期末复习题解析

Shenyi Huang

2025 年 5 月 22 日

目录

A.1 I

解析:

设飞船速度为 $v = 0.8c$，对应 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{0.6}$。

1. 飞船时间 0.5 小时，对应地球时间 $t = \gamma\tau = \frac{5}{6}$ 小时，即 $12:50$。
2. 距离 $l_1 = vt = 0.8c \times 50 \times 60 = 2400\,cs = 7.2 \times 10^{11}\,m$。
3. $t = 12\,h\,50\,min + \frac{l_1}{c} = 13:30$。
4. 飞船由地球到达宇航站的时间 $\Delta t_1' = 30\,min$

   飞船发出信号到达地球时间 $\Delta t_2' = \Delta t_2/\gamma = 24\,min$

   易求得，飞船一共行驶距离为 $l = 21600\,cs$（思路：信号什么时候追上飞船）

   地球发出回答信号到飞船接收回答信号经历的时间

$$\Delta t_3' = \frac{l}{c\gamma} = 3\,h\,36\,min$$

   总时长：$\Delta t' = 4\,h\,30\,min$，即 16：30 返回

A.2

解析：

在中子 A 的参考系中，中子 B 的总能量为

$$E = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} m_0 c^2$$

推导中使用了相对论速度叠加公式 $u = \frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}$ 和动能公式 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta'^2}}$，$\beta' = \frac{u}{c}$。具体过程略。

A.3

解析：能量动量守恒

$$\begin{cases} h\nu + m_0 c^2 = mc^2 \\ \frac{h\nu}{c} = mv \end{cases}$$

解得

$$v = \frac{h\nu c}{h\nu + m_0 c^2}$$

A.4

解析：

证 $F\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t}\cdot u\mathrm{d}t=u\mathrm{d}(mu)=u^2\mathrm{d}m+mu\mathrm{d}u=\mathrm{d}E=c^2\mathrm{d}m$，

所以

$$(c^2-u^2)\mathrm{d}m=mu\mathrm{d}u,$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{u\mathrm{d}u}{c^2-u^2}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(c^2-u^2)}{c^2-u^2},$$

两边积分得 $$\ln m=\frac{1}{2}\ln(c^2-u^2)+C,$$

所以 $$m=\frac{C_1}{\sqrt{c^2-u^2}}=\frac{C_1}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

其中，C_1 为一积分常数，它由初始条件确定．初始条件为 $u=0$ 时，$m=m_0$，因此 $C_1=m_0c$，代入上式得

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

A.5

解析：

解 $F=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}p=F\mathrm{d}t$，两边积分得 $p=Ft+C$，式中积分常数由初始条件确定. 初始条件为 $t=0$ 时 $u_0=0$，因此 $p=0$，得 $C=0$. 故有

$$p = mu = Ft,$$

$$u=\frac{Ft}{m}=\frac{Ft}{E/c^2}=\frac{Ftc^2}{\sqrt{m_0^2c^4+c^2p^2}}$$

$$=\frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2+p^2}}=\frac{Fct}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}},$$

$$a=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{Fc\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}-Fct\dfrac{F^2t}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}}}{m_0^2c^2+F^2t^2}$$

$$=\frac{Fm_0^2c^3}{(m_0^2c^2+F^2t^2)^{3/2}},$$

$$x=\int_0^t u\,\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{Fct\,\mathrm{d}t}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}}=\frac{c}{F}\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}}-1\right).$$

B.1 I

解析：

1. 由电荷守恒，x 粒子的带电量为$-e$
2. 设碰后 π^+ 的质量和速度分别为 m_1 和 v_1，x 粒子的质量和速度分别为 m_2 和 v_2；由动量守恒

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

由于洛伦兹力不做功，在运动过程中 m_1，m_2，v_1，v_2 均不变，对 π^+ 介子

$$ev_1 B = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{v_1^2}{R_1}$$

$$v_1 = \frac{eBR_1 c}{\sqrt{m_{10}^2 c^2 + e^2 B^2 R_1^2}} = 2.34 \times 10^8 \ m/s$$

B.1 II

π^+ 介子能量

$$E = m_1 c^2 = \frac{m_{10} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = 2223\ MeV$$

