第 40 卷第 7 期　　数学的实践与认识　　Vol.40, No.7
2010年 4 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Apr., 2010

具有潜伏期的离散 SEIR 模型的稳定性

周玲丽, 孙光辉, 李爱芹
(山东交通学院 数理系, 山东 济南 250023)

摘　要: 建立和研究了有年龄结构和潜伏期的离散 SEIR 模型, 运用常差分线性方程组的理论, 得到基本再生数 R_0 的表达式, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点全局渐进稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定, $R_0 > 1$ 且 $R_1 < 1$ 时, 地方病平衡点局部渐进稳定.

关键词: 离散模型; 潜伏期; 年龄结构; 全局稳定性

0 引言

数学模型在研究传染病流行的规律方面有着极为重要的作用. 近年来, 已建立了若干数学模型, 进行理论流行病学的研究. 对于动力学模型的研究, 通常分为连续型和离散型的 [1]. 用离散模型研究流行病的工作相对较少, 但是大量的疾病报告数据是离散的, 而且离散模型通常便于以种群的生命周期来构造. 1760 年, Daniel Bernoulli 用离散模型分析天花的死亡率. 文 [2] 研究了无种群动力的离散 SI 模型和离散 SIR 模型; 文 [3] 描述和分析了具有年龄结构的离散 SIR 流行病模型, 同时考虑了接种问题. 本文综合考虑了年龄结构对疾病流行过程的影响, 建立了具有年龄结构和潜伏期的离散流行病模型. 分析了平衡点的稳定性, 并且给出了基本再生数.

1 模型的建立

把人群按年龄分组, 每组再分成易感类, 潜伏类, 患者和恢复类: $S_j(t)$ 表示第 t 时刻第 j 个年龄组的易感者数量; $E_j(t)$ 表示第 t 时刻第 j 个年龄组的潜伏者数量; $I_j(t)$ 表示第 t 时刻第 j 个年龄组的患者数量; $R_j(t)$ 表示第 t 时刻第 j 个年龄组的恢复者数量. 用 b_j, d_j 分别表示第 j 个年龄组易感类, 潜伏类, 患者和恢复类的出生率和死亡率, 仅与年龄有关, 与时间无关. 接触率 $\lambda_i \beta_j$ 表示第 j 个年龄的每个患者与第 i 个年龄的任何一个易感者在单位时间有效接触的平均数, 不仅依赖于第 i 个年龄易感者的易感性和抵御疾病的能力, 而且依赖于第 j 个年龄患者的活动能力.

$\dfrac{S_i(t)}{N_i(t)}$ 表示第 i 个年龄组易感者所占的比例; $\lambda_i \dfrac{S_i(t)}{N_i(t)} \beta_j I_j(t)$ 表示单位时间内第 j 个年龄的患者传染第 i 个年龄易感者的数量, 则所有患者传染第 i 个年龄组易感者的总数为 $\lambda_i \dfrac{S_i(t)}{N_i(t)} \sum\limits_{j=2}^{m} \beta_j I_j(t)$, 感染后进入潜伏期. 用 k_j 表示 $E_j(t)$ 类的发病率, 也就是说单位时间内,

收稿日期: 2008-08-06
资助项目: 山东交通学院科研基金 (Z200715)

第 j 个年龄的潜伏者中有 $k_jE_j(t)$ 的个体发病. 用 p_j 表示经过治疗 $I_j(t)$ 类的恢复率.

