

期末复习题解析

Shenyi Huang

2025 年 5 月 22 日

目录

相对论

刚体

振动

波动

流体

补充题

总结与建议

A.1 I

解析：

设飞船速度为 $v = 0.8c$ ，对应 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{0.6}$ 。

1. 飞船时间 0.5 小时，对应地球时间 $t = \gamma\tau = \frac{5}{6}$ 小时，即 12 : 50。
2. 距离 $l_1 = vt = 0.8c \times 50 \times 60 = 2400 cs = 7.2 \times 10^{11} m$ 。
3. $t = 12 h 50 min + \frac{l_1}{c} = 13 : 30$ 。
4. 飞船由地球到达宇航站的时间 $\Delta t'_1 = 30 min$

飞船发出信号到达地球时间 $\Delta t'_2 = \Delta t_2 / \gamma = 24 min$

易求得，飞船一共行驶距离为 $l = 21600 cs$ （思路：信号什么时候追上飞船）

地球发出回答信号到飞船接收回答信号经历的时间

$$\Delta t'_3 = \frac{l}{c\gamma} = 3 h 36 min$$

总时长： $\Delta t' = 4 h 30 min$ ，即 16 : 30 返回

A.2

解析：

在中子 A 的参考系中，中子 B 的总能量为

$$E = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} m_0 c^2$$

推导中使用了相对论速度叠加公式 $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$ 和动能公式 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ ，
 $\beta' = \frac{u}{c}$ 。具体过程略。

A.3

解析：能量动量守恒

$$\begin{cases} h\nu + m_0c^2 = mc^2 \\ \frac{h\nu}{c} = mv \end{cases}$$

解得

$$v = \frac{h\nu c}{h\nu + m_0c^2}$$

A.4

解析:

$$\text{证} \quad F dx = \frac{d(mu)}{dt} \cdot u dt = u d(mu) = u^2 dm + mu du = dE = c^2 dm,$$

所以

$$(c^2 - u^2) dm = mu du,$$
$$\frac{dm}{m} = \frac{u du}{c^2 - u^2} = -\frac{1}{2} \frac{d(c^2 - u^2)}{c^2 - u^2},$$

两边积分得

$$\ln m = \frac{1}{2} \ln(c^2 - u^2) + C,$$

所以

$$m = \frac{C_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{C_1}{c \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

其中, C_1 为一积分常数, 它由初始条件确定. 初始条件为 $u=0$ 时, $m=m_0$, 因此 $C_1=m_0 c$, 代入上式得


$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

A.5

解析:

解 $F = \frac{dp}{dt}$, $dp = F dt$, 两边积分得 $p = Ft + C$, 式中积分常数由

初始条件确定. 初始条件为 $t=0$ 时 $u_0=0$, 因此 $p=0$, 得 $C=0$. 故有

$$p = mu = Ft,$$

$$u = \frac{Ft}{m} = \frac{Ft}{E/c^2} = \frac{Ftc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}}$$

$$= \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}} = \frac{Fct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}},$$

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{Fc \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - Fct \frac{F^2 t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}$$

$$= \frac{Fm_0^2 c^3}{(m_0^2 c^2 + F^2 t^2)^{3/2}},$$

$$x = \int_0^t u dt = \int_0^t \frac{Fct dt}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} \Big|_0^t$$

$$= \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right).$$

B.1 I

解析：

1. 由电荷守恒， \times 粒子的带电量为 $-e$
2. 设碰后 π^+ 的质量和速度分别为 m_1 和 v_1 ， \times 粒子的质量和速度分别为 m_2 和 v_2 ；由动量守恒

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

由于洛伦兹力不做功，在运动过程中 m_1 ， m_2 ， v_1 ， v_2 均不变，对 π^+ 介子

$$ev_1 B = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{v_1^2}{R_1}$$

$$v_1 = \frac{eBR_1 c}{\sqrt{m_{10}^2 c^2 + e^2 B^2 R_1^2}} = 2.34 \times 10^8 \text{ m/s}$$

B.1 II

π^+ 介子能量

$$E = m_1 c^2 = \frac{m_{10} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = 2223 \text{ MeV}$$

3. 能量守恒

$$m_2 c^2 = m_{K0} c^2 + m_{p0} c^2 - m_1 c^2 = 1209.1 \text{ MeV}$$

对 \times 粒子, 由动量守恒

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{m_1 c^2}{m_2 c^2} v_1 = 4.32 \times 10^7 \text{ m/s}$$