3. 能量守恒

$$m_2 c^2 = m_{K0} c^2 + m_{p0} c^2 - m_1 c^2 = 1209.1\ MeV$$

对 x 粒子，由动量守恒

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{m_1 c^2}{m_2 c^2} v_1 = 4.32 \times 10^7\ m/s$$

则其静止质量

$$m_{20} = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} m_2 = 1196\ MeV/c^2$$

B.2

解析：见《力学与理论力学》习题解答 11.28

A.6 I

解析：设物体的半径为 r，对中心轴的转动惯量为 J_c
质心沿斜面平动，有

$$mgsin\theta - f = ma_c$$

在垂直斜面方向有

$$N - mgcos\theta = 0$$

绕质心的转动有

$$fr = J_c\beta$$

只滑不滚的条件是

$$a_c = \beta r$$

联立以上可得

$$\beta = \frac{r}{J_c + mr^2} mgsin\theta$$

A.6 II

$$f=\frac{J_c}{J_c+mr^2}mgsin\theta$$

若需要只滚不滑动

$$f\leq\mu N=\mu mgcos\theta$$

即

$$\theta\leq arctan(\mu\frac{J_c+mr^2}{J_c})$$

对于空心圆筒： $J_c=mr^2$， $\theta\leq arctan(2\mu)$
对于实心圆柱体： $J_c=\frac{1}{2}mr^2$， $\theta\leq arctan(3\mu)$
对于实心球体： $J_c=\frac{2}{5}mr^2$， $\theta\leq arctan(3.5\mu)$

A.7 I

解析：根据题意，设 ω_1'，ω_2' 是两个圆柱体的最终角速度，则

$$\omega_1' r_1 = -\omega_2' r_2$$

设 d_1 为圆柱 2 作用于圆柱 1 上的冲量矩，d_2 为圆柱 1 作用于圆柱 2 上的冲量矩，则有

$$\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$$

而

$$\begin{cases} d_1 = J_1(\omega_1' - \omega_1) \\ d_2 = J_2(\omega_2' - \omega_2) \end{cases}$$

转动惯量：

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \\ J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \end{cases}$$

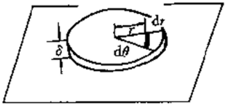
A.7 II

联立以上解得:

$$\begin{cases}\omega_1' = \dfrac{m_1 r_1 \omega_1 - m_2 r_2 \omega_2}{r_1(m_1+m_2)} \\ \omega_2' = -\dfrac{m_1 r_1 \omega_1 - m_2 r_2 \omega_2}{r_2(m_1+m_2)}\end{cases}$$

A.8 I

解析：



如图所示，把圆盘分为很多小质元，每个小质元受到的摩擦力矩为 $d\tau = r\mu g dm$，而每个小质元的质量 $dm = \rho r\delta dr d\theta$，其中 ρ 为圆盘的密度，δ 为圆盘的厚度，$r\delta dr d\theta$ 为小质元的体积，所以圆盘受到的总摩擦力矩为

$$\begin{aligned}\tau &= \int d\tau = \mu g \iint \rho\delta r^2 d\theta dr = \mu g \rho\delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \\ &= \mu g(\rho\delta\pi R^2)\frac{2}{3}R = \frac{2}{3}\mu M g R\end{aligned}$$

A.8 II

根据转动定律：$-\tau = J\frac{d\omega}{dt}$，得

$$-\frac{2}{3}\mu MgRdt = \frac{1}{2}MR^2 d\omega$$

积分上式，得

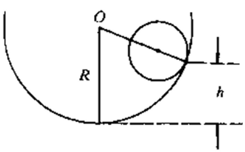
$$-\frac{2}{3}\mu g\int_0^t dt' = \frac{1}{2}R\int_{\omega_0}^0 d\omega'$$

