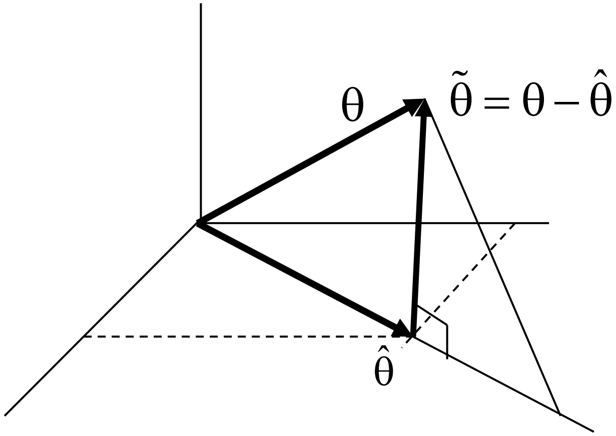


矢量内积： $(x, y) = E(xy)$

矢量的长度： $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{E(x^2)}$

2. 基于随机矢量空间的LMMSE

LMMSE是被估计量在由观测所张成的空间上的投影。



3. 正交投影的性质