§5 条件分布与条件期望

5.1 条件分布

对于二维随机变量(X,Y)而言，所谓随机变量X的条件分布，就是在给定 Y 取某个值的条件下 X 的分布。譬如，记 X 为人的体重，Y 为人的身高，则X与Y之间一般有相依关系。现在如果限定Y＝1.7(m)，在这个条件下体重的分布显然与的无条件分布会有很大不同。

一、 离散随机变量的条件分布

设二维离散随机变量(X,Y)的联合分布列为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\qquad i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

定义 5.1 对一切使$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}>0$的 y_i，称

$p_{i|j}=P(X=x_i\mid Y=y_j)=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$为给定 Y=y_j 条件下X的条件分布列。

同理，对一切使$P(X=x_i)=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}>0$的 x_i，称

$p_{j|i}=P(Y=y_j\mid X=x_i)=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},j=1,2,\cdots$为给定 X=x_i 条件下X的条件分布列。

定义 5.2 给定 Y=y_j条件下X的条件分布函数为

$$F(x\mid y_j)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i\mid Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}p_{i|j}$$

给定 X=x_i条件下 Y的条件分布函数为

$$F(y\mid x_j)=\sum_{y_j\le y}P(Y=y_{j_i}\mid X=x_i)=\sum_{y_j\le y}p_{j|i}$$

例 5.1 设二维离散随机变量的联合分布列为

X \ Y	1	2	3	p_i
1	**0.1**	**0.3**	**0.2**	**0.6**
2	**0.2**	**0.05**	**0.15**	**0.4**
$\boldsymbol{p_{\cdot j}}$	0.3	0.35	0.35	1.0

因为 $P(X=1)=p_{1\cdot}=0.6$，所以用第一行各元素分别除以 0.6，就可得给定 X=1 下，Y 的条件分布列为

***Y*|*X*=1**	**1**	**2**	**3**
P	***1/6***	***1/2***	***1/3***

用第二行各元素分别除以 0.4，就可得给定 X=2 下，Y 的条件分布列为

***Y*|*X*=2**	**1**	**2**	**3**
P	***1/2***	***1/8***	***3/8***

用第一列各元素分别除以 0.3，就可得给定 Y=1 下，X 的条件分布列为

***X* | *Y* =1**	**1**	**2**
P	***1/3***	***2/3***

用第二列各元素分别除以 ***0.35*****，*就可得给定*** Y=2 下，X 的条件分布列为

***X* | *Y* =2**	**1**	**2**
P	***6/7***	***1/7***

用第三列各元素分别除以 ***0.35*****，*****就可得给定*** Y=3 下，X 的条件分布列为

$X \mid Y=3$	1	2
P	*4/7*	*3/7*

例 设在一段事件内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店购买这种物品的人数 Y 的分布列。

解 由题意知

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, m=0,1,2,\cdots$$

在进入商店的人数 X=m 的条件下，购买某种物品的人数 Y 的条件分布为二项分布 $b(n,p)$，即

$$P\{Y=k \mid X=m\}=\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}, k=0,1,2,\cdots,m$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}
P\{Y=k\}&=\sum_{m=k}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k \mid X=m\}\\
&=\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\bullet\frac{m!}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}\\
&=e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}\\
&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{m-k}}{(m-k)!}\\
&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}, k=0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

即 Y 服从参数为 λp 的泊松分布。

例 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$。在已知 $X+Y=n$ 的条件下，求 X 的条件分布。

解 因为独立泊松变量的和仍为泊松变量，即 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$，所以

$$
\begin{aligned}
P(X=k \mid X+Y=n) &= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \bullet \dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

即在 $X+Y=n$ 的条件下，X 服从二项分布 $b(n,p)$，其中 $p=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$

二、 连续随机变量的条件分布

设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，边际密度函数为 $p_X(x), p_Y(y)$.

