习题课3.1（数学预备知识）

黄慎宜 PB22000252

---

1. 导数与微分

见习题课PPT

2. 定积分与不定积分

见习题课PPT

3. 微分方程基础

本部分很重要，会贯穿整个力学课程，尤其会在振动与波一章中大量使用

3.a. 一阶线性微分方程

- 形式：$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$
- 通解（使用常数变易法）：$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C)$

3.b. 二阶常系数线性微分方程

见习题课PPT

3.c. 常系数线性微分方程一般形式

- $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 f^{(1)}(t$
- $y(t)$(完全解) $= y_h(t)$(齐次解) $+ y_p(t)$(特解)

- 齐次解是对应齐次微分方程的解：
  $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0$
  - 特征根为$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$的根$\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$，由特征根可以得到齐次解的函数形式
- 特解的函数形式与激励的函数形式有关
- 齐次解的常用函数形式：
-

特征根λ	齐次解$y_k(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
2重实根	$(C_1 t + C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2} = \alpha + j\beta$	$e^{\alpha t}[Ccos(\beta t) + Dsin(\beta t)]$

- 特解的常用函数形式：
激励$f(t)$	特解$y_p(t)$
t	P_1t+P_0 当所有的特征根均不为0；$t\cdot(P_1t+P_0)$ 若有一个等于0的特征根
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$ 当α不等于特征单根；$(P_1t+P_0)e^{\alpha t}$ 当α等于特征单根
$cos(\beta t)$或$sin(\beta t)$	$Pcos(\beta t)+Qsin(\beta t)$ 要求所有的特征根均不等于$\pm j\beta$
- 对于更复杂的激励形式，常采用专门的方法求解（如Fourier变换、Laplace变换），感兴趣的同学们可以课下自己找相关资料进行求解，在这里不详细展开

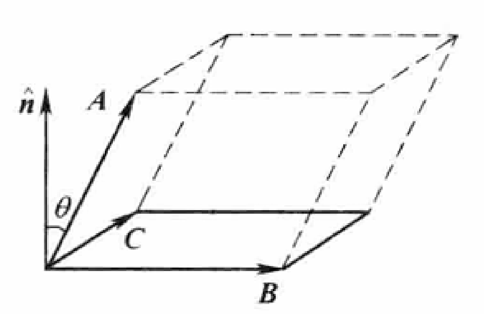
> *思考1：某系统的微分方程为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，当$f(t)=e^{-2t},t\geq 0$；$y(0)=1,y'(0)=0$时的全解*

4. 矢量代数

主要内容都已在PPT上详细呈现，这里补充几个较为重要的公式：

4.a. 矢量的标量三重积

- 定义：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$
- 几何意义：$|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$ 是由$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$生成的平行六面体的体积



> *思考2：如何证明上述的几何意义？*

- 性质：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$
- 以分量的形式表示：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$

4.b. 矢量的矢量三重积

- 定义：$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$
- BAC-CAB法则$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$
  - 通常用于化简矢量的三重积

> *思考3：将上式两边以分量的形式写出来证明BAC-CAB 法则*

5. 矢量微积分

本部分的5.a 小节很重要，贯穿整个力学；后面的部分在力学中仅在能量、流体部分有少量涉及，但是在电磁学中会大量涉及

5.a. 矢量的导数和积分

见习题课PPT

5.b. 标量场梯度

- 定义：$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}$
- 标量场 T 在一小段距离 $d\mathbf{l}$ 上的变化量：
$dT=\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy+\frac{\partial T}{\partial z}dz=(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{z})\cdot(dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z})=(\nabla T)\cdot(d\mathbf{l})$
- 上式也可以写做：$dT=|\nabla T||d\mathbf{l}|cos\theta$，说明，梯度$\nabla T$所指方向是函数 T 有最大增加的方向；进一步有，$|\nabla T|$给出沿这个最大增加方向的斜率（增加速率）

