§5-6 定积分在几何上的应用

定积分的概念不仅能分析和解决曲边梯形的面积和变速直线运动的路程等问题，而且在几何和物理等其它方面也有着广泛的应用.本节将通过面积、体积、弧长的计算介绍如何运用元素法将所求量表达成为定积分的分析方法.

一、定积分的元素法

元素法是定积分运用中常采用的一种重要分析方法.为了更好的说明这种方法，我们首先来回顾一下曲边梯形的面积问题.

设$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续且$f(x)\ge 0$，则以曲线$y=f(x)$为曲边、$[a,b]$为底的曲边梯形的面积A可表示为定积分

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

其分析方法和步骤是：

第一步：分割　插入分点，将区间$[a,b]$任意分为n个小区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$，相应将整个曲边梯形分成了n个窄曲边梯形，所求曲边梯形的面积A正好为各窄曲边梯形的面积之和，即$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$.

第二步：取近似　计算ΔA_i的近似值：$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$

第三步：求和　求ΔA_i的近似值之和得A的近似值：$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

第四步：取极限 求近似值的极限得精确值：$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，

其中$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

在该问题中，我们注意到，所求量A（面积）与区间$[a,b]$有关，如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，那么，所求量A相应地分成许多部分量，而所求量等于各部分量之和，即所求量A对区间$[a,b]$具有可加性；同时还要注意的是，以$f(\xi_i)\Delta x_i$近似代替部分量ΔA_i时，它们只相差一个比Δx_i高阶的无穷小，因此，和式$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$的极限就是$A$的精确值，从而$A$可以表示为定积分：

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

还需注意到，整个分析过程的关键步骤是第二步，这一步得到了近似表达式$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$，从而确定了定积分的被积式.实际上，若用$[x,x+dx]$表示任一小区间，取$\xi_i=x$，那么，在这一小区间上对应的部分量$\Delta A$可近似表示为

$$\Delta A\approx f(x)dx$$

上式右边$f(x)dx$正好就是所得定积分的被积式，称之为面积元素，记为$dA=f(x)dx$，从而有

$$A=\int_a^b dA=\int_a^b f(x)dx$$

一般说来，如果某一实际问题中所求的量U满足下列的条件：

⑴U是与某一个变量x的变化区间$[a,b]$有关的量；

⑵U对区间$[a,b]$具有可加性，即如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，则U相应分成许多部分量，而U等于所有部分量之和；

⑶在$[a,b]$的任一小区间$[x,x+dx]$上，对应的部分量可近似表示为$\Delta U\approx f(x)dx$；

那么，就可考虑用定积分来表达并计算量U. 其一般步骤为：

① 确定积分变量和积分区间. 根据实际情况，选取一个相关的变量例如x为积分变量并确定其变化区间$[a,b]$；

② 确定所求量的微元素. 在任一小区间$[x,x+dx]$上，将部分量ΔU近似地用$[a,b]$上的一个连续函数$f(x)$在x处的值与dx的积$f(x)dx$ 来表示，从而求得量U的微元素

$$dU=f(x)dx$$

③ 建立量U的积分表达式. $U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$

④ 计算定积分，求得所求量U的值.

这种方法叫做元素法.

下面我们通过具体的问题来谈谈该方法的应用.

二、平面图形的面积

应用定积分，不但可以计算曲边梯形的面积，还可以计算一些较为复杂的平面图形的面积.下面分两各种情形讨论.

（一）直角坐标系下的面积问题

例1 求由曲线$y=\frac{1}{2}x^2$与$y=\frac{1}{1+x^2}$所围成的封闭图形的面积.

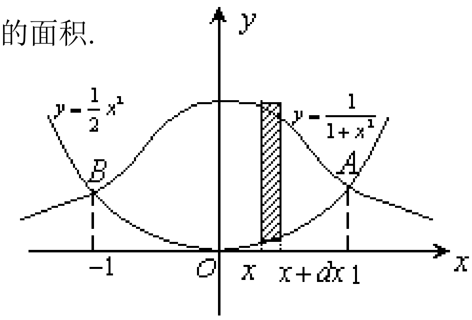


图5-8

解：这两条曲线所围成的图形，如图5-8所示.为了定出图形所在的范围，先求这两条曲线的交点.

