Solution for Midterm Review Questions
Mechanics (B), Spring 2025

2025 年 4 月 12 日

Shenyi Huang

A. Basic Concepts

1. 请给出“保守力”定义的两种表述方式，并证明两种表述方式的等价性.

Ans:

(a) 做功与路径无关；存在势能函数.

(b) 以从“做功与路径无关”推导“存在势能函数”为例：做功与路径无关：

$$\int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{-L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

取闭合路径 $L = L_1 - L_2$，则有：

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由斯托克斯定理（旋度定理）：

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由于积分路径选择的任意性，我们有：

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

> 由于梯度的旋度恒为零，这个力一定可以表述成一个势能函数的负梯度形式.

2. 试举一个动量守恒但角动量不守恒的例子.

> **Ans:** 将一个旋转的匀质圆盘（质心不动）放置在一个粗糙的水平面上，圆盘减速转动的过程

3. 如果我国的交通规则由原来的右侧通行改为左侧通行，那么一天的长度是增加、减少还是不变？为什么？

> **Ans:** 不变，因为宏观上来讲，大量汽车的行驶方向是随机的（可以理解为，有往前开的汽车，必定有对应的往反方向开的汽车），故改变通行方向**不会**影响整个体系的总角动量，进而不会影响地球自转的角速度.

4. 试定性画出地球-月球系统及周围空间的引力势能在平面上的二维分布曲线，不考虑除地球、月球以外其他天体的影响.

> **Ans:** A4.

5. 如果太阳的质量不能被当作无穷大，开普勒行星运动三定律是否需要修正？若需要，请说明如何修正；若不需要，请说明理由.

> **Ans:** 需要修正：
> 对于开普勒第三定律：$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$
> 当太阳的质量不为无穷大（即不能认为太阳质量远大于行星质量）时，这里的行星质量 m 需要使用其约化质量 $\mu = \frac{Mm}{M+m}$，其中 M 为太阳质量.
> **注**：当太阳质量远大于行星质量时，约化质量近似等于行星质量；而且，如果同时考虑多个行星的话，本题将无解，因为引力相互作用下无其他约束的三体问题是没有解析解的！

6. (a) 为什么动量和动能是两个相互独立的物理量，即使它们都是由质量和速度相乘得来的？
   (b) 为什么动能的定义中需要有一个系数 $\frac{1}{2}$？

> **Ans:**
> (a) 动量的变化表现了力在时间上的累积，而能量的变化表现了力在空间上的累积.
> (b) 来源于动能的推导：
> $$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot \mathbf{v}dt = m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{1}{2}d(m\mathbf{v}^2)$$
> 动能定理：$dW = \Delta E_k$，故存在一个系数 $\frac{1}{2}$.

7. 质点的运动方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，在计算质点运动的速度和加速度时，有人先求出 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v = \frac{dr}{dt}$ 和 $a = \frac{d^2r}{dt^2}$ 求得 v 和 a 的值. 也有人先计算出速度和加速度的分量，再合成求得 v 和 a 的值，即为 $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$ 和 $a = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2}$. 这两种方法哪一种正确？为什么？

> **Ans:** 第二种方法正确；第一种方法忽略了极坐标基矢的求导，或者说是，这个方法用错了极坐标下速度和加速度的公式！

B. Estimation Problems

1. 估算水上报告厅水的体积.

> **Ans:** 长约 30 m，宽约 10 m，水深约 2 m，水的体积约为 600 m^3

2. 请给出估算你竖直向上抛出一个球时，球的出手速度的方法，忽略空气阻力.

Ans: 以一栋房子为参照，观察球最高到达的位置。
比如，竖直向上抛出的球最高可到达 3 楼楼顶处，一般地，一层楼层高约 3 m，则上升高度约为 9 m；根据运动学公式可得出手速度：

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 9} \approx 13.4\, m/s$$

3. 假设太阳到地球的距离已知，请设计一个简便、易行、安全的方法，估测太阳的大小.

