# 第 1 章　时间、空间与测量

**【1-1】** 描述你对空间和时间概念的理解。各列举五种可以用来测量时间和空间长度的方法。○[①]

**解** 时间、空间是描述物理事件之间相互次序的基本概念。时间用以表述事件之间的先后顺序，空间用以表述事物之间的相对位置。测量时间的方法有：钟表、计时器/计数器、日落日出、脉搏、四季变化、原子衰变等。测量空间的方法有：尺、光学测量装置、调光衍射法、激光测距法、天体三角学测量法、GPS 等。

**【1-2】** 有人在分析"芝诺佯谬"时说："芝诺根本就是错的。他把每次阿基里斯到达乌龟前一次的出发点作为重复性事件进行时间的测量，但这一事件并不是真正周期性的，不能作为测量时间的工具，所以不存在佯谬。"就此，请你谈谈自己的理解。☆

**解** 时间测量是建立在周期性事件基础之上的，先有周期性事件，后有时间的测量。当选取的周期性事件不同时，对应的时间测量结果也是不同的。详细讨论参见刘斌编著的《力学》中"芝诺佯谬"相关章节。

**【1-3】** (1) 1 AU 有多少秒差距？(2) 1 秒差距有多少米？(3) 1 光年有多少米？(4) 秒差距有多少光年？○

**解** AU(Astronomical Unit)是长度单位，为地球到太阳的平均距离。秒差距也是天文学中使用的距离单位，主要用于量度太阳系外天体的距离。1 秒差距定义为天体的周年视差为 $1''$时的距离。以地球公转轨道的平均半径(一个天文单位，AU)为底边所对应的三角形内角称为视差。当这个角的大小为 $1''$(角秒)时，这个三角形(由于 $1''$的角所对应的两条边的长度差异可以忽略，这个三角形可以想象成等腰三角形)的一条边的长度(地球到这个恒星的距离)就称为 1 秒差距。秒差距记为 pc，如图 1-1 所示，$\triangle ABC$ 是以 $BC$ 为底边的、以 $2''$为顶角的等腰锐角三角形，其中 $\alpha = 1''$，则在$\triangle ADC$ 中：

$$\sin\alpha = \frac{DC}{AC},\quad DC = 1\,\text{AU},\quad AC = 1\,\text{pc}$$

---

① 题目难度大致可分为三级，题后没有标记的为一般，标"○"的为中等，标"☆"的为稍难。

代入可得：

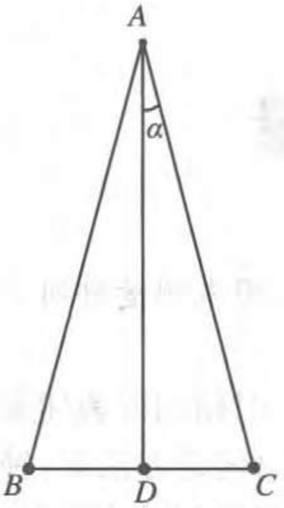


图 1-1

(1) $1\ \mathrm{AU}=4.848\times10^{-6}\ \mathrm{pc}$；

(2) $1\ \mathrm{pc}=\dfrac{0.5\ \mathrm{AU}}{\sin 0.5''}=3.086\times10^{16}\ \mathrm{m}$；

(3) $1\ \mathrm{ly}=3\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\times365\times24\times3\,600\ \mathrm{s}$
$=9.461\times10^{15}\ \mathrm{m}$；

(4) $1\ \mathrm{pc}=\dfrac{3.086\times10^{16}}{9.461\times10^{15}}=3.262\ \mathrm{ly}$。

**【1-4】** 对“在比普朗克时间还要小的范围内，时间的概念可能就不再适用了。在比普朗克长度更小的范围内，长度概念可能已经不存在了”，你是怎么理解的？☆

**解** 由于自然界的客观规律，在比普朗克长度更小的尺度上不再存在相对位置的概念；在比普朗克时间更短的时间上不再存在先后顺序的概念。所以可以认为在这种情况下，长度和时间的概念不再适用了。

**【1-5】** 假设你是一位宇航员，在月球上做物理实验。你对从静止下落的物体下落距离 $y$ 与所用时间 $t$ 之间的关系很感兴趣。你对下落的硬币做了一些记录如下：

| $y$/m | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$/s | 3.5 | 5.2 | 6.0 | 7.3 | 7.9 |

你猜想距离 $y$ 和时间 $t$ 满足一般关系式 $y=Bt^n$，其中 $B$ 和 $n$ 是由实验确定的常数。(1) 为了完成这一关系式，作出 $\ln y-\ln t$ 关系图，其中 $\ln y$ 是纵坐标，$\ln t$ 是横坐标。(2) 证明：如果你对一般关系式 $y=Bt^n$ 两边取对数，你能得到 $\ln y=\ln B+n\ln t$。(3) 对比关系图和(2)中的关系式，请估算 $B$ 和 $n$ 的值。(4) 请问在月球上，物体的加速度是多少？

**解** (1) 图略。

(2) 对两边取对数，由对数公式：$\ln AB=\ln A+\ln B$，$\ln A^n=n\ln A$，可以得到

$$\ln y=\ln Bt^n=\ln B+n\ln t$$

(3) $B\approx0.84$，$n\approx2.0$。

(4) $g_{\mathrm{M}}=2B\approx1.7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

**【1-6】** 下面的表格描述了4个卫星围绕一个致密小行星公转的周期和半径。

(1) 这些数据能用公式 $T=Cr^n$ 来拟合，请给出常数 $C$ 和 $n$ 的值。(2) 第五颗卫星的公转周期为6.20年，请利用(1)中的公式给出该卫星的公转半径。○

| 周期 $T$/a | 0.44 | 1.61 | 3.88 | 7.89 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 半径 $r$/Gm | 0.088 | 0.208 | 0.374 | 0.600 |

**解** (1) $T=Cr^n$ 可变换为 $\ln T=\ln C+n\ln r$，即周期的对数与半径的对数成线性关系。利用最小二乘法进行线性拟合，可以得到 $C=17.0$，$n=1.50$。

(2) 0.510 Gm。

**【1-7】** 数字 0.000 513 0 有（ ）位有效数字。(a) 1；(b) 3；(c) 4；(d) 7；(e) 8。

**解** (c)。

**【1-8】** 估测一张 CD 的厚度，保留合适的有效数字，并给出相对测量精度。○

**解** 将10张CD叠在一起，用毫米刻度尺测得其厚度约为12.6 mm，因而每张CD的厚度约为1.26 mm；毫米刻度尺的最小刻度是1 mm，从而相对精度为

$$\frac{0.1\ \mathrm{mm}}{1.26\ \mathrm{mm}}\times 100\% = 1\%$$

**【1-9】** 请将下列质量以 g 为单位用科学计数法表示：(1) 1.00 μg；(2) 0.001 ng；(3) 100.0 mg；(4) 10 000 μg；(5) 10.000 kg。

**解** (1) $1.00\times10^{-6}$ g；

(2) $1\times10^{-12}$ g；

(3) $1.000\times10^{-1}$ g；

(4) $1.000\,0\times10^{-2}$ g；

(5) $1.000\,0\times10^{4}$ g。

**【1-10】** 12.4 m 和 2 m 的乘积应该表达为（ ）：(a) 24.8 m；(b) 24.8 $\mathrm{m^2}$；(c) 25 $\mathrm{m^2}$；(d) $0.2\times10^2$ $\mathrm{m^2}$。

**解** (d)。乘法、除法运算结果的有效数字位数和参与运算的有效数字位数最少的分量相同。

**【1-11】** 房间恰好被一张长为12.71 m、宽为3.46 m的地毯铺满。请给出该房间的面积。

**解** 44.0 $\mathrm{m^2}$。

**【1-12】** 请用合适的有效数字表达出下面计算式的值：1.80 m + 142.5 cm +

$5.34\times10^5$ mm。

**解** 537 m。

**【1-13】** 以 s 为单位估算你的年龄，并保留合适的有效数字。

**解** 以 18 岁为例，18 年约为 $5.7\times10^8$ s，注意年龄的误差小于 1 年，对应的精度约为 $0.3\times10^8$ s。

**【1-14】** 要在一个薄板上切割出一个半径为 $8.470\times10^{-1}$ cm 的圆形小孔。其容差为 $1.0\times10^{-3}$ cm，即实际孔径大小不能偏离要求的半径超过该容差。如果实际的孔径比要求的孔径大了这么多，请问圆孔的实际面积比要求面积大多少？

**解** 由于容差 $1.0\times10^{-3}$ cm 远小于孔的半径 $8.470\times10^{-1}$ cm，因此可以用一级近似：

$$\begin{aligned}\Delta S &= \pi[(r+\Delta r)^2 - r^2] = 2\pi r\Delta r\\ &= 2\times3.142\times8.470\times10^{-1}\ \text{cm}\times1.0\times10^{-3}\ \text{cm}\\ &= 5.3\times10^{-3}\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

**【1-15】** 试估算人类平均一生呼吸的次数。

**解** 成人平均呼吸频率为 12～20 次·$\text{min}^{-1}$，取平均值为 16 次·$\text{min}^{-1}$，正常人寿命按 75 岁计算，则平均人的一生呼吸次数为 $6.3\times10^8$ 次。

**【1-16】** 一个汽车公司用 12.25 kg 的铁做了一个汽车模型。现在为了庆祝公司成立 100 周年，计划用黄金制作一个完全相同的模型，请问需要多少黄金？

**解** 29.87 kg。注：铁的密度为 7 900 kg·$\text{m}^{-3}$，金的密度为 19 260 kg·$\text{m}^{-3}$。

题目要求模型完全相同，故体积相同，即

$$\frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_2}{\rho_2}$$

其中 $m_1$ 为铁的质量，等于 12.25 kg，$\rho_1$ 为铁的密度，$m_2$ 为金的质量，$\rho_2$ 为金的密度。代入可得 $m_2 = 29.87$ kg。

**【1-17】** 在你的婚礼上，你的结婚戒指重 3.80 g。50 年之后，这个戒指只剩 3.35 g，请问在这 50 年中平均每秒损耗多少金原子？（金的原子量为 197 u，1 u≈$1.660\,538\,86\times10^{-27}$ kg。）

**解** 50 年中，戒指共耗损 3.80 g − 3.35 g = 0.45 g（精确到 1%），单个金原子质量为 $197\times1.66\times10^{-27}$ kg，平均每秒损耗的金原子个数为

$$\frac{0.45\ \text{g}}{197\times1.66\times10^{-27}\times10^3\ \text{g}\times50\times365\times24\times3\,600\ \text{s}} \approx 8.7\times10^{11}\ \text{s}^{-1}$$

**【1-18】** 月球的直径为 3 480 km，请计算月球的表面积，并估算地球表面积为月球表面积的多少倍。

**解**　月球近似球体，有表面积公式 $S=4\pi R^2$，计算得

$$S_{\mathrm{M}} = 3.80 \times 10^{13}\ \mathrm{m}^2$$

地球半径约为 6 371 km，计算得地球表面积为 $5.10\times10^{14}\ \mathrm{m}^2$，所以地球表面积为月球的 13.4 倍。

**【1-19】**　试估算汽车行驶 1 km 轮胎上的橡胶胎面会磨损掉多厚。☆

**解**　估算汽车轮胎一般在其表面磨损 10 mm 时需要更换，这个估算可能会偏差几倍，但是 1 mm 太小而 100 mm 又太大，都不合适。而普通汽车轮胎的最长行驶路程约为$10^4$ km，所以不难得出汽车行驶 1 km，轮胎上的橡胶胎面磨损约为 $1.0\times10^{-3}$ mm。

**【1-20】**　假设你因为在上课时睡觉而受到惩罚。你的老师说，如果你能估算出附近某海水浴场沙滩上有多少粒沙子，就可以免除惩罚。请你尽力试一下。○

**解**　首先需要估算一下海滩的大小和沙粒的大小。假设一个海滩长 500 m，宽 100 m，深 1 m(10 m 太深，0.1 m 又太浅)。在网络上可以查阅到沙粒的直径大小为 0.04～2 mm。可以假设沙粒是直径为 1 mm 的球体，并且紧紧堆积在一起，沙粒间的空隙与沙粒大小相比可以忽略不计。从而可以估算到一个海滩上沙粒的大致数量为

$$N = \frac{1\ \mathrm{m}\times 500\ \mathrm{m}\times 100\ \mathrm{m}}{\frac{4}{3}\pi\,(0.5\times10^{-3})^3} \approx 10^{14}(\text{个})$$

**【1-21】**　试说出一个普通鸡蛋的体积大约为多少，并给出具体方法。○

**解**　可以将鸡蛋放入一个装满水的杯子，记录从杯子中溢出的水的体积；但这一方法需要有测量液体体积的工具，而且实际操作起来并不容易。如果只是估计的话，一斤(500 g)鸡蛋大约有 10 个(视鸡蛋大小决定)，一个鸡蛋就是 50 g 左右。鸡蛋的密度与水相似，所以一个正常大小的鸡蛋体积约为 50 $\mathrm{cm}^3$。

**【1-22】**　大约公元前 235 年，亚历山大图书馆馆长埃拉托色尼(Eratosthenes，公元前 275－前 193)估算出了地球的大小。他是如何做的？○

**解**　公元前 3 世纪，埃拉托色尼首先应用几何学中圆周上一段弧长 $S$、对应的圆周角 $\Delta\phi$ 同圆半径 $R$ 的关系，估算了地球半径。他发现在埃及色尼城夏至正午时，阳光直射井底，而同一时刻在亚历山大城太阳向南偏 $7.2°$。由此得出亚历山大与色尼纬度相差 $\Delta\phi=7.2°$。利用当时经商驼队行走的时间估计两地的距离 $S$ 约 5 000 斯塔第(1 斯塔第相当于 157.5 m)，按式 $R=S/\Delta\phi$，计算得地球半径 $R\approx$ 6 300 km。在当时条件下算得这个数是相当不简单的，这和后来用先进仪器设备测量出的数据相差不是很大。埃拉托色尼的功绩在于首创子午圈弧度测量方法，

并且最早以估测结果证实“地圆说”。(来源于国家测绘地理信息局。)

**【1-23】** 假设你生活在海边,非常熟悉船的各种特征尺度以及船所在位置到岸边的距离,你能否估计出地球的大小?试作说明。○

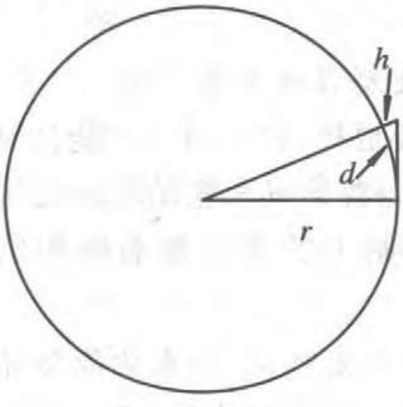


图 1-2

**解** 如图 1-2 所示,测出船杆顶端的高度 $h$,使船驶离岸边,在刚好看到船杆顶端的时候,测量出船离岸边的距离 $d$。由三角形相似,可以得到 $h/d \approx d/r$,从而求得地球半径 $r \approx d^2/h$。

**【1-24】** 请给出一种估算月球大小及其与地球间距离的方法。○

**解** (1) 比埃拉托色尼年长 30 岁的希腊学者阿里斯塔克斯利用月食、日食来估算月球大小。如图 1-3 所示,月球大约每 30 天绕地球一圈,所以每小时它在星空中移动 0.5°,恰好等于月球在天上的张角,也就是视直径。测量在持续时间很长的月食中,月球从地球本影的正中间经过,观察需要的时间,从而得到地球阴影锥是月球大小的 2.5 倍。日食时,月球在地球上的投影缩为一点,月球阴影锥与地球阴影锥近似,日食时地月间距与月食时地月间距可以看成是等值的,所以地球本影落在月球轨道上缩小了 1 个月球大小,从而地球半径大小为月球半径大小的 3.5 倍。

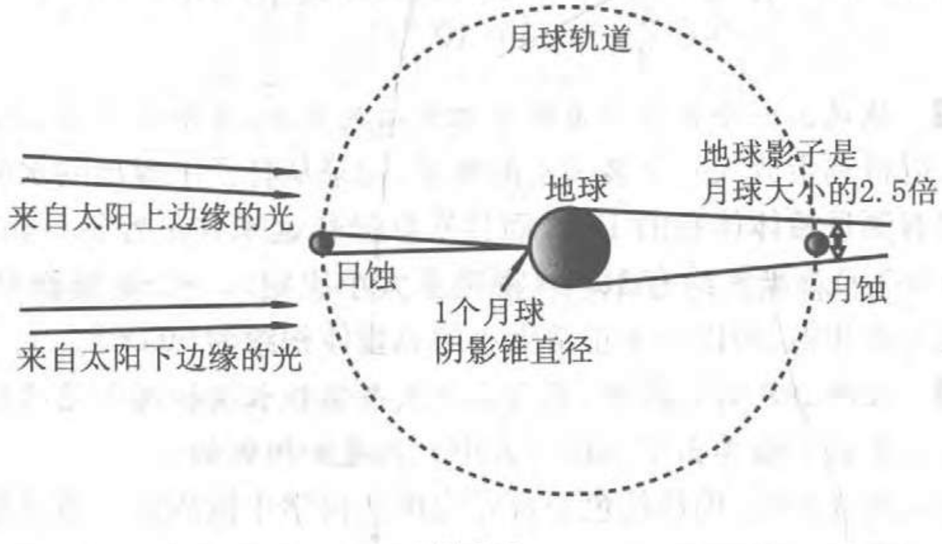


图 1-3

我们也可以严格推导一下计算过程。如图 1-4 所示,设 $A$ 为地球本影落在月球轨道上的弧度的一半,$B$ 是太阳角大小的一半。由于 $A+B+C=\pi$,而 $E,C,D$ 同属一个三角形的三个角,所以 $E+C+D=\pi$,因此 $A+B=D+E$。因为这些弧度都比较小,所以可得到如下的近似表达式:

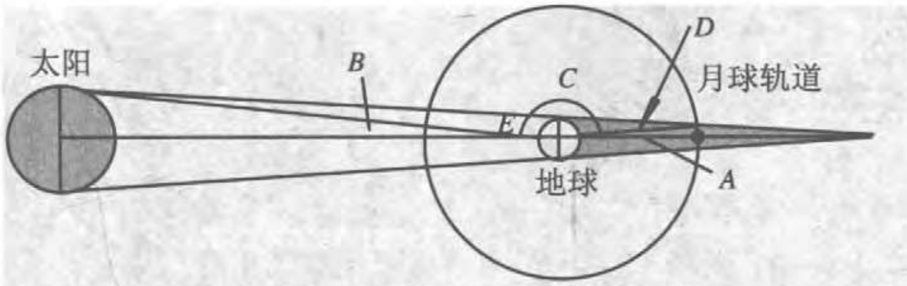



图 1-4

$A$ = 地球本影在月亮轨道上的半径($R_{EM}$)/ 地月距离($D_{EM}$)

$B$ = 太阳半径($R_S$)/ 日地距离($D_{ES}$)

$D$ = 地球半径($R_E$)/ 地月距离($D_{EM}$)

$E$ = 地球半径($R_E$)/ 日地距离($D_{ES}$)

这里 $R$ 是半径，$D$ 是距离，下标中的 E 表示地球，M 表示月亮，S 表示太阳。变换得到

$$R_{EM}/D_{EM} = R_E/D_{EM} + R_E/D_{ES} - R_S/D_{ES}$$

在日食时，月球正好遮住太阳，所以它们的张角大小几乎相等，即

$$R_S/D_{ES} = R_M/D_{EM}$$

代入上式，化简得到

$$R_{EM} = R_E - R_M + R_E \cdot (D_{EM}/D_{ES})$$

由于地月距离远小于地日距离，$D_{EM}/D_{ES} \approx 0$，所以上式可以简化为

$$R_{EM} = R_E - R_M$$

从而可以得到地球直径大小是月球直径大小的 3.5 倍。当时阿里斯塔克斯估算月球大小是地球的 1/3，误差主要来源于对月食各个阶段时间的观察不准确。

(2) 有了月球大小，阿里斯塔克斯进一步估算了地月距离：他举起一个大拇指对着月亮，当拇指完全能够遮住月亮的时候，它和眼睛之间的距离与拇指尖宽度的比值大约为 110。根据三角形相似原理，这个值等于地月之间距离与月亮直径的比值，从而求出了地月之间的距离。

测量地月间距离还可以利用视差法。在地球上两个不同的地点，在完全相同的时间很精确地选取两张月球位置的影像，比较相对于背景恒星的位置。测量这两个点在地球上的距离，可以用三角方法测量到月球到地球的距离(图 1-5)：

$$d_{ME} = \frac{d_{EB}}{\tan\theta}$$

现代科学技术利用电磁波来测量：设地月间距离为 $L$，从地面向月球发射一电磁波信号，经月球反射后，再在地球上接受反射的电磁波。设从发射电磁波到接收

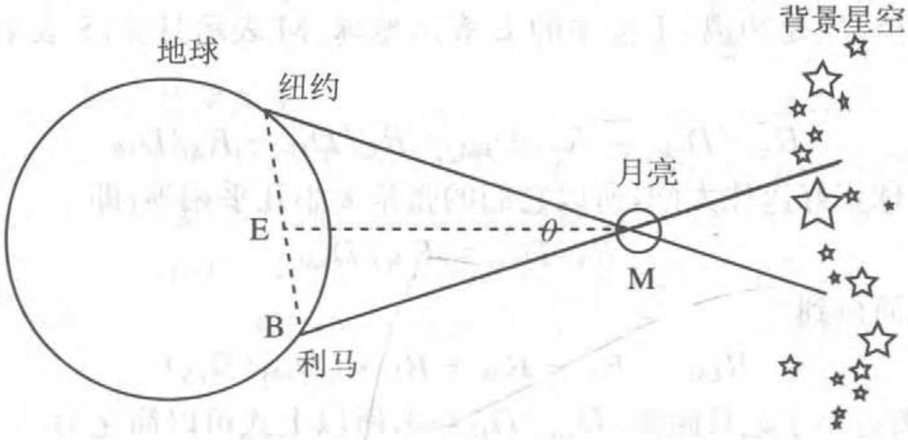
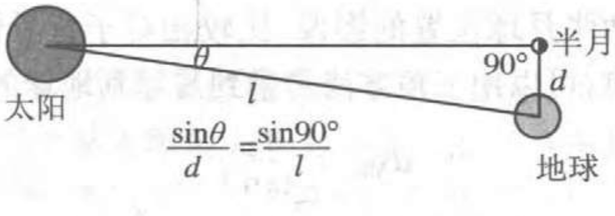




图 1-5

电磁波所经历的时间间隔为 $\Delta t$，则地月距离为 $L = c\Delta t/2$。

【1-25】 请给出一种估算地球与太阳间距离及太阳大小的方法。○

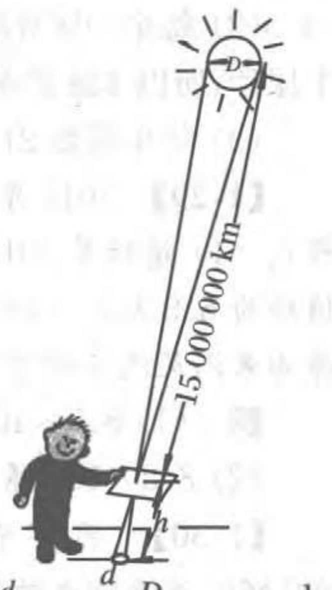
解 在得到地月距离后，当在地球上看到月球正好有一半被太阳照亮时测量地日、地月连线的夹角。这时认为日、地、月构成的三角形中月球所在的角为直角，地月连线为一直角边，日地连线为斜边(图 1-6)；知道地月之间距离和地日、地月连线的夹角，就可以得出太阳到地-月系统的距离。




$$\frac{\sin\theta}{d} = \frac{\sin 90^\circ}{l}$$

图 1-6

仿照题1-24(2)阿里斯塔克斯的做法就可得到太阳的大小(注意使用墨镜防护眼睛)。其实,在知道日地距离后,利用小孔成像法(图1-7)或测量太阳直射时树下光斑的大小和树叶大概的高度,也可以估算出太阳的大小。




$$\frac{d}{h}=\frac{D}{15\,000\,000\ \text{km}}=\frac{1}{110}$$

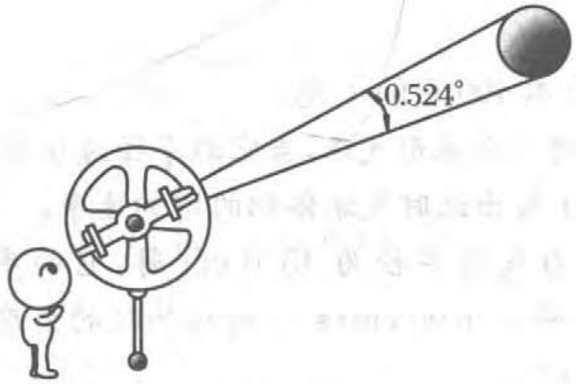
图1-7

【1-26】 如图所示,从地球上某一点看,月球的直径所对应的角度为0.524°。试估算月球的半径,已知月球离地球大约$3.84\times10^8$ m。

解 由于$0.524°=9.15\times10^{-3}$ rad比较小,所以可以将半径近似视为月球所对视角的弧长的一半,即

$$R=\frac{1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\times384\times10^6\ \text{m}\times9.15\times10^{-3}\ \text{rad}$$
$$=1.76\times10^6\ \text{m}$$

其中$R$为月球半径,$d$为月地距离,$\theta$为题目中所述角度。




(题1-26图)

【1-27】 假设人体主要是由水组成的,水分子的质量为$29.9\times10^{-27}$ kg。如果一个人的质量为60 kg,请估算这个人体内大约有多少水分子。

解 $2.0\times10^{27}$个。

【1-28】 环保方面有一个关于使用传统尿布还是使用可降解尿片的争议。(1) 若假设一个婴幼儿从出生到2.5岁,每天用3个尿片,请估算每年在中国需要使用多少尿片。(2) 请估算这些尿片所需的垃圾填埋场体积,假设每1 000 kg废尿片大约1 m³。(3) 如果用平均深度为10 m的垃圾填埋场来处理这些尿片,那么每年需多大的这种垃圾填埋场?

