# §3–2 矩陣的應用

## (甲)轉移矩陣

(1)引入轉移矩陣：

例子：假設某地只有甲乙兩家工廠生產並販賣某一種產品每一年甲工廠的顧客中有$\frac{3}{4}$轉向乙工廠購買此產品，只有$\frac{1}{4}$仍然向甲工廠購買：而乙工廠的顧客中有$\frac{1}{3}$轉向甲工廠購買，其餘$\frac{2}{3}$的顧客仍然向乙工廠購買，請問

(1)一年、二年、三年後，甲乙兩家工廠的市場佔有率為何？

(2)長久下去最後甲乙兩工廠的市場佔有率為何？

[解法]：

設甲乙兩工廠目前市場佔有率為 $x_0$，$y_0$，其中 $x_0+y_0=1$，$n$ 年後甲乙兩工廠市場佔有率分別為 $x_n$，$y_n$

第一年甲工廠的市場佔有率 $x_1=\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{3}y_0$，乙工廠的市場佔有率 $y_1=\frac{3}{4}x_0+\frac{2}{3}y_0$

令 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，$X_n=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$，則可用 $AX_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=X_1$ 表示上述的關係

第二年甲工廠的市場佔有率 $x_2=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}y_1$，乙工廠的市場佔有率 $y_2=\frac{3}{4}x_1+\frac{2}{3}y_1$

則 $AX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=X_2$........$AX_n=X_{n+1}$，……根據上述的關係：

$X_n=AX_{n-1}=A(AX_{n-2})=A^2X_{n-2}=A^2(AX_{n-3})=A^3X_{n-3}=\ldots..=A^nX_0$

所以 $X_2=\begin{bmatrix}\frac{15}{48} & \frac{11}{36}\\ \frac{33}{48} & \frac{25}{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{48}x_0+\frac{11}{36}y_0\\ \frac{33}{48}x_0+\frac{25}{36}y_0\end{bmatrix}$，

$X_3=\begin{bmatrix}\frac{177}{432} & \frac{133}{432}\\ \frac{255}{432} & \frac{299}{432}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{177}{432}x_0+\frac{133}{432}y_0\\ \frac{255}{432}x_0+\frac{299}{432}y_0\end{bmatrix}$

經過多年之後的市場佔有率為 $X=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$，即 $X=\lim\limits_{n\to\infty}X_n$，且$\alpha+\beta=1$ 因為 $AX_n=X_{n+1}$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}AX_n=\lim\limits_{n\to\infty}X_{n+1}$ $\Rightarrow$ $A(\lim\limits_{n\to\infty}X_n)=\lim\limits_{n\to\infty}X_{n+1}$ $\Rightarrow AX=X \Rightarrow$ $\begin{cases}\alpha=\frac{4}{13}\\ \beta=\frac{9}{13}\end{cases}$。

上面的例子中可以看出幾個特點：

(a)A 的每一行都是非負的實數。
(b)A 的每一行的元之和都等於 1。
(c)$X_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，$x_n+y_n=1$
數學上稱這樣的過程爲隨機過程或馬可夫鏈，A 稱爲**轉移矩陣**。

(2)轉移矩陣：
一般而言，在自然現象與社現象中，許多現象都會隨時間的改變而呈現不同的狀態。假設某現象所可能呈現的不同狀態只有有限多種：$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$ 每隔一固定的時間來觀查察它所呈現的狀態。如果此現象在各觀察期呈現某種狀態的過程滿足下面的性質：在任意觀察期中此現象呈現狀態 $\mathbf{S}_j$ 時，則它在下一觀察期呈現狀態 $\mathbf{S}_i$ 的機率爲 $p_{ij}$。當一個現象的呈現具有這個性質時，我們就說這個過程形成一個**馬可夫鏈**。

**馬可夫鏈有下列的特性**：
(a)$A=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$，$p_{ij}\geq 0$，$\sum_{k=1}^{n} p_{k\,j}=1$，$j=1,2,\ldots,n$。
此矩陣 $A$ 稱爲這個**馬可夫鏈的轉移矩陣**。

(b)若一個方陣的各元都大於或等於 0，而且每一行中各元的和都等於 1，此種方陣稱爲馬可夫矩陣或隨機矩陣。
(c)如果一馬可夫鏈可達到穩定狀態，而其($n$ 階)轉移矩陣爲 A，則其穩定狀態就是滿足 AX=X 的 $n\times 1$ 矩陣 X。

以前面的例子說，設購買甲工廠的狀態爲 $S_1$，購買乙工廠的狀態爲 $S_2$，
而 $p_{11}=\frac{1}{4}$，$p_{21}=\frac{3}{4}$，$p_{12}=\frac{1}{3}$，$p_{22}=\frac{2}{3}$，所以轉移矩陣 A 爲$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$。

一般的馬可夫鏈不一定會產生穩定的狀態。例如$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

[例題1] 台北市捷運局曾做過調查，消費者中原來搭捷運者有 80%繼續搭乘捷運，有 10%會改爲自行開車，有 10%改爲騎機車；原來自行開車的人有 30%改搭捷運，有 50%會繼續開車，有 20%改爲騎機車；原來騎機車者有 20%改爲搭捷運，有 20%會改爲自行開車，有 60%會繼續騎機車；假設台北市人口數不變，且目前有 20%的消費者採用捷運系統，有 30%的人自行開車，有 50%的人騎機車爲交通工具。
(a)試自行定義狀態，並寫出推移矩陣。
(b)一年後將有多少比例的消費者採用捷運系統爲交通工具？

(c)長期而言，將有多少比例的人會搭乘捷運？

Ans：(a) $\begin{array}{c|ccc} & 捷運 & 開車 & 機車 \\ \hline 捷運 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$}} \\ 開車 & & & \\ 機車 & & & \end{array}$ (b)35%(c)$\frac{16}{29}$

[例題2] 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：

(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數，

(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1

以 $2\times2$ 矩陣爲例，$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$，滿足(甲)(乙)這兩個條件，因此都是轉移矩陣。今設 A、B 是兩個 $n\times n$ 的轉移矩陣，請問下列哪些敘述是正確的？(1)$A^2$ 是轉移矩陣　(2)AB 不滿足條件(乙)　(3)$\frac{1}{2}(A+B)$是轉移矩陣 (4)$\frac{1}{4}(A^2+B^2)$是轉移矩陣。(2002 指定考科甲)

Ans：(1)(3)

(1)證明：A、B 爲轉移矩陣⇒AB 爲轉移矩陣

設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$爲轉移矩陣，所以 $a_{ij}\geq0$，$b_{ij}\geq0$

且各行的和=1，$C=AB=[c_{ij}]_{2\times2}$

$\Rightarrow c_{11}+c_{21}=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})=(a_{11}+a_{21})b_{11}+(a_{12}+a_{22})b_{21}=b_{11}+b_{21}=1$

同理 $c_{12}+c_{22}=1$ ⇒AB 爲轉移矩陣。

(2)證明：A、B 爲轉移矩陣⇒$\frac{1}{2}$(A+B)爲轉移矩陣

$\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

檢查$\frac{1}{2}$(A+B)中第一行元素的和=$\frac{1}{2}(a_{11}+b_{11}+a_{21}+b_{21})=1$，

同理，第二行元素的和=1。

$\Rightarrow \frac{1}{2}$(A+B)爲轉移矩陣

故本題中 $A^2$、$B^2$ 爲轉移矩陣$\Rightarrow \frac{1}{2}(A^2+B^2)$爲轉移矩陣。

而$\frac{1}{4}(A^2+B^2)$是轉移矩陣不爲轉移矩陣。

[例題3] 使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：把雙白球稱爲狀態 1，一黑球一白球稱爲狀態 2，雙黑球稱爲狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球（移入白球或黑球的機率相等）。每次操作可能會改變袋中球的狀態。

(a)如果現在袋子內的球是一白一黑（即狀態 2），請問經過一次操作後，袋中會變成兩顆黑球（狀態 3）的機率是多少？

(1)$\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4)$\frac{2}{3}$

把狀態 $j$ 經過一次操作後會變成狀態 $i$ 的機率記爲 $p_{ij}$（例如上題的機率就是 $p_{32}$），由此構成一$3\times 3$矩陣 $P$。