由上式可以解得圆盘停止转动的时间为

$$t = \frac{3R}{4\mu g}\omega_0$$

A.9 I

解析：



设小球的质量为 m，则其绕质心的转动惯量为 $J=\frac{2}{5}mr^2$，当小球在碗内做无滑动的滚动时，摩擦力不做功，其机械能守恒，即

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+mgh=Const$$

A.9 II

式中 v 为小球的质心速度，ω 为小球绕质心转动的角速度，h 为小球相对于平衡位置的高度，这些量都可以由小球质心的角位移 θ 表示：

$$v = (R - r)\dot{\theta}$$

$$\omega = \frac{R}{r}\dot{\theta}$$

$$h = R(1 - cos\theta)$$

当小球做微振动时，θ 很小，$cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$，则小球高度可以写成

$$h = \frac{1}{2}R\theta^2$$

将以上式子带入能量守恒，并对时间求导，可得

$$\ddot{\theta} + \frac{gR}{(R-r)^2 + \frac{2}{5}R^2}\theta = 0$$

A.9 III

可以看出角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{gR}{(R-r)^2 + \frac{2}{5}R^2}}$$

则运动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)^2 + \frac{2}{5}R^2}{gR}}$$

A.10 I

解析：设此简谐运动为具有弹性系数 k 的弹簧振动，其位移 x 可以表示为

$$x = Asin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

因弹簧的速度 $\dot{x} = v = A\omega cos(\omega t)$，系统的动能

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t)$$

系统的势能

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 sin^2(\omega t)$$

系统的总能量

$$E = K + V = \frac{1}{2}kA^2$$

A.10 II

在微小时间 Δt 内，质点移动的距离 $\Delta x = v\Delta t$，因此，在这段时间内力 F 做的功 ΔW 为

$$\Delta W = Fv\Delta t = FA\omega cos(\omega t)\Delta t$$

在中心点附近，因为 $t \approx 0$，$cos(\omega t) \approx 1$，所以

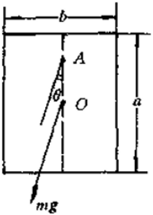
$$\Delta W = FA\omega\Delta t$$

又由于这个能量是在中心点附近加进的，所以全部用来增加系统的动能 K（$K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2cos^2(\omega t) \approx \frac{1}{2}mA^2\omega^2$），设振幅由 A 变为 $A + \Delta A$，则$\Delta K = \frac{dK}{dA}\Delta A = mA\omega^2\Delta A$ 故，根据 $FA\omega\Delta t = mA\omega^2\Delta A$，可得

$$\Delta A = \frac{F\Delta t}{m\omega} = \frac{FT\Delta t}{2\pi m}$$

A.11 I

解析：



设薄板绕 O 与 A 的转动惯量分别为 J_O 和 J_A，OA 的长为 l，薄板的面密度为 $\delta = \frac{m}{ab}$，则

$$J_O = \delta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

A.11 II

$$J_A = J_O + ml^2 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) + ml^2$$

当角位移 θ 很小时，绕 A 点的外力矩为

$$M = mglsin\theta = mgl\theta$$

由转动定理

$$J_A \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta$$

可得到振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} = \sqrt{\frac{12gl}{a^2 + b^2 + 12l^2}}$$

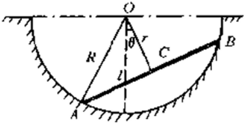
A.11 III

令 $\frac{d\omega^2}{dl}=0$，得到 $l=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$，此时，振动的角频率最大，最大角频率为

$$\omega_{max}=\left(\frac{3g^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

B.3 I

解析:



设匀质杆的重心为 C，取 $OC = r$，OC 与铅垂线的夹角为 θ，O 点所在水平面为零势能面，系统的势能为

$$V(\theta) = -mgR\cos\theta = -mg\sqrt{R^2 - l^2\cos\theta}$$

对 θ 求导:

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = mg \cdot \frac{l^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2 - l^2\cos\theta}}$$

B.3 II

$$\frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2}=mg\cdot\frac{l^2\cos\theta}{\sqrt{R^2-l^2\cos\theta}}$$

令 $\frac{dV}{d\theta}=0$，得 $\theta=0$ 是极值点；又有：

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=mg\cdot\frac{l^2}{\sqrt{R^2-l^2}}>0$$

故 $\theta=0$ 是稳定平衡位置。

系统的动能为：

$$\begin{aligned}E_k&=\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 &(1)\\&=\frac{1}{2}m(R^2-l^2)\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 &(2)\\&=\frac{1}{6}m(3R^2-2l^2)\dot{\theta}^2 &(3)\end{aligned}$$