解 (1) 根据中国国家统计局发布的近几年《国民经济和社会发展统计公报》数据统计,2012年全年出生人口1 635万,2011年1 604万,可以估算全国0~2.5岁的婴幼儿约4 000万,每年需要约438亿个尿片。

(2) 每个干尿片约 25 g,估算废尿片约 50 g,那么 1 000 kg 废尿片约有 20 000 个尿片,所以 438 亿个尿片占地约 219 万 $m^3$。

(3) 每年需要 21.9 万 $m^2$ 的 10 m 深的垃圾场。

**【1-29】** 2010 年全国汽车汽油消耗大约 7 118 万吨(1 吨 = 7.35 桶,1 桶 = 159 升)。(1) 请估算 2010 年在中国汽车消耗多少升的汽油及其总价值(1 升汽油的价值约为 6.9 元)。(2) 如果 1 桶原油能提炼 1 升汽油,请估算每年中国需要多少桶原油来满足汽车的需求,每天需要多少?

**解** (1) $8.3\times10^{10}$ 升,$5.7\times10^{11}$ 元;

(2) $8.3\times10^{10}$ 桶,$2.3\times10^{8}$ 桶。

**【1-30】** 兆字节(MB)是计算机的存储单位。一个 CD 的存储空间为 700 MB,能存储大约 70 min 高质量音乐。(1) 如果一支歌曲长约 5 min,请问平均每支歌需要多少兆字节的存储空间?(2) 如果一页印刷文本占 5 KB,请估算一张 CD 能存多少页的小说,大约多少本?

**解** (1) 50 MB;

(2) 143 360 页,360 本 400 页的小说。

**【1-31】** 将空气吹进一个球形气球,当它的半径为 6.50 cm 时,其半径增加速率为 $0.900\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$。(1) 给出此时气球体积的增加速率。(2) 如果空气流入的体积速率是恒定的,那么当气球半径为 13.0 cm 时,它的半径增加速率为多大?(3) 如果(2)中的答案不同于 $0.90\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$,请从物理的角度解释为什么这个速率会大于或小于 $0.90\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$。

**解** 气球的体积公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

微分后得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

(1) 代入数据,得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=478\ \mathrm{cm^3\cdot s^{-1}}$$

(2) 当 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 不变时,$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t\propto 1/r^2$,所以半径增加速率为半径为 6.5 cm 时的 1/4,为 $0.225\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$。

(3) 对于半径不同的两个球,分别增加相同的半径,两个球增加的体积不同。

**【1-32】** 如果宇宙的平均密度大于 $6\times10^{-27}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$,那么最终宇宙会停止扩

张开始收缩。(1) 每立方米有多少电子时能产生这一临界密度?(2) 每立方米有多少质子时能产生这一临界密度?($m_e=9.11\times10^{-31}$ kg,$m_p=1.67\times10^{-27}$ kg。)

**解** (1) 计算得

$$n_e=\frac{\rho}{m_e}=\frac{6\times10^{-27}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}}{9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}}\approx7\times10^{3}\ \mathrm{m^{-3}}$$

即每立方米有 $7\times10^3$ 个电子。

(2) 计算得

$$n_p=\frac{\rho}{m_p}=\frac{6\times10^{-27}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}}{1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg}}\approx4\ \mathrm{m^{-3}}$$

即每立方米有 4 个质子。

**【1-33】** 一个铁原子核半径为 $5.4\times10^{-15}$ m,质量为 $9.3\times10^{-26}$ kg。(1) 求它的密度(单位为 $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$)。(2) 如果地球有相同的密度,那么地球的半径为多大?(地球的质量为 $5.98\times10^{24}$ kg。)

**解** (1) $\rho=\dfrac{m}{V}=1.4\times10^{17}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$;

(2) $V=\dfrac{m}{\rho}=\dfrac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow R=216$ m。

**【1-34】** 词冠 giga(吉)代表( )。(a) $10^3$;(b) $10^6$;(c) $10^9$;(d) $10^{12}$;(e) $10^{15}$。

**解** (c)。

**【1-35】** 词冠 mega(兆)代表( )。(a) $10^{-9}$;(b) $10^{-6}$;(c) $10^{-3}$;(d) $10^6$;(e) $10^9$。

**解** (d)。

**【1-36】** 请用搜索引擎找出尽可能多的时间和长度的单位,并列出其中三个和 SI 单位之间的换算。

**解** 时间单位:世纪,年代,年,季度,月,旬,周,天(d),小时(h),刻,分(min),秒(s),毫秒(ms),微秒(μs),纳秒(ns),皮秒(ps),飞秒(fs,$10^{-15}$ s),阿秒($10^{-18}$ s)。

长度单位:里,丈,尺,寸,英里(mile,1 609 m),码(yd,0.914 4 m),英尺(ft,0.304 8 m),英寸(in,0.025 4 m),光年(1y,$9.4653\times10^{15}$ m),秒差距(pc,3.261 64 ly),天文单位(AU,$1.496\times10^{11}$ m),千米(km),米(m),分米(dm),厘米(cm),毫米(mm),微米(μm),纳米(nm),皮米(pm),飞米(fm),阿米(am)。

**【1-37】** 假设 SI 中的三个基本单位是长度、密度和时间,而不是长度、质量和时间。在这一系统中,用水的密度来定义标准密度,那么需要考虑水的什么条件来

精确定义标准密度？

**解** 由状态方程 $pV=nRT$，可知水的密度(质量与体积的比值)与压强 $p$ 和温度 $T$ 有关，所以需要考虑水的压强和温度来定义标准密度。

**【1-38】** 1 英尺长为 30.48 cm，请问 1 英里是多少厘米？

**解** 1 mile(英里) = 5 280 ft(英尺) = $5\,280\times30.48$ cm = $1.609\times10^5$ cm。

**【1-39】** 请计算从英里每小时转换为千米每小时的转换系数。

**解** 因为 1 mile = 1 609.344 m，故转换系数约为 1.61，即将以英里每小时作单位的数值乘以 1.61 即可转换为以千米每小时作单位的数值。

**【1-40】** 在 1960～1980 年期间的阿波罗计划中，飞船从离开地球轨道到登月需要 3 天。请分别使用单位：(1) 千米每小时；(2) 英里每小时；(3) 米每秒估算飞船的速度。

**解** 地球到月球的平均距离为 $3.844\times10^5$ km，所以飞船的速度分别为：

(1) 5 339 $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$；

(2) 3 317 $\mathrm{mile\cdot h^{-1}}$；

(3) 1 483 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【1-41】** 一次暴雨总计有 3 cm 的降雨。请问一亩地上有多少降雨？请分别用以下单位表示计算结果：(1) 立方厘米；(2) 立方寸；(3) 立方米；(4) 千克。

**解** (1) 1 亩地约 667 $\mathrm{m^2}$，所以

$$V = S\cdot h = 3\times10^{-2}\times667\ \mathrm{m^3} = 2\times10^7\ \mathrm{cm^3}$$

(2) 1 亩地约 $6\times10^5$ 平方寸，所以 $V=5.4\times10^5$ 立方寸。

(3) $V=2\times10\ \mathrm{m^3}$。

(4) $M=\rho V=2\times10^4$ kg。

**【1-42】** 如果 $x$ 的单位为米，$t$ 的单位为秒，速度 $u$ 的单位为米每秒，加速度 $a$ 的单位为米每二次方秒。请给出以下各式的国际单位：(1) $u^2/x$；(2) $\vec{r}=(1.5\ \mathrm{m}+12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\times t)\vec{e}_x+(16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\times t-4.9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\times t^2)\vec{e}_y$；(3) $\dfrac{1}{2}at^2$。

**解** (1) $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$；

(2) m；

(3) m。

**【1-43】** 如果取力、长度、时间为基本量，则质量的量纲是什么？

**解** $[M]=\mathrm{F\cdot L^{-1}\cdot T^2}$。

**【1-44】** 力的量纲为质量量纲乘以加速度量纲，加速度的量纲为速度量纲除以时间量纲。压强被定义为力除以面积。请问压强的量纲是什么？请用国际单位

制中的基本单位千克、米和秒表示压强的单位。

解 $[p]=ML^{-1}T^{-2}$，$kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}$。

【1-45】 流动流体中的压强 $p$ 取决于流体的密度 $\rho$ 和流速 $u$。请用简单合适的密度、流速组合给出正确的压强量纲。

解 $[p]=[\rho][u]^2$。

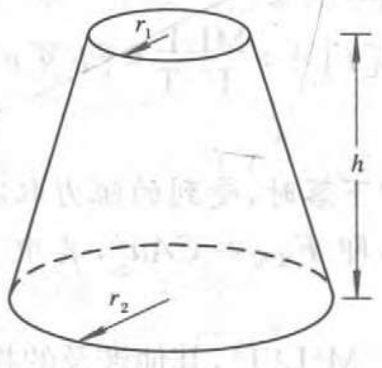
压强 $p$ 的量纲为：$[p]=L^{-1}MT^{-2}$，密度 $\rho$ 的量纲为 $[\rho]=L^{-3}M$，速度 $v$ 的量纲为 $[v]=LT^{-1}$，所以 $p$ 正比于 $\rho u^2$，即 $p=k\cdot\rho u^2$，其中 $k$ 为无量纲常数。

【1-46】 下图为一个圆台。请用量纲分析法分析出下列表达式分别表示哪一个物理量：(a) 周长；(b) 体积；(c) 表面积。

(1) $\pi(r_1+r_2)\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$；

(2) $2\pi(r_1+r_2)$；

(3) $\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$。




(题1-46图)

解 (1) $[\pi(r_1+r_2)[h^2+(r_1-r_2)^2]^{1/2}]=L^2$，为面积量纲，表示了(c)表面积；

(2) $[2\pi(r_1+r_2)]=L$，为长度量纲，表示了(a)周长；

(3) $[\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)]=L^3$，为体积量纲，表示了(b)体积。

【1-47】 在下列等式中，距离 $x$ 的单位为米，时间 $t$ 的单位为秒，速度 $v$ 的单位为米每秒。请问 $C_1$ 和 $C_2$ 的量纲和SI单位是什么？(1) $x=C_1+C_2t$；(2) $x=0.5C_1t^2$；(3) $v^2=2C_1$；(4) $x=C_1\cos C_2t$；(5) $v^2=2C_1v-(C_2x)^2$。如果 $x$ 的单位为英尺，$t$ 的单位为毫秒，$v$ 的单位为英尺每秒，请问以上各等式中的 $C_1$ 和 $C_2$ 的单位是什么？量纲是什么？

解 (1) $[C_1]=L$，$[C_2]=LT^{-1}$，SI单位分别为 m，$m\cdot s^{-1}$；

(2) $[C_1]=LT^{-2}$，SI单位为 $m\cdot s^{-2}$；

(3) $[C_1]=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$,SI 单位为 $\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$;

(4) $[C_1]=\mathrm{L}$,$[C_2]=\mathrm{T}^{-1}$,SI 单位分别为 m,$\mathrm{s}^{-1}$;

(5) $[C_1]=\mathrm{LT}^{-1}$,$[C_2]=\mathrm{T}^{-1}$,SI 单位分别为 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,$\mathrm{s}^{-1}$。

**【1-48】** 力的国际单位千克米每二次方秒($\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$)称为牛顿(N)。请给出牛顿万有引力定律 $F=Gm_1m_2/r^2$ 中 $G$ 的量纲和国际单位。

**解** 由 $F=Gm_1m_2/r_2^2$,得

$$G=\frac{Fr_2^2}{m_1m_2}$$

将量纲代入上式,得$[G]=\mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$,国际单位为 $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。

**【1-49】** 物体的动量是其速度和质量的乘积。证明:动量的量纲为力的量纲和时间量纲的乘积。请问力和哪个物理量的组合具有功率的量纲?

**解** 动量量纲为$[P]=M[v]=\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$,力的量纲为$[F]=\mathrm{MLT}^{-2}$,所以$[F][t]=\mathrm{MLT}^{-2}\mathrm{T}=[P]$,得证。

对于功率,$[W]=[F][l][t]^{-1}=\dfrac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}=[F][v]$,即力和速度的组合具有功率的量纲。

**【1-50】** 当物体在空气中下落时,受到的阻力取决于该物体的横截面面积 $A$ 和下落速度 $u$ 的平方的乘积,即 $F_{空气}=CAu^2$,其中 $C$ 是一常数。请给出 $C$ 的量纲。

**解** 设 $C$ 的量纲为$[C]=\mathrm{M}^x\mathrm{L}^y\mathrm{T}^z$,其他涉及的物理量的量纲分别为

$$[F]=\mathrm{MLT}^{-2},\quad [A]=\mathrm{L}^2,\quad [u]=\mathrm{LT}^{-1}$$

由题中所述的关系式 $F_{空气}=CAu^2$,得

$$[F]=[C][A][u]^2$$

即

$$\mathrm{MLT}^{-2}=(\mathrm{M}^x\mathrm{L}^y\mathrm{T}^z)\cdot\mathrm{L}^2\cdot(\mathrm{LT}^{-1})^2$$

于是得到下面的方程组:

$$\begin{cases}x=1\\ y+2+2\times1=1\\ z+2\times(-1)=-2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1\\ y=-3\\ z=0\end{cases}$$

即 $C$ 的量纲为 $ML^{-3}$。

【1-51】 质点在均匀加速度下的位移可以表达为 $x = ka^m t^n$（$x$ 为位移，$a$ 为加速度，$t$ 为时间，$k$ 为无量纲常数）。(1) 请用量纲分析法证明，当 $m=1, n=2$ 时，表达式成立。(2) 量纲分析法是否可以给出 $k$ 的值？

**解** $x, a, t$ 的量纲分别为

$$[x] = \mathrm{L},\quad [a] = \mathrm{LT^{-2}},\quad [t] = \mathrm{T}$$

(1) 由等式可知，表达式两边同一物理量的幂指数相同，从而得到

$$m \times 1 + n \times 0 = 1 \quad (L\text{ 相等})$$

$$m \times (-2) + n \times 1 = 0 \quad (T\text{ 相等})$$

解得 $m=1, n=2$，所以当 $m=1, n=2$ 时，表达式成立。

(2) 因为 $k$ 值是无量纲常数，其大小不会影响到等式两边的量纲是否相同，故量纲分析法无法给出 $k$ 的值。

【1-52】 假设我们已知一个以速率 $v$ 沿半径为 $r$ 的圆做匀速圆周运动的物体的加速度正比于 $r$ 和 $v$ 的某次方，即 $r^n$ 和 $v^m$。(1) 试给出 $n$ 和 $m$ 的值；(2) 给出加速度最简单的表达式。

**解** (1) 物体加速度的量纲为 $[a] = \mathrm{LT^{-2}}$，位移量纲为 $[r] = \mathrm{L}$，速度量纲为 $[v] = \mathrm{LT^{-1}}$。

加速度正比于速度和位移的某次方，即

$$a = cr^n v^m$$

等式两边的量纲相同，所以得到

$$m + n = 1 \quad 且 \quad -m = -2$$

从而得到 $m = 2, n = -1$。

(2) 加速度的表达式为

$$a = c\frac{v^2}{r}$$

【1-53】 开普勒第三定律将行星的周期和它的轨道半径 $r$、牛顿万有引力定律（$F = Gm_1m_2/r^2$）中的常数 $G$，以及太阳质量 $M_S$ 联系在一起。请问如何组合这些量可以得到行星周期的正确量纲？

**解** 列出各个参数的量纲：

周期：$[T] = \mathrm{T}$

轨道半径：$[r] = \mathrm{L}$

万有引力常数：$[G] = \dfrac{[F][r]^2}{[m_1][m_2]} = \dfrac{\mathrm{MLT^{-2}L^2}}{\mathrm{MM}} = \mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}$

太阳质量：$[M_S]=\mathrm{M}$

所以，周期的量纲可以表达成 $[T]=[r]^{3/2}[G]^{-1/2}[M_S]^{-1/2}$。

**【1-54】** 单摆的周期取决于单摆的长度 $L$ 和当地的重力加速度 $g$（量纲为 $\mathrm{L\cdot T^{-2}}$）。(1) 请给出 $L$ 和 $g$ 的简单组合，使其与时间的量纲相同。(2) 利用两个长度 $L$ 不同的单摆，通过实验检测周期 $T$ 与单摆长度 $L$ 的关系。(3) 正确的 $T$ 与 $L$，$g$ 关系式中还要乘上一个和 $\pi$ 有关的常数，但无法利用(1)的量纲分析方法得到。如果 $g$ 已知，那么该常数能通过类似于(2)的实验测量得到。已知 $g=9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，请利用(2)中你测得的实验结果，推出 $T$ 的表达式。○

**解** (1) 长度的量纲为 L，重力加速度的量纲为 $\mathrm{L\cdot T^{-2}}$，时间的量纲为 $[T]=\sqrt{\mathrm{L/(L\cdot T^{-2})}}$，所以 $\sqrt{L/g}$ 组合的量纲与时间的量纲相同。

(2) 比较周期与摆长的关系，得到 $T\propto L^n$ 中的常数 $n$。

(3) 现有关系式 $T=a\sqrt{L/g}$，通过改变摆长的平方根可以作出 $T$-$\sqrt{L}$ 的关系图，求得拟合直线斜率 $k$，可得到 $a=k\cdot\sqrt{g}$。

# 第 2 章　质点运动学

【2-1】 一个矢量有一个正的 $x$ 分量和一个负的 $y$ 分量，它的方向从 $x$ 轴正向逆时针测量，应(　)。(a) 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围；(b)在 $90^\circ \sim 180^\circ$ 范围；(c) 大于 $180^\circ$。

解　(c)。该矢量落在第四象限。

【2-2】 一个矢量 $\vec{A}$ 指向 $+x$ 方向。请作图显示矢量 $\vec{B}$ 至少有三种选择能使 $\vec{B}+\vec{A}$ 指向 $+y$ 方向。

解　只要满足 $\vec{B}$ 在第二象限，且其 $x$ 分量与 $\vec{A}$ 的大小相等即可，如图 2-1 所示。

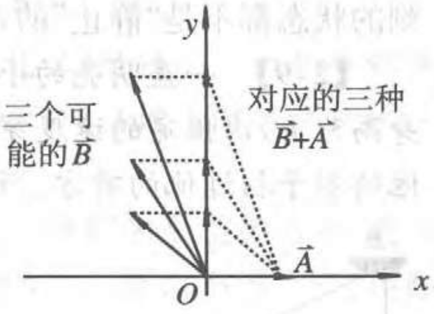



图 2-1

【2-3】 两个大小不相同的矢量的和可能为零吗？三个大小不相同的矢量呢？如果可能，在什么样的条件下矢量和为零？

解　两个大小不相同的矢量相加的和不可能为零，当为任意方向时和矢量均不为零。三个大小不相同的矢量相加的和可能为零，当其首尾相接可构成三角形时和为零。

【2-4】 请问三个大小相等的矢量相加能不能为零？如果可以，请作图表示；如果不行，请解释。

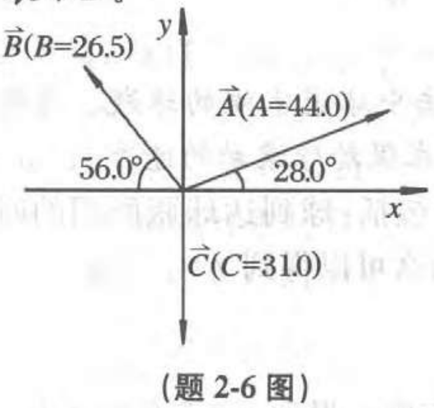
解　三个大小相等的矢量相加可以等于零，只要它们首尾相接构成等边三角形。

【2-5】 有矢量：$\vec{A}=3.4\vec{e}_x+4.7\vec{e}_y$，$\vec{B}=-7.7\vec{e}_x+3.2\vec{e}_y$，$\vec{C}=5.4\vec{e}_x-9.1\vec{e}_y$。(1) 求 $\vec{D}$，使其满足 $\vec{D}+2\vec{A}-3\vec{C}+4\vec{B}=\vec{0}$。(2) 用大小和方位角的形式表示 $\vec{D}$。

解　(1) $\vec{D}=40\vec{e}_x-50\vec{e}_y$；

(2) $D=64, \theta=309^\circ$。

【2-6】 三个矢量如图所示，矢量的大小在图中已标出。求这三个矢量的和。用两种方式表达：(1) $x,y$ 分量；(2) 矢量和的大小及它和 $x$ 轴之间的夹角。




(题 2-6 图)

解　(1) $x=24.0, y=11.6$；

(2) 大小为 26.7，夹角为 25.8°。

【2-7】 请结合日心说和地心说之争，讨论一下在物理模型中参照系的重要性，谈谈你的理解。○

**解** 相对运动的描述都依赖取定的参考系。日心说和地心说的根本不同之处在于选取的参考系不同。因为运动是相对的，所以不能绝对地说这两种说法到底谁对谁错，两者都有一定的道理。

【2-8】 "飞矢不动"佯谬的关键是什么？你是如何理解的？

**解** 描述运动需要位移、速度和加速度。"飞矢不动"的存在，是由于当时还没有速度和微分的概念。虽然每个时刻飞矢都处在一个固定的位置，但每个时刻它都有向下一个位置运动的趋势，即在这个位置上它有速度。也就是说，飞矢任何时刻的状态都不是"静止"的，都存在即时速度。

【2-9】 一盏明亮的小灯悬挂在大厅的房顶上，离地面高 $H$，一个人(假设他的身高为 $h$)以恒定的速度穿过大厅，在 $t=0$ 时刚好在灯的下方。当他继续前行时，他的影子扫过他的前方。请写出这个人的影子顶端的速度表达式。○

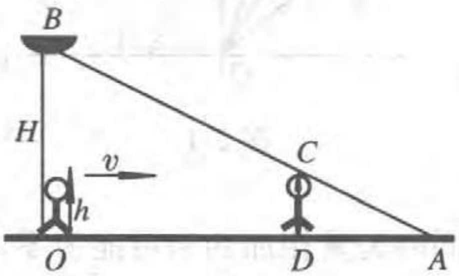


图 2-2

**解** 光线是直线，人行走时始终与地面保持垂直，从而可以利用三角形相似原理建立影子位置与人位置之间的关系，再对时间求导就得到对应的速率关系。

如图 2-2 所示，可知

$$\frac{AD}{AO}=\frac{DC}{BO} \Rightarrow \frac{AO-AD}{AO}=\frac{BO-DC}{BO}$$

记 $AO$ 长为 $L$，$OD$ 长为 $l$，则有

$$L=\frac{H}{H-h}l$$

求导可得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow v=\frac{H}{H-h}v_0$$

即人影顶端速度是人运动速度的 $H/(H-h)$ 倍。

【2-10】 一个保龄球匀速滚过 16.5 m 长的球道击中球道末端的球瓶。保龄球投手在扔出球 2.5 s 之后听到了球撞击球瓶的声音，求保龄球滚动的速率。

**解** 保龄球手听到球撞击球瓶的声音所用的时间包括：球到达球瓶所用的时间和声音传到保龄球投手所用的时间。设球速为 $v$，那么可以得到

$$\frac{L}{v}+\frac{L}{v_s}=t$$

代入 $L=16.5\ \mathrm{m}$，$t=2.5\ \mathrm{s}$，$v_s=340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$(空气中的声速)，得到 $v=6.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

【2-11】 一只兔子和一只乌龟比赛 1.00 km 的长跑。乌龟以它的最大速率$0.200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$恒定地沿直线向终点爬行。兔子先以其最大速率$8.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$朝终点跑了 0.800 km之后，停下来休息并嘲笑乌龟。请问当乌龟离终点多远时，兔子继续比赛且还以最大速率奔跑，仍能保证取胜？