(b)針對矩陣 $P$，下列選項有哪些是正確的？

(1) 矩陣 $P$ 滿足 $p_{ij}=p_{ji}$ (2) P 是轉移矩陣（即每行之和皆爲 1）(3) $P$ 的行列式值爲正 (4)$p_{11}=p_{33}$

把矩陣 $P$ 連續自乘 $k$ 次後的矩陣記爲 $P^k$。已知矩陣 $P^k$ 中$(i, j)$位置的值，等於從狀態 $j$ 經過 $k$ 次操作後，變成狀態 $i$ 的機率。

(c)針對多次操作，下列選項有哪些是正確的？

(1)從一白一黑（狀態 2）開始，經過 $k$ 次操作後，變成雙白（狀態 1）的機率與變成雙黑（狀態 3）的機率相等。

(2)從雙白（狀態 1）開始，經過 $k$ 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率與變成雙黑（狀態 3）的機率大。

(3)從雙白（狀態 1）開始，經過 $k$ 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率會隨著次數 $k$ 的增加而遞減。

(4)不論從哪種狀態開始，經過 $k$ 次操作後，變成任何一種狀態的機率，會隨著 $k$ 趨近於無窮大而趨近於$\frac{1}{3}$。(93 指定考科甲)

[解法]：

(a)(1)

$2\rightarrow 3$即袋中取出白球且放入黑球，其機率爲$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(b)(2) (4)

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}，\det(P)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$$

故知 $P$ 為一轉移矩陣，其行列式值為 0，且 $p_{11}=p_{33}=\dfrac{1}{2}$，但不為對稱矩陣。

(c) (1) (2) (3)

設$(x_k,y_k,z_k)$分別表示 $k$ 次操作後出現狀態 1,2,3 的機率，根據轉移矩陣的定義，

可得$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\\z_{k+1}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{1}{4}y_k\\y_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{1}{2}y_k+\dfrac{1}{2}z_k\\z_{k+1}=\dfrac{1}{4}y_k+\dfrac{1}{2}z_k\end{cases}$

(1)從一白一黑（狀態 2）開始$\Rightarrow x_1=z_1=\dfrac{1}{4}$，假設 $x_k=z_k$，由上面的關係式可知 $x_{k+1}=z_{k+1}$，故(1)正確。

(2)從雙白（狀態 1）開始，$\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2}>z_0=0$，假設 $x_k>z_k$，由上面的關係式可知 $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{1}{4}y_k>\dfrac{1}{2}z_k+\dfrac{1}{4}y_k=z_{k+1}$，故(2)正確。

(3)因為 $y_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+y_k+z_k)=\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{1}{4}y_k=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{1}{8}$

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{2}(x_k-x_{k-1})$，因為 $x_1<x_0$，所以 $x_{k+1}<x_k$，故(3)正確。

(4)設最終狀態為$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，且 $x+y+z=1$

$\Rightarrow(x,y,z)=(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$，故(4)不正確。

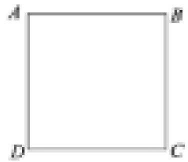
[例題4] 設 A,B 兩箱中，A 箱內有 1 黑球 1 白球，B 箱內有 1 白球。甲乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣的動作完成後稱為一局。

(1)當一局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為＿＿＿＿＿。

(2)當第三局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為＿＿＿＿＿。

Ans：(1)$\dfrac{3}{4}$ (2)$\dfrac{43}{64}$

[例題5] 有一人流浪於 $A$，$B$，$C$，$D$ 四鎮間，此四鎮間相鄰關係如下圖。假設每日清晨，此人決定當日夜晚繼續留宿該鎮，或改而前往相鄰任一鎮之機率皆爲$\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿 $A$ 鎮，(1)第三夜亦宿於 $A$ 鎮之機率爲多少？
(2)第五夜此人宿於 A 鎮之機率爲多少？宿於 C 鎮之機率爲多少？
Ans：(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{7}{27}$、$\frac{20}{21}$




(練習1) 設某地區有甲乙兩種報紙，訂戶總人數不變，且每一年訂戶變化皆如下述：今年訂閱甲報的人有$\frac{1}{3}$明年會繼續訂閱甲報，有$\frac{2}{3}$會改定乙報；今年訂閱乙報的人有$\frac{3}{5}$明年會改訂閱甲報，有$\frac{2}{5}$會繼續定乙報，根據這些資料，請寫出這項資料的推移矩陣 A，當市場趨於穩定狀態時，甲乙兩種報紙市場佔有率之比爲何？

Ans：$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$，9：10

(練習2) 設甲箱內有 2 個白球，乙箱內有 3 個紅球，現在每次各自箱中隨機取一個球交換，設 $P_i$ 代表有 $i$ 個紅球在甲箱內的狀況：
(a)請寫出轉移矩陣 A。
(b)在交換二次後，有 2 個紅球在甲箱內之機率。
(c)在長期交換之後，有 2 個紅球在甲箱內的機率。

Ans：(a)$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (b)$\frac{1}{3}$ (c)0.3

(練習3) 設 $A$，$B$ 兩盒子內各有兩個球，其中 $A$ 盒子內有二白球，$B$ 盒子內有一白球一黑球。甲、乙兩人輪流取球，每次先由甲自 $A$ 盒子內任取一球放入 $B$ 盒內，再由乙自 $B$ 盒內任取一球，放入 $A$ 盒內，這樣的動作完成後稱為一局。

(1)求第一局結束時，$A$ 盒內還是二白球的機率=_________。

(2)求第二局結束時，$A$ 盒內還是二白球的機率=_________。

(3)求第三局結束時，$A$ 盒內還是二白球的機率=_________。

Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{5}{9}$ (3)$\frac{14}{27}$

(練習4) 設 A 爲某一個馬可夫鏈的推移矩陣，$X_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，$n=0,1,2,\ldots$，其中 $x_0+y_0=1$，$x_0\geq 0$，$y_0\geq 0$，而 $X_n=AX_{n-1}$，

試證明 $x_n+y_n=1$，$n=1,2,\ldots$ 且 $x_n\geq 0$，$y_n\geq 0$。

## (乙)平面上的線性變換

(1)平面上的幾何變換：

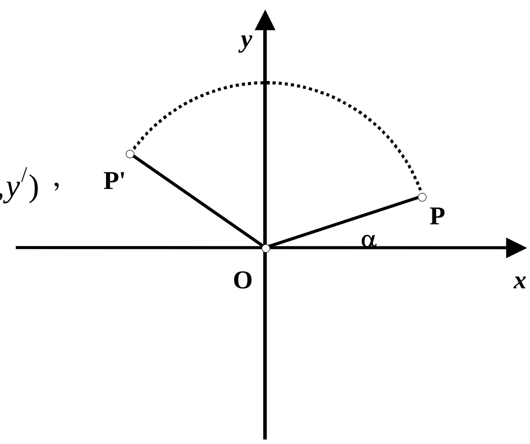
(a)平移運動：

設點 $P(x,y)$經平移 $\vec{l}=(h,k)$後得到 $P'(x',y')$，因爲$(x',y')=(x,y)+(h,k)$

所以用矩陣表示如下：$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

(b)旋轉運動：

①旋轉中心爲原點(0,0)：




設平面上有一點 $P(x,y)$繞原點 O 旋轉θ角度得到 $P'(x',y')$，

令$\overline{OP}=r$，根據三角函數的定義，可以得知

$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$；$x'=r\cos(\theta+\alpha)$，$y'=r\sin(\theta+\alpha)$

$x'=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)=x\cdot\cos\theta-y\cdot\sin\theta$

$y'=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=x\cdot\sin\theta+y\cdot\cos\theta$

如果將 $P(x,y)$寫成$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$P'(x',y')$寫成$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，則它們之間的關係可寫成

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$，我們稱矩陣 A=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$爲**旋轉矩陣**。

