A. Basic Concepts

1. 请给出“保守力”定义的两种表述方式，并证明两种表述方式的等价性.
2. 试举一个动量守恒但角动量不守恒的例子.
3. 如果我国的交通规则由原来的右侧通行改为左侧通行，那么一天的长度是增加、减少还是不变？为什么？
4. 试定性画出地球-月球系统及周围空间的引力势能在平面上的二维分布曲线，不考虑除地球、月球以外其他天体的影响.
5. 如果太阳的质量不能被当作无穷大，开普勒行星运动三定律是否需要修正？若需要，请说明如何修正；若不需要，请说明理由.
6. (a) 为什么动量和动能是两个相互独立的物理量，即使它们都是由质量和速度相乘得来的？
   (b) 为什么动能的定义中需要有一个系数 $\frac{1}{2}$？
7. 质点的运动方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，在计算质点运动的速度和加速度时，有人先求出 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v = \frac{dr}{dt}$ 和 $a = \frac{d^2r}{dt^2}$ 求得 v 和 a 的值. 也有人先计算出速度和加速度的分量，再合成求得 v 和 a 的值，即为 $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$ 和 $a = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2}$. 这两种方法哪一种正确？为什么？

B. Estimation Problems (IMPORTANT!)

1. 估算水上报告厅水的体积.

2. 请给出估算你竖直向上抛出一个球时，球的出手速度的方法，忽略空气阻力.

3. 假设太阳到地球的距离已知，请设计一个简便、易行、安全的方法，估测太阳的大小.

4. 假如你生活在海边，非常熟悉船的各种特征尺度以及船所在位置到岸边的距离，根据这些条件你能不能估计出地球的大小?

C. Basic Problems

1. 离水面高度为 h 的岸上有人用绳索拉船靠岸，人以恒定速率 v_0 拉绳，求当船离岸的距离为 s 时，船的速度和加速度.

2. 已知一个质点在双曲线的一支 $r = \frac{p}{1-\epsilon cos\theta}$ 上运动。在运动过程中，$r^2\dot{\theta}$ 为常数 k，且当 $\theta = \pi$ 时，质点的速率 $v = v_0$

   (a) 写出 ϵ 和 θ 的取值范围

   (b) 求出任意位置质点的速度

   (c) 求出任意位置质点的加速度

3. 收尾速度问题. 假设空气对物体的阻力 $\mathbf{f} = -\beta\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是物体的速度，β 是一个与速度无关的常数. 现在考虑空气中一个自由下落的物体，将 z 轴的正方向取为竖直向下.

   (a) 写出物体运动的牛顿方程

   (b) 当物体的速度为多少时，物体不再加速（这个速度叫做收尾速度)?

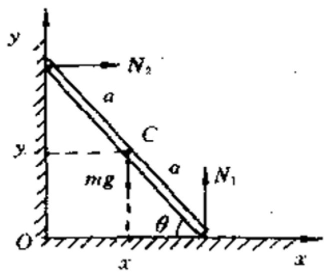
   (c) 导出物体速度随时间的变化关系：$v(t) = v(t_0)(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}})$

4. 有一个长为 $2a$，质量为 m 的匀质木梯，以外力保持其靠在光滑的垂直

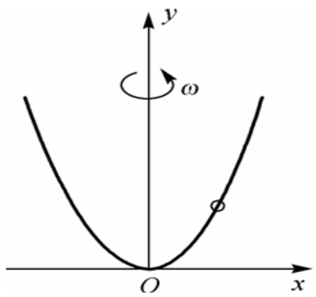
壁和水平面上，梯与光滑水平面的初始夹角为 α，如图所示，问当外力突然撤去后：

(a) 梯子在任意位置的速度和加速度

(b) 在什么角度梯子与垂直壁脱离



5. 一根光滑的钢丝弯成如图所示的形状，其上套有一小环. 当钢丝以恒定角速度 ω 绕其竖直对称轴旋转时，小环在其上任何位置都能相对静止. 求钢丝的形状（写出 y 和 x 的关系）

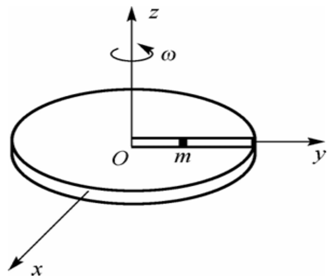


6. 一圆盘绕其竖直的对称轴以恒定的角速度 ω 旋转. 在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始沿半径向外运动，试求：

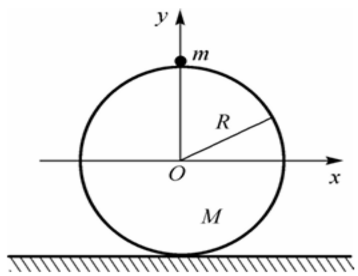
(a) 质点到达图示位置（即 $y = y_0$）时的速度 v

(b) 质点到达该处所需的时间 t

(c) 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力 $\mathbf{F}$



7. 一半径为 R 的光滑球，质量为 M，静止在光滑的水平桌面上. 在球顶点上有一质量为 m 的质点. m 自 M 球自由下滑. 试求 m 离开 M 之前的轨迹.