**解** 兔子休息之后跑 0.200 km 所需时间为

$$t=\frac{L}{v_{兔}}=\frac{1.00\ \mathrm{km}-0.800\ \mathrm{km}}{8.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}=25\ \mathrm{s}$$

乌龟在这段时间内能爬行的距离为

$$s=v_{龟}t=0.200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\times 25\ \mathrm{s}=5\ \mathrm{m}$$

即在乌龟离终点还有 5 m 时，兔子继续比赛仍能保证取胜。

【2-12】 两列相隔 60 km 远的火车在平行轨道上相向而行，速率都为$15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。一只小鸟以$20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$的速率在两列火车之间往返飞行直到两火车相遇。请问小鸟共往返了多少次？飞行了多少距离？

**解** 这样选取参考系：小鸟与 A 车相遇后飞出，以 A 车作为平动参考系，则小鸟的速度始终为$5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$，B 车速度始终为$30\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。开始 B 车与鸟相距 60 km，最后相距 0，每次相向运动后，A，B 两车互换，设每次距离为 $s_i$，则有

$$s_{i+1}=\frac{1}{7}s_i$$

$\{s_i\}$构成等比数列。由初末条件知项数为∞，即鸟往返∞次，当然实际不可能出现这种情况，原因是鸟的运动过于理想，并且鸟也是有大小的，这道题的结果只能视为一种理想情形。

总时间为

$$t=\frac{s_0}{2v_{车}}=\frac{60\ \mathrm{km}}{2\times 15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}=2\ \mathrm{h}$$

鸟飞行距离为

$$d=t\cdot v_{鸟}=2\ \mathrm{h}\times 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}=40\ \mathrm{km}$$

【2-13】 猎豹最快的奔跑速度为$113\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$，鹳最快的飞行速度为$161\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$，旗鱼最快的游动速度为$105\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。它们三个以其最快速度并相隔距离 $L$ 进行接力跑。请问它们的平均速度为多少？比较该值和这三个最快速度数值的平均值。请解释为什么这两个值不相等。

**解** 间隔 $L$ 时的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{3L}{\dfrac{L}{v_1}+\dfrac{L}{v_2}+\dfrac{L}{v_3}}=122\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

三个最快速度的数值平均值为

$$\bar{v}' = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} = 126\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

前者比后者小，原因在于前者对应于三个速度经过相同距离而时间间隔不同，后者相反。

**【2-14】** 潜水艇利用声呐确定它与其他物体的距离。根据声音脉冲从发出到被接收所用的时间可以计算此距离。或者，可以测量连续接收的回声之间的时间间隔，比较其与声音发出的时间间隔来确定潜水艇的速度。假设你是水下潜水艇中的声呐操作员，声音在水中的传播速度为 $1\,522\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。如果你每隔 2.00 s 发出一个声音脉冲，仪器每隔 1.98 s 接收到从海底悬崖反射的回声，请问你所在的潜水艇的航行速度为多少？○

**解** 设声音在水中传播的速度为 $u = 1\,522\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，潜艇行进速度为 $v$；令 $t_0 = 2.00\ \mathrm{s}$。潜艇在发出声音脉冲间隔 2.00 s 时间内前进了 $vt_0$，即接下来的声音信号比前一个信号少前进了 $vt_0$。所以悬崖崖壁接收到的两个脉冲的时间间隔为

$$t_1 = t_0 - \frac{vt_0}{u} \tag{1}$$

随后，悬崖在这样的时间间隔将声波反射回去。在前一个声波脉冲被潜艇接收之后，后一个声波脉冲到潜艇的距离为 $ut_1$。随后，潜艇与声波相向而行，设此刻到两者相遇的时间间隔为 $t_2$，则

$$(u + v)t_2 = ut_1 \tag{2}$$

比较式(1)和式(2)，解得

$$v = \frac{t_0 - t_2}{t_0 + t_2} u$$

将 $u = 1\,522\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$t_0 = 2.00\ \mathrm{s}$，$t_2 = 1.98\ \mathrm{s}$ 代入，得 $v = 7.65\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

**【2-15】** 离地球距离 $r$ 的星系的退行速率为 $v = Hr$，其中 $H = 1.58 \times 10^{-18}\ \mathrm{s^{-1}}$。请算出以下星系的退行速率：(1) 离地球 $5.00 \times 10^{22}$ m 远的星系；(2) 离地球 $2.00 \times 10^{25}$ m 远的星系。(3) 如果星系以它们的退行速率运动到这么远，请问多久之前它们与我们在一起？

**解** (1) 离地球 $5.00 \times 10^{22}$ m 远的星系的退行速率为

$$v_1 = Hr_1 = 1.58 \times 10^{-18}\ \mathrm{s^{-1}} \times 5.00 \times 10^{22}\ \mathrm{m} = 7.90 \times 10^4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 离地球 $2.00 \times 10^{25}$ m 远的星系的退行速率为

$$v_2 = Hr_2 = 1.58 \times 10^{-18}\ \mathrm{s^{-1}} \times 2.00 \times 10^{25}\ \mathrm{m} = 3.16 \times 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

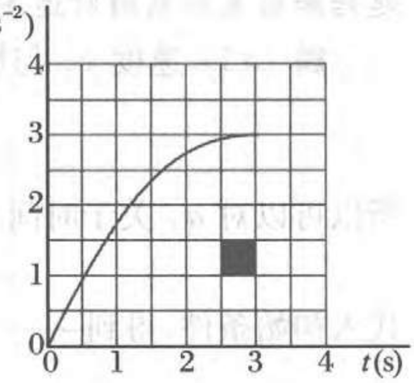
(3) 由于题目给出 $v = Hr$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Hr \quad \Rightarrow \quad r = \mathrm{e}^{Ht} + C$$

当 $t=0$ 时，$r=0$，所以 $C=0$。

因此对于离地球 $5.00\times10^{22}$ m 远的星球，$t=3.31\times10^{19}$ s 以前与地球在一起，对于离地球 $2.00\times10^{25}$ m 远的星球，$t=3.69\times10^{19}$ s 以前与地球在一起。

【2-16】 右图给出了一个物体的加速度-时间关系。(1) 阴影部分的方格面积多大(以 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 为单位)? (2) 在 $t=0$ 时，物体由静止开始运动。请利用曲线下面的方格数来估算该物体在 $t=1.0$ s, 2.0 s, 3.0 s 时的速度。(3) 利用(2)的结果作图表示 $u_x-t$ 曲线，并估算 $t=0.0$ s 到 $t=3.0$ s 之间物体的位移。○



(题 2-16 图)

**解** (1) 阴影部分的面积大小为

$$S = a_x t = 0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \times 0.5\ \mathrm{s} = 0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 在 $a_x-t$ 图中，曲线下面的面积对应着速度。当 $t=1$ s 时，曲线下面的方格数约为 3.5，对应的速度为

$$3.5\times0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0.875\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

当 $t=2$ s 时，曲线下面的方格数约为 12.5，对应的速度为

$$12.5\times0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 3.125\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

当 $t=3$ s 时，曲线下面的方格数约为 24.4，对应的速度为

$$24.4\times0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 6.10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(3) 如图 2-3 所示。

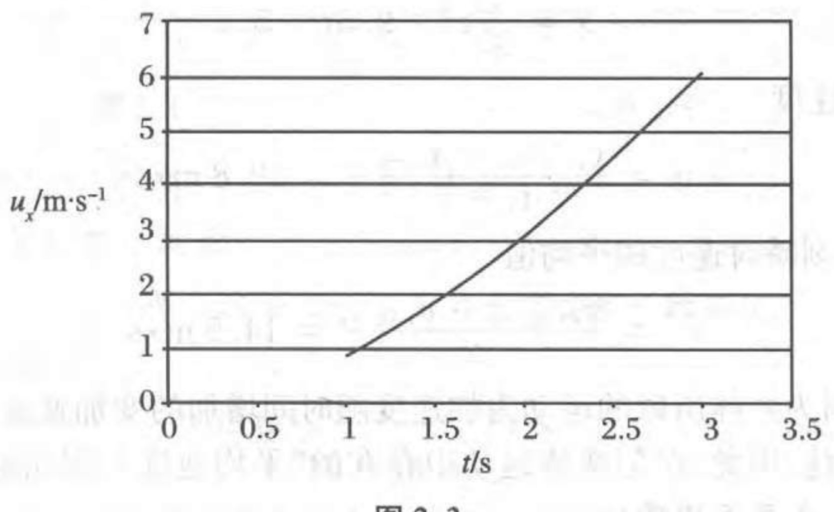


图 2-3

在 $u_x-t$ 图中，曲线下面的面积对应着位移，估算 0.0～3.0 s 内的位移约为

7.5 m。

**【2-17】** 在 0.0 s 到 10.0 s 之间，一个物体沿直线运动的加速度满足 $a_x = (0.20\ \text{m·s}^{-3})t$，向右为 $x$ 正向。物体初始速度为 $9.5\ \text{m·s}^{-1}$，向右；初始位置在原点左侧 5.0 m。(1) 请给出在这个过程中速度随时间变化的函数关系；(2) 给出位置随时间的变化；(3) 给出 $t = 0.0$ s 到 $t = 10.0$ s 这个时间段内的平均速度，并与起始和结束时刻瞬时速度的平均值相比较。这两个值相等吗？请解释原因。

**解** (1) 速度 $v_x$ 与加速度 $a_x$ 之间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x$$

所以可以对 $a_x$ 关于时间 $t$ 积分，得到

$$v_x = (0.10\ \text{m·s}^{-3})t^2 + C$$

代入初始条件，得到

$$C = v_0 = 9.5\ \text{m·s}^{-1}$$

从而有

$$v_x = (0.10\ \text{m·s}^{-3})t^2 + 9.5\ \text{m·s}^{-1}$$

(2) 速度 $v_x$ 与位置 $x$ 之间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$$

所以可以对 $v_x$ 关于时间 $t$ 积分，得到

$$x = \left(\frac{1}{30}\ \text{m·s}^{-3}\right)t^3 + (9.5\ \text{m·s}^{-1})t + x_0$$

代入初始条件，得到 $x_0 = -5.0$ m，从而有

$$x = \frac{1}{30}t^3 + 9.5t - 5.0$$

(3) 平均速度

$$\bar{v} = \frac{x_{t=10.0\,\text{s}} - x_{t=0.0\,\text{s}}}{t_2 - t_1} = 12.8\ \text{m·s}^{-1}$$

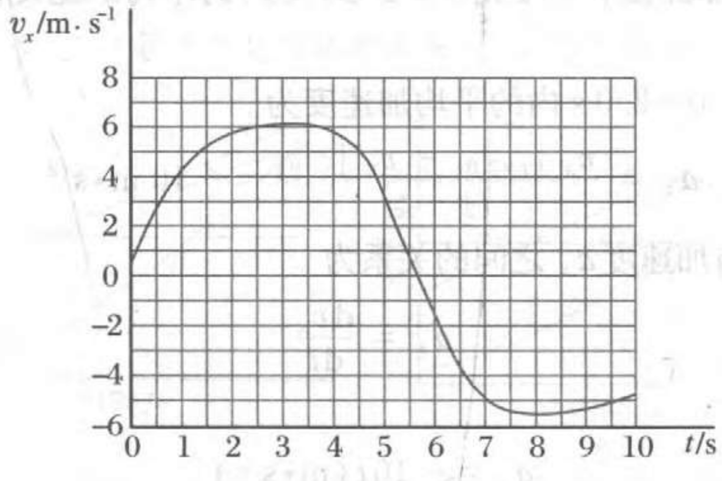
起始和结束时刻瞬时速度的平均值

$$\bar{v}' = \frac{v_{t=10.0\,\text{s}} + v_{t=0.0\,\text{s}}}{2} = 14.5\ \text{m·s}^{-1}$$

两者不相等，因为物体所做的运动为加速度随时间增加的变加速运动，所以速度不随时间线性变化，因此，在匀变速运动中存在的“平均速度 = 起始速度和结束速度的平均值”这一关系不再成立。

**【2-18】** 下图描述了一个物体沿直线运动的 $v_x - t$ 关系。该物体在时刻 $t =$

0 的位置为 $x_0=5.0\ \mathrm{m}$。(1) 利用方格来计算物体在不同时刻 $t$ 的位置，作出 $x-t$ 关系图。(2) 作出 $a_x-t$ 关系图。(3) 试计算时刻 $t=3.0\ \mathrm{s}$ 到 $t=7.0\ \mathrm{s}$ 之间该物体运动了多远？◯




(题 2-18 图)

解 (1) 在 $v_x-t$ 的关系图(图 2-4)中，曲线下方的面积为某时刻的位置 $x$。

(2) 在 $v_x-t$ 的关系图(图 2-5)中，曲线的斜率为某时刻的加速度 $a_x$。

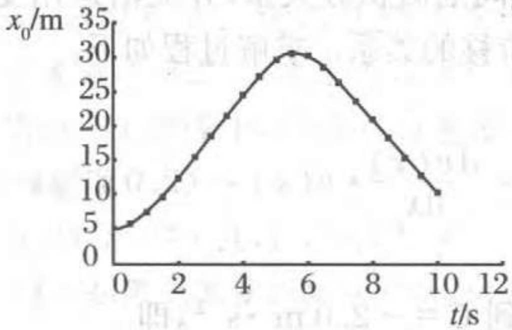



图 2-4

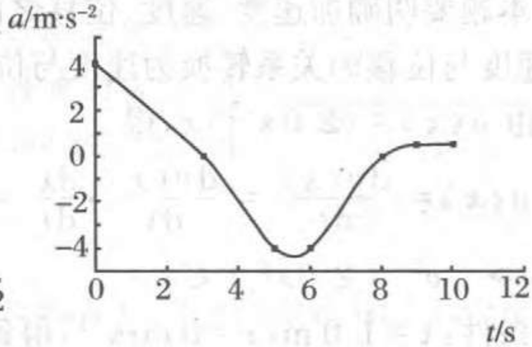



图 2-5

(3) 由(1)的结果，得到 $t=3.0\sim7.0\ \mathrm{s}$ 内的位移大约为 7.75 m。

【2-19】 一架轻型飞机需要达到 $33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度才可以起飞。如果飞机的加速度恒定，为 $3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，那么这架飞机起飞至少需要多长的跑道？

解 跑道长度满足

$$l=\frac{v_2^2-v_1^2}{2a}=\frac{(33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2-(0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{2(3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}=1.8\times10^2\ \mathrm{m}$$

【2-20】 一个运动物体有可能在加速度减小的情况下速率仍然增加吗？如果可能，请举一个例子；如果不可能，请解释原因。

**解** 可能。例如,一个下落的物体在达到稳定下落速度之前,虽然空气阻力的增大使其向下坠落的加速度越来越小,但其下落的速度始终在增加。

**【2-21】** 一物体沿 $x$ 轴运动,其速度表达式为 $v_x=(40-5t^2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,其中 $t$ 的单位为秒。(1) 给出在 $t=0\ \mathrm{s}$ 到 $t=2.0\ \mathrm{s}$ 之间的平均加速度。(2) 计算在 $t=2.0\ \mathrm{s}$ 时的加速度。

**解** (1) 在 $t=0\sim2.0\ \mathrm{s}$ 内的平均加速度为

$$\bar{a}_x=\frac{v_x\big|_{t=2.0\,\mathrm{s}}-v_x\big|_{t=0\,\mathrm{s}}}{t_2-t_1}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 速度 $v_x$ 与加速度 $a_x$ 之间的关系为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

由此可以得到

$$a_x=-10t\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

所以 $t=2.0\ \mathrm{s}$ 时刻的加速度为 $a_x=-20\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

**【2-22】** 假设一个沿 $x$ 轴运动物体的加速度是 $x$ 的函数,$a(x)=(2.0\ \mathrm{s^{-2}})x$。(1) 如果当 $x=1.0\ \mathrm{m}$ 时,速度为 0,那么当 $x=3.0\ \mathrm{m}$ 时,速率为多大?(2) 物体从 $x=1.0\ \mathrm{m}$ 运动到 $x=3.0\ \mathrm{m}$ 用了多长时间?☆

**解** 本题要明确加速度、速度、位移之间的微积分关系,并灵活运用变量代换法,将加速度与位移的关系转换为速度与位移的关系。求解过程如下。

(1) 由 $a(x)=(2.0\ \mathrm{s^{-2}})x$,得

$$a(x)=\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\cdot v(x)=(2.0\ \mathrm{s^{-2}})x$$

$$\Rightarrow\quad v^2=2.0x^2+C$$

代入边界条件:$x=1.0\ \mathrm{m}$,$v=0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,得到 $C=-2.0\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$,即

$$v^2=(2.0x^2-2.0)\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$$

当 $x=3.0\ \mathrm{m}$ 时,$v=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(2) 从速度与位移的关系式,可以得到位移与时间的关系式,即

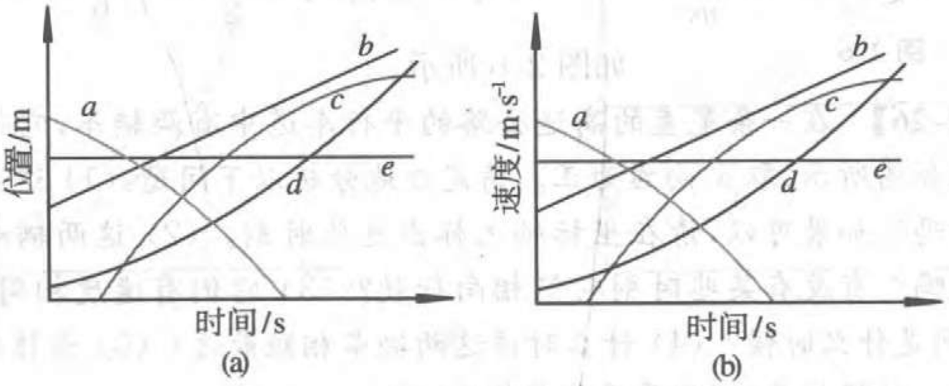
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|=t+C_1$$

代入边界条件:$x=1.0\ \mathrm{m}$,$t=-C_1\ \mathrm{s}$,即

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C_1$$

当 $x=3.0\ \mathrm{m}$ 时,$t=1.25\ \mathrm{s}-C_1\ \mathrm{s}$。所以,物体从 $x=1.0\ \mathrm{m}$ 运动到 $x=3.0\ \mathrm{m}$ 用了 1.25 s。

【2-23】 图(a)中哪一条位置－时间曲线能最好地描述以下物体的运动:(1) 物体有正的加速度;(2) 物体有正的恒定速度;(3) 物体始终静止;(4) 物体有负的加速度? 图(b)中哪一条速度－时间曲线能最好地描述以下物体的运动:(5) 物体有正的恒定加速度;(6) 物体有正的随时间减小的加速度;(7) 物体有正的随时间增加的加速度;(8) 物体无加速度?(每个问题可能有多解)。

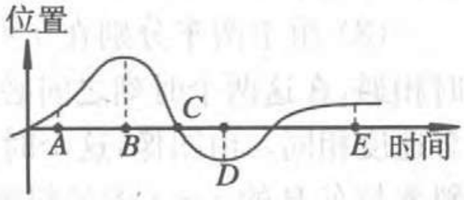



(题 2-23 图)

**解**　在 $x-t$ 曲线中,斜率对应速度,斜率的变化率对应加速度;在 $v_x-t$ 曲线中,曲线上的值对应速度,斜率对应加速度。

(1) $d$;(2) $b$;(3) $e$;(4) $a$,$c$;(5) $b$;(6) $c$;(7) $d$;(8) $e$。

【2-24】 一个物体沿直线运动。它的位置与时间的关系如图所示。请问在哪个或哪些时间:(1) 它的速率最小;(2) 加速度为正;(3) 速度为负?

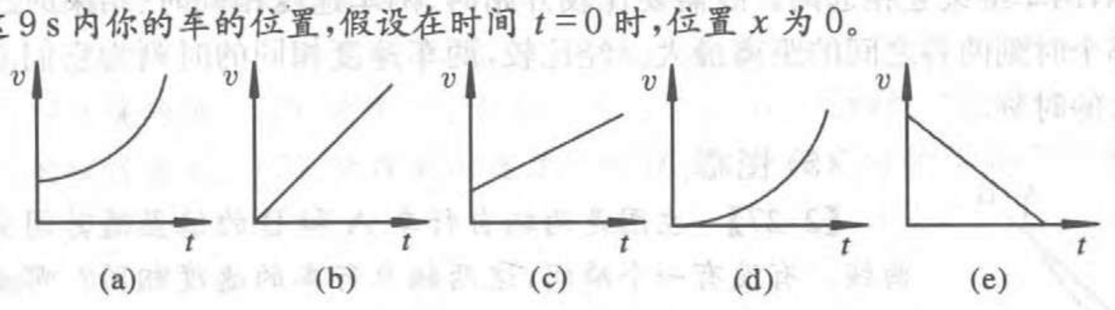



(题 2-24 图)

**解**　在 $x-t$ 曲线中,斜率对应速度,斜率的变化率对应加速度。

(1) $B,D,E$;(2) $A,C,D$;(3) $C$。

【2-25】 如果你驾驶一辆保时捷,均匀地从 $t=0.00\ \mathrm{s}$ 时的 $80.5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 提速到 $t=9.00\ \mathrm{s}$ 时的 $113\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。(1) 哪个图能最好地描述你开车的速度? (2) 请作图描述在这 9 s 内你的车的位置,假设在时间 $t=0$ 时,位置 $x$ 为 0。




(题 2-25 图)

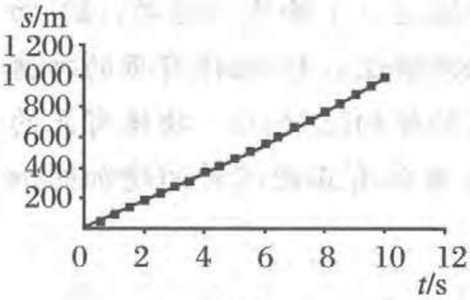


图 2-6

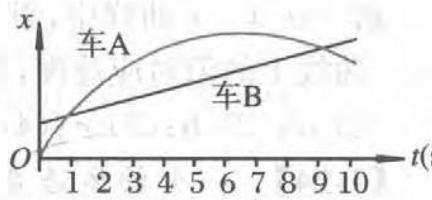
解　(1) 由题意得知，初始速度不为 0 $m \cdot s^{-1}$，且均匀提速使得 $v-t$ 曲线的斜率为定值，所以选(c)。

(2) 由提供的初始条件，可以得到位置函数为

$$x = 80.5 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{113 - 80.5}{9} \cdot t^2$$

如图 2-6 所示。

【2-26】 在一条笔直的高速公路的平行车道中有两辆车，它们的位置随时间的变化如图所示，取 $x$ 向右为正。请定性地分析以下问题：(1) 这两辆车有可能并排行驶吗？如果可以，请在坐标轴上标出这些时刻。(2) 这两辆车总是同一个方向行驶吗？有没有某些时刻它们相向行驶？(3) 它们有速度相同的时候吗？如果有，请问是什么时候？(4) 什么时候这两辆车相距最远？(5) 请作图表示这两辆车的速度－时间关系(不需要具体数据)。○



(题 2-26 图)

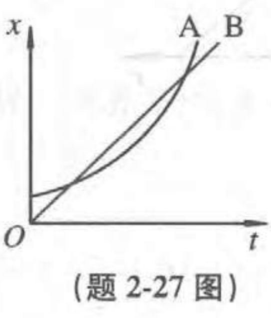
解　(1) 指两辆车的位置相同，即在 $t=1.0$ s 和 $t=9.0$ s 时满足。

(2) 车 B 始终沿 $x$ 正方向行驶，车 A 在 $t=6.5$ s 后变向，与车 B 相向行驶。

(3) 由于两车分别在 $t=1.0$ s 时和 $t=9.0$ s 时相遇，在这两个时刻之间必然存在一个时刻，两车速度相同。由图像，这个时刻是唯一的，在 $t=4.5$ s(即车 A 的 $x-t$ 图的切线的斜率与车 B 的 $x-t$ 图的斜率相同)。

(4) 注意到车 A 在整个运动过程中速度的增量一直指向 $x$ 轴负方向，而且一开始车 A 的速率大于车 B 的速率，车 A 在车 B 的后方，故两车先接近，然后 A 超过 B，接着 A 远离 B，直到(3)中所述的速度相同时刻之后两车又互相接近，最后 B 超过 A，两车继续互相远离。故需要比较开始时、两车速度相同时、结束时三个时刻中哪个时刻两者之间的距离最大。经比较，两车速度相同的时刻为它们之间距离最大的时刻。

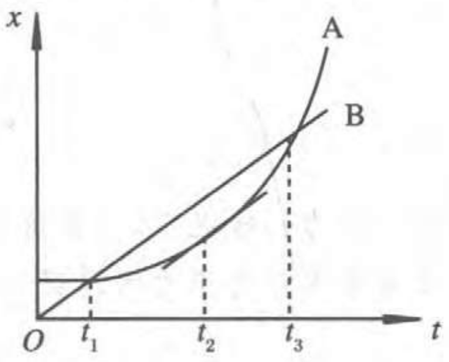
(5) 图略。



(题 2-27 图)