[討論]：

旋轉矩陣 A 的反矩陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$。

幾何解釋：

從向量的觀點來看：

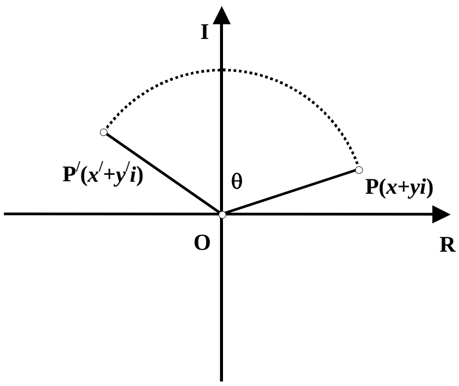
若$\overrightarrow{OP}=(x,y)$繞原點 O 旋轉θ成爲$\overrightarrow{OP'}=(x',y')$，

則$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OP'}$滿足$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$。

從複數的觀點來看：

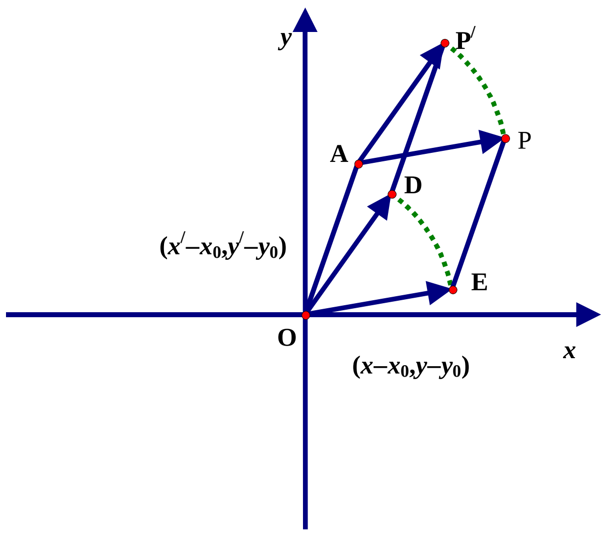
若在複數平面上 $P(x+yi)$繞原點 O 旋轉θ得到 $P'(x'+y'i)$，

則 $x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$




②旋轉中心爲一般的點：

設平面上有一點 $P(x,y)$繞一點 $A(x_0,y_0)$旋轉θ角度得到 $P'(x',y')$，那麼$(x,y)$與$(x',y')$間的關係是什麼？

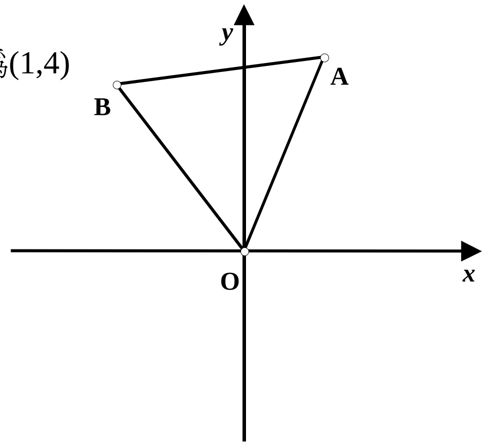



從向量的觀點來看：

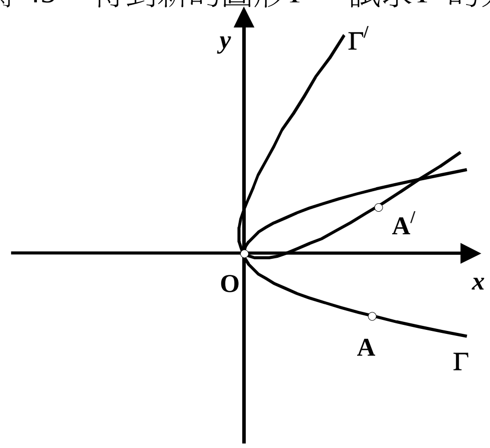
上述的旋轉運動可以視爲$\overrightarrow{AP}=(x-x_0,y-y_0)$繞原點 O 旋轉θ成爲$\overrightarrow{AP'}=(x'-x_0,y'-y_0)$

所以可以得到關係式：$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'-x_0\\ y'-y_0\end{bmatrix}$

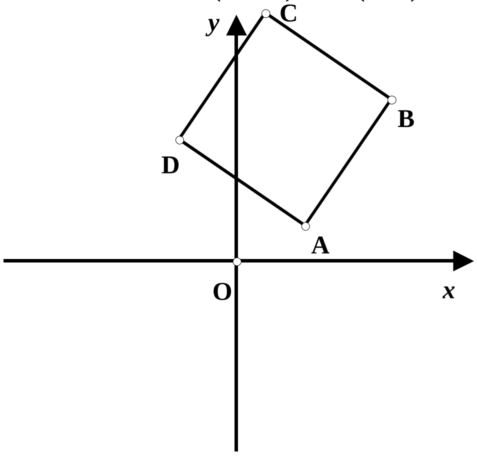
[例題6] 設ΔOAB 爲一正三角形，其中 A 的坐標爲(1,4)
試求 B 的坐標。Ans：$(\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\ ，2+\frac{\sqrt{3}}{2})$

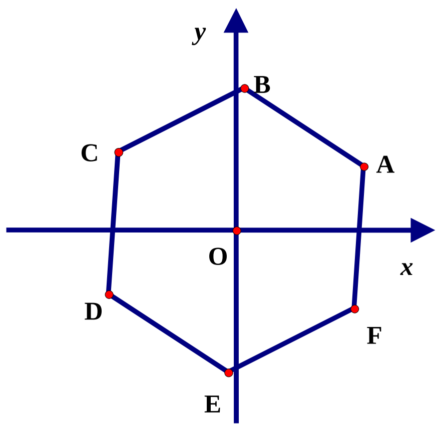



[例題7] 將拋物線Γ：$y^2=4x$ 上的點繞原點 O 旋轉 45°，得到新的圖形Γ′，試求Γ′的方程式。
Ans：$x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}\ x-4\sqrt{2}\ y=0$




(練習5) 如圖，ABCD 爲正方形，其中 A(2,1)、B(5,5)試求 C、D 的坐標。
Ans：D(−2,4)、C(1,8)



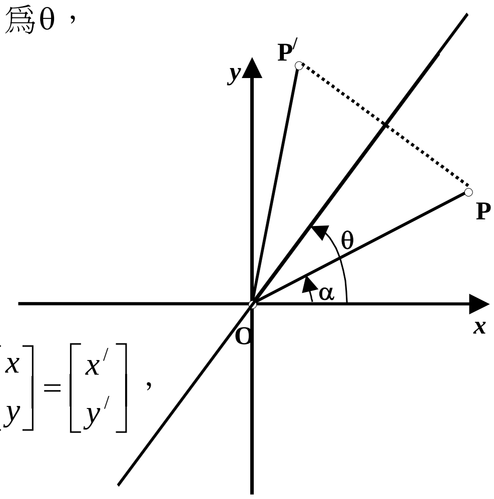

(練習6) 一正六邊形 ABCDEF 其中心爲原點，而 A 的坐標爲(4,2)，求 C 點的坐標。Ans：C$(-2-\sqrt{3},2\sqrt{3}-1)$

(練習7) 設直線 L：$\sqrt{3}\ x+y=4$ 上的每一個點繞原點 O 旋轉 30°後

成爲立一條直線 L$^{/}$，求 L$^{/}$的方程式。Ans：$x+\sqrt{3}\ y=4$

(c)鏡射運動：

如圖，設平面上有一點 P($x$,$y$)、過原點的直線 L 的斜角爲θ，




P 點對於直線 L 鏡射的點爲 P$^{/}$($x^{/}$,$y^{/}$)，令$\overline{\text{OP}}=r$

$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，$x^{/}=r\cos(2\theta-\alpha)$，$y^{/}=r\sin(2\theta-\alpha)$

$x^{/}=r\cos(2\theta-\alpha)=r[\cos2\theta\cos\alpha+\sin2\theta\sin\alpha]=x\cos2\theta+y\sin2\theta$

