第五章　定积分及应用

前面我们研究了积分学的第一类问题——已知函数的导数求其原函数族，即不定积分 ，下一步我们来讨论积分学的另一类问题——求和式的极限问题，即定积分。它是学习多元函数积分学的重要基础，在实际中也有着广泛的应用。

本章将先从两个实例出发，引出定积分的概念和性质，然后介绍定积分的计算方法、广义积分以及定积分在几何、物理方面的一些应用

§5-1 定积分的概念及性质

一、定积分的概念

1. 引例

例1　设$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续、非负，求由曲线$y=f(x)$以及直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的平面图形（曲边梯形）的面积A。

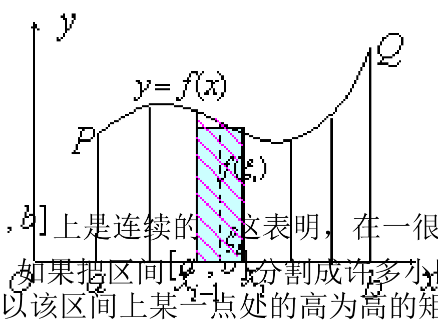

图5-1

解：如图5-1所示，若PQ为一平行于x轴的直线段，图形为一矩形，其面积可由公式：

高×底

来定义和计算. 而这里PQ为一曲线弧，曲边梯形在底边上各点处的高$f(x)$在区间$[a,b]$上是变动的，故不能直接用上述公式来计算其面积. 但注意到函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上是连续的，这表明，在一很微小的区间上，曲边梯形的高$f(x)$的变化也很微小，近似于不变，因此，如果把区间$[a,b]$分割成许多小区间，那么，在每一个小区间上对应的窄曲边梯形都可以近似的看作是以该区间上某一点处的高为高的矩形（因为高近似于不变），所有这些窄矩形的面积之和便得到曲边梯形面积的近似值，若把区间$[a,b]$无限细分下去，即使得每一个小区间的长度都趋于零，这时所有这些窄矩形的面积之和的极限就是曲边梯形的面积. 这样就得到了求曲边梯形的面积的方法，具体的作法如下.

第一步：分割　在区间$[a,b]$中任意插入分点$x_i\ (i=1,2,3,\cdots,n-1)$，（$x_i<x_{i+1}$），将区间$[a,b]$分成$n$个小区间，记$x_0=a$，$x_n=b$，则第$i$个小区间为$[x_{i-1},x_i]$，其长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$，

过各分点作垂直于x轴的直线，将整个曲边梯形分割成了n个小曲边梯形。

第二步：取近似　在第i个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，以$f(\xi_i)$为高作一个矩形（如图5-1），则第i个小曲边梯形面积$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$

第三步：求和　$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

第四步：取极限　记小区间长度的最大值为λ，即$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，那么，当$\lambda\to 0$时（即小区间个数无限增多，且长度都无限缩小），取上述和式的极限，便得曲边梯形的面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

例**2**　设一物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上的连续函数，且$v(t)\geq 0$，求在这段时间内物体所经过的路程s.

解：物体运动的速度是变化的，故不能用公式$s=v\cdot t$来计算路程，但由于$v(t)$是关于t的连续函数，在一很微小的时间间隔内，物体的运动又可近似的看作是匀速运动，因此，可用类似于讨论曲边梯形面积的方法来确定其路程.

第一步：分割　在$[T_1,T_2]$中任意插入分点$t_i\ (i=1,2,3,\cdots,n-1)$，（$t_i<t_{i+1}$），将区间$[T_1,T_2]$分成$n$个小区间，记$t_0=T_1$，$t_n=T_2$，则第$i$个小区间为$[t_{i-1},t_i]$，其长度记为$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，经过的路程为$\Delta s_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$。

第二步：取近似　在第i个小区间$[t_{i-1},t_i]$上任取一点τ_i，以$v(\tau_i)$来代替$[t_{i-1},t_i]$上各时刻的速度，从而可得部分路程的近似值$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i$

第三步：求和　$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$

第四步：取极限 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$，其中 $\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$

小结：虽涉及的具体对象不同，但解决问题的方法和步骤一致，且最后都归结为求具有相同结构的一种特定和式的极限.

