* §5-7 定积分在物理上的应用

定积分在物理学中也有着广泛的应用.这里只介绍定积分在物理上的几类简单应用.

一、功的计算

中学物理学给出了常力沿直线作功的计算公式

$$W = F \cdot S,$$

但在实际问题中常会遇到变力作功问题，此时，上面的公式就不能应用.下面通过举例说明如何计算变力所作的功.

例1 已知弹簧每拉长$0.02m$要用$9.8N$的力，求把弹簧拉长$0.1m$所作的功.

解：取弹簧端点的平衡位置作为原点O，建立如图5-27所示的坐标系.由物理学可知，当端点位于点x处时，所需力为

$$F = k \cdot x \quad (k\text{为比例常数})$$

由题意知，$x = 0.02m$时，$F = 9.8N$，所以，$k = 4.9 \times 10^2$，这样得到变力函数为

$$F = 4.9 \times 10^2 x$$

取x为积分变量，积分区间为$[0, 0.1]$.在$[0, 0.1]$上任取一小区间$[x, x+dx]$，与它对应的变力F所作的功近似于把变力F看作常力所作的功，从而得功元素为$dW = 4.9 \times 10^2 x dx$

所以，把弹簧拉长$0.1m$所作的功为

$$W = \int_0^{0.1} 4.9 \times 10^2 x dx = 2.45J$$

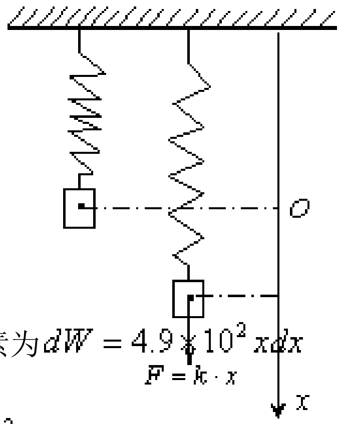

图5-27

例2 如图5-28所示，把一个带$+q$电量的点电荷放在r轴上的坐标原点处，它产生一个电场.求单位正电荷在电场中沿r轴的方向从$r = a$处移动到$r = b$ $(a < b)$处时，电场力F对它所作的功.

解：根据物理学，如果有一单位正电荷放在电场中距离原点为r，则电荷对它的作用力的大小为

$$F = k\frac{q}{r^2} \quad (k\text{为常数})$$

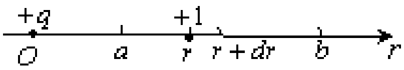

图5-28

取r为积分变量，积分区间为$[a, b]$.在$[a, b]$上的任一小区间$[r, r+dr]$上，与它对应的电场力F所作的功近似于把变力F看作常力所作的功，从而得功元素为

$$dW = k\frac{q}{r^2}dr$$

故所以由定积分的元素法得所求的功为

$$W = \int_a^b k\frac{q}{r^2}dr = kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

二、液体压力的计算

由物理学可知，一水平放置在液体中的薄片，若其面积为A，距离液体表面的深度为h，则该薄片的一侧所受的压力为

$$P = p \cdot A = \gamma \cdot h \cdot A \quad (\text{其中}p\text{为压强，}\gamma\text{为液体比重})$$

但若薄片铅直放置在液体中，由于不同深度的点压强不一样，此时，薄片的一侧所受的压力就不能利用上述方法计算.下面通过举例说明其计算方法.

例3 一底为$8m$，高为$6m$的等腰三角形钢性薄板，垂直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面$3m$，求它一侧所受水的压力.

解：建立如图5-29所示的坐标系，取为x积分变量，则积分区间为$[3, 9]$.

AB边所在的直线方程为$y = \frac{2}{3}x - 2$，设$[x, x+dx]$为$[3, 9]$上任一小区间，三角形薄板上与之相应的窄条可近似看作是水平放置在距水面深度为x的位置上，且面积近似等于$4(\frac{x}{3} - 1)dx$，于是得压力元素为

$$dP = 4\gamma x(\frac{x}{3}-1)dx$$

因此，所求压力为

$$P = 4\gamma\int_3^9\left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)dx = 4\gamma\left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_3^9$$

$$\approx 1.65\times 10^6 (N)$$

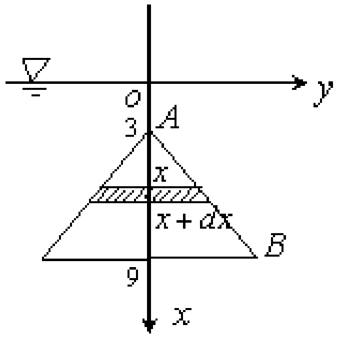

图5－29

三、万有引力的计算

由物理学知，质量分别为m_1、m_2，相距为r的两质点间的引力的大小为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中，G为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线方向.

如果要计算一物体对一质点的引力，由于物体上每个点到质点的距离不一样，且引力方向也是变化的，因此，不能用上述公式计算.下面以细棒对质点的情形为例说明这类问题的计算方法.