> *思考4：求出$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的梯度*

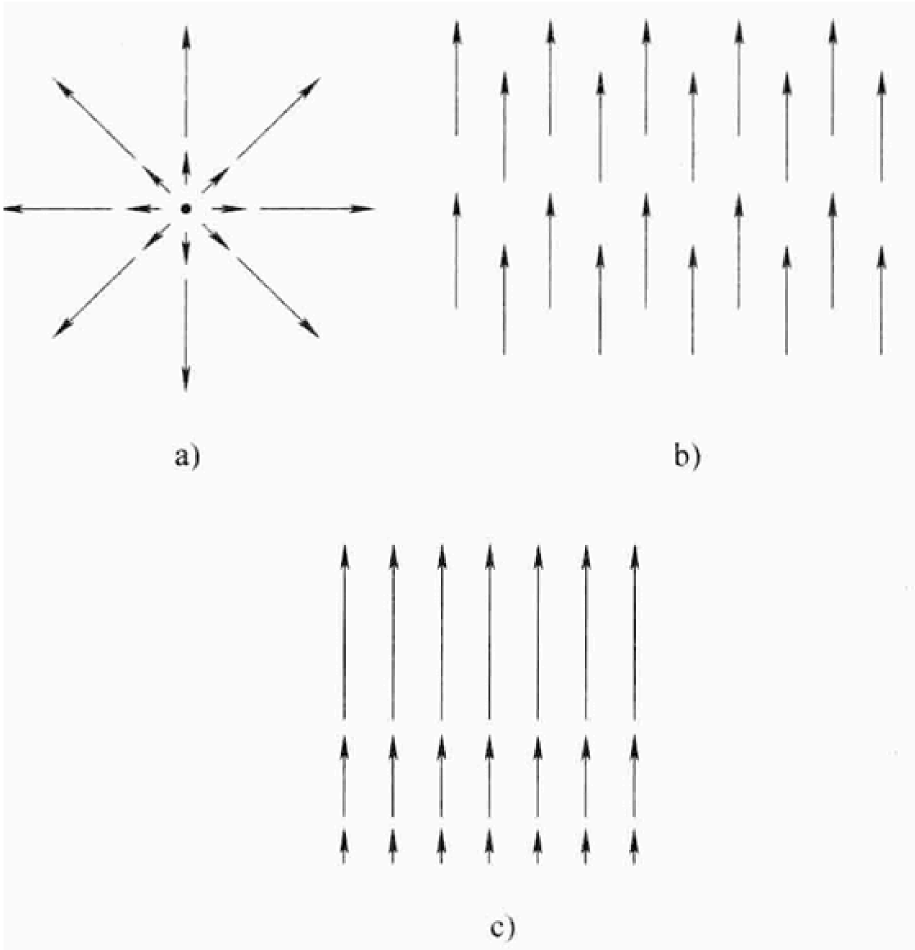
5.c. 矢量微分算子∇

- 定义：$\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$
- 有三种作用方式：
    - 直接作用在一个标量函数 T 上：∇T (梯度)
    - 通过点积形式作用在一个矢量函数 $\mathbf{v}$ 上：$\nabla\cdot\mathbf{v}$ (散度)
    - 通过叉积形式作用在一个矢量函数 $\mathbf{v}$ 上：$\nabla\times\mathbf{v}$ (旋度)

5.d. 矢量场的散度

- 定义：$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$
- 几何解释：$\nabla\cdot\mathbf{v}$ 给出矢量场 $\mathbf{v}$ 在所给点散出的量度
    - 具有正值散度的点被称为源点（流出），具有负值散度的点被称为漏点（流入）