则其静止质量

$$m_{20} = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} m_2 = 1196 \text{ MeV}/c^2$$

B.2

解析：见《力学与理论力学》习题解答 11.28

A.6 I

解析：设物体的半径为 r ，对中心轴的转动惯量为 J_c
质心沿斜面平动，有

$$mg\sin\theta - f = ma_c$$

在垂直斜面方向有

$$N - mg\cos\theta = 0$$

绕质心的转动有

$$fr = J_c\beta$$

只滑不滚的条件是

$$a_c = \beta r$$

联立以上可得

$$\beta = \frac{r}{J_c + mr^2} mg\sin\theta$$

A.6 II

$$f = \frac{J_c}{J_c + mr^2} mgsin\theta$$

若需要只滚不滑动

$$f \leq \mu N = \mu mgcos\theta$$

即

$$\theta \leq \arctan\left(\mu \frac{J_c + mr^2}{J_c}\right)$$

对于空心圆筒: $J_c = mr^2$, $\theta \leq \arctan(2\mu)$

对于实心圆柱体: $J_c = \frac{1}{2}mr^2$, $\theta \leq \arctan(3\mu)$

对于实心球体: $J_c = \frac{2}{5}mr^2$, $\theta \leq \arctan(3.5\mu)$

A.7 I

解析：根据题意，设 ω'_1 , ω'_2 是两个圆柱体的最终角速度，则

$$\omega'_1 r_1 = -\omega'_2 r_2$$

设 d_1 为圆柱 2 作用于圆柱 1 上的冲量矩， d_2 为圆柱 1 作用于圆柱 2 上的冲量矩，则有

$$\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$$

而

$$\begin{cases} d_1 = J_1(\omega'_1 - \omega_1) \\ d_2 = J_2(\omega'_2 - \omega_2) \end{cases}$$

转动惯量：

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \\ J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \end{cases}$$

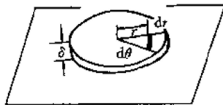
A.7 II

联立以上解得：

$$\begin{cases} \omega'_1 = \frac{m_1 r_1 \omega_1 - m_2 r_2 \omega_2}{r_1 (m_1 + m_2)} \\ \omega'_2 = -\frac{m_1 r_1 \omega_1 - m_2 r_2 \omega_2}{r_2 (m_1 + m_2)} \end{cases}$$

A.8 I

解析：



如图所示，把圆盘分为很多小质元，每个小质元受到的摩擦力矩为 $d\tau = r\mu g dm$ ，而每个小质元的质量 $dm = \rho\delta drd\theta$ ，其中 ρ 为圆盘的密度， δ 为圆盘的厚度， $r\delta drd\theta$ 为小质元的体积，所以圆盘受到的总摩擦力矩为

$$\begin{aligned}\tau &= \int d\tau = \mu g \iint \rho\delta r^2 d\theta dr = \mu g \rho \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \\ &= \mu g (\rho \delta \pi R^2) \frac{2}{3} R = \frac{2}{3} \mu MgR\end{aligned}$$

A.8 II

根据转动定律： $-\tau = J \frac{d\omega}{dt}$ ，得

$$-\frac{2}{3}\mu MgRdt = \frac{1}{2}MR^2 d\omega$$

积分上式，得

$$-\frac{2}{3}\mu g \int_0^t dt' = \frac{1}{2}R \int_{\omega_0}^0 d\omega'$$

由上式可以解得圆盘停止转动的时间为

$$t = \frac{3R}{4\mu g} \omega_0$$

A.9 II

式中 v 为小球的质心速度, ω 为小球绕质心转动的角速度, h 为小球相对于平衡位置的高度, 这些量都可以由小球质心的角位移 θ 表示:

