考试座位号________ 课序号________ 任课教师姓名________ 学号________ 姓名________ 专业班级________ 学院________

密 封 线 内 不 得 答 题

昆明理工大学 2014 级 试卷 （A 卷）

考试科目：高等数学A（ 2 ） 考试日期：2015-6-25 命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一、 填空题（每题 4 分，共 40 分）：

1.设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x(x,1)=$________；

2.设 $z=xy+\sin(x+y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________；

3. 曲线 $\begin{cases} y^2=2mx, \\ z^2=m-x \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程为________________；

4. 将二重积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$ 化为极坐标下的二次积分，

则 $I=$________________________；

5. 设空间区域 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le 1$，

则 $\iiint\limits_{\Omega}(z-3)dv=$________________________；

6. L 为连接 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)ds=$________；

7. L 是起点为 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$ 的任意光滑曲线，

则 $\int_l 2y^3xdx+3x^2y^2dy=$________________；

8.设 Σ 为 $z=1$ 上的圆形区域（$x^2+y^2\le 1$），则 $\iint\limits_{\Sigma}(1-xz^2)dS=$________；

9.微分方程 $y'=2xy, y|_{x=0}=1$ 的特解 $y=$________________；

10. 微分方程 $y''-2y'-3y=-(x^2+3)e^x$ 对应的齐次方程的通解是 $Y=$________________________.

二、 计算题（每题 7 分，共 21 分）：

11.设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 所确定，求 du；

12.求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值；

13.求曲面 $z=x^2+y^2-1$ 上平行于 $4x+2y-z=1$ 的切平面方程.

三、 计算题（每题 7 分，共 21 分）：

14. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$，其中 $D: x^2+y^2 \le Rx\ (R>0)$；

15.求微分方程 $y'-2y=e^x$ 的通解；

16. 求微分方程 $y''-y=4xe^x$ 的通解.

四、综合应用题（每题 6 分，共 18 分）：

17.求 $\oint\limits_L (x-5y^3+8)dy+(x^3-y-5)dx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$，取逆时针方向；

18. 计算 $\oiint\limits_\Sigma 2xzdydz+yzdzdx-z^2dyd\cancel{x}$，其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体 $(\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2})$ 表面的外侧；

19. 求由坐标面及平面 $x=1, y=1, 2x+3y+z=6$ 围成立体的体积.

昆明理工大学 2014 级高等数学 A(2)A 卷参考答案及评分细则

一、

1. 1； 2. $1-\sin(x+y)$； 3. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$；

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$；

5. -4π； 6. $\sqrt{2}$； 7. 1； 8. π； 9. $y=e^{x^2}$； 10. $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

二、11. $du=f_xdx+f_ydy+f_zdz$； 2 分

设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，

$$F_x=-3yz,F_y=-3xz,F_z=3z^2-3xy\neq 0$$ 5 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$ 6 分

$$dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy;$$

$$du=(f_x+f_z\frac{yz}{z^2-xy})dx+(f_y+f_z\frac{xz}{z^2-xy})dy.$$ 7 分

12. 解方程组

$$\begin{cases} f_x=4-2x=0, \\ f_y=-4-2y=0, \end{cases}$$

得驻点 $(2,-2)$； $f_{xx}=-2,f_{xy}=0,f_{yy}=-2.$ 4 分

在点 $(2,-2)$ 处，$A=-2,B=0,C=-2,AC-B^2>0$，$A<0$，故 $(2,-2)$ 是极大值点. $f_{极大}(2.-2)=8$ ； 7 分

13. 设切点为 (x_0,y_0,z_0)，抛物面上在切点的法相量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$，3 分

它与平面 $4x+2y-z=1$ 的法相量 $\vec{n_1}=(4,2,-1)$ 平行，故有

$\dfrac{2x_0}{4}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$，得 $x_0=2,y_0=1,z_0={x_0}^2+{y_0}^2-1=4$. 6 分

故所求平面方程为：$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$，

即 $4x+2y-z=6$. 7 分

三、14. $D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\leq\rho\leq R\cos\theta. \end{cases}$

$$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho$$ 4 分

$$=\frac{-1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\theta}d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3(1-\sin^3\theta)d\theta$$

$$=\frac{R^3}{9}(3\pi-4).$$ 7 分

15. $P(x)=-2,Q(x)=e^x$

通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$ 4 分

$=e^{\int 2dx}(\int e^xe^{-\int 2dx}dx+C)=e^{2x}(\int e^{-x}dx+C)$

$=Ce^{2x}-e^x$. 7 分

16 由.特征方程为 $r^2-1=0$，得 $r_1=-1,r_2=1$；故其对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x$； 4 分

因 $\lambda=r_2,m=1,P_1=4x$；故设 $Q(x)=xQ_1(x)=Ax^2+Bx,Q'(x)=2Ax+B$，

$Q''(x)=2A$，将其代入 $Q''+(2\lambda+P)Q'+(\lambda^2+P\lambda+q)Q=4x$ 得

$2A+4Ax+2B=4x$，即 $\begin{cases} 4A=4, \\ 2A+2B=0 \end{cases}$，故 $A=1,B=-1$，

所以特解 $y^*=(x^2-x)e^x$，

通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+(x^2-x)e^x$. 7 分

四、

17. $P(x)=x^3-y-5,Q(x)=x-5y^3+8$ $Q_x=1,P_y=-1$， 2 分

由格林公式得

$$\oint_L(x-5y^3+8)dy+(x^3-y-5)dx=\iint_D 2d\sigma=2\iint_D d\sigma=2\pi R^2$$ 6 分

18. $P=2xz,Q=yz,R=-z^2,P_x=2z,Q_y=z,R_z=-2z$，

由高斯公式得 $\oiint_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^2dydx = \iiint_{\Omega} zdv$ 4 分

Ω 在 xoy 面上的投影 $D: x^2 + y^2 \le 1$,

一):在柱面坐标下 $\iiint_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz = 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho$

$= \dfrac{\pi}{2}$. 6 分

二): 在球面坐标下 $\iiint_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi d\rho = \dfrac{\pi}{2}$.

19. 所谓立体 Ω 在 xoy 面上的投影 $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$,所求体积

$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{6-2x-3y} dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x - 3y) dy$ 4 分

$= \int_0^1 (4\frac{1}{2} - 2x) dx = 3\frac{1}{2}$. 6 分