假设所有的新生儿都为易感者. 在以上分析和假设的基础上, 我们建立模型如下:

$$
\begin{aligned}
&S_0(t+1)=\sum_{i=0}^{m} b_i(S_i(t)+E_i(t)+I_i(t)+R_i(t))=\sum_{i=0}^{m} b_iN_i(t)\\
&E_0(t+1)=I_0(t+1)=I_1(t+1)=R_0(t+1)=R_1(t+1)=R_2(t+1)=0\\
&S_{i+1}(t+1)=(1-d_i)S_i(t)-\lambda_i\sum_{j=2}^{m}\beta_jI_j(t)\frac{S_i(t)}{N_i(t)}\\
&E_{i+1}(t+1)=(1-d_i)E_i(t)+\lambda_i\sum_{j=2}^{m}\beta_jI_j(t)\frac{S_i(t)}{N_i(t)}-k_iE_i(t)\\
&I_{i+1}(t+1)=(1-d_i)I_i(t)+k_iE_i(t)-p_iI_i(t)\\
&R_{i+1}(t+1)=(1-d_i)R_i(t)+p_iI_i(t),\quad i=0,1,\cdots m-1\\
&S_i(0)=S_{i0}\geq 0,E_i(0)=E_{i0}\geq 0,I_i(0)=I_{i0}\geq 0,R_i(0)=R_{i0}\geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

总人口记为 $N_i(t)=S_i(t)+E_i(t)+I_i(t)+R_i(t)$, 显然总人口满足

$$
\begin{aligned}
&N_0(t+1)=\sum_{i=0}^{m} b_iN_i(t)\\
&N_{i+1}(t+1)=(1-d_i)N_i(t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

根据文 [4] 的结果定义净再生数为

$$n=b_0+b_1(1-d_0)+b_2(1-d_0)(1-d_1)+\cdots+b_m\prod_{i=0}^{m-1}(1-d_i)$$

那么, $n=1$ 时, 每组的总人口数经过一段时间以后达到平衡状态, 总人口保持稳定, 即

$$\lim_{t\to\infty}N_i(t)=N_i=N_0\prod_{j=0}^{i-1}(1-d_j)$$

在以后的理论分析中, 我们总假设总人口达到了平衡态, 即 $N_i(t)=N_i, i=0,1,2,\cdots,m$. 在这种假设下分析模型 (1) 的平衡点及其稳定性. 首先保证解的非负性, 可以得出 $1-d_i-p_i\geq 0, 1-d_i-k_i\geq 0, 1-d_i-\frac{\lambda_i}{N_i}\sum\limits_{j=2}^{m}\beta_jN_j\geq 0(i=0,1,\cdots m-1)$ 时, (1) 的解是非负的.

3 平衡点的存在性及稳定性

为了研究模型的形态, 利用 $S_i(t)+E_i(t)+I_i(t)+R_i(t)=N_i$ 可把 (1) 变形为

$$
\begin{aligned}
&E_0(t+1)=I_0(t+1)=I_1(t+1)=R_0(t+1)=R_1(t+1)=R_2(t+1)=0\\
&E_{i+1}(t+1)=(1-d_i-k_i)E_i(t)+\lambda_i\sum_{j=2}^{m}\beta_jI_j(t)-\frac{\lambda_i}{N_i}(E_i(t)+I_i(t)+R_i(t))\sum_{j=2}^{m}\beta_jI_j(t)\\
&I_{i+1}(t+1)=(1-d_i-p_i)I_i(t)+k_iE_i(t)\\
&R_{i+1}(t+1)=(1-d_i)R_i(t)+p_iI_i(t),\quad i=0,1,\cdots,m-1
\end{aligned}
\tag{3}
$$

定义

$$E(t)=\begin{pmatrix}E_1(t)\\E_2(t)\\\cdots\\E_m(t)\end{pmatrix},\quad I(t)=\begin{pmatrix}I_1(t)\\I_2(t)\\\cdots\\I_m(t)\end{pmatrix}$$

$$R(t)=\begin{pmatrix} R_1(t)\\ R_2(t)\\ \cdots\\ R_m(t)\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\\ 0 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{pmatrix}$$

$$T=(T_{ij})_{m\times m},\ T_{ii}=\lambda_{i-1},\ i=1,2,\cdots,m$$

$$B=(B_{ij})_{m\times m}M(E(t)+I(t)+R(t))=(M^1_{ij})_{m\times m}$$

$$C=(C_{ij})_{m\times m}, B_{i+1,i}=1-d_i-k_i, M^1_{i+1,i}=\frac{\lambda_i}{N_i}(E_i(t)+I_i(t)+R_i(t))$$

