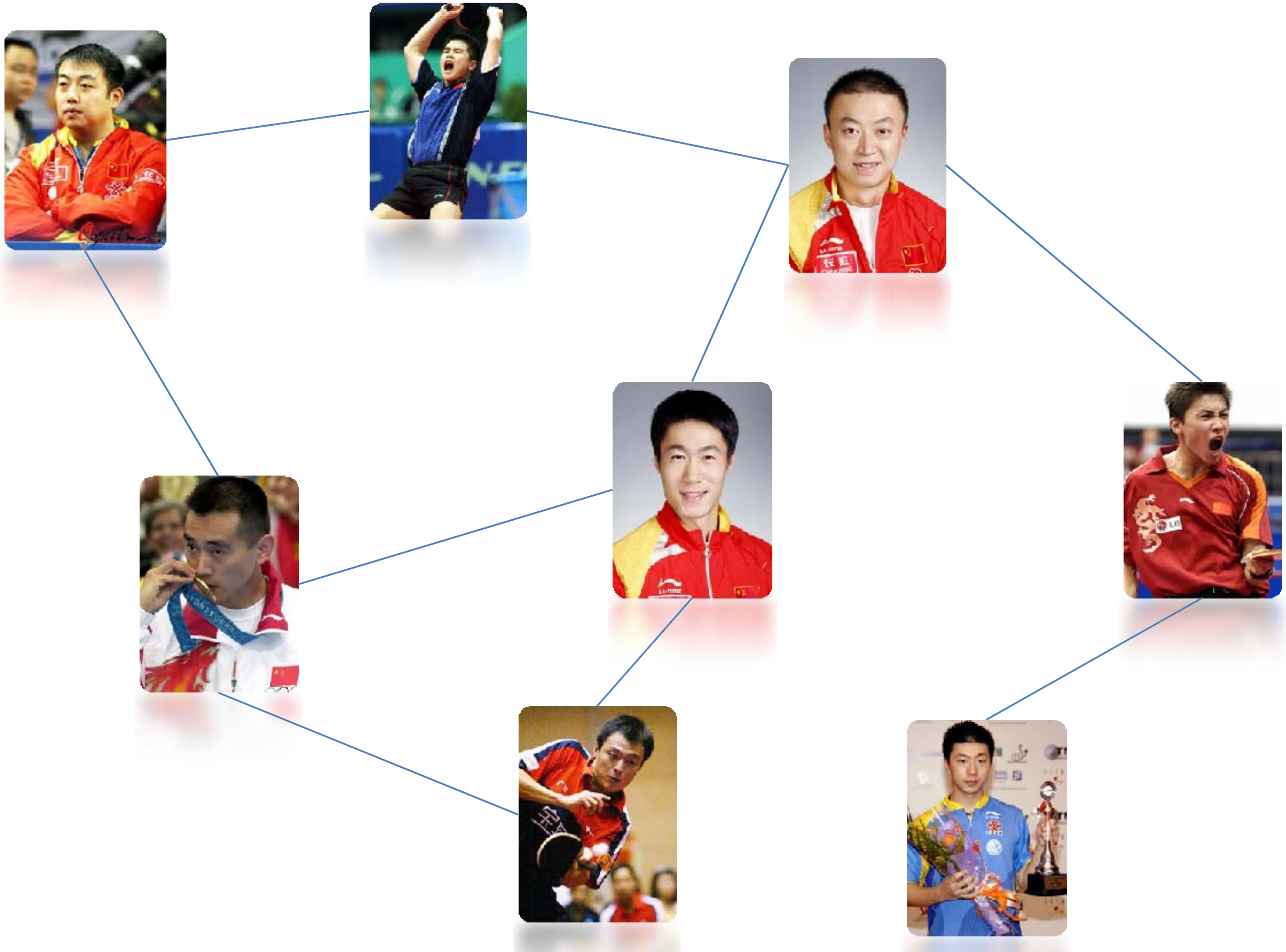
8 边独立集和边覆盖集

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

课程范围

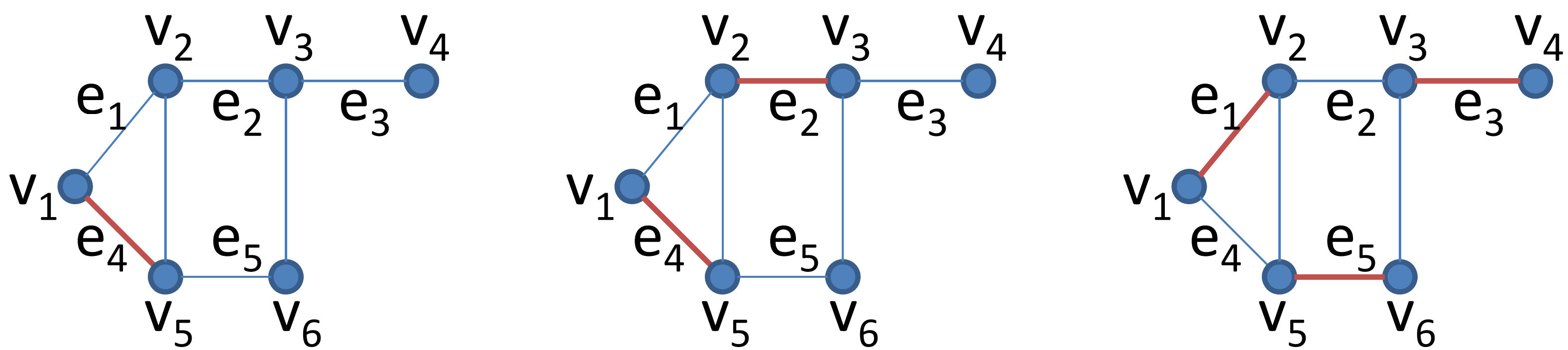
5.2 边独立集与边覆盖集



http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

边独立集

- 边独立集 (edge independent set)
  - 匹配（两两不相邻的边）
- 极大边独立集 (maximal edge independent set)
  - 边数极多（不是任何一个边独立集的真子集）
- 最大边独立集 (maximum edge independent set)
  - 最大匹配（边数最多）
- 边独立数 (edge independence number)
  - α’(G)：最大匹配的势



边独立集与点覆盖集

$\alpha'(K_{2n})$	n	2n-1	$\beta(K_{2n})$
$\alpha'(K_{2n+1})$	n	2n	$\beta(K_{2n+1})$
$\alpha'(C_{2n})$	n	n	$\beta(C_{2n})$
$\alpha'(C_{2n+1})$	n	n+1	$\beta(C_{2n+1})$
$\alpha'(K_{m,n})$	min{m, n}	min{m, n}	$\beta(K_{m,n})$

边独立集与点覆盖集 (续)

- 定理5.2.1 对任何无环边的图G，$\alpha'(G) \le \beta(G)$。

证明：

设G有最小点覆盖集S、最大边独立集M：

  - S是点覆盖集 ⇒ M中的每条边至少有一个端点在S中
  - M是边独立集 ⇒ M中的每条边的端点互不相同

$\Rightarrow \alpha'(G)=|M|\le|S|=\beta(G)$

边独立集与点覆盖集 (续)