例4 设有一长度为l、线密度为ρ的均匀细直棒，在其中垂线上距棒a单位处有一质量为m的质点.计算该棒对质点的引力.

解：取棒的中点为坐标原点，细直棒所在的直线为y轴，建立如图5-30所示的坐标系.

取y为积分变量，则积分区间为$[-\frac{1}{2}l,\frac{1}{2}l]$.对于该区间上的任一小区间$[y, y+dy]$，细直棒上相应的一小段可以近似看成一质点，质量为$\rho dy$，

到质点的距离为$\sqrt{a^2+y^2}$，于是得这小段细棒对质点的引力为

$$\Delta F \approx G\frac{m\rho dy}{a^2+y^2}$$

细直棒对质点的引力在水平方向的分力F_x元素为

$$dF_x = -G\frac{am\rho dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

从而求得引力在x轴方向的分力为

$$F_x = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{Gam\rho}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = -\frac{2Gm\rho l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

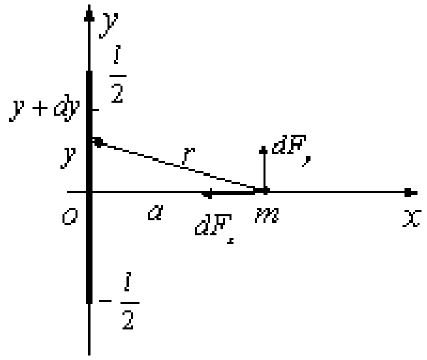

图5－30

由对称性知，引力在y轴方向的分力为$F_x = 0$.所以，所求的引力为

$$F = \left\{-\frac{2Gm\rho l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}, 0\right\}$$

习题5－7

1．设把金属杆的长度从a拉长到$a+x$时,所需的力等于$\frac{k}{a}x$,其中k为常数,试求将金属杆由长度a拉长到b时所作功.

2．两个小球中心相距r,各带同性电荷Q_1与Q_2,其相互排斥的力可由公式$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}$ (k为常数)计算．设当$r = 0.50m$时,$F = 0.196N$,今两球之距离由$r = 0.75m$变为$r = 1m$,求电场力所作的功(精确到$0.001J$).

3．一物体按规律$s = t^3$作直线运动,媒质的阻力与速度的平方成正比．计算物体由$s = 0$移到

$s=a$ 时,克服媒质阻力所作的功.

4．边长为am的正方形薄片直立的沉入水中,它的一个顶点位于水平面而一对角线与水面平行(如图5-31所示),求薄片一侧所受水的压力.

5．设有一长度为l、线密度为ρ的均匀细直棒，在与棒的一端垂直距离为a处有一质量为m的质点M(如图5-32所示)，试求这细棒对质点的引力.

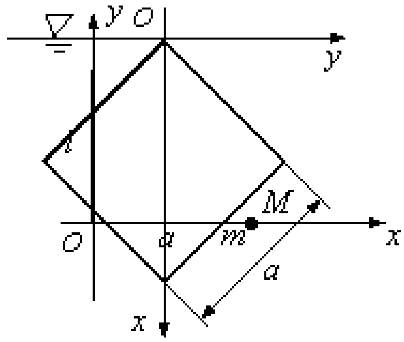

图5－32

图5－31

总习题五

（A组）

1．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中$f(x)$连续；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

2．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$；　　(2) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2+4\sin x}{1+x^2}\right)dx$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　　(4) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$.

3.求位于曲线$y=e^x$下方,该曲线过原点的切线的左方以及x轴上方之间的图形的面积.

（B组）

4．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$；

5．设$f''(x)$连续,且$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=5$,$f(\pi)=0$,求$f(0)$的值.

6．若$f(x)$在$[0,1]$上连续，试证明：

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

并由此计算积分$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

7．证明：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2.$$

8．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号，证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得式子$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$成立.

9．某闸门的形状大小如图5-33所示，其中直线l为对称轴，闸门的上部为矩形$ABCD$，下部由二次抛物线与线段AB所围成.当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分所承受的水压力与闸门下部分承受的水压力之比为$5:4$，闸门矩形部分的高h应为多少？

10．证明：由平面图形$0\leq a\leq x\leq b$，$0\leq y\leq f(x)$绕y

旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

11．半径为r的球沉入水中,球的上部与水面相切,球的比重与水相同,现将球从水中取出,需作多少功?

12．在摆线$x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$上求分摆线第一拱成$1:3$的点的坐标.

13．在第一象限求曲线$y = 1 - x^2$上一点,使该点处的切线与曲线及两坐标轴所围成的面积为最小,并求此最小面积.

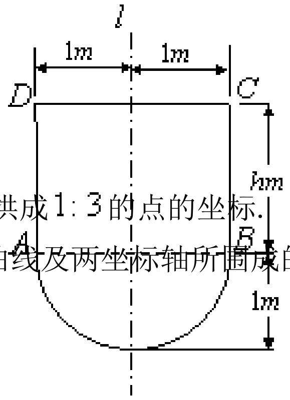

图5－33