$$C_{i+1,i}=k_i, i=1,\cdots,m-1$$

$$D=(D_{ij})_{m\times m},\quad P=(P_{ij})_{m\times m},\quad D_{i+1,i}=1-d_i-p_i$$

$$P_{i+1,i}=p_i,\quad i=2,3,\cdots,m-1$$

$$Q=(Q_{ij})_{m\times m},\quad Q_{i+1,i}=1-d_i,\quad i=3,4,\cdots,m-1$$

T,B,M,C,D,P,Q 的其他元素为零. 所以 (3) 可以变为

$$\begin{pmatrix} E(t+1)\\ I(t+1)\\ R(t+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & TF-M(E(t)+I(t)+R(t))F & 0\\ C & D & 0\\ 0 & P & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(t)\\ I(t)\\ R(t)\end{pmatrix}\tag{4}$$

3.1 无病平衡点及其稳定性

在无病平衡点处, $S_i(t+1)=S_i(t)=S_i$, $E_i(t+1)=E_i(t)=E_i=0$, $I_i(t+1)=I_i(t)=I_i=0$, $R_i(t+1)=R_i(t)=R_i=0, i=1,2,\cdots,m-1$. 所以可得到

$$E_i=I_i=R_i=0,\quad S_0=N_0$$

$$S_1=(1-d_0)S_0=(1-d_0)N_0,\quad S_2=(1-d_1)S_1=(1-d_0)(1-d_1)N_0$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$S_m=\prod_{i=0}^{m-1}(1-d_i)N_0$$

把 (5) 带入 (3) 线性化并去掉高次项得

$$\begin{pmatrix} E(t+1)\\ I(t+1)\\ R(t+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & TF & 0\\ C & D & 0\\ 0 & P & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(t)\\ I(t)\\ R(t)\end{pmatrix}$$

如果线性系统 (6) 的零解全局渐近稳定, 则非线性系统 (4) 的零解局部渐近稳定, 由常差分线性方程组的稳定性理论和非负矩阵理论知, 若 (6) 的系数矩阵 W 的主特征值小于 1, 则 (4) 的零解局部渐近稳定, 大于 1, 则不稳定. 由于 W 是非负矩阵, 有一个正的单重的特征值 $\lambda_{\max}$, 其他特征值 λ 满足 $\lambda_{\max}>|\lambda|$. 所以 (4) 的无病平衡点的稳定性与 (6) 系数矩阵的主特征根大小有关. 而 $|\lambda E-W|=\lambda^m\left|\lambda E-\begin{pmatrix} B & TF\\ C & D\end{pmatrix}\right|$, 所以只需求 $\begin{pmatrix} B & TF\\ C & D\end{pmatrix}$ 的主特征根. 但其主特征根不易求出, 所以考虑线性系统 $\begin{pmatrix} B & TF\\ C & D\end{pmatrix}v=\lambda Ev$, 而 $\begin{pmatrix} B & TF\\ C & D\end{pmatrix}$ 有一个主特征根 $\lambda=1$ 等价于

$$\left[E-\begin{pmatrix} B & 0\\ C & D\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF\\ 0 & 0\end{pmatrix}v=v$$

有非零解, 即 $\left[E-\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有一个特征根等于 1[5]. 而

$$\left[E-\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2\lambda_0 & \beta_3\lambda_0 & \cdots & \beta_m\lambda_0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 f_1 & \beta_3 f_1 & \cdots & \beta_m f_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 f_{m-1} & \beta_3 f_{m-1} & \cdots & \beta_m f_{m-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 g_1 & \beta_3 g_1 & \cdots & \beta_m g_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 g_{m-1} & \beta_3 g_{m-1} & \cdots & \beta_m g_{m-1}
\end{pmatrix}$$