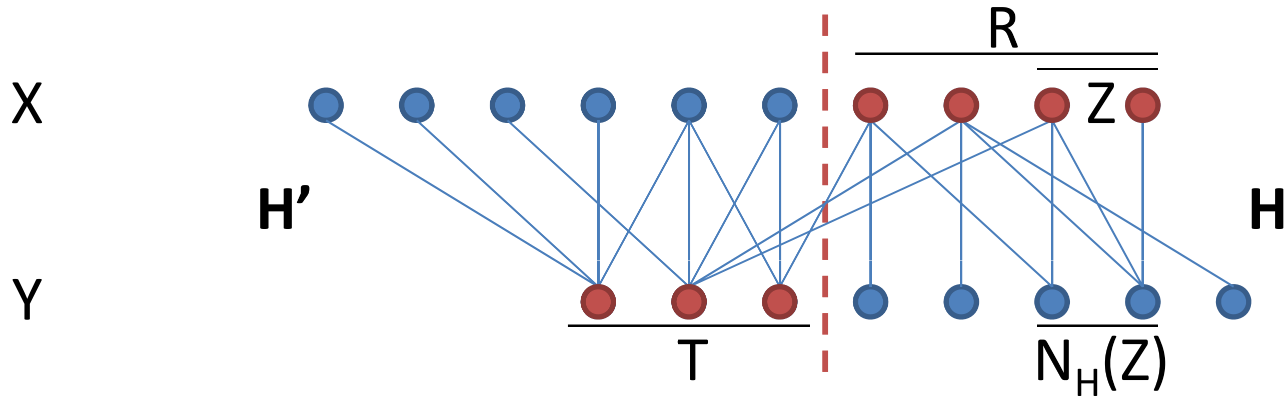
- (引理) 定理3.3.1 二部图X-Y有饱和X的匹配当且仅当$\forall S \subseteq X$，$|N(S)| \geq |S|$。

边独立集与点覆盖集 (续)

- 定理5.2.2 对于二部图G，$\alpha'(G)=\beta(G)$。

证明：

1. 定理5.2.1 $\Rightarrow \alpha'(G)=|M|\le|S|=\beta(G)$
2. 只需证明对于任意给定的最小点覆盖集S，能够构造出势为|S|的匹配。
3. 设$R=S\cap X$，$T=S\cap Y$，$H=G[R\cup(Y\backslash T)]$，$H'=G[T\cup(X\backslash R)]$。
4. $|R\cup T|=|S|$且H和H'不相交 $\Rightarrow$ 只需分别在H和H'中构造出能够饱和R和T的匹配，两者的并即势为|S|的匹配
5. 引理 $\Rightarrow$ H中有饱和R的匹配当且仅当$\forall Z\subseteq R$，$|N_H(Z)|\ge|Z|$ $\Rightarrow$ 只需证明$|N_H(Z)|\ge|Z|$
6. $N_H(Z)$覆盖了所有Z覆盖但未被T覆盖的边 $\Rightarrow T\cup R\cup N_H(Z)\backslash Z$是点覆盖集 $\Rightarrow$ $|T\cup R\cup N_H(Z)\backslash Z|\ge|T\cup R|$ $\Rightarrow$ $|N_H(Z)|\ge|Z|$，得证



边独立数的估计

- 定理5.2.3 设图G无孤立点，则$\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \alpha'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$。

