第3章 牛顿动力学

【3-1】 牛顿第一定律的重要意义是什么？它与牛顿第二定律是什么关系？

解 第一定律定义了一类重要的参考系——惯性系，并提出了力和惯性两个重要概念。而牛顿第二定律只有在惯性系中才正确，所以牛顿第二定律是建立在第一定律基础上的。

【3-2】 试谈谈你对“质量”的理解，并评论通常所作的以下陈述：物体的质量是它所包含“物质的量”。

解 关于“质量”的理解，可以从两个方面进行：一是通过牛顿第二定律，量度物体惯性大小的量；二是通过万有引力定律，量度物体所受的万有引力大小的量。而通常所说的“物体所包含的物质的量”则是一个不准确的说法，它没有揭示出质量的实质(现在国际单位制中已经专门为物质的量设置了单位：摩尔)，也可以说，它是特定时期人类对质量的一种理解，现在已经有些“过时”了。

【3-3】 为什么说质量具有可加性与物体内部复杂的运动状态无关？

解 由实验可以证明：

(1) 物体A与一弹簧相连，把弹簧拉伸至 x，释放A，测出释放时刻A的加速度 a_A，A的质量为 m_A，桌面光滑时，有 $F=m_A a_A$。

(2) 同一弹簧与物体B相连，拉伸至 x，由胡克定律可知此时弹簧上的力与第一次相等，释放B，测出加速度 a_B，有 $m_B=F/a_B$。

(3) 同一弹簧与捆绑在一起的A,B相连，仍拉伸至 x，释放A,B，测出加速度 a_{AB}，若质量可加，应有

$$a_{AB}=\frac{F}{m_A+m_B}=\frac{F}{F/a_A+F/a_B}=\frac{a_A a_B}{a_A+a_B}$$

实验测得 a_{AB}，与理论值相等，故质量具有可加性。

上述论证中未涉及物体内部的运动状态，故质量可加性与物体内部运动无关。

【3-4】 一钓鱼者想以 $2.5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 的加速度垂直于水面钓起一条鱼。他的鱼线非常轻，能承受的最大张力为25 N。可惜由于鱼线断了，他失去了这条鱼。请问这条鱼的质量至少为多少？

解 鱼的合加速度为钓鱼者拉鱼的加速度，是张力和鱼自重的合力作用产生

的，即

$$ma = T - mg$$

当鱼的质量太大时，$m(a+g)$大于鱼线能承受的最大张力，鱼线断开。此时

$$m \geqslant \frac{T}{a+g} = \frac{25}{2.5+9.8} = 2.0(\mathrm{kg})$$

【3-5】 大小相同的两个水平方向上的力$\vec{F}$在给定时间Δt内分别作用于两个静止在平滑表面、质量分别为m_1和$m_2(m_1>m_2)$的物体上。(1) 用F,m_1,m_2表示它们的加速度之比。(2) 给出在给定Δt之后的瞬间，它们的速率v_1和v_2之比。(3) 在给定Δt之后的瞬间，它们之间的距离为多大？哪个在前？

解 根据牛顿第二定律$F=ma$，以及位移、速度与加速度的关系，建立位移、速度、加速度和质量、力的关系。

(1) 由牛顿第二定律$F=ma$，可以得到$a_1:a_2=m_2:m_1$。

(2) 根据速度与加速度的关系$v=a\Delta t$和上面的关系式，可以得到$v_1:v_2=m_2:m_1$。

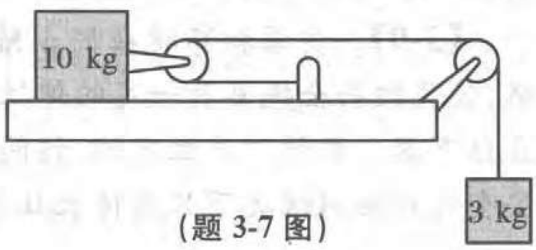
(3) 由于$m_2<m_1$，所以质量为m_2的物体运动在前面。根据位移与加速度的关系$s=a\Delta t^2/2$，可以得到两者之间的距离为

$$\Delta s = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)\Delta t^2 = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)\Delta t^2$$

【3-6】 宇航员在太空站停留期间需要非常仔细地控制他们的身体质量，因为大幅度的质量减少会导致很严重的生理问题。请设计一种用来在空间站测量处于失重状态的宇航员身体质量的设备。○

解 在失重状态下，无法用常规的重力测量方法得到质量，但是可以根据牛顿第二定律$F=ma$，建立力与加速度的关系，通过函数斜率得到惯性质量。设有一弹簧装置，在弹性限度内将其压缩，使其具有50 J能量，宇航员背部受力由弹簧弹出，由摄像机记录匀速运动过程中的位移情况，以测出其速度。由于宇航员的质量远小于飞船的质量，故误差不大，也可以通过已知的飞船质量进行校正。过程中要求宇航员身体不动，否则位移测量误差变大。这是利用能量测量的，也可以通过动量与质量的关系进行测量，不再赘述。

【3-7】 一个质量为10 kg的物块及附带的滑轮沿一无摩擦的窗台滑动。它又通过一质量不计的细线按图示方式与一块质量为3.0 kg的物块相连接。请给出每个物块的加速度和细绳上的张力。



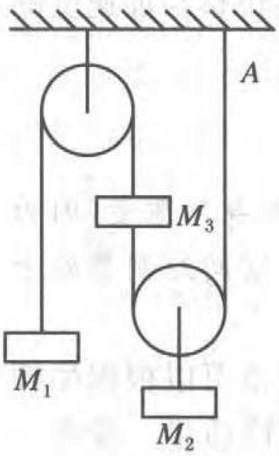
(题3-7图)

解 如图所示，由于细线不可拉伸，10 kg 物体的加速度将是 3 kg 物体加速度的一半；同时滑轮使得 10 kg 物体受到的细线拉力为 3 kg 物体受到的 2 倍。分别对 10 kg 物体和 3 kg 物体作力平衡分析。设 $m_1=10\ \mathrm{kg}$，加速度为 a_1，$m_2=3\ \mathrm{kg}$，加速度为 a_2，绳中张力为 T，则可建立方程组

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}a_2 \\ m_2 g - T = m_2 a_2 \\ 2T = m_1 a_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2m_2}{m_1+4m_2}g = \dfrac{3}{11}g \approx 2.7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \\ a_2 = \dfrac{4m_2}{m_1+4m_2}g = \dfrac{6}{11}g \approx 5.3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \\ T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+4m_2}g \approx 13\ \mathrm{N} \end{cases}$$



（题 3-8 图）

【3-8】 一细绳的一端固定在天花板的 A 点，另一端跨过一个定滑轮悬挂着一质量为 M_1 的物体，又在 A 点和定滑轮之间的绳子上穿着一动滑轮，动滑轮下悬挂着一物体，质量为 M_2，且 $M_1=M_2$，在定滑轮和动滑轮之间的绳子上有一重物，质量为 M_3，如图所示。假设滑轮和绳子的质量以及滑轮轴上的摩擦力均可忽略，绳子长度不变。求当系统保持静止状态时 M_3 的大小。

解 分别对三个物体作静力平衡分析。

设左侧滑轮上所绕绳索中的张力为 T_1，右侧滑轮上所绕绳索中的张力为 T_2，则静力学方程组为

$$\begin{cases} T_1 = M_1 g \\ 2T_2 = M_2 g \\ T_1 = T_2 + M_3 g \end{cases}$$

解得 $M_3 = M_1 - M_2/2$。

【3-9】 黄蓉和郭靖在爬山练习中使用长度一样的安全绳。(1) 黄蓉家庭富裕，使用的安全绳具有一定的弹性，如果自由跌落 2.00 m，能保证在 1.00 m 范围内止住下落。假设力是恒定的，请问黄蓉受到的力多大？(2) 郭靖家境贫寒，使用的安全绳在相同情况下只能伸长 0.30 m，请问绳索对郭靖的拉力是郭靖体重的多少

倍?(3) 谁更容易受伤?

解 (1) 设黄蓉的质量为 M_1,则由运动学公式

$$v^2 = 2gh_1, \quad v^2 = 2(a-g)h_2$$

解得 $a=3.00g$,所以 $F_1 = M_1 a = 3.00M_1 g$,故黄蓉受到的力为她体重的 3.00 倍。

(2) 设郭靖的质量为 M_2,则由运动学公式

$$v^2 = 2gh_1', \quad v^2 = 2(a-g)h_2'$$

解得 $a=(23/3)g$,所以 $F_2 = M_2 a = 7.7M_2 g$,故郭靖受到的力为他体重的 7.7 倍。

(3) 因为一般来说,$M_1 < M_2$,并且 $F_1 = 3.00M_1 g$,$F_2 = 7.7M_2 g$,$F_2 > F_1$,故郭靖更容易受伤。

【3-10】 估算足球守门员抱住对方球员射来的点球时,他手套上受到的力的大小。

解 假设守门员在 10 cm 内将足球从 60 m·s^{-1}减速到 0 m·s^{-1},并假设足球的质量为 400 g,从而解得

$$F = ma = m\frac{v_1^2 - v_2^2}{2s} = 0.4\,\mathrm{kg} \times \frac{(60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - (0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{2\times 0.1\,\mathrm{m}} = 7\,200\,\mathrm{N}$$

【3-11】 一辆打滑失控的赛车试图在正面撞上砖墙之前将速率降到 80 km·h^{-1}。幸运的是,赛车手系着安全带。请用合适的数据表示赛车手的质量和刹车距离等,估算安全带对赛车手的平均作用力的大小和方向。(忽略座位对赛手的摩擦力。)○

解 把整个刹车过程看成匀减速直线运动,适当地估计刹车距离、刹车前速率,可以估算出加速度;再运用牛顿第二定律,可以得到平均作用力。

假设车手的质量为 80 kg,刹车距离为 10 m,汽车的速度为 80 km·h^{-1}。由初始速度 v_1、终止速度 v_2 与刹车距离 s,可以得到加速度为

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = -24.7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

根据牛顿第二定律,得到平均作用力为

$$F = ma \approx -2.0\times 10^3\,\mathrm{N}$$

力的方向与汽车前进的方向相反。

【3-12】 一颗质量为 1.60×10^{-3} kg 的子弹以 600 m·s^{-1}的速率射向一个树墩,在树墩内穿行了 6.00 cm 后停止。(1) 假设子弹的加速度恒定,求树墩对子弹作用力的大小和方向。(2) 如果树墩作用于子弹的力不变,且子弹打到树墩的瞬间速率相同,但子弹的质量减半,那么子弹能在树墩内穿行多远?

解 (1) 以子弹运行的方向为正方向。子弹在树墩内做匀减速直线运动:

$$a = \frac{(0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 - v_0^2}{2s} = -3.00 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

子弹在树墩内受到的作用力为 $F = ma = -4.80 \times 10^3\,\mathrm{N}$,受力方向与子弹运动方向相反。

(2) 子弹在树墩内受力不变,子弹质量减半,则加速度为

$$a' = \frac{F}{m'} = -6.00 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

子弹在树墩内运动的距离

$$s' = \frac{(0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 - v_0^2}{2a'} = 0.0300\ \mathrm{m} = 3.00\ \mathrm{cm}$$

【3-13】 一垂直绳子下端悬挂着一个质量为 50.0 kg 的物体。绳子和物体从静止开始加速向上运动,在 0.900 s 内达到速率 3.60 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$。(1) 作物体受力分析图,用矢量的相对长短来表示力的相对大小。(2) 由受力分析图和牛顿定律计算绳子上的张力。

解 (1) 物体受到绳子的拉力 T 和自身的重力 mg。

(2) 由牛顿定律,建立方程

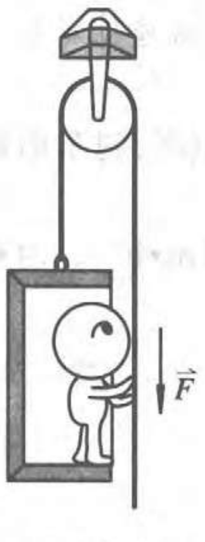
$$T - Mg = Ma$$

同时,加速度满足

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 4.00\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

解得

$$T = m(g + a) = 690\ \mathrm{N}$$



(题 3-14 图)

【3-14】 质量为 65.0 kg 的油漆工站在质量为30 kg的活动平台上。平台上系一绳子,通过一个滑轮,可以使得油漆工能够自由升降(如图)。(1) 他需要多大的力使自己获得 0.50 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 的向上加速度?(2) 当他的速率为0.75 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 时,他改变拉力使自己匀速上升。此时拉力有多大?(忽略绳子的质量。)

解 绳中张力即为人手用的力。由于绳子系在平台上,所以绳子的张力通过平台作用点作用给人和平台整体;同时注意到人手用力拉动绳子,因而绳子的张力也通过人手作用给人和平台整体。设人施加的力为 F,人和平台的总质量为 m。

(1) 当他以 0.50 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 的加速度上升时,

$$2F - mg = ma$$

解得 $F = 489\ \mathrm{N}$。

(2) 当他匀速上升时，

$$2F - mg = 0\ \mathrm{N}$$

解得 $F = 466\ \mathrm{N}$。

【3-15】 质量为 60 kg 的你站在一台固定在电梯地板上的台秤上。求以下情况中台秤的读数：(1) 电梯以加速度 a 上升；(2) 电梯以加速度 a' 下降；(3) 电梯以速率 $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 上升，且速率以 $5.0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 的加速度减小。

解 你受到自身重力和台秤的支持力的合力作用，以电梯的加速度被加速。

(1) 由牛顿第二定律，$N_1 - mg = ma$，得 $N_1 = m(g+a)$，对应读数为 $m(g+a)/g$。

(2) 同理，$mg - N_2 = ma'$，得 $N_2 = m(g-a')$，对应读数为 $m(g-a')/g$。

(3) 即电梯具有向下的 $a'' = 5.0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 的加速度，$mg - N_3 = ma''$，得 $N_3 = m(g-a'') = 288\ \mathrm{N}$，对应读数为 29 kg。

【3-16】 假设氢原子中电子以 $2.2 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率绕核做匀速圆周运动，试估计维持这一运动所需要的向心力为多少。建议与电子和氢核之间的库仑力作一比较。

解 查得氢原子半径 $r = 0.79 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$，并以此来近似作为电子圆周运动的半径；电子质量为 $m = 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$，所以向心力为

$$F = \frac{mv^2}{r} = 5.6 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

而库仑力为

$$f = \frac{ke^2}{r^2} = 8.988 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(0.79 \times 10^{-10}\ \mathrm{m})^2} = 3.7 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

可见库仑力与向心力大小在同一量级上。

【3-17】 用一条质量为 M、长度为 L 的均匀绳子垂直上提一质量为 m 的物块。绳子顶端受到向上的力，绳子和物块以大小为 a 的加速度向上运动。证明绳子上距离物块 x $(x < L)$ 处张力的大小为 $(a+g)[m + (x/L)M]$。

解 将绳子下方长为 x 的部分和物体作为一个整体，质量为 $(x/L)M + m$。根据牛顿第二定律，可以得到对应的关系：

$$\left(\frac{x}{L}M + m\right)a = T - \left(\frac{x}{L}M + m\right)g$$

化简，得到绳子上离物体 x 处的张力为

$$T = \left(\frac{x}{L}M + m\right)(g + a)$$

原题得证。

【3-18】 两个力 $\vec{F}_1 = -6\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$ 和 $\vec{F}_2 = -3\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$ 作用在质量为

2.00 kg、初始静止在$(-2.00\ \text{m},+4.00\ \text{m})$处的一个质点上。当$t=10.0\ \text{s}$时，求：(1) 质点运动的速率；(2) 质点运动的方向；(3) 质点运动经过的距离；(4) 质点所处的位置。

解 根据运动的独立性，即在描述复杂运动中，x方向的坐标、速度、加速度与其他方向的坐标、速度、加速度无关，这一特性简化了二维或二维以上运动的分析，将矢量运算转化为标量运算。

由题意，可以得到合外力为

$$\vec{F}_{合}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-9\vec{e}_x+3\vec{e}_y$$

由牛顿第二定律得到对应的加速度，

$$\vec{F}_{合}=m\vec{a}$$

根据运动方程，可以得到相应的速度和位移：

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t,\quad s=s_0+\frac{1}{2}at^2$$

代入数值，得到：

(1) $|\vec{v}|=|-45\vec{e}_x+15\vec{e}_y|=47.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$；

(2) 方向为$(-3,1)$方向；

(3) $d=237\ \text{m}$；

(4) 在坐标$(-227,79.0)$处。

【3-19】 一女孩手拿一块石头，向上向下移动或者保持静止。请判断对错：(1) 她的手对石头的作用力大小始终等于石头受到的重力。(2) 她的手对石头的作用力是石头受到的重力的反作用力。(3) 她的手对石头的作用力大小始终等于石头对她的手的作用力大小，且方向始终相反。(4) 如果女孩以恒定速率向上移动她的手，那么她作用在石头上的力比石头受到的重力小。(5) 如果女孩向下移动她的手，并使得石头减速到静止状态，那么石头在静止前对她的手的作用力大小等于石头受到的重力。

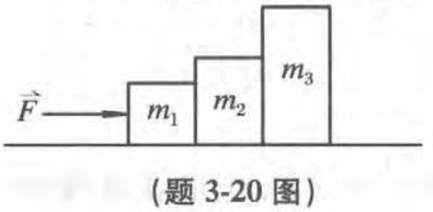
解 (1) 错。当石头有一定的加速度时，手对石头的作用力不等于石头所受的重力。

(2) 错。手对石头的作用力是石头对手的作用力的反作用力。

(3) 对。这是一对作用力与反作用力。

(4) 错。当速率恒定时，她作用在石头上的力与石头受到的重力相等。

(5) 错。石头存在向上的加速度。



(题 3-20 图)

【3-20】 如图，三块互相接触的木块放在无摩擦的水平面上。一水平方向的力$\vec{F}$作用在m_1上。如果$m_1=2.00\ \text{kg}$，$m_2=3.00\ \text{kg}$，$m_3=4.00\ \text{kg}$，$F=20.0\ \text{N}$，画出每个木块的受力图，并求：(1) 木块的加

速度;(2) 每个木块所受的力;(3) 木块之间的相互作用力的大小。

解 三个木块的受力示意图如图 3-1 所示(其中 $G_i, N_i\,(i=1,2,3)$ 分别表示第 i 块木块受到的重力和桌面对它的支持力,F_{ij} 表示第 i 个木块受到第 j 个木块的挤压力)。

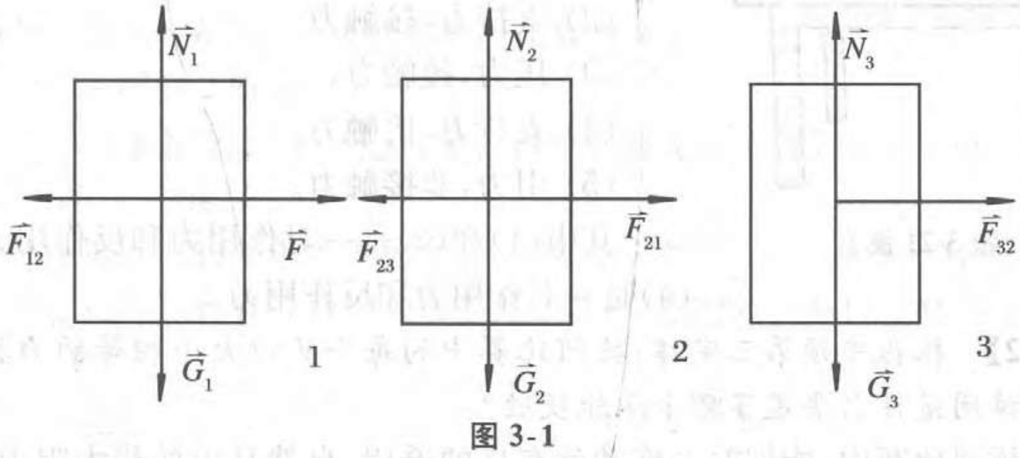


图 3-1

以三个木块整体为研究对象,木块的加速度为

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = 2.22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

三块木块受到的力分别为:

木块 1,

$$\begin{cases} G_1 = N_1 = 19.6\ \mathrm{N} \\ F = 20.0\ \mathrm{N} \\ F_{12} = F - m_1 a = 15.56\ \mathrm{N} \end{cases}$$

木块 2,

$$\begin{cases} G_2 = N_2 = 29.4\ \mathrm{N} \\ F_{21} = F_{12} = 15.56\ \mathrm{N} \\ F_{23} = F_{21} - m_2 a = 8.90\ \mathrm{N} \end{cases}$$

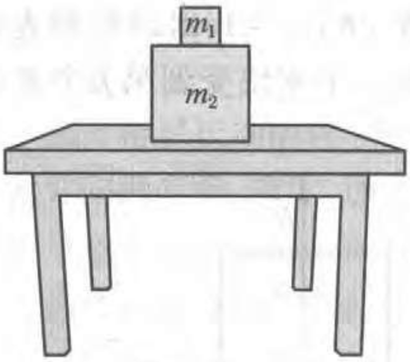
木块 3,

$$\begin{cases} G_3 = N_3 = 39.2\ \mathrm{N} \\ F_{32} = F_{23} = 8.90\ \mathrm{N} \end{cases}$$

故木块 1 受到的合力大小为 4.44 N,方向向右,木块 2 受到的合力大小为 6.67 N,方向向右,木块受到的合力大小为 8.90 N;木块 1 和 2 之间的作用力为 15.56 N,木块 2 和 3 之间的作用力大小为 8.90 N。

【3-21】 如图,一块质量为 m_1 的物块放置在另一块质量为 m_2 的物块上,同时静止在桌面上。给出下面各力的名称和分类(接触力或非接触力):(1) m_1 对

m_2 的力；(2) m_2 作用于 m_1 上的力；(3) m_2 对桌子的力；(4) 桌子对 m_2 的力；(5) 地球对 m_2 的作用力。哪些力可以看成牛顿第三定律中的一对作用力和反作用力？



(题 3-21 图)

解 (1) 压力，接触力。

(2) 支持力，接触力。

(3) 压力，接触力。

(4) 支持力，接触力。

(5) 引力，非接触力。

其中(1)和(2)是一对作用力和反作用力，(3)和(4)是一对作用力和反作用力。

【3-22】 根据牛顿第三定律，拔河比赛中的每个队以大小相等的力拉对方的队伍。那请问是什么决定了哪个队能获胜？○

解 拔河比赛中，能把对方拖动就有赢的希望，自然是谁的最大阻力大，谁就更容易获胜。在理想的情况下，最大阻力为最大静摩擦力，由 $f=\mu N$ 得知，在静摩擦系数相等的情况下，N 越大，即哪一队的总重量越大就越容易获胜。因此，胖子拔河更容易赢，但是在实际中，拔河技巧也是很重要的。例如，加大静摩擦系数、改变阻力的性质、降低重心防止摔倒、用力齐使得合力最大等等。

【3-23】 你的朋友搞恶作剧，在你睡觉时把你绑架到湖中的冰面上。当你醒来时，你离最近的湖岸也有 25.0 m 远。冰很滑，你无法移动。你意识到你可以利用牛顿第三定律，就将身上最重的东西——一只质量为 1.50 kg 的靴子扔出以使自己移动。假设你的质量为 60 kg。(1) 你应该把靴子朝什么方向扔，能使你自己最快到达岸边？(2) 如果你用平均大小为 450 N 的力，在 0.500 s 内将靴子扔出，问靴子对你的作用力大小为多少？(假设加速度恒定。)(3) 你需要多久才能到达岸边(包括扔靴子的时间)？

解 (1) 根据动量定理，要使自己朝着最近岸边的方向运动，应该将鞋子朝着离自己最近岸边的反方向扔。

(2) 根据牛顿第三运动定律，靴子的作用力仍为 450 N。

(3) 扔靴子时，人做匀加速直线运动，作用时间 $t_1=0.500\ \mathrm{s}$，所以

$$a_1=\frac{F}{m}=7.50\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\quad s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2=0.938\ \mathrm{m}$$

靴子脱手之后，做匀速直线运动。根据动量定理，

$$F\Delta t=mv\ \Rightarrow\ v=3.75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$s_2=vt_2\ \Rightarrow\ t_2=6.42\ \mathrm{s}$$

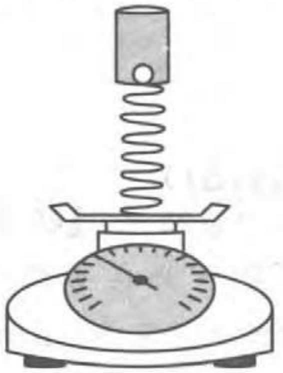
所以总共需要 6.42 s+0.50 s=6.92 s。

【3-24】 如图所示,弹性系数为 k,质量可忽略的弹簧竖立在台秤上,顶端放置一个质量可忽略的杯子。将一质量为 m 的小球轻轻放入杯中并使它静止在杯底处于平衡状态。(1) 画出球和弹簧各自的受力分析图。(2) 证明在这种情况下,弹簧被压缩 $d=mg/k$。(3) 这时台秤的读数为多少?

解 (1) 如图 3-2 所示。

(2) 杯子-球系统受两个外力:重力和弹簧的支持力,因此 $N=mg$,弹簧的弹力为 mg,所以 $d=mg/k$。

(3) 台秤支持力的反作用力为台秤受到的压力,大小与弹簧-杯-球系统受到的重力 mg 相等。台秤读数即为所受压力除以设定的 g,所以读数为 m。



(题 3-24 图)

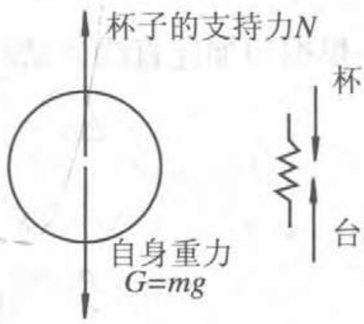


图 3-2

【3-25】 设轮胎与路面的静摩擦系数为 0.81。请问车能停在多陡的山路上?

解 如图 3-3 所示,对车进行受力分析,垂直于斜面方向,受到斜面的支持力:

$$N = mg\cos\theta$$

平行于斜面方向,重力沿斜面的分量为

$$f = mg\sin\theta$$

为了使车不下滑,斜面提供的摩擦力要大于重力沿斜面的分量,即

$$\mu N \geqslant f$$

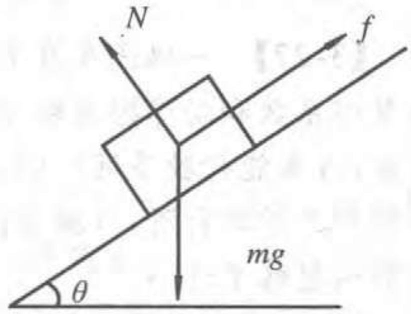


图 3-3

可解得

$$\theta \leqslant \arctan\mu = 39^\circ$$

【3-26】 为了确定一木块在水平桌面上的动摩擦系数,你推动木块给它一个沿桌面运动的初始速度,用跑表计时,测量在推动木块到木块完全静止之间所用时间 Δt 和所滑动的总位移 Δx。(1) 用牛顿定律和物块的受力分析图,来证明动摩

擦系数的表达式为 $\mu_k=\dfrac{2\Delta x}{g(\Delta t)^2}$。(2) 如果物块在 1.00 s 内滑动 1.40 m，求 μ_k。(3) 物块的初始速率为多少？

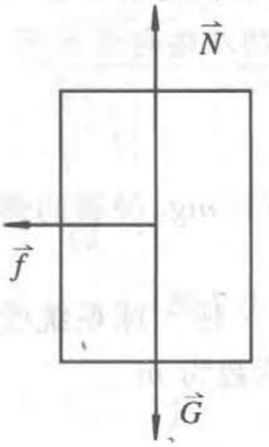


图 3-4

解 (1) 物体受到推动加速的过程可以忽略。减速滑行过程中受力分析如下：

由竖直方向受力平衡，得到

$$N=G=mg$$

由于物体受到的摩擦是滑动摩擦，所以

$$f=\mu_k N=\mu_k mg$$

由牛顿第二定律，物体加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\mu_k g$$

根据匀加速直线运动的规律，有

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\mu_k g(\Delta t)^2$$

化简得

$$\mu_k=\frac{2\Delta x}{g\,(\Delta t)^2}$$

(2) 代入数据，有 $\mu_k=0.286$。

(3) 由匀加速运动规律，得到

$$v=a\cdot\Delta t=\mu_k g\Delta t=2.80\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

【3-27】 一辆汽车在水平路面上以 $33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率行驶。路面和轮胎之间的静摩擦系数和动摩擦系数分别为 $\mu_s=0.52$ 和 $\mu_k=0.38$。以下情况中，在完全停止前，汽车能行驶多远？(1) 有防抱死制动系统(ABS)。(2) 无防抱死制动系统，使劲刹车时车打滑。(提示：打滑会加热轮胎，温度会改变摩擦系数。但在此处温度影响忽略不计。)

解 防抱死制动内容参见刘斌《力学》3.4.1 节。

(1) 有防抱死制动系统时，车轮与地面的摩擦力为最大静摩擦力，得到车的加速度为

$$a_1=\mu_s g$$

在停止之前，行驶距离为

$$s_1=\frac{v^2}{2a_1}=107\ \mathrm{m}$$

(2) 无防抱死制动系统时，车轮与地面的摩擦力为滑动摩擦力，得到车的加速

度为

$$a_2 = \mu_k g$$

在停止之前，行驶距离为

$$s_2 = \frac{v^2}{2a_2} = 146\ \mathrm{m}$$

【3-28】 汽车轮胎和水平路面的静摩擦系数为 0.58。(1) 刹车时，汽车的最大加速度为多少？(2) 如果在刹车前汽车行驶速率为 $33\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，那么汽车完全停止前所行驶的最短距离为多少？(忽略空气阻力和滚动摩擦。)

解 刹车时最大加速度

$$a = \frac{\mu mg}{m} = \mu g = 5.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

最短距离

$$s = \frac{v^2}{2a} = 96\ \mathrm{m}$$

【3-29】 一辆后轮驱动的汽车 45%的重量落在驱动轮上，汽车与水平路面之间的静摩擦系数为 0.69。(1) 给出汽车的最大加速度。(2) 汽车加速到 $100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 所需的最短时间为多少？(假设引擎可以提供的动力没有限制。)

解 (1) 刹车时，静摩擦力提供阻力使得汽车以加速度 a_{max} 减速：

$$f = ma_{max} = 45\%\mu mg$$

由此得到 $a_{max} = 3.04\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

(2) 汽车加速需要时间

$$t = \frac{\Delta v}{a} = 9.13\ \mathrm{s}$$

【3-30】 你用 300 N 的力沿水平方向以恒定速度拉地上一块质量为 80.0 kg 的木块。(1) 作图分析木块的受力情况。(2) 用牛顿定律确定木块受到的摩擦力大小。(3) 地面对木块的正压力多大？(4) 假设摩擦力不变，需要施加多大的水平方向上的力使得木块的加速度为 $1.50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$？在这一情况下，画图分析木块的受力情况。