> *思考5：描述下列三个图中给出的矢量场的散度*

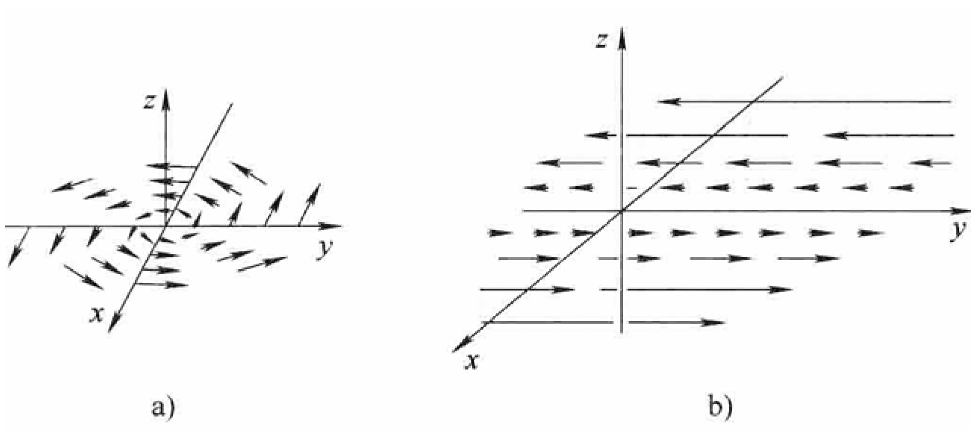


> *思考6：计算 $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ 的散度*

5.e. 矢量场的旋度

- **定义：**
$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{x}(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}) + \hat{y}(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) + \hat{z}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$$
- **几何解释：** $\nabla \times \mathbf{v}$ 是矢量场在所考虑点涡旋状态的量度

> *思考7：描述下列两个图中矢量场的旋度*



> *思考8：计算 $\mathbf{v}_a = -y\hat{x} + x\hat{y}$，$\mathbf{v}_b = x\hat{y}$ 的旋度*

5.f. 矢量微积分运算法则及常用公式

1. 加法、数乘运算：与普通导数运算规则相同，以梯度为例（散度、旋度规则相同）：
    a. $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$
    b. $\nabla kf=k\nabla f$，其中k为常数
2. 积规则：会稍有不同，但是推导方式仍为普通导数运算中的莱布尼兹法则（详细过程不展开，感兴趣的同学可以自行推导），下面给出6个积规则的公式：
    a. $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
    b. $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
    c. $\nabla\cdot(f\mathbf{A})=f(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot(\nabla f)$
    d. $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$
    e. $\nabla\times(f\mathbf{A})=f(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\times(\nabla f)$
    f. $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\times\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\times\mathbf{B}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$
3. 二阶微分：
    a. $\nabla^2T=\nabla\cdot\nabla T$（拉普拉斯算符）
        i. 直角坐标系下，可以表示为$\nabla^2T=\frac{\partial^2T_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T_z}{\partial z^2}$
    b. 梯度的旋度总是为0
        i. 若一个矢量场 $\mathbf{v}$ 的旋度为0，则一定存在一个标量场 ϕ，满足 $\mathbf{v}=-\nabla\phi$，其中 ϕ 称为矢量场 $\mathbf{v}$ 的标量势。这种矢量场 $\mathbf{v}$ 被称为无旋场（旋度为0），也叫做保守场。
        ii. 选取固定的两个点a, b，积分$\int_{a(L)}^{b}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$ 与积分路径无关（类比静电场做功与路径无关）
        iii. 进而有，$\oint_{(L)}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}=0$，其中积分符号的圈表示积分路径为一闭合环路
    c. 旋度的散度总是为 0
        i. 若一个矢量场 $\mathbf{v}$ 的散度为0，则一定存在一个矢量场 $\mathbf{A}$，满足 $\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{A}$，其中 $\mathbf{A}$ 称为矢量场 $\mathbf{v}$ 的矢量势。这种矢量场 $\mathbf{v}$ 被称为无源场（散度为0）.
        ii. 磁场时无源场，其无源的性质对应着“磁单极子不存在”
    d. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v}$
        i. 该公式在电磁场和电磁波中常用