解方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ 得解为$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$及$\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

即两曲线相交于$A\left(1,\frac{1}{2}\right)$及$B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，故知图形在直线$x=-1$与$x=1$之间.

取x为积分变量，则积分区间为$[-1,1]$，不难推得面积元素为$dA=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

所以，所求面积为$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$

例2 求由抛物线$y^2=x+2$与直线$x-y=0$所围图形的面积.

解：解方程组$\begin{cases} y^2=x+2 \\ x-y=0 \end{cases}$ 得两曲线交点为$A(-1,-1)$及$B(2,2)$，故两曲线所围图形如图5-9所示.

取y为积分变量，积分区间为$[-1,2]$，由图形可得所求面积元素为

$$dA=(y-y^2+2)dy$$

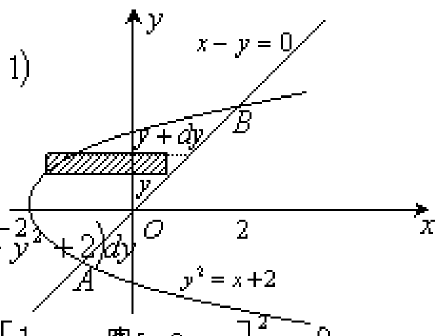


图5-9

故所求面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(y-y^2+2)dy=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+2y\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

注：一般说来，由定积分的元素法可推得如下的面积计算公式，这些公式今后可直接应用

⑴由连续曲线$y=f(x)$、$y=g(x)$，且$f(x)\geq g(x)$，直线$x=a$、$x=b$ $(a<b)$所围成平面图形（如图5-10）的面积为

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

⑵由连续曲线$x=\varphi(y)$、$x=\psi(y)$，且$\varphi(y)\geq\psi(y)$，直线$y=c$、$y=d$ $(c<d)$所围成平面图形（如图5-11）的面积为

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$$

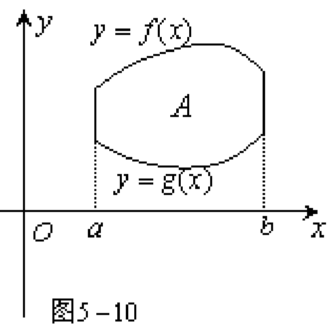
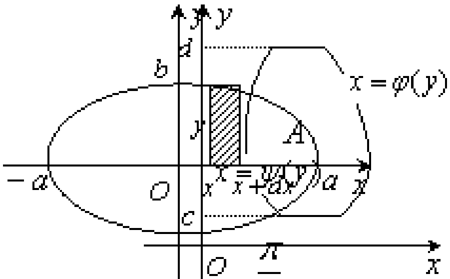


图5-10

例3 求由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形的面积.

解：如图5-12所示，根据图形的对称性知，由椭圆

所围成的图形的面积 A 等于第一象限部分面积 A_0 的4倍，即 $A=4A_0=4\int_0^a ydy$



为计算该积分，根据其参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，

令 $x=a\cos t$，则 $y=b\sin t, dx=-a\sin tdt$，且当 x 由0变到 a 时，t 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到0.

图5－12图5－11

所以

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 tdt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\pi ab$$

注：由此题可知，如果曲边梯形的曲边 $y=f(x)$（$f(x)\ge 0, x\in[a,b]$）的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad（t\text{ 介于 }\alpha\text{ 与 }\beta\text{ 之间}）$$

且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，$y=\psi(t)$ 连续，那么曲边梯形的面积可表示为

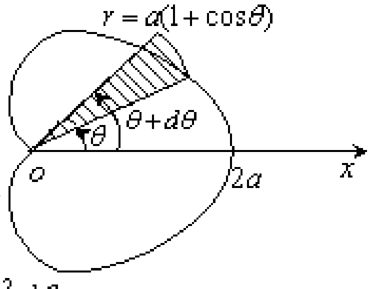
$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

（二）极坐标系下的面积问题

某些平面图形的面积用极坐标计算比较方便.