解 由于以 300 N 的力拉物体时物体做匀速运动，故物体此时受力平衡。

(1) 受力分析如图 3-5 所示。

(2) 木块受到的摩擦力大小与拉力相等，$f = F = 300\ \mathrm{N}$。

(3) 木块受到的地面支持力与自身重力平衡，$N = G = mg = 784\ \mathrm{N}$。

(4) 如图 3-5 所示，当木块具有加速度 a 时，受到的合力为 $F' = ma = 120\ \mathrm{N}$，

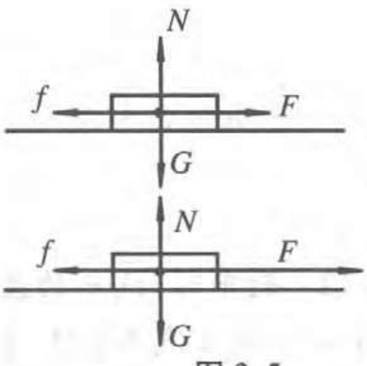


图 3-5

此合力是拉力和摩擦力的合力，对应的拉力应为 $F=f+F'=420\ \mathrm{N}$。

【3-31】 一本硬壳书静止在桌面上，封面向上。将一枚硬币放在封面上，慢慢地打开书，直到硬币开始下滑。角度 $\theta_{\max}$（称为休止角）是硬币刚开始下滑瞬间封面与水平方向的夹角。请用 $\theta_{\max}$ 表示书封面与硬币之间的静摩擦系数。

解 在硬币滑下的临界情况下，最大静摩擦力大小与硬币重力沿倾斜封面的分量相等，从而建立以下方程组：

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta_{\max} \\ f = \mu N \\ f = mg\sin\theta_{\max} \end{cases}$$

化简，得到 $\mu=\tan\theta_{\max}$。

【3-32】 一学生试图在胳膊下夹住一本物理课本。课本的质量为 2.5 kg，学生胳膊下方和课本之间的静摩擦系数为 0.330，书和学生衬衣之间的静摩擦系数为 0.150。(1) 学生最少需要对课本施加多大的水平方向上的力，才能使课本不会掉下来？(2) 如果学生只能用 35 N 的力，课本从胳膊下下滑的加速度为多少？（学生胳膊下方和课本之间的动摩擦系数为 0.180，书和学生衬衣之间的动摩擦系数为 0.080。）

解 (1) 设学生对书施加的水平方向的力的大小为 F，则在临界情况下，

$$0.330F + 0.150F = mg$$

解得 $F=51\ \mathrm{N}$。

(2) 若课本在下滑，且学生用力 35 N，则下滑加速度为

$$a = \frac{mg - 0.180F_1 - 0.080F_1}{m} = 6.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

【3-33】 三块质量均为 m 的相同物块叠放在水平桌面上，各接触面的摩擦系数均为 μ。有一水平方向从 0 不断增大的力作用在最下面的物块上。问该力达到多大时，最下面的物块会产生相对于上面两个物块的运动？

解 分别将木块编号为 A，B，C。A，B 间的最大摩擦力为 $F_{AB}=\mu mg$，所以

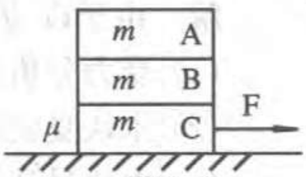


图 3-6

$$a_{A,\max} = \frac{F_{AB}}{m} = \mu g$$

B，C 间的最大摩擦力为 $F_{BC}=2\mu mg$，所以

$$a_{B,\max} = a_{A,\max} = \frac{F}{2m} = \mu g$$

C 和桌面间的最大摩擦力为 $F_C = 3\mu mg$,所以

$$a_{C,\max} = a_{A,\max} = \mu g$$

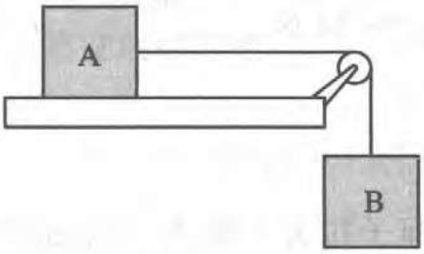
因此当 F 增加到 $3\mu mg$ 时,木块开始一起移动,且加速度满足

$$F - 3\mu mg = 3ma, \quad 即 \quad a = \frac{F}{3m} - \mu g$$

当 B,C 间的最大摩擦力小于 $2ma$ 时,B,C 间有相对滑动,得到

$$2\mu mg \leqslant 2ma \quad \Rightarrow \quad F \geqslant 6\mu mg$$

即当增加到 $6\mu mg$ 时,B,C 间开始有滑动摩擦。



(题 3-34 图)

【3-34】 一质量为 m_1 的物块 A 放在水平桌子上。一轻质细绳穿过桌子边缘的定滑轮,一端系在该物块上,另一端系在质量为 2.5 kg 的物块 B 上。物块 B 悬在离地面1.5 m高处(如图)。假设定滑轮无摩擦且质量可忽略。在 $t=0$ 时刻,该系统由静止释放,$t=0.82$ s 时,物块 B 落到地面上。再把系统重置回初始状态,一块 1.2 kg 的物块被放在物块 A 上,从静止释放。这一次 B 物块在 1.3 s 后落到地面上。计算物块 A 和桌子之间的动摩擦系数。

解 分析第一个过程,可得

$$\begin{cases} m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a_1 \\ \dfrac{1}{2} a_1 t_1^2 = h \end{cases}$$

同理分析第二个过程,有

$$\begin{cases} m_2 g - \mu (m_1 + m') g = (m_1 + m_2 + m') a_2 \\ \dfrac{1}{2} a_2 t_2^2 = h \end{cases}$$

代入数据 $m_2 = 2.5$ kg,$m' = 1.2$ kg,$t_1 = 0.82$ s,$t_2 = 1.3$ s,$h = 1.5$ m,得到

$$\mu \approx 0.67, \quad m_1 = 1.21 \text{ kg}$$

【3-35】 一质量为 10 kg 的雪橇受到静摩擦力,静止在倾角为 15°的斜面上。雪橇和斜面之间的静摩擦系数为 0.40。(1) 求雪橇受到的正压力。(2) 求雪橇受到的静摩擦力。(3) 一学生沿斜面向上以恒定速率拉动雪橇。他的质量为50 kg,对绳子的拉力为 50 N。绳子与斜面成 30°角且质量可忽略不计。求雪橇受到的动摩擦力大小。(4) 求雪橇和斜面之间的动摩擦系数。(5) 求斜面对该学生作用力

的大小。

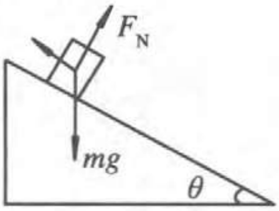


图 3-7

解 (1) 雪橇处于平衡状态(图 3-7),所以受到斜面的正压力与雪橇自身重力在垂直斜面方向上分量大小相等:$F_N = mg\cos\theta = 95\ \mathrm{N}$。

(2) 在沿斜面的方向上,受力平衡,所以静摩擦力 f 阻止雪橇下滑,方向沿斜面向上,大小为 $f = mg\sin\theta = 25\ \mathrm{N}$。

(3) 学生施加向上的拉力 F_T,雪橇受到的斜面正压力变为 $F'_N = mg\cos\theta - F_T\sin\theta' \approx 70\ \mathrm{N}$,其中 $\theta = 15°$,$\theta' = 30°$,而雪橇匀速运动,产生动摩擦力,雪橇沿斜面向上运动,动摩擦力方向与运动方向相反,沿斜面向下,大小满足平衡条件:

$$f_{动} + mg\sin\theta = F_T\cos\theta' \Rightarrow f_{动} \approx 18\ \mathrm{N}$$

(4) 雪橇和斜面间的动摩擦系数

$$\mu = \frac{f_{动}}{F'_N} = 0.26$$

(5) 由于学生做匀速直线运动,所以受力平衡(绳子拉力 + 重力 + 斜面作用力),将斜面作用力 F'分解到沿斜面和垂直斜面的方向。

垂直斜面:

$$F_{\perp} = m'g\cos 15° + F_T\sin 30° = 498\ \mathrm{N}$$

沿斜面:

$$F_{/\!/} = m'g\sin 15° + F_T\cos 30° = 170\ \mathrm{N}$$

忽略学生与斜面间的动摩擦力,可以得到斜面对雪橇的作用力大小为

$$F' = \sqrt{F_{/\!/}^2 + F_{\perp}^2} = 526\ \mathrm{N}$$

【3-36】 一纸箱放在与水平面成 20.0°角的斜面上,两者之间的动摩擦系数为 0.15。(1) 请问纸箱下滑的加速度为多大?(2) 如果纸箱从离斜面底部 10.0 m 远的地方下滑,请问当纸箱到达斜面底部时的速度为多大?(3) 如果纸箱从斜面底部以 $3.6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的初速度沿斜面上滑,请问能滑多高?(4) 如果忽略摩擦力,请问在(3) 的条件下中纸箱需要多久能回到出发点?

解 (1) 如图 3-8 建立坐标系,纸箱下滑,受到的摩擦力为动摩擦力,而且方向与运动方向相反,沿斜面向上。根据雪橇的受力平衡,建立方程组:

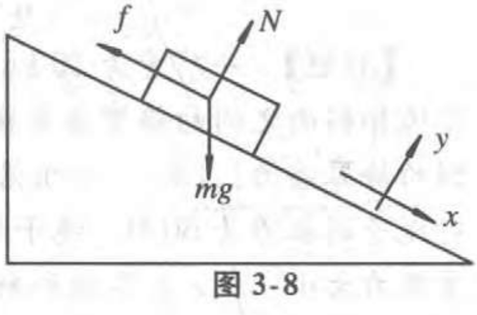


图 3-8

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ f = \mu N \\ ma_x = mg\sin\theta - f \end{cases}$$

解得

$$a_x = g\sin\theta - \mu g\cos\theta = 2.0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

(2) 纸箱下滑到斜面底部,速度满足

$$v^2 - 0^2 = 2a_x s$$

代入数据,得到纸箱在斜面底部的速度大小为

$$v = \sqrt{2a_x s} = 6.3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(3) 纸箱沿斜面向上运动,受到的摩擦力为方向沿斜面向下的动摩擦力。沿斜面建立运动方程:

$$ma'_x = mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$

代入数值,得到纸箱沿斜面的加速度

$$a_x = g\sin\theta + \mu g\cos\theta = 4.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

已知初始速度和终止速度以及加速度,可以得到纸箱在斜面上滑行距离满足

$$0 - v^2 = 2a'_x s'$$

可以计算得到 $s' = -1.4$ m。上滑高度为 $h = s'\sin\theta = 0.47$ m。

(4) 如果忽略摩擦力,那么纸箱沿斜面的加速度满足

$$ma''_x = mg\sin\theta$$

纸箱回到出发点所需时间为

$$t = \frac{2v}{a''_x} = 2.1\ \mathrm{s}$$

【3-37】 质量为 m 的木块以初始速度 v_0 沿一倾角为 θ 的斜面向上滑动距离 d 之后静止。请给出木块与斜面之间的动摩擦系数的表达式。你能确定两者之间静摩擦系数的大小吗?

解 由能量关系

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgd\sin\theta + \mu mgd\cos\theta$$

可以解得动摩擦力

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - mgd \cdot \sin\theta}{mgd \cdot \cos\theta} = \frac{v_0^2 - 2gd\sin\theta}{2gd\cos\theta}$$

一般情况下,静摩擦系数和动摩擦系数不同。在静止情况下,静摩擦力可以为0到

最大静摩擦力之间的任意值，所以不能确定静摩擦系数的大小。

【3-38】 一物块以初速率 $1.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿与水平面成 30° 角的斜面向上运动，摩擦系数为 $\sqrt{3}/12$。请确定 0.5 s 后物块距初始位置的距离。

解 物块在斜面上滑动时，受到竖直向下的重力、垂直斜面向上的支持力和与滑动方向相反的摩擦力。

初态，物块向上滑动，摩擦力沿斜面向下，则加速度为

$$a_1 = g\sin\theta + \mu g\cos\theta = 6.1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

所以向上滑动速度减至 0 的时间为

$$t_1 = \frac{v}{a_1} = 0.24\ \mathrm{s} < 0.5\ \mathrm{s}$$

因此滑块速度会减至 0，随后加速下滑。刚开始下滑时，滑块到初始位置的距离为

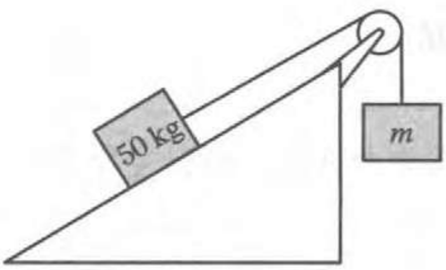
$$x_1 = \frac{v^2}{2a_1} = 0.18\ \mathrm{m}$$

下滑时的加速度为

$$a_2 = g\sin\theta - \mu g\cos\theta = 3.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

所以经历 $t_2 = 0.5\ \mathrm{s} - t_1$，物块的位置为

$$x = x_1 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = 6 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$



(题 3-39 图)

【3-39】 如图，一质量为 50 kg 的物块置于一斜面上，并通过一根细线与另一个质量为 m 的物块相连。物块和斜面之间的静摩擦系数和动摩擦系数分别为 $\mu_s = 0.38$ 和 $\mu_k = 0.21$，斜面与水平面成 20° 角。(1) 给出能使得 50 kg 的物块保持静止，但当受到扰动会沿斜面下滑的 m 的取值范围。(2) 给出能使得 50 kg 的物块保持静止，但当受到扰动会沿斜面上滑的 m 的取值范围。○

解 (1) 要使 $M = 50\ \mathrm{kg}$ 的物体保持静止，且受微扰会下滑，应使静摩擦力方向沿斜面向上且大小介于 $\mu_k N$ 与 $\mu_s N$ 之间。有

$$N = Mg\cos\theta, \quad T + f = Mg\sin\theta$$

其中 $T = mg$，$\mu_k N < f \leqslant \mu_s N$。所以得

$$m < M\cos\theta(\tan\theta - \mu_k) = 7.2\ \mathrm{kg}$$

$$m \geqslant M\cos\theta(\tan\theta - \mu_s) = -0.75\ \mathrm{kg}$$

即 $0\ \mathrm{kg} \leqslant m < 7.2\ \mathrm{kg}$。

(2) 此时摩擦力方向应沿斜面向下。有

$$N = Mg\cos\theta, \quad T = Mg\sin\theta + f$$

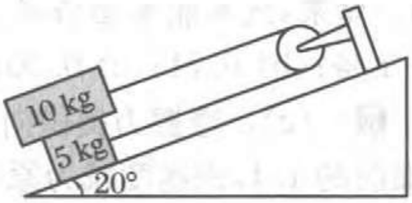
其中 $T = mg$，$\mu_k N < f \leqslant \mu_s N$。所以得

$$m \leqslant M\cos\theta(\tan\theta + \mu_s) \approx 35\ \mathrm{kg}$$

$$m > M\cos\theta(\tan\theta + \mu_k) \approx 27\ \mathrm{kg}$$

即 27 kg$<m\leqslant$35 kg。

【3-40】 如图所示，在一个 20°的斜面上，一个质量为 10 kg 的物块在另一个质量为 5.0 kg的物块上下滑。所有表面都是光滑的，滑轮质量和摩擦也可以忽略。(1) 给出每个物块的加速度；(2) 给出连接物块的细绳上的张力。



(题 3-40 图)

解 先对大木块受力分析，有

$$m_1 g\sin\theta - T = m_1 a$$

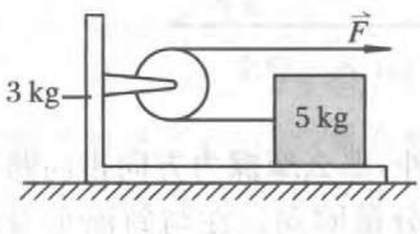
其中大木块的质量为 $m_1 = 10$ kg，T 为绳子的张力大小，斜面与水平方向成 $\theta = 20°$ 角，a 为大木块的加速度大小，方向沿斜面向下。

对于小木块，有

$$T - m_2 g\sin\theta = m_2 a$$

其中小木块的质量为 $m_2 = 5$ kg，加速度大小与大木块相等，方向沿斜面向上。解得

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g\sin\theta}{m_1 + m_2} = 1.1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad T = m_2 g\sin\theta + m_2 a = 22\ \mathrm{N}$$



(题 3-41 图)

【3-41】 如图所示，一质量为 5.0 kg 的物块静止在质量为 3.0 kg 的托架上。托架静止在光滑表面上。物块和托架之间的静摩擦系数和动摩擦系数分别为 $\mu_s = 0.38$ 和 $\mu_k = 0.28$。(1) 要使物块在托架上不打滑，最大施力 F 为多大？(2) 对应的托架的加速度为多少？

解 (1) 设满足要求的最大的拉力为 F。

对于整体，

$$F = (m + M)a$$

对于物块，

$$f - F = ma$$

由以上两式，解得

$$\begin{cases} F = \dfrac{m+M}{2m+M} f \quad \Rightarrow \quad F = 11\ \mathrm{N} \\ f = \mu_s mg \end{cases}$$

(2) 托架的加速度为

$$a = \frac{F}{M+m} = 1.4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

【3-42】 在结冰的冬日,汽车车胎和路面之间的摩擦系数降低为干燥时的1/4。结果,汽车能安全沿半径为 R 的弯道行驶的最大速率应为干燥时的(　)。(a) 1 倍;(b) 0.71;(c) 0.50;(d) 0.25;(e) 取决于汽车的质量。

解 (c)。摩擦力提供向心力,向心力大小为 mv^2/r,摩擦力的最大值减小为干燥时的 1/4,则速度减为原来的 0.50。

【3-43】 在工程实习中,你被要求设计公路中的一段弯道,需要满足下列条件:当路上有冰时,路面和橡胶之间的静摩擦系数为 0.080,行驶速率低于 60 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的汽车不会打滑到弯曲路面之外,静止的汽车不会滑到沟里。忽略空气阻力和滚动摩擦,请问弯道对应的最小半径为多大?路面倾角最大为多少?

解 如图 3-9 所示,考虑两种情况:摩擦力向下和摩擦力向上。向心力由行驶速率决定;分析摩擦力 f、斜面支持力 N 和物体重力 mg,三力的合力提供向心力。

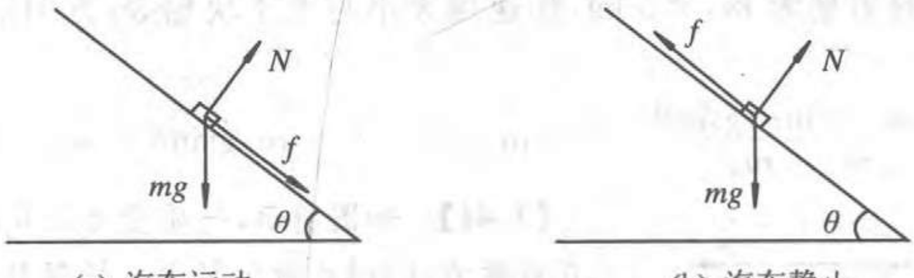


图 3-9

(a) 行驶速度为 60 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的车不打滑到路面之外,那么摩擦力方向指向路面内侧。在沿斜面方向上,摩擦力与重力沿斜面方向的分量同向。在与斜面垂直的方向上,受到斜面正压力和重力与斜面垂直方向的分量。建立方程组:

$$\begin{cases} N = \dfrac{mv^2 \sin\theta}{R} + mg\cos\theta \\ f + mg\sin\theta = \dfrac{mv^2\cos\theta}{R} \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

解得

$$R \geqslant \frac{v^2(1-\mu\tan\theta)}{(\mu+\tan\theta)g}$$

(b) 在汽车静止情况下，建立平衡方程组：

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ f = mg\sin\theta \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

解得

$$\tan\theta \leqslant \mu$$

综上，可得

$$\theta \leqslant 4.6°, \quad R \geqslant \frac{v^2(1-\mu\tan\theta)}{g(\tan\theta+\mu)} = 176\ \mathrm{m}$$

即弯道最小半径为 176 m，路面最大倾角为4.6°。

【3-44】 一名跳伞员的质量为 64.0 kg，当手脚伸展开时他的终极下降速率为 $180\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。(1) 试求跳伞员受到的向上拖曳力 F？(2) 如果 $F=bv^2$，其中 v 为下降速率，那么 b 为何值？

解 (1) 达到终极下降速率时，跳伞运动员受力平衡，所以拖曳力等于重力，

$$F = mg = 627\ \mathrm{N}$$

(2) 根据 $F=bv^2$，有

$$b = \frac{F}{v^2} = 0.251\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$$

【3-45】 在(1) $n=1$，或者(2) $n=2$ 的情况下，用量纲分析，推断下落物体受到的空气阻力 bv^n 中 b 的单位和量纲，v 为物体速度。(3) 牛顿证明横截面为圆形的下落物体受到的空气阻力大致为 $\rho\pi r^2 v^2/2$，ρ 为空气的密度，r 为圆的半径。证明这一结果和(2)的量纲分析结果是一致的。(4) 试求一名质量为 60.0 kg 的跳伞员的终极速率；他的横截面积大致相当于一个半径为 0.32 m 的圆盘。地球表面的空气密度约为 $1.20\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$。(5) 大气密度随高度增加而减小。在 8.0 km 高处，密度仅为$0.514\ \mathrm{kg\cdot cm^{-3}}$。求在这个高度上下落物体的终极速率。

解 易知 $f=-bv^n$。

(1) 当 $n=1$ 时，

$$f = -bv, \quad [v] = \mathrm{LT^{-1}}, \quad [f] = \mathrm{LMT^{-2}}$$

故 b 的单位为 $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$，量纲为 $\mathrm{MT^{-1}}$。

(2) 当 $n=2$ 时，$f=-bv^2$，故 b 的单位为 $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$，量纲为 $\mathrm{L^{-1}M}$。

(3) 因为

$$f = -\frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^2, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [r] = L$$

故 $-\rho\pi r^2/2$ 的量纲为 ML^{-1},与(2)中分析的结果一致。

(4) 当达到终极速率时,跳伞员所受到的合力为0,即

$$mg - \frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^2 = 0$$

代入 $m = 60.0\ \mathrm{kg}, g = 9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \rho = 1.20\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}, r = 0.32\ \mathrm{m}$,解得

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\pi r^2}} = 55.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

所以跳伞员的终极速率为 $55.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(5) 将(4)中的 ρ 代以 $0.514\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$,解得 $v = 84.3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,所以在这个高度上下落物体的终极速率为 $84.3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

【3-46】 一质量为 9.00 kg 的物体在黏滞介质中从静止开始下落,受到阻力为 $\vec{F} = -b\,\vec{v}$,其中 $\vec{v}$ 是物体的速度。物体在 5.00 s 时达到它的终极速率的一半。(1) 计算终极速率。(2) 在什么时间,物体的速率为终极速率的3/4? (3) 物体在最初 5.00 s 内运动了多远? ☆

解 加速度 a、速度 v、位移 s 之间存在对时间求积或求导的关系。以向下为正方向,总受力 $F = mg - bv$,可以得到

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - bv$$

求解,得到

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

且满足边界条件($t = 0.00$ s 时,$v = 0.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$)。

(1) 终极速度 $v_{\max}$ 为 t 趋向于无穷大时的值,即

$$v_{\max} = \frac{mg}{b}$$

当 $t = 5.00$ s 时,

$$v = \frac{1}{2}v_{\max}$$

可以得到

$$\left.\frac{mg}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}\right)\right|_{t=5.00\ \mathrm{s}} = \frac{1}{2}\frac{mg}{b}$$

从而得到

$$b = \frac{m}{5}\ln 2 = \frac{9}{5}\ln 2 = 1.25\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

终级速度为

$$v = \frac{5g}{\ln 2} = 70.7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 当 $v = 3v_{\max}/4$ 时，可以得到 $t = 10\ \mathrm{s}$。

(3) 在最初 5.00 s 内的路程为

$$s = \int_0^5 v\mathrm{d}t = \frac{mg}{b}\int_0^5 (1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t})\mathrm{d}t = \frac{mg}{b}\left(5 + \frac{m}{b}\mathrm{e}^{-\frac{5b}{m}} - \frac{m}{b}\right)$$

其中，$\mathrm{e}^{-\frac{5b}{m}} = 1/2$，所以

$$s = \frac{mg}{b}\left(5 - \frac{1}{2}\frac{m}{b}\right) = 98.5\ \mathrm{m}$$

即为物体在最初 5.00 s 运动距离。

【3-47】 表达式 $F = arv + br^2v^2$ 给出了流速为 v(单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)的气流提供的阻力(单位为 N)大小，其中 a 和 b 是具有合适的 SI 单位的常数，数值分别为 $a = 3.08 \times 10^{-4}$，$b = 0.850$。利用这个表达式，求水滴在空气中受到自身的重力而下落的终极速率。水滴半径分别为：(1) 1.00 mm；(2) 100 μm；(3) 10.0 μm。在(1)和(3)中，考虑空气阻力的两部分中哪个是主要的，可以忽略另一个次要的，这样不用解二次方程就能得到正确解。请试一下。

解 本题要建立一元二次方程，在求解中，忽略其中的一次项或者二次项，能大大降低运算的复杂性。

当雨滴达到终极速度时，利用平衡条件 $F = mg$，其中

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\rho_{水}\pi R^3$$

(1) 当 $r = 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$ 时，阻力 $F = arv + br^2v^2$ 中的第一部分较小，可以舍去，从而

$$bv^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_{水}gr \quad \Rightarrow \quad v \approx 6.95\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 两部分相差不大，不可以省略，即

$$arv + br^2v^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_{水}gr^3$$

解方程得 $v \approx 1.04\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

(3) 第一部分为主要部分，省略第二部分，解之得 $v \approx 1.33\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

【3-48】 竖直上抛一小球，初速度大小为 v_0。若空气阻力与速率的平方成正

比,试证明:小球回到初始位置时的速率为 $v_0 v_f/\sqrt{v_0^2+v_f^2}$,其中 v_f是终极速率。☆

解 本题需建立运动微分方程,其中要注意阻力方向在向上和向下运动过程中发生反向变化。在求解微分方程的过程中,需要灵活运用 a,v,s 之间的微积分变换。例如

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

以抛出点为原点、方向向上建立 x 轴。当小球向上运动时,运动方程为

$$\ddot{x}=-g-k\dot{x}^2$$

因为

$$v=\dot{x},\quad \ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(g+kv^2)$$

从而运动方程可以化为

$$\int\frac{\mathrm{d}v^2}{g+kv^2}=-\int 2\mathrm{d}x$$

到达最高点 $x=x_{\max}$时,$v=0$,即

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g}{g+kv_0^2}=-2x_{\max} \tag{1}$$

当小球向下运动时,运动方程为

$$\ddot{x}=-g+k\dot{x}^2 \quad\Rightarrow\quad -\int\frac{\mathrm{d}v^2}{g-kv^2}=\int 2\mathrm{d}x$$

回到初始位置 $x=0$ 时,速率为 v,即

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g-kv^2}{g}=-2x_{\max} \tag{2}$$

由式(1)和式(2),化简得到

$$v=\frac{v_0\sqrt{g}}{\sqrt{g+kv_0^2}}$$

在小球向下运动过程中,当重力与阻力平衡时,速率不再变化,此时速率为极限速率:

$$-g+kv_f^2=\ddot{x}=0$$

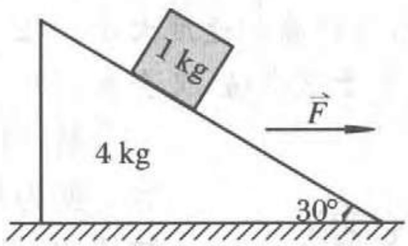
从而得到极限速率为

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

小球回到初始位置时的速率为

$$v = \frac{v_0 \sqrt{g}}{\sqrt{g + kv_0^2}} = \frac{v_0 v_f}{\sqrt{v_0^2 + v_f^2}}$$

【3-49】 如图所示,质量为 1.0 kg 的物块静止在质量为 4.0 kg 的楔状物的斜面上。楔状物受到水平拉力 $\vec{F}$ 沿无摩擦的表面滑动。(1) 如果楔状物和物块之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.72$,楔状物斜面与水平方向成 30°角,那么能保证物块不会相对于楔状物移动的拉力的最大值和最小值分别为多少? (2) 当 $\mu_s = 0.36$ 时,重求(1)。



(题 3-49 图)

解 (1) 在物块有下滑趋势时,摩擦力方向沿斜面向上;物块有上滑趋势时,摩擦力方向沿斜面向下。针对不同情况,拉力大小会有不同。

设整体加速度为 a,则有

$$F = (M + m)a$$

在向左以加速度 a 做加速的非惯性系中考察物块 m 的受力(图 3-10)。

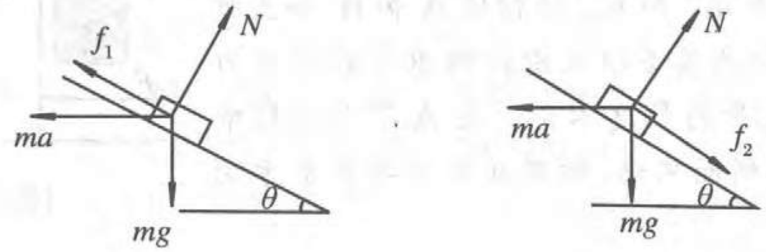


图 3-10

(a) 摩擦力为 f_1,沿斜面向上,大小为 μN,

$$f_1 + ma\cos\theta - mg\sin\theta = 0$$
$$N - mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0$$

可解得

$$F = (M + m)g(\sin\theta - \mu\cos\theta)/(\cos\theta + \mu\sin\theta)$$

(b) 摩擦力为 f_2,沿斜面向下,大小为 μN,

$$-f_2 + ma\cos\theta - mg\sin\theta = 0$$

$$N - mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0$$

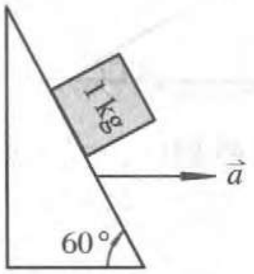
可解得

$$F = (M + m)g(\sin\theta + \mu\cos\theta)/(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

代入条件 $\mu = 0.72, \theta = 30°$,得 $-4.9\text{ N} \leqslant F \leqslant 109\text{ N}$。

(2) 由 $\mu = 0.36, \theta = 30°$,得 $8.8\text{ N} \leqslant F \leqslant 58\text{ N}$。

【3-50】 一个质量为 1.0 kg 的物块放置在无摩擦的木楔上,木楔的倾角为 60°,加速度为 $\vec{a}$,方向向右,物块相对于木楔静止(如图)。(1) 作物块的受力分析图,并计算加速度大小。(2) 如果木楔的加速度大于这个值,会发生什么情况?如果小于这个值,又会如何?



(题 3-50 图)

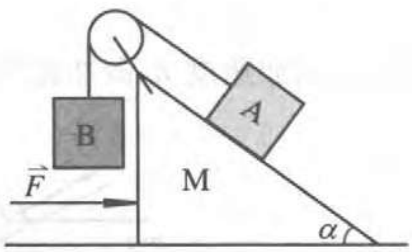
解 (1) 物块相对于木楔不动,即物体与木楔的加速度一致。换为木楔系,则物块受到水平向左的惯性力 F_i。设木楔对物块的支持力的大小为 N,于是

$$\begin{cases} N\sin 60° = ma \\ N\cos 60° = mg \end{cases}$$

所以 $a = g\tan 60° = \sqrt{3}g$。

(2) 若加速度大于这个值,则物块将相对于斜面向上滑动;若加速度小于这个值,物块将相对于斜面向下滑动。

【3-51】 一质量为 M 的光滑斜面放在光滑水平面上,斜面的顶端装一滑轮,一条细绳跨过滑轮拴着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B,如图所示。设绳子和滑轮的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计,绳子的长度不变。在 A 下滑过程中欲使质量为 M 的斜面不动,作用在其上的水平方向的力 $\vec{F}$ 需要多大?