$y^{/}=r\sin(2\theta-\alpha)=r[\sin2\theta\cos\alpha-\cos2\theta\sin\alpha]=x\sin2\theta-y\cos2\theta$

所以可以將($x$,$y$)與($x^{/}$,$y^{/}$)的關係寫成：$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{/}\\ y^{/}\end{bmatrix}$，

我們稱$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$爲關於 L 的鏡射矩陣。

[討論一]：

(a)請寫出關於 $x$ 軸的鏡射矩陣。　　(b)請寫出關於 $x$ 軸的鏡射矩陣。

(c)請寫出關於直線 $x-y=0$ 的鏡射矩陣。

[討論二]：L 的鏡射矩陣 R=$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$的反矩陣 R$^{-1}$=$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{/}\\ y^{/}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

幾何解釋：

[例題8] 設平面上有一點 P($x$,$y$)、過原點的直線 L：$y=mx$，P 點對於直線 L 鏡射的點爲 P′($x'$,$y'$)，則($x$,$y$)與($x'$,$y'$)關係式可寫成$\begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

[例題9] 若 A(4,–2)，則 A 對下列直線之對稱點之坐標爲何？

(1)$x$=1 (2)$y$=2 (3)$2x-y=0$

[解法]：

(1)A(4,–2)$\xrightarrow{\text{沿向量}(-1,0)\text{平移}}$(3,–2)$\xrightarrow{\text{對}y\text{軸做鏡射}}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{沿向量}(1,0)\text{平移}}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

(2) A(4,–2)$\xrightarrow{\text{沿向量}(0,-2)\text{平移}}$(4,–4) $\xrightarrow{\text{對}x\text{軸做鏡射}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{沿向量}(0,2)\text{平移}}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

(3)tanθ=$m$=2，鏡設矩陣爲$\begin{bmatrix} \dfrac{-3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} \dfrac{-3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$。

(1)的分析：

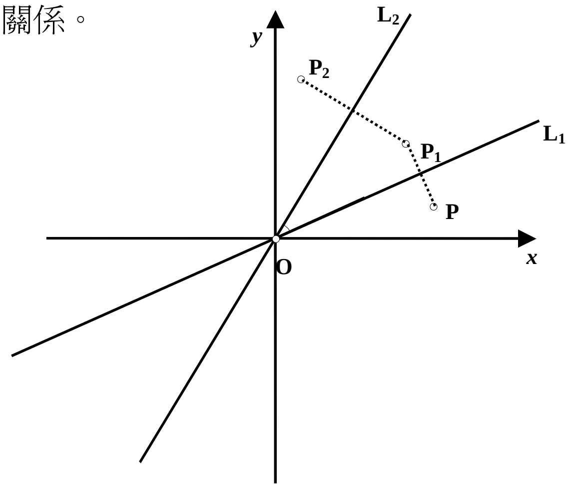
$$\begin{tikzcd} A(4,-2) \arrow[r, "\text{對}x=1\text{做鏡射}"] \arrow[d, "\text{沿向量}(-1,0)\text{平移}"'] & (-2,-2) \\ (3,-2) \arrow[r, "\text{對}y\text{軸做鏡射}"] & (-3,-2) \arrow[u, "\text{沿向量}(1,0)\text{平移}"'] \end{tikzcd}$$

[例題10] 設拋物線$\Gamma$：$x=3y^2-2y+1$ 在對直線 $y=2x$ 的鏡射下變換成另一拋物線$\Gamma'$，求$\Gamma'$的方程式。 Ans：$48x^2+72xy+27y^2-25x-50y+25=0$

[例題11] [兩次對稱等於一次旋轉]

如圖，設 $L_1$ 與 $L_2$ 的交角爲θ，點 $P(x，y)$對於 $L_1$ 的對稱點 $P_1$，$P_1$ 對於 $L_2$ 的對稱點 $P_2(x',y')$，是找出 $P(x,y)$與 $P_2(x',y')$的關係。

Ans：$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$



[例題12] A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 L：$y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，且已知

AB=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$。請選出正確的選項。

(1)AB=BA　(2)A+B=O(零矩陣)　(3)B 所對應的平面變換是旋轉。

(4)−A 是 B 的乘法反元素。　Ans：(1)(2)(4)　(92 指定甲)

(練習8) (1)A(−2,6)關於 L：$x-\sqrt{3}y=0$ 的對稱點坐標 $A'$：____________。

(2)直線 L∶$2x-y-6=0$ 關於直線 $y=3x$ 的鏡射圖形方程式爲____________。

Ans：(1) $A'(-1+3\sqrt{3},-3-\sqrt{3})$　　(2)$11x-2y+30=0$

(練習9) 試求直線 L：$y=-x$ 經過繞原點旋轉 $30^{\circ}$，再對直線 $y=x$ 鏡射下變成 $L'$，求 $L'$的方程式。Ans：$y=-(2+\sqrt{3})x$

(練習10) 拋物線Γ：$y=x^2$ 經過直線 $y=2x$ 鏡射下變成$\Gamma'$，請問$\Gamma'$的方程式爲何？

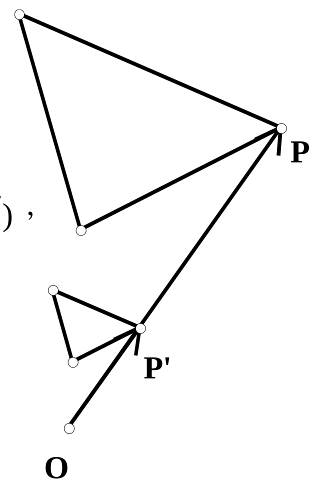
Ans：$16x^2+24xy+9y^2-20x-15y=0$

(d)伸縮運動：

①設 O 爲平面上一個定點，$k$ 爲大於 0 的定數，

若將平面上的動點 P 變換到 $P'$，使得$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$，

則稱此運動爲以 O 爲中心的伸縮 $k$ 倍的運動。




設 $P(x,y)$經過以原點 O 爲伸縮中心，伸縮 $k(k>0)$倍得到 $P'(x',y')$，

因爲$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}\Rightarrow(x',y')=k(x,y)\Rightarrow x'=kx$，$y'=ky$

P 與 $P'$的關係用矩陣表示如下：$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

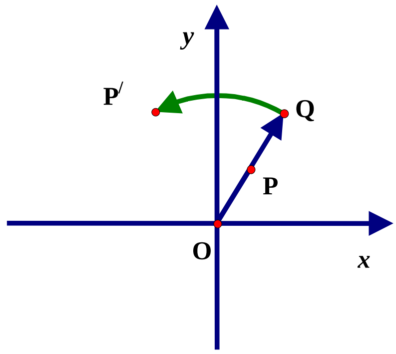
②伸縮與旋轉：

例子：

點 $P(x,y)\xrightarrow{\text{以}O\text{爲中心伸縮2倍}}$點 $Q(m,n)$ $\xrightarrow{\text{以}O\text{爲中心旋轉}60^{\circ}}$點 $P'(x',y')$

矩陣表示：$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$，且$\begin{bmatrix} \cos 60^{\circ} & -\sin 60^{\circ} \\ \sin 60^{\circ} & \cos 60^{\circ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$




複數表示：$x'+y'i=2(\cos60°+i\sin60°)(x+yi)$

[討論]：設 R=$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，D=$\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}$，$k>0$

(1)請問 RD=DR 會成立嗎？

(2)如何用幾何變換來解釋？

(e)推移運動：

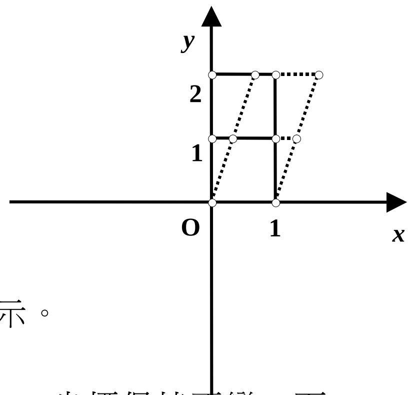
①設 $k$ 是一個常數，在坐標平面上，若將動點 P$(x,y)$的 $y$ 坐標保持不變，而 $x$ 坐標變成 $x+ky$，形成 P$'(x',y')$，其中 $x'=x+ky$，$y'=y$，我們稱這種運動爲沿 $x$ 坐標推移 $y$ 坐標的 $k$ 倍。用矩陣表示可爲$\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。