【2-27】 左图是两辆自行车 A 和 B 的位置随时间变化的曲线。有没有一个瞬间，这两辆自行车的速度相同？哪一辆自行车有着较大的加速度？在哪一个(或几个)瞬间一辆自行车超过另一辆？哪一辆自行车有最大的瞬时速度？哪一辆自行车有较大的平均速度？

**解** 如图2-7所示，在 $x-t$ 图中，切线斜率代表速度，所以切线斜率相等时($t_2$)速度相同；$v-t$ 图中切线斜率代表加速度，所以A的加速度更大(B的为0)；在 $x-t$ 图中，$0\sim t_1$ 内A在前，$t_1\sim t_3$ 内B在前，$t_3$ 之后A在前；在 $v-t$ 图中，$t_3$ 之后A的速度最大；如图2-7所示，B的平均速度更大。



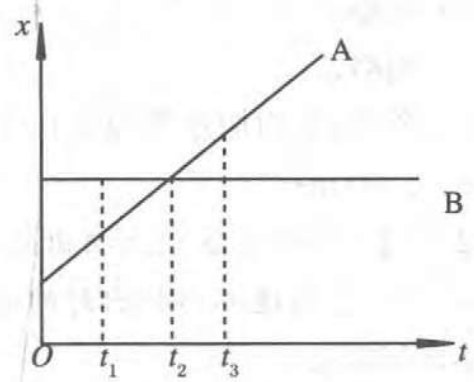




图 2-7

**【2-28】** 一物体沿垂直方向以 $y(t)=10.0\ \mathrm{m}-gt^2/2$ 的形式移动，$g$ 值的大小为9.81。(1) 请问 $g$ 的单位是什么？(2) $t=0$ 时，物体在哪里？(3) 什么时候 $y=0$？(4) 画一张从 $t=0$ 到 $t=2.00$ 秒的速度 $u(t)-t$ 图。(5) 请问在 $t=0$ 和 $t=1.00$ 秒时，图上曲线的斜率分别是多少？(6) 讨论一下曲线的形状及其斜率的物理意义。○

**解** (1) $g$ 的单位是 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$；

(2) 当 $t=0\ \mathrm{s}$ 时，物体在 $10.0\ \mathrm{m}$ 处；

(3) 当 $y=0$ 时，$t=1.43\ \mathrm{s}$；

(4) 图略；

(5) $u-t$ 图上曲线的斜率即物体的加速度，为 $-9.81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$；

(6) 曲线形状是一条直线，其斜率代表加速度。

**【2-29】** 一物体的位置沿 $x$ 轴随时间变化，$x=3t^2$。(1) 请估计在 $t=3.00\ \mathrm{s}$ 时和 $t=(3.00+\Delta t)\ \mathrm{s}$ 时它的位置。(2) 请计算当 $t=3.00\ \mathrm{s}$，$\Delta t$ 趋向于0时，$\Delta x/\Delta t$ 即速度的值。(3) 请作一张位移-时间图。(4) 用切线方法计算 $x(t)$ 曲线上某处的瞬时速度。(5) 请作瞬时速度-时间图，并确定该物体的平均加速度。(6) 计算物体的初始速度。

**解** (1) $27.0\ \mathrm{m}$；

(2) 计算得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{3(3.00+\Delta t)^2-3\times 3.00^2}{(3.00+\Delta t)-3.00}=18.0+3.00\Delta t\approx 18.0\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

它的即时速度为

$$v_x\big|_{t=3.00\,\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=3.00\,\mathrm{s}}=6t\big|_{t=3.00\,\mathrm{s}}=18.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

两者相等,得证;

(3) 图略;

(4) 图略;

(5) 图略,平均加速度为 $6.00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$;

(6) $0.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【2-30】** 一被垂直向上扔出的物体,在忽略空气阻力的情况下,当掉落回扔出的初始点时,它的速率和扔出时的速率相同。在必须考虑空气阻力的情况下,这个结果会如何改变?

**解** 阻力始终与运动方向相反,所以落回原处的速率小于扔出时的速率。从能量守恒的角度看,摩擦力做负功,落回原处的能量小于扔出时的,势能不变,动能减小,因而速率变小。

**【2-31】** 为了模仿伽利略,一教授不顾下面行人的安危,从大厦顶部丢下一保龄球。1 s 后,他又丢下第二个保龄球。当两球下落时,它们之间的距离(　)。(a) 随时间而增加;(b) 随时间而减小;(c) 不随时间变化。(忽略空气阻力。)

**解** 选(a)。从丢下第二个球开始计时,第一个球的运动方程为

$$y_1=\frac{g(t+1)^2}{2}$$

第二个球的运动方程为

$$y_2=\frac{1}{2}gt^2$$

故两球间距为

$$\Delta y=y_1-y_2=\frac{1}{2}g(2t+1)$$

随时间增加而增加。

**【2-32】** 两块石头从 60 m 高的悬崖顶部自由落下,第二块比第一块迟 1.6 s。请问在两块石头间隔 36 m 时,第二块离悬崖顶部有多远?

**解** 两块石头间距 36 m,这有两种情况:① 两块石头都在空中;② 第一块石头已经落地,第二块石头距离地面 36 m。

情况① 第二块石头开始下落时,第一块石头的下落距离为

$$h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 = 12.8\ \mathrm{m}$$

速度为

$$v_0 = gt_0 = 16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad (\text{取 } g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

两块石头下落的运动方程分别为(以第二块石头开始下落的时刻为计时零点)

$$h_1 = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad h_2 = \frac{1}{2}gt^2$$

所以两块石头的间距为

$$\Delta h = h_2 - h_1 = h_0 + v_0 t$$

当 $\Delta h = 36$ m 时,$t = 1.45$ s,此时 $h_1 = 46\ \mathrm{m} < 60\ \mathrm{m}$,故解合理。

此时第二块石头到悬崖顶部的距离为 10.5 m。

情况② 第一块石头落地之后,当第二块石头下落到 24 m 处时,所用时间为 2.2 s,因为在(2.2+1.6) s 内,第一块石头已落地,所以这是另一种可能解。此时第二块石头到悬崖顶部的距离为 24 m。

**【2-33】** 一个小重物从静止下落,在时间 $T$ 内下落距离 $D$。在它下落 $2T$ 时,试求:(1) 它离初始点的距离;(2) 它的速度;(3) 它的加速度。(忽略空气阻力。)

**解** 从静止开始,时间 $T$ 内下落 $D$,即

$$\frac{1}{2}aT^2 = D \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2D}{T^2}$$

(1) 在 $2T$ 时,下落距离为

$$H = \frac{1}{2}a(2T)^2 = 4D$$

(2) 在 $2T$ 时,速度为

$$v = a(2T) = \frac{4D}{T} \quad (\text{方向向下})$$

(3) 在 $2T$ 时,加速度为

$$a = \frac{2D}{T^2} \quad (\text{方向向下})$$

**【2-34】** 一个物体从 120 m 的高处由静止开始自由下落,请给出它在空中最后 1 s 内下落的距离。

**解** 从 120 m 高处下落,共用时间

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 4.95\ \mathrm{s}$$

那么最后 1 s 内,下落距离为

$$\Delta h = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = 44\ \mathrm{m}$$

**【2-35】** 一块石头从 200 m 高的悬崖顶垂直下抛。在空中的最后半秒内，石头下落 45 m。请求出石头的初始速度。

**解** 设石头下落共用时间 $t$，初始速度为 $v_0$，那么在时间 $t$ 内，下落 200 m：

$$v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 200\ \mathrm{m}$$

在时间 $t-0.5\ \mathrm{s}$ 内，下落 200 m − 45 m = 155 m：

$$v_0(t-0.5\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}g(t-0.5\ \mathrm{s})^2 = 155\ \mathrm{m}$$

联立两式求解，得到 $t = 2.49\ \mathrm{s}$，$v_0 = 68\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【2-36】** 一自由落体用了 1.50 s 完成在着地之前最后 30.0 m 的路程。请问它是从离地面多高的地方开始下落的？

**解** 设物体下落高度为 $h$，那么下落时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

物体用 1.50 s 完成最后 30.0 m，即

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1.50\ \mathrm{s})^2 = 30.0\ \mathrm{m}$$

解得 $t = 2.79\ \mathrm{s}$，从而 $h = 38.2\ \mathrm{m}$。

**【2-37】** 假设你站在许愿井前，希望知道水面有多深。你许了个愿，并拿出一枚硬币投入井中。3 s 后，你听见硬币掉进水中的声音。如果声速为 343 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，那么水面有多深？（忽略空气阻力。）

**解** 3 s 的时间包括硬币到达水面和声音传回的时间。设水面深度为 $h$，那么声音传回时间为

$$t_1 = \frac{h}{v_s}$$

硬币到达水面用时，

$$t_2 = 3s - t_1$$

在时间 $t_2$ 内，硬币到达水面，即

$$\frac{1}{2}gt_2^2 = h$$

求解，得到 $h = 40.7\ \mathrm{m}$。

**【2-38】** 自井口将一块处于静止的岩石丢入井中。(1) 松手让岩石开始自由

下落2.40 s后，听到水花的声音。请问水面离井口有多远？[声音在空气中(室温下)的传播速度为336 $m \cdot s^{-1}$](2) 如果可以忽略声音的传播时间，那么会给计算水面的深度带来多大的不确定度？

**解** (1) 方法同题2-37，解得水面离井口的距离为 $h = 26.4\ m$；

(2) 如果忽略声音的传播时间，那么水面离井口的距离为

$$h' = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times 9.8\ m\cdot s^{-2}\times(2.4\ s)^2 = 28.2\ m$$

带来的不确定度为

$$\frac{28.2\ m - 26.4\ m}{26.4\ m}\times 100\% = 7\%$$

**【2-39】** 一块石头从海边的悬崖上落下，3.2 s之后听到它撞击海面的声音。求悬崖的高度。

**解** 方法同题2-37，解得悬崖高度 $h = 46\ m$(取声音传播速度为343 $m\cdot s^{-1}$)。

**【2-40】** 一个棒球以13 $m\cdot s^{-1}$的速率垂直向上经过离地面28 m的窗户，如果这个棒球是从地面扔出的，求它(1) 扔出时的初始速率，(2) 可以到达的最大高度。如果以经过这个窗户的那一刻为时间零点，求它(3) 扔出时的时间和(4) 掉落回地面的时间。

**解** (1) 设扔出的初始速率为 $v_0$，那么经过28 m高的窗户时速率为13 $m\cdot s^{-1}$，从而得到

$$\frac{v_0^2 - (13\ m\cdot s^{-1})^2}{2\times 9.8\ m\cdot s^{-2}} = 28\ m$$

解得

$$v_0 = 27\ m\cdot s^{-1}$$

(2) 可以到达的最大高度为

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 37\ m$$

(3) 当经过窗户的时刻设为0 s时，那么棒球被扔出的时刻为

$$t_0 = \frac{v - v_0}{g} = -1.4\ s$$

(4) 掉回地面时的速率为 $v_0$，方向相反，所需时间为

$$t = \frac{v - (-v_0)}{g} = 4.1\ s$$

**【2-41】** 竖直上抛一个球，忽略空气阻力。(1) 球在最高点的速度为多大？

(2) 在最高点的加速度为多大？(3) 如果球猛烈撞击水平天花板并返回，请问在最高点的速度和加速度会有什么不同？

**解** (1) 在最高点，动能完全转化为势能，所以速率降为 $0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$；

(2) 在竖直上抛运动中，加速度始终为重力加速度 $g$；

(3) 在最高点处球猛烈撞击天花板，撞前速率不为 $0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，撞击后速率也不为 $0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，加速度将大于 $g$。

**【2-42】** 有时，当人坠落到比较软的地面上时，即使下落的距离比较大，也仍然能存活下来。某登山运动员在攀爬雪山时岩锚脱落，暴跌 150 m，落入雪地。神奇的是，他仅仅受到一点擦伤和肩膀脱臼。假设他的冲击在雪地上造成了一个 1.2 m 深的坑，请估算他从刚接触雪面到完全静止的平均加速度。

**解** 假设人从刚接触雪面到完全静止的过程中做匀减速运动，此时求得的加速度为平均加速度。以竖直向上为正方向，地面为零势能面。

从高处落下，势能转化为动能，从而有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 54.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

从刚接触雪面到完全静止的过程中做匀减速运动，从而得到

$$a = \frac{(0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 - v^2}{2\,\mathrm{s}} = -1\ 225\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

所以平均加速度大小为 $1\ 225\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，方向竖直向上。

**【2-43】** 一个从胸部高度释放的硬橡胶球，落在地面并反弹到几乎一样的高度。当球与地面接触时，球的下部受压变形。假设变形的最大幅度为 1 cm，试估算球与地面接触时球的加速度的数量级。说明你的假设、你估算的物理量以及它们的数值。☆

**解** 不妨假设橡皮球从与地面接触到恰好离开地面的运动为匀变速运动，其中形变的最大幅度 $x = 1$ cm，加速度恒为 $a$，胸部到地面的高度 $h = 1.30$ m。

橡胶球与地面接触前的速度为 $v = \sqrt{2gh}$，球的形变达到最大时有 $2ax = v^2$，从而可以得到

$$a = 1 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

即球与地面接触时球的加速度的数量级可达到 $10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

**【2-44】** 叩甲(一种甲虫)利用其 0.60 cm 的长腿能以 $400g$ 的加速度(远远超过人类能承受的极限)垂直弹跳。(1) 请问叩甲能跳多高？(2) 叩甲能在空中停留多长时间？(假设叩甲与地面接触时的加速度恒定，并忽略空气阻力。)○

**解** 叩甲在离开地面时的速度为

$$v_0 = \sqrt{2al} = 6.9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(1) 它能达到的最大高度为

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 2.4\ \mathrm{m}$$

(2) 它在空中停留的时间为

$$t = \frac{2v_0}{g} = 1.4\ \mathrm{s}$$

**【2-45】** 球A从高为 $h$ 的建筑物顶部自由落下,同时球B从地面垂直上抛。(1) 当两球相撞时,两球的运动方向相反,而且球A的速率是球B的2倍。请问两球在哪个高度上相撞?(2) 如果两球相撞时,两球的运动方向相同,而且球A的速率是球B的4倍,那么两球会在哪个高度上相撞?○

**解** (1) 因为

$$v_A = gt, \quad v_B = -(v_0 - gt)$$

在相遇时 $v_A = -2v_B$,即 $gt = 2(v_0 - gt)$,所以

$$t = \frac{2v_0}{3g}$$

可以计算A,B两球的位移大小分别为

$$x_A = \frac{1}{2}gt^2, \quad x_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

把相撞条件 $x_A + x_B = h$ 代入,得 $v_0 t = h$,所以

$$v_0^2 = \frac{3}{2}gh, \quad x_B = \frac{2}{3}h$$

故两球在 $2h/3$ 的高度上相撞。

(2) 因为在相遇时,

$$v_A = 4v_B, \quad gt = -4(v_0 - gt)$$

所以

$$t = \frac{4v_0}{3g}$$

把相撞条件 $x_A + x_B = h$ 代入,得 $v_0 t = h$,所以

$$v_0^2 = \frac{3}{4}gh, \quad x_B = \frac{h}{3}$$

故两球在 $h/3$ 的高度上相撞。

【2-46】 一块石头从一栋大楼楼顶自由落下，2 s 之后另一块石头被以 $25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的初始速率从同一个楼顶垂直向下扔出。两块石头同时到达地面。求：(1) 第一块石头掉落到地面所用的时间；(2) 该大楼的高度；(3) 这两块石头到达地面时的速率。

**解** (1) 设大楼高度为 $h$，那么第一块石头下落时间为 $t_1=\sqrt{2h/g}$，第二块石头下落用时为 $t_2=t_1-2\ \mathrm{s}$，且满足：

$$v_0 t_2+\frac{1}{2}gt_2^2=h$$

代入 $v_0=25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，解得 $t_1=5.6\ \mathrm{s}$。

(2) 大楼高度为

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2=155\ \mathrm{m}$$

(3) 第一块石头到达地面时的速率为

$$v_1=gt_1=55\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

第二块石头到达地面时的速率为

$$v_2=v_0+gt_2=61\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

【2-47】 一个物理教授背着火箭背包，以初速度零离开位于 575 m 高空的直升机。前 8.0 s 内，他自由下落。在 8.0 s 这一时刻，他点燃火箭以 $15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$的加速度减速到 $5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。之后，他一直维持这个速度直到落在地面上。(1) 画出加速度－时间和速度－时间的关系图(取向上为正值)。(2) 在 8.0 s 时，他的速率为多少？(3) 请问他用了多长时间减速？(4) 减速过程中他下落了多长距离？(5) 整个从直升机到地面的过程用了多长时间？(6) 整个过程的平均速度为多少？(忽略空气阻力。)

**解** (1) 图略。

(2) 前 8.0 s，教授做自由落体运动，在时刻 $t_1=8.0\ \mathrm{s}$，他的速率为

$$v_1=gt_1=78\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(3) 8.0 s 后，教授用于减速的时间为

$$t_2=\frac{v_2-v_1}{a_2}=\frac{5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}-78\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{-15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}=4.9\ \mathrm{s}$$

(4) 减速过程中，教授下降的距离为

$$h_2=\frac{v_2^2-v_1^2}{2a_2}=\frac{(5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2-(78\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{2(-15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}=202\ \mathrm{m}$$

(5) 教授减速后，还需要 $t_3$ 才能降落到地面。$t_3$ 满足：

$$v_2 t_3 = h - h_1 - h_2$$

其中

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 314\ \text{m},\quad h_2 = 202\ \text{m},\quad h = 575\ \text{m},\quad v_2 = 5.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

则 $t_3 = 11.8\ \text{s}$,所以共用时

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 8.0\ \text{s} + 4.9\ \text{s} + 11.8\ \text{s} = 24.7\ \text{s}$$

(6) 整个过程的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{h}{t} = \frac{575\ \text{m}}{24.7\ \text{s}} = 23.3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

**【2-48】** 一个火箭从地面以 $3.2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 的恒定加速度向上升起直到它到达 1 200 m高处时耗尽了所有的燃料,之后它只受到重力的作用。(1) 当火箭耗尽燃料时,它的速率是多少?(2) 该火箭最高可以到达什么高度?(3) 它总共需要多长时间到达最大高度?(4) 当它掉落回地面时,速率为多少?(5) 它在空中停留的总时间是多少?

**解** (1) 火箭燃料耗尽时的速率为

$$v = \sqrt{2ah_1} = \sqrt{2 \times 3.2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \times 1\,200\ \text{m}} = 88\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 火箭到达的最大高度为

$$h = h_1 + \frac{v^2}{2g} = 1\,200\ \text{m} + \frac{(88\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2 \times 9.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 1.6 \times 10^3\ \text{m}$$

(3) 火箭到达最大高度所用时间为

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{v}{g} = \frac{88\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3.2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} + \frac{88\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{9.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 36\ \text{s}$$

(4) 落回地面时的速率为

$$v' = \sqrt{2gh} = 177\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(5) 在空中停留的总时间为

$$t_{总} = t + t' = 36\ \text{s} + \frac{v'}{g} = 36\ \text{s} + \frac{177\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{9.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 54\ \text{s}$$

**【2-49】** 月球上的重力加速度为地球上的六分之一。在月球上垂直向上扔出一个物体,它所能到达的最大高度是在地球上以同样速率向上扔出所能达到的最大高度的几倍?

**解** 月球上的重力加速度是地球上的 1/6,$a_M = a_E/6$,初始速率相同,设为 $v$,在月球上到达的高度为

$$h_{\mathrm{M}}=\frac{v^2}{2a_{\mathrm{M}}}$$

同理,在地球上到达的高度为

$$h_{\mathrm{E}}=\frac{v^2}{2a_{\mathrm{E}}}=\frac{1}{6}h_{\mathrm{M}}$$

即在月球上的上抛高度能达到在地球上的上抛高度的6倍。

**【2-50】** 一块岩石在水中下沉时,其加速度不断减小。假设初始时速度为0,垂直向下为 $y$ 的正向,加速度是速度的函数,并满足关系式:$a_y=g-bv_y$,其中 $b$ 为一正常数。(1) $b$ 的国际单位是什么?(2) 请用数学方法证明:如果岩石在 $t=0$ 时从水面处静止下落,那么其加速度将是 $t$ 的指数函数,即 $a_y(t)=ge^{-bt}$。(3) 用 $g$ 和 $b$ 表达该岩石的最终速度。(4) 如果 $b$ 为正常数,并取决于岩石的大小和水的物理性质。请给出速度和位置以 $t$ 为自变量的函数表达式。○

**解** (1) 由 $a_y=g-bv_y$,可以得到左式的国际单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$,所以 $bv_y$ 也具有国际单位 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$,其中 $v_y$ 的国际单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,从而 $b$ 的为 $\mathrm{s^{-1}}$。

(2) 加速度与速度之间存在微积分关系,从而可以建立方程

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=g-bv_y$$

求解得到

$$v_y=\frac{g}{b}-\frac{A}{b}\mathrm{e}^{-bt}$$

利用初始条件:当 $t=0$ 时,$v_y=0$,可得到 $A=g$,代入化简,得到

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{g}{b}-\frac{g}{b}\mathrm{e}^{-bt}\right)}{\mathrm{d}t}=g\mathrm{e}^{-bt}$$

(3) 当 $t\to\infty$时,$v_y=g/b$。

(4) 由(2),得到速度的表达式为

$$v_y=\frac{g}{b}(1-\mathrm{e}^{-bt})$$

速度与位移之间存在微积分关系,可以建立方程

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{b}(1-\mathrm{e}^{-bt})\ \Rightarrow\ y=\frac{g}{b}\left(t+\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-bt}\right)+C$$

利用初始条件:当 $t=0$ 时,$y=0$,可得到 $C=-g/b^2$。代入得到

$$y=\frac{g}{b}\left(t+\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-bt}-\frac{1}{b}\right)$$

【2-51】 证明子弹从地面垂直发射时的速率和它落回地面时的速率相等。

**证明** 设子弹发射时速率为 $v_0$，子弹上升时所用时间为 $t_1 = v_0/g$，期间其上升的高度为

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

由于其在最高点时速度为0，由 $v^2 - v_0^2 = 2as$，有 $v^2 = 2gh$，其中 $v$ 为其落地时的速度，解得 $v = \pm v_0$，即落地时速率大小与发射时相等。

【2-52】 在理想情况下，一颗子弹以 300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率垂直向上射出，它的速率恒定减慢，在30.6 s时子弹上升到4 588 m高处停住。之后，子弹垂直下落(忽略摩擦)，30.6 s后以300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率到达枪口。(1) 请计算子弹在上升过程和全程中的平均速率。(2) 画出速度－时间的示意图。(3) 请问 $t = 0, 30.6, 61.2$ s 的速度分别是多少?