(题 3-51 图)

解 要使 M 不动,F 与滑轮和 A 对 M 的合力的水平分量需相等。

B 和 A 的加速度 a 相等,得到

$$a = \frac{m_1 g\sin\alpha - T}{m_1} = \frac{T - m_2 g}{m_2}$$

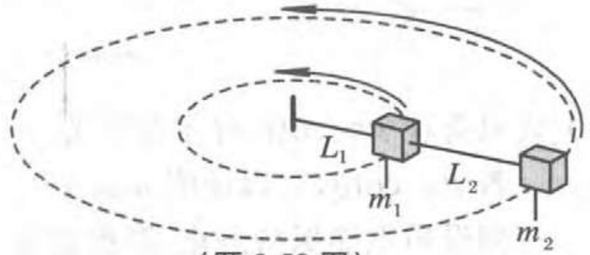
M 受到的水平方向上的力为 0,

$$F + T\cos\alpha = N_1\sin\alpha = m_1 g\cos\alpha\sin\alpha$$

化简,得到

$$F=\frac{m_1g\cos\alpha(m_1\sin\alpha-m_2)}{m_1+m_2}$$

【3-52】 质量为 m_1 的物块被系在一端固定长度为 L_1 的细线上。物块在无摩擦桌面上做水平圆周运动。质量为 m_2 的物块被长为 L_2 的细线连接在第一个物块上，并在同一无摩擦桌面上沿圆周运动，如图所示。如果运动的周期为 T，试给出每段细线上的张力。



（题 3-52 图）

解 设细线1的长度为 L_1，张力为 T_1；细线2的长度为 L_2，张力为 T_2。对于物块2，细线2中的张力提供它的向心加速度，即

$$T_2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(L_1+L_2)m_2$$

对物块1，细线1和细线2中的张力差提供它的向心加速度，即

$$T_1-T_2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2L_1m_1$$

化简得到

$$T_1=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(L_1+L_2)m_2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2L_1m_1$$

【3-53】 有一顶角为 $2\theta(\theta>45^\circ)$ 的圆锥面，顶点朝下以恒定角速度 ω 绕对称轴转动。在其内表面上距转轴 r 处有一质点，质点与圆锥面间的摩擦系数为 μ。问要使该质点相对圆锥面静止，ω 应具有什么值？☆

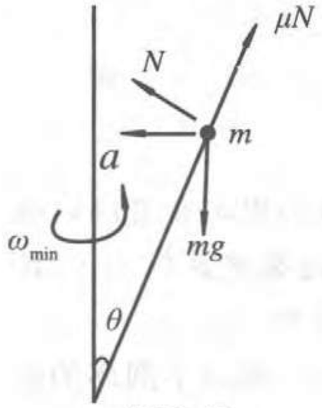


图 3-11

解 质点在圆锥面上相对静止，可以有上滑或者下滑的趋势，从而质点与圆锥面间的摩擦力方向也不同。当圆锥面转速偏小时，质点有下滑趋势，转速偏大时，质点有上滑趋势。

先求圆锥面转速最小的情况。

设质点质量为 m，锥面的支持力为 N。此时锥面作用于质点的摩擦力为最大静摩擦力 μN，方向沿锥面向上，质点受力和加速度如图 3-11 所示，其中加速度为

$$a=mr\omega_{\min}^2$$

且有

$$N\sin\theta+\mu N\cos\theta-mg=0$$

$$mr\omega_{\min}^2 = N\cos\theta - \mu N\sin\theta$$

解得

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\theta - \mu\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}}$$

上式只有在 $\mu \leqslant \cot\theta$ 时才有意义。

若 $\mu \geqslant \cot\theta$，可以证明 $\omega_{\min}=0$。证明如下：

假设质点能保持静止，摩擦力为 f，则

$$N\sin\theta + f\cos\theta - mg = 0$$

$$N\cos\theta - f\sin\theta = 0$$

解得

$$f = mg\cos\theta, \quad N = mg\sin\theta$$

因为 $\mu N \geqslant N\cot\theta = mg\cos\theta = f$，所需的摩擦力小于最大静摩擦，所以能保持静止。

再求 $\omega_{\max}$，摩擦力仍为最大静摩擦力，但是方向沿锥面向下。同理，可得

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\theta + \mu\sin\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta}}$$

上式只有在 $\mu < \tan\theta$ 时才有意义。证明略。

当 $\theta > 45°$ 时，$\tan\theta > \cot\theta$，因为 $\mu < 1$，所以 μ 的取值范围为

$$\cot\theta \leqslant \mu < \tan\theta, \quad \mu < \cot\theta$$

当 $\mu < \cot\theta$ 时，

$$\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\theta - \mu\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}} \leqslant \omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\theta + \mu\sin\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta}}$$

当 $\mu \geqslant \cot\theta$（μ 必然小于 $\tan\theta$）时，

$$0 \leqslant \omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\theta + \mu\sin\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta}}$$

【3-54】 圆杆上套一质量为 m 的小圆环，圆杆绕通过底端的固定竖直轴以恒定角速度旋转，圆杆与竖直轴的夹角为 θ，小圆环与圆杆之间的摩擦系数为 μ，请以小圆环到圆杆固定端距离 x 为变量写出小圆环的运动微分方程。☆

解 取圆杆为参考系，圆杆为转动参考系。在这个参考系中，画出小圆环的受力分析图（图 3-12）。图中，N_1 和 N_2 是杆对小环支持力的两个分量，N_2（未画出）垂直纸面向里。杆对小环的摩擦力为 μN，$N=\sqrt{N_1^2+N_2^2}$（未标出），方向与 $\dot{x}$ 的正负值有关，当 $\dot{x}>0$ 时，沿杆向下，当 $\dot{x}<0$ 时，沿杆向上。mg 是重力，$m\omega^2 x\sin\alpha$ 是惯性力。还有一个科里奥利力也是惯性力，$2m\omega\dot{x}\sin\alpha$，垂直纸面向外为正（未标

出)。根据受力分析情况,建立运动微分方程:

$$m\ddot{x}=\begin{cases}-mg\cos\alpha-\mu N+m\omega^{2}x\sin^{2}\alpha, & \dot{x}>0\\ -mg\cos\alpha+\mu N+m\omega^{2}x\sin^{2}\alpha, & \dot{x}<0\end{cases}$$

$$N_1=mg\sin\alpha+m\omega^{2}x\sin\alpha\cos\alpha$$

$$N_2=2m\omega\dot{x}\sin\alpha$$

$$N=\sqrt{N_1^2+N_2^2}$$

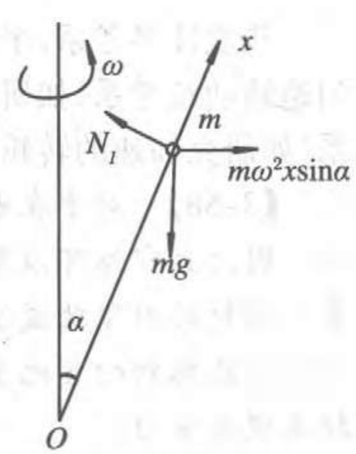


图 3-12

【3-55】 铅锤静止悬挂时并不完全指向地球的中心。在北纬32.0°处,铅锤偏离径向线多少?(假设地球是球形的。)☆

解 设铅锤偏离径向的角度为 α,取相对地球静止的转动参考系(图3-13),$\theta=32°$。铅锤所受的万有引力大小为

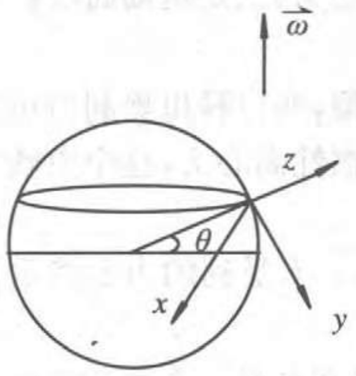


图 3-13

$$F_1=\frac{GMm}{R^2}=mg$$

转动参考系中的惯性离心力大小为

$$F_2=m\omega^2R\cos\theta$$

由几何关系,可知

$$\frac{\sin\alpha}{F_2}=\frac{\sin\theta}{F}$$

其中 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$,$\vec{F}_1\gg\vec{F}_2$,则 $\vec{F}\approx\vec{F}_1$,代入解得 $\alpha=0.17°$。

【3-56】 如果地球自转速度快到可以使赤道上的物体处于失重状态,那么地球上的一天有多长?

解 由于赤道上的物体随地球自转的向心力全部由地球的引力提供,所以有下式:

$$g=R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

其中 g 应为物体的重力加速度,大小近似为 $9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,$R=6\,378\ \mathrm{km}$ 为地球赤道半径。计算得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=5.07\times10^3\ \mathrm{s}\quad(约84\ \mathrm{min})$$

【3-57】 列举你所知道的不同类型的参照系,并举例说明它们分别适用于哪些物理问题。○

解 惯性参考系:静止或匀速运动。

非惯性参考系：平动加速参考系（如研究加速运动的火车内部的动力学问题）、匀速转动参考系（如研究考虑地球自转时的运动尺度较大的问题）、加速转动参考系（如研究加速的转轮上的动力学问题）……

【3-58】 对于在太空站中长期生活的宇航员，长期失重会对健康造成不利影响。因此太空站可以制造成圆筒状，通过绕圆筒中轴的转动，产生类似重力的效果。圆筒的内壁就成了"地板"。请通过对在这样一个太空站中物体下落、人步行以及你能想到的其他重力效应与真实重力效应的比较，来阐述为什么可以通过旋转来模拟重力。

解 以圆筒参考系来观察，假设圆筒半径足够大，而角速度比较小，可以得到以下结论：

物体在此参考系中受到的惯性力有两个：一是惯性离心力；二是运动时会产生科里奥利力。

由于我们假设角速度较小，且人和物体的运动速度有限，所以科里奥利力可忽略不计。而半径足够大，所以人和物体会受到一定大小的惯性离心力，这个力就可以充当重力的作用。

仅在惯性离心力作用下，物体将垂直于圆筒内壁下落。人受到的力也将垂直于圆筒内壁，与重力相当。

【3-59】 一列火车以均匀速率沿一半径为 250 m 的圆周行驶。车内天花板上悬挂着一盏吊灯，灯绳和垂直方向成 18.0°角。请给出火车的行驶速度。

解 对吊灯受力分析，得到

$$ma = mg\tan\theta$$

因为 $a = v^2/r$，所以

$$v = \sqrt{gr\tan\theta} \approx 28.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

即火车行驶速度为 $28.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

【3-60】 水平转盘由静止开始启动，角加速度为 $0.04\pi\ \mathrm{s^{-2}}$。一学生坐在转盘上距转轴 6 m 远的座位上，手里握着一个质量 1.0 kg 的球。试求在转盘启动后 5 s 时，学生为握住球必须施加在球上的力的大小和方向。○

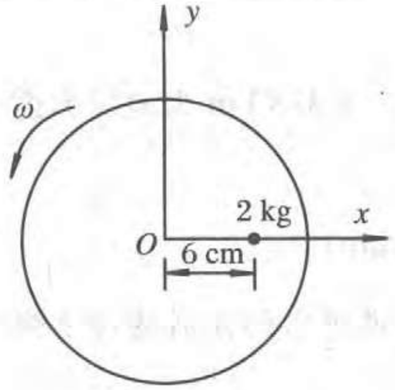


图 3-14

解 取固连在转盘上的直角坐标系，如图 3-14 所示，z 轴竖直向上，用转动参考系，

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\omega^2\vec{r} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

已知：$\vec{a}=\vec{0},\vec{v}=\vec{0}$，所以

$$\dot{\vec{\omega}}=0.04\pi\vec{e}_z\,\mathrm{s}^{-2},\quad \vec{\omega}=0.04\pi\times5\vec{e}_z=0.2\pi\vec{e}_z\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\vec{r}=6\vec{e}_x\,\mathrm{m},\quad \vec{F}=\vec{f}+m\vec{g}=\vec{f}-1\times9.8\vec{e}_z\,\mathrm{N}$$

其中$\vec{f}$是学生给球的作用力，

$$\vec{f}-1\times9.8\vec{e}_z+1\times(0.2\pi)^2\times6\vec{e}_x-1\times0.04\pi\vec{e}_z\times6\vec{e}_x=\vec{0}$$

$$\vec{f}=-2.37\vec{e}_x+0.75\vec{e}_y+9.8\vec{e}_z\,\mathrm{N}$$

$$|\vec{f}|=10.1\,\mathrm{N}$$

方向为$(-0.234\vec{e}_x+0.075\vec{e}_y+0.969\vec{e}_z)$。

【3-61】 试导出平面情况下科里奥利力的表达式$\vec{F}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$。☆

解 设非惯性系S'以角速度ω绕惯性系S的z轴匀速旋转，两坐标系的原点O'和O重合，z'轴和z轴重合，且两系的时间度量相同，即$t=t'$。取S系的Oxy平面与S'系的$O'x'y'$平面，有$r=r',\theta=\theta'+\omega t$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}+\omega,\quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2}$$

在某时刻，径向、横向单位矢量之间的关系为

$$\vec{e}_r=\vec{e}_r{}',\quad \vec{e}_\theta=\vec{e}_\theta{}'$$

质点在S'系的速度、加速度分量式为

$$v'_r=\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t},\quad v'_\theta=r'\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}$$

$$a'_r=\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}t^2}-r'\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad a'_\theta=r'\frac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}$$

质点在S系的径向加速度矢量可以写成

$$\begin{aligned}\vec{a}_r&=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_r=\left[\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}t^2}-r'\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}+\omega\right)^2\right]\vec{e}\,'_r\\&=\vec{a}\,'_r-2\vec{v}\,'_\theta\times\vec{\omega}-\omega^2\vec{r}\,'\end{aligned}$$

假设质点质量为m，则有

$$m\vec{a}\,'_r=m\vec{a}_r+m\omega^2\vec{r}\,'+2m\vec{v}\,'_\theta\times\vec{\omega}$$

质点在S系的横向加速度矢量可以写成

$$\vec{a}_\theta=\left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta=\left[r'\cdot\frac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}+\omega\right)\right]\vec{e}_\theta{}'$$

$$= \vec{a}\,'_\theta - 2\vec{v}\,'_r \times \vec{\omega}$$

所以有 $m\vec{a}\,'_\theta = m\vec{a}_\theta + 2m\vec{v}\,'_r \times \vec{\omega}$。综合考虑后，有

$$m(\vec{a}\,'_r + \vec{a}\,'_\theta) = m(\vec{a}_r + \vec{a}_\theta) + m\omega^2 \vec{r}\,' + 2m(\vec{v}\,'_r + \vec{v}\,'_\theta) \times \vec{\omega}$$

质点在 S 系中所受的真实的力 $F = m(\vec{a}_r + \vec{a}_\theta) = m\vec{a}$。

在 S' 系中需要引入两个力使牛顿第二定律形式上不变，即

$$\vec{F}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{离} + \vec{F}_C = m(\vec{a}\,'_r + \vec{a}\,'_\theta) = m\vec{a}\,'$$

所以有

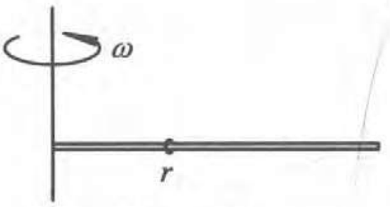
$$\vec{F}_{离} = m\omega^2 \vec{r}\,'$$

$$\vec{F}_C = 2m(\vec{v}\,'_r + \vec{v}\,'_\theta) \times \vec{\omega} = 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}$$

分别为惯性离心力和科里奥利力。

【3-62】 质量为 m 的小圆环套在一光滑圆杆上，圆杆绕垂直轴在水平面内以角速度 ω 转动，小圆环以速度 v_0 自转轴处沿圆杆向外运动。试求小圆环到达距转轴 r 处时的速度大小 v 以及这时圆杆对小圆环的作用力。☆

解 圆环受力如图 3-15 所示，受杆对它向上的支持力 N（与所受重力 mg 相抵），沿杆方向受离心力 $m\omega^2 r$，垂直于杆和转轴方向上受杆对圆环的推力 T。



（题 3-62）

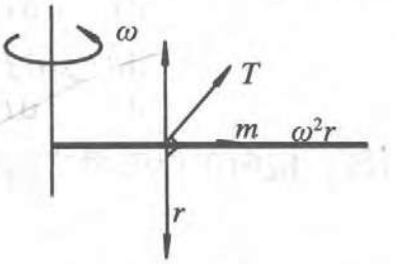


图 3-15

沿杆方向上，

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} = \omega^2 r \Rightarrow dv^2 = \omega^2 dr^2$$

对上式积分，并代入边界条件（在 $r = 0$ 处，$v = v_0$）：

$$v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - 0)$$

得到

$$v_1(r) = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2}$$

在垂直于杆指向纸内方向上，

$$v_2(r) = \omega r$$

所以合速度为

$$v(r) = \sqrt{v_0^2 + 2\omega^2 r^2}$$

作用在杆上的力为重力和下面科里奥利力的合力：

$$T_2 = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 2m\omega v_1 = 2m\omega\sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2}$$
$$G = mg$$

即

$$T_{合} = \sqrt{4m^2\omega^2 v_0^2 + 4m^2\omega^4 r^2 + m^2 g^2}$$

方向垂直于杆且与转轴成 $\arctan(2\omega\sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2}/g)$角。

【3-63】 一溜冰者在冰面上以 $v_0 = 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率沿半径 $R = 10\,\mathrm{m}$ 的圆周溜冰，某时刻他平抛出一小球，为了使小球能击中冰面上圆心处，他应以多大的相对于他的速度抛球，并求出该速度的方向(用和他溜冰速度之间的夹角表示)。已知人抛球时手的高度 $h = 1.6\,\mathrm{m}$。○

解 设人平抛的初速度为 v_1，在相对于人静止的参考系下观察这个初速度为 v_2，则

$$v_2 = \frac{R}{t}$$

其中 $t = \sqrt{2h/g}$。代入数值计算，得 $v_2 = 17.5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。从而有

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_2^2} = 18.5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 2\times 10^1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

方向与径向的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{v_0}{v_2} = 19° \quad (指向斜后方)$$

【3-64】 一物体自北纬32°处的100 m 高楼上自由下落，请给出由科里奥利力引起的落地点横向偏移的大小。☆

解 物体除受到地球的引力以外，只受到科里奥利力作用。列出方程式：

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

取向上为 z 轴，向南为 x 轴，则向东为 y 轴。在北半球纬度 λ 处，

$$\vec{\omega} = \omega(-\cos\lambda\,\vec{e}_x + \sin\lambda\,\vec{e}_y)$$

那么方程式写成分量形式为

$$\begin{cases}\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda - 2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda\end{cases}$$

ω 是个小量，$\dot{x}$，$\dot{y}$ 与 $\dot{z}$ 相比也是小量，则上面方程式可以近似为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

代入初始条件：$t=0$ s 时，$x=y=0, z=h, \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$，得到

$$\dot{z} = -gt, \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\lambda$$

$$\dot{y} = \omega gt^2\cos\lambda, \quad y = \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda$$

$$\dot{x} = 0, \quad x = 0$$

着地时，$z=0, t=\sqrt{2h/g}$，所以

$$y = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\lambda = \frac{1}{3}\times 7.27\times 10^{-5}\sqrt{\frac{8\times 100^3}{9.8}}\cos 32^\circ = 0.019\ (\text{m})$$

【3-65】 在北纬 λ 处，竖直上抛一质量为 m 的物体，最高点高度为 H。请确定其落地点的位置。☆

解 用一阶近似，运动微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

可以推导得到

$$\dot{z} = v_0 - gt, \quad z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

当 $z=h$ 时，

$$\dot{z} = 0, \quad t = \frac{v_0}{g}, \quad h = \frac{v_0^2}{2g}$$

所以

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

将 $\dot{z} = v_0 - gt = \sqrt{2gh} - gt$ 代入 $\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\lambda$，得到

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\lambda - 2\omega\sqrt{2gh}\cos\lambda$$

逐次积分，并用初始条件：$t=0$ 时，$y=0, \dot{y}=0$，得到

$$\dot{y} = \omega gt^2\cos\lambda - 2\omega\sqrt{2gh}t\cos\lambda$$

$$y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega\sqrt{2gh}t^2\cos\lambda$$

落地时，$t = 2\sqrt{2h/g}$，

$$y = \frac{1}{3}\omega g\left(2\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3\cos\lambda - \omega\sqrt{2gh}\left(2\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2\cos\lambda = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\omega h\cos\lambda$$

即在抛出点西边$(8/3)\sqrt{2h^3/g}\,\omega\cos\lambda$ 处。

【3-66】 试确定由于地球自转引起的下列偏离的大小和方向：(1) 从北纬 θ、高 H 的楼顶悬挂的长 H 的单摆；(2) 从楼顶自由下落的物体的落地点。☆

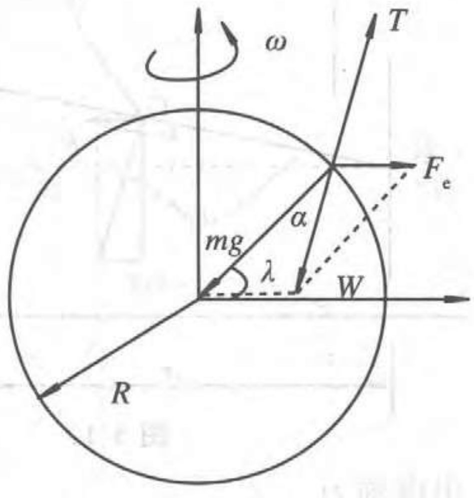


图 3-16

解 (1) 如图 3-16 所示，由于地球的自转，摆锤处于平衡时受到三个力的作用：绳子的张力 $\vec{T}$，地球的万有引力 $m\vec{g}_0$ 和惯性离轴力 $\vec{F}_e$，即

$$m\vec{g}_0 + \vec{T} + \vec{F}_e = 0$$

$\vec{T}$ 的反作用力 $\vec{W}$ 是表观重力，表示为 $m\vec{g}$，其中 $\vec{g}$ 为表观重力加速度。由于自转的影响，铅垂线将向南偏离 α，$F_e = m\omega^2 R\cos\lambda$，$R$ 为地球半径。由余弦定理，可得

$$\begin{aligned} mg &= (m^2g_0^2 + F_e^2 - 2mg_0F_e\cos\lambda)^{1/2} \\ &= mg_0\left[1 + \left(\frac{F_e}{mg_0}\right)^2 - 2\frac{F_e}{mg_0}\cos\lambda\right]^{1/2} \end{aligned}$$

略去 $F_e/(mg_0)$项，代入 $F_e = m\omega^2 R\cos\lambda$，得到

$$mg \approx mg_0\left(1 - \frac{R\omega^2}{g_0}\cos^2\lambda\right) \quad\Rightarrow\quad g \approx g_0 - R\omega^2\cos^2\lambda$$

由正弦定理，得到

$$\frac{mg}{\sin\lambda} = \frac{F_e}{\sin\alpha}$$

所以

$$\sin\alpha = \frac{F_e}{mg}\sin\lambda = \frac{\omega^2 R\sin2\lambda}{2g} = \frac{\omega^2 R\sin2\lambda}{2(g_0 - R\omega^2\cos^2\lambda)}$$

即摆锤将向南偏离的距离为

$$L\alpha \approx L\sin\alpha = \frac{L\omega^2 R\sin2\lambda}{2(g_0 - R\omega^2\cos^2\lambda)}$$

(2) 方法类似解题 3-65 的过程。落地点偏东

$$y_0 = \frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8L^3}{g}}\cos\lambda$$

【3-67】 在北纬 λ 处，河面宽为 a，河水自北向南流动的速度为 v。试证明：西岸的水面比东岸高 $(2av\omega\sin\lambda)/g$，其中 ω 为地球自转角速度，g 为当地的重力加速度。☆

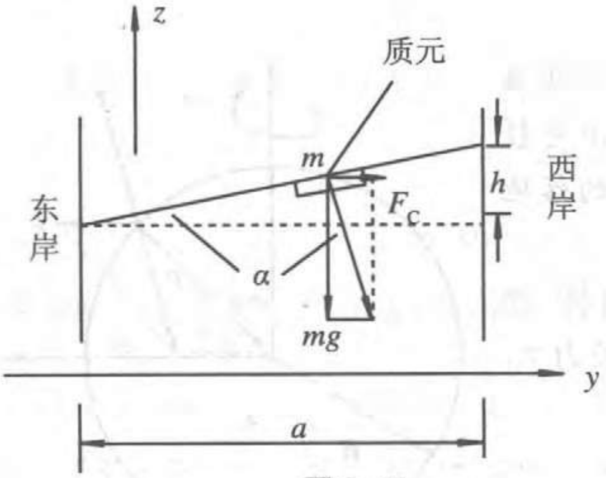


图 3-17

解 在河面上取一质元，无加速度，表观重力、科里奥利力和周围河水的作用力的合力应为0，周围河水的作用力垂直于水面，故科里奥利力和表观重力的合力与水面垂直。取竖直向上为 z 轴，向北为 x 轴，向西为 y 轴，如图 3-17 所示。可见，西岸水面比东岸水面高 h。所以

$$\frac{h}{a} = \tan\alpha = \frac{F_C}{mg}$$

其中 m 为质元质量，F_C 为质元受到的科里奥利力。

$$\begin{aligned}\vec{F}_C &= -2m\vec{\omega}\times\vec{v}\\ &= -2m(-\omega\cos\lambda\,\vec{e}_x + \omega\sin\lambda\,\vec{e}_z)\times(-v\,\vec{e}_x)\\ &= 2m\omega v\sin\lambda\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

科里奥利力向东，与图所画的一致。

从而得到

$$h = \frac{aF_C}{mg} = \frac{2a\omega v\sin\lambda}{g}$$

原题得证。

【3-68】 卫星遥感发现在某处海洋表面附近有一环流做逆时针旋转，周期约为 14 h。请问该环流应该是在南半球还是在北半球？大概处于什么纬度？☆

解 选 z 轴垂直向上，x 轴向南，y 轴向东，

$$\vec{\omega} = \omega(-\cos\lambda\,\vec{e}_x + \sin\lambda\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y,\quad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y$$

代入

$$m\vec{a} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

得到

$$\ddot{x} = \omega^2 x\sin^2\lambda + 2\omega\dot{y}\sin\lambda,\quad \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}\sin\lambda$$

略去 ω^2项，则

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda$$

式(1)+式(2)×i，并令 $w = x + \mathrm{i}y$，得到

$$\ddot{w} = -2\omega\mathrm{i}\omega\sin\lambda$$

本方程的特征方程为 $r^2 = -(2\omega\mathrm{i}\sin\lambda)r$，解得

$$r = 0 \quad 或 \quad r = -2\omega\mathrm{i}\sin\lambda$$

$r=0$ 舍去，有

$$w = A + B\mathrm{i} + C\mathrm{e}^{(-2\omega\mathrm{i}\sin\lambda)t+\varphi}$$
$$x = \mathrm{Re}w = A + C\cos(2\omega t\sin\lambda - \varphi)$$
$$y = \mathrm{Im}w = B + C\sin(2\omega t\sin\lambda - \varphi)$$

可见，如果略去微分方程中的 ω^2 项，不论初始条件如何，一定做圆周运动，角速度为 $2\omega|\sin\lambda|$。

已测得周期 $T = 14\times3\,600$ s，可以得到

$$|\sin\lambda| = \frac{\pi}{\omega T} = \frac{6}{7} = 0.857\,1 \quad\Rightarrow\quad |\lambda| = 59^\circ$$

沿 z 轴向负方向看，洋流做逆时针转动。设某时刻洋流位于图中 P 点，此时，

$$\dot{x} > 0, \dot{y} > 0, \ddot{x} < 0, \ddot{y} > 0$$

由 $\dot{y}>0, \ddot{x}<0$，知 $\sin\lambda<0$。所以洋流是在南半球探测到的。

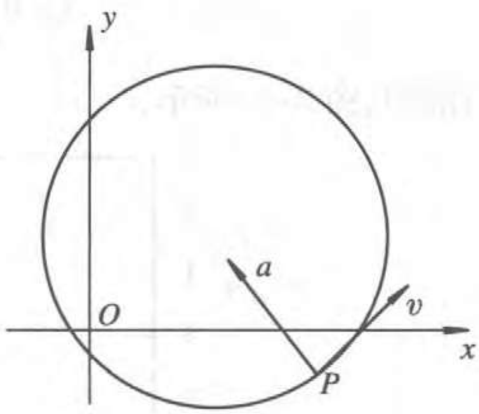


图 3-18

【3-69】 为什么说在经典力学中"空间"是均匀的和各向同性的？

解 参见刘斌《力学》3.6 节的相关内容。

【3-70】 (1) 一物块沿一斜面下滑。斜面和物块之间的动摩擦系数为 μ_k。作图证明 $a_x/\cos\theta$ 和 $\tan\theta$(其中 a_x 为沿斜面下滑的加速度，θ 为斜面与水平方向的夹角)之间的关系为线性关系，且斜率为 g，与轴的交点为 $-\mu_k g$。(2) 下面的数据表显示了物块沿斜面下滑的加速度是斜面与水平方向夹角 θ 的函数。使用电子表格软件，在图中表示这些数据点并用直线拟合，给出 μ_k和 g。你得到的 g 和通常的 9.81 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$相差百分之多少？○

$\theta/^\circ$	25.0	27.0	29.0	31.0	33.0	35.0	37.0	39.0	41.0	43.0	45.0
$a_x/\mathrm{m\cdot s^{-2}}$	1.69	2.10	2.41	2.89	3.18	3.49	3.78	5.15	4.33	4.72	5.11

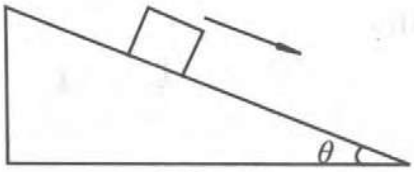


图 3-19

解 (1) 由牛顿第二定律,在沿斜面方向上,

$$a_x = \frac{mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta}{m}$$

所以

$$a_x = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta, \quad \frac{a_x}{\cos\theta} = g\tan\theta - \mu_k g$$

(2) 如图 3-19 所示,拟合结果为

$$a = 10.016\sin\theta - 2.5868\cos\theta \quad \Rightarrow \quad g = 10.016\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}, \mu_k = 0.256$$

得到的 g 值和通常的 $9.81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 相差

$$\frac{10.016 - 9.81}{9.81} \times 100\% = 2.1\%$$

结果如图 3-20 所示。

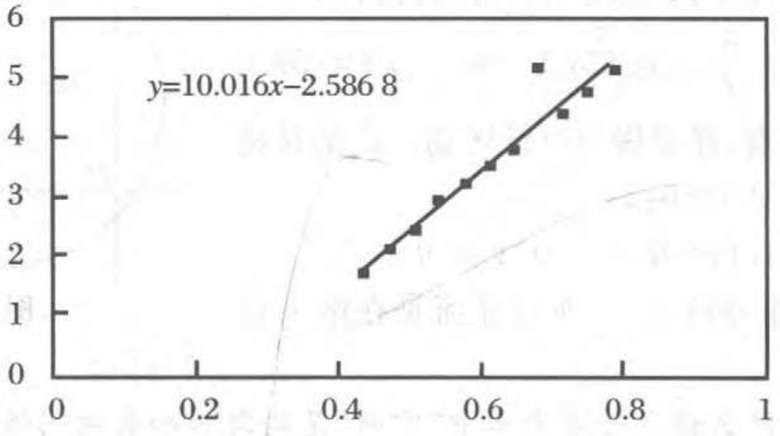


图 3-20

【3-71】 一质量为 m 的均匀绳圈套在一表面光滑、顶角为 θ、底面水平的正圆锥上并保持静止,且绳圈所在平面水平。试求绳圈中的张力大小。○

解 取对正圆锥对称轴上处于绳圈平面上点张角为 $\mathrm{d}\varphi$ 的一段绳元,正圆锥的支持力 $\mathrm{d}N$ 的水平分量、竖直分量分别为 $\mathrm{d}N\cos(\alpha/2)$ 和 $\mathrm{d}N\sin(\alpha/2)$。细绳各处张力均为 T,可得

$$\mathrm{d}N\cos\frac{\alpha}{2} = 2T\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi\right) = T\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}N\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Mg}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