Ans: 可以利用小孔成像法（答案不唯一）：
在硬纸板中戳一个小孔，制作成一个简易针孔投影仪；将纸板对准太阳，让阳光通过小孔射到屏幕（白纸）上，调整纸板和白纸之间的距离 L，直到图像清晰.
用尺子测量成像在白纸上的太阳像直径 d 和小孔到屏幕的距离 L.
假设太阳的直径为 D，日地距离为 R（已知，$R = 1.5 \times 10^{11}\, m$），那么：

$$\frac{d}{L} = \frac{D}{R}$$

即太阳直径：

$$D = \frac{d \cdot R}{L}$$

4. 假如你生活在海边，非常熟悉船的各种特征尺度以及船所在位置到岸边的距离，根据这些条件你能不能估计出地球的大小？

Ans: 可以：
假设船的高度为 h，当船到岸边的距离为 L 的时候不再能观察到船. 地球半径（待估计）为 R. 由几何关系可得;

$$\frac{L}{R} \approx 2\theta$$

$$\frac{h}{L} \approx \theta$$

这里，2θ 为船行驶距离所对应地球的圆心角，θ 很小，故可以作以上近似. 因此，地球的半径：

$$R \approx \frac{L^2}{2h}$$

C. Basic Problems

1. 离水面高度为 h 的岸上有人用绳索拉船靠岸，人以恒定速率 v_0 拉绳，求当船离岸的距离为 s 时，船的速度和加速度.

Ans: 见《力学与理论力学》1.32

2. 已知一个质点在双曲线的一支 $r = \frac{p}{1-\epsilon cos\theta}$ 上运动。在运动过程中，$r^2\dot{\theta}$ 为常数 k，且当 $\theta = \pi$ 时，质点的速率 $v = v_0$

   (a) 写出 ϵ 和 θ 的取值范围

   (b) 求出任意位置质点的速度

   (c) 求出任意位置质点的加速度

Ans:

(a) $\epsilon > 1$, $\theta \notin [-arccos\frac{1}{\epsilon}, arccos\frac{1}{\epsilon}]$

(b)

$$r^2\dot{\theta} = k \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

$$v_r = \dot{r} = \frac{\epsilon p sin\theta}{(1-\epsilon cos\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{\epsilon p sin\theta}{(1-\epsilon cos\theta)^2}\frac{k}{r^2} = \frac{k\epsilon sin\theta}{p}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{k}{r} = \frac{k(1-\epsilon cos\theta)}{p}$$

(c)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{k\epsilon cos\theta}{p}\dot{\theta} - \frac{k^2}{r^3} = \frac{k^2\epsilon cos\theta}{p^3}(1-\epsilon cos\theta)^2 - \frac{k^2}{p^3}(1-\epsilon cos\theta)^3$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

注：极坐标下速度和加速度的表达式需牢记

3. 收尾速度问题. 假设空气对物体的阻力 $\mathbf{f} = -\beta\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是物体的速度，β 是一个与速度无关的常数. 现在考虑空气中一个自由下落的物体，将 z 轴的正方向取为竖直向下.

   (a) 写出物体运动的牛顿方程

   (b) 当物体的速度为多少时，物体不再加速（这个速度叫做收尾速度）?

   (c) 导出物体速度随时间的变化关系：$v(t) = v(t_0)(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}})$

Ans:

(a)

$$mg - \beta\dot{z} = m\ddot{z}$$

(b) 物体不再加速时，$\ddot{z} = 0$，即

$$v(t_0) = \dot{z} = \frac{mg}{\beta}$$

(c) 由于 $v = \dot{z}$，将 (a) 中的方程化为：

$$mg - \beta v = m\frac{dv}{dt}$$

该一阶微分方程可变形为：

$$\frac{dv}{g - \frac{\beta v}{m}} = dt$$

积分一次得：

$$ln(\frac{\beta}{m}v - g) = -\frac{\beta}{m}(t + C)$$

解得：

$$v(t) = \frac{m}{\beta}[g - e^{-\frac{\beta}{m}(t+C)}]$$

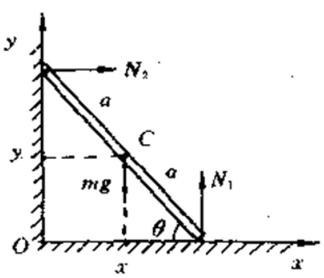
根据边界条件：$t=0$ 时 $v=0$，可以确定：

$$e^{-\frac{\beta}{m}C} = g$$

从而：

$$v(t) = \frac{m}{\beta}(g - ge^{-\frac{\beta}{m}t}) = v(t_0)(1 - e^{-\frac{\beta}{m}}t)$$

4. 有一个长为 $2a$，质量为 m 的匀质木梯，以外力保持其靠在光滑的垂直壁和水平面上，梯与光滑水平面的初始夹角为 α，如图所示，问当外力突然撤去后：
   (a) 梯子在任意位置的速度和加速度
   (b) 在什么角度梯子与垂直壁脱离