其中

$$f_1=\omega_1\lambda_0+\lambda_1 \quad f_2=\omega_1\omega_2\lambda_0+\omega_2\lambda_1+\lambda_2$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$f_{m-1}=\prod_{j=1}^{m-1}\omega_j\lambda_0+\prod_{j=2}^{m-1}\omega_j\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}$$

$$g_1=k_1\lambda_0, g_2=(k_2\omega_1+k_1v_2)\lambda_0+k_2\lambda_1$$

$$g_3=(k_3\omega_1\omega_2+k_2\omega_1v_3+k_1v_2v_3)\lambda_0+(k_3\omega_2+k_2v_3)\lambda_1+k_3\lambda_2,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$g_{m-1}=(k_{m-1}\prod_{j=1}^{m-2}\omega_j+k_{m-2}\prod_{j=1}^{m-3}\omega_j v_{m-1}+\cdots+k_1\prod_{j=2}^{m-1}v_j)\lambda_0+$$
$$(k_{m-1}\prod_{j=2}^{m-2}\omega_j+k_{m-2}\prod_{j=2}^{m-3}\omega_j v_{m-1}+\cdots+k_2\prod_{j=3}^{m-1}v_j)\lambda_1+\cdots+k_{m-1}\lambda_{m-2}$$

$$\omega_j=1-d_j-k_j, v_j=1-d_j-p_j, j=1,2,\cdots,m-1$$

可求得其惟一的正特征根 $\lambda=\beta_2g_1+\beta_3g_2+\cdots+\beta_mg_{m-1}$, 我们令 $R_0=\beta_2g_1+\beta_3g_2+\cdots+\beta_mg_{m-1}$, 所以 $\lambda_{\max}<1$ 等价于 $R_0<1$. 定义 R_0 为基本再生数, 表示当总人口全是易感者时一个患者在其感染期间感染的平均人数 [6]. 它是区分疾病是否流行的一个重要参数.

定理 3.1 $R_0<1$ 时,(4) 的无病平衡点是全局渐近稳定的, $R_0>1$ 时是不稳定的.

证明 对于 (4) 考虑

$$E(t+1)=BE(t)+(TF-M(E(t)+I(t)+R(t))F)I(t)\le BE(t)+TFI(t)$$

$$I(t+1)=CE(t)+DI(t)$$

$$R(t+1)=PI(t)+QR(t)$$

令

$$E_1(t+1)=BE_1(t)+TFI_1(t)$$

$$I_1(t+1)=CE_1(t)+DI_1(t)$$

$$R_1(t+1)=PI_1(t)+QR_1(t)$$

由比较定理得 $E(t) \le E_1(t), I(t) \le I_1(t), R(t) \le R_1(t)$, 而 $\lim_{t\to\infty} E_1(t) = 0, \lim_{t\to\infty} I_1(t) = 0, \lim_{t\to\infty} R_1(t) = 0$, 则 $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$. 所以 $R_0 < 1$ 时 (4) 的无病平衡点全局渐近稳定.

3.2 地方病平衡点及其稳定性

在地方病平衡点处满足

$S_i(t+1) = S_i(t) = S_i^*, E_i(t+1) = E_i(t) = E_i^*, I_i(t+1) = I_i(t) = I_i^* \quad R_i(t+1) = R_i(t) = R_i^*$

带入 (1) 得

$$S_{i+1}^* = (1-d_i)S_i^* - \frac{\lambda_i S_i^*}{N_i}\sum_{j=2}^m \beta_j I_j^*$$

$$E_{i+1}^* = (1-d_i-k_i)E_i^* + \frac{\lambda_i S_i^*}{N_i}\sum_{j=2}^m \beta_j I_j^* = (1-d_i-k_i)E_i^* + \frac{\lambda_i}{N_i}(N_i - E_i^* - I_i^* - R_i^*)\sum_{j=2}^m \beta_j I_j^*$$