化简,得到

$$T = \frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$$

【3-72】 一质量可以忽略的细绳绕水平放置的细圆棒 5/4 周后，一端垂直向下悬挂一质量为 m 的物体，另一端用大小为 F 的力沿水平方向拉住，绳子与圆棒之间的摩擦系数为 μ。要使物体保持静止，拉力 F 应该为多少？○

解 要保持物体静止，在极限情况下，绳子与圆棒之间的摩擦力为最大静摩擦力，而且根据力 F 和物体所受重力 mg 的大小，可以判断最大静摩擦力的方向。

考虑第一种情况（$F<mg$，物体有下滑趋势，最大静摩擦力方向绕圆棒与之相反）。绕在棒上的绳子微元的受力情况如图 3-21 所示，从而动力学方程为

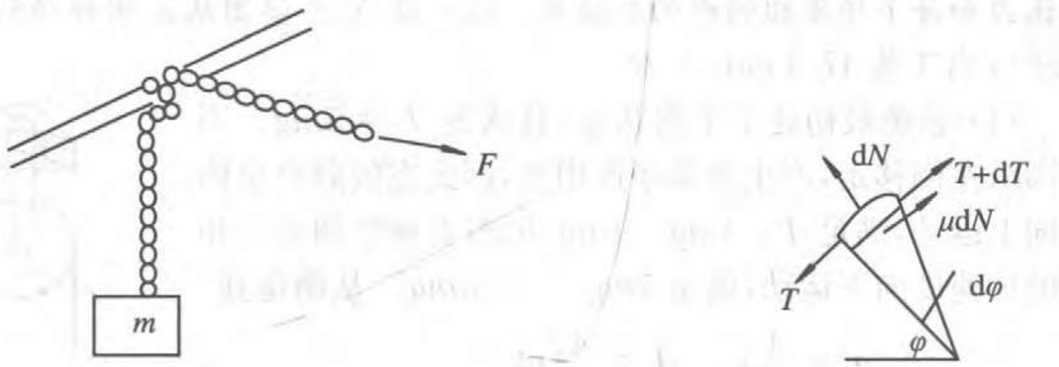


图 3-21

$$T + \mathrm{d}T + \mu \mathrm{d}N = T$$

$$\mathrm{d}N = 2T\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = T\mathrm{d}\varphi$$

化简，得到

$$\mathrm{d}T = -\mu T\mathrm{d}\varphi$$

考虑边界条件：当 $\varphi=0$ 时，$T=mg$；当 $\varphi=5\pi/2$ 时，$T=F_{\min}$。对上式积分，得到

$$\int_{mg}^{F_{\min}} \frac{1}{T}\mathrm{d}T = -\int_0^{5\pi/2} \mu \mathrm{d}\varphi \quad\Rightarrow\quad F_{\min} = mg\mathrm{e}^{-5\mu\pi/2}$$

现考虑第二种情况（$F>mg$，物体有上滑趋势，最大静摩擦力方向绕圆棒与之相反）。绕在棒上绳子微元的受力情况如图 3-22 所示，从而动力学方程为

$$T + \mathrm{d}T + \mu \mathrm{d}N = T$$

$$\mathrm{d}N = 2T\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = T\mathrm{d}\varphi$$

化简，得到

$$\mathrm{d}T = -\mu T\mathrm{d}\varphi$$

考虑边界条件：当 $\varphi=0$ 时，$T=F_{\max}$；当 $\varphi=5\pi/2$ 时，$T=mg$。对上式积分，得到

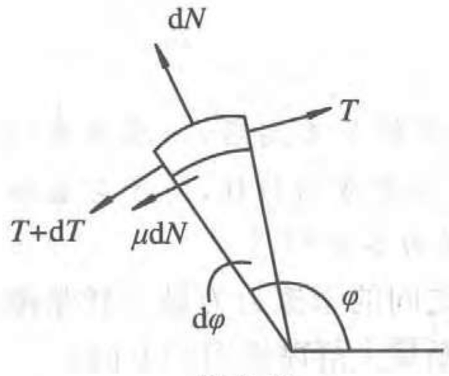


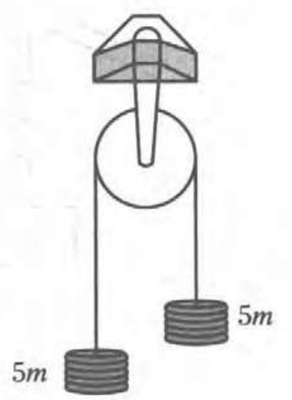
图 3-22

$$\int_{F_{\max}}^{mg}\frac{1}{T}\mathrm{d}T = -\int_0^{5\pi/2}\mu\mathrm{d}\varphi \quad\Rightarrow\quad F_{\max} = mg\mathrm{e}^{5\mu\pi/2}$$

所以施加的水平力 F 的取值范围为

$$mg\mathrm{e}^{-5\mu\pi/2} < F < mg\mathrm{e}^{5\mu\pi/2}$$

【3-73】 如图所示，两组各有五个垫圈，每个垫圈的质量为 m，通过一根细绳悬挂在定滑轮的两侧。绳上的张力为 T_0。如果从左侧取走一个垫圈，剩下的垫圈会加速，而且细绳上张力降低 0.300 N。(1) 给出 m。(2) 当从左侧取走第二个垫圈时，请给出新的张力和每个垫圈组的新的加速度。(3) 当 N 个垫圈从左侧移动到右侧，右侧在 0.40 s 内下落 47.1 cm，求 N。○



(题 3-73 图)

解 (1) 系统最初处于平衡状态，且满足 $T_0 = 5mg$。当一个垫圈从左侧移走，产生非零净作用力，因此左侧剩余垫圈会加速向上运动，满足 $T - 4mg = 4ma$，同时右侧垫圈会以相同大小的加速度向下运动，满足 $5mg - T = 5ma$。从而得到

$$a = \frac{1}{9}g,\quad T = \frac{40}{9}mg$$

对应绳子上的张力变化为

$$\Delta T = 5mg - \frac{40}{9}mg \quad\Rightarrow\quad m = \frac{9\Delta T}{5g} = 55.1g$$

(2) 当第二个垫圈从左侧取走之后，对应的动力学方程变为

$$5mg - T = 5ma_2$$
$$T - 3mg = 3ma_1$$
$$a_1 = a_2$$

求解，得到

$$T = 2.025\ \mathrm{N},\quad a = 2.45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(3) 右侧在 0.40 s 内下落 47.1 cm，对应的加速度为

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\times 47.1\times 10^{-2}\ \mathrm{m}}{(0.40\ \mathrm{s})^2} = 5.89\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

当 N 个垫圈从左侧移到右侧时，列出动力学方程

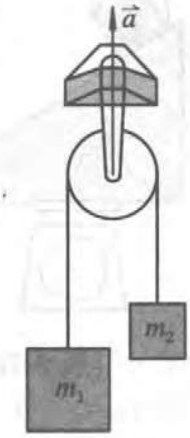
$$(5+N)mg - T = (5+N)ma$$
$$T - (5-N)mg = (5-N)ma$$

两式相加，得

$$a = \frac{N}{5}g$$

所以 $N=3$。

【3-74】 如图所示，一架理想阿特伍德机的滑轮系统以大小为 a 的加速度向上运动。请给出每块物体的加速度和细绳上的张力。



（题 3-74 图）

解 在向上以加速度 a 做加速的非惯性系中考察受力，

$$\frac{m_1(g+a)-T}{m_1} = \frac{T-m_2(g+a)}{m_2}$$

解得

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(g+a)$$

所以质量为 m_1 的物体的加速度为

$$\frac{(m_2-m_1)g+2m_2 a}{m_2+m_1}$$

质量为 m_2 的物体的加速度为

$$\frac{(m_1-m_2)g+2m_1 a}{m_2+m_1}$$

【3-75】 质量分别为 M 和 $M+m$ 的两位学生，各自拉着跨过定滑轮的不可伸长的绳子两端从静止向上爬，开始时两人到定滑轮的距离都是 h。如果绳子的质量、定滑轮的摩擦力都可忽略，试证明：若质量较轻的学生在 t s 内爬到定滑轮处，这时质量较大的学生与定滑轮之间的距离为$\frac{m}{M+m}\left(h+\frac{1}{2}gt^2\right)$。○

解 设绳子上的张力为 T，a_1，a_2 分别为质量较轻和较重的人向上爬的加速度。列出动力学方程

$$Ma_1 = T - Mg$$
$$(M+m)a_2 = T-(M+m)g$$

化简，得到

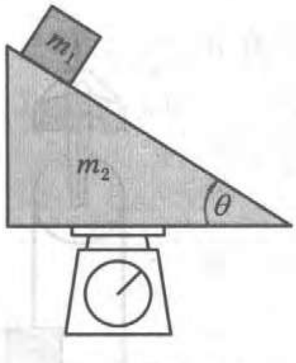
$$Ma_1-(M+m)a_2 = mg$$

两边对 t 积分两次：

$$M\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^{t'} a_1\mathrm{d}t' - (M+m)\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^{t'} a_2\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}mgt^2$$

在 t 时刻，较轻的人爬到滑轮，较重的人离滑轮的距离设为 l。对此时刻应用上式，得到

$$Mh-(M+m)(h-l)=\frac{1}{2}mgt^2 \Rightarrow l=\frac{m}{M+m}\left(h+\frac{1}{2}gt^2\right)$$



(题 3-76 图)

【3-76】 如图所示，质量为 m_2 的楔状物静止在一个台秤上。质量为 m_1 的小物块沿着楔状物的斜面无摩擦下滑。楔状物与秤之间不打滑。求当物块下滑时秤的读数。

解 质量为 m_2 的物体受到质量为 m_1 的物体的正压力为 $m_1g\cos\theta$，台秤受到质量为 m_2 的物体的正压力为 $m_2g+m_1g\cos^2\theta$。

【3-77】 质量为 m 的物体受到力 $\vec{F}=-k\vec{r}$（k 为正常数，$\vec{r}$ 为物体的位置矢量）的作用。(1) 证明物体在一平面内运动。(2) 设在 $t=0$ 时，$x=1,y=0,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v_0$，求 $x(t)$ 和 $y(t)$。(3) 证明物体的运动轨道是一椭圆。(4) 确定轨道周期。☆

解 (1) 由 $\vec{F}=-k\vec{r}$，得

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(-k\vec{r})=\vec{0}$$

又因为

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$$

对上式积分，得到 $\vec{r}\times\vec{v}=\vec{h}$（常矢量）。又因为

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{v}\cdot(\vec{r}\times\vec{r})=0$$

代入，得到 $\vec{r}\cdot\vec{h}=0$，即 $\vec{r}$ 垂直于 $\vec{h}$，说明粒子始终在与 $\vec{h}$ 垂直的平面上运动。

(2) 把条件 $\vec{F}=-k\vec{r}$ 写成分量形式

$$m\ddot{x}=-kx,\quad m\ddot{y}=-ky$$

令 $\omega^2=k/m$，那么得到

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \ddot{y}+\omega^2y=0$$

求解，得到通解

$$x=A\cos(\omega t+\alpha),\quad y=B\cos(\omega t+\beta)$$

由初始条件：当 $t=0$ 时，$x=1,\dot{x}=0,y=0,\dot{y}=v_0$，定出 A,α,B,β，从而得到

$$x=\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),\quad y=\sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(3) 由(2)的结果，可以建立一个椭圆的标准方程

$$x^2+\frac{y^2}{(\sqrt{m/k}\,v_0)^2}=1$$

(4) 设周期为 T，那么

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T=2\pi\ \Rightarrow\ T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

【3-78】 质量为 M 的小圆环被穿在一根沿水平方向拉直的光滑金属丝上，另一个质量为 m 的小球通过一长度为 l、质量可忽略的细绳连在小圆环上。先握住小圆环，将细绳沿金属丝方向拉直，然后突然释放，求此后细绳上的张力与细绳和垂直线夹角 θ 之间的关系。☆

解 如图 3-23 所示，建立直角坐标系，给出动力学方程：

$$M\ddot{x}=T\sin\theta \tag{1}$$

$$ml\ddot{\theta}+m\ddot{x}\cos\theta=-mg\sin\theta \tag{2}$$

$$ml\dot{\theta}^2-m\ddot{x}\sin\theta=T-mg\cos\theta \tag{3}$$

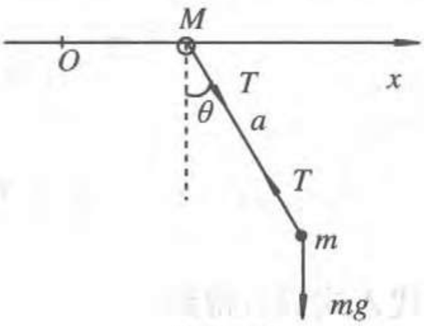


图 3-23

式(1) − 式(3) × $\sin\theta$，得到

$$M\ddot{x}-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+m\ddot{x}\sin^2\theta=mg\sin\theta\cos\theta$$

式(4) + 式(2) × $\cos\theta$，得到

$$M\ddot{x}-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+m\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta=0 \tag{4}$$

对上式关于 t 积分，得到

$$(M+m)\dot{x}+ml\dot{\theta}\cos\theta=C_1 \tag{5}$$

由初始条件：$\theta=\pi/2$ 时，$\dot{\theta}=0,\dot{x}=0$，可以得到

$$C_1=0$$

式(4) × $\dot{x}$ + 式(2) × $a\dot{\theta}$，得到

$$(M+m)\dot{x}\ddot{x}-ml\dot{\theta}^2\dot{x}\sin\theta+ml\ddot{\theta}\dot{x}\cos\theta+ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+ml\dot{\theta}\ddot{x}\cos\theta=-mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

对上式关于 t 积分，得到

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta=mgl\cos\theta+C_2$$

由边界条件，得到 $C_2=0$，因此

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta=mgl\cos\theta \tag{6}$$

由式(5)，得

$$\dot{x}=-\frac{m}{M+m}l\dot{\theta}\cos\theta$$

将上式代入式(6)，得到

$$\dot{\theta}^2=\frac{2(M+m)g\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)l}$$

对上式关于 t 积分，得到

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{2(M+m)\sin\theta}{(M+m\sin^2\theta)l}g\dot{\theta}-\frac{2(M+m)\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)^2 l}\cdot 2mg\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}$$

从而得到

$$\ddot{\theta}=-\frac{(M+m)g}{(M+m\sin^2\theta)^2 l}(M+m+m\cos^2\theta)\sin\theta$$

所以

$$\ddot{x}=\frac{mg(3M+2m+m\sin^2\theta)}{(M+m\sin^2\theta)^2}\sin\theta\cos\theta$$

代入式(1)，得到

$$T=\frac{Mmg(3M+2m+m\sin^2\theta)\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)^2}$$

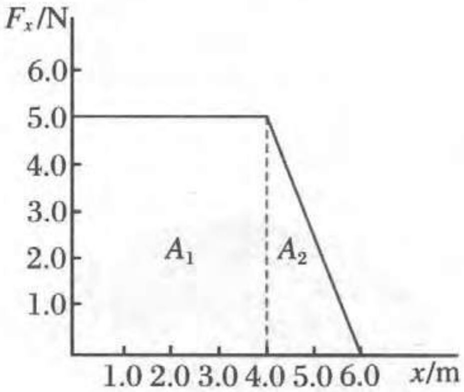
第5章 守恒定律

【5-1】 判断对错：(a) 如果两个矢量方向完全相反，那么它们的矢量积一定为0。(b) 当两个矢量互相垂直时，它们的矢量积的大小达到最小值。(c) 如果知道两个非零矢量的矢量积的大小和每个矢量的大小，那么它们之间的夹角一定能唯一确定。

解 (a) 对。(b) 错。(c) 对。

【5-2】 在物理学中，为什么大家都很关注不变量？力学中经常见到的不变量有哪些？

解 一个"不变量"代表一种对称性。常见的比较有代表性的不变量有能量、动量、角动量、电荷等。



(题5-4图)

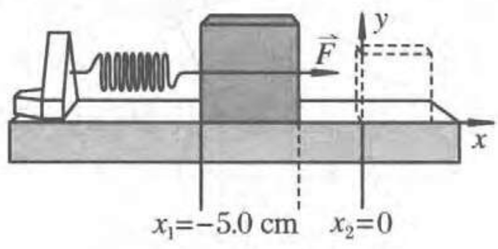
【5-3】 能量与做功是什么关系？

解 外力对系统做功可以改变系统的能量，功可以看作系统能量的变化量，做功实际上是一种能量转化的方式。

【5-4】 如图所示，力 $\vec{F}=F_x\vec{e}_x$ 随 x 变化。试求物体在该力作用下从位置 $x=0$ m 移到 $x=6.0$ m 处时该力所做的功。

解 这个力所做的功 $W=\int_0^{6.0}F_x\mathrm{d}x$，从图上看就是图中的折线与 x 轴围成的面积。所以 $W=A_1+A_2=25$ J。

【5-5】 一质量为4.0 kg的木块放在无摩擦的光滑水平桌面上，一端连接着弹性系数 $k=400\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 的水平弹簧。如图所示，弹簧最初被压缩5.0 cm。求：(1) 木块从 $x=x_1=-5.0$ cm 移动到它的平衡位置 $x=x_2=0$ cm 处，弹簧对木块所做的功。(2) 在 $x_2=0$ cm 处，木块的速率。



(题5-5图)

解 (1) 木块移动一个微小距离 Δx，弹簧所

做的功

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = -kx\Delta x$$

对两边积分，得

$$W_{总} = \int_{-5\times10^{-2}}^{0} -kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times 400\times 0.05^2\ \mathrm{J} = 0.5\ \mathrm{J}$$

(2) 由功能定理，弹簧对木块做的功转化为木块的动能，所以

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{总}$$

由此得 $v=0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

【5-6】 从枪膛长为 0.500 m 的步枪中发射出一质量为 100 g 的子弹。取子弹刚开始移动的位置为原点。膨胀气体作用在子弹上的力(单位：N)为 $15\,000+10\,000x-25\,000x^2$，其中 x 的单位为 m。(1) 计算子弹在枪膛中移动过程中，气体对子弹所做的功。(2) 如果枪膛的长为 1.00 m，那么这个功为多大？这个值与(1)中得到的值相比如何？

解 (1) 元功的微分表达式为

$$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x = (15\,000+10\,000x-25\,000x^2)\mathrm{d}x$$

两边积分，得到

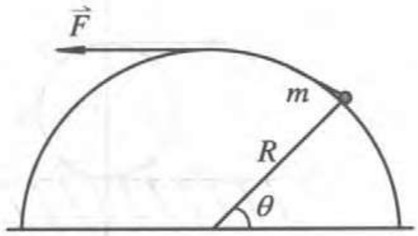
$$W = \int_0^{0.5}(15\,000+10\,000x-25\,000x^2)\mathrm{d}x = 7\,708\ \mathrm{J}$$

(2)

$$W = \int_0^{1}(15\,000+10\,000x-25\,000x^2)\mathrm{d}x = 11\,667\ \mathrm{J}$$

与(1)相比，枪膛长度为(1)中的 2 倍，而做功并不是(1)中的 2 倍，只增加约 51%。

【5-7】 一个质量为 m 的小物体放置在无摩擦的半圆柱体(半径为 R)上，同时被一根细绳牵引滑过圆柱体的顶部，如图所示。用积分法计算，把该物体以恒定速率从圆柱体底部移动到顶部所做的功的大小。○



(题 5-7 图)

解 速率恒定，受力平衡(图 5-1)，有

$$F\cdot\sin\theta = N\cdot\cos\theta$$

$$F\cdot\cos\theta + N\cdot\sin\theta = mg$$

由此得到

$$F = mg\cos\theta$$

又 $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$，且力 F 与 $\mathrm{d}s$ 的方向相同，所以

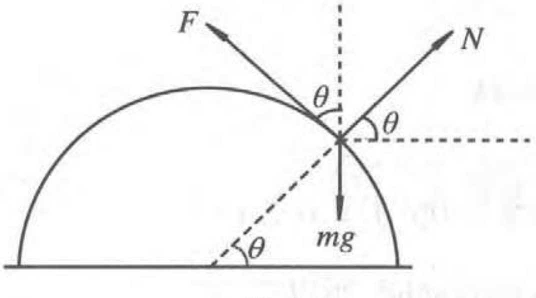


图 5-1

$$W = \int F\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\cos\theta \cdot r \cdot \mathrm{d}\theta = mgr$$

(圆柱体无摩擦,整个过程中机械能守恒,用机械能守恒可以得到同样的结果)。

【5-8】 一质量为 1 200 kg 的汽车,以 $80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$的速率沿水平直路运动。为了避免一起车祸,该车的司机以最大的力量踩下刹车。防抱死制动系统失灵,车轮锁死,轮胎打滑。如果路面和轮胎之间的动摩擦系数为 0.75,那么该车在停止前滑动的距离有多远?

解 $80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 22.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。由功能定理,摩擦力做的功等于汽车动能的改变量:

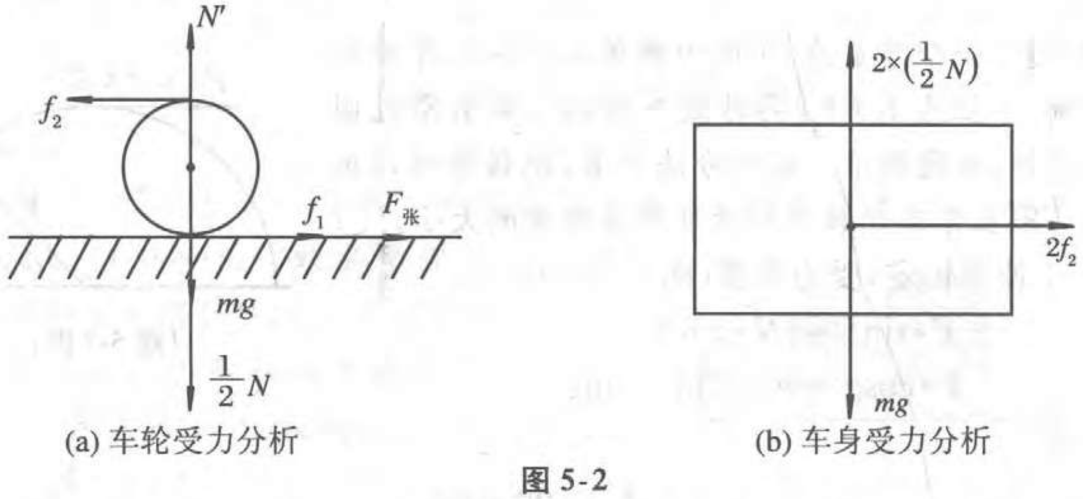
$$-\mu mgl = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

所以

$$l = \frac{v^2}{2\mu g} = 34\ \mathrm{m}$$

【5-9】 你开着一辆车在水平道路上从静止开始加速。用功与平动动能之间的关系和隔离体受力图来解释哪一个(或几个)力直接造成你和车的平动动能的增加。○

解 如图 5-2 所示,汽车通过发动机把力作用在驱动轮上使轮转动,而车轮与地面的摩擦使两者的接触点保持相对静止,因此车轮产生形变,从而产生了张力 $F_{张}$,驱动车轮向前运动。该驱动力通过车轮和车身之间的摩擦力(或连接力)传导到车身,驱动车身向前运动。



(a) 车轮受力分析 (b) 车身受力分析

图 5-2

【5-10】 汽车加速过程中,驱动轮与地面的接触部分是相对静止的,地面与

轮胎之间的摩擦力对驱动轮做功吗？汽车动能的增加是怎么产生的？○

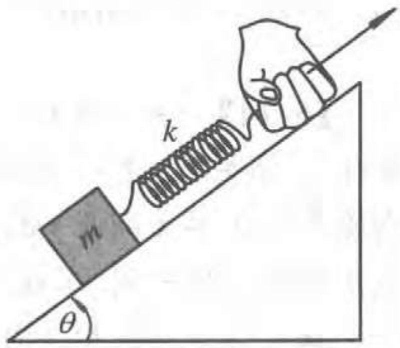
解 显然在不打滑的情况下，车轮着地点相对于地面是静止的，于是由 $P=F/V$，可知其功率为0，相应做功也为0，于是摩擦力不做功。

汽车通过发动机把力作用在驱动轮上使轮转动，而车轮与地面的摩擦使两者的接触点保持相对静止，因此车轮产生形变，从而产生了张力，拉动汽车运动。归根结底还是发动机在做功。

【5-11】 一位学习物理的学生问："如果只在外力的作用下，系统的质心才能获得加速度，那么汽车是如何被加速的？难道不是发动机提供力使车加速的吗？"解释是什么外界物质/因素产生力使汽车加速的，并说明发动机是如何使外界物质/因素来加速汽车的。○

解 汽车发动机通过汽油燃烧最终把力作用于驱动轮上，使车轮发生形变产生张力拉动汽车加速。详见题5-10的解答。

【5-12】 如图所示，一质量为 m 的物块静止在与水平面成 θ 角的斜面上。一根弹性系数为 k 的弹簧连接在物块上。物块与斜面之间的静摩擦系数为 μ_s。将弹簧沿斜面非常缓慢地向上拉。(1) 给出物块刚开始移动时弹簧的张力。(2) 当弹簧收缩，变形回到0时，物块刚好停止。请用 μ_s 和 θ 表示动摩擦系数 μ_k。○



（题5-12图）

解 (1) 物块刚开始移动的一瞬间，所受的力为静摩擦力；木块非常缓慢地移动，可以看作木块受力平衡；由力的平衡(图5-3)，有

$$mg\cos\theta = N$$
$$mg\sin\theta + N\mu_s = F$$

解得

$$F = mg\sin\theta + mg\cos\theta\,\mu_s$$

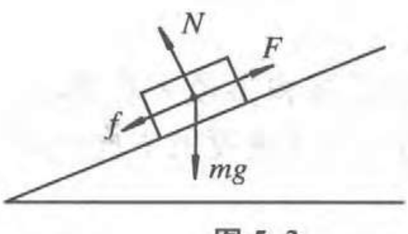


图5-3

(2) 物块刚开始滑动时，弹簧形变量为 $x=F/k$，则当弹簧收缩到形变为0、物块静止时，物块共滑动了 $l=F/k$，该过程中物块所受的摩擦力为动摩擦力，摩擦所损耗的能量等于系统机械能的改变量：

$$\mu_k m\, g\cos\theta \cdot l = \frac{1}{2}kl^2 - mgl\sin\theta$$

解得

$$\mu_k = \frac{1}{2}(\mu_s - \tan\theta)$$

【5-13】 航天飞机的质量约为 8×10^4 kg，沿离地表约 400 km 的轨道运行，周期为 90 min。试估算航天飞机的动能以及从发射到进入轨道过程中重力对其所做的功。

解 取地球半径为 6 400 km，知道了航天飞机的周期和轨道半径可以估算出它的平均速率

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T} = 7.9\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

进一步求出它的动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 2.5\times10^{12}\ \mathrm{J}$$

虽然重力随高度增加而减小，但是这一变化效应在低轨道时不明显，可以忽略。假设重力不随高度变化而进行估算，则重力做功

$$W = -mgh = -3.1\times10^{11}\ \mathrm{J}$$

【5-14】 一个力 $\vec{F} = (F_0/r)(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)$ 作用在 xy 平面内 (x,y) 处的一个物体上，其中 F_0 是一正常数，r 是物体离原点的距离。(1) 证明力的大小为 F_0，方向垂直于 $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$。(2) 若物体在该力作用下绕半径为 10.0 m、圆心在原点上的圆旋转一周，求该力所做的功。○

解 (1) 力的大小为

$$F = |\vec{F}| = \left|\frac{F_0}{r}(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)\right| = \left|\frac{F_0}{r}\right|\cdot|y\vec{e}_x - x\vec{e}_y| = \frac{F_0}{r}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

又 $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$，所以 $r^2 = x^2 + y^2$。从而有

$$F = F_0$$

又由于

$$\vec{F}\cdot\vec{r} = \frac{F_0}{r}(xy\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x + y^2\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y - x^2\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y - xy\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y) = 0$$

所以 $\vec{F}_0 \perp \vec{r}$。

(2) 若物体按题中所述做圆周运动，物体的速度方向始终和半径 $\vec{r}$ 垂直，由 (1) 得到力 $\vec{F}$ 的方向也始终和半径 $\vec{r}$ 相垂直，则力的方向与物体速度的方向始终共线。根据旋转方向的不同，此力做的功可能为

$$W = F_0\cdot2\pi r = 20.0F_0\pi r(\mathrm{J}) \quad (力和速度同方向)$$

或

$$W = -F_0\cdot2\pi r = -20.0F_0\pi r(\mathrm{J}) \quad (力和速度反方向)$$

【5-15】 势函数或位函数与力是什么关系？请证明，对于保守力可以引入势函数描述该力场。○

解 (1) 如果力 $\vec{F}$ 为保守力，则总可以找到一个标量函数 φ，使得 $\vec{F}=-\nabla\varphi$，其中 φ 就是“位函数”或“势函数”。

(2) 根据保守力的定义，可知在某一确定的保守力场中，任取一个标准点“P”，则从 P 点到空间中的一个特定点，此保守力所做的功必定是该点空间位置的函数。设这个位置函数为 $-U(x,y,z)$，某点 M 的位函数为 $-U(M)$，点 N 的位函数为 $-U(N)$，则

$$\int_M^N \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_M^P \vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_P^N \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

其中

$$\int_P^N \vec{F}\cdot d\vec{r}=-U(N),\quad \int_M^P \vec{F}\cdot d\vec{r}=-[-U(M)]$$

所以

$$\int_M^N \vec{F}\cdot d\vec{r}=U(M)-U(N)$$

所以此位置函数即“位函数”或“势函数”就可以描述该力场了，并且有 $\vec{F}=-\nabla U$。

【5-16】 判断以下各力是否是保守力，如果是保守力，请给出相应的势函数：(1) $\vec{F}=k\vec{r}$（k 为常数）；(2) $\vec{F}=\vec{a}\times\vec{r}$（$\vec{a}$ 为常矢量）；(3) $\vec{F}=\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$（$\vec{a}$ 为常矢量）；(4) $\vec{F}=(ax+by^2)\vec{e}_x+(az+2bxy)\vec{e}_y+(ay+bz^2)\vec{e}_z$（$a,b$ 为常量）。☆

解 (1) 由

$$\vec{F}=k\vec{r}=k(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)$$

知 $\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$，所以 $\vec{F}$ 为保守力。

取 $\vec{r}=\vec{0}$ 处为势能零点，则势能

$$U(x,y,z)=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} k\vec{r}\,d\vec{r}$$

因为 $\vec{F}$ 为保守力，可以任意取积分路径，这里取积分路径 $(0,0,0)\to(x,0,0)\to(x,y,0)\to(x,y,z)$，积分得

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{2}kr^2$$

(2) 由

$$\vec{F}=\vec{a}\times\vec{r}=(a_yz-a_zy)\vec{e}_x+(a_zx-a_xz)\vec{e}_y+(a_xy-a_yx)\vec{e}_z$$

知 $\nabla\times\vec{F}\neq\vec{0}$，所以 $\vec{F}$ 不是保守力。

(3) 由

$$\vec{F}=\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})=a_x(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{e}_x+a_y(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{e}_y+a_z(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{e}_z$$