$$v = (R - r)\dot{\theta}$$

$$\omega = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}$$

$$h = R(1 - \cos\theta)$$

当小球做微振动时, θ 很小, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, 则小球高度可以写成

$$h = \frac{1}{2}R\theta^2$$

将以上式子带入能量守恒, 并对时间求导, 可得

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)}\theta = 0$$

A.9 III

可以看出角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

则运动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

A.10 I

解析：设此简谐运动为具有弹性系数 k 的弹簧振动，其位移 x 可以表示为

$$x = A \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

因弹簧的速度 $\dot{x} = v = A\omega \cos(\omega t)$ ，系统的动能

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t)$$

系统的势能

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t)$$

系统的总能量

$$E = K + V = \frac{1}{2}kA^2$$

A.10 II

在微小时间 Δt 内, 质点移动的距离 $\Delta x = v\Delta t$, 因此, 在这段时间内力 F 做的功 ΔW 为

$$\Delta W = Fv\Delta t = FA\omega \cos(\omega t)\Delta t$$

在中心点附近, 因为 $t \approx 0$, $\cos(\omega t) \approx 1$, 所以

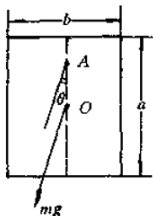
$$\Delta W = FA\omega \Delta t$$

又由于这个能量是在中心点附近加进的, 所以全部用来增加系统的动能 K ($K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) \approx \frac{1}{2}mA^2\omega^2$), 设振幅由 A 变为 $A + \Delta A$, 则 $\Delta K = \frac{dK}{dA}\Delta A = mA\omega^2\Delta A$ 故, 根据 $FA\omega\Delta t = mA\omega^2\Delta A$, 可得

$$\Delta A = \frac{F\Delta t}{m\omega} = \frac{FT\Delta t}{2\pi m}$$

A.11 I

解析:



设薄板绕 O 与 A 的转动惯量分别为 J_O 和 J_A , OA 的长为 l , 薄板的面密度为 $\delta = \frac{m}{ab}$, 则

$$J_O = \delta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

A.11 II

$$J_A = J_O + ml^2 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) + ml^2$$

当角位移 θ 很小时, 绕 A 点的外力矩为

$$M = mgl\sin\theta = mgl\theta$$

由转动定理

$$J_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta$$

可得到振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} = \sqrt{\frac{12gl}{a^2 + b^2 + 12l^2}}$$

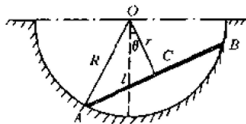
A.11 III

令 $\frac{d\omega^2}{dl} = 0$, 得到 $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$, 此时, 振动的角频率最大, 最大角频率为

$$\omega_{\max} = \left(\frac{3g^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

B.3 I

解析：



设匀质杆的重心为 C ，取 $OC = r$ ， OC 与铅垂线的夹角为 θ ， O 点所在水平面为零势能面，系统的势能为

$$V(\theta) = -mgR \cos \theta = -mg\sqrt{R^2 - l^2} \cos \theta$$

对 θ 求导：

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = mg \cdot \frac{l^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 - l^2} \cos \theta}$$

B.3 II

$$\frac{d^2 V(\theta)}{d\theta^2} = mg \cdot \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2 \theta}}$$

令 $\frac{dV}{d\theta} = 0$, 得 $\theta = 0$ 是极值点; 又有:

$$\left. \frac{d^2 V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = mg \cdot \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} > 0$$

故 $\theta = 0$ 是稳定平衡位置。

系统的动能为:

$$E_k = \frac{1}{2} m(\dot{r}\theta)^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} m(R^2 - \rho^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m\rho^2 \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{6} m(3R^2 - 2\rho^2) \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

B.3 III

根据机械能守恒：

$$\frac{d}{dt}(E_k + V) = 0$$

代入得到：

$$\frac{1}{3}m(3R^2 - 2\rho^2)\ddot{\theta} + mg \cdot \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 0$$

因为 θ 为微小量， $\sin \theta \approx \theta$ ，得：

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{3R^2 - 2\rho^2} \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \theta = 0$$

因此为简谐振动，角频率：

$$\omega^2 = \frac{3g}{3R^2 - 2\rho^2} \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

A.12

解析：

1. 选择 O 点的振动达到正的最大位移时开始计时，则 O 点的振动方程为 $x = A\cos\omega t$ ，入射波的表达式为

$$x_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

2. 反射波的表达式为

$$x_2 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) - \left(\frac{2\omega L}{v} + \pi\right)\right]$$

3. 合成波的表达式应为

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left[\omega t - \left(\frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{\omega x}{v} + \frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2}\right]$$

4. 将 $x = \frac{L}{3}$ 代入上式，可得此点的振动规律为

$$x = 2A\cos\left[\omega t - \left(\frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{4\omega L}{3v} + \frac{\pi}{2}\right)$$