例**4** 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围图形的面积.

解：如图5-13所示，图形关于极轴对称，因此，所求图形的面积 A 是极轴以上部分面积 A_0 的两倍.



对于极轴以上部分的图形，取极角 θ 为积分变量，它的变化区间为 $[0,\pi]$.相应于 $[0,\pi]$ 上的任一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$ 的图形面积近似等于半径为 $r=a(1+\cos\theta)$ 而中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积.从而得面积元素为

$$dA=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta,$$

图5－13

于是，

$$A_0=\frac{1}{2}a^2\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=\frac{3}{4}\pi a^2$$

所以,所求面积为

$$A=2A_0=\frac{3}{2}\pi a^2$$

一般地, 可以推得, 由曲线 $r=r(\theta)$ 及两条射线 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 所围成的图形——曲边扇形（见图5-14）面积的定积分表达式为

$$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[r(\theta)]^2d\theta.$$

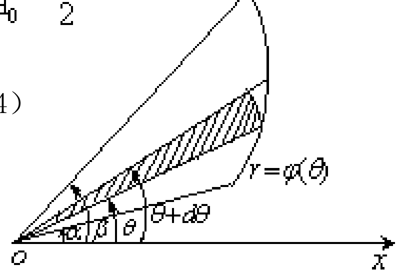


图5－14

例**5** 计算阿基米德螺线 $r=a\theta$ $(a>0)$ 上相应于从0到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解：所指图形实际上就是由曲线 $r=a\theta$ $(a>0)$ 及两条射线 $\theta=0$、$\theta=2\pi$ 所围成的曲边扇形（见图5-15）.

取 θ 为积分变量，则积分区间为 $[0,2\pi]$，故由上

面所推公式得，该图形的面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

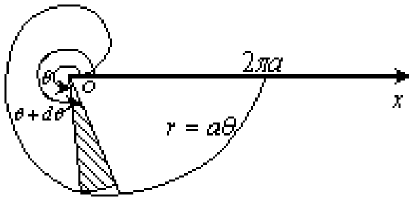


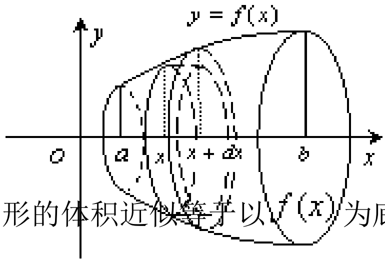
图5－15

三、体积

（一）旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕该平面内的一条直线旋转一周而成的立体.以前接触过的一些立体（如圆柱、圆锥、球体等）都是旋转体.

在直角坐标平面上，以连续曲线$y=f(x)$为曲边、$[a,b]$为底的曲边梯形绕x轴旋转一周得一旋转体（见图5-16），现在我们用定积分的元素法来计算这种旋转体的体积V.



取横坐标x为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$.如图，对于$[a,b]$上的任一小区间$[x,x+dx]$，相应部分图形的体积近似等于以$f(x)$为底面半径、dx为高的圆柱体的体积，从而得体积元素

$$dV=\pi[f(x)]^2dx$$

图5－16

因此，所求旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx \tag{1}$$

同理可得，以连续曲线$x=\varphi(y)$为曲边，$[c,d]$为底的曲边梯形绕y轴旋转一周得旋转体（图5-17）体积为

$$V=\int_c^d\pi[\varphi(y)]^2dy$$

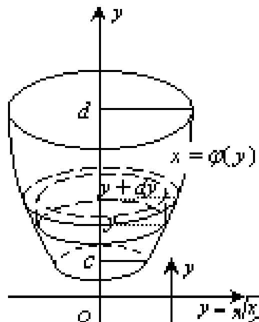


图5－17

例6 求由曲线$y=\sqrt{x}$、直线$x=1$及x轴所围成的图形绕x轴旋转一周而成的旋转体体积.