$$I_{i+1}^* = (1-d_i-p_i)I_i^* + k_i E_i^*$$

$$R_{i+1}^* = (1-d_i)R_i^* + p_i I_i^*, \quad i = 0,1,\cdots m-1$$

$$E_0^* = I_0^* = I_1^* = R_0^* = R_1^* = R_2^* = 0$$

令 $\sum_{j=2}^m \beta_j I_j^* = x^*$, 可知 $S_i^*, E_i^*, I_i^*, R_i^*$ 都可表示为 x^* 的函数, 所以如果 x^* 存在惟一, 那么地方病平衡点也存在惟一. 考虑 $E_i^*, I_i^*, R_i^*(i = 1,2,\cdots,m)$ 的表达式

$$E_{i+1}^* = (1-d_i-k_i)E_i^* + \lambda_i x^* - \frac{\lambda_i}{N_i}(E_i^* + I_i^* + R_i^*)x^*$$

$$I_{i+1}^* = (1-d_i-p_i)I_i^* + k_i E_i^*$$

$$R_{i+1}^* = (1-d_i)R_i^* + p_i I_i^*, \quad i = 0,1,\cdots m-1$$

把 E_i^*, I_i^*, R_i* 看作 x^* 的函数, 由 $\beta_2 I_2^* + \beta_3 I_3^* + \cdots + \beta_m I_m^* = x^*$ 两边除以 x^* 得 $f(x^*) = \beta_2\frac{I_2^*}{x^*} + \beta_3\frac{I_3^*}{x^*} + \cdots + \beta_m\frac{I_m^*}{x^*} - 1 = 0$. 下面证明 $R_0 > 1$ 时, $f(x^*) = 0$ 有惟一的一个正根. (7) 可调整为

$$E_1^* = \lambda_0 x^*,\ E_2^* = (\omega_1 - \frac{\lambda_1}{N_1}x^*)E_1^* + \lambda_1 x^* = (\omega_1 - \frac{\lambda_1}{N_1}x^*)\lambda_0 x^* + \lambda_1 x^*$$

$$E_3^* = \omega_2 E_2^* + \lambda_2 x^*(1 - \frac{E_2^* + I_2^*}{N_2})$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$E_m^* = \omega_{m-1}E_{m-1}^* + \lambda_{m-1}x^*(1 - \frac{E_{m-1}^* + I_{m-1}^* + R_{m-1}^*}{N_{m-1}})$$

$$I_1^* = 0, \quad I_2^* = k_1 E_1^* = k_1\lambda_0 x^*, \quad I_3^* = v_2 I_2^* + k_2 E_2^*$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$I_m^* = v_{m-1}I_{m-1}^* + k_{m-1}E_{m-1}^*$$

$$R_1^* = R_2^* = 0, \quad R_3^* = p_2 I_2^*, \quad R_4^* = (1-d_3)R_3^* + p_3 I_3^*,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$R_m^* = (1-d_{m-1})R_{m-1}^* + p_{m-1}I_{m-1}^*$$

可以得到

$$(\frac{I_2^*}{x^*})' = 0, \quad (\frac{I_3^*}{x^*})' = v_2(\frac{I_2^*}{x^*})' + k_2(\frac{E_2^*}{x^*})'$$

而

$$(\frac{E_2^*}{x^*})' = -\frac{\lambda_0\lambda_1}{N_1} < 0, \quad \therefore (\frac{I_3^*}{x^*})' < 0$$

又

$$(\frac{I_4^*}{x^*})' = v_3(\frac{I_3^*}{x^*})' + k_3(\frac{E_3^*}{x^*})'$$

而

$$(\frac{E_3^*}{x^*})' = \omega_2(\frac{E_2^*}{x^*})' - \frac{\lambda_2}{N_2}(E_2^* + I_2^*)'$$

而

$$(E_2^* + I_2^*)' = (1 - d_1 - \frac{\lambda_1}{N_1}x^*)(E_1^*)' + \lambda_1(1 - \frac{E_1^*}{N_1}) = (1 - d_1 - \frac{\lambda_1}{N_1}x^*)\lambda_0 + \lambda_1(1 - \frac{E_1^*}{N_1}) > 0$$

所以 $(\frac{E_3^*}{x^*})' < 0$, 则 $(\frac{I_4^*}{x^*})' < 0$.