在离散随机变量场合，其条件分布函数为 $P(X \le x \mid Y=y)$。但是，因为连续随机变量取某个值的概率为零，即 $P(Y=y)=0$,所以无法用条件概率直接计算 $P(X \le x \mid Y=y)$，一个很自然的想法是：将 $P(X \le x \mid Y=y)$ 看成是 $h \to 0$ 时 $P(X \le x \mid y \le Y \le y+h)$ 的极限，即

$$
\begin{aligned}
P(X \le x \mid Y = y) &= \lim_{h\to 0} P(X \le x \mid y \le Y \le y+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P(X \le x, y \le Y \le y+h)}{P(y \le Y \le y+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+h} p(u,v)dvdu}{\int_{y}^{y+h} p_Y(v)dv} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x}\{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} p(u,v)dv\}du}{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} p_Y(v)dv}
\end{aligned}
$$

当 $p_Y(y)$，$p(x,y)$在 y 处连续时，由积分中值定理可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} p_Y(v)dv = p_Y(y)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} p(u,v)dv = p(u,y)$$

所以

$$P(X \le x \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(u,y)}{p_Y(y)} du$$

定义　对一切使 $p_Y(y) > 0$ 的 y，给定 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布函数和条件密度函数分别为

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(u,y)}{p_Y(y)} du, \qquad p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

同理对一切使 $p_X(x) > 0$ 的 x，给定 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数和条件密度函数分别为

$$F(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{p(x,v)}{p_X(x)} dv, \qquad p(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

例　设(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，由边际分布知 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$。现在来求条件分布。

根据上面的定义得

$$p(x \mid y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\}$$

这正是正态密度函数，其均值和方差分别为

$$\mu=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2);\sigma^2=\sigma_1^2(1-\rho^2)$$

例　设(X,Y)服从$G=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布，试求给定 $Y=y$ 条件下 X 的条件密度函数 $p(x|y)$。

解　因为 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

由此得 Y 的边际密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

所以当$-1<y<1$ 时，有

$$p(x \mid y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

将 y＝0 和 y＝0.5 分别代入上式得（两个均匀分布）

$$p(x \mid y=0)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1; \\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$p(x \mid y=0.5)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}, & -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 0 & 其他\end{cases}$$

进一步有：当-1<y<1 时，给定 Y=y 条件下，X 服从$(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})$上的均匀分布。同理有当-1<$x$<1 时，给定 X=x 条件下，Y 服从$(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$上的均匀分布。

三、 连续场合的全概率公式和贝叶斯公式

我们顺便给出连续随机变量场合的全概率公式和贝叶斯公式。

$$p(x,y)=p_X(x)p(y \mid x), \qquad p(x,y)=p_Y(y)p(x \mid y)$$

再对 $p(x,y)$求边际密度函数，得全概率公式的密度函数形式：

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y \mid x)dx, \qquad p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x \mid y)dy,$$

贝叶斯公式的密度函数形式：

$$p(x \mid y)=\frac{p_X(x)p(y \mid x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y \mid x)dx}, \qquad p(y \mid x)=\frac{p_Y(y)p(x \mid y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x \mid y)dy}$$

以上公式说明虽然由边际分布无法得到联合分布，但由边际分布和条件分布就可以得到联合分布。

例 设 $X \sim N(\mu,\sigma_1^2)$，在 X=x 的条件下 $Y|X=x$～$N(x,\sigma_2^2)$。试求 Y 的(无条件)密度函数 $p_Y(y)$。

解 由题意知

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$p(y \mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

所以 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y \mid x)dx$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x^2-2\left(\frac{y}{\sigma_2^2}+\frac{\mu}{\sigma_1^2}\right)x+\frac{y^2}{\sigma_2^2}+\frac{\mu^2}{\sigma_1^2}\right]\right\}dx$$

记 $c=\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，则上式化为

$$p_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}c^{-1}\left[x-c\left(\frac{y}{\sigma_2^2}+\frac{\mu}{\sigma_1^2}\right)\right]^2-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{2\pi c}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}$$

这表明 Y 仍服从正态分布 $N(\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

5.2 条件数学期望

条件分布的数学期望称为条件数学期望，定义如下。

定义 条件分布的数学期望（若存在）成为条件期望，其定义如下：

$$E(X\mid Y=y)=\begin{cases}\sum_i x_i P(X=x_i\mid Y=y) & (X,Y)\text{为二维离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xp(x\mid y)dx & (X,Y)\text{为二维连续随机变量}\end{cases}$$

$$E(Y\mid X=x)=\begin{cases}\sum_j y_j P(Y=y_j\mid X=x) & (X,Y)\text{为二维离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}yp(y\mid x)dy & (X,Y)\text{为二维连续随机变量}\end{cases}$$