解：如图5-18所示，此立体实际就是由曲线$y=\sqrt{x}$、直线$x=1$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的旋转体.

故由上面公式可得，该旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi[f(x)]^2dx=\pi\int_0^1xdx=\frac{\pi}{2}$$

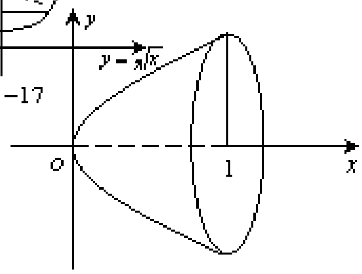
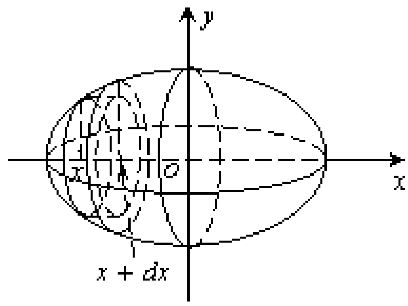


图5－18

例7 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体（旋转椭球体）的体积.

解：如图5-19所示，取x为积分变量，它的变化区间为$[-a,a]$.对于$[-a,a]$上的任一小区间$[x,x+dx]$，相应部分图形的体积近似等于以$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$为底面半径、$dx$为高的圆柱体的体积，从而得体积元素

$$dV=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$



因此，所求旋转椭球体的体积为

图5－19

$$V=\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

注：①这个立体可看作是由上半椭圆线$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$、直线$x=-a$、$x=a$及$x$轴围成的曲边梯形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体，因此，也可直接用体积公式⑴来计算；

`②当$a=b$时，即得半径是a的球体的体积为$\frac{4}{3}\pi a^3$.

例**8** 计算由曲线$x^2+(y-5)^2=16$所围图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解：如图5-20所示，该几何体看似复杂，其实它的体积可看成是平面图形$ACMDB$和$ACNDB$分别绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积之差.上下两半圆的方程为

$$y=5\pm\sqrt{16-x^2}$$

因此，所求的体积为

$$V=\pi\int_{-4}^{4}\left[5+\sqrt{16-x^2}\right]^2dx-\pi\int_{-4}^{4}\left[5-\sqrt{16-x^2}\right]^2dx$$

$$=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}dx$$

$$\underline{\underline{x=4\sin 3}}\,20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=160\pi^2$$

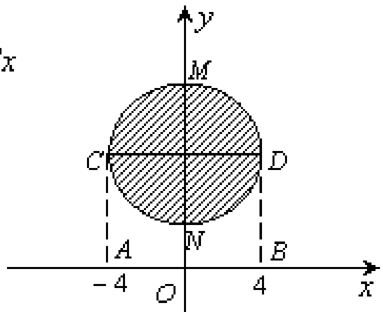
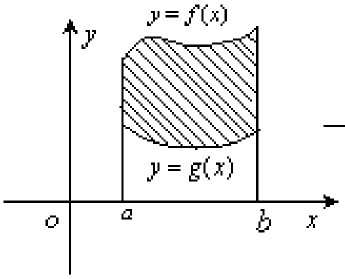
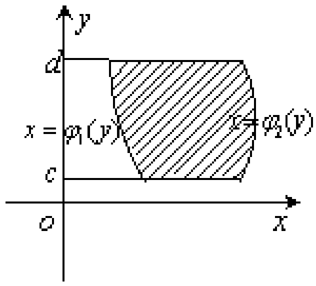


图5-20

注：一般说来，有如下的结论：



$$\xrightarrow[f(x)>g(x)>0]{绕x轴旋转一周} V=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]dx$$



$$\xrightarrow[\varphi_2(y)>\varphi_1(y)>0]{绕y轴旋转一周} V=\pi\int_c^d[\varphi_2^{\,2}(y)-\varphi_1^2(y)]d$$

（二）平行截面面积为已知的立体的体积

利用定积分不仅可以计算上述旋转体的体积，而且还可以计算如图5-21所示的这样一类立体的体积，该立体不是旋转体，但该立体上垂直于一定轴的各个截面（彼此平行）的面积为已知.