设

$$(\frac{I_i^*}{x^*})' < 0, \quad (\frac{E_{i-1}^*}{x^*})' < 0, (E_{i-1}^* + I_{i-1}^* + R_{i-1}^*)' > 0$$

则

$$(E_i^* + I_i^* + R_i^*)' = (1 - d_{i-1} - \frac{\lambda_{i-1}}{N_{i-1}}x^*)(E_{i-1}^* + I_{i-1}^* + R_{i-1}^*)' + \lambda_{i-1}[1 - \frac{E_{i-1}^* + I_{i-1}^* + R_{i-1}^*}{N_{i-1}}] > 0$$

则

$$(\frac{E_i^*}{x^*})' = \omega_{i-1}(\frac{E_{i-1}^*}{x^*})' - \frac{\lambda_{i-1}}{N_{i-1}}(E_{i-1}^* + I_{i-1}^* + R_{i-1}^*)' < 0$$

所以

$$(\frac{I_{i+1}^*}{x^*})' = v_i(\frac{I_i^*}{x^*})' + k_i(\frac{E_i^*}{x^*})' < 0$$

所以 $f'(x^*) < 0$, 而 $f(0) = R_0 - 1 > 0(R_0 > 1$ 时 $)$, 所以 $R_0 > 1$ 时 $f(x^*) = 0$ 有惟一的一个正根, 则地方病平衡点在一定条件下存在惟一. 下面讨论地方病平衡点的稳定性, 令

$$E_i(t) = \tilde{E}_i(t) + E_i^*, \ I_i(t) = \tilde{I}_i(t) + I_i^*, \ R_i(t) = \tilde{R}_i(t) + R_i^*$$

带入 (3) 线性化并去掉高次项得

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(t+1) \\ \tilde{I}(t+1) \\ \tilde{R}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & TF - M(E^* + I^* + R^*)F & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}(t) \\ \tilde{I}(t) \\ \tilde{R}(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$M(E^* + I^* + R^*) = (M_{ij})_{m\times m}, M_{i+1,i} = \frac{\lambda_i}{N_i}(E_i^* + I_i^* + R_i^*), i = 1, 2, \cdots, m-1$$

(8) 的系数矩阵记为 $\widetilde{W}$, 经过计算可以得到, $\widetilde{W}$ 的特征根的大小与 Q 没有关系, 而是取决于 $\begin{pmatrix} B & TF - M(E^* + I^* + R^*)F \\ C & D \end{pmatrix}$ 的主特征根的大小. 同样考虑线性系统

$$\begin{pmatrix} B & TF - M(E^* + I^* + R^*)F \\ C & D \end{pmatrix} v = \lambda E v$$

而

$$\begin{pmatrix} B & TF - M(E^* + I^* + R^*)F \\ C & D \end{pmatrix}$$

有一个主特征根 $\lambda=1$ 等价于

$$\left[E-\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF-M(E^*+I^*+R^*)F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v=v$$

有非零解, 即

$$\left[E-\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF-M(E^*+I^*+R^*)F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有一个特征根等于 1. 而

$$\left[E-\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & TF-M(E^*+I^*+R^*)F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2\lambda_0 & \beta_3\lambda_0 & \cdots & \beta_m\lambda_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 f_1' & \beta_3 f_1' & \cdots & \beta_m f_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 f_{m-1}' & \beta_3 f_{m-1}' & \cdots & \beta_m f_{m-1}' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 g_1' & \beta_3 g_1' & \cdots & \beta_m g_1' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 g_{m-1}' & \beta_3 g_{m-1}' & \cdots & \beta_m g_{m-1}' \end{pmatrix}$$