**解** (1) 子弹在30.6 s内上升4 588 m，所以上升过程中的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{4\,588\ \mathrm{m}}{30.6\ \mathrm{s}} = 150\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

下降过程中的平均速率为 $\bar{v}' = 150\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，所以全程中的平均速率为

$$\bar{u} = \frac{4\,588\ \mathrm{m} + 4\,588\ \mathrm{m}}{30.6\ \mathrm{s} + 30.6\ \mathrm{s}} = 150\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 图略，斜率(加速度)为 $-9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，在 $y$ 轴上的截距为 300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(3) 当 $t = 0$ s 时，子弹刚从枪口出发，速度大小为300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，方向向上；

当 $t = 30.6$ s 时，子弹到达最高点，速度大小为0.00 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$；

当 $t = 61.2$ s 时，子弹回到枪口，速度大小为300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，方向向下。

【2-53】 有一根3 m长的绳子，上面等距离地固定着10个螺丝钉。让这根长绳垂直地从一个演讲大厅屋顶上落下，掉落到一个金属盘中。大厅中的人可以清晰地听到每一根螺丝钉撞击金属盘的声音。这些撞击声之间的时间间隔并不是均匀的。为什么? 越靠近长绳的尾端，撞击声之间的时间间隔变得越短还是越长? 10个螺丝钉在长绳上的位置应该如何，才能使撞击声之间的时间间隔均等? ☆

**解** 当钉子的间隔均匀时，由于每一个钉子在落地之前都做自由落体运动，故不同钉子在前一钉子落地时到自己落地这一段时间内的平均速度不同，因此撞击声的间隔不均匀。越靠近长绳的尾端，撞击声之间的时间间隔变得越短。

设第一颗钉子落地时的速度为 $v_0$，相邻落地的时间间隔为 $t$，第 $i$ 颗钉子落地时，其后一颗距地的距离为 $h_i$。可以列出：

$$h_1 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad v_1 = v_0 + gt$$

$$h_2 = v_1 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta h_2 = gt^2, \quad v_2 = v_1 + gt$$

$$h_3 = v_2 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta h_3 = gt^3, \cdots$$

即 $\Delta h_i$ 只与时间间隔有关，只要确定了 $v_0$ 和 $t$，即可确定钉子间的间隔。首先固定第一颗螺丝，使其自由下落并测出下落时间，即可确定 $v_0$，随后确定各钉子间的间距，

$$h_1 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad h_2 = h_1 + gt^2, \quad \cdots, \quad h_i = h_{i-1} + gt^2$$

以此类推，且要满足 $\sum_{i=1}^{9} h_i \leqslant 3\ \mathrm{m}$。可以推得

$$h_1 : h_2 : \cdots : h_9 = 3 : 5 : \cdots : (2i+1) : \cdots : 19 \quad 或 \quad \frac{h_i}{h_{i+1}} = \frac{2i+1}{2i+3}$$

绳子总长为 3 m，从而得到 10 个螺丝钉依次相间 0.09 m、0.15 m、0.21 m、0.27 m、0.33 m、0.39 m、0.45 m、0.51 m、0.57 m。

**【2-54】** 你由于沉思于力学老师的精彩讲课，不小心朝着一面墙而不是教室的门直直地走去。请估算当你急停时需要的平均加速度的大小。

**解** 首先要估计各初始状态的数值：人在沉思时走路不会很快，$1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$左右；人发现眼前是墙时距墙应 1 m 左右。此时易计算加速度为 $0.5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$左右，为减速。

**【2-55】** 当司机看到一棵树挡在路上时，他猛地刹车，车以恒定的加速度 $-5.60\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$减速 4.20 s，在撞到树之前，留下了 62.4 m 长的打滑印迹。那么车撞到树的瞬间速率为多大？

**解** 车撞到树时的瞬间速率为 $v$，则刹车前的速率为

$$v' = v - at = v - (-5.60\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}) \times 4.20\ \mathrm{s} = v + 23.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

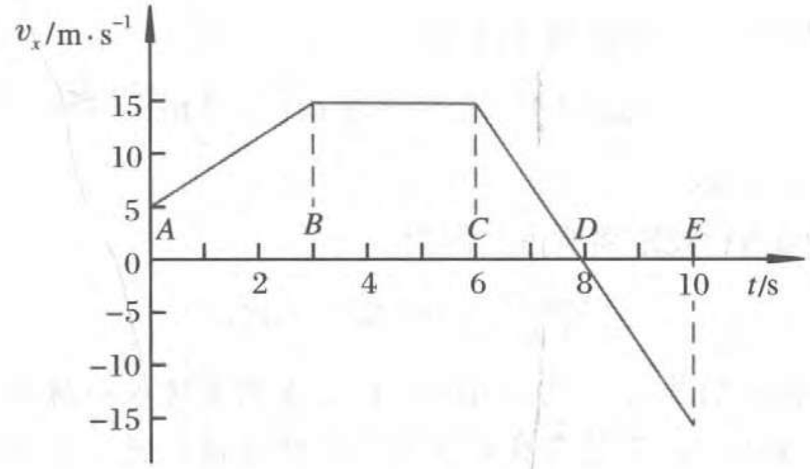
刹车前滑行 62.4 m，即满足

$$\frac{v^2 - v'^2}{2a} = s = 62.4\ \mathrm{m}$$

求解得到 $v = 3.10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

**【2-56】** 一个物体的一维运动如图所示。(1) 在 $AB$，$BC$，$CE$ 各段的平均加速度各为多少？(2) 10 s 后，物体离初始位置有多远？(3) 作出位移－时间关系图，并在图上对应的位置标注时刻 $A, B, C, D, E$。(4) 在哪个时刻，该物体的速度

最慢?




(题 2-56 图)

**解** (1) $AB$ 段的平均加速度为

$$a_{AB}=\frac{10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{3\ \mathrm{s}}=3.33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$BC$ 段的平均加速度为

$$a_{BC}=0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$CE$ 段的平均加速度为

$$a_{CE}=\frac{-30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{4s}=-7.5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) $v-t$ 曲线与 $t$ 轴围成的面积($t$ 轴下方为负)即车前进的位移大小,为 75 m。

(3) 如图 2-8 所示。

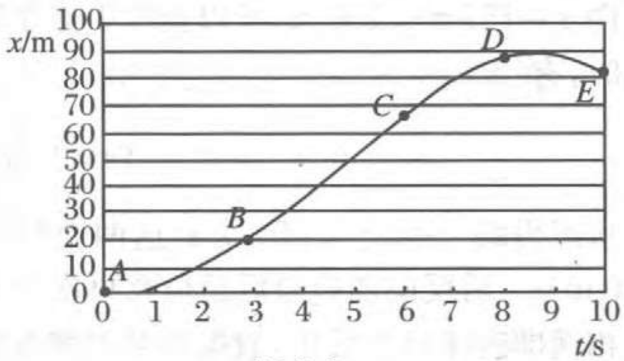



图 2-8

(4) 在 8 s 时,物体的速率最小,速度最慢。

**【2-57】** 一辆汽车在急刹车时以加速度 $7.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 减速,通常刹车前的反应时间约为 0.50 s。某地在校区设置速度限制,要求所有的车都能在 4 m 内完全停下来。(1) 请问该地校区内的最大车速为多少? (2) 4 m 中有多大比例是在反应时间内行驶的?

**解** (1) 设最大车速为 $v_{max}$,完全停下过程中反应时间为 $t_1=0.50\ \mathrm{s}$,匀减速时间为 $t_2$,那么

$$t_2 = \frac{0 - v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}}{7.0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}$$

完全停下过程的最大运动距离为 4 m，则

$$v_{\max} t_1 + v_{\max} t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = 4\ \mathrm{m}$$

求解得到 $v_{\max} = 4.8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(2) 反应时间内行驶距离所占比例为

$$\frac{v_{\max} t_1}{4\ \mathrm{m}} \times 100\% = 60\%$$

**【2-58】** 爱超速的某人以 $30.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率驾车进入一隧道。这时，他看到一辆速率为 $5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的面包车在前方 155 m 处缓慢行驶。他立即刹车减速，但是由于路面湿滑，加速度只能达到 $-2.00\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。请问，会发生撞车吗？请解释你的答案。如果会，请问在进入隧道多远和多久，撞车事件会发生？如果不会，计算该人驾驶的车和面包车之间的最短间距。○

**解** 以面包车作为参考系，则此车的 $v_0 = 25.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$a = -2.00\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

在此参考系内超车的车辆完全“停下”所需要的距离

$$s_0 = \frac{0^2 - v^2}{2a} = \frac{-(25.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{2(-2.00\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})} = 156\ \mathrm{m}$$

而 $s = 155\ \mathrm{m} < 156\ \mathrm{m}$，所以会发生撞车事故。在此参考系中发生撞车即 $s = 155\ \mathrm{m}$ 时，有

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 155\ \mathrm{m}$$

求解得到 $t = (25 \pm \sqrt{5})/2\ \mathrm{s}$，这两个时间中较长的一个含义显然是超过后速度为 $0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 后反向加速最后总位移再次为 155 m 的情况，而实际中在取减号时第一次相遇即碰撞已经发生，故取加号的情况舍去。因而

$$s' = vt + \frac{1}{2} a t^2 \approx 212\ \mathrm{m}, \quad t = \frac{25 - \sqrt{5}}{2}\ \mathrm{s} = 11.4\ \mathrm{s}$$

**【2-59】** 你以 $40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速度开车，在离十字路口 50 m 远的地方发现交通灯变黄。你知道在这个路口，交通灯会在变为红灯之前维持黄灯 3 s。你想了 1 s 之后，开始以一恒定加速度加速，试图让长为 4.5 m 的车能在灯变红之前完全通过 15 m 宽的路口，避免因为闯红灯而被开罚单。当你一通过路口，脚就离开加速器。然而，你仍然因超过 $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的限速而被警车拦住停在路边。你认为你是在离开路口时车速太快而被开罚单。请给出这一速率并决定你是否需要为此辩解，并解释原因。○

**解** 车完全通过路口需要行驶的距离为 $s=50\ \text{m}+4.5\ \text{m}+15\ \text{m}=69.5\ \text{m}$，想的 1 s 行驶距离为

$$40\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}\times 1\ \text{s}=11.1\ \text{m}$$

设车的加速度为 $a$，离开路口的速率为 $v$，那么 2 s 内速率和行驶距离分别为

$$\begin{cases} v=v_0+at=11.1+2a(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}) \\ s-11.1=\dfrac{v^2-v_0^2}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=18.1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \\ v=47.3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

因为 $v=47.3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=170\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}>60\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$，所以超速了。

**【2-60】** 公路上，你驾驶的轿车以 $25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度跟在一辆卡车后面行驶。你想寻找机会超车。轿车可以达到 $1.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 的加速度。卡车车身长20 m，轿车和卡车尾端保持 10 m 的安全距离，如果超车到卡车前方，也需要和卡车头部保持 10 m 的安全距离。在你要借用超车的对向车道上，另一辆汽车正从前方 400 m 距离处以 $25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度向你开来。你现在可以超车吗？请详细解释原因。○

**解** 本题缺少汽车车长这一条件，由常识知约 4 m，汽车超车由加速度提供的相对速度完成，

$$\Delta s=\frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta s=4\ \text{m}+10\ \text{m}+20\ \text{m}+10\ \text{m}=44\ \text{m}$$

解得 $t=9.4\ \text{s}$。超车道上两车相向运动，由题目得超车完成后相对运动距离为

$$\begin{aligned} d&=(25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}+25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})\cdot 9.4\ \text{s}+\frac{1}{2}\cdot 1.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(9.4\ \text{s})^2 \\ &=513\ \text{m}>400\ \text{m} \end{aligned}$$

故无法完成超车。

**【2-61】** 玛姬和朱迪在一次非常激烈的 100 m 赛跑中，以 10.2 s 的成绩同时越过终点线，创下新的纪录。她们均匀加速，玛姬用了 2.00 s，朱迪用了 3.00 s，达到她们各自的最大速率，并保持此速率跑完余下的距离。(1) 求每人的加速度。(2) 她们各自的最大速率为多大？(3) 谁在 6.00 s 时跑在前面，领先多长距离？

**解** (1) 设玛姬的加速度为 $a_{\text{M}}$，加速时间为 $t_{\text{M1}}$，匀速时间为 $t_{\text{M2}}$，玛姬用 10.2 s 完成比赛，即

$$t_{\text{M1}}+t_{\text{M2}}=10.2\ \text{s}$$

共跑 100 m，即

$$\frac{1}{2}a_{\text{M}}t_{\text{M1}}^2+a_{\text{M}}t_{\text{M1}}t_{\text{M2}}=100\ \text{m}$$

玛姬加速所用时间为 2.00 s，即

$$t_{M1} = 2.00\ \mathrm{s}$$

联立解得 $a_M = 5.43\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，$t_{M2} = 8.2\ \mathrm{s}$。

同理，可得朱迪的加速度为 $3.83\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

(2) 玛姬的最大速率为

$$v_M = a_M t_{M1} = 5.43\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 2.00\ \mathrm{s} = 10.9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

同理，可得朱迪的最大速率为 $11.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(3) 6.00 s 时，玛姬跑的距离为

$$s_M = \frac{1}{2} a_M t_{M1}^2 + v_M (6.00\ \mathrm{s} - t_{M1}) = 54.3\ \mathrm{m}$$

同理，朱迪跑了 51.7 m。所以，玛姬在前面，领先距离 $\Delta x = 2.6\ \mathrm{m}$。

**【2-62】** 子弹发射后沿枪膛向枪口运动，它的速率为 $v = -5.00 \times 10^7 t^2 + 3.00 \times 10^5 t$，其中 $v$ 的单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$t$ 的单位为 s。子弹离开枪膛瞬间的加速度为 0。(1) 试给出子弹在枪膛内的加速度和位置随时间变化的函数表达式。(2) 求子弹被加速的时长。(3) 求子弹离开枪膛时的速率。(4) 求枪膛的长度。

**解** (1) 加速度与速度之间满足关系：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-5.00 \times 10^7 t^2 + 3.00 \times 10^5 t)(\mathrm{m \cdot s^{-2}})}{\mathrm{d}t}$$

$$= -1.00 \times 10^8 t + 3.00 \times 10^5 (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

位置与速度满足关系

$$x = \int v \mathrm{d}t = -\frac{1}{3} \times 5.00 \times 10^7 t^3 + 1.50 \times 10^5 t^2 + C(\mathrm{m})$$

子弹离开枪膛时，加速度为 $a = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，从而解得加速时间为 $t = 3.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$。

设子弹离开枪膛时的位置为原点，那么 $C = -0.9\ \mathrm{m}$，所以位置方程为

$$x = -\frac{1}{3} \times 5.00 \times 10^7 t^3 + 1.50 \times 10^5 t^2 - 0.9(\mathrm{m})$$

(2) 子弹离开枪膛时，加速度为 $a = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，从而解得加速时间为 $t = 3.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$。

(3) 子弹离开枪膛时的速率为

$$v_t = -5.00 \times 10^7 \times (3.0 \times 10^{-3})^2 + 3.00 \times 10^5 \times 3.0 \times 10^{-3}$$

$$= 450(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

(4) 枪膛的长度为 $l = x_{t=3.00\times10^{-3}\mathrm{s}} - x_{t=0\mathrm{s}} = 0.9\ \mathrm{m}$。

**【2-63】** 在奥林匹克运动会中，有哪些运动项目类似于加速运动、平抛运动、自由落体运动或圆周运动？请分别举出例子。

**解** 加速运动:跳远运动中起跳前的助跑;平抛运动:射击运动中子弹射出枪膛之后的运动;自由落体运动:跳水运动中运动员从最高点到落水之前的运动;圆周运动:体操运动中单杠上的大回环。

**【2-64】** 请判断对错:(a) 如果物体的速率恒定,那么它的加速度必然为0。(b) 如果物体的加速度为0,那么它的速率必然恒定。(c) 如果物体的加速度为0,那么它的速度必然为0。(d) 如果物体的速率为恒定,那么它的速度必然恒定。(e) 如果物体的速度为恒定,那么它的速率必然恒定。

**解** (a) 错,因为速率不表示方向,如圆周运动,速率不变但有加速度;

(b) 对,因为加速度为0,表示速度不变,速率也不变;

(c) 错,因为加速度为0,仅表示速度变化率为0,与速度是否为0无关;

(d) 错,因为速率不表示方向,而速度表示,如圆周运动,速率恒定而速度变化;

(e) 对,理由同(d)。

**【2-65】** 一架10.0 m长的梯子,斜靠在一面直立的墙上,梯子的上端在墙上的高度是 $y$ m,下端在地面上距墙 $x$ m远。现在梯子下端以一个恒定速率 $v_x$ 被拉离墙。(1) 请写出梯子上端沿墙面下滑的速率表达式。(2) 当梯子下端离墙1.5 m远、速率为1.0 m·s$^{-1}$时,求梯子上端的下滑速率。(3) 请描述梯子上端速率随时间的变化。☆

**解** (1) 如图2-9所示,梯子上端坐标为 $(0,y)$,速率为 $v_y$,下端坐标为 $(x,0)$,速率为 $v_x$。由于梯子长度不变,墙与地面成直角,所以可以由直角三角形定理建立方程

$$10.0^2 = x^2 + y^2$$

两边对时间求导并化简,得到

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \ \Rightarrow \ 2xv_x + 2yv_y = 0$$

$$\Rightarrow \ v_y = -\frac{x}{y}v_x$$

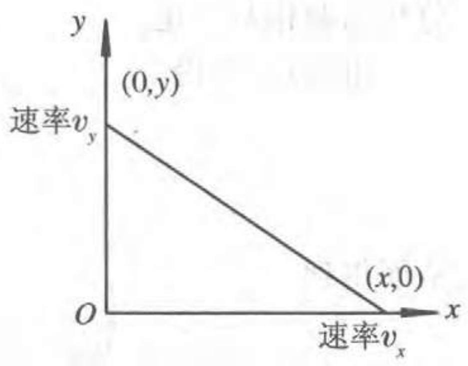



图 2-9

(2) 代入数据,得到 $|v_y| = 0.15$ m·s$^{-1}$。

(3) 易知

$$|v_y| = \left|-\frac{x}{y}v_x\right| = \frac{(x_0 + v_x t)v_x}{\sqrt{10^2 - (x_0 + v_x t)^2}}$$

$|v_y|$ 随 $t$ 的增大而增大,当梯子与地面的夹角接近0°时,$|v_y|$ 接近于无穷大。

【2-66】 请给出运动中速度和加速度的方向:(1) 相反;(2) 相同;(3) 互相垂直的实例。

**解** (1) 匀减速直线(竖直上抛的上升过程),变减速过程;

(2) 匀加速直线(自由落体运动),变加速过程;

(3) 匀速圆周运动(带电粒子在均匀磁场中的运动)。

【2-67】 质点的运动方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$,在计算质点的速度和加速度时,有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,然后根据 $v = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 和 $a = \mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2$ 求得 $v$ 和 $a$ 的值。也有人先计算出速度和加速度的分量,再合成求得 $v$ 和 $a$ 的值,即 $v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 和 $a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$。这两种方法哪一种正确?差别何在?○

**解** 第一种不正确,第二种正确。第一种在推导速度和加速度时忽略了位移的矢量性。

【2-68】 杆以角速度 $\omega$ 绕通过其一端且与其垂直的轴在水平面内匀速转动。杆上穿有一小圆环。在 $t=0$ 时刻,小圆环自杆与转轴的交点 $O$ 处从静止开始沿杆做匀加速运动,相对于杆的加速度为 $a$。请给出在静止参考系中小圆环运动速度、加速度随时间的变化。○

**解** 相对于杆,物体做匀加速运动,同时杆以固定角速度 $\omega$ 转动,在极坐标下分析问题相对简化。

由题意,可得

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}at^2 \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

从而得到

$$\begin{cases} \vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = at\vec{e}_r + \dfrac{1}{2}a\omega t^2\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = \left(a - \dfrac{1}{2}a\omega^2 t^2\right)\vec{e}_r + 2a\omega t\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

【2-69】 一被掷出的垒球位置用下式表示:

$$\vec{r} = [1.5\,\mathrm{m} + (12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})t]\vec{e}_x + [(16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})t - (4.9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2]\vec{e}_y$$

试给出速度、加速度随时间变化的表达式。

**解** 速度与位置之间满足

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

得到速度表达式为

$$\vec{v} = 12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,\vec{e}_x + (16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} - 9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,t)\vec{e}_y$$

加速度与速度之间满足

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

得到加速度表达式为 $\vec{a} = -9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,\vec{e}_y$。

**【2-70】** 在 0 时刻，一个物体位于 $x = 4.0\ \mathrm{m}$，$y = 3.0\ \mathrm{m}$ 处，速度为 $\vec{v} = (2.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{e}_x + (-9.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{e}_y$，加速度恒定为 $\vec{a} = (4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\vec{e}_x + (3.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\vec{e}_y$。(1) 试求 $t = 2.0\ \mathrm{s}$ 时的速度。(2) 用 $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$ 的矢量和表示时刻 $t = 4.0\ \mathrm{s}$ 时物体的位置，同时也请给出该位置矢量的大小和方向。

**解**　(1) 当 $t = 2.0\ \mathrm{s}$ 时，速度为

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{a}t = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,\vec{e}_x - 3.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,\vec{e}_y$$

(2) 当 $t = 4.0\ \mathrm{s}$ 时，位置为

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = 44\,\mathrm{m}\,\vec{e}_x - 9.0\,\mathrm{m}\,\vec{e}_y$$

位置的大小为

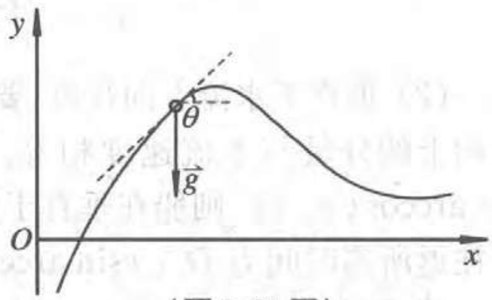
$$r = \sqrt{(44\ \mathrm{m})^2 + (-9\ \mathrm{m})^2} = 45\ \mathrm{m}$$

与 $x$ 轴夹角为

$$\theta = a\tan\left(\frac{-9\ \mathrm{m}}{44\ \mathrm{m}}\right) = -12^\circ$$

在 $x$ 轴下方成$12^\circ$角。

**【2-71】** 由光滑钢丝弯成竖直平面内一条曲线，质点穿在此钢丝上，可沿着它滑动。已知其切向加速度为 $-g\sin\theta$，其中 $\theta$ 是曲线切向与水平方向的夹角。试求质点在各处的速率。☆



**(题 2-71 图)**

**解法 1**　钢丝上无摩擦，给圆环的力始终和运动方向垂直，不做功，唯一做功的是重力。如图 2-10 所示，设质点开始运动的初始点坐标为 $(x_0, y_0)$，在运动到点 $(x, y)$ 时，质点动能的增量来自于质点势能的减少，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y)$$

从而得到 $v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$。

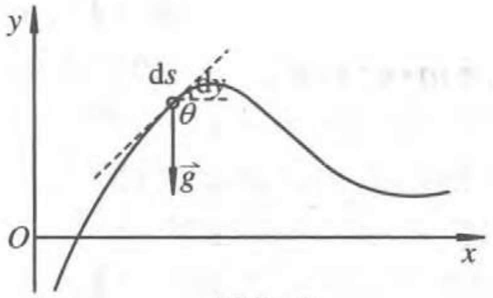


图 2-10

**解法 2** 加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\sin\theta, \quad 且 \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -g\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\frac{g}{v}$$
$$\Rightarrow v\mathrm{d}v = -g\mathrm{d}y$$

积分求解得到 $v=\sqrt{2g(y_0-y)}$。

**【2-72】** 一物体的位置矢量 $\vec{r}=30t\,\vec{e}_x+(40t-5t^2)\,\vec{e}_y$，其中 $r$ 的单位为 m，$t$ 的单位为 s。请给出瞬时速度和瞬时加速度随时间 $t$ 变化的表达式。

**解** 直接对 $t$ 求导，得

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 30\,\vec{e}_x + (40-10t)\,\vec{e}_y$$

从而有

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -10\,\vec{e}_y$$

**【2-73】** 一艘在静水中速率为 $v$ 的船在水流速率为 $u$ 的河流中做往返运动。假设往返全程距离为 $D$，求船做下面两种运动所需要的时间：(1) 先向上游方向，再向下游方向的往返运动；(2) 垂直于水流方向的往返运动。我们必须假设 $u<v$，为什么？

**解** (1) 先向上游，速率为 $v-u$，后向下游，速率为 $v+u$，所需时间为

$$t_1 = \frac{D/2}{v-u} + \frac{D/2}{v+u} = \frac{vD}{v^2-u^2}$$

(2) 垂直于水流方向往返，要使得合速度垂直于水流方向，必须使船速在水流方向上的分量与水流速度相等、反向，从而得到船行驶方向与水流方向的夹角 $\theta=\arccos(u/v)$，则船在垂直于水流方向的速率为 $v\sin\theta=v\sin\arccos(u/v)$，从而往返所需时间为 $D/[v\sin\arccos(u/v)]$。

若不假设，则(1)中无法逆流而上，(2)也无法垂直水流方向运动。

**【2-74】** 甲、乙两名游泳者从一条很宽的水流速率为 $v$ 的河岸边的同一点开始游泳。他们相对于水的游泳速率都为 $c$ $(c>v)$。甲向下游游了距离 $L$，然后向上游游了相同距离。乙的实际运动方向与水流的方向垂直。他先游了距离 $L$，然后又往回游了相同距离。这样，两名游泳者都回到了起点。问：哪名游泳者首先回到起点？

**解** 甲运动的时间为

$$t_{甲} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v}$$

为使乙的运动方向垂直水流方向，其速度应满足图2-11的关系，其中 $v_{合} = \sqrt{c^2 - v^2}$。所以乙运动的时间为

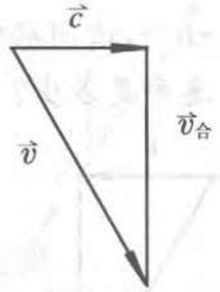


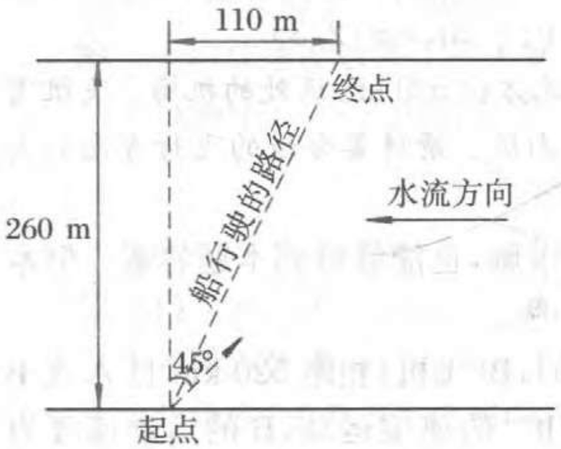

图 2-11

$$t_{乙} = \frac{2L}{v_{合}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

由于当 $v \neq 0$ 时，总有

$$\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} > 2\sqrt{\frac{1}{c+v} \cdot \frac{1}{c-v}} = \frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

