§5-4 定积分的分部积分法

这一节我们来学习定积分的分部积分法,首先证明如下的定理

定理 若函数$u=u(x)$、$v=v(x)$在$[a,b]$上都具有连续导数，那么

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du \qquad (3)$$

证 因$u=u(x)$、$v=v(x)$在$[a,b]$上都具有连续导数，则有

$$(uv)'=u'v+uv'$$

对上式两边同时在$[a,b]$上求定积分，并注意到

$$\int_a^b (uv)'dx=[uv]_a^b$$

得 $$[uv]_a^b=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx$$

于是有

$$\int_a^b uv'\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\,dx$$

即

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du$$ 定理得证

注：（3）式就叫做定积分的分部积分公式，从结构形式上看与不定积分的分部积分公式是一致的，运用该公式求定积分的方法叫做定积分的分部积分法，不难得知，运用该法的关键仍然是恰当的选取u及dv，其选择的标准与不定积分的分部积分法是一样的.

例**1** 求$\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx$

解：$\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx=\int_0^1\arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ （取$u=\arctan x$，$v=\frac{x^2}{2}$）

$=\left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \quad =\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

例**2** 求$\int_1^e\sin(\ln x)dx$.

解：因为$\int_1^e\sin(\ln x)dx=[x\sin(\ln x)]_1^e-\int_1^e x\,d\sin(\ln x)$ （直接用公式展开）

$=e\sin 1-\int_1^e\cos(\ln x)dx$ （再次运用公式）

$=e\sin 1-[x\cos(\ln x)]_1^e+\int_1^e x\,d\cos(\ln x)$

$=e(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^e\sin(\ln x)dx$ (出现循环)

所以，$\int_1^e\sin(\ln x)dx=\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$

例**3** 证明当$n\in N$且$n\geq 2$时，有下列定积分公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right)=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & n\text{为奇数}\end{cases}$$

证：因$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$

又当$n\in N$且$n\geq 2$时，运用分部积分法得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)$$

$$=\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x\cdot-\sin^n x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

所以，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

反复利用上式得，

当n为偶数时，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}I_{n-4}\cdots$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

同理

当n为奇数时，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}I_{n-4}\cdots$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

下面再举两个相关的例子

例**4** 设$f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$

解：由于e^{-t^2}的原函数不是初等函数，因此，不能通过求出$f(x)$后再代入所求积分来计算，注意到$f'(x)$及$f(1)$容易求出，故可考虑运用分部积分法来计算**.**

因$f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x=2xe^{-x^4}$，$f(1)=\int_1^1 e^{-t^2}dt=0$

所以，$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=\left[\dfrac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx$

$$=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d\left(-x^4\right)=\frac{1}{4}\left(e^{-1}-1\right).$$

例**5** 求$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$**.**

解：此题直接用分部积分法不太方便，若结合定积分的换元法来计算则比较简便**.**

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=}2\int_0^1 te^t dt=2\int_0^1 td\left(e^t\right)=2\left[te^t\right]_0^1-2\int_0^1 e^t dt$$

$$=2e-2\left[e^t\right]_0^1=2$$

习题5-4

1．计算下列定积分：

(1) $\int_1^e x\ln xdx$；　　(2) $\int_0^1 te^t dt$；

(3) $\int_1^4\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$；

(5) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx$；

(7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

(8) $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos 2x dx$;

(9) $\int_1^e \ln^3 x dx$;

(10) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arcsin x)^2 dx$.