知$\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$，所以$\vec{F}$是保守力。

取原点为势能零点，用(1)中的积分路径积分，得

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=-\int_0^x F_x(x,0,0)\mathrm{d}x-\int_0^y F_y(x,y,0)\mathrm{d}y-\int_0^z F_z(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{2}(a_xx+a_yy+a_zz)^2\\&=-\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{r})^2\end{aligned}$$

(4) 由

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{0}$$

知$\vec{F}$是保守力。

取原点处为势能零点，取(1)中的积分路径积分，得

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=-\int_0^x F_x(x,0,0)\mathrm{d}x-\int_0^y F_y(x,y,0)\mathrm{d}y-\int_0^z F_z(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{2}ax^2-bxy^2-ayz-\frac{1}{3}bz^3\end{aligned}$$

【5-17】 试定性画出地球－月球系统周围空间的引力势能在平面上的二维分布曲线。○

解 注意地球和月球的质量不同，因此势能分布不对称，结果见图 5-4。

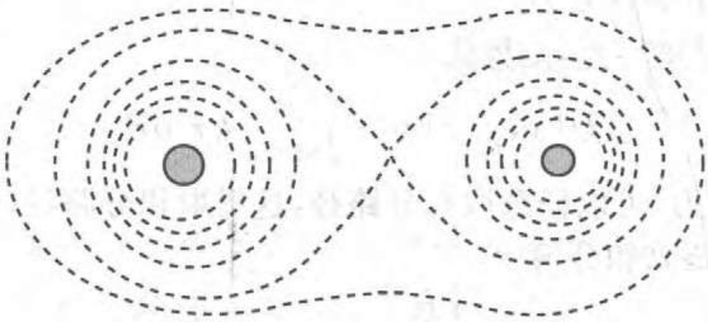


图 5-4

【5-18】 在 $-a<x<a$ 区域内，作用在物体上的力满足势函数 $U=$

$-b\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$，其中 a 和 b 是正常数。(1) 在 $-a<x<a$ 区域内，求 F_x。(2) x 取何值时，力为0？(3) 力为0处是稳定平衡还是不稳定平衡？○

解 (1) 根据保守力和势函数的关系，得

$$F=-\frac{\partial U}{\partial x}=-b\left[\frac{1}{(a+x)^2}-\frac{1}{(a-x)^2}\right]$$

(2) 由(1)中 F 的表达式，令 $F=0$，解得 $x=0$，即当 $x=0$ 时，$F=0$。

(3) 在 $x=0$ 的邻域内，$x>0$ 时，$F<0$；$x<0$ 时，$F>0$。力的方向和位移相同，为稳定平衡。

【5-19】 举例说明物体可以保持恒定的动能且同时能加速。如果不加速，物体能够具有变化的动能吗？如果可以，请举例。○

解 例如匀速圆周运动。如果不加速，物体的动能可以变化，如变质量物体运动。

【5-20】 你和你的朋友赛跑。最初，你们有相同的动能，但是她比你跑得快。当你的速率增加25%时，你和她的速率相同。如果你的质量为65 kg，那么她的质量为多少？

解 设自己的质量为 m_1，对方的质量为 m_2；再设自己最初的速率为 v，则对方的速率为 $1.25v$。根据已知条件，有

$$\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}m_2\times(1.25v)^2$$

解得

$$m_2=\frac{16}{25}m_1=42\ \mathrm{kg}$$

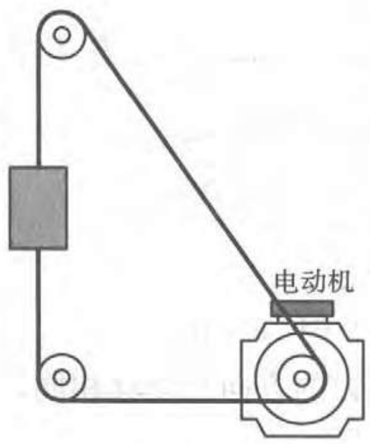
【5-21】 功率的量纲为（ ）。(a) $\mathrm{M\cdot L^2\cdot T^2}$；(b) $\mathrm{M\cdot L^2\cdot T^{-1}}$；(c) $\mathrm{M\cdot L^2\cdot T^{-2}}$；(d) $\mathrm{M\cdot L^2\cdot T^{-3}}$。

解 (d)。

【5-22】 激光器的输出功率可以高于1.0 GW。一个典型的现代大型发电站的输出功率也是1.0 GW。这是否意味着激光器能输出大量能量？请解释。○

解 做功与功率的关系为 $W=Pt$，输出的能量 W 不仅和功率 P 有关，还和做功的时间 t 有关。对于激光器来说，虽然 $P=1.0$ GW 很大，但一般来说，做功的时间 t 很小，所以输出能量 W 并不会太大，即激光器不会输出大量的能量。

【5-23】 你负责在学生餐厅安装一台小型升降机。如图所示，升降机通过一滑轮系统连接在电动机上。电动机驱动升降机上下。升降机的质量为50 kg。在工作时，升降机以速率 $0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 匀速上升(除了在刚启动的一个极短的时间内有



(题 5-23 图)

加速,这段时间可以忽略)。电动机的效率为 70%。请问应选用最小额定功率为多大的电动机?(忽略滑轮摩擦。)

解 该系统的有用功为克服升降机重力所做的功,即 $P_{有用} = mgv$,所以

$$P_{额} = \frac{P_{有用}}{0.70} = 175\ \mathrm{W}$$

【5-24】 你现在要检测一辆汽车的实际操作性能。该车引擎的额定功率,即最大输出功率为 150 马力(1 马力≈735.5 W)。车的质量(包括测量仪器和驾驶员)为 1 400 kg。当以 $80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率匀速行驶时,仪器测得引擎输出 14.2 马力。通过以前的滑行实验测得滚动摩擦系数为0.015 0。假设作用在车上的空气阻力和车速的平方成正比,即 $F = Cv^2$。(1) 试确定 C 的大小。(2) 请估计该车的最大车速(精确到 $1\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$)。(可以用公式推导,也可以用电子表格。)○

解 (1) 已知:1 马力 = 735.5 W,$80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 22.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

车在水平方向上所受的力包括引擎提供的驱动力 $F_{驱}$、滚动摩擦力 f 和空气阻力 F。因为车辆匀速运动,故处于受力平衡状态,有

$$F_{驱} = f + F$$

其中摩擦力

$$f = \mu mg = 205.8\ \mathrm{N}$$

$$F_{驱} = \frac{P}{v} = \frac{14.2 \times 735.5\mathrm{W}}{22.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 470.5\ \mathrm{N}$$

则

$$F = F_{驱} - f = cv^2$$

解得 $C = 0.54$。

(2) 车速达到最大时,其加速度为零,由于受力平衡,所以有

$$F_{驱} = f + F = f + cv^2$$

且输出功率为最大值 $P_{\max}$。由于 $P = F \cdot v$,故当速度最大时,有

$$(f + Cv^2) \cdot v = P_{\max}$$

解得 $v = 56.7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 204\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$。

【5-25】 为了测量运动中汽车受到的总摩擦力(包括滚动摩擦和空气阻力),一汽车工程团队关掉引擎让汽车沿已知坡度的斜面下滑。该团队收集了以下信息:(a) 沿与水平面成3.0°角的斜面,汽车以 $22\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速率匀速下滑;(b) 沿与水

平面成6.0°角的斜面，汽车以33 m·s^{-1}的速率匀速下滑。车的总质量为1 200 kg。试确定：(1) 在车速为22 m·s^{-1}和33 m·s^{-1}时，总摩擦力的大小；(2) 在水平路面上，当车速为22 m·s^{-1}和33 m·s^{-1}时，引擎的输出功率；(3) 若引擎的最大功率为55 kW，该汽车能以22 m·s^{-1}的速率匀速爬上的斜面的最大倾角。(4) 假设不论车速多大，引擎消耗每升汽油所产生的有效功是相同的，当该车以22 m·s^{-1}的速率在水平路面上行驶时，每消耗1 L汽油可行驶13.5 km，当它以33 m·s^{-1}的速率在水平路面上行驶时，每消耗1 L汽油可以行驶多远？

解 (1) 车辆匀速下滑，沿斜面方向受力平衡，有

$$f = mg\sin\theta$$

当车速为22 m·s^{-1}时，

$$f_1 = mg\sin\theta_1 = 615\ \text{N}$$

当车速为33 m·s^{-1}时，

$$f_2 = mg\sin\theta_2 = 1\,229\ \text{N}$$

(2) 假设汽车在水平路面上匀速行驶时所受的摩擦力和在斜面上以同样速率行驶时所受的摩擦力相等。匀速行驶时，受力平衡，驱动力 F 和摩擦力 f 大小相等，方向相反。所以

$$P_1 = F_{驱1} v_1 = f_1 v_1 = 13.5\ \text{kW}$$
$$P_2 = F_{驱2} v_2 = f_2 v_2 = 40.6\ \text{kW}$$

(3) 当斜面倾角最大时，引擎的输出功率为最大功率 P_{max}。汽车以22 m·s^{-1}的速率行驶，则所受摩擦力为 f_1。汽车匀速爬坡，沿斜面方向受力平衡，有

$$F_{驱} = f_1 + mg\sin\theta_{max}$$
$$P_{max} = F_{驱}v = (f_1 + mg\sin\theta_{max})\cdot v$$
$$\sin\theta_{max} = \frac{P_{max}/v - f_1}{mg} = 0.16$$
$$\theta_{max} \approx 9.2°$$

(4) 消耗每升汽油产生的有效功相同，则有

$$F_{驱1}S_1 = F_{驱2}S_2$$

匀速行驶时，受力平衡，$F_{驱} = f$，所以 $f_1S_1 = f_2S_2$，则有

$$S_2 = \frac{f_1S_1}{f_2} = 6.76\ \text{km}$$

【5-26】 一质量为6.0 kg的物块初始时静止在一水平面上，被一个恒定为12 N的水平力向右方拉。(1) 如果接触面的动摩擦系数为0.15，求物块移动3.0 m之后的速率。(2) 假设拉力以与水平向右偏上 θ 角的方向施加在物体上，问角度 θ

为多大，才能使物块向右移动 3.0 m 时达到最大的可能速率？

解 (1) 由功能定理，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fl - \mu mgl$$

解得 $v=1.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(2) 由功能定理，末态速率达到最大，即过程中合外力做功最大。由于系统在竖直方向没有运动，水平方向位移一定，所以只要过程中水平方向合外力最大，做功即最大。水平方向合外力大小为

$$\begin{aligned} F_{合} &= F\cos\theta - \mu(mg - F\sin\theta) \\ &= F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - \mu mg \\ &= \sqrt{1+\mu^2}F\sin(\theta+\varphi) - \mu mg \end{aligned}$$

其中 $\varphi=\arctan(1/\mu)$。考虑到 θ 只能取锐角，可见 $\theta=\pi/2-\varphi=\arctan\mu\approx 8.5^\circ$ 时，合外力最大，物块能达到最大的可能速率。

【5-27】 一弹性系数为 k 的轻质弹簧一端固定在天花板上，另一端系在一个质量为 m 的物体上。弹簧最初垂直且无拉伸。首先你慢慢托着物体移动到它的平衡位置，即在其初始位置下方距离 h 处；然后重复这一实验，不过，这回让物体自由下落，在它完全停止的瞬间，物体下落到距离其初始位置下方 H 处。(1) 证明 $h=mg/k$。(2) 证明 $H=2h$。请自己试一下这个实验。

解 (1) 在平衡位置，拉力和重力合力为 0，所以

$$k\Delta x - mg = 0, \quad \Delta x = \frac{mg}{k}$$

此时 $\Delta x = h$，即 $h = mg/k$。

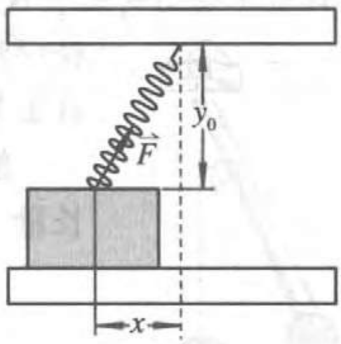
(2) 质量为 m 的物体从初始位置运动到完全停止的过程中，机械能守恒，重力势能转化为弹性势能，

$$mgH = \frac{1}{2}kH^2$$

解得 $H=2mg/k$，而 $h=mg/k$，故 $H=2h$，原结论成立。

【5-28】 如图所示，一质量为 m 的木块放在一个无摩擦的桌面上，并连接到固定在天花板、弹性系数为 k 的弹簧上。木块顶部到天花板的垂直距离为 y_0，水平位置为 x。当木块在 $x=0$ 位置时，弹簧完全不变形。(1) 写出力在 x 方向上的分量 F_x 以 x 为自变量的函数表达式。(2) 证明：当 $|x|$ 足够小时，F_x 正比于 x^3。(3) 如果在 $x=x_0$ 时从静止状态释放木块，而且 $|x_0|\ll y_0$，求当木块到达 $x=0$ 时的速率。○

解 (1) 弹簧伸长量 $\Delta x=\sqrt{x^2+{y_0}^2}-y_0$，则 x 方向的受力



(题 5-28 图)

$$F(x)=-k(\sqrt{x^2+y_0^2}-y_0)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y_0^2}}$$

(2) 当 x 很小时，对 $F(x)$ 进行泰勒展开，并忽略高阶项，得

$$F(x)\approx F(0)+\frac{F'(0)}{1!}\cdot x+\frac{F^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{F^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3$$

$$=-\frac{k}{2y_0^2}\cdot x^3$$

即当 $|x|$ 充分小时，F 正比于 x^3。

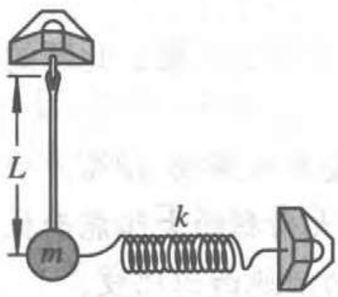
(3) 由功能定理，有

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_{x_0}^{0}F(x)\mathrm{d}x\approx\int_0^{x_0}\frac{k}{2y_0^2}\cdot x^3\mathrm{d}x=\frac{kx^4}{8y_0^2}$$

解得

$$v=\frac{x^2}{2y_0}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

【5-29】 一个质量为 m 的摆锤同时连着一根长度为 L 的轻线和一根弹性常数为 k 的弹簧。当摆锤位置如图所示时，弹簧处于不受力状态。如果将摆锤拉到一边，使得细线与垂直方向成一很小的角度 θ 后释放，当摆锤经过平衡位置时，其速率多大？(提示：以弧度为单位，当 $|\theta|\ll 1$ 时，有 $\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$ 和 $\cos\theta\approx 1-\theta^2/2$。)



(题 5-29 图)

解 成 θ 角时，弹簧拉伸(压缩) $x\approx L\theta$，摆锤重心提高

$$\Delta h=L-L\cos\theta\approx\frac{1}{2}L\theta^2$$

朝平衡位置移动时，机械能守恒，重力势能与弹性势能均转化为动能，所以

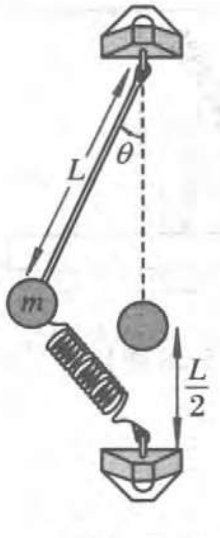
$$\frac{1}{2}mv^2-0=mg\Delta h+\frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$v=\theta\sqrt{gL+\frac{kL^2}{m}}$$

【5-30】 一个单摆吊在天花板下，并连接一根弹簧，该弹簧固定在单摆支架正下方的地板上(如图)。摆锤的质量为 m，单摆的长度为 L，弹簧的弹性系数为 k。

弹簧不受力时的长度为 $L/2$，天花板到地板间的距离为 $1.5L$。单摆被拉到一侧，使得摆线与垂直方向成 θ 角，然后从静止状态释放。请给出摆锤在支架正下方时的速率。



（题 5-30 图）

解 摆动中机械能守恒。根据余弦定理，可得初始时，弹簧伸长量

$$x=\sqrt{(1.5L)^2+L^2-2\times1.5L\times L\times\cos\theta}-\frac{1}{2}L$$
$$=(\sqrt{3.25-3\cos\theta}-0.5)L$$

小球上升高度

$$h=(1-\cos\theta)L$$

机械能守恒方程为

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh+\frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}(3.5-3\cos\theta-\sqrt{3.25-3\cos\theta})L^2+2(1-\cos\theta)gL}$$

【5-31】 燃烧 1 L 汽油释放的化学能约为 3.4×10^4 kJ。请估算中国所有的车辆一年内消耗的总能量以及它占中国一年内消耗的总能量（目前大约为 5×10^{20} J）的百分比。

提示 用“中国车辆年总耗油数×燃烧热/总能量”即可得到结果。此题的关键在于中国车辆年总耗油数需要查阅资料并加以合理估计。

【5-32】 目前的太阳能面板把太阳能转换成电能的最大效率为 12%。中国西部太阳能的年总辐射约为 $170\ \mathrm{kcal\cdot cm^{-2}}$。计算需要多大面积的太阳能面板才能满足中国一年的能量需求（大约为 5×10^{20} J），并与我国的陆地面积比较。

解 按照 1 cal = 4.18 J 进行换算。可得所求面积为

$$S=\frac{5\times10^{20}\ \mathrm{J}}{12\%\times4.18\times170\times10^4\times10^3\ \mathrm{J\cdot m^{-2}}}$$
$$=5.9\times10^{11}\ \mathrm{m^2}$$

我国陆地面积约为 $9.6\times10^{12}\ \mathrm{m^2}$，所以上述面积约占我国陆地面积的 6%。

【5-33】 一位 90 kg 的篮球运动员、一个篮球筐和地球组成一个系统。当运动员站在地板上，篮球筐边缘水平时，该系统的势能为 0。当运动员挂在篮球筐边缘时，篮球筐的边缘下移 12 cm，求该系统的总势能。假设当运动员站在地板上时，质心离地板 0.90 m，当他悬挂在篮球筐上时，其质心离地板 1.4 m。篮球架的质量

忽略不计。

解 当运动员挂在篮球筐边缘静止时，其垂直方向受力平衡，所以

$$mg = kx$$

可解出

$$k = \frac{mg}{x} \approx 7.4 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

系统总势能为重力势能和弹性势能总和：

$$U = mgh + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= 90 \times 9.8 \times (1.4 - 0.9) + \frac{1}{2} \times 7\,350 \times 0.12^2 \approx 4.9 \times 10^2\ (\mathrm{J})$$

【5-34】 质量为 60 kg 的你由高 1.20 m 的台子上跳下，落地时忘记弯曲膝盖，使得减速的距离只有 1 cm。请问落地时作用在你腿上的力有多大？○

解 跳下过程（到落地前的瞬间）中机械能守恒：

$$E_k = E_p = mgh$$

而在减速过程中做功等于能量改变，

$$F \times S = E - 0$$

所以

$$F = \frac{mgh}{s} \approx 7 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

【5-35】 蹦极时你从距离河面 150 m 高的平台上跳下。当你下落 45 m 后，系在你脚踝上的弹性绳开始被拉伸。在到最低点前，你又下落了 75 m。假设你的质量为 60 kg，弹性绳满足胡克定律，并且质量忽略不计。请确定你在最低点的加速度。（忽略空气阻力。）

解 跳下过程中机械能守恒，到最低点时，减少的重力势能全转化为弹性势能，即

$$\frac{1}{2}kx_2^2 = mg(x_1 + x_2)$$

解得 $k = 25\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$。在最低点处，有

$$ma = kx_2 - mg \quad (\text{正方向朝上})$$

解得 $a = 22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

【5-36】 一大峡谷上的桥面距河水 300 m。一位 60 kg 的蹦极爱好者用一根不受力时长度为 45 m 的弹性绳索系在自己的脚上。假设弹性绳索相当于理想弹

簧，质量可忽略，回复力和拉伸量成正比。蹦极者跳下，在最低点他几乎能摸到水面。在无数次的上升和下落之后，他静止在水面以上高 h 处。假设蹦极者为一个质点，忽略空气阻力。(1) 给出 h。(2) 给出蹦极者的最大速率。

解 (1) 取河面为重力势能零点。

蹦极者到达最低点时，绳索拉长

$$x = 300\ \mathrm{m} - 45\ \mathrm{m} = 255\ \mathrm{m}$$

跳下的过程中机械能守恒，重力势能转换为弹性势能，有

$$mgH = \frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$k = \frac{2mgH}{x^2} \approx 5.4\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

静止时，受力平衡，有

$$mg = kx'$$

解得

$$x' = \frac{mg}{k} = 109\ \mathrm{m}$$

则其距离水面

$$h = 300\ \mathrm{m} - 45\ \mathrm{m} - 109\ \mathrm{m} = 146\ \mathrm{m}$$

(2) 蹦极者处于平衡位置时，速度达到最大。由机械能守恒，有

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

解得

$$v = \sqrt{2g(H-h) - \frac{k}{m}x'^2} \approx 44\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

【5-37】 某人计划从 60.0 m 高处的热气球上玩蹦极。在初步测试中，他静止悬挂在一根 5.00 m 长的弹性绳下，绳拉长了 1.50 m。他打算由静止状态从热气球上跳下，在离地面 5.00 m 处停止下落。把他的身体看成质点，绳索的质量忽略不计且遵循胡克定律。(1) 他应该用多长的弹性绳？(2) 他的最大加速度为多少？

解 (1) 设 5.00 m 长的绳子的弹性系数为 k_1，静止悬挂，受力平衡，有

$$k_1 \Delta x = mg$$

设用的绳子长度为 l，因为弹性系数 k 与绳长成反比，故有

$$\frac{k_1}{k} = \frac{l}{5}$$

到达最低点时，根据机械能守恒，有

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}k(\Delta h - l)^2$$

其中 $\Delta h = 60.0\ \text{m} - 5.0\ \text{m} = 55.0\ \text{m}$。

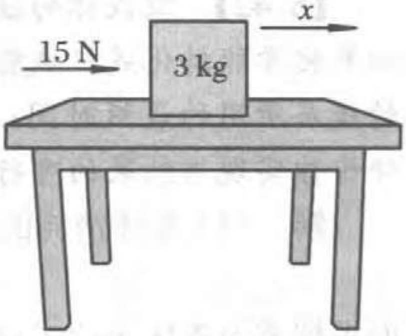
代入数据，解以上三式，得 $l = 25.8\ \text{m}, k = 0.130mg(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$。

(2) 在最低点时加速度最大，

$$a = \frac{k(\Delta h - l) - mg}{m} = 27.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

方向垂直向上。

【5-38】 如图所示，一个 3.0 kg 的盒子静止放在水平桌面上。你用 15 N 的力沿桌面推动盒子移动 2.0 m。盒子和桌面的动摩擦系数为 0.32。求：(1) 外力对盒子－桌子系统所做的功；(2) 由于摩擦损失的能量；(3) 盒子最终的动能；(4) 盒子最终的速度。



(题 5-38 图)

解 (1) 外力对系统做的功为

$$W = Fx = 30\ \text{J}$$

(2) 摩擦损失的能量等于摩擦力做的功的绝对值：

$$W_{损} = \mu mgx = 19\ \text{J}$$

(3) 根据功能定理，盒子最终的动能为

$$E_k = W - W_{损} = 11\ \text{J}$$

(4) 盒子最终的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 2.7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

【5-39】 判断对错：(a) 系统的总能量不会改变。(b) 当你跳起时，地板对你做功，增加你的机械能。(c) 摩擦力所做的功总是使系统的总机械能减少。(d) 把弹簧从不受力状态压缩 5.0 cm 所做的功大于将该弹簧拉伸 5.0 cm 所做的功。

解 (a) 错；(b) 错；(c) 错；(d) 错。

【5-40】 判断对错：(a) 只有保守力能做功。(b) 如果物体仅受保守力作用，那么它的动能不会变化。(c) 保守力做的功等于它相应的势能的改变量。(d) 对位于 x 轴上的一个物体来说，如果作用于它的保守力方向向左，而物体的运动方向向右，则相应的势能减小。(e) 对位于 x 轴上的一个物体来说，如果作用于它的保守力方向向右，而物体的运动方向向左，则相应的势能增加。

解 (a) 错；(b) 错；(c) 对；(d) 错；(e) 对。

【5-41】 力 F_x 对应的势能为 $U=C/x$，其中 C 是正常数。(1) 求 F_x 以 x 为自变量的函数表达式。(2) 在区间 $x>0$，这个力是指向原点方向还是相反？在 $x<0$ 的区间呢？(3) 在区间 $x>0$，x 增加时，U 增加还是减小？(4) 如果 C 是负常数，那么(2)和(3)的结果会如何？

解 (1) $F_x=-\mathrm{d}U(x)/\mathrm{d}x=C/x^2$。

(2) 在 $x>0$ 时，$F_x>0$，F_x 指向正方向，即远离原点的方向；

在 $x<0$ 时，$F_x>0$，F_x 指向正方向，即原点方向。

(3) 因为 C 为正常数，所以在区间 $(0,+\infty)$ 上，x 增加时，U 减少。

(4) 如果 C 为负常数，则(2)和(3)的结果均会与原结果相反。

【5-42】 假设你的最大代谢速率(身体消耗化学能的最大速率)为 1 500 W。如果化学能转化成机械能的效率为 40%，请估算：(1) 你爬上 4 层每层高为 3.8 m 的楼层所用的最短时间；(2) 用(1)的结果，估算你爬上 110 层楼用的最短时间。评价你实现该结果的可行性。

解 (1) 身体消耗的化学能中的 40% 转化为重力势能，即

$$E_{\mathrm{p}} = \eta Pt$$

而根据重力势能表达式，有

$$E_{\mathrm{p}} = mgh$$

解得 $t=mgh/(\eta P)$。假设一个成年人体重为 70 kg，则 $t\approx 17$ s。

(2) $T=110t/4\approx 468$ s，即 7 分 48 秒，以这样的速度爬楼，对一般人而言不现实。

【5-43】 证明：绕地球沿圆形轨道运动的卫星的总能量是势能的一半。

解 不妨设地球的质量为 M，卫星的质量为 m，轨道半径为 r，则卫星的势能为

$$E_{\mathrm{p}} = -\frac{GMm}{r}$$

卫星做圆周运动，万有引力提供向心力，有方程

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad 即 \quad mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

则卫星的动能

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

卫星的总能量

$$E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}E_{\mathrm{p}}$$

即卫星的总能量为势能的一半。

【5-44】 一星球在赤道处自转的线速度大小为 v，而自由落体加速度是两极处的一半，请问从两极发射物体的逃逸速度为多大？○

解 星球上某处由万有引力提供的加速度 $\vec{a}_{引}$ 是该处自由落体加速度 $\vec{g}$ 和自转的向心加速度 $\vec{a}_{向心}$ 之和，即 $\vec{a}_{引}=\vec{g}+\vec{a}_{向心}$。

在两极处，自转线速度为0，向心加速度也为0，引力加速度方向和自由落体加速度方向相同，有 $a_{引,两极}=g_{两极}$。

在赤道处，引力加速度、自由落体加速度和向心加速度的方向均相同，有

$$a_{引,赤道}=g_{赤道}+a_{向心,赤道}$$

根据题意，有

$$g_{赤道}=\frac{1}{2}g_{两极}$$

设星体是质量为 M、半径为 R 的球体，则引力加速度

$$a_{引,赤道}=a_{引,两极}=\frac{GM}{R^2}$$

解以上四式，可得

$$a_{向心,赤道}=\frac{GM}{2R^2}$$

又因为赤道处自转线速度大小为 v，所以有

$$a_{向心,赤道}=\frac{v^2}{R}$$

解以上两式，得 $v=\sqrt{GM/(2R)}$。

设从两极发射物体的逃逸速度为 V，根据能量守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{GMm}{R}=0$$

解得

$$V=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=2v$$

【5-45】 请解释为何宇宙飞船从地球到月球比从月球到地球需要更多的燃料。

解法1 宇宙飞船从地球飞往月球的过程中，地球引力做负功，月球引力做正功，飞船需做功克服地球引力；而从月球飞往地球过程中，地球引力做正功，月球引力做负功，飞船做功克服月球引力。地球质量比月球大，因此在同等距离情况下，地球对飞船的引力较大，所以飞船从地球飞往月球过程中克服引力所需要的能量

较大，消耗的燃料较多。

解法 2 考虑地月引力。

在地表附近，

$$U_1 = -\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{Gm_{\mathrm{M}}m}{r - R_{\mathrm{E}}}$$

在月表附近，

$$U_2 = -\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r - R_{\mathrm{M}}} - \frac{Gm_{\mathrm{M}}m}{R_{\mathrm{M}}}$$

所以

$$U_1 - U_2 = Gm_{\mathrm{E}}m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\mathrm{E}}}\right) - Gm_{\mathrm{M}}m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\mathrm{M}}}\right) < 0$$

因此由地表到月表引力势能增加，即要克服引力做功，从而所需能量(燃料)较多。

【5-46】 一个系在一端固定的细绳上的球在竖直平面内做圆周运动，它的机械能始终为 E。请问球在圆周的顶部和底部时受到细绳的拉力差为多大？○

解 在圆周运动过程中，细绳上拉力和小球重力的合力提供圆周运动的向心力(图 5-5)。则在最低点处，有

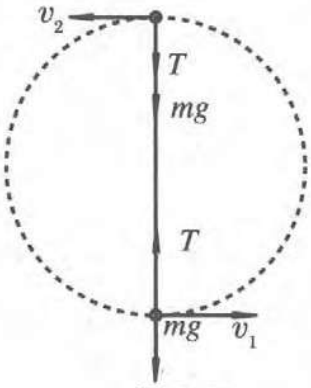


图 5-5

$$F_1 - mg = \frac{mv_1^2}{r}$$

在最高点处，有

$$F_2 + mg = \frac{mv_2^2}{r}$$

取最低点处为重力势能零点。由机械能守恒，知

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg\cdot(2r)$$

解以上三式，得 $F_1 - F_2 = 6mg$。即球在圆周顶部和底部时受到的细绳拉力相差 6 倍的物体的重量。

【5-47】 一单摆由一个质量为 m 的小摆锤和长为 L 的摆线组成。摆锤被拉到一侧，使得摆线水平(如图)。然后摆锤从静止释放。在摆动的最低点，摆线被一个离最低点距离 R 处的小挂钩挡住。证明 R 必须小于 $2L/5$，才能保证摆锤在绕挂钩转一圈的过程中，摆线始终被拉紧。

解 要保证在绕挂钩转一圈的过程中摆线始终被拉紧，那么在摆锤通过最高点的时候摆线必须能保持拉紧的状态。

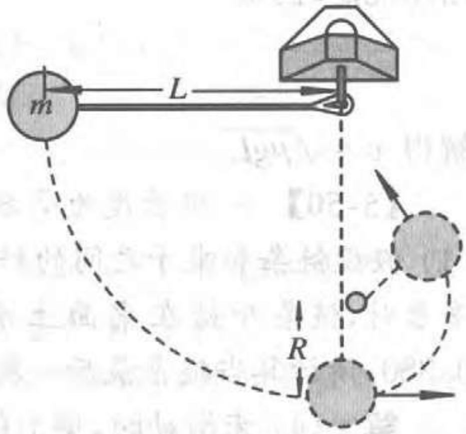
在圆周运动过程中，细绳上拉力和小球重力的合力提供圆周运动的向心力，因此摆锤到达最高点时，有

$$T + mg = m\frac{v^2}{R}$$

要求摆线被拉紧，则要求 $T \geqslant 0$，即 $v \geqslant \sqrt{gR}$。从摆锤静止到摆锤摆到最高点的过程中机械能守恒，有

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 2R$$

将 $v \geqslant \sqrt{gR}$ 代入上式，解得 $R \leqslant 2L/5$。



(题 5-47 图)