所以 $t_{甲} > t_{乙}$，即乙先回到起点。




(题 2-75 图)

【2-75】 一艘在静水中速率为 1.70 m·s$^{-1}$的船，需要横穿 260 m 宽的河流，到达对岸上游 110 m 处(如图所示)。为了到达目的地，船必须保持偏向上游方向 45°的角度，求水流速度。

**解** 选上游方向为正方向。船在静水的速度为$\vec{v}$，相对于岸边的速度为$\vec{v}'$，以及水流速度为$\vec{u}$，那么船相对于岸边的速度为

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$$

沿水流方向上，

$$\vec{v}' \sin\theta = \vec{u} + \vec{v} \sin 45°$$

其中 $\theta = \arctan(11/26)$。在垂直于水流方向上，

$$\vec{v}' \cos\theta = \vec{v} \cos 45°$$

联立解得$\vec{u} = -0.69$ m·s$^{-1}$，即水流速率大小为 0.69 m·s$^{-1}$，方向指向下游。

【2-76】 一名游泳者以相对于水 1.6 m·s$^{-1}$的速率径直朝对岸游过去。河宽 80 m，游泳者到达对岸下游 40 m 处。(1) 水流速率为多大？(2) 游泳者相对于河岸的速率为多大？(3) 游泳者应该朝什么方向游动，才能到达正对岸？

**解** 游泳者渡河时间 $t = 80$ m/(1.6 m·s$^{-1}$) = 50 s，水流速率 $v = 40$ m/(50 s) = 0.8 m·s$^{-1}$。相对速率 $v_{相} = \sqrt{0.8^2 + 1.6^2} = 1.8$(m·s$^{-1}$)。若要垂直到达河对岸，游泳者游速沿水流方向的分量与水流速度大小相等、方向相反，即

$$\theta = \arccos\frac{0.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{1.6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 60°$$

$\theta$ 为游泳者游泳方向与流水的夹角，方向指向上游。

【2-77】 在汛期，河水的速率达到 48 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$。假设你乘坐在静水中速率为 48 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$的小船想垂直穿过该河，这可能吗？请解释。如果水流速率为 32 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$，请问船需要以什么角度行驶，才能直接垂直驶到河对岸。相对于河岸，你的速率是多少？

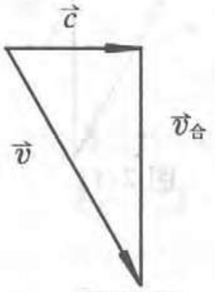


图 2-12

**解** 如图 2-12 所示，$\vec{c}$ 为水流速度，$\vec{v}$为船相对于水的速度，$\vec{v}_合$为船相对于岸边的速度。

若合成速度垂直于河，则必有 $c^2+v_合^2=v^2$。但是由于 $c=v$，故 $c^2+v_合^2=v^2$ 不能成立，所以不可能垂直过河。

如果要直接垂直到对岸，则要求 $c^2+v_合^2=v^2$，可以得到 $v_合=\sqrt{v^2-c^2}\approx 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$，与河岸夹角

$$\theta = \arccos(u/v) = \arccos(2/3)$$

【2-78】 一架小飞机从某地出发，要飞到正北方向 520 km 远处的机场。飞机飞行速率为 240 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$，风为恒定 50 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$的东南风。请计算合适的飞行方向和飞行时间。

**解** 常规解题思路是在地面静止参考系中求解，也能够得到本题答案。但本题采用在风参考系中分析，思路会更简单清晰一些。

在风参考系中，此题变成：有两物体 A(机场)，B(飞机)相距 520 km 且 A 在 B 的正北方。现在 A 开始向西北方向以 50 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$的速度运动，B 的运动速度为 240 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$，问 B 要怎样才能尽快追上 A?

在东西方向上，

$$240\sin\theta = 50\sin 45^\circ$$

在南北方向上，

$$(240\cos\theta - 50\cos 45^\circ)t = 520$$

可以得到 $\theta=8.47^\circ$(北偏西)，$t=2.57$ h。

【2-79】 一飞机带足油料，在无风的情况下以速率 $v$ 飞行，可飞行的路程为 $R$。现在要在有风的情况下，向北偏东 $\varphi$ 方向飞行执行任务并返回基地。如果风向为北偏东 $\theta$，风速为 $u$，问该飞机最远能飞往多远处执行任务并安全返回基地？☆

**解** 设飞机去时的实际速度为 $v_1$，回来时速度为 $v_2$，速度间的矢量关系如图 2-13 所示。其中 $u$ 表示风速，$v$ 表示飞机速度。

由余弦定理，可得

$$v_1^2+u^2-2uv_1\cos(\varphi-\theta)=v^2$$

$$v_2^2 + u^2 + 2uv_2\cos(\varphi - \theta) = v^2$$

所以

$$v_1 - v_2 = 2u\cos(\varphi - \theta),\quad v_1 \cdot v_2 = v^2 - u^2$$

飞机在此功率下能飞行的时间一定，

$$\frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = \frac{R}{v}$$

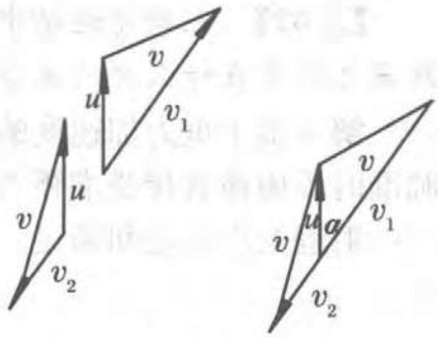


图 2-13

代入，解出

$$l = \frac{(v^2 - u^2)R}{2v\sqrt{u^2\cos^2(\varphi - \theta) + v^2 - u^2}}$$

【2-80】 一辆车向东开，速度为 60 km·h$^{-1}$。它在 5.0 s 内按圆弧转了个弯，然后向北开，速度仍为 60 km·h$^{-1}$。试求该车的平均加速度。

**解** 平均加速度取决于初末状态的速度变化快慢，与中间过程无关。其中 $v_{初} = v_{末} = 60$ km·h$^{-1}$，方向由向东转为向北，因而

$$\Delta v = 60\sqrt{2}\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 85\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

所以 $\bar{a} = \Delta v / t = 4.7$ m·s$^{-2}$，方向为西北方向。

【2-81】 在一次无线航模比赛中，每架飞机要求必须从一个半径为 1.0 km 的圆中心飞到圆上任意一点再返回圆心。赢的条件是飞行时间最短。竞赛者可以采用任意飞行路线，只要满足从圆心飞到圆上一点再返回圆心。在某一天的比赛中，风速恒定为 5.0 m·s$^{-1}$，方向向北。你的飞机飞行速度为15 m·s$^{-1}$。你打算让飞机先逆风再顺风，还是横穿风向，先向东再向西？请用你学到的矢量和相对速度的知识最优化你的飞行方式。☆

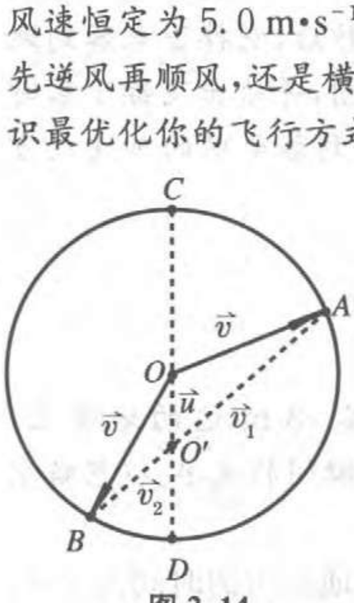


图 2-14

**解** 以飞机在静止空气中的速度 $v = 15$ m·s$^{-1}$为半径作圆，$u$ 为风速，方向向上，则飞机的出发和返回速度分别为$\vec{v}_1$ 和$\vec{v}_2$，$\vec{v}_1$ 和$\vec{v}_2$ 分别由$\vec{v}$和$\vec{u}$由矢量加法组合而成，并且$\vec{v}_1$ 和$\vec{v}_2$ 的方向相反，如图 2-14 所示，由$\triangle O'DB \cong \triangle O'AC$，知 $AO' \cdot BO' = O'C \cdot O'D$，可得

$$v_1 v_2 = (u + v)(u - v) = 15^2 - 5^2 = 200$$

而总时间

$$t = \frac{r}{v_1} + \frac{r}{v_2} \geqslant r \cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}}\right) \approx 141\ \text{s}$$

等号成立的条件为 $v_1 = v_2$，即先向东飞行或先向西飞行再返航（这里指合速度的方向）。

【2-82】 在射箭运动中,箭是否应该直接瞄准目标?瞄准的角度和距目标的距离之间存在什么样的关系?

**解** 由于重力加速度的存在,射箭时箭的轨迹并非直线而是一个抛物线,因此瞄准时不应该直接瞄准靶心,而应该向上倾斜。

射程与夹角之间满足:

$$\begin{cases} s = v_0 t\cos\theta \\ t/2 = v_0\sin\theta/g \end{cases}$$

解得

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gs}{v_0^2}$$

【2-83】 请判断对错:(a) 物体不能沿圆形轨迹运动,除非有指向圆心的向心加速度。(b) 物体不能沿圆形轨迹运动,除非有切向的加速度。(c) 物体沿圆形轨迹运动,那么它不能有变化的速率。(d) 物体沿圆形轨迹运动,那么它不能有恒定的速度。

**解** (a) 正确;(b) 错误,反例:匀速圆周运动;(c) 错误,反例:具有切向加速度的圆周运动;(d) 正确。

【2-84】 假设垂直向上投掷飞镖使其插入屋顶。当飞镖离开你的手上升时,它稳定地减速直到插入屋顶。(1) 作图,显示在时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 飞镖的速度矢量,其中 $t_1$ 和 $t_2$ 发生在离手之后到达屋顶之前,且 $t_1 - t_2$ 很小。从你的图上找出速度矢量变化的方向,即加速度的方向。(2) 当飞镖插入屋顶几秒后,它掉下来落到地上。在下落过程中,它一直加速直到落在地上。按照(1) 作图,并给出飞镖下落时加速度的方向。(3) 现假设沿水平方向掷镖,则飞镖离开手到落地前的加速度方向如何? ○

**解** (1) 图略,方向竖直向下。

(2) 图略,方向竖直向下。

(3) 图略,方向竖直向下。

【2-85】 从 24 m 高的塔上平抛一块石头,落在离塔 18 m 远的地面上。(1) 给出石头被扔出的初始速率。(2) 给出石头落在地面前瞬间的速率。(忽略空气阻力。)

**解** (1) 塔高 $H = 24$ m,落点离塔 $L = 18$ m。设石头落地经历的时间为 $t$,石头的初始速率为 $v$,可以解得 $t = \sqrt{2H/g}$,从而解得

$$v = \frac{L}{t} = \frac{L\sqrt{g}}{\sqrt{2H}} = 8.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 石头落地时水平方向速度不变,即 $v_{/\!/}=8.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,竖直方向速度为 $v_{\perp}=\sqrt{2gH}=21.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,则瞬时速率为 $v=\sqrt{v_{/\!/}^2+v_{\perp}^2}=23.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【2-86】** 一个小铁球从一个长楼梯顶端水平抛出。球的初始速率为 $3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。每节楼梯高 0.18 m,宽 0.30 m。问小球最先落在哪节楼梯上? ○

**解** 如图 2-15 所示,将楼梯的最外端的点连接成一条直线,再作出抛体的抛物线轨迹,两条曲线的交点所在的两个楼梯顶点之间的楼梯就是小球落到的楼梯。

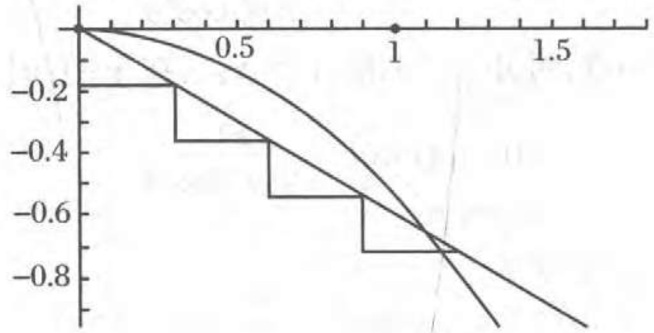



**图 2-15**

根据已知条件,可以得出直线方程为

$$y=-0.6x$$

小球的运动方程为

$$x=v_0t,\quad y=-\frac{1}{2}gt^2$$

消去 $t$,得

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2=-0.54x^2$$

联立解得

$$x=1.10\ \mathrm{m}$$

因为

$$0.90\ \mathrm{m}<x<1.20\ \mathrm{m}$$

所以小球最先落在第 4 级台阶上。

**【2-87】** 打雪仗有一个技巧,即先以一个比较高的角度投射一个雪球,当你的对手看第一个雪球时,以低角度投射第二个雪球,并使第二个雪球在第一个雪球之前或同时到达对手。假设两个雪球的投射速率都是 $25.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,第一个雪球以相对于水平面 70°的角度投射。(1) 第二个雪球的投射角度应为多少才能使它和第一个雪球到达同一点? (2) 第二个雪球要在第一个雪球投射之后多久投射,才能使得两个球能同时到达对手? ○

**解** (1) 本题可以通过求轨道方程来解答。

水平方向和垂直方向上的位移分量分别为

$$x = v_0 t\cos\theta, \quad y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

由此得到轨道方程为

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

由于两个雪球到达同一点，可知 $y=0$ 时，$x_1 = x_2$。在 $y=0$ 时，有

$$0 = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

推导得到

$$\sin 2\theta = \frac{gx}{v_0^2}$$

因为 $\theta_1 = 70°$，代入得到 $\theta_2 = 20°$。

(2) 由条件可以得到

$$x = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \approx 41.0\ \mathrm{m}$$

所以，第一个雪球飞行时间为

$$t_1 = \frac{x}{v_0\cos\theta_1} = 4.79\ \mathrm{s}$$

第二个雪球飞行时间为

$$t_2 = \frac{x}{v_0\cos\theta_2} = 1.74\ \mathrm{s}$$

第二个雪球要落后 $\Delta t = t_1 - t_2 = 3.05\ \mathrm{s}$。

**【2-88】** 两个抛射物以相同的速率抛出，一个抛射角度为 $\theta$，一个为 $\pi/2-\theta$。两个抛射物都落到离出发点相同距离的位置。问两个抛射物在空中飞行的时间是否相同？

**解** 不相同。

由题意知，两个物体从同一位置扔出，且具有相同的速率，记为 $v$，那么对应的水平方向和垂直方向上的位移分量分别为

$$x = vt\cos\theta, \quad y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

即满足轨道方程

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta} \quad \text{(二次曲线)}$$

两条二次曲线最多只有两个交点(可以将两个二次方程联立,最多只有两个解),所以代入条件:$\theta_1=\theta,\theta_2=\pi/2-\theta$ 时,$x_1=x_2,y_1=y_2$,求解轨道方程,得到

$$x_1 = x_2 = \frac{v^2\sin2\theta}{g}, \quad y_1 = y_2 = 0$$

对应的飞行时间为

$$t_1 = \frac{x_1}{v\cos\theta} = \frac{2v\sin\theta}{g}, \quad t_2 = \frac{x_2}{v\sin\theta} = \frac{2v\cos\theta}{g}$$

所以飞行时间不相同。

**【2-89】** *以什么样的角度发射炮弹可以使炮弹达到最大的水平距离?*

**解** 设炮弹发射的最大速率为 $v_0$,则炮弹的水平射程为 $s=v_0^2\sin2\theta/g$,所以当炮弹以45°角斜向上发射时射程最远。

**【2-90】** *如果你按照下列方式投球,请估算能投多远:(1) 站在水平地面上水平方向投掷;(2) 站在水平地面上,沿水平向上45°方向投球;(3) 从12 m高的楼顶沿水平方向投掷;(4) 从12 m高的楼顶沿水平向上45°方向投球。(忽略空气阻力。)*

**解** 以竖直向上为 $y$ 轴正方向,投球方向为 $x$ 轴正方向。出手点为原点,投球高度为2.0 m,投球速度为10 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(1) 在竖直方向为自由落体运动,在水平方向为匀速直线运动。可以得到飞行时间为 $t=\sqrt{2h/g}$,水平方向上飞行距离为 $s=vt\approx6.4\ \mathrm{m}$。

(2) 在竖直方向为竖直上抛运动,在水平方向为匀速直线运动。速率分量分别为

$$v_x = v\cos45^\circ, \quad v_y = v\sin45^\circ - gt$$

距离分量分别为

$$s_x = v\cos45^\circ\ t, \quad s_y = v\sin45^\circ\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

当 $s_y=-h$ 时,$t\approx1.7\ \mathrm{s}$,$s_x\approx12\ \mathrm{m}$。

(3) 在竖直方向为自由落体运动,在水平方向为匀速直线运动。飞行时间为 $t=\sqrt{2(H+h)/g}\approx1.7\ \mathrm{s}$,水平方向上飞行距离为 $s_x=v_xt\approx17\ \mathrm{m}$。

(4) 在竖直方向为竖直上抛运动,水平方向为匀速直线运动。飞行时间为 $t\approx2.6\ \mathrm{s}$,水平方向上飞行距离为 $s_x\approx18\ \mathrm{m}$。

**【2-91】** *一跳远运动员以与水平面成20.0°的角度和11.0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率跳离*

地面。(1) 在水平方向上他能跳多远？(2) 他的最大高度为多少？

**解** (1) 运动员的运动方程为

$$\begin{cases} x = vt\cos\theta \\ y = vt\sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

运动员落地时，$y = 0.00\ \mathrm{m}$，解得

$$t = \frac{2v\sin\theta}{g}$$

此时，他在水平方向上的距离为

$$x = vt\cos\theta = \frac{v^2\sin2\theta}{g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2\sin(2\times20.0^\circ)}{9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 7.94\ \mathrm{m}$$

(2) 当 $t = v\sin\theta/g$ 时，$y$ 取最大值，即运动员有最大高度

$$y = \frac{(v\sin\theta)^2}{2g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\sin 20.0^\circ)^2}{2\times9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}} \approx 0.722\ \mathrm{m}$$

**【2-92】** 一架救援飞机要将救援物资扔给与飞机垂直高度差为 235 m 的山峰上的遇险者。设飞机以 $250\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的水平速度飞行。(1) 飞机必须在离遇险者水平距离为多少的地方就提前扔下救援物资，以保证物资落在遇险者的附近？(2) 如果飞机在离遇险者 425 m 处就提前扔下救援物资，那么必须给物资多大的垂直速度(向下或向上)，才能保证物资落在遇险者的附近？(3) 在(2)的情况中，物资落地时速度为多少？

**解** (1) 物资自由下落用时为

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6.93\ \mathrm{s}$$

所以投放物资的地点到被困者的水平距离为 $x_0 = v_0t_0 = 481\ \mathrm{m}$。

(2) 由于投下物资的水平距离 425 m 小于(1)中的平抛运动所需距离 481 m，所以需要使物资具备竖直向下的初速度，即使之做斜下抛运动。设这个竖直初速度为 $v_1$，则

$$v_1t + \frac{1}{2}gt^2 = h,\quad v_0t = x_1 = 425\ \mathrm{m}$$

解得

$$t = 6.12\ \mathrm{s},\quad v_1 = 8.41\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

即需要给物资 $8.41\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的垂直向下速度。

(3) 落地时竖直方向速度为

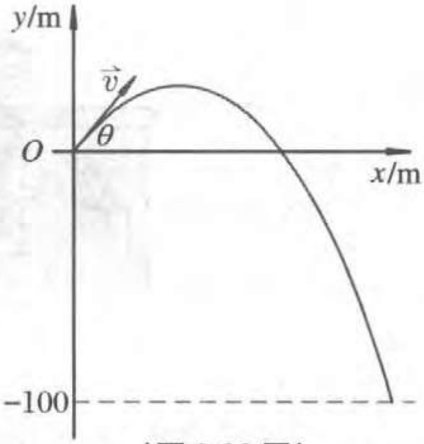
$$v_2 = v_1 + gt = 68.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

所以最终速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_2^2} = 97.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

与水平方向的夹角 $\theta$ 满足：$\tan\theta = v_2/v_0$，即 $\theta = 44.5°$。

【2-93】 一架直升机向被洪水困在湖中木筏上的灾民投放救济物品。当包裹被投出时，直升机在木筏的正上方 100 m 高空，速度为 $25.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，并与水平面向上成 $\theta = 36.9°$ 的夹角。(1) 包裹在空中停留时间为多长？(2) 包裹落地时离木筏有多远？(3) 如果直升机一直以恒定速度飞行，当包裹落地时，飞机在哪里？（忽略空气阻力。）



（题 2-93 图）

解 (1) 包裹在竖直方向的运动方程为

$$y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

代入 $y = -100\ \mathrm{m}$，$v_0 = 25.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$\theta = 36.9°$，$g = 9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，解得 $t = 6.30\ \mathrm{s}$（舍去负值 $-3.24\ \mathrm{s}$），所以包裹在空中的停留时间为 6.30 s。

(2) 包裹在水平方向的运动，

$$x = vt\cos\theta = 25.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \sin 36.9° \times 6.30\mathrm{s} = 126\ \mathrm{m}$$

所以包裹落地时离木筏 126 m。

(3) 因为飞机的水平位移和包裹相同，$x' = 126\ \mathrm{m}$，飞机的竖直方向的位移为 $y = v_0 t\sin\theta = 94.6\ \mathrm{m}$，所以包裹落地时，飞机在木筏前方 126 m 处，高度为 94.6 m。

【2-94】 一架俯冲轰炸机的运动速度大小为 $280\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，且和水平方向向下成 $\theta$ 角。当飞机高度为 2.15 km 时，它投放一枚炸弹，击中地面上的一个目标。从炸弹投放点到目标的直线距离为 3.25 km。求角度 $\theta$。

解 炸弹的水平飞行距离为

$$x = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{(3.25\ \mathrm{km})^2 - (2.15\ \mathrm{km})^2} = 2.44\ \mathrm{km}$$

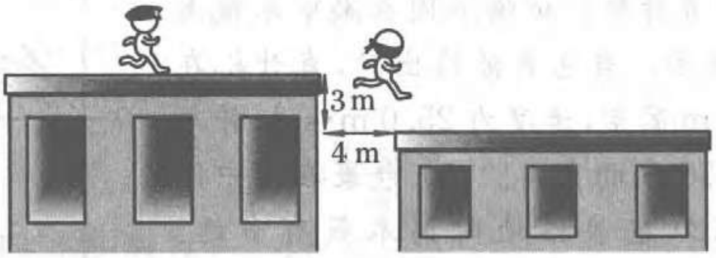
炸弹离开飞机时，具有和轰炸机一样大的速度。炸弹在空中的飞行时间满足

$$\begin{cases} v\sin\theta t + \dfrac{1}{2}gt^2 = h \\ v\cos\theta t = x \end{cases}$$

解得 $\tan\theta = 0.662$，即轰炸机的飞行角度为 $\theta = \arctan 0.662 = 33.5°$。

【2-95】 一警察在屋顶上追捕一个珠宝大盗。他们跑近建筑物之间一个长为 4.00 m、高度差为 3.00 m 的间断。大盗学过物理，以与水平面向上成 45°角和速率

$5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$起跳，很容易地跳过了这个间断。假设警察没有学过物理，他认为只要沿水平方向速度最大就行了，所以他沿水平方向起跳，速率也为 $5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$(如图)。(1) 他能安全跨过去吗？(2) 大盗超过这个间断多远？




(题 2-95 图)

**解** (1) 警察跨越的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.00\ \mathrm{m}}{9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}} = 0.782\ \mathrm{s}$$

在这段时间内，他的水平距离为

$$x = v_x t = 5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \times 0.782\ \mathrm{s} = 3.91\ \mathrm{m} < 4.00\ \mathrm{m}$$

所以不能安全跳过。

(2) 大盗跨越间断所用时间满足

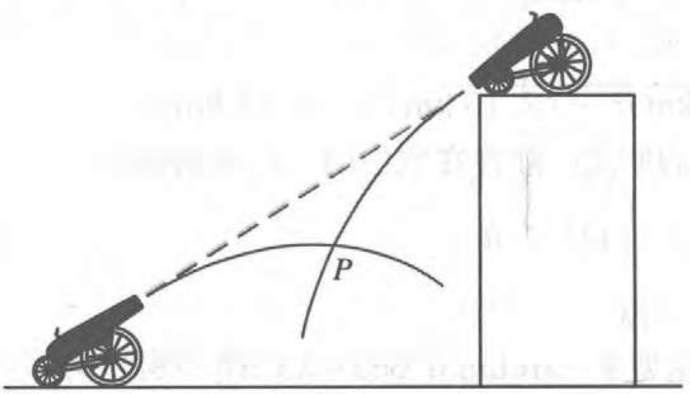
$$v' \cos\theta\, t' - \frac{1}{2} g t'^2 = y$$

