§5-3 定积分的换元法

牛顿—莱布尼兹公式给定积分的计算提供了一种有效的方法，但它完全依赖于求被积函数的原函数，但原函数有时是很难直接求出来的.为此，我们将引进定积分的另外两种积分方法：换元积分法和分部积分法.

本节介绍定积分的换元积分法.我们先来证明下面的定理.

定理 假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

⑴$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

⑵在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上具有连续导数；

⑶当t在α与β之间变化时，$\varphi(t)$的值不越出$[a,b]$；

那么，$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{1}$$

证 由假设可知，（1）式两边的被积函数都是连续的，因此，等式两边的定积分都存在，假设$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，由牛顿—莱布尼兹公式可得

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

另一方面，记函数$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$，由复合函数的求导法则得

$$\Phi'(t)=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)$$

从而得，$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$
$$=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

从而证得 $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

公式（1）叫做定积分的换元公式，该公式可反过来使用，把（1）式左右两边对调位置，同时把t换成x，而x换成t，可得

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt \tag{2}$$

利用公式（1）或（2）计算定积分的方法叫定积分的换元积分法.它依次相当于不定积分的第二、第一类换元积分法，但运用该公式时应注意下面两点：

⑴作代换后，所得定积分的上、下限要相应换成新变量t的对应值；

⑵求出公式右边被积函数的一个原函数$\Phi(t)$后，不必象计算不定积分那样再把t换成原来变量x的函数，而只需把新变量t的上、下限分别代入$\Phi(t)$中再相减就行了.

例**1** 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx$.

解：因为 $$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

所以$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$$

令$x=2t$，则当$x=0$时，$t=0$；当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=\frac{\pi}{4}$

于是，$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 tdt=\left[\tan t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$$

例**2**求$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$

解：设$x=a\sin t$，则$x=0$时，$t=0$；当$x=a$时，$t=\frac{\pi}{2}$

所以，$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$

$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$

例**3** 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

解：因为在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$\cos x \geq 0$，从而

$\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)} = \sin^{\frac{3}{2}} x\cdot|\cos x| = \sin^{\frac{3}{2}} x\cdot\cos x$

所以，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cdot\cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cdot d(\sin x) = \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$

在此例中，采用的是第一类换元法，由于没有明显地写出新变量t，这时就不能更换积分的上、下限. 实际上，此题也可采用作变量代换来做

令$\sin x = t$，则当$x=0$时，$t=0$；当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cdot d(\sin x) = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$.

例**4** 证明：当$n \geq 0$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$

解： 作代换$x=\frac{\pi}{2}-t$，则当$x=0$时，$t=\frac{\pi}{2}$；当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$

所以，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$

例**5** 证明：若$f(x)$在$[-a,a]$连续，那么

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)dx & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

证：因为，$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

又因为，$\int_{-a}^0 f(x)dx \overset{x=-t}{=} \int_a^0 f(-t)d(-t) = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$

所以，$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x)+f(x)]dx$

若$f(x)$为奇函数，即$f(-x)=-f(x)$，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$；

若$f(x)$为偶函数，即$f(-x)=f(x)$，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

注：运用此例中的结论可简化奇偶函数在关于原点对称的区间上的积分运算**.**

例**6** 求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

解：(1)因为$f(x)=x^3\sqrt{1-x^2}$是奇函数，且积分区间$[-1,1]$关于原点对称，所以，$\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}dx=0$

(2)$f(x)=|\sin x|$为偶函数，同理可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cdot dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cdot dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot dx=[-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

例**7** 设$f(x)$是以T为周期的连续函数，证明：对于任意的实数a，均有

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

证：因为$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$

又$\int_T^{a+T}f(x)dx\overset{令x=T+u}{=\!=\!=}\int_0^a f(T+u)d(T+u)$

$\overset{f(T+u)=f(u)}{=\!=\!=}\int_0^a f(u)du=-\int_a^0 f(x)dx$

所以$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx-\int_a^0 f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

注：利用该结论可简化周期函数的积分，如下例：

例**8** 求$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$.

解：因为$f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$是周期为$\pi$的周期函数，故由例7结论得

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx+\cdots\cdots+\sqrt{2}\int_{99\pi}^{100\pi}|\sin x|dx$$

$$=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|dx=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=100\sqrt{2}[-\cos x]_0^{\pi}=200\sqrt{2}$$

例**9** 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)dx$.

解：$\int_0^2 f(x-1)dx\overset{x=t+1}{=\!=\!=}\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{d(1+x)}{1+x}=\ln(1+e)$$

习题5-3

1．计算下列定积分：

(1)$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx$ (2)$\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

(3)$\int_0^3\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ (4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$

(5)$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (6)$\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

(7) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3 x)dx$　　(8) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$

(9) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$　　(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^3 x dx$　　(12) $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

(13) $\int_2^3\frac{1}{2x^2+3x-2}dx$　　(14) $\int_{-2}^0\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

(15) $\int_{-3}^3\frac{x\cos x}{2x^4+x^2+2}dx$　　(16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$

2．设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$$

3．证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

4．证明:若函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$$