其中

$$f_1'=\omega_1\lambda_0+\lambda_1T_1,\quad f_2'=\omega_1\omega_2\lambda_0+\omega_2\lambda_1T_1+\lambda_2T_2$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$f_{m-1}'=\prod_{j=1}^{m-1}\omega_j\lambda_0+\prod_{j=2}^{m-1}\omega_j\lambda_1T_1+\cdots+\lambda_{m-1}T_{m-1}$$

$$g_1'=k_1\lambda_0 \quad g_2'=(k_2\omega_1+k_1v_2)\lambda_0+k_2\lambda_1T_1$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$g_{m-1}'=(k_{m-1}\prod_{j=1}^{m-2}\omega_j+k_{m-2}\prod_{j=1}^{m-3}\omega_jv_{m-1}+\cdots+k_1\prod_{j=2}^{m-1}v_j)\lambda_0+$$
$$(k_{m-1}\prod_{j=2}^{m-2}\omega_j+k_{m-2}\prod_{j=2}^{m-3}\omega_jv_{m-1}+\cdots+k_2\prod_{j=3}^{m-1}v_j)\lambda_1T_1+\cdots+k_{m-1}\lambda_{m-2}T_{m-2}$$

$$\omega_j=1-d_j-k_j,\quad v_j=1-d_j-p_j,\quad T_j=1-\frac{E_j^*+I_j^*+R_j^*}{N_j},\quad j=1,2,\cdots,m-1$$

同理可以得到其惟一的正特征根为 $\lambda=\beta_2g_1'+\beta_3g_2'+\cdots+\beta_mg_{m-1}'$.

定理 3.2 $R_0>1$ 且 $R_1=\beta_2g_1'+\beta_3g_2'+\cdots+\beta_mg_{m-1}'<1$ 时, 地方病平衡点局部渐近稳定.

4 数值模拟

模拟时, 以 10 岁为一个年龄组, 分成 0 − 9, 10 − 19, 20 − 29, 30 − 39, 40 − 49, 50 − 59, 60 − 69, 70 以上共 8 个年龄组, 总人口标准化为 1. 首先保证人口总数是趋于稳定的, 结合 1999 年人口统计年鉴中的数据, 我们取各个年龄组的出生率、死亡率如下

表 1 各个年龄组的出生率和死亡率 (千分数)

年龄组	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	≥ 70
出生率	0.0	3.96	114.49	83.19	22.62	1.46	0.68	0.0
死亡率	9.799	1.517	2.32	2.55	5.12	7.90	25.73	65.10

本文取各年龄组的易感者初值为总人数的 0.4 倍, 潜伏类初值为 0.3 倍, 患者初值为 0.2 倍, 潜伏类的发病率 k_i 取 0.2, 患者的恢复率为 p_i 取 0.05. 感染率分别取不同值后, 利用 MATLAB 软件, 得到模型中各个年龄组患者的分布情况, 图 1 是 $R_0 < 1$ 时患者的分布情况, 图 2 是 $R_0 > 1$ 时患者的分布情况. 从图中可以看出, $R_0 < 1$ 时无病平衡点是渐近稳定的, $R_0 > 1$ 时地方病平衡点是渐近稳定的.

参考文献

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

[2] Hethcot H W. Stability of the endemic equilibrium in epidemic models with subpopulations[J]. Mathematical Biosciences, 1985, 75: 205-227.

[3] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统 [M]. 北京: 科学出版社, 1993, 36-38.

[4] Jeff Griffiths, Dawn Lowrie, Janet Williams. An age-structured model for the aids epidemic[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 124: 1-14

[5] Kaplan D and Glass L. Understanding Nonlinear Dynamics[M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 1995.

[6] 马知恩、周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

Global Analysis of Discrete SEIR Model with Latent Period

ZHOU Ling-li, SUN Guang-hui, LI Ai-qin

(Department of Mathematics and Physics, ShanDong Jiaotong University, Jinan 250023, China)

Abstract: In this paper, a higher dimensional discrete SEIR model with age-structure and latent period is formulated. The dynamical behavior of the model is analyzed theoretically. We obtain the global stability condition for disease-free equilibrium. The existence and stability of the endemic equilibrium are discussed. The basis reproductive number of the model is given.

Keywords: discrete model; latent period; age-structure; global stability