Ans:

(a) 质心 C 的坐标：

$$\begin{cases} x = acos\theta \\ y = asin\theta \end{cases}$$

质心的速度分量：

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\omega sin\theta \\ \dot{y} = a\omega cos\theta \end{cases}$$

其中 ω 为梯子绕质心转动的角速度
质心的加速度分量：

$$\begin{cases} \ddot{x} = -asin\theta\frac{d\omega}{dt} - a\omega^2 cos\theta \\ \ddot{y} = acos\theta\frac{d\omega}{dt} - a\omega^2 sin\theta \end{cases}$$

在整个下滑过程中，由机械能守恒：

$$mgasin\alpha = mgasin\theta + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

将转动惯量 $J_c = \frac{1}{12}m(2a)^2$ 和质心的速度分量带入上式：

$$mgasin\alpha = mgasin\theta + \frac{2}{3}ma^2\omega^2$$

可得：

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{3g(sin\alpha - sin\theta)}{2a}} \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3g}{4a}cos\theta \end{cases}$$

将上式带回质心速度表达式：

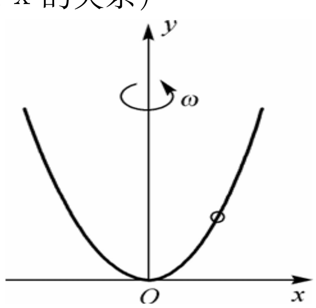
$$\begin{cases} \dot{x} = -asin\theta\sqrt{\frac{3g(sin\alpha - sin\theta)}{2a}} \\ \dot{y} = acos\theta\sqrt{\frac{3g(sin\alpha - sin\theta)}{2a}} \end{cases}$$

加速度：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{9}{4}sin\theta cos\theta - \frac{3}{2}gsin\alpha cos\theta \\ \ddot{y} = -\frac{3}{4}gcos^2\theta - \frac{3}{2}gsin\alpha cos\theta + \frac{3}{2}gsin^2\theta \end{cases}$$

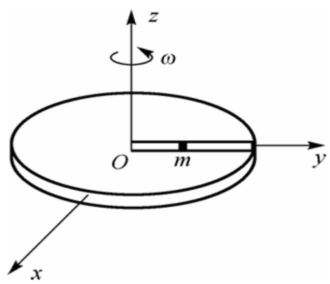
(b) 梯子与垂直壁脱离时，$\ddot{x} = 0$
故 $\theta = arcsin(\frac{2}{3}sin\alpha)$

5. 一根光滑的钢丝弯成如图所示的形状，其上套有一小环. 当钢丝以恒定角速度 ω 绕其竖直对称轴旋转时，小环在其上任何位置都能相对静止. 求钢丝的形状（写出 y 和 x 的关系）



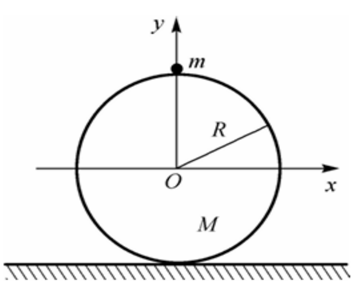
Ans: 见《力学与理论力学》3.10

6. 一圆盘绕其竖直的对称轴以恒定的角速度 ω 旋转. 在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始沿半径向外运动，试求：
   (a) 质点到达图示位置（即 $y = y_0$）时的速度 v
   (b) 质点到达该处所需的时间 t
   (c) 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力 $\mathbf{F}$



Ans: 见《力学与理论力学》3.11

7. 一半径为 R 的光滑球，质量为 M，静止在光滑的水平桌面上. 在球顶点上有一质量为 m 的质点. m 自 M 球自由下滑. 试求 m 离开 M 之前的轨迹.



Ans: 见《力学与理论力学》4.12

8. 线密度为 ρ，长度为 L 的链条，用手提着一头，另一头刚好触及地面，静止不动. 突然放手，使链条自由下落，求证：当键条的上端下落的距离为 s 时，链条作用在地面上的力为 $3\rho g s$.

Ans: 见《力学与理论力学》4.14

9. 一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=\frac{kx}{x^2+a^2}$，式中 k、a 均为大于零的常数. 试求：
   (a) 质点所受到的力的表示式
   (b) 质点的平衡位置

Ans: 见《力学与理论力学》5.10

10. 发射一宇宙飞船去考察一质量为 M、半径为 R 的行星. 当飞船静止于空间离行星中心 $5R$ 处时，以速度 v_0 发射一包仪器，如图所示. 仪器包的质量 m 远小于飞船的质量，要使这仪器包恰好掠擦行星表面着陆，θ 角应是多少?