例如：沿 $x$ 坐標推移 $y$ 坐標的$\frac{1}{3}$倍時，

$\begin{cases}x'=x+\frac{1}{3}y\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

這樣的運動將(0,0)、(1,0)、(0,1)、(1,1)、(0,2)、(1,2)

依序變成(0,0)、(1,0)、$(\frac{1}{3},1)$,$(\frac{4}{3},1)$,$(\frac{2}{3},1)$,$(\frac{5}{3},2)$，如右圖所示。




②設 $k$ 是一個常數，在坐標平面上，若將動點 P$(x,y)$的 $x$ 坐標保持不變，而 $y$ 坐標變成 $kx+y$，形成 P$'(x',y')$，其中 $x=x'$，$y'=kx+y$，我們稱這種運動爲沿 $y$ 坐標推移 $x$ 坐標的 $k$ 倍。用矩陣表示可爲$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。

[例題13] 設△$AOB$ 中，$O$ 爲原點，$A(3,-1)$，$B$ 在第一象限內，且∠$AOB=\theta$，若 $\tan\theta=\frac{4}{3}$，且$\overline{OB}=5\overline{OA}$，則 $B$ 的坐標爲__________。Ans：(13,9)

[例題14] 設圓 C：$x^2+y^2=4$ 在$(x,y)\to(x+y,y)$的推移下，變成另一個圖形Γ，求Γ的方程式。Ans：$x^2-2xy+2y^2=4$ (橢圓)

(練習11) 矩形 OABC 中$\overline{OC}=2\overline{OA}$，且 O(0,0)、A(2,1)，試問 B、C 的坐標。
Ans：B(0,5)、C(−2,4)或 B(4,−3)、C(2,−4)

(練習12) 設 O(0,0)、A$(a_1,a_2)$、B$(b_1,b_2)$形成ΔOAB，
經過伸縮運動$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$(k>0)$，形成$\Delta OA'B'$，
試問這兩個三角形面積的關係？Ans：$\Delta OA'B'=k^2\Delta OAB$

(練習13) 設 O(0,0)、A$(a_1,a_2)$、B$(b_1,b_2)$形成ΔOAB，
經過推移運動$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，$(k>0)$
形成$\Delta OA'B'$，試問這兩個三角形面積的關係？Ans：相等

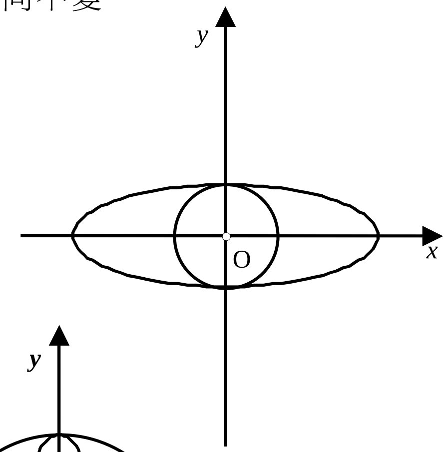
(練習14) 設雙曲線Γ： $x^2-y^2=1$ 上的點沿 $x$ 軸推移(−2)倍到 $P(x',y')$，形成另一個曲線Γ′，試求Γ′的方程式。Ans：$x^2+4xy+3y^2=1$

(練習15) 設 A(−1,−1)、B(1,−1)、C(1,1)、D(−1,1)，
(1)正方形 ABCD 沿 $x$ 軸推移 $y$ 坐標的 2 倍，成爲四邊形 $A'B'C'D'$。
請問 $A'B'C'D'$各頂點的坐標。
(2)正方形 ABCD 沿 $y$ 軸推移 $x$ 坐標的 2 倍，成爲四邊形 $A'B'C'D'$。
請問 $A'B'C'D'$各頂點的坐標。
Ans：(1)$A'(-3,-1)$、B(−1,−1)、$C'(3,1)$、$D'(1,1)$
(2)$A'(-1,-3)$、B(1,1)、C(1,3)、D(−1,−1)

(f)水平與鉛直方向的伸縮：
水平方向的伸縮：
將點 $P(x,y)$的 $y$ 坐標保持不變，而將 $x$ 坐標乘以 $r$ 倍，得到 $P'(x',y')$
其中 $x'=rx,y'=y$，用矩陣表示爲$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

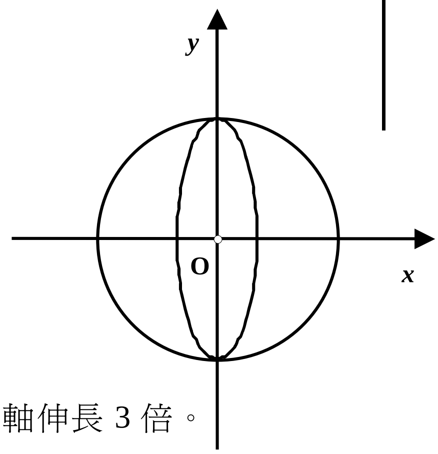
當 $r>1$ 時，此運動可視爲水平方向伸張 $r$ 倍，鉛直方向不變

當 $0<r<1$ 時，此運動可視爲水平方向壓縮 $r$ 倍，鉛直方向不變。
當 $r<0$ 時，此運動可視爲伸張或壓縮與對 $y$ 軸的鏡射。




例如：$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$將每一點 $P(x,y)$變成 $Q(3x,y)$，
所以可將圓 $x^2+y^2=1$ 水平方向伸長 3 倍，
成爲橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$。

例如：$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$將每一點 $P(x,y)$變成 $Q(\frac{1}{3}x,y)$，
所以可將圓 $x^2+y^2=1$ 水平方向壓縮 $\dfrac{1}{3}$ 倍，
成爲橢圓 $9x^2+y^2=1$。




例如：$\begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，
所以$\begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$可視爲先對 $y$ 軸作鏡射，在沿 $x$ 軸伸長 3 倍。

鉛直方向的伸縮：將點 $P(x,y)$的 $x$ 坐標保持不變，而將 $y$ 坐標乘以 $r$ 倍，得到 $P'(x',y')$其中 $x'=x,y'=ry$，用矩陣表示爲$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。
當 $r>1$ 時，此運動可視爲鉛直方向伸張 $r$ 倍，水平方向不變
當 $0<r<1$ 時，此運動可視爲鉛直方向壓縮 $r$ 倍，水平方向不變。
當 $r<0$ 時，此運動可視爲伸張或壓縮與對 $x$ 軸的鏡射。

[例題15] 一個圓 $x^2+y^2=1$ 上的點 $P(x,y)$先沿水平方向伸長 3 倍,再沿 $y$ 軸方向伸長 2 倍。得到另一個點 $Q(x',y')$，(a)請找出一個 2 階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。
(b)Q 點形成另一個圖形，請問此圖形的方程式。
Ans：$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(練習16) 設點 $P(x,y)$先沿 $x$ 軸方向伸縮 $a$ 倍，再沿 $y$ 軸方向伸縮 $b$ 倍，其中 $a,b$ 均為正數，得到點 $P'(x',y')$，請找出一個二階方陣 A，使得 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。

Ans：$\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}$

(練習17) 設$\Delta ABC$ 的頂點 A、B、C 經過沿水平方向壓縮$\frac{1}{5}$倍之後，再沿鉛直方向伸長 2 倍，得到 $A'$、$B'$、$C'$，形成另一個$\Delta A'B'C'$，請問這兩個三角形面積的關係。Ans：$S_{A'B'C'}=\frac{2}{5}\cdot S_{ABC}$

(2)二階方陣所對應的平面變換：

對於平面上每一點 $P(u,v)$，就有一個 2×1 階的行矩陣$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$與之對應；反之，每一個 2×1 階的行矩陣$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$，在坐標平面上都有一點 $P(u,v)$ 與之對應。

