§5-2 牛顿—莱布尼兹公式

前面介绍了定积分的概念，从理论上讲，总可通过和式的极限来确定定积分的值，但实际运算起来是很繁琐的，有时甚至无法计算。本节通过揭示定积分与原函数的关系，将引出计算定积分的一个简便而可行的计算公式——牛顿—莱布尼兹公式.

为了解决这个问题，我们先来介绍积分上限函数的概念及其性质

一、积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数的概念

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，x为$[a,b]$上的一点，不难得知，$f(x)$在部分区间$[a,x]$上的定积分$\int_a^x f(x)dx$存在，这里，x既表示积分的上限又表示积分变量，为明确起见，把积分变量改用另一字母t表示，从而该定积分可表为$\int_a^x f(t)dt$.

显然，对于$[a,b]$上的任一取值x，定积分$\int_a^x f(t)dt$都有唯一确定的值与之对应，因此，$\int_a^x f(t)dt$在区间$[a,b]$上确定了一个以积分上限x为自变量的函数，称之为积分上限函数，通常记为$\Phi(x)$，即$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\le x\le b)$

2. 积分上限函数的性质

积分上限函数具有如下的重要性质

定理1 如果函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\le x\le b)$$

在$[a,b]$上可导，且$\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (a\le x\le b)$

证明 当$x\in(a,b)$时，若自变量在x处取得增量Δx且$x+\Delta x\in(a,b)$，函数$\Phi(x)$相应的增量为

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\cdot\Delta x \text{（积分中值定理）}$$

其中，ξ介于x与$x+\Delta x$之间。于是，$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$

当$x=a$或$x=b$时，同理可证得：$\Phi'_+(a)=f(a)$，$\Phi'_-(b)=f(b)$ 证毕

这个定理的重要意义在于：

⑴肯定了连续函数的原函数必存在；

⑵初步揭示了定积分与原函数的关系,从而预示有可能通过原函数来求得定积分；

⑶给出了积分上限函数的导数公式$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$,并由复合函数的求导法则可推得

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

例1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2dt}{x}$.

解：易知该极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式，故由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t^2dt}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x^2=1$$

例2 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt$ (2) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{2x}\sin t^2\,dt$

解：(1)$\varphi'(x)=\left(\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt\right)'=e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'=-e^{-\cos^2 x}\cdot\sin x$

⑵；因为$\varphi(x)=\int_{x^2}^{2x}\sin t^2\,dt=\int_{x^2}^{0}\sin t^2\,dt+\int_0^{2x}\sin t^2\,dt=\int_0^{2x}\sin t^2\,dt-\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt$

所以，$\varphi'(x)=\left(\int_0^{2x}\sin t^2\,dt\right)'-\left(\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt\right)'=\sin(2x)^2\cdot(2x)'-\sin x^4\cdot(x^2)'$
$=2\sin 4x^2-2x\sin x^4$.

例**3** 设$f(x)$是$[0,+\infty)$内的正值连续函数，证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$
在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

证 因为$F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x t\,f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$

$$=\frac{f(x)\left(\int_0^x xf(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

当$x>0$时，在$[0,x]$上，$f(x)>0$，$(x-t)f(t)\geq 0$，且$(x-t)f(t)\neq 0$，故知
$F'(x)>0$，从而推得$F(x)$在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

二、牛顿—莱布尼兹公式

定理**2** 如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

证 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$为$f(x)$的一个原函数，又$F(x)$是$f(x)$的原函数，因此，$\Phi(x)-F(x)=C$

当$x=a$时，$\Phi(a)-F(a)=C$，又$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$得$C=-F(a)$

当$x=b$时，有$\Phi(b)-F(b)=-F(a)$即$\int_a^b f(t)dt-F(b)=-F(a)$整理即得

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$ 证毕

注：⑴ 上式叫牛顿—莱布尼兹公式，也称为微积分基本公式.

⑵ 在运用该公式时，$F(b)-F(a)$通常记为$\left[F(x)\right]_a^b$或$F(x)\big|_a^b$；

⑶ 该公式对于$a>b$时也适用；

公式表明：一个连续函数在某一区间上的定积分等于它的任何一个原函数在该区间上的增量.这就为定积分的计算提供了一个简便而有效的方法.

例**4** 求$\int_0^1 x^2\,dx$.

解：因为$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$

所以，$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

例**5** 求$\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

解：因为，$\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x^3+\arctan x+C$

所以，$\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\left[x^3+\arctan x\right]_{-1}^{0}=1+\frac{\pi}{4}$

由上可知，利用牛顿—莱布尼兹公式求定积分一般分两步完成，运算熟练后，可合并表示.

例**6** 求$\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx$.

解：$\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\sin x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

例**7** 求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$.

解：因为，
$$\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2 & -2\le x<0\\ x & 0\le x<1\\ x^2 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

所以，$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^2dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{11}{2}$$

例**8** 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & x\in[0,\pi]\\ 0 & x\in(-\infty,0)\cup(\pi,+\infty)\end{cases}$，求$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式.

解：当$0\le x\le\pi$时，$\Phi(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^x=\frac{1}{2}(1-\cos x)$

当$x<0$时，$\Phi(x)=\int_0^x 0\,dt=0$

当$x>\pi$时，$\Phi(x)=\int_0^{\pi}f(t)dt+\int_{\pi}^{x}f(t)dt$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{x}0\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\pi}+0=1$$

所以，
$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x\le\pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$$

习题5-2

1．求由参数表示式$x=\int_0^t\sin u\,du$，$y=\int_0^t\cos u\,du$所确定的函数y对x的导数.

2．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^t dt}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^t-e^{-t})dt}{1-\cos x}$

3．计算下列各函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\sqrt{1+t^2}\,dt$　　(2) $\varphi(x)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

4．计算下列各定积分：

(1) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$　　(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(3) $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx$　　(4) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(5) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{1}{x+1} dx$　　(6) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

(7) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x dx$　　(8) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$

(9) $\int_0^2 f(x)dx$,其中, $f(x)=\begin{cases} x+1 & x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x>1 \end{cases}$.

5．设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0,1) \\ x & x\in[1,2] \end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $[1,2]$ 的表达式.

6．求函数 $\varphi(x)=\int_0^x 6(t^2-t)dt$ 的极值.

7．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\le 0$，试证明：$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$.