Ans: 见《力学与理论力学》6.9

11. 两个质量均为 $1.0\,g$ 的质点，相距 $10\,m$. 开始时相对静止，如果它们之间只有万有引力作用，问它们何时相碰?

Ans: 将坐标原点取在其中的一个质点上，设想运动质点开始时具有一个很小的与两质点连线垂直的速度，于是运动质点将做一个轨道**很扁的椭圆**运动，设该椭圆的半长轴为 a，半短轴为 b，则 $2a\approx 10$，$b\approx 0$.
由开普勒第三定律，该椭圆运动周期与半径为 a 的圆周运动周期相同，由牛顿第二定律：

$$G\frac{m^2}{a^2}=\mu\frac{v^2}{a}$$

注意：此处运动质点的质量应该使用约化质量 $\mu = \frac{M}{2}$，因为此时我们运用了两体运动理论！从而圆周运动速度：

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{a}}$$

周期：

$$T = \frac{2\pi a}{v} = \frac{\sqrt{2}\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{Gm}}$$

两质点相碰时运动质点实际上运动了半个周期，即：

$$t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi a\sqrt{a}}{2\sqrt{Gm}} = \frac{25\pi}{\sqrt{10Gm}} = 9.6 \times 10^7\, s$$

注：本体的常规积分解法可以见《力学与理论力学》7.2

12. 一条宽度为 b，河水以速率 v 向北流的运河在北纬 λ 处，已知地球自转角速度为 ω，当地的重力加速度为 g.
    (a) 请问哪一侧的河水水位更高（东岸还是西岸?）
    (b) 求东岸和西岸的河水的高度差

Ans:

(a) 东岸更高（判断科式力的方向即可）

(b) 设水面与水平面的夹角为 θ，在水面取质量为 Δm 的一小块水对齐受力分析，其受到的重力和科式力的合力方向一定**垂直于水面**:

$$\frac{2m\omega v sin\lambda}{mg} = tan\theta$$

即两岸河水高度差:

$$\Delta h = b\, tan\theta = \frac{2b\omega v sin\lambda}{g}$$

注：本题容易做错. 很多人会问，这个分析中为什么不考虑惯性离心力这

一项. 其原因是，我们在使用“重力”来分析的时候，重力已经是万有引力和惯性离心力的合力了，所以我们不需要再考虑一次惯性离心力.

13. 某质量为 m 的质点受到两个力的作用：一个是有心力 $\mathbf{f}_1 = f(r)\hat{r}$，另一个是摩擦力 $\mathbf{f}_2 = -\lambda\mathbf{v}$，其中 $\lambda < 0$，$\mathbf{v}$ 为质点的速度. 若该质点在 $t = 0$ 时刻相对 $r = 0$ 点的角动量为 $\mathbf{L}_0$，求其角动量随时间的演化规律.

Ans:
合力矩：

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{v} \times \mathbf{r} = -\frac{\lambda}{m}\mathbf{L}$$

由角动量定理：

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

由以上两式可得关于 $\mathbf{L}$ 的一阶微分方程，解之得：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 exp(-\frac{\lambda}{m}t)$$

14. 根据广义相对论，两个绕质心旋转的黑洞体系会辐射出引力波，从而损失能量. 在简化分析下，对应的引力波辐射功率 P 具有如下形式：$P = \alpha I^2 G^\beta \omega^\gamma c^\delta$，这里 $\alpha = \frac{32}{5}$，$I = \mu r^2$，其中 μ 为两黑洞的折合质量，ω 为两个黑洞绕其质心旋转的圆频率，G 为引力常量，c 为真空中光速，求常数 β、γ、δ.

Ans: 本题意在考察量纲分析这一重要工具，望大家重视
公式中物理量量纲：

$$[P] = [M][L]^2[T]^{-3}$$

$$[I] = [M][L]^2$$

$$[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}$$

$$[\omega] = [T]^{-1}$$

$$[c] = [L][T]^{-1}$$

由于等式两边量纲必须相等，我们可以列出方程组：

$$\begin{cases} 2-\beta=1 \\ 4+3\beta+\delta=2 \\ -2\beta-\gamma-\delta=-3 \end{cases}$$

解之得：

$$\beta=1 \quad \gamma=6 \quad \delta=-5$$

D. Advanced Problems

1. 质量为 M 和 m 的两物体系在原长为 a，倔强系数为 k 的弹簧两端，并放在光滑水平面上，现使 M 获得一与弹簧垂直的速度 v_0，若 $v_0 = 3a\sqrt{\frac{k}{2\mu}}$，其中 μ 为折合质量. 试证明，在以后的运动过程中，两物体之间的最大距离为 $3a$.