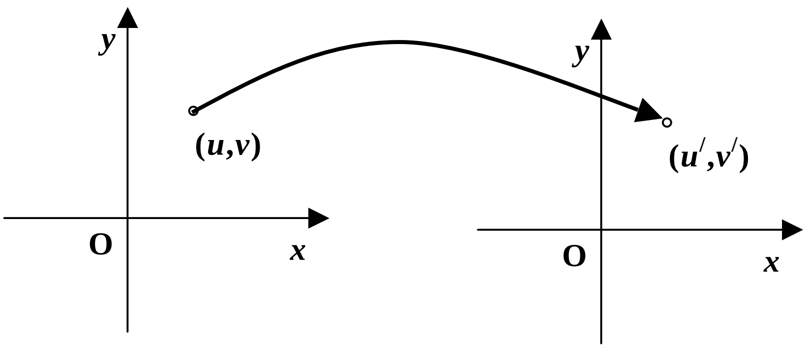
因此我們可以將$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$視為點 P 的行坐標。

接下來要介紹一種對應 T 是將平面上的點對應到平面上的點，T 可視為一個函數，定義域為坐標平面，對應域亦為坐標平面。

設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$為一個二階方陣，對於坐標平面上每一點 $P(u,v)$，

可得一個行坐標$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$。

定義 $T\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u'\\v'\end{bmatrix}$,這樣的對應可視為方陣 A(函數 T)將 $P(u,v)$對應到點 $Q(u',v')$，因此**方陣 A 決定了函數 T 的行為**，對於這樣由二階方陣所定義出由坐標平面對應到坐標平面的函數，我們稱為**平面上的變換**(Transformation)。例如前面所提的旋轉、對稱、伸縮、推移均可定義出平面上的變換。




[討論]：

(a)變換 T 會將直線對應到直線！

(b)變換 T 會將線段對應到線段！

設直線 $P_1P_2$，其中 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是相異兩點，直線上的動點 $P(x,y)$滿足

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，其中 $t$ 是參數。設 $T(P_1)=Q_1$，$T(P_2)=Q_2$，$T(P)=Q$

我們可以計算出$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，因此 Q 點落在直線 $Q_1Q_2$ 上，因此可知 T 將直線 $P_1P_2$ 變換成 $Q_1Q_2$。

因爲方陣 A 所決定的變換 T 可以將直線對應到直線，
所以我們稱 T 爲**平面上的線性變換**(Linear Transformation)。
例如：

(1)設 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，求 P(5,6)經過 A 的變換之後的點 Q 坐標。

(2)設 L：$x+y=3$，請求出 L 經過 A 的變換之後圖形的方程式。

(a)二階方陣的分解：

**矩陣的基本列運算：**

(a)將一矩陣的某一列乘上某一數值加入另一列。
(b)將一矩陣的某一列乘以一個不爲 0 的數。
(c)將一矩陣的某一列中的某兩列互換位置。

將 I=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$經過矩陣的基本列運算，

可得下列幾種矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，這種由 $I_n$ 經過基本列運算 $rR_i$、$R_{ij}$、$rR_i+R_j$ 所得的矩陣稱爲 **$n$ 階基本矩陣**。

根據前面幾何變換的討論：

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$分別表示鉛直方向與水平方向的推移。

$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$分別表示 $x$ 軸方向與 $y$ 軸方向的伸縮($r>0$)或伸縮後再鏡射($r<0$)。

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$表示對於直線 $x=y$ 的鏡射。

考慮矩陣 A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$經過基本列運算

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{rR_1+R_2} \begin{bmatrix} a & b \\ c+ra & d+rb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{rR_2+R_1} \begin{bmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{rR_1} \begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{rR_2} \begin{bmatrix} a & b \\ rc & rd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

根據這些關係可知任一個二階方陣 **A** 經過基本列運算所得的結果就等於在 **A** 的左邊乘以所對應的基本矩陣的乘積。

每一個基本矩陣都有乘法反矩陣，
而且每一個乘法反矩陣本身也都是基本矩陣。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

二階方陣的分解：

設 A=$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，試求基本矩陣 $E_1$、$E_2$、…、$E_n$ 使得 $E_n \cdots E_2E_1A=I_2$。

根據矩陣的基本列運算：

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\frac{-1}{3})R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上述的基本列運算所對應的基本矩陣爲 $E_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$、$E_3=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

可得 $E_3E_2E_1\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，又 $E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$E_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$，$E_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

幾何解釋：

由矩陣 A 所定義的線性變換 T，可視爲三個基本矩陣所定義的運動所組成的線性變換。

$$\begin{bmatrix}0&-3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{x\text{軸方向的推移}}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{對於}y\text{軸鏡射再沿}y\text{軸伸長3倍}}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{對於}x=y\text{鏡射}}\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}$$

一般而言，二階方陣 A=$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，det(A)≠0，二階方陣經過基本列運算可以化成一個二階單位方陣 $I_2$。因此可以得到一些基本矩陣 $E_1$、$E_2$、$E_3$、…、$E_k$，使得 $E_k\cdots E_2E_1A=I_2$，因爲基本矩陣都有乘法反矩陣，且乘法反矩陣都是基本矩陣，所以 $A=(E_k\cdots E_2E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$。

因此二階方陣 A 都可以化成一些基本矩陣的乘積。若要研究二階方陣 A 所定義線性變換的行爲，由於二階方陣 A 可以化成一些基本矩陣的乘積，基本矩陣所定義的線性變換爲鏡射、伸縮、推移或是它們的合成，因此二階方陣 A 所定義的線性變換爲鏡射、伸縮、推移或是它們的合成。

結論：

若 A 爲二階方陣且 det(A)≠0，則將坐標平面上的點變換成整個坐標平面(即 A 所對應的變換爲映成函數)，而且 A 所代表的變換爲鏡射、伸縮、推移或是它們的合成。

[例題16] 試將 A=$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$寫成基本矩陣的乘積，並解釋由此二階方陣 A 所定義的線性變換的幾何意義。Ans：A=$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

[例題17] 對於二階方陣 A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，det(A)=0，證明利用 A 所定義的線性變換可將整個坐標平面對應到一點(0,0)或是一條直線。

[例題18] $\Delta$MNL 經過由二階方陣 A(det(A)≠0)所定義的變換 T 得到$\Delta M'N'L'$，試證明$\Delta M'N'L'$的面積=$\Delta$MNL 的面積×|det(A)|。

[例題19] 證明：橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所包圍的面積為 $ab\pi$。

[例題20] 直線L：$x+y=4$在A=$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$所定義的線性變換下的心圖形$L'$的方程式為何？

Ans：$5x-y=28$。

[例題21] 設 $a,b,c$ 為正數，線性變換 T 由矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\ \sqrt{3}a & -c\end{bmatrix}$所定義，當橢圓 $4x^2+8y^2=1$ 經 T 映射之後的圖形是以原點為圓心，1 為半徑的圓，求 $a,b,c$。

Ans：$a=1$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{2}$ (90 台北區指定考科模擬考 2)

(練習18) 將圓：$x^2+y^2=1$ 上的點之 $x$ 坐標伸縮 3 倍，$y$ 坐標伸縮 2 倍，所得圖形方程式為________，其面積為__________。

Ans：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$6\pi$

(練習19) 試將二階方陣$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & -5\end{bmatrix}$寫成基本矩陣的乘積。

Ans：$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(練習20) 線性變換 T 把(1,0)變成(1,−1)，並且把圓 $2x^2+2y^2-4y+1=0$ 變成圓 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，求變換 T 所代表的矩陣。Ans：$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

(練習21) 設區域 A=$\{(x,y)|y\le x，x\le 1，y\ge 0\}$、B=$\{(x,y)|\ y\ge\frac{1}{2}x，y\le 2x，x+y\le 3\}$