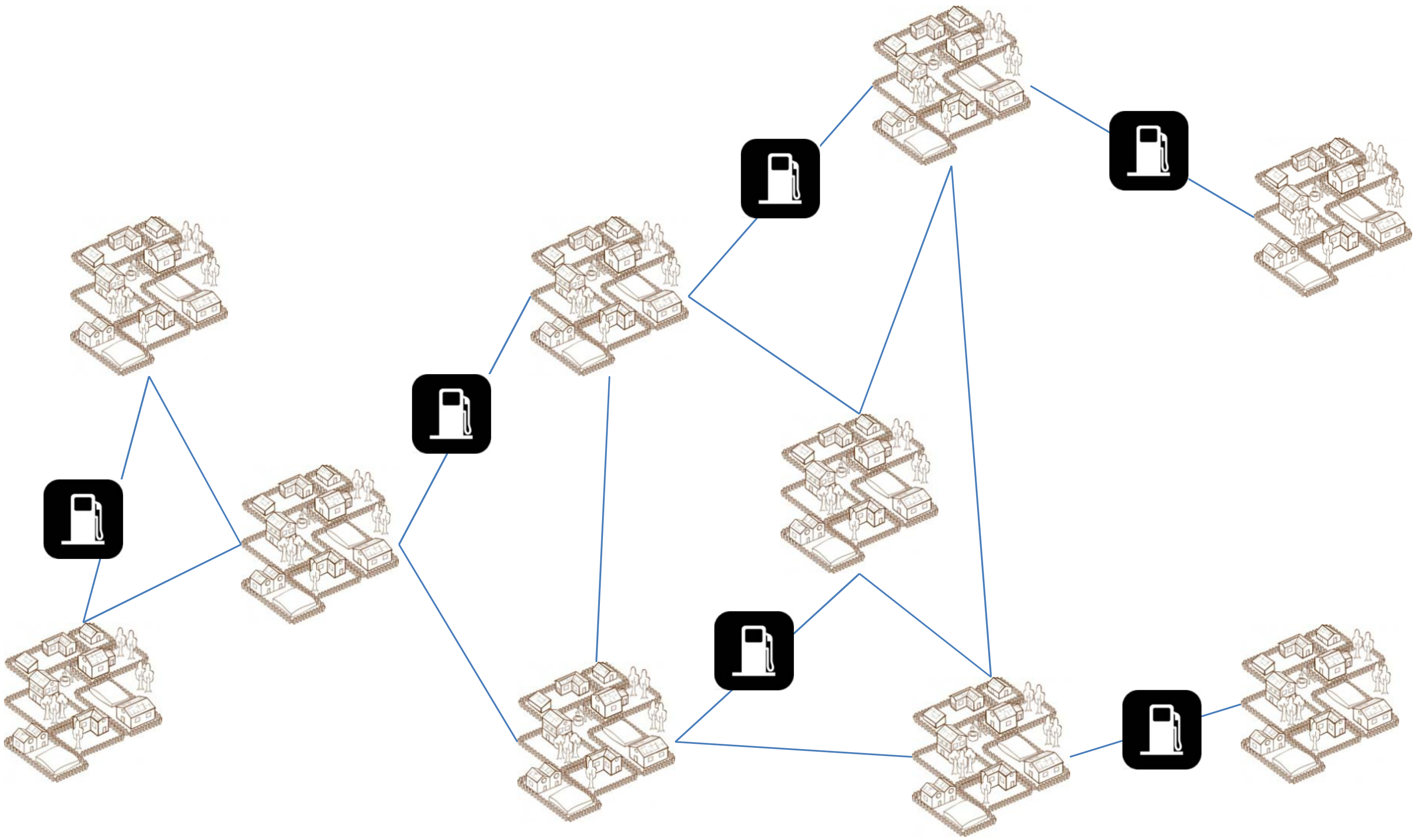
证明：

- 右侧显然。
- 左侧：对ε(G)用数学归纳法证明。
  1. ε=1时，显然成立。
  2. 假设对任何不超过k条边的图都成立。
  3. 设G是有k+1条边的无孤立点的图：
     - 如果G中每条边都有至少一个端点的度为1 ⇒ G的连通分支G_i是星

$$\Rightarrow \alpha'(G) = \sum_i \alpha'(G_i) = \sum_i 1 = \sum_i \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \ge \frac{\sum_i \nu(G_i)}{1+\Delta(G)} = \frac{\nu(G)}{1+\Delta(G)}$$

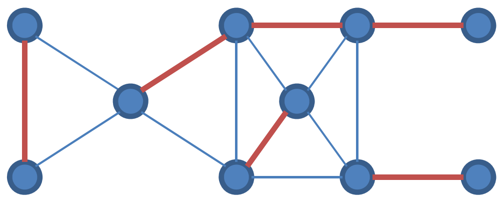
     - 如果G有边e的两个端点的度都>1 ⇒ G-e的连通分支G_i不是孤立点且边数≤k，由归纳假设