B.3 III

根据机械能守恒：

$$\frac{d}{dt}(E_k + V) = 0$$

代入得到：

$$\frac{1}{3}m(3R^2 - 2l^2)\ddot{\theta} + mg \cdot \frac{l^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2 - l^2}} = 0$$

因为 θ 为微小量，$\sin\theta \approx \theta$，得：

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{3R^2 - 2l^2} \cdot \sqrt{R^2 - l^2} \cdot \theta = 0$$

因此为简谐振动，角频率：

$$\omega^2 = \frac{3g}{3R^2 - 2l^2} \cdot \sqrt{R^2 - l^2}$$

B.3 IV

周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R^2 - 2l^2}{3g\cdot\sqrt{R^2 - l^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R^2 - l^2}}}\cdot\sqrt{\frac{3R^2 - 2l^2}{3g}}$$

A.12

解析:

1. 选择 O 点的振动达到正的最大位移时开始计时，则 O 点的振动方程为 $x = Acos\omega t$，入射波的表达式为
$$x_1 = Acos\omega(t - \frac{x}{v})$$
2. 反射波的表达式为
$$x_2 = Acos[\omega(t + \frac{x}{v}) - (\frac{2\pi L}{v} + \pi)]$$
3. 合成波的表达式应为
$$x = x_1 + x_2 = 2Acos[\omega t - (\frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2})]cos[\frac{\omega x}{v} + \frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2}]$$
4. 将 $x = \frac{L}{3}$ 代入上式，可得此点的振动规律为
$$x = 2Acos[\omega t - (\frac{\omega L}{v} + \frac{\pi}{2})]cos(\frac{4\omega L}{3v} + \frac{\pi}{2})$$

A.13

解析：设汽车相对于空气以速度 u 趋近超声源，从超声源发出的超声波到达汽车时，汽车是运动的接收装置；超声波从汽车反射时，汽车又是以速度 u 运动的声源。因此，从固定的接收装置接收到的反射波频率为：

$$\nu' = \frac{v+u}{v-u}\nu$$

由此可解出 u 为：

$$u = \frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} \cdot v = \frac{110-100}{110+100} \times 300 = 15.7\,(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

A.14 I

解析:

解 取相对于容器静止的参考系，如图 10.6a 建立坐标系，其中 OA 为长，OC 为高（宽的方向图上没有画出），容器静止时水面 DE 应与 OA 平行. 当容器以加速度 a 向右运动时，由于该参考系为非惯性系，需引入向左的惯性力，故水中任一点 P 的表观重力方向应为 g' 方向，而此时液面变为 FG，与 g' 垂直. 由于水的体积不变，知

$$\overline{FD}=\overline{EG}\,,\qquad \overline{DH}=\overline{HE}=\overline{OA}/2$$

设 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$，题设 $OA=2$，$OD=0.3$，

$$\tan\theta=\frac{a}{g}=\frac{\overline{FD}}{\overline{DH}}=\frac{2\overline{FD}}{\overline{OA}}=\frac{3}{10}$$