(1)在坐標平面上，請畫出 A、B 兩區域的圖形。

(2)設線性變換 T 將區域 A 變換成區域 B，求 T 的矩陣。

Ans：(2)$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

## 綜合練習

(1) 某保險公司經由多年的經驗與研究，發現汽車駕駛人若曾經肇禍者較易再失事，面臨不斷增加的修護損失及賠償請求，公司決定依據駕駛人的肇禍紀錄增加投保者的保險費，即投保人一年的保險費隨著它的肇禍次數增加而增加。假設永安保險公司將投保人分成下列三類：第一類：未曾肇禍的人；第二類：肇禍一次的人；第三類：肇禍多於一次的人。該公司的研究發現，獲得下列資料：

| | 第一類 | 第二類 | 第三類 |
|---|---|---|---|
| 發生第一類 | 0.80 | 0 | 0 |
| 發生第二類 | 0.15 | 0.70 | 0 |
| 發生第三類 | 0.05 | 0.30 | 1.00 |

假設現有未曾肇禍的投保人 1000 人，根據這份研究，從第二年開始，1000 人中，這三類保險人的分布情形爲何？第三年開始，1000 人中，這三類保險人的分布情形爲何？

(2) 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分爲高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變爲低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變爲高收入？請選出正確的選項。

(A) 6 成　(B)7 成　(C)8 成　(D)9 成　(2003 指定考科甲)

(3) 有一股票經紀商，長期分析某一股票行情，分成上漲、持平、下跌三種，若某日股票行情上漲，則次日股票行情有$\frac{1}{3}$機會上漲、$\frac{1}{2}$機會持平、$\frac{1}{6}$機會下跌，若某日股票行情持平，則次日股票行情有$\frac{1}{3}$機會上漲、$\frac{1}{3}$機會持平、$\frac{1}{3}$機會下跌，若某日股票行情下跌，則次日股票行情有$\frac{1}{6}$機會上漲、$\frac{1}{2}$機會持平、$\frac{1}{3}$機會下跌，假設今日股票上漲，則後天此股票上漲的機會爲多少？

(4) 設 A 袋中有 2 個 10 元錢幣，B 袋中有 3 個 5 元錢幣。從 A 袋中任取一個錢幣與 B 袋中任取一個錢幣互換。若這樣的互換進行三次，

試求(a)A 袋中 10 元錢幣恰爲一個的機率。(b)A 袋中錢數的期望值。

(5) 下列各方陣所定義的平面變換，何者爲旋轉？

(A)$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$　(B)$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$　(C)$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D)$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　(E)$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(6) 下列各方陣所定義的平面變換，何者爲對過原點直線的鏡射？

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} \frac{12}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}$

(7) 如圖所示在坐標平面上，$\Delta OAB$ 爲一正三角形，
其中點 $A$ 的坐標爲(1,2)，點 $B$ 爲$(b_1, b_2)$。試問下列何者爲真？

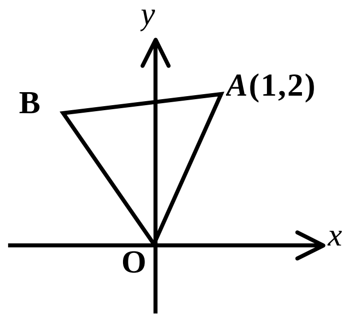
(A) $b_1 + i\,b_2 = (\cos 60° + i\sin 60°)(1+2i)$

(B) $b_1 + i\,b_2 = (\cos 60° - i\sin 60°)(1+2i)$

(C) $(b_1, b_2) = (-1, 2)$

(D) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ \sin 60° & -\cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2003 指定考科乙)




(8) 在複數平面上，點 A 表示複數 3+2$i$，O 爲原點，若以 O 爲中心，將$\overline{\text{OA}}$線段順時針方向旋轉$\frac{3\pi}{4}$後得$\overline{\text{OB}}$，設 B 表示複數 $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r>0)$，
則 $\tan\theta$ =________。

(9) 將橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$以其右焦點爲旋轉中心，依順時針方向轉 90°後，所得的橢圓方程式爲________。

(10) 拋物線Γ：$y=x^2+2x+3$ 在對直線 L：$y=x$ 的鏡射下變換成
另一拋物線Γ′，則求Γ′的方程式、焦點坐標、準線方程式。

(11) 在平面上有一定點 $P(-4,3)$作下列各變換，試分別求變換後的 P′點坐標。

(a)平移向量 $\vec{a}$ ＝(1,2)。

(b)以原點爲中心，順時針旋轉 30°。

(c)對直線 $2x-y=0$ 鏡射。

(d)以原點爲中心，伸長爲 3 倍。

(e)沿 $x$ 軸方向推移 $y$ 坐標的－2 倍。

(12) 平面上有一等軸雙曲線Γ：$x^2-y^2=4$，將Γ作下列各變換後，
得一新曲線Γ′，試求Γ′之方程式。

(a)平移向量 $\vec{a}$ ＝(1，－1)。

(b)以原點爲中心，旋轉 60°。(c)對直線 $3x-y=0$ 作鏡射。

(d)以原點爲中心，$x$ 坐標伸長爲 2 倍，$y$ 坐標縮短爲$\frac{1}{2}$倍。

(e)沿 $x$ 軸推移 $y$ 坐標的 3 倍，沿 $y$ 軸推移 $x$ 坐標的－3 倍。

(13) 用矩陣分別表示下列合成變換

(a)先旋轉 60°，再對 $x$ 軸鏡射。

(b)先對 $x$ 軸鏡射，再伸縮 2 倍，再旋轉 120°

(c)先對 $x$ 軸伸縮 2 倍，再對 $y$ 軸伸縮$\frac{1}{3}$ 倍，再沿 $x$ 軸推移 $y$ 坐標 4 倍，再對 $y$ 軸鏡射

(d)點 A(2,−4)經(c)的變換後之坐標爲何？

(14) (a)在坐標平面上，點 A($x$,$y$)先沿 $x$ 軸推移 $y$ 坐標的 3 倍，再以原點爲中心旋轉 60°得點 $A'(x',y')$，請以 $x,y$ 來表示 $x',y'$。

(b)圖形Γ上之每一點經(a)的變換後，得到圖形$\Gamma'$：$y^2=4x$，求圖形Γ的方程式。

(15) 圓 $C$： $x^2+y^2-2x+4y+2=0$ 上有一內接正△$ABC$，此圓經平行 $x$ 軸方向伸長爲 2 倍，又向左平移 3 單位，再平行 $y$ 軸方向伸長爲 4 倍等變換後，△$ABC$ 變爲△ $A'B'C'$ ，則△ $A'B'C'$ 的面積爲__________。

(16) 設矩陣 R=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，0<θ<2π，M=$\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$。若 $R^6=I_2$，則

(a)θ的最小値=？ (b)承(a) $(RMR^{-1})^5$=？(90 台中區指定考科模擬考 2)

(17) 在 A=$\begin{bmatrix}3 & b \\ c & 7\end{bmatrix}$所定義的線性變換 T 將直線 $y=2x+1$ 變換成它自己，求出 $b,c$ 的值。

(18) 滿足$\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cos t \\ \sin t\end{bmatrix}$之點($x$,$y$)所得的曲線爲Γ，則直線 $y=x+4$ 至曲線Γ上之點的最短距離爲________________。

(19) 坐標平面上，不等式$\begin{cases}x^2+3y^2\le 36 \\ -3\le x\le 3\end{cases}$所成區域之面積爲________________。

(20) (a)曲線 C：$7x^2+3y^2-4\sqrt{3}xy=9$，將曲線繞原點旋轉 30°，求旋轉後所得曲線方程式？

(b)設矩陣 A=$\begin{bmatrix}a & b \\ \frac{2}{3} & d\end{bmatrix}$ ($a,b,d$ 爲實數，$ad-\frac{2}{3}b\neq 0$)，所表示的線性變換把曲線 C 變成圓：$x^2+y^2=1$，並把($\sqrt{3}$,1)變換成點(1,$\frac{1}{\sqrt{3}}$)，則矩陣 A=？

(21) 設 T 是由矩陣$\begin{bmatrix}a & c \\ b & 0\end{bmatrix}$所代表的線性變換，已知點 A 的坐標爲(1,0)，且 T(A)=P