8. 线密度为 ρ，长度为 L 的链条，用手提着一头，另一头刚好触及地面，静止不动. 突然放手，使链条自由下落，求证：当键条的上端下落的距离为 s 时，链条作用在地面上的力为 $3\rho gs$.

9. 一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=\frac{kx}{x^2+a^2}$，式中 k、a 均为大于零的常数. 试求：

   (a) 质点所受到的力的表示式

   (b) 质点的平衡位置

10. 发射一宇宙飞船去考察一质量为 M、半径为 R 的行星. 当飞船静止于空间离行星中心 $5R$ 处时，以速度 v_0 发射一包仪器，如图所示. 仪器包的质量 m 远小于飞船的质量，要使这仪器包恰好掠擦行星表面着陆，θ 角应是多少?

11. 两个质量均为 $1.0\,g$ 的质点，相距 $10\,m$. 开始时相对静止，如果它们之间只有万有引力作用，问它们何时相碰?

12. 一条宽度为 b，河水以速率 v 向北流的运河在北纬 λ 处，已知地球自转角速度为 ω，当地的重力加速度为 g.

    (a) 请问哪一侧的河水水位更高（东岸还是西岸?）

    (b) 求东岸和西岸的河水的高度差

13. 某质量为 m 的质点受到两个力的作用：一个是有心力 $\mathbf{f}_1 = f(r)\hat{r}$，另一个是摩擦力 $\mathbf{f}_2 = -\lambda\mathbf{v}$，其中 $\lambda < 0$，$\mathbf{v}$ 为质点的速度. 若该质点在 $t = 0$ 时刻相对 $r = 0$ 点的角动量为 $\mathbf{L}_0$，求其角动量随时间的演化规律.

14. 根据广义相对论，两个绕质心旋转的黑洞体系会辐射出引力波，从而损失能量. 在简化分析下，对应的引力波辐射功率 P 具有如下形式：$P = \alpha I^2 G^\beta \omega^\gamma c^\delta$，这里 $\alpha = \frac{32}{5}$，$I = \mu r^2$，其中 μ 为两黑洞的折合质量，ω 为两个黑洞绕其质心旋转的圆频率，G 为引力常量，c 为真空中光速，求常数 β、γ、δ.

D. Advanced Problems

1. 质量为 M 和 m 的两物体系在原长为 a, 倔强系数为 k 的弹簧两端, 并放在光滑水平面上, 现使 M 获得一与弹簧垂直的速度 v_0, 若 $v_0 = 3a\sqrt{\frac{k}{2\mu}}$, 其中 μ 为折合质量. 试证明，在以后的运动过程中，两物体之间的最大距离为 $3a$.

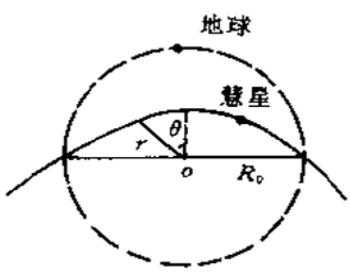
2. 质量皆为 m 的两珠子可在光滑轻杆上自由滑动，杆可在水平面内绕过 O 点的光滑竖直轴自由旋转. 原先两珠对称地位于 O 点的两边，与 O 相距 a，在 $t=0$ 时刻，对杆施以冲量矩，使杆在极短时间内即以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转，求 t 时刻杆的角速度 ω、角加速度 β 及两珠与 O 点的距离 r.

3. 设地球绕太阳的运动是速率为 v_0 的匀速圆周运动，其圆轨道半径为 R_0，若有一彗星在太阳引力作用下沿一抛物线轨道运动，此抛物线与地球轨道相交，两个交点在地球圆轨道直径的两端，如图所示，忽略彗星与地球间的引力作用，假设在无穷远参考点处势能为零，求：

   (a) 彗星轨道的抛物线方程

   (b) 求彗星的最大速率

   (c) 彗星在地球轨道内运动的时间



4. 一足够大的斜面倾角为 θ，在其上部有一物块，物块与斜面之间的动摩擦因数 $\mu = tan\theta$. 在斜面内沿水平方向给物块一初速度 v，试确定在经过足够长时间之后物块的速度，并对结果的合理性进行分析.