§5-5 广义积分

在实际问题中，我们常遇到积分区间为无穷区间，或被积函数为无界函数的积分，前面定积分的概念已经不适用，因此，有必要将定积分作进一步推广，从而产生了广义积分的概念.

一、无穷区间上的广义积分

定义1 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取$b>a$，如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

这时也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；如果上述极限不存在，广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$就没有意义，相应称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散；

类似，若函数$f(x)$在区间$(-\infty,b]$上连续，取$a<b$，如果极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则函数$f(x)$在区间$(-\infty,b]$上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

若极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$存在（或不存在），相应也称$\int_{-\infty}^b f(x)dx$收敛（或发散）；

若函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，且广义积分$\int_{-\infty}^0 f(x)dx$和$\int_0^{+\infty} f(x)dx$都收敛，则函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上广义积分收敛且定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

注：为方便起见，设$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，且广义积分收敛,根据牛顿—莱布尼兹公式，广义积分也可简记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(b)-F(-\infty)=\left[F(x)\right]_{-\infty}^b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty)=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

其中，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

例1 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ (2) $\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ (4) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

解：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0=\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan a=-\frac{\pi}{2}$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$

(4) 因为，$\int xe^x dx=\int xd(e^x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

所以，$\int_{-\infty}^0 xe^x dx=\left[xe^x-e^x\right]_{-\infty}^0==-1-\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-e^x)=-1-\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-e^x)=-1$

例2 计算由曲线$y=e^{-x}$下方，x轴上方

以及y轴右方所定区域的面积(如图5-6所示).

解：如图，任取$b>0$，不难推知，所求面积为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$$

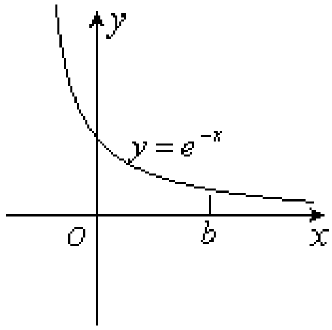

图5－6

例**3**　讨论广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\quad(a>0)$的收敛性.

解：当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_a^{+\infty}=+\infty$；

当$p\neq1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & p>1\end{cases}$.

综上所述，当$p>1$时，该广义积分收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当$p\leq1$时，该广义积分发散.

二、无界函数的广义积分

下面来讨论积分区间有限，而被积函数为无界函数的情形，一般有如下定义

定义**2**　设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续且在点a的右邻域内无界，取$\varepsilon>0$，若极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

存在，则称此极限为函数$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分，仍记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

同时称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；如果上述极限不存在，称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散；

类似，设函数$f(x)$在区间$[a,b)$上连续且在点b的左邻域内无界，取$\varepsilon>0$，若极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

存在，则函数$f(x)$在区间$[a,b)$上的广义积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

同时也称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，否则，称之为发散；

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上除点$c\ (a<c<b)$外连续，且在点c的邻域内无界，如果广义积分$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则函数$f(x)$在区间$[a,b]$上广义积分收敛且定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

否则，就称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

注：

① 定义中涉及到的点（如点c）叫做被积函数的瑕点，故无界函数的广义积分又常称为瑕积分.

② 为表示方便，瑕积分也可以用牛顿—莱布尼兹公式来表示.

以第一种情况为例：$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$

其中，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$F(a)$表示$F(x)$在$x=a$处的右极限，

例**4**　求广义积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

解：因函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在区间$(0,1]$上连续且$f(0+0)=\infty$，所以，根据定义有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=2\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

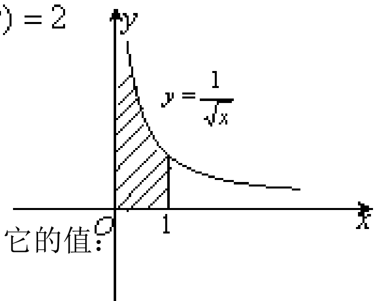

图5－7

这个广义积分值的几何意义是：

由曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$、直线$x=0$、$x=1$与x轴所围成的开口曲边梯形的面积（如图5-7所示）

例**5**　确定下列广义积分的收敛性，如果收敛，则求出它的值：

(1)$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2)$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$

解：

(1)$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$在区间$[0,1)$上连续且$f(1-0)=\infty$，因为

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon}=1$$

所以$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$收敛，其值为1.

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在区间$[-1,1]$上除$x=0$外连续且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$.

因为$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon}=+\infty$，即广义积分$\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx$发散，

所以广义积分$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$发散.

注：瑕积分从表示形式上与定积分没什么两样，因此，今后在计算有限区间上的积分时一定要注意区分，就如此题若忽视了$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，而直接按定积分计算就会得到如下的错误结果

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1=-2$$

例**6**　讨论广义积分$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx$的收敛性.

解：当$q=1$时，$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx=\int_a^b\frac{1}{x-a}dx=\left[\ln(x-a)\right]_a^b=+\infty$；

当$q\neq1$时，$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b=\begin{cases}+\infty & q>1\\ \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & q<1\end{cases}$

因此，当$q<1$时，该广义积分收敛，其值为$\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；当$q\geq1$时，该广义积分发散.

习题5－5

1．下列广义积分是否收敛？若收敛，算出它的值.

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$；　　(2)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$；

(3)$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$；　　(4)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$；

(5) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$；

(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$．

(7) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$；

(8) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx$；

(9) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$；

(10) $\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$．