(a)設 $b>0$，當ΔPOA 的面積爲$\sqrt{3}$ ，∠POA=$\frac{\pi}{3}$，求 $a,b$ 之值。

(b)對於(a)中的 $a,b$ 值，再設 T 把直線 $4x+y=0$ 變換成 $x-\sqrt{3}\ y=0$，請求出 $c$ 的值。

## 進階問題

(22) 設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$對轉軸θ角後的新坐標依次爲 $P'(x'_1,y'_1)$、$Q'(x'_2,y'_2)$，

試證明：$\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$。 (90 高雄女中模擬考 3)

(23) 設二次曲線Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$，以矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$表示的線性變換對Γ作變換

得$\Gamma'$，即$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，其中$(x,y)\in\Gamma$，$(x',y')\in\Gamma'$，則

(a)當$\Gamma'$與 $x$ 軸相切時，求 $a$=？ (b)根據(a)，求切點座標。(90 台中區複習考 2)

(24) 設$\begin{cases} a_n = a_{n-1}-2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1}+4b_{n-1} \end{cases}$表爲$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$，則：

(a)令 $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$時，求 $P^{-1}AP$。

(b)利用 $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n$，$n$ 爲自然數，求 $A^n$=？

(c)數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，$a_1=b_1=1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$=？(90 台中區指定考科模擬考 4)

(25) (a)$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，設ΔABC 經過伸縮$(x,y)\to(rx,sy)$變換後成爲ΔDEF，試證：若ΔABC 之面積爲 $a$，且 $r,s$ 爲正數，則ΔDEF 的面積爲 $rsa$。

(b)已知 A、B、C 爲橢圓$\dfrac{x^2}{228}+\dfrac{y^2}{76}=1$ 上使ΔABC 有最大面積之三個點，若 $A(9,-7)$、B 在第一象限內、C 在第三象限內，求 B、C 點之坐標。

(26) 在平面上取點 P、Q，P 與 Q 關於直線 $2x-y+1=0$ 對稱。將 Q 繞原點旋轉 45° 得到 R 點。設用矩陣$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$表示的變換把 $P(x,y)$變換成

R(X,Y)，(a)請問矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$=？(b) 請問矩陣=$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$？

# 綜合練習解答

(1) 第二年，第一類有 800 人，第二類有 150 人，第三類有 50 人；第三年，第一類有 640 人，第二類有 225 人，第三類有 135 人

(2) (C)

(3) $\dfrac{11}{36}$

(4) (a)$\dfrac{5}{18}$ (b)$\dfrac{505}{36}$元

[提示：轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$X_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1=AX_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$X_2=AX_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$X_3=AX_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{23}{36} \\ \frac{10}{36} \end{bmatrix}$，期望值 $E=20\times\frac{1}{12}+15\times\frac{23}{36}+10\times\frac{10}{36}=\frac{505}{36}$]

(5) (A)(B)(D)(E)

(6) (B)(D)

(7) (A)(D)

(8) 5

(9) $\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$

(10) $x=y^2+2y+3$、$(\frac{9}{4},-1)$、$x=\frac{7}{4}$

(11) (a) $P'(-3，5)$(b) $P'(\dfrac{-4\sqrt{3}+3}{2}，\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2})$(c) $P'(\dfrac{24}{5}，\dfrac{-7}{5})$

(d) $P'(-12，9)$ (e) $P'(-10，3)$

(12) (a)$(x-1)^2-(y+1)^2=4$(b)$x^2-y^2-2\sqrt{3}xy+8=0$ (c) $7x^2-48xy-7y^2=100$

(d) $x^2-16y^2=16$ (e) $2x^2+3xy-2y^2+100=0$

(13) (a)$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$(b)$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ (c)$\begin{bmatrix} -2 & \frac{-4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (d)$(\frac{4}{3},\frac{-4}{3})$

(14) (a)$x'=\dfrac{x+(3-\sqrt{3})y}{2}$，$y'=\dfrac{\sqrt{3}x+(3\sqrt{3}+1)y}{2}$

(b)$(\sqrt{3}\ \ x+3\sqrt{3}\ \ y+y)^2=8x+8(3-\sqrt{3}\ \ )y$

[提示：$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ]

(15) $18\sqrt{3}$

(16) (a)$\frac{\pi}{3}$ (b)$\begin{bmatrix} \frac{29}{4} & \frac{33\sqrt{3}}{4} \\ \frac{33\sqrt{3}}{4} & \frac{95}{4} \end{bmatrix}$

(17) $b$=3，$c$=4

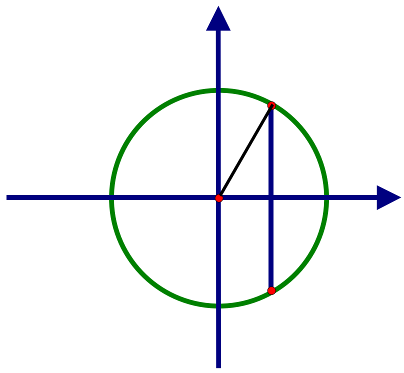
(18) $2\sqrt{2}$ $-2$

[提示：($2\cos t,\sin t$)可視爲橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$上的任意點，因此Γ爲將橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$繞原點旋轉$\frac{3\pi}{4}$所得的圖形。]

(19) $9+2\sqrt{3}\ \pi$

[提示：Γ：$\begin{cases} x^2+3y^2\le 36 \\ -3\le x\le 3 \end{cases}$所表示的區域

爲Γ′：$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ 0\le x\le \frac{1}{2} \end{cases}$所表示之區域經二階方陣$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$之變換所得之區域。



Γ′的面積爲 $2(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$

Γ的面積=Γ′的面積$\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}=9+2\sqrt{3}\ \pi$。

(20) (a)$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$ (b)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

(21) $a$=2，$b=2\sqrt{3}$ $c$=$-1$

(22) 利用$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix}$直接去驗證。

(23) (a)$\pm\sqrt{5}$ (b)($\pm 2\sqrt{5}$ ,0)

[提示：(a)根據$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{1+a^2}(x'-ay')$，$y=\frac{1}{1+a^2}(ax'+y')$代入Γ的方程式，再令 $y'=0$

$\Rightarrow\frac{4+a^2}{(1+a^2)^2}x'^2-\frac{6a}{1+a^2}x'+5=0$，判別式=0$\Rightarrow a^2=5$

$\Rightarrow a=\pm\sqrt{5}$ (b)將 $a=\pm\sqrt{5}$ 代入$\frac{4+a^2}{(1+a^2)^2}x'^2-\frac{6a}{1+a^2}x'+5=0$，解得切點($\pm 2\sqrt{5}$ ,0)

(24) (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3^n+2^{n+1} & -2\cdot 3^n+2^{n+1} \\ 3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n \end{bmatrix}$ (c)$-1$

(25) (a)略 (b)B(6,8)、C($-15,-1$)

[提示：橢圓$\frac{x^2}{228}+\frac{y^2}{76}=1$上有最大面積之內接三角形ΔABC，經過

$(x,y)\to(x,\sqrt{3}\ y)$變換成ΔDEF，而ΔDEF 是圓 $x^2+y^2=228$ 之內接三角形。
而 A(9,−7)→D$(9,-7\sqrt{3})$，D 在圓上，
故 B→E：$(9-7\sqrt{3}i)(\cos120°+i\sin120°)=6+8\sqrt{3}i$
C→F：$(9-7\sqrt{3}i)(\cos240°+i\sin240°)=-15-\sqrt{3}i$
再變換成 B(6,8)、C(−15,−1)]

(26) (a)$A=\begin{bmatrix}\frac{-7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ (b)$\begin{bmatrix}\frac{-6}{5\sqrt{2}}\\ \frac{-2}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

[提示：(a)設 Q$(m,n)$，依題意可知$\begin{bmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\ n-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$，令 $L=\begin{bmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{bmatrix}$

$\Rightarrow L(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$，$R\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=R(L\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+L\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix})=RL\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+RL\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}-R\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$

故 $A=RL=\begin{bmatrix}\frac{-7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=RL\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}-R\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6}{5\sqrt{2}}\\ \frac{-2}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$。]