注意条件期望 $E(X|Y=y)$ 是 y 的函数，它与无条件期望 $E(X)$ 的区别，不仅在于计算公式上，而且在于其含义上。譬如，X 表示中国成年人的身高，则 $E(X)$ 表示中国成年人的平均身高。若用 Y 表示中国成年人的足长（脚趾到脚跟的长度），则 $E(X|Y=y)$ 表示足长为 y 的中国成年人的平均身高，我国公安部门研究获得

$$E(X|Y=y)＝6.876y$$

这个公式对公安部门破案起着重要的作用。例如，测得案犯留下的足印长为25.3cm，则由此公式可推算出此案犯身高约174cm。

定理　(重期望公式)　设(X,Y)是二维随机变量，且$E(X)$存在，则

$$E(X)=E(E(X|Y))$$

证　在此仅对连续场合进行证明，而离散场合可类似证明。设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为$p(x,y)$。记$g(y)=E(X|Y=y)$，则$g(Y)=E(X|Y)$。由此利用$p(x,y)=p(x|y)p_Y(y)$，可得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x\mid y)p_Y(y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x\mid y)dx\right\}p_Y(y)dy$$

其中括号中的积分正是条件期望$E(X|Y=y)$，所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X\mid Y=y)p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)p_Y(y)dy=E(g(Y))$$
$$=E(E(X\mid Y))$$

重期望公式是概率论中较为深刻的一个结论，它在实际应用中很有用。譬如，要求在一个取值于很多范围上的指标X的均值$E(X)$，这时会遇到计算上的各种困难。为此，我们换一种思维方式，去找一个与X有关的量Y，用Y的不同取值把大范围划分成若干个小区域，先在小区域上求X的平均，再对此类平均求加权平均，即可得大范围上X的平均$E(X)$。如要求全校学生的平均身高，可先求出每个班级学生的平均身高，然后再对各班级的平均身高作加权平均，其权重就是班级人数在全校学生中所占的比例。

重期望公式的具体使用如下：

（1）如果 Y 是一个离散随机变量，则 $E(X)=\sum_j E(Y\mid Y=y_j)P(Y=y_j)$;

（2）如果 Y 是一个连续随机变量，则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X\mid Y=y)P_Y(y)dy$

例　一矿工被困在有三个门的矿井里。第一个门通一坑道，沿此坑道走 3 个小时可到达安全区；第二个门通一坑道，沿此坑道走 5 小时又回到原处；第三个门通一坑道，沿此坑道走 7 小时也回到原处。假定此矿工总是等可能的在三个门中选择一个，试求他平均要用多少时间才能到达安全区。

解　设该矿工需要 X 小时到达安全区，则 X 的可能取值为

3，5+3，7+3，5+5+3，5+7+3，7+7+3，…，

要写出 X 的分布列是很困难的，所以无法直接求 $E(X)$。为此记 Y 表示第一次所选的门，$\{Y=i\}$ 就是选择第 i 个门，由题设知

$P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=\frac{1}{3}$

因为选第一个门后 3 小时可到达安全区，所以 $E(X|Y=1)=3$.

又因为选第二个门后 5 小时回到原处，所以 $E(X|Y=2)=5+E(X)$.

选第三个门后 7 小时也回到原处，所以 $E(X|Y=3)=7+E(X)$.

综上所述，由上面的公式得

$E(X)=\frac{1}{3}\{3+5+E(X)+7+E(X)\}=5+\frac{2}{3}E(X)$

解得 $E(X)=15$，即该矿工平均要 15 小时才能到达安全区。

例　口袋中有编号为 1，2，…，n 的 n 个球，从中任取 1 球，若取到 1 号球，则得一分，且停止摸球；若取到 i 号球$(i\geq 2)$，则得 i 分，且将此球放回，重新摸球。如此下去，试求得到的平均总分数。