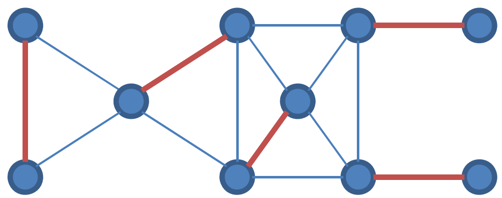
$$\Rightarrow \alpha'(G_i) \ge \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \quad \Rightarrow \alpha'(G) \ge \alpha'(G-e) = \sum_i \alpha'(G_i) \ge \sum_i \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \ge \frac{\sum_i \nu(G_i)}{1+\Delta(G-e)} \ge \frac{\nu(G)}{1+\Delta(G)}$$



边覆盖集

- 边覆盖集 (edge cover)
  - L是G的边覆盖集：∀u∈V(G), ∃v∈V(G), (u, v)∈L
- 极小边覆盖集 (minimal edge cover)
  - 边数极少（任何一个真子集都不再是边覆盖集）
- 最小边覆盖集 (minimum edge cover)
  - 边数最少
- 边覆盖数 (edge cover number)
  - β’(G)：最小边覆盖集的势





边覆盖集与边独立集

- 定理5.2.4 若$\delta(G)>0$，则$\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$。

证明：

1. 基于最大边独立集M，构造势为$\nu(G)-|M|=\nu(G)-\alpha'(G)$的边覆盖集 $\Rightarrow$ $\beta'(G)\leq\nu(G)-\alpha'(G)$
   – 对每个未被M饱和的顶点，向M中增加它关联的一条边 $\Rightarrow$ 构成势为$\nu(G)-|M|$的边覆盖集
2. 基于最小边覆盖集L，构造势为$\nu(G)-|L|=\nu(G)-\beta'(G)$的边独立集 $\Rightarrow$ $\alpha'(G)\geq\nu(G)-\beta'(G)$
   – L是最小边覆盖集 $\Rightarrow$ G[L]的连通分支是星（不可能有一条边的两个端点的度都>1，否则去掉这条边可以得到更小的边覆盖集）$\Rightarrow$ G[L]有$\nu(G)-|L|$个连通分支 $\Rightarrow$ 每个连通分支取一条边构成势为$\nu(G)-|L|$的边独立集

$\Rightarrow$ $\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$

边覆盖集与边独立集 (续)

- 推论5.2.1 设$\delta(G)>0$，则$\alpha'(G)\leq\beta'(G)$，等号成立当且仅当G有完美匹配。

证明：

1. 最大边独立集有$\alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $\nu(G)\geq 2\alpha'(G)$ $\Rightarrow$ 覆盖$\geq 2\alpha'(G)$个顶点至少需要$\geq\alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $\beta'(G)\geq\alpha'(G)$
2. 定理5.2.4 $\Rightarrow$ $\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$ $\Rightarrow$
   – $\alpha'(G)=\beta'(G)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha'(G)=\nu(G)/2$ $\Leftrightarrow$ G有完美匹配

边覆盖集与点独立集

- 定理5.2.5 $\alpha(G)\le\beta'(G)$。

证明：

最大点独立集I中顶点互不相邻 $\Rightarrow$ 至少要用$|I|=\alpha(G)$条边才能覆盖I中所有顶点 $\Rightarrow$ $\beta'(G)\ge\alpha(G)$

边覆盖集与点独立集 (续)

- 定理5.2.6 设G是二部图且$\delta(G)>0$，则$\alpha(G)=\beta'(G)$。

证明：

- 定理5.2.4 $\Rightarrow \alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$
- 推论5.1.4 $\Rightarrow \alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$
- 定理5.2.2 $\Rightarrow \alpha'(G)=\beta(G)$

$\Rightarrow \alpha(G)=\beta'(G)$

边覆盖数的估计

- 定理5.2.9 设图G无孤立点，则 $\left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil \le \beta'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu\Delta(G)}{1+\Delta(G)} \right\rfloor$。

证明：

- 定理5.2.4 ⇒ α’(G)+β’(G)=ν(G) ⇒ β’(G)=ν(G)-α’(G)
- 定理5.2.3 ⇒ $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \alpha'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil \le \beta'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu\Delta(G)}{1+\Delta(G)} \right\rfloor$$