由此我们可引出定积分的概念

2. 定积分的概念

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在区间 $[a,b]$ 中任意插入一组分点 x_i（$i=1,2,3,\cdots,n-1$，$a<x_i<x_{i+1}<b$），把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，记 $x_0=a$，$x_n=b$，则第 i 个小区间为 $[x_{i-1},x_i]$，其长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$ 怎么分割，也不论在 $[x_{i-1},x_i]$ 上如何选取 ξ_i，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 总存在，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并把该极限值称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 叫积分下限，b 叫积分上限，$[a,b]$ 叫积分区间.

说明：

① 由定义可知 $\int_a^b f(x)dx$ 代表一个数，只取决于被积函数与积分区间，并且它的值与积分变量用什么字母表示无关，即 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$；

②上述定积分概念中，下限 a 小于上限 b，实际上，下限 a 可以大于或等于上限 b，为了计算和应用方便，特作如下补充规定：

当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$；当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；

③前面两个引例可用定积分表述如下：

由曲线 $y=f(x)$（$f(x)\ge 0$）、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积 $A=\int_a^b f(x)dx$.

以速度 $v=v(t)$（$v(t)\ge 0$）作直线运动的物体，在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内经过的路程 $s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$.

3. 定积分存在的条件

有了定积分的的概念，我们还需要清楚一个问题：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足什么条件，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上才一定可积呢？一般说来，有如下的充分条件

定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足下列条件之一：

⑴ 连续；

⑵ 有界，且只有有限个第一类间断点；

那么，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积。（证略）

4. 定积分的几何意义

不难推知，当 $a<b$ 时

⑴ 若 $f(x)\ge 0$，$\int_a^b f(x)dx$ 表示对应曲边梯形的面积，即 $\int_a^b f(x)dx=A$；

⑵ 若 $f(x)\le 0$，$\int_a^b f(x)dx$ 表示对应曲边梯形的面积的负值，即 $\int_a^b f(x)dx=-A$；

⑶ 一般而言，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在直角坐标平面上总表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围图形中，x 轴上方部分的面积减去下方部分的面积.

如图5-2所示情形有

$\int_a^b f(x)dx =$ $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$

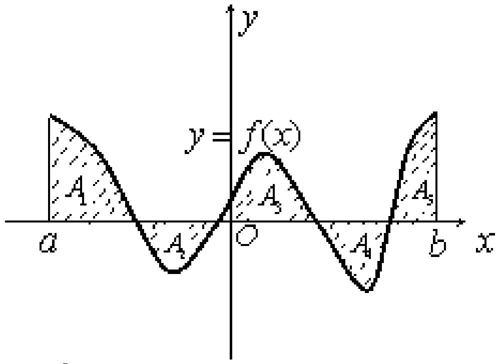

图5-2

例**3** 利用定积分的几何意义计算下列定积分：

(1) $\int_0^3 (x-1)dx$　　　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin xdx$

解：⑴令 $y = x - 1$，如图5-3所示，

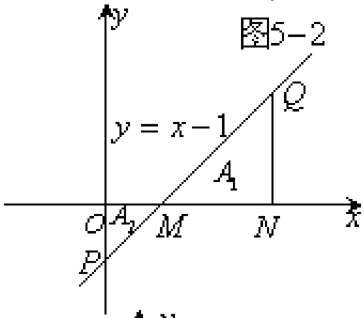

图5-3

ΔMNQ 的面积为 $A_1 = 2$

ΔMOP 的面积为 $A_2 = \frac{1}{2}$

所以，由定积分的几何意义得

$\int_0^3 (x-1)dx =$ $A_1 - A_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

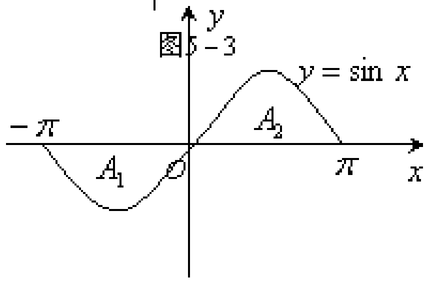

图5－4

⑵令 $y = \sin x$，如图5-4所示，

由图形的对称性不难推知

$A_1 = A_2$

所以，$\int_{-\pi}^{\pi} \sin xdx =$ $A_2 - A_1 = 0$

二、定积分的性质

假若涉及的积分都存在，那么，定积分有如下的性质

性质**1** 两个函数的代数和的定积分等于各自的定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$.