取定轴为x轴，建立如图示的坐标系，设该立体在过点$x=a$、$x=b$ $(a<b)$且垂直于x轴的两个平面之间，且过点x而垂直于x轴的截面面积为$A(x)$，并假定$A(x)$为x的已知的连续函数.+

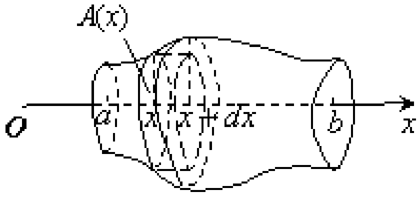


图5-21

取x为积分变量，则积分区间为$[a,b]$；立体中相应于任一小区间$[x,x+dx]$的薄片的体积

$\Delta V \approx A(x)dx$，即得体积元素

$$dV = A(x)dx.$$

故得所求立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

例**9** 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α（如图5-22），试求圆柱体被此平面截得的立体的体积.

解：在底面上建立如图所示的坐标系，则底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

取x为积分变量，则积分区间为$[-R, R]$. 立体中过点x而垂直于x轴的截面是一直角三角形，可以求得其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}y \cdot y\tan\alpha = \frac{1}{2}y^2\tan\alpha$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \qquad -R \le x \le R$$

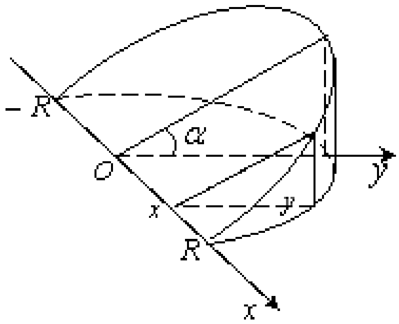


图5－22

所以，$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = \frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

四、平面曲线的弧长

平面上的光滑曲线弧总是可以求长度的.我们可利用定积分的元素法推出其计算公式，下面分三种情形进行讨论.

（一）曲线方程为直角坐标方程

设曲线弧由直角坐标方程$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$给出，其中$f(x)$在$[a, b]$上具有一阶连续导数. 现在来计算这曲线弧的长度s.

如图5-23所示，取x为积分变量，则积分区间为$[a, b]$；曲线$y = f(x)$上相应于$[a, b]$上的任一小区间$[x, x+dx]$的一小段弧的长度$\Delta s \approx \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}dx$，从而得弧长元素为

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$$

所以，所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx \qquad (a < b)$$

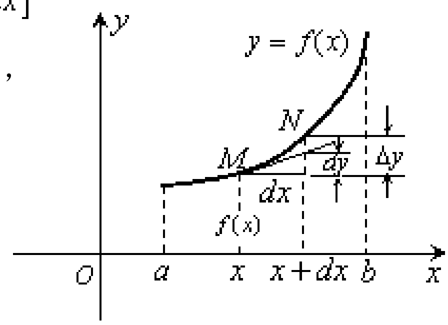


图5－23

例**10** 求曲线$y = \ln(1-x^2)$相应于x从0到$\frac{1}{2}$的一段弧的长度.

解：因为，$y' = \frac{-2x}{1-x^2}$，$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$，所以，

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = -\frac{1}{2} + \ln 3$$

（二）曲线方程为参数方程

设曲线弧由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 给出，其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数.

取t为积分变量，它的变化区间为$[\alpha, \beta]$，则弧长元素（弧微分）为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

于是所求弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

例**11** 计算星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$的全长.

解：如图5-24，由图形的对称性知，所求全长s应是星形线在第一象限中长度s_0的四倍.