【5-48】 一质量为 2.0 kg 的盒子沿与水平面成 30°角的斜面上滑，初始速率为 3.5 m·s⁻¹。盒子和斜面之间的动摩擦系数为 0.32。(1) 盒子在停止前能在斜坡上移动多远？(2) 当它在(1)中结果的一半位置时，速率为多大？

解 (1) 由功能定理，知

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mg\cos\theta \cdot x + mg(x \cdot \sin\theta)$$

解得 $x = 0.80$ m。

(2) 由功能定理，知

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mg\left(\frac{1}{2}x \cdot \sin\theta\right) + \mu mg\cos\theta \cdot \frac{1}{2}x$$

解得 $v = 2.5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

【5-49】 一块长度为 L 的均匀板沿一光滑水平面滑动。后来板滑过边界到了一块粗糙水平面上。板和粗糙水平面之间的动摩擦系数为 μ_k。(1) 给出板的前端超出边界距离 x 时，板的加速度。(2) 当板的后端到达边界时，板停下。计算板的初始速率。○

解 (1) 当板的前端超出边界距离 x 时，所受摩擦力为

$$f = -\mu N = -\mu\frac{x}{L}mg$$

板在水平方向上仅受摩擦力作用，所以

$$a = \frac{f}{m} = -\frac{x}{L}\mu g$$

其中负号表示加速度方向和板运动方向相反。

(2) 摩擦力在整个过程中做的功为

$$W = \int_0^L f\mathrm{d}x = -\int_0^L \frac{x}{L}\mu mg\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mu mgL$$

由功能定理，知

$$0-\frac{1}{2}mv^2=W$$

解得 $v=\sqrt{\mu gL}$。

【5-50】 一根长度为 7.80 m 的均匀链条，初始时伸展开放置在水平桌面上。(1) 假设链条和桌子之间的静摩擦系数为 0.640，请问当链条悬在桌子边缘外至少多长时，链条开始在桌面上滑动。(2) 假设链条和桌子之间的动摩擦系数为 0.380，请计算当链条最后一段脱离桌子时的速率。☆

解 (1) 未滑动时，桌上的链条在水平方向受到静摩擦力和链条垂下部分对它的拉力作用。临界状态时，达到最大静摩擦力，且水平方向上的合力为零。设链条的质量线密度为 λ，临界状态时链条悬在桌子外 x_1 长度时，有

$$\mu_s\lambda(l-x_1)g=\lambda x_1 g$$

解得

$$x_1=\frac{\mu_s}{1+\mu_s}l=3.04\ \mathrm{m}$$

(2) 开始滑动之后，桌上的链条受动摩擦力和链子垂下部分对它的拉力作用。在下滑过程中，摩擦力做的功为

$$W_f=\int_{l-x_1}^{0}-\mu_k\lambda(l-x)g\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mu_k\lambda g(l^2-x_1^2)$$

重力做的功为

$$W_G=\lambda gl\cdot\frac{l}{2}-\lambda gx_1\cdot\frac{x_1}{2}=\frac{1}{2}\lambda g(l^2-x_1^2)$$

根据动能定理，动能变化等于合外力的总功，即

$$\frac{1}{2}\lambda lv^2-0=W_G+W_f=\frac{1}{2}(1-\mu_k)\lambda g(l^2-x_1^2)$$

解得

$$v=\sqrt{\frac{(1-\mu_k)g(l^2-x_1^2)}{l}}=6.34\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

【5-51】 一个限制在 x 轴上的物体的势能满足 $U(x)=9x^2-2x^4$，其中 U 的单位为 J，x 的单位为 m。(1) 给出与该势能相关的力 F_x 的表达式。(2) 假设没有其他力作用在这个物体上，该物体的平衡位置在哪里？(3) 哪些平衡位置是稳定的，哪些是不稳定的？

解 (1) $F_x=-\mathrm{d}U/\mathrm{d}x=-18x+8x^3$。

(2) 令 $F_x=0$，解得 $x=0,3/2,-3/2$，所以该物体的平衡位置在 $x=0,3/2,$

$-3/2$处。

(3) 当 $x\in(-\infty,-3/2)$时，$x<0$，$F_x<0$，x 和 F_x 同向；

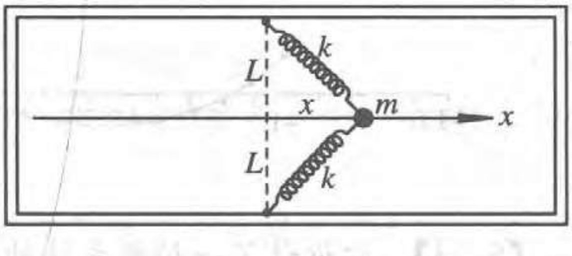
当 $x\in(-3/2,0)$时，$x<0$，$F_x>0$，x 和 F_x 反向；

当 $x\in(0,3/2)$时，$x>0$，$F_x<0$，x 和 F_x 反向；

当 $x\in(3/2,+\infty)$时，$x>0$，$F_x>0$，x 和 F_x 同向。

在 $x=0$ 的两侧，x 和 F_x 均反向，发生微扰可回复到 $x=0$，为稳定平衡。另外两点一侧 x 和 F_x 反向，另一侧 x 和 F_x 同向，为不稳定平衡。

【5-52】 一质量为 1.20 kg 的物体被两个相同的弹簧连接并放置在无摩擦的水平台面上。两个弹簧的弹性系数都为 k，而且初始时不受力。(1) 如图所示，如果沿着垂直于弹簧的初始方向拉动物体移动距离 x。证明物体受弹簧的拉力为 $\vec{F}=-2kx\left(1-\dfrac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\vec{e}_x$。(2) 证明这一系统的势能为 $U(x)=kx^2+2kL(L-\sqrt{x^2+L^2})$。(3) 假设 $L=1.18\ \mathrm{m}$，$k=41.0\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$，请作图表示 $U(x)$与 x 的关系，并确定所有的平衡点。(4) 如果物体被向右拉开 0.480 m，然后释放，请问当它到达平衡点 $x=0$ 时的速率为多大？○



(题 5-52 图)

解　(1) 两根弹簧的初始长度和弹性系数均相同，由对称性可知，它们在垂直于 x 轴方向上的拉力互相抵消，合力为 0，因此它们的合力仅有平行于 x 轴方向的分量。

沿图中方向拉动物体移动距离 x 时，单个弹簧的伸长量为

$$\Delta x=\sqrt{L^2+x^2}-L$$

其平行于 x 轴方向的拉力为

$$\vec{F}_1=-k\cdot\Delta x\cdot\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}\vec{e}_x=-kx\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)\vec{e}_x$$

物体受到的力为两根弹簧的合力

$$\vec{F}=2\vec{F}_1=-2kx\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)\vec{e}_x$$

(2) 若将 $x=0$ 的位置势能定为零，则 x 处的势能为

$$U(x)=U(0)-\int_0^x F(x)\mathrm{d}x=kx^2+2kL(L-\sqrt{L^2+x^2})$$

(3) $U(x)=41x^2+96.8\times(1.18-\sqrt{1.39-x^2})$，如图 5-6 所示。

(4) 由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = U(0.480)$$

解得 $v = 0.78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。

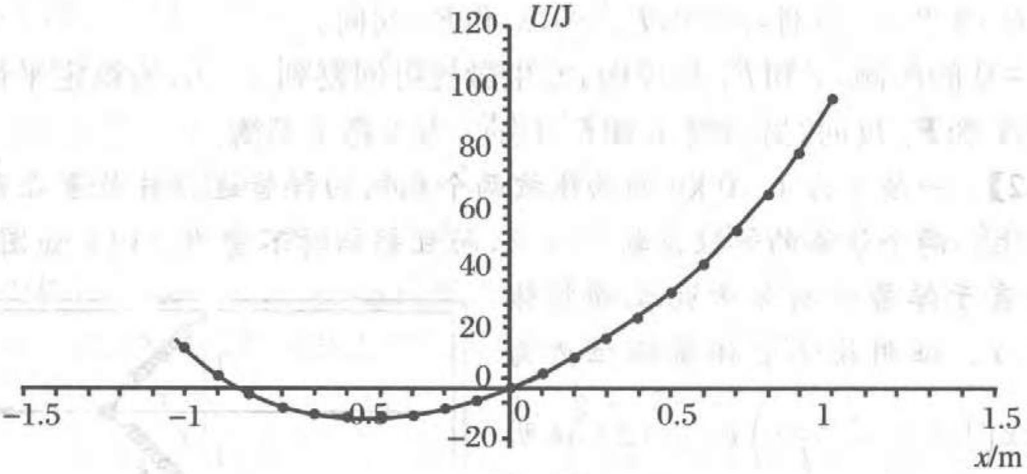
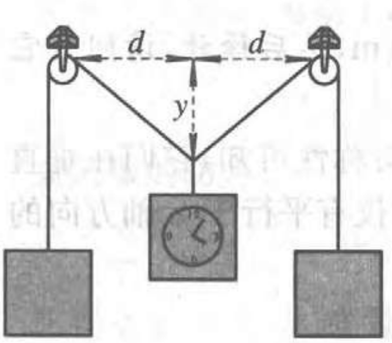


图 5-6

【5-53】 你设计了一种新式挂钟(如图)，但是你担心该钟处于不稳定的平衡状态而不适合投入市场。你打算利用你知道的势能、平衡条件来分析这一情况。钟(质量为 m)被两根轻质缆线通过两个无摩擦、大小可忽略的滑轮悬挂着，缆线均连着质量为 M 的重物来平衡钟受到的重力。(1) 给出以距离 y 为自变量的势能函数表达式。(2) 势能最小时，y 多大？(3) 如果势能最小，那么钟处于平衡。利用牛顿第二定律，证明当 y 取 (2) 中的结果时，钟处于平衡状态。(4) 最后，决定你的产品能否投放市场，即该状态是稳定平衡的还是不稳定平衡的？○



(题 5-53 图)

解 (1) 设 $y=0$ 处为势能零点，那么系统的重力势能为

$$E_p = -mgy + 2Mg(\sqrt{y^2+d^2} - d)$$

(2) 势能最小时，

$$\frac{dE_p}{dy} = 0 \quad 即 \quad -mg + 2Mg\frac{y}{\sqrt{d^2+y^2}} = 0$$

解得

$$y = \frac{md}{\sqrt{4M^2 - m^2}}$$

(3) 当 y 取(2)中的值时，设线上的拉力为 T。如果重物的加速度为 a，根据几何限制，钟的加速度为

$$a' = a\frac{y}{\sqrt{y^2 + d^2}} = \frac{m}{2M}a$$

重物受力满足

$$T - Mg = Ma$$

钟水平方向受力平衡，垂直方向受力为

$$2T\frac{y}{\sqrt{y^2 + d^2}} - mg = ma'$$

解以上三式，得 $T = Mg, a = a' = 0$。

在该情况下，钟和重物所受合力均为0，钟处于平衡状态。

(4) 由(2)可知，此平衡点处为势能最低处，受任何微扰都会使势能增加，而势能倾向于回复到最低处，所以此平衡为稳定平衡。

【5-54】 在修复哈勃太空望远镜时，宇航员更换了一块损坏的太阳能板。当把拆下的太阳能板推开时，宇航员被反向推动。他的质量为60 kg，电池板的质量为80 kg。宇航员和面板最初相对于望远镜是静止的。电池板被推动后，以相对于望远镜0.30 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$的速度移动。那么，宇航员相对于望远镜的速度为多少？

解 宇航员和太阳能板系统不受外力作用，动量守恒，所以

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

解得 $v_2 = -0.40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，即宇航员以相对于望远镜0.40 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$的速率运动，方向和电池板运动方向相反。

【5-55】 你垂直向上抛出一个质量为100 g的球到30.0 m高处。(1) 给出一个合理值表示球在你手中时的位移，并据此估算你抛球时球在你手中的时间。(2) 计算当你抛球时，你的手对球的平均作用力。(3) 在扔球过程中，可以忽略重力对球的作用吗？

解 (1) 人的小臂长约为30 cm，抛球过程中主要靠小臂的摆动，所以估测小球在人手中时位移为20 cm。

设小球离开手的瞬间速率为 v，小球离开手之前，由功能定理，有

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$$

小球离开手之后，仅受重力作用，机械能守恒，所以有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

设球在手中的时间为 t，由动量定理，知

$$F\cdot t = mv$$

解以上三式，得 $F=147\ \mathrm{N}$，$t=0.016\ \mathrm{s}$。

(2) 见(1)。

(3) 由于 $mg=1\ \mathrm{N}\ll F$，所以可以忽略重力对球的作用。

【5-56】 空手道运动员用手击断了一块混凝土砖。假设其手的质量为 0.65 kg，打击到砖块上时的速率为 $5.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，接触后在 5.8 mm 内完全静止。(1) 砖块对他的手的冲量为多大？(2) 估算砖块对他的手作用的大致时间和平均作用力。

解 (1) 砖块对手的冲量等于手动量的改变，

$$I = m(0-v) \approx -3.4\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

负号表示冲量方向和手初始运动方向相反。

(2) 假设手在减速过程中加速度恒定，则有

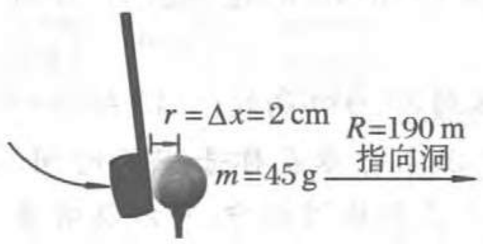
$$s = vt - \frac{1}{2}at^2,\quad v = at$$

解得 $t=2.2\times10^{-3}\ \mathrm{s}$。

所以砖块对手的平均作用力为

$$F = \frac{I}{t} = -1.5\times10^3\ \mathrm{N}$$

负号表示力的方向和手初始运动方向相反。



(题 5-57 图)

【5-57】 已知高尔夫球的质量 $m=45\ \mathrm{g}$，半径 $r=2.0\ \mathrm{cm}$。通常一击之下，球飞出的距离 R 大约为 190 m。假设球离开地面时与水平面成 13° 角，如图所示。请合理估算以下值：(1) 冲量；(2) 碰撞时间；(3) 平均作用力。

解 (1) 高尔夫球的半径和飞行距离相比可忽略，将球当作质点处理。高尔夫球飞出之后水平方向不受力，垂直方向仅受重力作用，其运动方程为

$$x = v_0\cos\theta\cdot t = 190\ \mathrm{m},\quad y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0\ \mathrm{m}$$

解得 $v_0\approx65\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。球离开地面时的动量

$$P = mv_0 \approx 2.9\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

因为杆击球的推力远大于重力，且击球过程时间极短，在击球过程中重力的冲量可以忽略不计。根据动量定理，击球过程中，推力的冲量等于高尔夫球动量的改变量，推力的冲量

$$I = P - 0 \approx 2.9\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

(2)、(3) 击球过程时间极短，可假设为匀加速过程，根据功能定理，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F \cdot \Delta x$$

解得 $F \approx 4.8 \times 10^3\ \mathrm{N}$。

根据动量定理，有

$$t = \frac{I}{F} \approx 6.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

【5-58】 大家都知道滴水穿石。(1) 如果每个水滴的体积为 0.030 mL，从 10.0 m 高处落下，平均每分钟落 15 滴。请问一分钟内水滴对地面作用力的平均值多大？(假设水滴没有在地表积聚。)(2) 比较这个力和一个水滴所受的重力。

解 (1) 一个水滴的质量为

$$m = \rho \cdot V = 3.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg}$$

水滴从高处落下到接触地面之前的整个过程中，仅受重力作用，机械能守恒，所以有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

取垂直向上为正方向，解得

$$v = -\sqrt{2gh} = -14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

一个水滴从和地面接触到完全停止，其动量的改变量为

$$\Delta P_1 = 0 - mv = -mv$$

在1分钟内共有15滴水，因此1分钟内水滴动量的总改变量为

$$\Delta P = -n \cdot mv$$

水滴所受的力为地面对水滴的作用力和水滴重力的合力。由动量定理，水滴所受力的冲量等于水滴动量的改变量：

$$(F - mg) \cdot t = \Delta P$$

所以

$$F = \frac{\Delta P}{t} + mg \approx 4.0 \times 10^{-4}\mathrm{N}$$

方向垂直向上。水滴对地面的作用力是地面对水滴作用力的反作用力，大小和 F

相同，方向相反，即水滴对地面的作用力大小为 $F \approx 4.0\times10^{-4}$ N，方向垂直向下。

(2) 由(1)，一滴水的重力 $G=mg\approx3.0\times10^{-4}$ N。

地面对水滴的作用力的大小和水的重力是同一数量级，因此(1)中碰撞过程中重力冲量不可忽略。

【5-59】 消防队员必须对水管施加 500 N 的力，才能稳住以3 400 L·min^{-1}的速率喷出水的水管。请估计水离开喷嘴时的流速。

解 由动量定理，有

$$F=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v=\rho v\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

解得 $v=8.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

【5-60】 铲雪车在水平路面上以 15 km·h^{-1}的速度前进，每分钟把质量为 25 t 的雪抛到路边，雪被抛出时相对于雪铲的速度为 12 m·s^{-1}，并沿 45°角方向。试确定路面与车轮之间的横向摩擦力，以及铲雪车的牵引力。○

解 以铲雪车前进的方向为 x 轴正方向。垂直铲雪车路径且指向路边的方向为 y 轴正方向。

铲雪车的速率为 $V=15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}=4.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，被抛出的雪相对于车的速率为 $v'=12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。设被抛出的雪相对于地面的速度为 v，则有

$$v_x=V+v'\sin\theta=12.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_y=v'\cos\theta=8.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由动量定理，得

$$F_x=\frac{\mathrm{d}(mv_x)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v_x=5.3\times10^3\ \mathrm{N}$$

$$F_y=\frac{\mathrm{d}(mv_y)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v_y=3.5\times10^3\ \mathrm{N}$$

横向摩擦力为 3.5×10^3 N，铲雪车的牵引力为 5.3×10^3 N。

【5-61】 在一个汽车安全测试中，一辆质量为 1 400 kg 的车撞向一面墙。车的最初和最终速率分别为 $v_1=20.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 和 $v_2=-3.20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。如果碰撞过程持续 0.200 s，给出碰撞产生的冲量和对车的平均作用力。如果车子没有反弹，上述结果又会是什么？假设车的最终速度为 0，碰撞过程仍为0.200 s，墙对车的作用力是变大还是变小？

解 以汽车初始运动方向为正方向，在汽车反弹情况下，碰撞产生的冲量

$$I=m(v_2-v_1)=-3.24\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

平均作用力

$$F=\frac{I}{\Delta t}=-1.62\times10^{5}\ \mathrm{N}$$

若汽车没有反弹，碰撞产生的冲量

$$I=m(0-v_1)=-2.8\times10^{4}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

平均作用力

$$F=\frac{I}{\Delta t}=-1.4\times10^{5}\ \mathrm{N}$$

无反弹情况下产生的冲量和作用力较小。最终速度为0，墙对车的作用力变小。

【5-62】 水从4.0 m高处以50 $\mathrm{kg\cdot min^{-1}}$的速率注入静止在地面上质量为5.0 kg的桶中。试求水注入1 min时桶受到地面的作用力。

解 桶静止，受力平衡，桶受到的地面作用力等于桶和桶内水的重力与注入的水的冲击力的总和。

注入1分钟时，桶和水的总重力为

$$F_1=(M+m)g=(50\ \mathrm{kg}+5\ \mathrm{kg})\times9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=539\ \mathrm{N}$$

水到达桶所在位置时，其速度大小为

$$v=\sqrt{2gh}$$

水注入桶内之后最终达到静止。在时间Δt内注入桶中的水给桶的冲量大小为

$$I=\Delta P=Q\Delta tv$$

其中$Q=50\ \mathrm{kg\cdot min^{-1}}=0.83\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$为注水速率。所以冲击力大小为

$$F_2=\frac{I}{\Delta t}=Q\sqrt{2gh}=7.4\ \mathrm{N}$$

所以桶受地面的作用力大小为$F=F_1+F_2=546.4\ \mathrm{N}$，方向竖直向上。

【5-63】 水流以0.300 $\mathrm{L\cdot s^{-1}}$的速率从2.50 m高处落入台秤上一个质量为0.800 kg的桶里。如果桶原先是空的，那么从水开始在桶中积累到5.00 s时，台秤的读数为多少？

解 方法同题5-62，台秤的读数为24.6 N。

【5-64】 一条质量为M、长度为L的均匀绳子，一端被抓住悬在空中，另一端刚好接触到台秤的秤盘表面。绳子从该位置被放开开始下落。请计算当绳子中点到达秤盘时台秤的读数。☆

解 台秤读数由两部分组成：已落部分的重力和即将接触部分的碰撞作用力。已落部分的重力为

$$G=\frac{1}{2}Mg$$

从绳子下落到绳子中点到达秤盘前一瞬间，绳子中点做自由落体运动，下落高度为 $L/2$，则绳子中点到达秤盘前一瞬间的速率为

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{L}{2}}$$

碰撞产生的力

$$F' = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v = \frac{\frac{M}{L} v \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} v = \frac{M}{L} v^2 = Mg$$

故台秤读数为

$$F = G + F' = \frac{3}{2} Mg$$

【5-65】 质心定理与动量守恒是什么关系？○

解 由体系的动量守恒，有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

即

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \\ &= (m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \\ &= (m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

所以有

$$(m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \vec{0} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \vec{0}$$

因此孤立体系的质心做匀速直线运动或静止，即质心定理，是动量守恒的另一种表述方式。

【5-66】 动量守恒、动量矩守恒与牛顿第三定律有什么关系？○

解 牛顿第三定律是系统在不受外力作用下动量守恒成立的条件。只要系统不受外力作用，即使系统内部各部分有相互作用力，动量守恒也成立。例如，若系统中质点 A 对质点 B 有作用力 F，由牛顿第三定律，B 对 A 有大小相等、方向相反的反作用力 $-F$，系统中 A 对 B 的作用力的冲量和 B 对 A 的反作用力的冲量大小相等、方向相反，其和为零，系统动量守恒。动量矩守恒和牛顿第三定律之间的关系同理可得。

【5-67】 判断对错：(a) 系统在机械能不守恒的情况下，动量可能是守恒的。

(b) 在系统动量守恒的情况下，一定没有外力作用于这个系统。(c) 只有在有净外力作用于系统上时，系统质心的速度才会改变。

解 (a) 对；(b) 错；(c) 对。

【5-68】 有两个球体，一个质量为 M、半径为 R，另一个质量为 $2M$、半径为 $3R$，静止在球心间距为 $12R$ 的位置上。假设两个球只受到彼此之间的作用力，释放后相互接近。当它们碰撞时，每个球的速率为多大？

解 两球体之间的相互作用力仅仅有二者间的万有引力。根据机械能守恒和动量守恒，有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}Mv_1^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2Mv_2^2=-\dfrac{GM\cdot 2M}{12R}-\left(-\dfrac{GM\cdot 2M}{R+3R}\right)=\dfrac{GM^2}{3R}\\ Mv_1-2Mv_2=0\end{cases}$$

解得

$$v_1=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{GM}{R}},\quad v_2=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

【5-69】 在火箭上天成为常事之前，人们都普遍错误地认为火箭必须向后推某种非真空的物质才能获得反作用力。请解释这个想法为什么是错误的。○

解 因为火箭实际上是靠所喷出气体对火箭的反作用力为火箭提供动力的，这与所处的环境是否为真空无关。也可以通过动量来分析：火箭及喷出的气体的总动量守恒，以火箭运动方向为正方向，喷出的气体动量改变量为负，所以火箭的动量改变量为正，动量增加，同样与环境是否为真空无关。

【5-70】 阿波罗登月计划中的土星5号火箭的初始质量 M_0 为 2.85×10^6 kg，其中73.0%为燃料质量，燃料消耗速率为 $13.84\times10^3\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$，推力 F 为 34.0×10^6 N。请计算：(1) 排出的废气相对于火箭的速率；(2) 燃烧时间 t；(3) 点火时的加速度；(4) 在燃料完全耗尽那一刻的瞬时加速度；(5) 火箭的最终速度。○

解 (1) 由变质量物体的运动方程

$$F=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_{\mathrm{r}}$$

解得 $v_{\mathrm{r}}=2.46\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(2) $t=\dfrac{M_0\times73\%}{\mathrm{d}m/\mathrm{d}t}=150$ s。

(3) $a_0=\dfrac{F}{M_0}-g=2.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

(4) $a_1=\dfrac{F}{M_0\times(1-73\%)}-g=34.4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

(5) 火箭变质量物体的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-mg,\quad 即\quad \mathrm{d}v=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}-g\mathrm{d}t$$

两边积分,得

$$v=v_r\ln\frac{M_0}{M_0\times(1-73\%)}-gt=1.74\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

【5-71】 火箭由静止垂直向上发射,靠向后喷射质量前进。相对于火箭的喷射速度 u 不变,质量变化率为常量,重力加速度的变化可以忽略。试给出:(1) 火箭加速度随时间的变化关系;(2) 火箭上升高度与时间的关系(给出积分表示即可,不必求出积分)。○

解 (1) 因为质量变化率为常量,可设 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=-k$($k$ 为正常数,负号表示质量减少),则 t 时刻火箭的质量为

$$m=m_0-kt$$

由变质量物体的动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-mg$$

可得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{ku}{m}-g=\frac{ku}{m_0-kt}-g$$

(2) $h=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^t a\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^t\left(\frac{ku}{m_0-k\tau}-g\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$。

【5-72】 计算能使火箭从地表发射逃离太阳系的相对于地球的最小发射速度。结果取决于发射方向。解释选择什么方向能使这个发射速度最小。(忽略地球自转和空气阻力。)

解 参见《力学》5.5.3 小节。

【5-73】 从一质量为 M、半径为 R 的星球表面垂直向上发射一物体 m。试证明:如果该物体上升达到的最大高度为 r(物体到星球中心的位置),则发射的最小速度表达式为 $v=\sqrt{2GM(1/R-1/r)}$。根据此公式,推算地球表面垂直发射的物体要完全逃离地球引力场所需要的最小速度(地球的逃逸速度)。

解 (1) 物体上升过程中仅受重力作用,机械能守恒,所以有

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=-\frac{GMm}{r}$$

解得

$$v=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}$$

(2) 物体要完全逃离地球引力场，即 r 趋向无穷大。在(1)所得公式中，令 r 趋于无穷，得 $v=\sqrt{2GM/R}$。代入地球的数据，得 $v=11.2\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$。

【5-74】 大部分卫星在离地表最大高度为1 000 km或更低的高度上绕地球运行；而同步卫星的轨道在地表上方35 790 km处。要发射一个800 kg的卫星到同步轨道需要比发射同样的卫星到1 000 km轨道多耗多少能量？

解 容易证明，沿圆轨道绕地运行的卫星的轨道能量为

$$E=-\frac{GMm}{2r}$$

其中 M 为地球的质量，m 为卫星的质量，r 为卫星轨道半径。由此，发射到更高轨道需要多消耗的能量即两条轨道的能量差，可得（h_1，h_2，R 分别为两条轨道的高度和地球半径）

$$\Delta E=-\frac{GMm}{2(R+h_2)}-\left[-\frac{GMm}{2(R+h_1)}\right]=1.78\times10^{10}\ \mathrm{J}$$

【5-75】 在大型绕地卫星的寿命即将结束的时候，它被操控进入地球大气后完全燃烧掉。这些操控必须非常仔细，以保证大的碎片不会掉到人口密集的地区。假设你负责这个项目。如果一个卫星带有火箭推进装置，你会让火箭朝哪个方向喷气一小段时间，才能让卫星开始螺旋式下降？推进装置关闭后，当卫星离地球越来越近时，它的动能、势能和总机械能会如何变化？☆

解 让火箭向卫星运动方向喷气一小段时间，才能让卫星开始螺旋式下降。

设大气的阻力为 f，取地心为极坐标的原点。因为要有充分的摩擦，所以卫星高度的下降应是十分缓慢的，可以认为在任何一段足够短的时间里，卫星近似地沿着圆轨道运动，则卫星绕地球一周的能量变化为

$$\begin{aligned}\Delta E&=\Delta(T+U)=\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2-\frac{mgR^2}{\rho}\right)=\Delta\left(\frac{GMm}{2\rho}-\frac{mgR^2}{\rho}\right)\\&=\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{mgR^2}{\rho}-\frac{mgR^2}{\rho}\right)=\Delta\left(-\frac{mgR^2}{2\rho}\right)\end{aligned}$$

而 $\Delta E=-2\pi\rho f$，所以

$$\frac{mgR^2}{2\rho^2}\Delta\rho=-2\pi\rho f$$

从而有

$$\Delta\rho=-\frac{4\pi\rho^3f}{mgR^2},\ \Delta V=\frac{mgR^2}{\rho^2}\Delta\rho=-4\pi\rho f<0,\ \Delta T=\Delta E-\Delta V=2\pi\rho f>0$$

所以卫星的动能增大，势能减小，总机械能减小。

【5-76】 设星体的质量具有球对称分布，总质量为 M，试估算它刚好成为黑洞时的半径为多少。

解 成为黑洞时，其逃逸速度恰好为光速。根据逃逸速度公式，应有

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

可得 $R = 2GM/c^2$。

【5-77】 质量为 m 的行星环绕质量为 M 的太阳运动，假定有密度为 ρ 的尘埃遍布在太阳和行星周围的空间。忽略摩擦，试证明尘埃的影响是增加了一个有心力 F'，给出 F' 的表达式以及此时行星所受到的作用力和相应的位函数。对这种情况下的第三宇宙速度应如何理解？☆

解 依题意，该尘埃均匀分布，所以可认为尘埃围绕太阳成球形分布。设行星和太阳之间的距离为 r，根据《力学》4.3.2 小节的内容可知，在半径为 r 的球体之外的均匀分布的尘埃对该行星的引力会互相抵消，只有在半径为 r 的球体内的尘埃才会对该行星受到的引力有贡献，这部分尘埃产生的引力相当于它们的质量全集中于质心时对行星产生的引力。

尘埃在半径为 r 的球体内的质量为 $(4/3)\pi r^3\rho$（太阳半径 R 和 r 相比可忽略），质心位于太阳的位置，尘埃对行星的作用力为

$$F' = G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr$$

行星受到的总作用力为

$$F = \frac{GMm}{r^2} + \frac{4}{3}\pi\rho Gmr$$

位函数为

$$U = \int F\mathrm{d}r = -\frac{GMm}{r} + \frac{2}{3}\pi\rho Gmr^2$$

当 $r\to\infty$ 时，有 $U\to\infty$，引力势能随距离不断增大，故飞船始终无法挣脱引力影响，所以没有第三宇宙速度。

【5-78】 为了证明即使是聪明的人也会犯错，请考虑一个常见的问题：“在无风的情况下，一艘帆船停在水面上。为了让帆船向前运动，一个船员在船尾安装了一台风扇，对着船帆吹。解释为什么帆船不会动。”该题的初衷是风吹动船帆的力和风推动风扇的力会互相抵消，因而船不动。然而，一名学生向老师指出：帆船实际上是往前动的。你怎么看？

解 实际上，帆船不动的条件是空气对电风扇的反作用力和空气对帆的作用

力大小必须严格相等。电风扇是将空气从静止加速到 V，速度为 V 的空气到达风帆时速度为V'，而帆对空气的作用力将空气从速度 V'降到速度 V_0的，帆船不动则要求 $V=V'$且 $V_0=0$，而这两点都是保证不了的。例如，当风扇和风帆相距很近时，由风扇鼓向风帆的风几乎会被“反弹”回去，这样空气最终速度 V_0为负的，风帆受到的力会大于电风扇受到的力，整个装置会变成一个向后喷气的发动机，从而使船向前运动；又，如果风帆离电扇很远，风在到达风帆时已经由于空气摩擦减速甚至停止了，那么帆上风压会很小或者为零，整个船其实只受到空气对风扇的反作用力，因而船将向后运动。该题目的初衷不能得到证明，其实是因为出题人混淆了有关平衡受力、作用力与反作用力的一些概念。具体情况必须依照不同的实验条件来确定。

【5-79】 两位宇航员面对面静止在太空中。一位质量为 m_1 的宇航员向另一位质量为 m_2 的宇航员投掷一个质量为 m 的球。第二位宇航员接到球后再投回给第一位。每一次投掷，球相对于投球者的速率都为 v。在每个宇航员都投了一次球又接了一次球之后，(1) 宇航员的速度为何？(2) 宇航员系统的动能变化多大，其能量从何而来？

解 (1) 两位宇航员和球构成的系统不受外力作用，在整个过程中动量守恒。

(a) 宇航员1第一次投出球的过程。宇航员1和球构成的系统不受外力作用，动量守恒。球投出之后，宇航员1的速度为 v_{11}，球的速度为 v_{01}，根据题意，有

$$m_1 v_{11} + m v_{01} = 0, \quad v_{01} - v_{11} = v$$

(b) 宇航员2第一次接到球的过程。宇航员2和球构成的系统不受外力作用，动量守恒。接到球后，宇航员2的速度为 v_{21}，球的速度为 v_{02}，根据题意，有

$$m v_{01} = m v_{02} + m_2 v_{21}, \quad v_{02} = v_{21}$$

(c) 宇航员2第一次投出球的过程。宇航员2和球构成的系统不受外力作用，动量守恒。投出球之后，宇航员2的速度为 v_{22}，球的速度为 v_{03}，根据题意，有

$$m v_{03} + m_2 v_{22} = m v_{02} + m_2 v_{21}, \quad v_{03} - v_{22} = -v$$

(d) 宇航员1第一次接到球的过程。宇航员1和球构成的系统不受外力作用，动量守恒。接到球后，宇航员1的速度为 v_{12}，球的速度为 v_{04}，根据题意，有

$$m v_{03} + m_1 v_{11} = m v_{04} + m_1 v_{12}, \quad v_{04} = v_{12}$$

此时，每个宇航员都投了一次球又接了一次球，解以上八个式子，可得此时宇航员的速度：

$$V_1 = v_{12} = -\frac{m m_2 (2m_1 + m)}{(m_1 + m)^2 (m_2 + m)} v$$

$$V_2 = v_{22} = \frac{m^2 + 2m_1 m}{(m_1 + m)(m_2 + m)} v$$

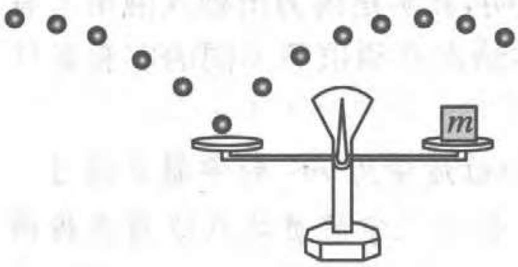
(2) 系统初始动能为零,结束时动能为

$$E_k = \frac{1}{2}(m + m_1) V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

动能变化

$$\Delta E_k = E_k$$

动能的增加来自于宇航员的化学能转化为系统的动能。



(题 5-80 图)

【5-80】 如图所示,一连串质量为 0.50 g 的小玻璃球以每秒 100 个的速度从一个水平管中喷出,下落 0.5 m 后落在天平左侧的托盘中并反弹回原来的高度,应该在天平右侧托盘中放置质量为多少的物体才能使天平保持平衡?