解　记 X 为得到的总分数，Y 为第一次取到的球的号码，则

$$P(Y=1)=P(Y=2)=\ldots=P(Y=n)=\frac{1}{n}$$

又因为 $E(X|Y=1)=1$，而当 $i \geq 2$ 时，$E(X|Y=i)=i+E(X)$。所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X \mid Y=1) P(Y=i)=\frac{1}{n}\{1+2+\cdots+n+(n-1) E(X)\}$$

由此得 $E(X)=\frac{n(n+1)}{2}$。

例 设电力公司每月可以供应某工厂的电力 X 服从(10，30)(单位：10^4 kW)上的均匀分布，而该工厂每月实际需要的电力 Y 服从(10，20)(单位：10^4 kW)上的均匀分布。如果工厂能从电力公司得到足够的电力，则每 10^4 kW 电可以创造 30 万元的利润，若工厂从电力公司得不到足够的电力，则不足部分由工厂通过其他途径解决，由其他途径得到的电力每 10^4 kW 电只有 10 万元的利润。试求该厂每个月的平均利润。

解 从题意知，每月供应电力 $X\sim U(10,30)$，而工厂实际需要电力 $Y\sim U(10,20)$。若设工厂每个月的利润为 Z 万元，则按题意可得

$$Z=\begin{cases} 30Y & \text{当} Y \leq X \\ 30X+10(Y-X), & \text{当} Y>X \end{cases}$$

在 $X=x$ 给定时，Z 仅是 Y 的函数，于是当 $10 \leq x<20$ 时，Z 的条件期望为

$$E(Z \mid X=x)=\int_{0}^{x} 30 y p_{Y}(y) d y+\int_{x}^{20}(10 y+20 x) p_{Y}(y) d y$$
$$=\int_{0}^{x} 30 y \frac{1}{10} d y+\int_{x}^{20}(10 y+20 x) \frac{1}{10} d y$$
$$=\frac{3}{2}\left(x^{2}-100\right)+\frac{1}{2}\left(20-x^{2}\right)+2 x(20-x)$$
$$=50+40 x-x^{2}$$

当 $20 \leq x \leq 30$ 时，Z 的条件期望为

$$E(Z \mid X=x)=\int_{20}^{30} 30 y p_{Y}(y) d y=\int_{20}^{30} 30 y \frac{1}{10} d y=450$$

然后用 X 的分布对条件期望 $E(Z|X=x)$ 再作一次平均，即得

$$E(Z)=E(E(Z\mid X))=\int_0^{20}E(Z\mid X=x)p_X(x)dx+\int_{20}^{30}E(Z\mid X=x)p_X(x)dx$$
$$=\frac{1}{20}\int_0^{20}(50+40x-x^2)dx+\frac{1}{20}\int_{20}^{30}450dx$$
$$=25+300-\frac{700}{6}+225\approx 433$$

所以该厂每月的平均利润为 433 万元。

例 随机个随机变量和的数学期望 设 $X_1,X_2,\ldots$为一列独立同分布的随机变量，随机变量 N 只取正整数，且与$\{X_n\}$独立，证明

$$E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E(X_1)E(N)。$$

证明

$$E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E[E(\sum_{i=1}^{N}X_i\mid N)]=\sum_{n=1}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{N}X_i\mid N=n)P(N=n)$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{N}X_i)P(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}nE(X_1)P(N=n)$$
$$=E(X_1)\sum_{n=1}^{+\infty}nP(N=n)=E(X_1)E(N)$$

得证。

利用此例的结论，我们可以解很多实际问题，例如：

（1）设一条内到达某商场的顾客数 N 是仅取非负整数值的随机变量，且 $E(N)$＝35000，又设进入此商场的第 i 个顾客的购物金额为 X_i，可以认为诸是独立同分布的随机变量，且 $E(X_i)$＝82（元）。假设 N 与 X_i 相互独立是合理的，则此商场一天的平均营业额为

$$E(\sum_{i=0}^{N}X_i)=E(X_1)E(N)=82\times 35000=287\,(\text{万元})$$

其中 X_0＝0。

（2）一只昆虫一次产卵数 N 服从参数为 λ 的泊松分布，每个卵成活的概率是 p，可设 X_i 服从 0-1 分布，而$\{X_i=1\}$表示第 i 个卵成活，则一只昆虫一次产卵后的平均成活卵数为

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(X_1)E(N) = \lambda p$$