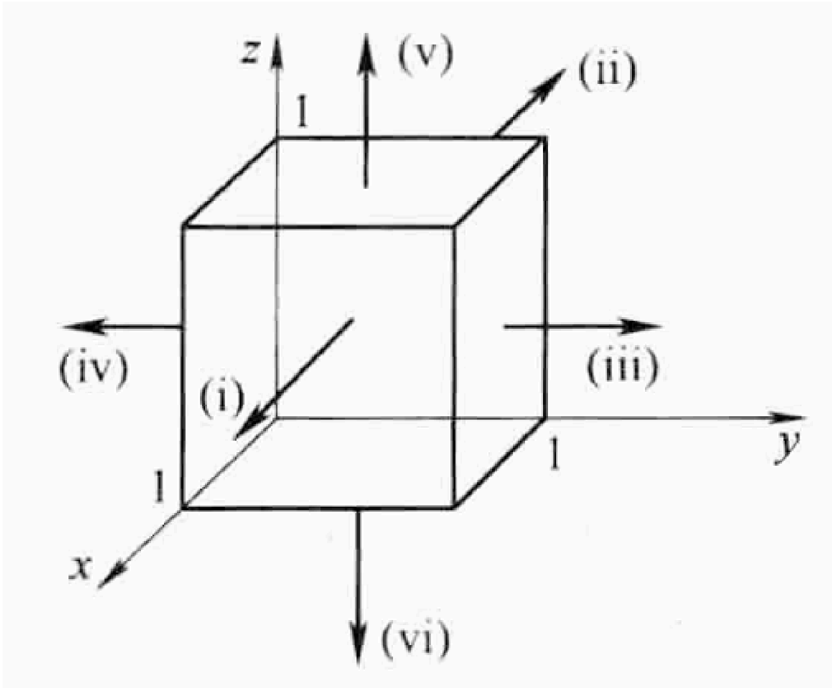
5.g. 有关梯度、散度、旋度的基本公式

1. 梯度定理：$\int_a^b(\nabla T)\cdot d\mathbf{l}=T(b)-T(a)$

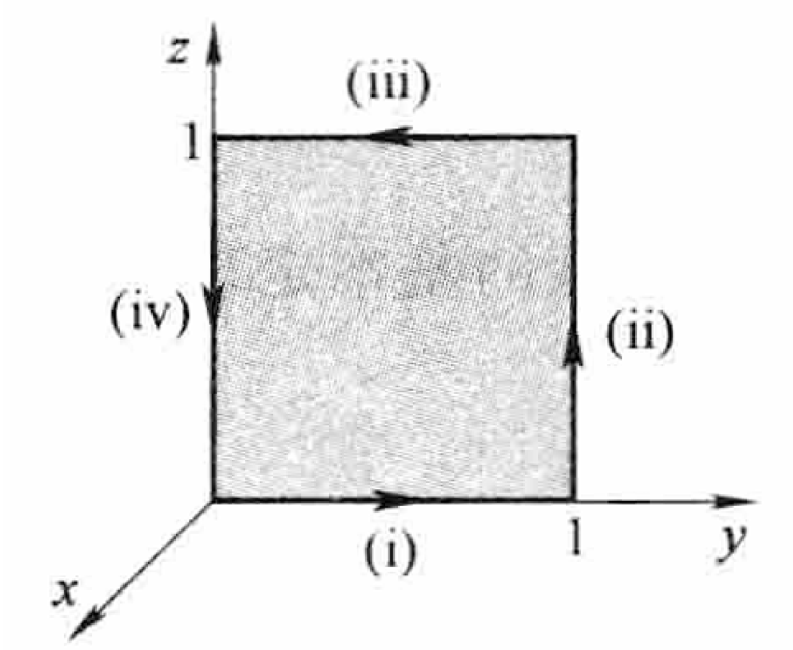
> *思考9：对$T=xy^2$，a为原点 (0, 0, 0)，b为 (2, 1, 0)，验证梯度定理*

2. 散度定理（高斯定理）：$\int_V(\nabla\cdot\mathbf{v})d\tau=\oint_S\mathbf{v}\cdot d\mathbf{a}$

> *思考10：对如图所示单位正方体和函数$\mathbf{v}=y^2\hat{x}+(2xy+z^2)\hat{y}+(2yz)\hat{z}$，验证散度定理*



3. 旋度定理（斯托克斯定理）：$\int_S(\nabla\times\mathbf{v})\cdot d\mathbf{a}=\oint_L\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$

> *思考11：设 $\mathbf{v}=(2xz+3y^2)\hat{y}+(4yz^2)\hat{z}$，对如图所示的平面区域验证旋度定理*
>
> 
>