解 小球与托盘发生了完全弹性碰撞。单位时间内与托盘碰撞的小球的质量为

$$k = 100\,\mathrm{s}^{-1} \times 0.50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} = 5.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

在时间 Δt 内小球给托盘的冲量为

$$I = \Delta P = k\Delta t \cdot \Delta v = k\Delta t \cdot 2\sqrt{2gh}$$

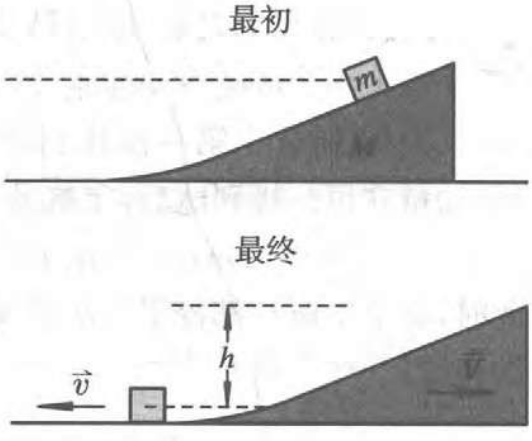
小球对托盘的冲击力为

$$F = \frac{I}{\Delta t} = 2k\sqrt{2gh} = 0.3\,\mathrm{N}$$

则右侧托盘中物体的质量应为

$$m = \frac{F}{g} = 0.03\,\mathrm{kg}$$

【5-81】 一块质量为 M 的木楔放在水平无摩擦的桌面上,一个质量为 m 的木块放在无摩擦的木楔表面(如图)。当木块从其初始位置滑到桌面上时,它的质心位置下降了 h。(1) 给出当木块与木楔分离时,它们各自的速率。(2) 请检查在极限情况 $M \gg m$ 时,你计算的结果是否正确。



(题 5-81 图)

解 (1) 无摩擦力,由机械能守恒,有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

系统水平方向不受外力,该方向动量守恒,有

$$mv - MV = 0$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}},\quad V = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}$$

(2) 当 $M \gg m$ 时,

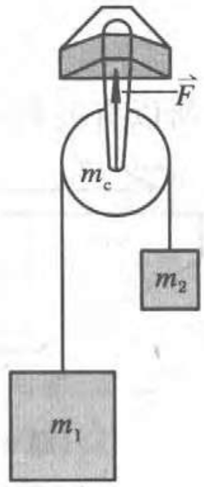
$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}} \approx \sqrt{2gh},\quad V = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}} \approx 0$$

符合木楔固定、木块从斜面上无摩擦下滑的实际情况。

【5-82】 当你站立时,你的质心位于你的体内。然而,当你弯腰捡起一个钱包时,质心位置发生变化。请大致给出你弯腰 90° 时质心的位置,说明身体发生什么变化会造成质心位置的变化,解释你的结果。

解 将身体简化为上下两部分考虑,则显然弯腰 90° 时身体的质心分别在上下两部分质心的连线上的某一点。因此当身体弯曲使得身体不是一条直线时,质心总是可能偏离身体内而在身体外的某一位置。

【5-83】 如图所示,阿特伍德机中细绳通过一个质量为 m_c 的固定圆柱体。圆柱体不会转动。细线能在其表面无摩擦滑动。(1) 给出两个物块-圆柱体-细绳系统的质心加速度。(2) 利用牛顿第二定律给出支撑点提供的力 F。(3) 给出连接物块的细线上的张力 T,是否有关系 $F = m_c g + 2T$? ○



(题 5-83 图)

解 (1) 因为细线质量忽略不计,故线上张力处处相等。

设向下为正方向。对物块 1,

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

对物块 2,

$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

由几何约束

$$a_1 = -a_2$$

解得

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,\quad a_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

圆柱体位置始终不变,以圆柱体质心为原点,由两个物块、圆柱体、细绳构成的系统的质心位置满足

$$(m_1 + m_2 + m_c) z_c = m_1 z_1 + m_2 z_2$$

两边对 t 取二次导数,有

$$(m_1 + m_2 + m_c)a_c = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

所以

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_c)} g$$

(2) 由

$$F_{合} = (m_1 + m_2 + m_c)g - F = (m_1 + m_2 + m_c)a_c$$

可得

$$\begin{aligned} F &= (m_1 + m_2 + m_c)\left[1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_c)}\right]g \\ &= \left(m_c + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g \end{aligned}$$

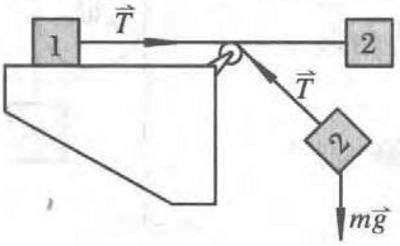
(3) 由(1),可得

$$T = m_1(g - a_1) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

则

$$m_c g + 2T = \left(m_c + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g = F$$

所以有关系式 $F = m_c + 2T$。



(题 5-84 图)

【5-84】 如图所示,两个完全相同的物块由质量不计的细线通过滑轮连接起来。开始时细线的中点处位于滑轮上,物块 1 静止在无摩擦的表面上,物块 2 从细线拉紧且水平的位置开始释放。物块 1 会在物块 2 撞到墙上之前还是之后碰到滑轮?☆

解 物块 1 会在物块 2 撞到墙上之前碰到滑轮。

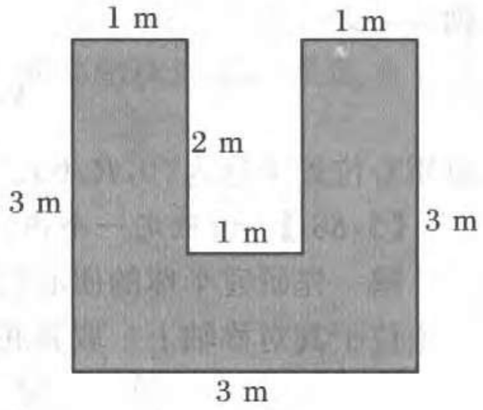
分析两物块所组成的系统的受力情况。重力和支持力始终在竖直方向上。系统在水平方向仅受滑轮的力的作用,滑轮给系统的力的水平分量始终向右。因此系统质心在水平方向上应该向右移动。初始时,两物块所组成的系统的质心在滑轮处。如果物块 2 在物块 1 到滑轮之前碰到墙上,则此时系统质心在滑轮的左侧,即系统质心向左移动了,和受力情况不符。因此,物块 1 会在物块 2 撞到墙上之前碰到滑轮。

【5-85】 求如图所示的形状均匀复合板的质心位置。

提示 将复合板分成几块长方形,再由几个分块的质心位置求总体的质心。或者将板看成一块正质量的正方形板和一块负质量的长方形板的组合,由这两块

板的质心求总质心。

质心位于板的中轴线上，距离板底部1.36 m。



(题 5-85 图)

【5-86】 两个完全相同、长度均为 L 的细棒的底端被粘在一起且成 90°。(1) 给出该组合的质心位置(用 L 表示)，取连接点为原点位置。(2) 如果角度 $\theta \neq 90°$，请给出结果。它在 θ 为 90°时是否与(1)中的结果相同？在 θ 取 0°或 180°时，你的结果合理吗？

解 (1) 由对称性可知，质心必然位于两棒角平分线上。取两棒角平分线为 x 轴的正方向，可知质心的坐标即两棒质心的 x 坐标(两棒质心的 x 坐标相等)，即

$$x_c = \frac{L}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}L$$

(2) 推广到一般情况，则

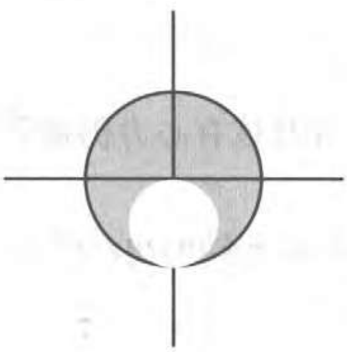
$$x_c = \frac{L}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(也可以用巴普斯定理)。

在 $\theta = 90°$情况下，结果和(1)相符。

在 $\theta = 0°$，两棒重叠在一起，质心位于 $L/2$，结果和实际情况相符。

在 $\theta = 180°$，两棒首尾相连成一条直线，质心位于连接点，即原点位置，结果和实际情况相符。



(题 5-87 图)

【5-87】 如图所示，从一块半径为 R 的圆盘上剪出一个半径为 $R/2$ 的圆孔。请给出剪掉圆孔之后的圆盘的质心位置。

解 以圆心为原点，将圆孔看作是质量为负的小圆盘和完整的大圆盘叠加而成的，显然质心的坐标在 y 轴上。

设 m_1 为半径为 R 的完整圆盘的质量，则面密度 $\sigma = m_1/(\pi R)^2$，负质量小圆盘的面密度为 $-\sigma$，质量为 $m_2 = -\sigma\pi(R/2)^2$。由对称性可知，两圆盘质心的位置均在 y 轴上，其中

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -\frac{R}{2}$$

则

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{R}{6}$$

故质心位置坐标为(0,$R/6$)。

【5-88】 请确定一个内、外半径分别为 a 和 b 的均匀半球壳质心的位置。○

解 先研究半球的质心位置。对于半径为 R 的均匀半球,由于对称性,质心一定位于其对称轴上。取其底边为 x 轴,对称轴为 y 轴。根据质心的定义,有

$$y_c = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{(3/2)\pi R^3}\pi(R\cos\theta)^2 R\mathrm{d}\theta\cos\theta\, R\sin\theta}{M} = \frac{3}{8}R$$

题目中为半球壳,利用负质量法,将半球壳看作一个正质量、半径为 b 的半球和一个负质量、半径为 a 的半球的组合,可得

$$y = \frac{\rho\,\frac{2}{3}\pi b^3\,\frac{3}{8}b - \rho\,\frac{2}{3}\pi a^3\,\frac{3}{8}a}{\rho\,\frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3)} = \frac{3}{8}\,\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}$$

其质心位于对称轴上,距壳底面$\frac{3}{8}\frac{b^4-a^4}{b^3-a^3}$

【5-89】 如果太阳的质量不能当作无限大,开普勒行星运动三定律是否需要修正?若不需要,请详细说明原因;若需要,请说明如何修正以及为什么这么修正。○

解 开普勒定律中,假设中心天体静止或做匀速直线运动。实际上,当太阳的质量不是无限大时,太阳与行星的质心才是"静止"或做匀速直线运动。行星相对于太阳的运动,由于太阳是非惯性系,此时满足

$$m_1\ddot{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}F_{21} \quad (\text{而非 } m_1\ddot{r}_1 = F_{21}) \tag{1}$$

仍然是有心力作用下的运动,因而开普勒第一定律仍然成立;并且该有心力仍是平方反比引力,因而开普勒第二定律也成立。

考察开普勒行星运动第三定律。从式(1)知行星所受引力 $F = Gm_1m_2/\rho^2$ 应用 $F = Gm_1(m_1 + m_2)/\rho^2$ 代替,所以满足

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

即行星公转轨道与半长轴立方之比并非常量,而与该行星的质量有关。开普勒行星运动第三定律不成立。

【5-90】 两个物体做弹性对心碰撞前后相对速度有什么关系?试证明。

解 因为对心碰撞,两物体碰撞前后的速度必定在同一条直线上。设两物体的质量分别为 m_1, m_2,初始时速度分别为 v_1, v_2。则两物体组成的系统质心速度为

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

碰撞前,两物体在质心系中的速度分别为

$$v'_1 = v_1 - v_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$v'_2 = v_2 - v_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

在质心系中,碰撞后两物体的速度大小保持不变,方向各自反向,即碰撞后,两物体的速度分别为

$$v''_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad v''_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

则碰撞后两物体的相对速度为

$$v''_1 - v''_2 = -(v_1 - v_2)$$

因此两物体做弹性对心碰撞前后的相对速度大小相等,方向相反。

【5-91】 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球悬挂在长度分别为 l_1 和 l_2 的不可伸长轻质细绳的下端,且正好可以发生对心碰撞。在两线所在的平面内把第一个小球拉到与铅垂线成 α 角的位置,自静止状态放开,摆下后与静止的第二个小球发生弹性碰撞。试求第一次碰撞后两球偏离铅垂线的最大角度 α_1 和 α_2。

解 不妨设两小球碰撞前的速度为 v,球 1 到碰撞前这一过程中机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = m_1 g l_1(1 - \cos\alpha)$$

解得

$$v = \sqrt{2gl_1(1 - \cos\alpha)}$$

因为是弹性碰撞,碰撞过程中动量和机械能均守恒,所以

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

解得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v$$

碰撞过后，两小球在运动过程中机械能分别守恒：

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g l_1(1-\cos\alpha_1)$$

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g l_2(1-\cos\alpha_2)$$

解得

$$\alpha_1 = \arccos\left[1-\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2(1-\cos\alpha)\right]$$

$$\alpha_2 = \arccos\left[1-\frac{l_1}{l_2}\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2(1-\cos\alpha)\right]$$

【5-92】 一质量为 m、电荷为 q、初速为 v 的粒子，和另一个静止的全同粒子发生正碰。求两个粒子最接近时的距离、最接近时两个粒子的速度和两个粒子的末速度。

解 两个粒子之间的作用力为互斥的库仑力，其碰撞相当于完全弹性碰撞。初始时，粒子 1 受力减速，粒子 2 受力加速，粒子 1 的速率大于粒子 2 的速率，两粒子之间距离不断缩小。在 t 时刻，两粒子速率相等，然后粒子 1 继续减速，粒子 2 继续加速，粒子 1 的速率开始小于粒子 2 的速率，两粒子之间距离开始加大。由此分析过程可知，当两个粒子相对速度为零，即它们的速度相同时，它们之间距离最近，设此时它们之间的距离为 r，速度为 v'。从初始到两粒子距离最近过程中，无外力作用，动量守恒。无非保守内力作用，能量守恒，有

$$mv = 2mv'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2\times\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

解得

$$v' = \frac{v}{2},\quad r = \frac{q}{v\sqrt{\pi\varepsilon_0 m}}$$

从初始到末态（即两粒子重新分开），动量守恒，机械能守恒，有

$$mv = mv_1 + mv_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

解得

$$v_1 = 0,\quad v_2 = v$$

两者交换速度，即第一个粒子静止，第二个速率为 v（另一个解为 $v_1=v$，$v_2=0$，和初始状态相同，由题意可排除）。

【5-93】 父亲瞄准放在儿子头上的苹果射箭。质量为150 g的箭射中苹果前那一刻的速度大小为24.0 m·s^{-1}，方向水平。如果箭嵌入苹果中，并与苹果一起落在儿子身后7.80 m远的地上，求苹果的质量。(假设儿子的高度为1.75 m。)○

解 箭嵌入苹果的过程中，水平方向不受外力，动量守恒，有

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1$$

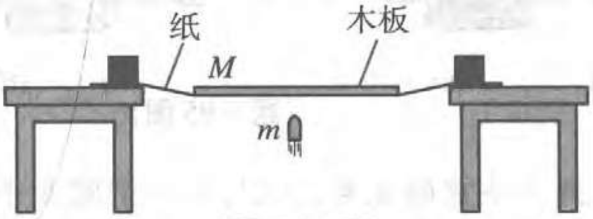
在下落过程中，有

$$\frac{1}{2} g t^2 = h, \quad x = v_1 t$$

解以上三式，得

$$m_2 = m_1\left(\frac{v_0}{x}\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right) = 0.126\ \text{kg} = 126\ \text{g}$$

【5-94】 如图所示，一质量为M的薄木板被一张薄纸托着水平静止在空中，一颗质量为m的子弹从下方垂直向上射穿薄木板。薄木板在回落之前升高H。子弹继续上升，到达的最大高度为纸面上方h处。(1) 用h和H表示在子弹刚穿透板之后，子弹和板的垂直向上的速度。(2) 求子弹的初始速率。(3) 给出在这个非弹性碰撞之前和之后系统的机械能。(4) 在碰撞中，多少机械能损耗掉了？○



(题5-94图)

解 (1) 子弹射穿木板之后，木板仅受重力作用，机械能守恒，有

$$MgH = \frac{1}{2} M V^2$$

子弹机械能守恒，有

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2$$

解得子弹穿透板后，板的速度 $V = \sqrt{2gH}$，子弹的速度 $v = \sqrt{2gh}$，方向垂直向上。

(2) 子弹射穿木板过程时间极短，重力作用可忽略，可以认为此过程中动量守恒：

$$m v_0 = M V + m v$$

由此可得

$$v_0 = \frac{M}{m}\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}$$

(3) 碰撞之前，

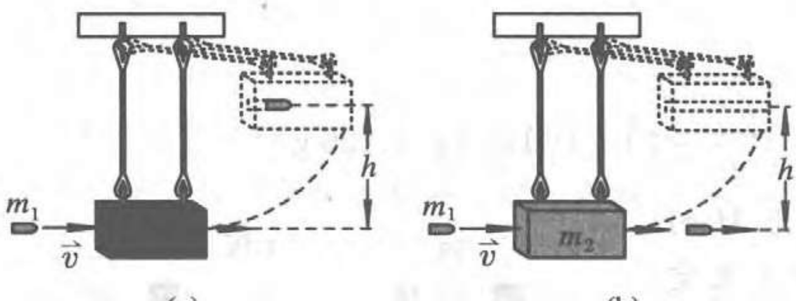
$$E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{M^2}{m}gH + mgh + 2Mg\sqrt{Hh}$$

碰撞之后，

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh + MgH$$

(4) 机械能损耗

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{M(M-m)}{m}gH + 2Mg\sqrt{Hh}$$



(a) (b)

(题 5-95 图)

【5-95】 将一颗子弹打入悬挂在空中的一个木块中(称作冲击摆)。子弹嵌入木块之后,木块带着子弹一起向上摆动。通过记录摆动最高点的高度,就能得到子弹的速度。(1) 如图(a)所示,请计算子弹打到木块前的速率。(2) 用一个空盒子取代实心木块,重复上面的过程。子弹打到盒子并完全穿过盒子。一个激光测速装置测得子弹穿出的速率为穿入前的一半。由这些信息,如图(b)所示,请计算摆能到达的最大高度。○

解 (1) 子弹打入过程极短,可以认为此过程中动量守恒,有

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_f$$

子弹打入之后,冲击摆运动过程中机械能守恒:

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = -(m_1 + m_2) gh$$

解得

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

(2) 子弹打入过程极短,可以认为此过程中动量守恒,有

$$m_1 v_1 = m_1 \frac{v_1}{2} + m_2 v_2$$

子弹打入之后,机械能守恒,有

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = - m_2 g h_2$$

解得

$$h_2 = \frac{(m_1 + m_2)^2}{4m_2^2} h$$

【5-96】 以 $120\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的初始速率和 30.0° 的仰角发射一质量为 3.00 kg 的炮弹。在其弹道最高处，炮弹炸裂成两块，分别为 1.00 kg 和 2.00 kg。爆炸 3.60 s 后，2.00 kg 的碎块落在爆炸点正下方的地面上。请计算：(1) 爆炸后的瞬间 1.00 kg碎块的速度；(2) 从发射点到 1.00 kg 碎块落地点之间的距离；(3) 爆炸释放的能量。○

解 (1) 发射时，

$$v_x = 60\sqrt{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_y = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

弹道最高处垂直速度为 0，只有水平速度：

$$0 - v_y = -gt,\quad v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

由此可得弹道最高处高度为

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = 183\ \mathrm{m}$$

又由 2.00 kg 的碎块掉落的过程，有

$$-h = v_2 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

解得

$$v_2 = -33.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

即 2.00 kg 碎块爆炸后速率为 $33.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向竖直向下。

爆炸过程极短，重力冲量可忽略，可以认为此过程中动量守恒，有

$$(m_1 + m_2)v_x = m_1 v_{1x},\quad 0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

解得

$$v_{1x} = 312\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_{1y} = 66.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

则

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 319\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad \tan\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = 0.213$$

可得 $\theta = 12.0^\circ$。

爆炸后瞬间，1.00 kg 碎块的速率为 $319\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向与水平方向成 12.0° 角向上。

(2) 从发射点到爆炸点的水平距离为

$$x_1 = v_x \cdot \frac{v_y}{g} = 636\ \mathrm{m}$$

从爆炸后到 1.00 kg 碎块落地，有

$$v_{1y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = -h$$

解得 $t_1 = 15.9$ s。从爆炸点到 1.00 kg 碎块落地点的水平距离为

$$x_2 = v_{1x}t_1 = 4.96\times10^3 \text{ m}$$

则从发射点到 1.00 kg 碎块落地点之间的水平距离为

$$x = x_1 + x_2 = 5.60\times10^3 \text{ m}$$

(3) 爆炸释放的能量等于爆炸前后系统动能的改变量：

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_x^2 = 3.58\times10^4 \text{ J}$$

【5-97】 垂直向上发射一炮弹。它达到最高点时炸裂为质量相等的三块。现在观察到其中一块碎片经过时间 t_1 垂直落到地面，其他两块经过时间 t_2 同时落到地面。请确定炸裂时的高度。○

解 其他两块经过同样时间落到地面，因此爆炸后这两块垂直方向上速率相同。爆炸过程极短，可以认为爆炸过程中动量守恒，仅考虑竖直方向，有

$$mv_{1y} + 2mv_{2y} = 0$$

设爆炸高度为 h，由爆炸后各碎块的运动，有

$$v_{1y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = -h, \quad v_{2y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = -h$$

解得

$$h = \frac{1}{2}gt_1t_2\frac{t_1+2t_2}{2t_1+t_2}$$

【5-98】 一个运动的小球与另一个完全相同但静止的小球发生弹性碰撞(未必对心)。碰撞后两个小球的运动速度有什么关系？

解 碰撞后两小球的速度方向互相垂直，或者两小球中之一的速率为 0。

弹性碰撞过程中动量守恒：

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

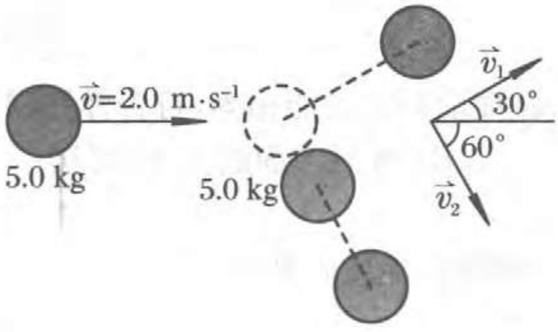
由以上两式，得

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

即碰撞后两球的速度互相垂直，或者两小球中之一的速率为 0。

【5-99】 一质量为 5.0 kg 的冰球以 $2.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率接近另一个静止在无摩擦冰面上完全相同的冰球。碰撞之后，第一个冰球以速率 v_1 沿与原来运动方向成

30°的方向弹出；第二个冰球速率为 v_2，角度为 60°，如图所示。(1) 计算 v_1 和 v_2。(2) 碰撞是弹性的吗？



(题 5-99 图)

解 (1) 两个冰球组成的系统不受外力作用，碰撞过程中动量守恒：

$$mv_1\cos\theta_1 + mv_2\cos\theta_2 = mv$$

$$mv_1\sin\theta_1 = mv_2\sin\theta_2$$

解得 $v_1 = 1.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v_2 = 1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(2) 因为

$$E_{初} = \frac{1}{2}mv^2 = 10\ \mathrm{J},\quad E_{末} = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = 10\ \mathrm{J}$$

故有 $E_{初} = E_{末}$，无能量损耗，所以碰撞是弹性的。

【5-100】 一质量为 3.0 kg 的物块沿 $-x$ 方向运动，速率为 $5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，另一个质量为 1.0 kg 的物块以 $3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率沿 $+x$ 方向运动。(1) 求两个物体组成的系统的质心速度 v_c。(2) 求质心系中这两个物块的速度。(3) 求正面弹性碰撞后，质心系中每个物块的速度。(4) 求实验室系中，每个物块的速度。(5) 通过计算在实验室系中物块的初始和最终的总动能检查你的结果，并比较一下。(6) 若第二个物块质量为 5.0 kg，以速率 $3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 向 $+x$ 方向运动，请重新解答以上问题。○

解 (1) 根据质心的定义，有

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 相对质心速度

$$v_1' = -2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_2' = 6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(3) 在质心系中，两者相碰后速度与原速度方向相反、大小相等，而质心速度是不变的：

$$v_1'' = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_2'' = -6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(4) 碰撞后，在实验室系中，

$$v'''_1 = -1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v'''_2 = -9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(5) 碰撞前，

$$E_{前} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 42\ \mathrm{J}$$

碰撞后，

$$E_{后} = \frac{1}{2}m_1 v'''^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'''^2_2 = 42\ \text{J}$$

碰撞前后总动能相等,符合弹性碰撞条件。

(6) 按照前面的方法,可得

$$v_c = 0\ \text{m·s}^{-1}$$

碰撞前,在质心系中,

$$v_1' = -5\ \text{m·s}^{-1}, \quad v_2' = 3\ \text{m·s}^{-1}$$

碰撞后,在质心系中,

$$v_1'' = 5\ \text{m·s}^{-1}, \quad v_2'' = -3\ \text{m·s}^{-1}$$

碰撞后,在实验室系中,

$$v_1''' = 5\ \text{m·s}^{-1}, \quad v_2''' = -3\ \text{m·s}^{-1}$$

碰撞前后总动能相等,符合弹性碰撞条件。

【5-101】 你应邀分析下面的事故:一位粗心司机撞到前面一辆停在停车标牌前的车的尾部。就在碰撞前,司机猛踩刹车,车轮锁死。被撞车的司机也踩牢刹车,锁住车轮。被撞车的质量为 900 kg,运动的车为 1 200 kg。在碰撞时,两车的保险杠被撞坏。警察根据痕迹认为两车在碰后一起移动了 0.76 m。测试认为,轮胎和路面的动摩擦系数为 0.92。撞车的司机声称当他接近路口时,时速低于 $15\ \text{km·h}^{-1}$。他说的是真话吗?