Ans: 见《力学与理论力学》6.10

2. 质量皆为 m 的两珠子可在光滑轻杆上自由滑动，杆可在水平面内绕过 O 点的光滑竖直轴自由旋转. 原先两珠对称地位于 O 点的两边，与 O 相距 a，在 $t=0$ 时刻，对杆施以冲量矩，使杆在极短时间内即以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转，求 t 时刻杆的角速度 ω、角加速度 β 及两珠与 O 点的距离 r.

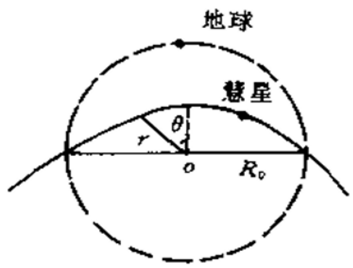
Ans: 见《力学与理论力学》6.77

3. 设地球绕太阳的运动是速率为 v_0 的匀速圆周运动，其圆轨道半径为 R_0，若有一彗星在太阳引力作用下沿一抛物线轨道运动，此抛物线与地球轨道相交，两个交点在地球圆轨道直径的两端，如图所示，忽略彗星与地球间的引力作用，假设在无穷远参考点处势能为零，求：

   (a) 彗星轨道的抛物线方程

(b) 求彗星的最大速率

(c) 彗星在地球轨道内运动的时间



Ans:

(a) 根据抛物线方程：$r = \frac{p}{1+cos\theta}$
由条件，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$r = p = R_0$，代入上式得彗星轨道的抛物线方程：

$$r = \frac{R_0}{1 + cos\theta}$$

(b) 彗星轨道为抛物线时，其机械能为零：

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0$$

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

当彗星位于抛物线顶点（$\theta = 0$）处时，r 最小，其速率最大：

$$v_{max}^2 = \frac{4GM}{R_0}$$

对于地球，有 $m'\frac{v_0^2}{R_0} = G\frac{Mm'}{R_0^2}$，即 $v_0^2 = \frac{GM}{R_0}$，因此：

$$v_{max} = 2v_0$$

(c) 根据开普勒第二定律，对任一个行星，它的矢径在相等的时间内扫过的面

积相等，面积速度为 (利用彗星在近日点处的速率和近日点距离计算)：

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}R_0)\cdot(2v_0) = \frac{1}{2}R_0v_0$$

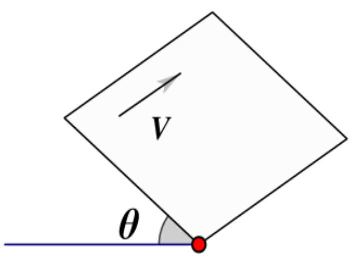
彗星在地球轨道内扫过的面积：

$$\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2d\theta = \frac{2}{3}R_0^2$$

所需时间为：

$$t = \frac{\frac{2}{3}R_0^2}{\frac{1}{2}R_0v_0} = \frac{4R_0}{3v_0}$$

4. 一足够大的斜面倾角为 θ，在其上部有一物块，物块与斜面之间的动摩擦因数 $\mu = tan\theta$. 在斜面内沿水平方向给物块一初速度 v，试确定在经过足够长时间之后物块的速度，并对结果的合理性进行分析.



Ans:

$$N = mgcos\theta$$

$$f = \mu N = mgsin\theta$$

设水平方向为 x 轴，沿斜面向下为 y 轴，初始位置为原点，α 为运动过程中速度方向与 y 轴的夹角. 分别沿 y 轴和物体运动轨迹的切向列动量定理：

$$\begin{cases} -fcos\alpha\Delta t + mgsin\theta\Delta t = m\Delta v_y \\ -f\Delta t + mgsin\theta cos\alpha\Delta t = m\Delta v \end{cases}$$

将 $mgsin\theta$ 带入，可得：

$$\Delta v_y = -\Delta v$$

两边积分即可得到最终速率：

$$v_{fianl} = v_y = \frac{v}{2}$$

分析：在运动过程中，x 方向上速度逐渐减小，y 方向上速度逐渐增大，直至物块沿 y 方向直线运动