得

$$\overline{FD}=\frac{3}{20}\overline{OA}=0.3$$

即 F 点与 C 点重合，G 点与 A 点重合. 于是有

$$\text{前端面压力：}\quad F_{AB}=0$$

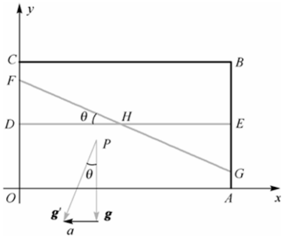


图 10.6a

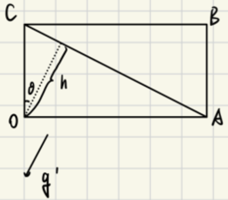
A.14 II

$$g' = \sqrt{109}\ m/s^2 \qquad \tan\theta = 0.3 \qquad h = 0.6\cos\theta$$

$$F_{OC} = 0.7\int_0^h \rho g' h' \frac{dh'}{\cos\theta}$$

$$F_{OA} = 0.7\int_0^h \rho g' h' \frac{dh'}{\sin\theta}$$

$$F_{侧} = \int_0^h \rho g' h' dh' \cdot [(h-h')\tan\theta + (h-h')\cot\theta]$$



注：本体在《力学与理论力学》上解析有误

A.15

解析：由于液体的易流性和不可拉性，静止的液体内部没有拉应力和切应力，只能有压应力（即压强），在静止的液体内部任意取出微小一个正方体，这个正方体在六个面的压力和本身的重力共同作用下处于平衡状态，设想这个正方体无限缩小时，其重力可以忽略不计，注意到取正方体时的方位的任意性，就得出作用在同一点上的各个方向的压强相等，即压强仅仅与位置坐标有关，而与方位无关。

B.4

解析：与浮力相比，小空气泡的重力可以忽略。当它以收尾速度运动时，浮力和摩擦力正好相等，有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi r \eta v$$

给定的参数值为

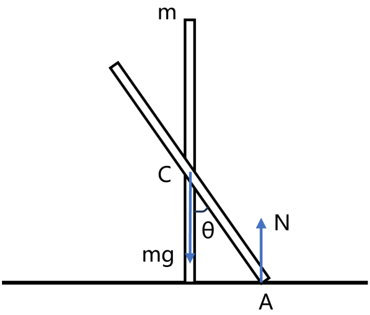
$$r = 0.10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}, \quad \eta = 0.11\,\mathrm{Pa\cdot s}, \quad \rho = 0.72 \times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$$

解出速度

$$v = \frac{2r^2\rho g}{9\eta} = 1.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

补充题

一质量为 m，长为 l 的匀质细杆，铅直地放置在光滑水平面上，杆自静止倒下，求夹角为 θ 时地面对杆的支持力和杆的转动角速度.



解析 I

细杆水平方向上不受外力，在倒下过程中质心铅直下落，由质心运动定理，有

$$mg - N = ma_c$$

在质心系中，重力不做功，只有地面的支持力 N 的力矩做功，由质心系动能定理，有

$$\int_0^{\theta} N\frac{l}{2}sin\theta d\theta = \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

为了获得运动关联，考虑杆的着地点 A 的运动，该点的运动速度只有水平分量，垂直分量为 0；且该点的速度等于质心的速度加上绕质心转动的速度

$$v_c - \frac{l}{2}\omega sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{l}{2}\omega sin\theta$$

解析 II

对时间微分，得：

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{l}{2}\omega sin\theta) \tag{4}$$

$$= \frac{l}{2}sin\theta\frac{d\omega}{dt} + \frac{l}{2}\omega^2 cos\theta \tag{5}$$

由以上方程，消去 N 和 a_c，可得

$$mg\frac{l}{2}(1-cos\theta) = \frac{1}{2}m(\frac{l}{2}\omega sin\theta)^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

将 $J_c = \frac{1}{12}ml^2$ 带入上式，可得

$$\omega = \sqrt{\frac{12g(1-cos\theta)}{l(1+3sin^2\theta)}}$$

解析 III

对时间微分可以得到 $\frac{d\omega}{dt}$，然后算出 a_c 带入第一式（质心运动定理），可以得到支持力

$$N = mg\frac{3cos^2\theta - 6cos\theta + 4}{(1 + 3sin^2\theta)^2}$$

本问题物理图像可以参考匀质杆无初速度倒下

复习建议

- 刚体与振动与波是期末考试的重中之重，一定要认真复习
  刚体转动惯量一定不要忘记或写错了，做题时如果发现差方程重点看看是否有没发现的**运动关联**
  振动解题时注意**近似**的使用，**动力学法和能量法**都要掌握；阻尼振动和受迫振动的推导方法有空尽量记一下（虽然不是主要内容）
  波动重点需要掌握**波动方程的推导和应用、波的反射、多普勒效应**
- 流体和相对论不会考察很多，大家不必过于担心，熟悉基本概念和简单计算即可
- 一定要重视**期中以前的内容**复习，不仅会考，还会考很多（预计 40 分左右）!
- 考试时遇到完全不会的题目，**尽量多写一些相关的公式上去，一定不要留空白!**

感谢大家的聆听

《力学 B》课程到此结束

祝诸君前程似锦！