代入 $v' = 5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\theta = 45°$, $y = -3.00\ \mathrm{m}$，解得 $t' = 1.22\ \mathrm{s}$(舍去负值 $-0.50\ \mathrm{s}$)。在这段时间内，他的水平距离为

$$x' = v'_x t' = 5.00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \cos 45° \times 1.22\ \mathrm{s} \approx 4.31\ \mathrm{m} > 4.00\ \mathrm{m}$$

超过间断 $4.31\ \mathrm{m} - 4.00\ \mathrm{m} = 0.31\ \mathrm{m}$。

**【2-96】** 如图，两门大炮互相对准对方。发射炮弹后，炮弹将沿着图中抛物线轨道运动，图中点 $P$ 为两条轨迹相交的地方。如果我们希望两个炮弹相撞，那么哪门大炮先发射，或者同时发射？(忽略空气阻力。)○




(题 2-96 图)

**解** 默认两门大炮发射炮弹的初始速率相等。对于下方的大炮，发出的炮弹的水平和垂直距离分别为

$$x_1 = v\cos\theta t_1, \quad y_1 = v\sin\theta t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

同理,对于上方的大炮,

$$x_2 = v\cos\theta t_2, \quad y_2 = v\sin\theta t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

炮弹发生相撞,要求满足

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \tan\theta$$

化简,得到 $t_2 = t_1$,即同时发射才能相撞。

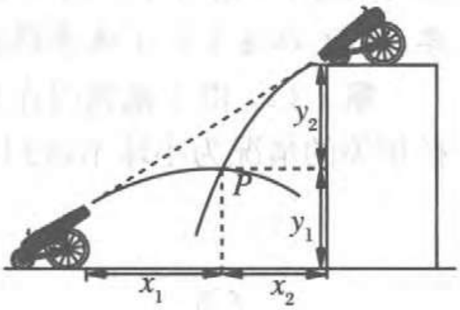


图 2.16

【2-97】 在一列沿水平轨道行驶的火车上,一个变戏法的人以 $4.90\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率相对于火车向上抛一个小球。火车速率为 $20.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。相对于这个变戏法的人,(1) 球在空中的飞行时间为多少?(2) 小球在上升过程中的位移为多少?相对于站在地面的观察者,(3) 小球的初始速率为多少?(4) 小球起抛的角度为多大?(5) 小球在上升过程中的位移为多少?○

**解** (1) 相对于火车,小球做上抛运动。假设抛出点距车厢地面 $h = 1.2\ \mathrm{m}$,那么小球垂直方向上的距离为

$$y = vt - \frac{1}{2}gt^2 = -h$$

解得球在空中飞行时间为 $t = 1.20\ \mathrm{s}$(舍去负值 $-0.20\ \mathrm{s}$)。

(2) 相对于变戏法的人,上升时间为

$$t' = \frac{v}{g} = 0.5\ \mathrm{s}$$

垂直方向上的距离为

$$y = \frac{v^2}{2g} = 1.225\ \mathrm{m}$$

(3) 相对于地面观察者,除了垂直方向上的速率,还有小球随火车一起的水平方向上的速率,所以,小球的初始速率为

$$v_{合} = \sqrt{v^2 + v_{火车}^2} = 20.6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(4) 假设抛出的初速与地面的夹角为 $\theta$,那么

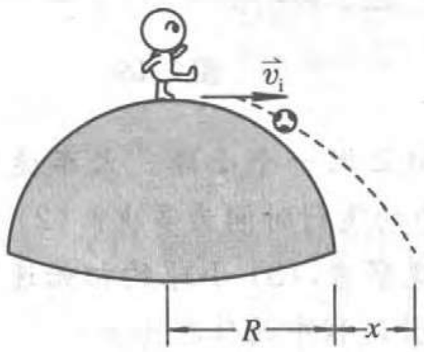
$$\theta = \arcsin\frac{v}{v_{合}} = \arcsin 0.238 = 13.8^\circ$$

(5) 相对于地面观察者,除了垂直方向上的上升距离,还有小球随火车一起的水平方向上的前进距离。水平方向上的距离为 $x = v_{火车}t' = 10\ \mathrm{m}$。结合(2)垂直方向上的距离,解得合位移大小为 $10.1\ \mathrm{m}$,方向与水平方向成 $7.00^\circ$ 仰角。

【2-98】 一个人站在半球形的岩石上以水平速度 $\vec{v}_i$ 踢一个原来静止在岩石顶部的球,如图所示。(1) 如果球被踢出之后不再碰到岩石,求它的最小初始速率。(2) 以这个最小速率踢球,球落到地面时离岩石的底部有多远?

**解** (1) 由于抛物线在顶点处的曲率半径最小,所以顶点处两条轨迹曲率半径相等的情况为小球不碰到岩石的临界情况。于是,初始速率 $v_i$ 满足

$$\frac{v_i^2}{g} = R$$



(题 2-98 图)

解得 $v_i = \sqrt{gR}$。

(2) 小球从被踢出到落地的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

所以水平射程为

$$s = v_i t = \sqrt{2}R$$

从而落地点到岩石边缘的距离为

$$x = s - R = (\sqrt{2} - 1)R$$

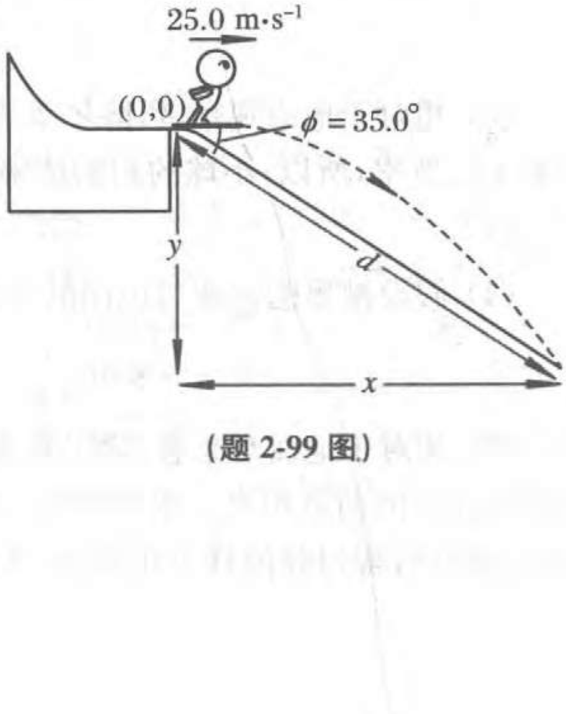
【2-99】 一位跳台滑雪运动员以 25.0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率沿水平方向离开滑道。下面着陆斜坡的倾角为 35.0°。他在斜坡何处着陆?据说跳台滑雪运动员达到最大射程的发射角 $\theta$ 满足 $\theta = 45° - \phi/2$,其中 $\phi$ 为着陆斜坡的倾角。试证明这个说法。假设除了跳台是弧形的,使得运动员在滑道以一定角度 $\theta$ 向上跳出,其他一切都是相同的。这一设计能使跳的距离增大吗? ○

**解** (1) 以平台末端为原点,水平方向为 $x$ 轴,垂直方向为 $y$ 轴(向下为正)建立坐标系。初始速率为 $v$。跳台滑雪运动员的水平距离与垂直距离分别为

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

由此得到轨迹方程

$$y = \frac{gx^2}{2v^2}$$



(题 2-99 图)

斜坡的方程为

$$y = x\tan\phi$$

联立两个方程求解,得

$$x_1 = 0(\text{出发点}), \quad x_2 = \frac{2v^2\tan\phi}{g}$$

距离为 $d = x_2/\cos\phi = 109$ m。

(2) 当运动员以一定仰角 $\theta$ 跳出时,对应的水平距离和垂直距离分别为

$$x = v\cos\theta t,\quad y = v\sin(-\theta)t + \frac{1}{2}gt^2$$

由此得到轨迹方程为

$$y = -x\tan\theta + \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

与斜面方程联立,可以得到

$$x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{2v^2\cos^2\theta(\tan\theta + \tan\phi)}{g}$$

对应的距离为

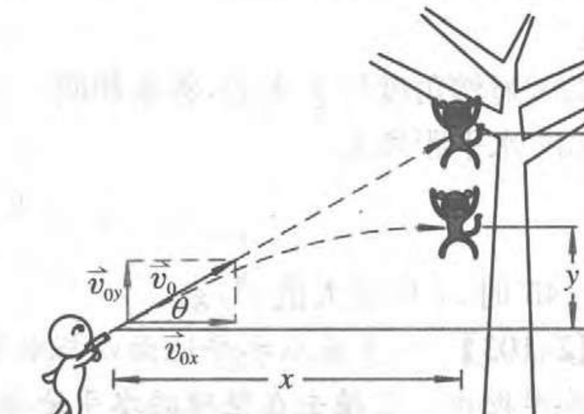
$$d = \frac{x_2}{\cos\phi} = \frac{2v^2\cos^2\theta(\tan\theta + \tan\phi)}{g\cos\phi}$$

当 $d$ 取极值时,$\mathrm{d}d/\mathrm{d}\theta = 0$,从而得到

$$\frac{2v^2}{g\cos\phi}(-\sin2\theta\tan\phi + \cos2\theta) = 0$$

求解,得到 $\theta = \pi/4 - \phi/2$。

**【2-100】** 如图所示,要能在猴子落到地面之前打到猴子,求子弹最小的初始速率。设 $x = 50$ m, $h = 10$ m, 地面位于猴子初始位置下方 11.2 m 处。(忽略空气阻力的影响。)



(题 2-100 图)

**解** 在开枪瞬间猴子下落,在猴子参照系中(猴子落地之前),子弹匀速射向猴子,因此只要瞄准猴子就能打中猴子,但需要在猴子落地前打中猴子。猴子下落时间为

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 1.5\ \mathrm{s}$$

其中 $l = 11.2$ m。在时间 $t$ 内,子弹要飞到猴子下落点,要求

$$v_x t = v\cos\theta t = v\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}t \geqslant x$$

解得 $v \geqslant 33.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【2-101】** 在子弹最大高度的一半位置时,子弹的速率为初始速率的 3/4。求

其发射角度。(忽略空气阻力。)

**解** 设子弹发射时的速率为 $v$,与水平方向的夹角为 $\theta$,上升的最大高度为 $h$。根据斜抛运动规律,子弹最高时,

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

在子弹最大高度的一半位置时,

$$\frac{1}{2}h = \frac{v'^2}{2g}$$

其中 $v'$为该时刻的速度垂直分量。

此时的合速率为$\sqrt{v'^2 + v^2 \cos^2 \theta} = 3v/4$,解得 $\tan\theta = \sqrt{7}$。所以其发射角度为 $\arctan\sqrt{7} = 69.3°$。

**【2-102】** 从水平地面向前上方抛出一块石头,它达到的最大高度等于它的水平方向上的位移大小。(1) 以什么角度抛出这块石头?(2) 如果你在不同的星球上,那么你的答案还和(1) 的答案相同吗?请解释原因。(3) 如果石头被抛出的速率相同,那么以最佳角度投掷它所能获得的最大水平距离为多大?

**解** (1) 最大垂直距离为 $y = (v\sin\theta)^2/(2g)$,水平距离为 $x = (v^2\sin2\theta)/g$,最大垂直距离等于水平距离:$y = x$,联立得到 $\theta = \arctan4 = 76.0°$,即以仰角 76.0°抛出。

(2) 显然角度与 $g$ 无关,答案相同。

(3) 水平距离为

$$x = \frac{v^2\sin2\theta}{g}$$

当 $\theta = 45°$时,$x$ 取最大值 $v^2/g$。

**【2-103】** 一个球从水平地面以与水平方向成向上 55°角的方向和22 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的初始速率抛出。它撞击在坚硬的水平地面上后弹起,达到第一个弧线高度的 75%处。(1) 它的第一个弧线的最高点的高度为多少?(2) 第一次落到地面时离发射点的水平距离为多少?(3) 第二次落到地面时离发射点的水平距离为多少?(假设小球与地面碰撞时速度的水平分量不变,忽略空气阻力。)

**解** (1) 第一个弧线高度为

$$h_1 = \frac{(v\sin\theta)^2}{2g} = 16.6\ \mathrm{m}$$

(2) 第一个弧线所用时间为

$$t_1 = \frac{2v\sin\theta}{g}$$

对应的水平距离为

$$s_1 = v\cos\theta t = \frac{v^2\sin2\theta}{g} = 46.4\ \mathrm{m}$$

(3) 第二个弧线高度为 $H_2=3H_1/4$,所以

$$v'_\perp = \frac{\sqrt{3}}{2}v_\perp = \frac{\sqrt{3}}{2}v\sin\theta$$

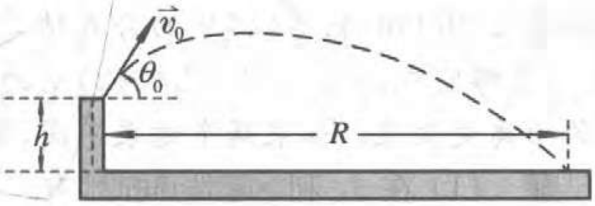
水平速度分量不变:$v'_{/\!/} = v\cos\theta$,飞行时间为

$$t_2 = 2\frac{\sqrt{3}\,v\sin\theta}{2g} = \frac{\sqrt{3}\,v\sin\theta}{g}$$

水平飞行距离为

$$s_2 = v\cos\theta\, t_2 = \frac{\sqrt{3}\,v^2\sin2\theta}{2g} = \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 = 40.2\ \mathrm{m}$$

**【2-104】** 落到和发射点同一高度上的子弹经过的水平距离 $R=(v_0^2\sin2\theta_0)/g$。一个高尔夫球从架高的开球点以45.0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率和 35.0°的角度被击出,落在离开球点20.0 m 处的草地上(如图)。(1) 试证明尽管开球点被架高,仍可用 $R=(v_0^2\sin2\theta_0)/g$ 计算球落地的距离。(2) 证明在更普遍的情况下,球的距离



(题 2-104 图)

$$R = \left(1+\sqrt{1-\frac{2gy}{v_0^2\sin^2\theta_0}}\right)\frac{v_0^2\sin2\theta_0}{2g}$$

其中 $y$ 为草地相对开球点的高度,即 $y=-h$。(3) 用该式计算球飞出的距离。如果忽略草地的高度,会带来百分之多少的误差?(忽略空气阻力。)○

**解** (1) 以发射点为原点建立平面直角坐标系,则球在 $x$ 和 $y$ 方向的运动方程分别为

$$x = v_0 t\cos\theta_0,\quad y = v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

从而得到轨道方程

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + \tan\theta_0\cdot x$$

求解得到

$$x=\frac{\tan\theta_0+\sqrt{\tan^2\theta_0-\dfrac{2gy}{v_0^2\cos^2\theta_0}}}{\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\theta_0}}$$

$$=\left(1+\sqrt{1-\frac{2gy}{v_0^2\sin^2\theta_0}}\right)\frac{v_0^2\sin2\theta_0}{2g}\approx\frac{v_0^2\sin2\theta_0}{g}$$

(2) 证明过程见(1)。

(3) 由(2)中的公式算得飞出的距离为(以高尔夫球被架高了 4.00 cm 估算)194.23 m,由此得出的结论与(1)中的结论(194.17 m)之间的误差为 0.029%。

**【2-105】** 落到和发射点同一高度上的子弹经过的水平距离为 $r=(v_0^2\sin2\theta_0)/g$。(1) 证明:在相同发射角度和自由落体加速度的情况下,发射速率的微小改变产生的距离上的微小改变为 $\Delta r/r=2\Delta v_0/v_0$。(2) 假设子弹经过的水平距离为 200 m,利用(1)中的公式估算如果发射速率增加 20.0% 时,距离的增加量。(忽略空气阻力。)(3) 比较(2)中的计算结果和直接利用 $r=(v_0^2\sin2\theta_0)/g$ 得到的距离变化值。如果两个结果不同,那么估算是大了,还是小了?为什么?

**解** (1) 在 $\theta_0$ 和 $g$ 都相同时,有

$$\Delta r=\frac{2v_0\sin2\theta_0}{g}\cdot\Delta v_0$$

从而有

$$\frac{\Delta r}{r}=\frac{\dfrac{2v_0\sin2\theta_0}{g}\cdot\Delta v_0}{\dfrac{v_0^2\sin2\theta_0}{g}}=\frac{2v_0}{v_0}$$

(2) 由 $\Delta r/r=2v_0/v_0$,得 $\Delta r=200\ \text{m}\times2\times20.0\%=80.0\ \text{m}$,所以距离会增加 80.0 m。

(3) 如果用 $r=\dfrac{v_0^2\sin(2\theta_0)}{g}$,则

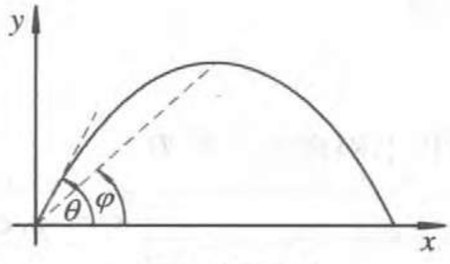
$$\Delta r'=\frac{(v^2-v_0^2)\sin(2\theta_0)}{g}$$

其中 $v=1.2v_0$,所以 $\Delta r'=(1.2^2-1^2)\times200\ \text{m}=88.0\ \text{m}$,故 $\delta=|\Delta r-\Delta r'|=8.0\ \text{m}$,因此估算小了。因为(2)中的估算仅适用于速率发生微小变化的情况,当 $v_0$ 的变化率为 20.0% 时,变化较大,这样就会与直接利用 $r=(v_0^2\sin2\theta_0)/g$ 得到的结果不同。

**【2-106】** 一颗子弹以仰角 $\theta$ 从地面发射。一位观测者站在发射点看着子弹

到达最高点，并测得此时的角度 $\varphi$（如图）。证明 $\tan\varphi=(\tan\theta)/2$。（忽略空气阻力。）

**解** 设子弹的初速度为 $v$，则在子弹最高点时，飞行的水平距离和垂直距离分别为




（题 2-106 图）

$$x = vt\cos\theta,\quad y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

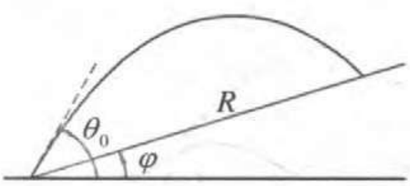
在最高点处，$y$ 方向速度为 0，即有 $v\sin\theta = gt$，因此

$$y = \frac{1}{2}vt\sin\theta$$

最后，经推导得到

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

**【2-107】** 一玩具大炮置于坡道上，坡道斜率为 $\varphi$。如果炮弹以与水平方向成角度 $\theta_0$ 向山上发射（如图），且离开炮口的速率为 $v_0$，试证明：炮弹经过的距离（沿坡道方向）为 $R=\dfrac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\tan\theta_0-\tan\varphi)}{g\cos\varphi}$。（忽略空气阻力。）




（题 2-107 图）

**解法 1** 根据斜抛运动规律，可以得到炮弹飞行的水平距离和垂直距离分别为

$$x = v_0\cos\theta_0\, t,\quad y = v_0\sin\theta_0\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

从而得到炮弹的轨迹方程

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0$$

因为斜坡轨迹为 $y=x\tan\varphi$，所以炮弹落到斜坡上，即求联立上面两式的解：

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0 = x\tan\varphi$$

解得

$$x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\tan\theta_0 - \tan\varphi)}{g}$$

从而，可以知道炮弹经过的距离为

$$s = \frac{|\Delta x|}{\cos\varphi} = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\tan\theta_0 - \tan\varphi)}{g\cos\varphi}$$

**解法 2** （1）以沿斜面方向为 $x$ 轴，垂直于斜面方向为 $y$ 轴，则炮弹沿 $y$ 轴方

向飞行的时间 $t_1$ 满足方程

$$2v_0\sin(\theta_0-\varphi)=g\cos\varphi\cdot t_1$$

得到

$$t_1=\frac{2v_0\sin(\theta_0-\varphi)}{g\cos\varphi}$$

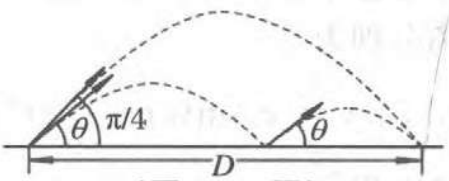
所以沿斜面的位移为

$$s=v_0\cos(\theta_0-\varphi)\cdot t_1-\frac{1}{2}g\sin\varphi\cdot t_1^2$$

化简得到

$$s=\frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\tan\theta_0-\tan\varphi)}{g\cos\varphi}$$

**【2-108】** 当棒球运动员从外场向内场扔球时,他们常常让球在到达内场之前弹跳一次,这样球能到达得早一些。假设球弹跳的角度等于球在外场被扔出的角度,但弹跳后球的速率是弹跳之前的一半,如图所示。(1) 假设球被扔出的初始速率总是一样的,那么棒球运动员要以什么角度扔球,才能使得球在有一次弹跳时的飞行距离 $D$ 和以 45.0°角向上斜抛且无弹跳时的飞行距离相等?(2) 计算有一次弹跳所用总时间与无弹跳所用时间的比值。



(题 2-108 图)

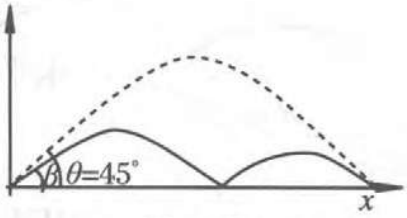


图 2-17

**解** (1) 设初始速率为 $v$,有弹跳的两次时间设为 $t_1,t_2$(图 2-17),

$$t_1=\frac{2v\sin\theta}{g},\quad t_2=\frac{v\sin\theta}{g}$$

对应飞行的水平距离为

$$s_1=t_1\cdot v\cos\theta,\quad s_2=t_2\cdot\frac{v}{2}\cos\theta$$

以45°仰角抛出的球的水平射程为

$$s=v\cos45.0^\circ\cdot\frac{2v\sin45.0^\circ}{g}=\frac{v^2}{g}$$

由题意得到

$$s=s_1+s_2$$

解得

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} \approx 26.6°$$

(2) 无弹跳时，总时间为 $T_1 = 2v\sin 45°/g$，有弹跳时，总时间为

$$T_2 = \frac{2v\sin\theta}{g} + \frac{v\sin\theta}{g}$$

所以 $T_2/T_1 = 0.95$。因此有弹跳可以使球更快到达。

**【2-109】** 运动员朝4 m远处的竖直墙面扔一个球。球离开她的手时离地面2.0 m高，初始速度为14 m·s$^{-1}$，仰角为45°。当球打在墙上后，它的水平速度分量反向，垂直分量不变。(1) 球落在地上何处？(2) 在打到墙上之前，球飞行多久？(3) 球打在墙上何处？(4) 打到墙之后，球飞行多久？（忽略空气阻力。）

**解** 因为球打在墙上后，水平速度分量相反，垂直分量不变，所以可以将球的轨迹以墙面做对称，则球的轨迹为一条抛物线（图2-18）。

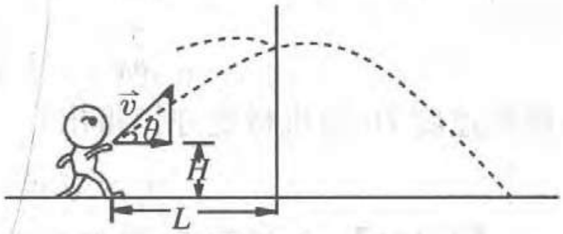


图 2-18

(1) 球由抛出到落地所需时间满足：

$$vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = -H$$

可解得 $t = 2.2$ s（舍去负根 $-0.19$ s）。

球的落点离墙面

$$x = vt\cos\theta - L = 18 \text{ m}$$

(2) 在打到墙之前，球飞行的时间

$$t' = \frac{L}{v\cos\theta} = 0.40 \text{ s}$$

(3) 由(2)中的结论，球与墙面的碰撞点位于地面之上，

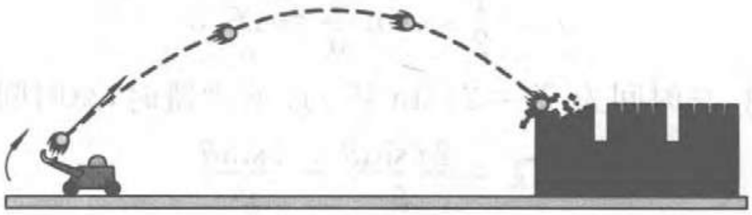
$$h = vt'\sin\theta + H - \frac{1}{2}gt'^2 = 5.2 \text{ m}$$

(4) 由(1)和(2)的结论，不难得出打到墙之后的飞行时间为

$$t'' = t - t' = 1.8 \text{ s}$$

**【2-110】** 几千年前发明的投石机在历史上被用来发射各种物体。在一次战役中，士兵用投石车发射巨大的炮弹，投向敌方高为8.50 m的城墙。如图所示，投石车将炮弹从地面上4.00 m的高处投掷向38.0 m远处的城墙，投掷方向与水平面成60.0°角。如果炮弹落到城墙上，那么，(1) 至少需要多大的投掷速率？(2) 炮弹在空中飞行多久？(3) 炮弹打中城墙时的速率为多大？（忽略空气阻力。）