解 两车碰撞后一起做减速运动,此时两车仅受摩擦力作用,其加速度为

$$a = -\mu g = -9.0\ \text{m·s}^{-2}$$

根据减速运动的运动方程,有

$$0 - v'^2 = 2as$$

可解得两车相撞之后的速度为 $v' = 3.7\ \text{m·s}^{-1}$。碰撞过程动量守恒,有

$$m_2 v = (m_1 + m_2)v'$$

解得

$$v = 6.5\ \text{m·s}^{-1} = 23.4\ \text{km·h}^{-1} > 15\ \text{km·h}^{-1}$$

因此可以判断他说谎。

【5-102】 无聊的你将一个玻璃弹子球丢到下楼的楼梯上,弹起的玻璃球在每一级台阶上都落在相同位置,都弹起相同高度。楼梯每一级台阶的宽度和高度都为 L,每次碰撞的恢复系数都为 e,求玻璃弹子球的水平速度和每次弹起的高度。○

解 设球和第一级台阶碰撞前的速率为 v_0,在第一级台阶上弹起的速率为 v_1,和第二级台阶碰撞前的速率为 v_1',在第二级台阶上弹起的速率为 v_2,和第三级

台阶碰撞前的速率为 v_2'。水平速率保持不变,竖直方向碰撞恢复系数为 e,则有速率关系:

$$v_{0x} = v_{1x} = v_{2x}$$

$$v_{1y} = ev_{0y}, \quad v_{2y} = ev_{1y}'$$

在第一级台阶上弹起之后到和第二级台阶碰撞之前,机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_{1y}^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_{1y}'^2, \quad \frac{1}{2}mv_{1y}^2 = mgh$$

在第二级台阶上弹起之后到和第三级台阶碰撞之前,机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_{2y}^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_{2y}'^2, \quad \frac{1}{2}mv_{2y}^2 = mgh$$

玻璃球在每一级台阶上都落在同样的位置,则有

$$v_x \times t_1 = v_x \times \frac{v_{1y} + v_{1y}'}{g} = L, \quad v_x \times t_2 = v_x \times \frac{v_{2y} + v_{2y}'}{g} = L$$

解得

$$h = \frac{e^2}{1 - e^2}L, \quad v_x = \sqrt{\frac{(1-e)gL}{2(1+e)}}$$

【5-103】 有一流行但可能危险的课堂演示:将一个篮球举在空中,离坚实地面一段距离;将一个棒球举在篮球正上方约 3.00 cm 处;同时释放两球。在篮球刚被地面弹回的瞬间两球相撞。碰撞后的那一刻,棒球向天花板冲去,篮球在空中静止。(1) 假设篮球与地面是弹性碰撞,在两球碰撞之前,它们的速度有什么关系?(2) 假设两球的碰撞是弹性的,那么利用(1)的结果和动量守恒、能量守恒,证明:如果篮球质量为棒球的3倍,碰撞后篮球的速率为0。(这接近真实情况,也是这一演示很神奇的原因。)(3) 如果碰前棒球的速率为 v,碰后速率为多少?(4) 如果我们在棒球和篮球之上放置第三个球,同样同时释放三个球,使得碰撞后棒球、篮球都能停在空中,那么这个球与其他两球的质量比为多少?(5) 如果碰前第三个球的速率为 v,那么碰后速率为多少?☆

解 (1) 篮球和地面碰撞前,两球均做自由落体运动,加速度相同,又同时从静止释放,因此同一时刻速率相同,速度方向相同;篮球和地面为弹性碰撞,碰撞前后篮球的速率相同,方向相反,因此在两球相碰前,两球的速率相同,速度方向相反。

(2) (3) 设棒球质量为 m,篮球质量为 M,碰后棒球的速率为 v_1,篮球的速率为 v_2。碰撞过程极短,可以认为碰撞过程中动量守恒,因为弹性碰撞,所以机械能守恒。如果 $M=3m$,则有

$$3mv - mv = mv_1 + 3mv_2$$

$$\frac{1}{2} \times 3mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \times 3mv_2^2$$

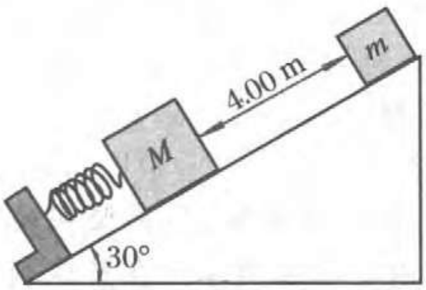
解得 $v_1 = 2v, v_2 = 0$。因此，碰撞后棒球的速率为 $2v$，方向竖直向上，篮球的速率为 0。

(4) (5) 设第三个球的质量为 m'，篮球和棒球相撞和(2)中相同，篮球静止之后，棒球和第三个球相撞，此时棒球的速率为 v_1，方向竖直向上，而第三个球的速率为 v，方向竖直向下。同样由动量守恒和机械能守恒，有

$$mv_1 - m'v = m'v_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m'v^2 = \frac{1}{2}m'v_2^2$$

解得 $m' = m/2, v_2 = 3v$。



(题 5-104 图)

【5-104】 如图所示，一质量 $m = 1.00$ kg 的物块和另一质量为 M 的物块初始时静止在一个无摩擦的斜面上。后者停放在一个弹性系数为 11.0 kN·m^{-1} 的弹簧上。沿斜面两个物块之间的距离为 4.00 m。释放 1.00 kg 的物块，让其下滑与质量为 M 的物块弹性碰撞。碰撞后 1.00 kg 的物块被沿斜面弹回 2.56 m。质量为 M 的物块速度又为 0 的瞬间离初始位置 4.00 cm。请给出 M。○

解 上面的物块下滑至碰撞前一瞬间，这一过程机械能守恒。设该物块碰撞前一瞬间速率为 v_1，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgl_1\sin\theta \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gl_1\sin\theta}$$

同理，可求得该物块碰撞后一瞬间的速率

$$v_2 = \sqrt{2gl_2\sin\theta}$$

碰撞过程中动量守恒，故有(以斜面向下为正方向)

$$mv_1 = Mv - mv_2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m}{M}(v_1 + v_2)$$

碰撞后，下面物块的机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv^2$$

解得 $M = 7.2$ kg。

【5-105】 “力平台”是一种用于分析运动员表现的装置，它可以测量运动员施

加于地面的垂直方向上的力随时间变化的函数关系。一质量为 65.0 kg 的运动员从 0.600 m 的高处由静止向下跳到平台上。在时间间隔 t s($0<t<0.800$)内,她与平台接触,她作用于平台上的力可以用函数 $F=(9\,200\ \mathrm{N\cdot s^{-1}})t-(11\,500\ \mathrm{N\cdot s^{-2}})t^2$ 描述。(1) 运动员从平台获得多少冲量?(2) 她到达平台时的速率为多少?(3) 她离开平台时的速率为多少?(4) 她离开平台后能跳多高?

解 (1) 根据冲量的定义,有

$$I=\int_0^{t_0}F(t)\mathrm{d}t=981\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$$

(2) 运动员跳下到接触平台之前,机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh$$

因此接触平台前速率为 $v_0=\sqrt{2gh}=3.43\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,方向竖直向下。

(3) 以竖直向上为正方向。由动量定理,有

$$I-mgt_0=mv-m(-v_0)$$

解得 $v=3.82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(4) 运动员离开平台之后的运动过程中机械能守恒,有

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

解得 $h=0.744$ m。

【5-106】 两个完全相同的密封玻璃杯,一个装满水,一个是空的,从相同高度自由落向地面,相同的部位着地。问哪一个更容易破?为什么?☆

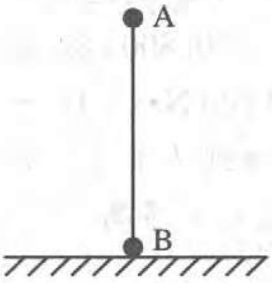
解 空杯更容易破。装满水的杯中,水具有一定的运动速度,碰撞瞬间杯受外力作用停止,但水保持原有运动状态,因此水对杯底有作用力,和撞击的作用力方向相反,可抵消一部分撞击作用力。

【5-107】 左右手各拿一个几乎完全相同的生鸡蛋,一个静止,用另一个快速向上撞(撞击的部位相同),问哪一个破的可能性较大?☆

解 静止的蛋破裂可能性较大。因为运动的蛋中,蛋液具有一定的运动速度,碰撞瞬间蛋壳停止,蛋液仍保持原有运动状态,因此对蛋壳内侧有作用力,和撞击的作用力方向相反,可对蛋壳起一定的保护作用。

【5-108】 质量为 m 的两个小球 A 和 B,用一长为 l 的轻质细杆连接,一开始竖立放在光滑的桌面上,后受扰动而倾倒。试描述这一系统的运动,并求 A 球将要接触桌面的瞬间两个小球的速度。☆

解 考虑两小球和细杆组成的系统,初始时系统静止,地面无摩擦,所以系统



(题 5-108 图)

仅受重力和地面支持力作用，这两个力都沿竖直方向，系统在水平方向不受外力作用，因此质心在水平方向无位移，在竖直方向加速下落。在质心系中两小球绕质心做圆周运动。

分析系统的运动，B 球不脱离地面，因此 B 球在竖直方向速率为 0；在 A 球即将接触桌面的瞬间，因为细杆不可伸缩，所以 A，B 两球沿杆方向（此时即水平方向）速度必须相同，又系统在水平方向不受外力，因此在水平方向动量守恒，两小球的质量也相等，因此 A，B 两球在水平方向速度大小相等，方向相反。由以上两条件可知，此时 A，B 球在水平方向速度均为 0。因此，此时两球只有 A 球在竖直方向速度不为 0，又因下落过程中机械能守恒，可得 $v_A=\sqrt{2gl}$，方向竖直向下，$v_B=0$。

也可列式分析。

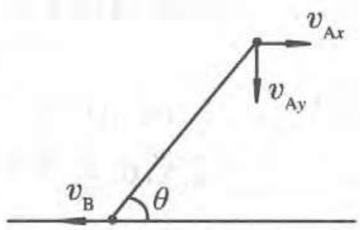


图 5-7

设杆与地面的夹角为 θ，则在任意的 θ 角时，由于 B 球不脱离地面，则其速度只有水平分量，设为 v_B，A 球速度可分解为 v_{Ax} 和 v_{Ay}。如图 5-7 所示。由于杆不可伸缩，则 A，B 两球沿杆方向的分速度必须相同，于是得到

$$v_B\cos\theta = -v_{Ax}\cos\theta + v_{Ay}\sin\theta$$

系统在水平方向不受外力，水平方向动量守恒，有

$$mv_B = mv_{Ax}$$

系统下落过程中机械能能守恒，有

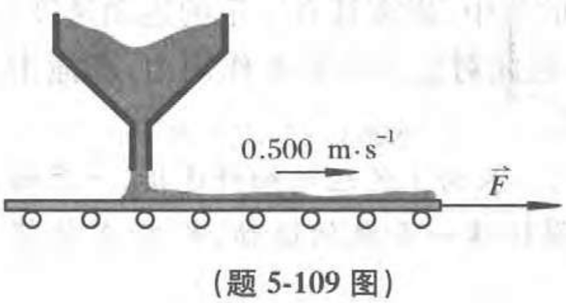
$$mgl(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}m(v_B^2 + v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2)$$

于是在触地时，可以将 $\theta=0$ 代入上述方程，可解得

$$v_A = \sqrt{2gl} \quad (方向竖直向下)$$

$$v_B = 0$$

【5-109】 如图所示，沙子以 6.00 $kg\cdot s^{-1}$ 的速率从料斗落到传送带上。传送带由无摩擦的滚筒支撑。电动机对传送带施加恒定的水平方向上的外力 $\vec{F}$，使得传送带以恒定的速率 0.500 $m\cdot s^{-1}$ 运转。求：(1) 沙子在水平方向上的动量变化率；(2) 传送带对沙子施加的摩擦力；(3) 外力 $\vec{F}$ 的大小；(4) 1 s 内外力 $\vec{F}$ 所做的功；(5) 由于水平运



(题 5-109 图)

动的变化，每秒钟沙子所增加的动能。(6) 为什么(4)和(5)的答案不同？○

解 (1) 动量变化率

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=3.00\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$$

(2) $f=\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=3\ \mathrm{N}$，方向向右。

(3) 要使传送带恒定运转，则外力需与摩擦力平衡，所以 $F=3\ \mathrm{N}$。

(4) $W_F=F\cdot s=F\cdot vt=1.50\ \mathrm{J}$。

(5) 动能增速

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0.75\ \mathrm{J\cdot s^{-1}}$$

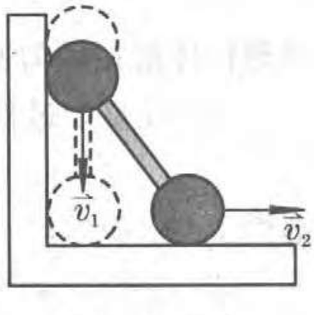
所以每秒钟增加动能 $\Delta E_k=0.75\mathrm{J}$。

(6) 该题的模型中，沙子一落到传送带上就立即获得 $0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度，和实际情况不符。实际上，沙子有一个加速过程，该过程中会有摩擦损耗，一部分能量损耗了。

【5-110】 一条长为 $2l$、质量为 m 的柔软细绳，挂在一光滑的水平轴钉(粗细可忽略)上。当两边的绳长均为 l 时，细绳处于平衡状态。若给其一端加一个竖直方向的微小扰动，则细绳就从轴钉上滑落。试求：(1) 当细绳刚脱离轴钉时细绳的速度；(2) 当较长的一边细绳的长度为 x 时轴钉上所受的力。☆

解 见附录。

【5-111】 哑铃由两个质量为 m 的球和一个质量可忽略的 0.30 m 长的棒连接组成，静止在无摩擦的地板上并靠在无摩擦的墙上，一个球在另一个球的正上方。两球质心之间的间距为 0.30 m。如图所示，哑铃开始沿墙下滑。问在两球速率相同的瞬间，它们的速率为多大？



(题 5-111 图)

解 因为受到地板和墙的几何限制，在下滑过程中，上方的小球 1 的速度 v_1 沿着墙的方向竖直向下，下方的小球 2 的速度 v_2 沿着水平方向。棒不可压缩、不可伸长，所以两小球沿棒的方向上速度相同。设连接两球的棒和水平方向的夹角为 θ ($\theta\leqslant\pi/2$)，则

$$v_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=v_2\cos\theta$$

因此当 $v_1=v_2$ 时，必定有 $\theta=\pi/4$。两小球组成的系统下滑过程中无外力做功，机械能守恒，有

$$mgh = mgh\sin\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}mv^2$$

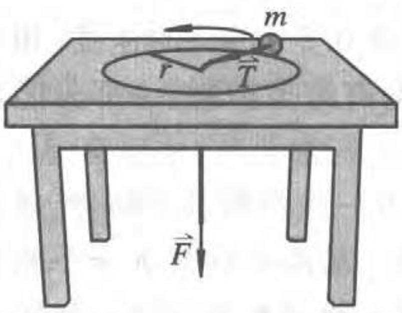
解得

$$v = \sqrt{gh\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 0.93\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

【5-112】 体系的动量矩守恒时，动量是否一定守恒？动量守恒时，动量矩是否一定守恒？试举例分析说明。

解 (1) 体系的动量矩守恒，动量不一定守恒，因为体系受到外力矩为零而合外力不一定为零，如绕太阳运动的地球，动量矩守恒而动量在变化。

(2) 体系的动量守恒，动量矩不一定守恒，例如当物体受到力偶的作用时，物体动量守恒而动量矩不守恒。



(题 5-113 图)

【5-113】 在一无摩擦的桌面上，质量为 m 的物体以速率 v_0 绕一半径为 r_0 的圆周运动，物体被一根穿过桌子上一个小孔的细线拴着，如图所示。将细线缓慢地向下拉，直到物体离孔距离为 r_1，之后，物体沿半径为 r_1 的圆周运动。(1) 用 r_0，v_0 和 r_1 表示最终速率。(2) 用 m，r 和动量矩 $\vec{l}$ 表示物体沿半径为 r 的圆周运动时绳上的张力。(3) 计算在此过程中张力所做的功。○

解 由于拉绳过程十分缓慢，可以近似认为每个时刻物体都在做匀速圆周运动。

(1) 在整个过程中，小球不受外力矩作用，动量矩守恒，有

$$mv_0r_0 = mv_1r_1$$

解得 $v_1 = v_0r_0/r_1$。

(2) 半径为 r 时，其绕中心旋转的线速度为

$$v = \frac{l}{mr}$$

绳上的张力提供圆周运动的向心力：

$$T = m\frac{v^2}{r} = \frac{l^2}{mr^3} = \frac{\vec{l}\cdot\vec{l}}{mr^3}$$

(3) 根据动能定理，有

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}-1\right)$$

（通过张力做功的定义按积分求解的结果与之相同。）

【5-114】 一长为 L、质量为 M 的细棒绕通过其中心的轴以角速度 ω 转动，细棒方向与转轴之间的夹角为 θ，试确定其动量矩 $\vec{L}$。

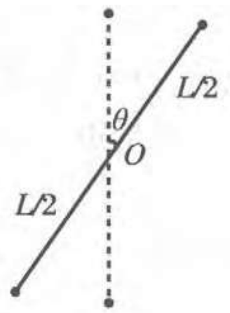


图 5-8

解 设 l 为细棒上某段 $\mathrm{d}l$ 与 O 点之间的距离（图 5-8），则该段相对于转轴的动量矩是

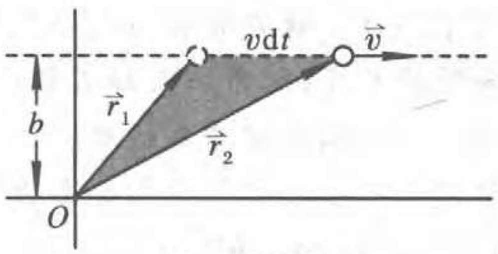
$$\mathrm{d}L = (l\sin\theta)^2\omega\frac{M}{L}\mathrm{d}l$$

两边积分，得

$$L = \int \mathrm{d}L = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{M}{L}\omega\sin^2\theta \cdot l^2\mathrm{d}l = \frac{1}{12}\omega ML^2\sin^2\theta$$

动量矩 $\vec{L}$ 的大小为 $(1/12)\omega ML^2\sin^2\theta$，方向垂直于细棒和 $\vec{v}$ 组成的平面，由右手守则确定。

【5-115】 如图所示，一质量为 m 的物体以速度 $\vec{v}$ 沿与原点 O 的距离为 b 的直线运动。用 $\mathrm{d}A$ 表示从原点 O 指向物体的位置矢量在时间 $\mathrm{d}t$ 内所扫过的面积，证明 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 是一常数，并等于 $l/(2m)$，其中 l 为物体绕原点的动量矩。



（题 5-115 图）

解 根据几何知识可知，在 $\mathrm{d}t$ 时间段内扫过的面积为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}bv\mathrm{d}t$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}bv$$

而物体绕原点的动量矩为

$$l = mvb$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m}$$

【5-116】 行星绕中心天体以圆周轨道运动时机械能与动量矩应满足确定的关系，请导出这一关系。☆

解 在圆周运动中，万有引力提供向心力，有

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

化简,得 $v=\sqrt{GM/r}$。

动量矩

$$J = mvr = m\sqrt{GMr}$$

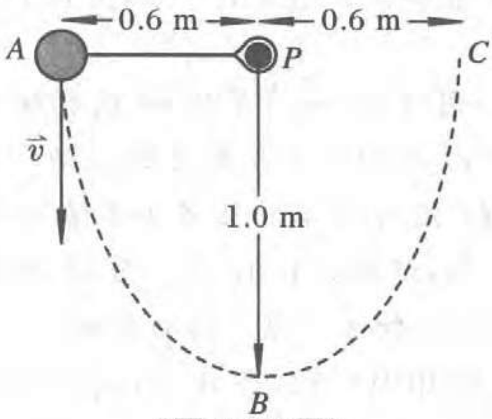
机械能

$$E = E_p + E_k = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2r}$$

联立以上两式,有

$$J^2 + 2mr^2 \cdot E = 0$$

即机械能与动量矩满足的确定关系。



(题 5-117 图)

【5-117】 一质量为 0.20 kg 的质点被连在橡皮带的一端并在无摩擦的水平面上运动,带子的另一端固定在点 P。橡皮带施力大小为 $F=bx$,其中 x 为带的长度,b 为一未知常数;力的方向指向点 P。质点沿图中虚线运动。当它通过点 A 时,速度为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,方向如图所示。$AP$, CP 均为 0.60 m,BP 为 1.0 m。(1) 给出质点在点 B 和 C 处的速度。(2) 试确定 b 的大小。○

解 (1) 质点在无摩擦水平面上仅受有心力作用,无外力矩作用,因此动量矩守恒:

$$mv_A \cdot AP = mv_B \cdot BP = mv_C \cdot CP$$

解得 $v_B=2.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_C=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

(2) 无外力对质点和橡皮带组成的系统做功,机械能守恒:

$$\frac{1}{2}b(BP^2 - AP^2) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

解得 $b=3.2\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$。

【5-118】 一质量为 1.0 kg 的小球通过 1.0 m 长的细线悬挂在一个支点上,线与竖直方向成 30°角。从上方看,该小球在水平面内沿圆周做逆时针运动。(1) 求小球相对于支点的动量矩 $\vec{l}$ 的水平分量和垂直分量。(2) 计算 $\mathrm{d}\vec{l}/\mathrm{d}t$ 的大小,并证明它等于重力施加在支点上的力矩。○

解 (1) 如图 5-9 所示,$m=1.0$ kg, $|\vec{r}|=1.0$ m, $\theta=30°$,小球的速度为 $\vec{v}$,绳

的张力为 T,小球相对于支点的动量矩为$\vec{l}$。

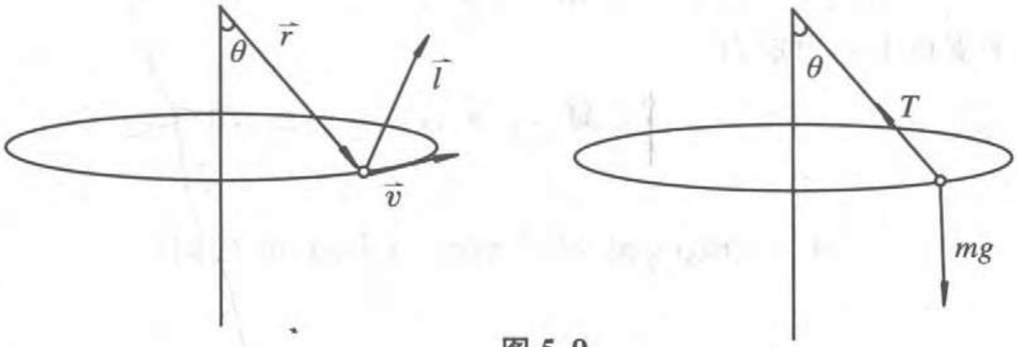


图 5-9

小球在竖直方向静止,在水平方向做圆周运动,因此它在竖直方向受力平衡,水平方向上细线拉力的水平分量提供圆周运动的向心力:

$$T\cos\theta = mg, \quad T\sin\theta = \frac{mv^2}{r\sin\theta}$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{gr\sin^2\theta}{\cos\theta}} = 1.7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

根据动量矩的定义,有

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

则动量矩的方向如图 5-9 所示,垂直于$\vec{v}$和$\vec{r}$组成的平面。动量矩的大小为

$$l = |\vec{l}| = mvr = 1.7\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$$

动量矩 $\vec{l}$ 的水平分量

$$l_{/\!/} = l\cos\theta = 1.5\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$$

动量矩 $\vec{l}$ 的竖直分量

$$l_{\perp} = l\sin\theta = 0.8\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$$

(2) 由动量矩定义,有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

则 $\mathrm{d}\vec{l}/\mathrm{d}t$ 的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}\right| = mr\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|\cos\theta = \frac{1}{2}mgr \quad (\text{方向和 } \vec{v} \text{ 相同})$$

其中

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{a}_{向心}| = \frac{T\sin\theta}{m} = g\tan\theta \quad (\vec{a}\text{ 指向圆心})$$

重力施加于支点上的力矩为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$$

其大小为

$$|\vec{M}| = mgr\sin\theta = \frac{1}{2}mgr \quad (\text{方向和}\vec{v}\text{相同})$$

因此有

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}$$

【5-119】 质量为 1.6×10^3 kg 的陨石在距地表 4.2×10^3 km 的圆形轨道上绕地球运行，突然与另一颗轻得多的陨石发生正碰撞而损失了 2.0%的动能。(1) 碰撞后大陨石的运动符合什么物理定律？(2) 描述其运动轨道。(3) 给出其最接近地球时的距离。☆

解 (1) 碰撞后大陨石仅受地球引力的作用，地球引力为有心力，无力矩作用，因此其运动遵守机械能守恒和动量矩守恒定律。

(2) 由于大陨石损失了动能，所以其轨道近地点会降低，它沿着椭圆轨道运动，这个椭圆轨道的远地点仍在原来圆轨道的高度处。

(3) 设地球的质量为 M，半径为 R，新轨道的近地点高度为 r，陨石速率为 v；记初始轨道高度为 $r_0 = 4.2\times10^6$ m。

碰撞前，圆轨道上的大陨石的动能为

$$E_k = \frac{GMm}{2(R + r_0)}$$

碰撞后，其动能变为原来的 98%，则其速率为

$$v_0 = \sqrt{0.98\frac{GM}{R + r_0}}$$

碰撞后机械能和动量矩守恒，有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}mv_0^2 - \dfrac{GMm}{R + r_0} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{R + r}\\ mv_0(R + r_0) = mv(R + r)\end{cases}$$

解得 $r = 3.8\times10^6$ m。

【5-120】 潮汐的摩擦作用使得地球的自转速度变慢，因而动量矩减小。(1) 太阳和月球对地球上潮汐的形成都有作用，试估计太阳与月球对地球上潮汐的形成，哪一个的作用大。(2) 由于潮汐摩擦，地球自转的动量矩每百年约减少

$9\times10^{25}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$，地球–月球系统的动量矩守恒是如何使这一损失的动量矩转移到月球围绕地球的公转的？会带来什么结果？请作详细分析讨论。☆

解　(1) 月球的作用大。

月球引潮力是月球对地球上海水的万有引力和地球绕地月共同质心平动的惯性离心力之和。设纬度为 θ，则

$$F_{\mathrm{M}x}\approx\frac{2G\Delta mM_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{EM}}^3}R_{\mathrm{E}}\cos\theta$$

$$F_{\mathrm{M}y}\approx-\frac{G\Delta mM_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{EM}}^3}R_{\mathrm{E}}\sin\theta$$

太阳引潮力为太阳对地球上海水的万有引力和地球绕地日共同质心平动的惯性离心力之和，因此

$$F_{\mathrm{S}x}\approx\frac{2G\Delta mM_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{SM}}^3}R_{\mathrm{E}}\cos\theta$$

$$F_{\mathrm{S}y}\approx-\frac{G\Delta mM_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{SM}}^3}R_{\mathrm{E}}\sin\theta$$

其中月球的质量为 7.35×10^{22} kg，地月距离为 3.84×10^5 km，太阳的质量为 1.99×10^{30} kg，日地距离为 1.5×10^8 km，地球半径为 6.37×10^3 km，代入估算可知月球引潮力作用大。

(2) 地球－月球系统无外力矩作用，动量矩守恒。系统的动量矩为地球自转动量矩和月球公转动量矩之和，由于潮汐摩擦，地球自转动量矩减少．为了保持系统动量矩守恒，月球公转动量矩会增加。这会导致月球公转速率增大，月球和地球之间的距离增大。

【5-121】　*以与地面成 θ 的夹角、v 的初速率向上倾斜发射一个质量为 m 的飞行器，该飞行器能达到的最大高度为多少？其轨道是不是椭圆的一部分？如果是，导出其轨道的半长轴；如果不是，说明其轨道是什么。*☆

解　飞行器仅受地球的有心保守力作用，角动量和机械能均守恒。设飞行器到达最大高度时到地心的距离为 r，速率为 v，地球半径为 R，质量为 M。

角动量守恒：

$$mv_0R\cdot\cos\theta=mvr$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

解得

$$r=\frac{GM+\sqrt{G^2M^2-2GMv_0^2\cos^2\theta R+v_0^4\cos^2\theta R^2}}{v_0\cos\theta\cdot R}$$

飞船所受的力始终指向地心,为有心力,所以飞船轨道为椭圆的一部分。飞行器发射时的能量为

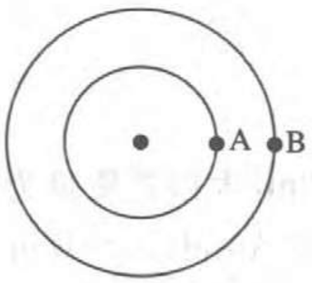
$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}$$

沿椭圆轨道飞行的飞行器能量为

$$E=-\frac{GMm}{2a}$$

解以上两式,得椭圆轨道半长轴

$$a=\frac{GMR}{2GM-v^2R}$$



(题 5-123 图)

【5-122】“旅行者”太空飞船借助了土星的引力作用被加速到逃逸太阳的速度。这是怎么实现的？增加的能量从何而来？

解 见《力学》5.5.4 小节。

【5-123】 如图所示,星球 A 和 B 绕中心天体公转的周期分别为 T 和 $2T$。计划从星球 A 发射一个飞行器飞往星球 B,请问应该在什么时间发射飞行器？如何设计其飞行轨道？给出有关的关键参数。☆

解 飞行轨道为从星球 A 的轨道到星球 B 的轨道的半个椭圆。中心天体位于飞行轨道的一个焦点上,飞行轨道和中心天体的最近距离是 r_A,最远距离是 r_B。根据开普勒行星运动第三定律,有

$$T^2\propto r^3$$

则

$$r_B=\sqrt[3]{\left(\frac{2T}{T}\right)^2}\,r_A=\sqrt[3]{4}\,r_A=1.59r_A$$

飞行轨道半长轴

$$r_C=\frac{r_A+r_B}{2}=1.29r_A$$

根据开普勒行星运动第三定律,有

$$\left(\frac{T_C}{T}\right)^2\propto\left(\frac{r_C}{r_A}\right)^3$$

解得 $T_C=1.47T$。

飞行器从星球A到星球B飞过半个椭圆轨道,所需时间为

$$t = \frac{T_C}{2} = 0.735T$$

在这段时间 t 内,星球B转过的角度为

$$\theta = 360 \times \frac{t}{2T} = 132°$$

若要飞行器到达星球B的轨道时恰好遇到星球B,则飞行器发射时,星球B位于星球A前方$180° - \theta = 48°$处。

【5-124】 假设你负责登月设计,需要让登月舱在月球背向地球的一面着陆;但为安全起见,要登月舱与轨道舱分离的动作在朝着地球的一面完成。登月舱的质量为 m,轨道舱的质量为 M,分离前轨道舱在前、登月舱在后对接在一起沿半径为 R 的圆轨道绕月飞行。分离时,使登月舱相对于轨道舱以速率 v 向后运动,两者脱离,登月舱开始下降。已知月球的质量为 M_M,半径为 R_M。为使登月舱与轨道舱分离后,转过 180°后刚好抵达月球表面,你需要确定:(1) 登月舱和轨道舱分离时的相对速度;(2) 从分离到登月舱着陆的时间。☆

解 (1) 要使登月舱与轨道舱分离之后转过 180°刚好到达月球表面,则着陆轨道为半椭圆,椭圆焦点在月心,该着陆轨道距离月心的最远距离为 R,最近距离为 R_M。着陆轨道的半长轴为

$$r = \frac{R + R_M}{2}$$

设两舱分离前共同速率为 v_0,分离后的那一刻登月舱的速率为 v_1,轨道舱速度为 v_2。两舱分离之前一起绕月飞行,万有引力提供圆周运动的向心力,有

$$\frac{GM_M(M + m)}{R^2} = (M + m)\frac{v_0^2}{R}$$

解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_M}{R}}$$

登陆轨道上的任何飞行器都应该具有能量

$$E = -G\frac{mM_M}{2r}$$

而登月舱在进入登陆轨道的时候能量为

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_M}{R}$$

解以上两式,得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_M R_M}{R(R + R_M)}}$$

两舱分离的过程中，无外力作用，动量守恒，有

$$(m + M)v_0 = mv_1 + Mv_2$$

$$v_1 - v_2 = v$$

解得

$$v = \frac{M + m}{M}\left(\sqrt{\frac{2GM_M R_M}{R(R + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_M}{R}}\right)$$

(2) 设两舱分离之前一起绕月飞行的周期为 T，分离之后登月舱沿椭圆轨道飞行的周期为 T'。两舱分离之前，一起绕月球做圆周运动，万有引力提供圆周运动的向心力，有

$$\frac{GM_M(M + m)}{R^2} = (M + m)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

解得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_M}}$$

根据开普勒行星运动第三定律，有

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 \propto \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

解得

$$T' = \sqrt{\left(\frac{R + R_M}{2R}\right)^3}\,T = \pi\sqrt{\frac{(R + R_M)^3}{2GM_M}}$$

着陆轨道为半椭圆，因此从分离到登月舱着陆的时间为

$$t = \frac{T'}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(R + R_M)^3}{2GM_M}}$$

【5-125】 对称与守恒有什么关系？试作分析。○

解 如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有对称性，则必相应存在一个守恒定律。运动规律对时间原点选择的平移对称性决定了能量守恒；运动规律对空间原点选择的平移对称性决定了动量守恒；运动规律对空间转动的对称性决定了角动量守恒。