取t为积分变量，弧长元素为

$ds = \sqrt{[(a\cos^3 t)']^2 + [(a\sin^3 t)']^2}dt = 3a|\sin t\cos t|dt$

故$s = 4s_0 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a|\sin t\cos t|dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d\sin t = 6a\left[\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$

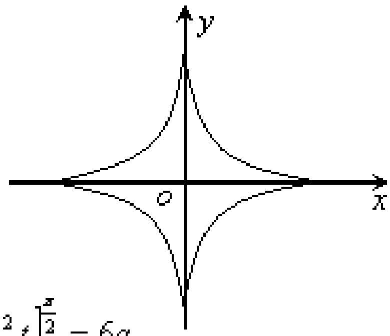


图5－24

（三）曲线方程为极坐标方程

设曲线弧由极坐标方程$r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$给出，其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，我们可由第二种情形推得相应的弧长计算公式.

由直角坐标与极坐标的关系可得该曲线弧的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta).$$

从而，$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\,d\theta = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$，

故所求弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

例**12** 求心形线$r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$的全长.

解：如图5-25所示，曲线关于极轴对称，因此，所求全长s是极轴以上部分长度s_0的两倍.

对于极轴以上部分，取极角θ为积分变量，它的变化区间为$[0,\pi]$.

弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta \\ &= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= a\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

于是，

$$s = 2s_0 = 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a$$

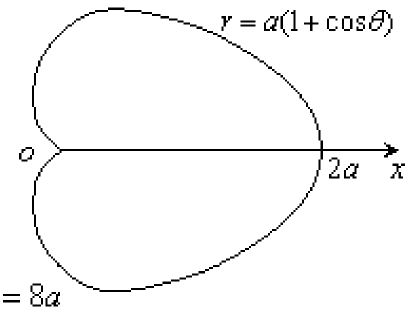


图5－25

习题5－6

1．求由下列曲线所围图形的面积：

⑴曲线$y = \frac{1}{x}$与直线$y = x$及$x = 2$；

⑵抛物线$y^2 = x$与$y = x^2$；

⑶直线$y = 2x+3$与抛物线$y = x^2$；

⑷曲线$y = \ln x$与直线$x = 0$、$y = \ln 2$以及$y = \ln 8$；

⑸星形线$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$（$t$为参数）；

⑹抛物线$y^2 = -x^2 + 4x - 3$与该曲线上点$(0,-3)$和点$(3,0)$处的切线；

⑺心形线$r = 2(1+\cos\theta)$与圆$r = 2$所围图形的公共部分；

⑻心形线$r = 1+\cos\theta$的外侧与圆$r = 3\cos\theta$的内侧区域的公共部分；

2．求由下列曲线所围成的图形,绕指定轴旋转所产生的旋转体的体积：

⑴ 直线$2x - y + 4 = 0$，$x = 0$及$y = 0$所围图形绕x轴；

⑵ 摆线$x = 2(t - \sin t)$，$y = 2(1-\cos t)$的一拱与直线$y = 0$所围图形绕x轴；

⑶ 圆$x^2 + y^2 = 2$和抛物线$y = x^2$所围图形绕x轴；

(4) $y=\sin x$，$y=\cos x$以及x轴上区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$对应线段所围图形绕$x$轴；

(5) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$所围成的图形绕$y$轴；

(6) 抛物线$y^2=x$与$y=x^2$所围图形绕y轴.

3．计算底面是半径为R的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积(如图5-26).

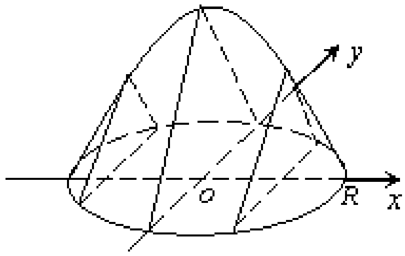


图5-26

4．求下列曲线弧的长度：

(1) 曲线$y=\frac{2}{3}x^{3/2}$上相应于x从3到8的一段弧；

(2) 曲线$y=\ln x$上相应于$\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$的一段弧；

(3) 摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱（$0\le t\le 2\pi$）；

(4) 对数螺线$r=e^{a\theta}$相应于$0\le\theta\le 2\pi$的一段弧 .