**解** 设最小的投掷速率为 $v_0$，则有如下方程：



(题 2-110 图)

$$\begin{cases} v_0 \sin 60° \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 = \Delta h = 8.50\ \text{m} - 4.00\ \text{m} = 4.50\ \text{m} \\ v_0 \cos 60° \cdot t = x = 38.0\ \text{m} \end{cases}$$

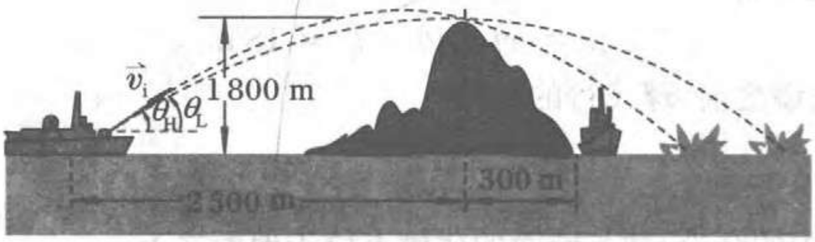
解得

$$v_0 = 21.5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad t = 3.54\ \text{s}$$

最终速度为(由机械能守恒得出)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta h} = 19.3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

**【2-111】** 如图所示,敌舰位于一座有山的岛屿西侧,能够以250 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的速率发射炮弹越过2 500 m远处1 800 m高的峰顶。如果岛东侧的海岸线离峰顶的水平距离为300 m,那么我方舰船停放在离岛东边海岸线多远处才会安全而不被敌舰轰炸到? ○




(题 2-111 图)

**解** 有两种情况:① 炮弹还能上升;② 炮弹在下降。

炮弹恰好从山顶经过,且处于上升或下降状态。建立方程

$$\begin{cases} v\cos\theta\, t = 2\,500\ \text{m} \\ v\sin\theta\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 = 1\,800\ \text{m} \end{cases}$$

解得

$$\theta_1 = \arccos 0.248 = 75.6°,\quad \theta_2 = \arccos 0.641 = 50.1°$$

当 $y = 0$ m 时,得到对应的水平飞行距离

$$x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g} = 3\,065\ \text{m 或 } 6\,276\ \text{m}$$

因此，我方舰船停放在离岛东边海岸线距离为 $\Delta x = x - 2\,500 - 300 = 265$ m 或 3 476 m。

【2-112】 如果一颗子弹从距地面 1.7 m 高处的枪口射出，速率为 250 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，打向 100 m 远处与枪口同一水平高度的气球，枪口必须对准气球上方的某一点。(1) 这一点在气球上方多远？(2) 子弹会落在气球后面多远的地面上？（忽略空气阻力。）

**解** (1) 要求距目标上方多高，知道初射角 $\theta$ 即可，故有 $v_0^2 \sin 2\theta / g = s$，其中 $s = 100$ m 为目标与枪口的距离，$v_0 = 250\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 为初始速率，解得 $\theta = 0.45°$，故距其上方 $h = 100\ \text{m}\cdot\tan\theta = 0.79$ m。

(2) 打中气球之后，子弹做斜抛运动，斜抛角为俯角 $\theta$，速率为 $v_0$，以方向向下为正。

先解出落地的时间 $t$，$t$ 满足

$$v_0 \sin\theta t + \frac{1}{2} g t^2 = H$$

其中 $H = 1.7$ m，解得 $t = 0.42$ s（舍去负根 $-0.82$ s）。所以距目标的水平距离为 $L = v_0 \cos\theta\, t = 105$ m。

【2-113】 假设你站在水平地面上，投球的最大水平距离为 $L$。如果你站在高为 $h$ 的楼顶上，以仰角 (1) 0°；(2) 30°；(3) 45° 投球，分别能投多远？（忽略空气阻力。）

**解** 在水平地面投球的最大水平距离为 $L$，可以得到抛球的初速率为 $v = \sqrt{gL}$。

在楼顶抛球时，水平射程为

$$s = v\cos\theta t$$

垂直射程为

$$s' = v\sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 = -h$$

(1) 当 $\theta = 0°$ 时，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad s = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hL}$$

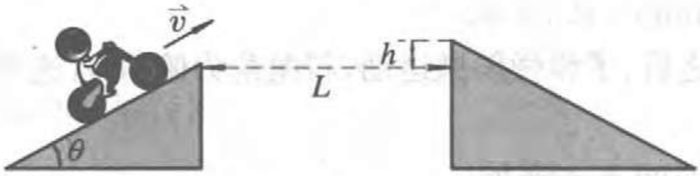
(2) 当 $\theta = 30°$ 时，

$$t = \frac{\sqrt{L} + \sqrt{L + 8h}}{2\sqrt{g}}, \quad s = \frac{\sqrt{3L}(\sqrt{L} + \sqrt{L + 8h})}{4}$$

(3) 当 $\theta=45^\circ$时，

$$t=\frac{\sqrt{L}+\sqrt{L+4h}}{\sqrt{2g}},\quad s=\frac{\sqrt{L}(\sqrt{L}+\sqrt{L+4h})}{2}$$

**【2-114】** 马戏团的一名特技摩托车骑手，在演出中从倾角为 $\theta$ 的斜坡上出发，跨越宽为 $L$ 的间断，到达另一侧更高（相对高度为 $h$）的斜坡上（如图）。(1) 给定 $h$，为了保证演出成功，所需的起跳速率 $v$ 最少为多大？(2) 当 $L=8.0\ \mathrm{m}$，$\theta=30^\circ$，$h=4.0\ \mathrm{m}$ 时，求 $v$。(3) 证明：无论她的起跳速率为多大，平台的最大高度必须满足 $h<L\tan\theta$。请用物理知识解释这一结果。（忽略空气阻力，把骑手和车看成一体。）




（题 2-114 图）

**解** 以出发斜坡的顶端为原点，向右为 $x$ 轴正方向，向上为 $y$ 轴正方向。

(1) 要使表演成功，骑手到达另一侧的高度应大于 $h$。设演员在左侧斜坡顶端的速度为 $v$，那么在水平方向上有

$$v_x=v\cos\theta,\quad t=\frac{L}{v\cos\theta}$$

在垂直方向上有

$$v_y=v\sin\theta,\quad y=v_yt-\frac{1}{2}gt^2$$

且要求：$y\geqslant h$，联立求得

$$v\geqslant\frac{L}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta-h)}}$$

(2) 将数据代入上式，得 $v\geqslant 26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，所以速度最小为 $26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(3) 要能保证骑手达到右侧斜坡，需要 $h$ 小于骑手能达到的高度，即

$$h\leqslant v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

其中，飞行时间由平台间的距离和水平速度决定，即 $t=L/(v\cos\theta)$，代入，得到 $h\leqslant L\tan\theta-gt^2/2=L\tan\theta$，得证，即平台的最大高度必须满足 $h\leqslant L\tan\theta$。

**【2-115】** 崔莺莺绣楼窗口距地面的高度是 1 丈。书生张君瑞站在距绣楼 6

尺远的路边，想把包着小石块的写有情诗的手帕从绣楼的窗口扔进去。为了保证手帕在进入窗口时只有水平方向的速度，他应该怎么扔？这时手帕的水平速度是多少？○

**解** 1丈为3.33 m，6尺为2.00 m。本题没有给出手帕扔出的高度，需要根据经验选一个合理的值。不妨假设张生身高 $h=1.75$ m，手帕扔出时速度为 $v$，与地面的角度为 $\theta$，手帕从扔出到进入窗口所经历的时间为 $t$。为了保证手帕进入窗口时只有水平速度，那么，窗口高度即手帕能达到的最高高度。则水平方向上，

$$v\cos\theta\, t = l$$

竖直方向上，

$$v\sin\theta = \sqrt{2g(H-h)} = gt$$

联立方程，得到

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 0.568\ \mathrm{s}$$

$$\tan\theta = \frac{gt^2}{l} = 1.58 \quad \Rightarrow \quad \theta = 1.00\ \mathrm{rad} = 58^\circ$$

$$v = \frac{l}{t\cos\theta} = 6.58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

张生应以与水平地面成58°角向上速率为6.58 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$扔出手帕。

水平方向的速度恒定为 $v_{/\!/} = l/t = 3.52\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

**【2-116】** 伽利略认为，如果忽略空气阻力，当抛射角度比45°大或小相同角度时，被抛射物的水平距离会相等。请证明伽利略的这一结论。

**解** 题目中所述的意思即两个抛射角互余时，被抛射物体的水平距离相等。设其中一个抛射角为 $\theta$，抛射初速度为 $v_0$，抛体在空中飞行的时间为 $t$，则

$$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

于是水平射程为

$$s = v_0\cos\theta t = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$$

而对于与之互余的抛射角 $\pi/2-\theta$，射程为

$$s' = \frac{v_0^2\sin(\pi-2\theta)}{g} = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g} = s$$

即两种情况射程相等，得证。

**【2-117】** 地球自转是否为圆周运动？赤道上一个相对地面静止的物体是否在做圆周运动？请解释原因。○

**解** 地球自转不是圆周运动，地球自转是绕地轴旋转，而圆周运动是绕一点旋转。赤道上一个相对地面静止的物体在做圆周运动。

**【2-118】** 试证明匀速圆周运动的加速度是指向圆心的。○

**解** 以圆心为原点建立极坐标，由圆周运动，得到$\vec{r}=r\vec{e}_r$。因为是匀速运动，所以$\vec{v}=v\vec{e}_\varphi$。对$\vec{v}\cdot\vec{r}$关于时间 $t$ 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$=a_r r+v^2 \quad\Rightarrow\quad a_r=-\frac{v^2}{r}$$

对$\vec{v}\cdot\vec{v}$关于时间 $t$ 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{a}=2\,\vec{a}\cdot\vec{v}=2a_\varphi v$$

同时有

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

所以 $a_\varphi=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=0$。从而得到匀速圆周运动的加速度是指向圆心的。

**【2-119】** 地球绕自转轴每 24 h 转一圈，所以地球表面的物体也绕该轴每24 h匀速转一周。考虑这一旋转作用于地表上的一个人，忽略地球绕太阳公转的影响。(1) 如果这个人站在赤道上，他的速率和加速度的大小为多少(用 $g$ 的百分比来表示加速度的大小)？(2) 加速度矢量的方向如何？(3) 如果一个人站在北纬 32°，那么他的速率和加速度的大小为多少？(4) 如果站在北纬 32°的人和站在赤道上的人处于同一条经线上，请问他俩加速度方向的夹角为多大？○

**解** (1) 在赤道上，速率为

$$v=\omega r=\frac{2\pi}{T}r=\frac{2\pi}{24\times 3\,600\ \mathrm{s}}\times 6\,371\ \mathrm{km}=463\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

加速度大小为

$$a=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r=0.033\,7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.34\%g$$

(2) 加速度方向指向地心。

(3) 北纬 32°上，$v'=v\cos 32^\circ=393\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$a'=a\cos 32^\circ=0.29\%g$。

(4) 0°。

**【2-120】** 求地球绕太阳公转的向心加速度。

**解** 地球公转绕太阳做圆周运动，向心加速度公式为

$$\alpha_{心}=\omega^2 r=\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

其中

$$T = 1\ \text{a} = 365 \times 24 \times 3\,600\ \text{s} = 3.15 \times 10^7\ \text{s}, \quad r = 1.50 \times 10^{11}\ \text{m}$$

代入数据，得 $a_{心} = 5.95 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$。

**【2-121】** 根据地球和月球的平均距离和轨道周期，确定月球相对于地球的加速度。(假设轨道为圆形；用 $g$ 的分数形式表达加速度。)

**解** 月球绕地球做圆周运动，向心加速度大小为

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$= \frac{4\pi^2}{(24 \times 3\,600\ \text{s})^2} \times 3.84 \times 10^8\ \text{m} = 2.03\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx \frac{g}{5}$$

**【2-122】** 脉冲星是中子星的一种，我们可以通过在地球上接收脉冲星发出的脉冲辐射的时间间隔得到它的旋转周期。某些脉冲星的旋转周期可以小到 1 ms！蟹状星云脉冲星位于猎户星座的蟹状星云中，目前其周期为 33.085 ms。它的赤道半径大约为 15 km，也就是中子星的平均半径。(1) 脉冲星表面赤道处物体的向心加速度为多大？(2) 许多脉冲星被观测到随着时间推移它们的周期拉长，这一现象称为“降速”。蟹状星云脉冲星每秒变慢 $3.5 \times 10^{-13}$ s，即如果这一变慢速率是恒定的，那么蟹状星云脉冲星会在$9.5 \times 10^{10}$ s(大概距今 3 000 年)后停止旋转。在这个中子星表面赤道位置的物体，切向加速度为多大？

**解** (1) 此向心加速度大小为

$$a = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 5.41 \times 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

其中 $r$ 和 $T$ 分别为脉冲星的赤道半径和自转周期。

(2) 目前脉冲星表面的物体的切向速度为

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2.85 \times 10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

所以脉冲星赤道物体的切向加速度为

$$a_\tau = \frac{v}{9.5 \times 10^{10}\ \text{s}} = 3.0 \times 10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

**【2-123】** 一物体在以原点为圆心的圆周上运动，其位置矢量 $\vec{r}$ 的大小恒定。(1) 对 $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$进行时间求导，证明$\vec{v} \perp \vec{r}$ 。(2) 对$\vec{v}\cdot\vec{r}$ 进行时间求导，证明 $a_r = -v^2/r$。(3) 对 $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ 进行时间求导，证明 $a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。○

**解** (1) 记

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \quad \vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\varphi\,\vec{e}_\varphi = v\,\vec{e}_\varphi, \quad \vec{a} = a_r\,\vec{e}_r + a_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

物体做圆周运动，半径 $r$ 为定值，所以 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}=2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$$

同时有

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{r}=2\,\vec{r}\cdot\vec{v}$$

所以 $2\,\vec{r}\cdot\vec{v}=0$,即 $\vec{v}\perp\vec{r}$,得证。

(2) 由

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{v}=a_r r+v^2$$

知 $a_r=-v^2/r$。

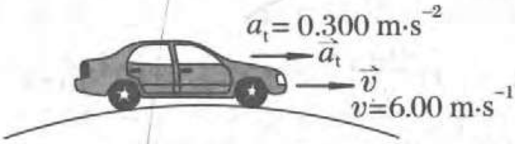
(3) 由

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{a}=2\,\vec{a}\cdot\vec{v}=2a_\varphi v$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

知 $a_\varphi=a_\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。

**【2-124】** 一辆车以恒定加速度 $0.300\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 沿道路行驶。车经过一段坡道,坡道的形状像一个半径为 500 m 的圆弧。当车到达坡顶的时候,它的速度矢量沿水平方向,大小为 $6.00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。请确定在这一时刻车的加速度矢量的大小和方向。




(题 2-124 图)

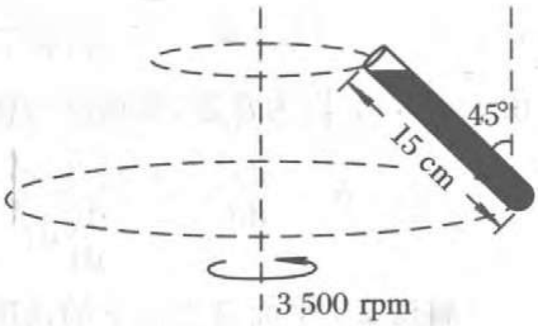
**解** 将车视为质点,切向加速度为 $a_t=0.300\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,径向加速度为 $a_n=v^2/r=0.0720\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,合加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=0.309\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

与水平方向的夹角为 $\arctan(a_n/a_t)=0.236\ \mathrm{rad}=13.5°$。

**【2-125】** 人类的血液中有血浆、血小板和血球。为了把血浆和其他成分分开,可以使用离心机给血液提供 $2\,000g$($g$ 为标准重力加速度)或以上的加速度。在这种情况下,假设血液盛满在 15 cm 长的试管中。如图所示,试管在离心机中与水平方向成 45°角。(1) 离心机转速为 3 500 rpm,那么要使血液受到 $2\,000g$ 的加速度,需要血液样品距离心机的转轴多远?(2) 如果试管中心位置的血液位于(1)

中要求的位置，试求试管两端血液受到的加速度(用 $g$ 的倍数表示)。




(题 2-125 图)

**解**　3 500 rpm = 366.5 rad·s$^{-1}$。根据匀速圆周运动规律计算。

(1) 由 $a=\omega^2 r$，得 $r=a/\omega^2=0.1459\ \mathrm{m}$。

(2) 试管上端，

$$r_1 = r - \frac{l}{2}\sin 45^\circ \approx 0.092\,87\ \mathrm{m}$$

试管下端，

$$r_2 = r + \frac{l}{2}\sin 45^\circ \approx 0.198\,9\ \mathrm{m}$$

对应的加速度分别为

$$\begin{cases} a_1 = \omega^2 r_1 = 1.248\times 10^4\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}} = 1\,273g \\ a_2 = \omega^2 r_2 = 2.672\times 10^4\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}} = 2\,727g \end{cases}$$

**【2-126】**　一质点的运动轨道为对数螺旋线，$r=be^{k\varphi}$，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=c$，其中 $b,k,c$ 均为正常数。$t=0$ 时，质点位于 $r=b,\varphi=0$ 处，请给出质点速度和加速度的大小及轨道曲率半径随时间的变化值。○

**解法 1**　由题目条件，可以得到 $r=b+ct$，并求解 $b+ct=be^{k\varphi}$，得到

$$\varphi = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{c}{b}t\right)$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{k(b+ct)}$$

所以速度为

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(be^{k\varphi})}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = bke^{k\varphi}\cdot\frac{c}{k(b+ct)} = c$$

$$v_\varphi = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = (b+ct)\cdot\frac{c}{k(b+ct)} = \frac{c}{k}$$

加速度为

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} - (b+ct)\cdot\left[\frac{c}{k(b+ct)}\right]^2 = -\frac{c^2}{k^2(b+ct)} \end{aligned}$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$= (b+ct)\cdot\left[-\frac{c^2}{k(b+ct)^2}\right]+2c\cdot\frac{c}{k(b+ct)}=\frac{c^2}{k(b+ct)}$$

由于 $v_r, v_\varphi$ 均为常数,即速度与极径间夹角不变,所以 $\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi$,从而曲率半径为

$$R=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}\mathrm{d}t}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}=\sqrt{1+k^2}(b+ct)=\sqrt{1+k^2}\,r$$

**解法 2** 平面极坐标下的速度和加速度公式分别为

$$\vec{v}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

已知:$r=b\mathrm{e}^{k\varphi}$,$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=c$,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=bk\mathrm{e}^{k\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=c \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}=\frac{c}{bk}\mathrm{e}^{-k\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{r}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\varphi}=-\frac{c}{b}\mathrm{e}^{-k\varphi}\dot{\varphi}=-\frac{c^2}{b^2k}\mathrm{e}^{-2k\varphi}$$

代入得到

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi=c\vec{e}_r+b\mathrm{e}^{k\varphi}\cdot\frac{c}{bk}\mathrm{e}^{-k\varphi}\,\vec{e}_\varphi=c\vec{e}_r+\frac{c}{k}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

$$=\left[0-b\mathrm{e}^{k\varphi}\left(\frac{c}{bk}\mathrm{e}^{-k\varphi}\right)^2\right]\vec{e}_r+\left[b\mathrm{e}^{k\varphi}\left(-\frac{c^2}{b^2k}\mathrm{e}^{-2k\varphi}\right)+2c\,\frac{c}{bk}\mathrm{e}^{-k\varphi}\right]\vec{e}_\varphi$$

$$=-\frac{c^2}{bk^2}\mathrm{e}^{-k\varphi}\vec{e}_r+\left(\frac{c^2}{bk}\mathrm{e}^{-k\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

曲率半径为

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-x''y'}$$

其中

$$x=r\cos\varphi=b\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi=b\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi$$

$$x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=bk\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi-b\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi$$

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=bk\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi+b\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi$$

$$x'' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\varphi} = bk^2\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi - bk\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi - bk\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi - b\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}\varphi} = bk^2\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi + bk\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi + bk\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi - b\mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi$$

代入化简,得到曲率半径为 $R = r\sqrt{1+k^2}$。

**【2-127】** 三维空间运动在什么情况下会退化成二维运动?

**解** 从单纯运动学上看,当该运动在某一方向上的速度始终为0时,三维空间运动退化为二维平面运动。从动力学角度看,即要求该质点存在某一方向:该方向上初速度为0,且该方向上合外力为零。

**【2-128】** 在 $t=0$ 时刻,从空中一点以同样的速率 $v$ 向各个方向抛出小球。试证明:在任一时刻 $t$,所有小球都位于一个球面上,球面的中心按照自由落体的方式下落,球面的半径为 $vt$。

**解** 建立以重力加速度 $g$ 自由下落的参考系。在此参考系中观察小球的运动,所有小球均做速率为 $v$ 的匀速直线运动。所以,在此参考系中任意时刻各个小球的位置组成的曲面是以抛射点为球心的球体。又由于设立的参考系中各点的加速度均相同,所以地面系中看到的各个小球所在位置组成的曲面仍为球体,只是球心下落了 $gt^2/2$。

**【2-129】** 一个垂直向上射出的烟花弹在它的最大高度 $h$ 处爆开,向各个方向散出燃烧的碎片,所有碎片的速率都为 $v$。凝结为固体小球的金属碎片不受空气阻力影响落到地面上。试给出碎片的最终速度与水平方向所成夹角的最小值。

**解** 因为各方向碎片的初速度都相同,不妨只考虑右边部分,由于抛体运动本身的对称性,只考虑初速度向下的碎片即可,设碎片初速度和水平夹角为 $\theta$。在竖直方向上,有

$$v_1 = \sqrt{2gh + v^2\sin^2\theta}$$

在水平方向上,

$$v_2 = v\cos\theta$$

所以速度与水平方向的夹角 $\alpha$ 满足

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2gh + v^2\sin^2\theta}}{v\cos\theta}$$

由此可知,当 $\theta=0$ 时,$\tan\alpha$ 最小,且 $\tan\alpha = \sqrt{2gh}/v$,所以,所求夹角的最小值为 $\arctan(\sqrt{2gh}/v)$。

【2-130】 时间膨胀效应有时候可以表述为"运动的钟变慢"。实际上，在这个效应中，运动并不影响钟的功能，那么这个效应到底影响的是什么？时间膨胀效应是运动中时间确实流逝得更慢，还是时间只是"看起来"更慢？○

**解** 钟变慢效应影响的不是钟的性能，而是对时间的测量，这个效应使得在测量一个相对于自己运动着的参考系中的时间间隔时让测量结果和本征系中相比变长。对于本征系，显然时间流逝是正常的，于是"实际上"并不变慢，而"看起来"在物理学中即测量的结果，测量起来变长。

【2-131】 谈谈你对光速不变的两个结论(运动的钟变慢，运动的尺变短)的理解。如何用通俗易懂的语言向一般人解释说明？☆

**解** 根据狭义相对论的观点，时间和空间并非绝对的、永恒的，而是可变化的、有条件的。时空的具体特征随着物质运动的变化而变化。当我们站在一个参考系的角度观察另一个相对我们运动的参考系时，我们用洛伦兹变换便能推测出哪一参考系中运动的钟变慢以及运动的尺缩短。在日常生活中，由于物体相对我们运动的速度很小，故钟变慢、尺缩短表现得不明显。

【2-132】 假设光速为无穷大，那么相对论中的长度收缩和时间膨胀效应会如何变化？

**解** 相对论长度收缩

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

时间膨胀

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

当 $c \to \infty$ 时，$v/c \to 0$，$l \to l'$，$t \to t'$，故两个效应都消失。

【2-133】 你驾驶宇宙飞船以 $0.5c$ 的速度向远处的恒星进发，恒星发出的光经过你身边时，其速度是多少？

**解** 真空中的光速在任何参考系中都是 $c$，在不同参考系会因为与光源相对运动产生多普勒效应而观测出不同的频率。

【2-134】 一个星球距地球 10.6 光年。一艘宇宙飞船以 $0.96c$ 的速度从地球向该星球驶去。(1) 从地球上看，该飞船多长时间之后到达该星球？(2) 从该飞船上看，它多长时间后到达该星球？(3) 从该飞船上看，它行驶了多远的距离？(4) 从该飞船上看，它的行驶速度是多少？○

**解** (1) 从地球上看,它行驶的时间为

$$t_0 = \frac{l_0}{v} = 11\ \mathrm{a}$$

(2) 由于时间膨胀效应,从飞船上看,它到达星球的时间为

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 3.4\ \mathrm{a}$$

(3) 由于尺缩效应,飞船上看两星球的距离为

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2.97\ \mathrm{ly}$$

(4) 从飞船上看,飞船相对地球的速度仍为 $v=0.96c$。