该性质可推广到有限个函数的情形.

性质**2** 被积函数的常数公因子可提到积分号外，即

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$ （k 为常数）

性质**3** 如果在区间$[a, b]$上$f(x) \equiv 1$，那么

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$$

性质**4** 不论的a、b、c 大小关系如何，总有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

此性质表明定积分对积分区间具有可加性。

性质**5** 如果在区间$[a, b]$上，$f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)dx \geq 0$，仅当$f(x) \equiv 0$时才取等号.

上述五个性质均可由定积分的定义证得，例如对于性质1证明如下：

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

其余性质的证明留给读者思考.

由性质5又可得到如下两个推论：

推论1 如果在区间$[a, b]$上，$f(x) \ge g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx \quad (a < b)$$

上式仅当$f(x) \equiv g(x)$时才取等号.

推论2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

性质6（定积分估值定理） 设M和m分别是$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad (a < b)$$

证明 因为$m \le f(x) \le M$，所以由性质5得

$$m(b-a) = \int_a^b m \cdot dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

借助于性质6及闭区间上的连续函数的介值定理又可推得如下重要性质

性质7（定积分中值定理） 如果$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则在$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

该定理的证明留给读者思考，我们可给出如下的几何解释：

在$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得以$[a, b]$为底，曲线$y = f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积（如图5-5所示）。

显然，该中值定理不论$a < b$还是$a > b$都是成立的。

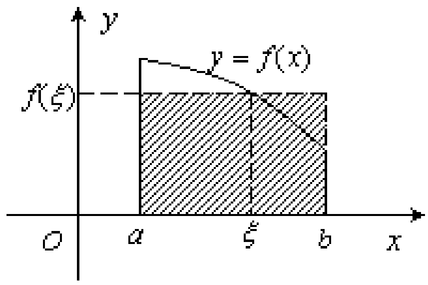

图5－5

例4 估计下列定积分的值：

(1) $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx$

解：⑴由于$f(x) = \sqrt{1+x^3}$在$[0, 1]$上为单调增函数，所以

$m = f(0) = 1$，$M = f(1) = \sqrt{2}$，从而

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \le \sqrt{2}$$

⑵因在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$上，$f(x) = 1+\sin^2 x$的最大值、最小值分别为

$m = f(\pi) = 1$，$M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$，所以，

$$\pi = \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx \le \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 = 2\pi$$

注：由观察确定$f(x)$最值有一定难度时，总可通过求连续函数在闭区间上的最值的方法来讨论.

例5 比较下列积分值的大小：

(1) $\int_0^1 (1+x)^2 dx$ 与 $\int_0^1 (1+x)^3 dx$ (2) $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

解：利用性质5可比较两个定积分值的大小。

⑴当$0 \le x \le 1$时，$(1+x)^2 \le (1+x)^3$，且只要$x \ne 0$，$(1+x)^2 < (1+x)^3$，所以

$$\int_0^1 (1+x)^2 dx < \int_0^1 (1+x)^3 dx$$

⑵当$1 \le x \le 2$时，$0 \le \ln x \le \ln 2 < 1$，故有$\ln x \ge (\ln x)^2$，

且只要$x \ne 1$，总有$\ln x > (\ln x)^2$，所以，

$$\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

习题5－1

1．利用定积分的几何意义求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^2 2x dx$ (2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

2．估计下列定积分的值：

(1) $\int_0^1 (x^2+1) dx$ (2) $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$

3．比较下列定积分的大小：

(1) $\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 x^3 dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

4．若$f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 试证:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \le \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx\right]$$