其它各种关系

- 定理5.2.7 设$\delta(G)>0$，则

① |边独立集M|≤|边覆盖集L|；等号成立时M为完美匹配、L为最小边覆盖集。

  - 推论5.2.1 ⇒ $\alpha'(G)\le\beta'(G)$ ⇒ $|M|\le\alpha'(G)\le\beta'(G)\le|L|$
  - $|M|=|L|$ ⇒ $|M|=\alpha'(G)=\beta'(G)=|L|$ ⇒
    - M是最大边独立集、L是最小边覆盖集
    - 由推论5.2.1：$\alpha'(G)=\beta'(G)$ ⇒ G有完美匹配 ⇒ M是完美匹配

② |边独立集M|≤|点覆盖集F|；等号成立时M为最大匹配、F为最小点覆盖集。

  - 定理5.2.1 ⇒ $\alpha'(G)\le\beta(G)$ ⇒ $|M|\le\alpha'(G)\le\beta(G)\le|F|$
  - $|M|=|F|$ ⇒ $|M|=\alpha'(G)=\beta(G)=|F|$ ⇒ M是最大边独立集、F是最小点覆盖集

③ |点独立集I|≤|边覆盖集L|；等号成立时I为最大点独立集、L为最小边覆盖集。

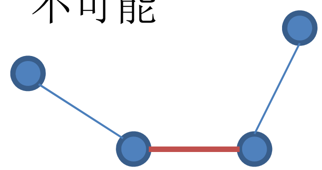
  - 定理5.2.5 ⇒ $\alpha(G)\le\beta'(G)$ ⇒ $|I|\le\alpha(G)\le\beta'(G)\le|L|$
  - $|I|=|L|$ ⇒ $|I|=\alpha(G)=\beta'(G)=|L|$ ⇒ I是最大点独立集、L是最小边覆盖集

其它各种关系 (续)

- 定理5.2.8 设图G无孤立顶点，则$\gamma(G)\le\min\{\alpha(G), \beta(G), \alpha'(G), \beta'(G)\}$。

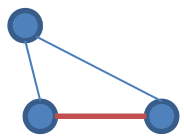
证明：

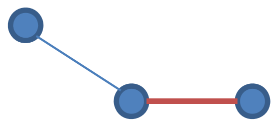
- 定理5.1.10 $\Rightarrow \gamma(G)\le\alpha(G)$
- G无孤立顶点 $\Rightarrow$ 点覆盖集是支配集 $\Rightarrow \gamma(G)\le\beta(G)$
- 从最小边覆盖集的每条边取一个端点构成的集合（可能有重复顶点）是支配集 $\Rightarrow \gamma(G)\le\beta'(G)$
- 从最大边独立集的每条边取一个端点构成的集合是支配集 $\Rightarrow \gamma(G)\le\alpha'(G)$
  - 两个端点有不同的未饱和邻点：形成增广路，与最大边独立集矛盾，不可能
  - 两个端点有相同的未饱和邻点(*)：任取一个端点
  - 一个端点有未饱和邻点、另一个端点没有(#)：取前者



$\Rightarrow$

  - 每个饱和顶点显然被支配（上述每条边都会取一个端点）
  - 每个未饱和顶点，讨论饱和其邻点（必饱和，否则就有更大的边独立集）的边：
    - (*) $\Rightarrow$ 显然被支配
    - (#) $\Rightarrow$ 显然被支配





算法

- 最大边独立集：Edmonds算法
- 最小边覆盖集
  - $\beta'(G)=\nu(G)-\alpha'(G)=\alpha'(G)+(\nu(G)-2\alpha'(G))$
  - 最大匹配 + 每个未饱和点任取一边

- 最大支配集：NP-hard
- 最大点独立集：NP-hard
- 最小点覆盖集：NP-hard

作业

- 5.16 //边独立集
- 5.18 //边独立集与边覆盖集
- 5.20 //边覆盖集