A.13

解析：设汽车相对于空气以速度 u 趋近超声源，从超声源发出的超声波到达汽车时，汽车是运动的接收装置；超声波从汽车反射时，汽车又是以速度 u 运动的声源。因此，从固定的接收装置接收到的反射波频率为：

$$\nu' = \frac{\nu + u}{\nu - u} \nu$$

由此可解出 u 为：

$$u = \frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} \cdot \nu = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 300 = 14.3 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

A.14 I

解析：

解 设液体中 A_1 处和 A_2 处的压强分别为 p_1 和 p_2 ，液体流速分别为 v_1 和 v_2 ，有

$$\text{题设： } v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \text{①}$$

$$\text{伯努利方程： } p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad \text{②}$$

题设

$$p_1 - p_2 = \rho' gh$$

由式①～式③解得

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \approx 0.58 \text{ m/s}$$

A.15

解析：由于液体的易流性和不可拉性，静止的液体内部**没有拉应力和切应力，只能有压应力**（即压强），在静止的液体内部任意取出微小一个正方体，这个正方体在**六个面的压力和本身的重力共同作用下处于平衡状态**，设想这个正方体无限缩小时，其重力可以忽略不计，注意到**取正方体时的方位的任意性**，就得出作用在同一点上的各个方向的压强相等，即压强仅仅与位置坐标有关，而与方位无关。

B.4

解析：与浮力相比，小空气泡的重力可以忽略。当它以收尾速度运动时，浮力和摩擦力正好相等，有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi \eta r v$$

给定的参数值为

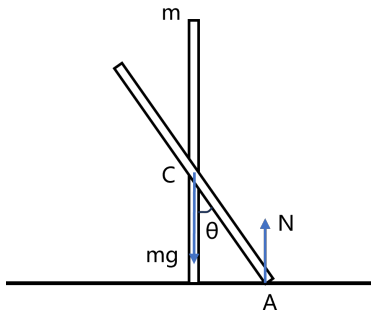
$$r = 0.10 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad \eta = 0.11 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \rho = 0.72 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

解出速度

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} = 1.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

补充题

一质量为 m ，长为 l 的匀质细杆，铅直地放置在光滑水平面上，杆自静止倒下，求夹角为 θ 时地面对杆的支持力和杆的转动角速度。



解析 I

细杆水平方向上不受外力，在倒下过程中质心铅直下落，由质心运动定理，有

$$mg - N = ma_c$$

在质心系中，重力不做功，只有地面的支持力 N 的力矩做功，由质心系动能定理，有

$$\int_0^\theta N \frac{l}{2} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

为了获得运动关联，考虑杆的着地点 A 的运动，该点的运动速度只有水平分量，垂直分量为 0；且该点的速度等于质心的速度加上绕质心转动的速度

$$v_c - \frac{l}{2} \omega \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{l}{2} \omega \sin\theta$$

解析 II

对时间微分，得：

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \omega \sin \theta \right) \quad (4)$$

$$= \frac{l}{2} \sin \theta \frac{d\omega}{dt} + \frac{l}{2} \omega^2 \cos \theta \quad (5)$$

由以上方程，消去 N 和 a_c ，可得

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m \left(\frac{l}{2} \omega \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

将 $J_c = \frac{1}{12} m l^2$ 带入上式，可得

$$\omega = \sqrt{\frac{12g(1 - \cos \theta)}{l(1 + 3\sin^2 \theta)}}$$

解析 III

对时间微分可以得到 $\frac{d\omega}{dt}$ ，然后算出 a_c 带入第一式（质心运动定理），可以得到支持力

$$N = mg \frac{3\cos^2\theta - 6\cos\theta + 4}{(1 + 3\sin^2\theta)^2}$$

本问题物理图像可以参考[匀质杆无初速度倒下](#)

复习建议

- 刚体与振动与波是期末考试的重中之重，一定要认真复习
刚体转动惯量一定不要忘记或写错了，做题时如果发现差方程重点看看是否有没发现的**运动关联**
振动解题时注意**近似**的使用，**动力学法和能量法**都要掌握；阻尼振动和受迫振动的推导方法有空尽量记一下（虽然不是主要内容）
波动重点需要掌握**波动方程的推导和应用、波的反射、多普勒效应**
- 流体和相对论不会考察很多，大家不必过于担心，熟悉基本概念和简单计算即可
- 一定要重视**期中以前的内容**复习，不仅会考，还会考很多（预计40分左右）！
- 考试时遇到完全不会的题目，**尽量多写一些相关的公式上去，一定不要留空白！**

感谢大家的聆听
《力学 B》课程到此结束
祝诸君前程似锦！