# 2021级概率论与数理统计 参考答案及评分标准

## 一. 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. $\frac{3}{4}$；　2. 4；　3. $\frac{2}{3}$；　4. 1；　5. $\frac{1}{11}$；

6. $\frac{2}{3}$；　7. $\frac{8}{9}$；　8. 1；　9. $\frac{3}{4}$；　10. $\boldsymbol{P}(2\lambda)$.

## 二、 计算题（共 22 分）

11（10 分）**解：** 设 $\boldsymbol{A}$ 表示工人完成了定额，$\boldsymbol{B}$ 表示该工人参加了培训，则 $\bar{B}$ 表示该工人没有参加培训. 依题意，

已知 $P(\boldsymbol{B})=0.8$，$P(\bar{\boldsymbol{B}})=0.2$，$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})=0.86$，$P(\boldsymbol{A}|\bar{\boldsymbol{B}})=0.35$

（1）由全概率公式

$$P(\boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{B})P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})+P(\bar{\boldsymbol{B}})P(\boldsymbol{A}|\bar{\boldsymbol{B}})=0.8\times0.86+0.2\times0.35=0.7580$$ 5 分

（2）由贝叶斯公式

$$P(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{A})=\frac{P(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})P(\boldsymbol{B})}{P(\boldsymbol{A})}=\frac{0.86\times0.8}{0.758}=0.9077$$ 10 分

12（12 分）**解：**（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b=1$， 3 分

由 $P\{\boldsymbol{X}<\frac{1}{3}\}=P\{\boldsymbol{X}>\frac{1}{3}\},\Rightarrow P\{\boldsymbol{X}<\frac{1}{3}\}=1-P\{\boldsymbol{X}\le\frac{1}{3}\}=1-P\{\boldsymbol{X}<\frac{1}{3}\}$， 6 分

$\Rightarrow P\{\boldsymbol{X}<\frac{1}{3}\}=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{3}}(ax+b)dx=\frac{a}{18}+\frac{b}{3}=\frac{1}{2}$， 8 分

所以：$a=\frac{-3}{2},b=\frac{7}{4}$. 10 分

（2）$P\{\boldsymbol{X}<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{-3}{2}x+\frac{7}{4})dx=\frac{11}{16}$. 12 分

## 三、计算题（共 24 分）

13（12 分）**解：**（1）根据题意，$\boldsymbol{X}\sim E(1)$，$\boldsymbol{Y}\sim U(0,1)$，则其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它;\end{cases}\qquad f_{\boldsymbol{Y}}(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它;\end{cases}$$ 2 分

因为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，则( $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ )的联合密度函数为:

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, 0<y<1 \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$ 5 分

（2）根据题意，所求概率为

$$P(\boldsymbol{X}\le \boldsymbol{Y})=\iint_{x\le y} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-x}dy=e^{-1},$$ 8 分

（3）$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(\boldsymbol{Z})=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x, & 0<z\le 1 \\ \int_{z-1}^z e^{-x}\mathrm{d}x, & z>1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} 1-e^{-z}, & 0<z\le 1 \\ e^{-z}(e-1), & z>1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ 12 分

14（12 分）

**解：**（1）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 1 分

当$x<1$时，$F(x)=0$;

当$x\ge 8$时，$F(x)=1$;

当$1\le x<8$时，

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{3.\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1$$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \sqrt[3]{x}-1 & 1\le x<8, \\ 1, & x\ge 8. \end{cases}$$ 5 分

设$G(y)$是$Y=F(X)$的分布函数.

当$\mathrm{y}\le 0$时，$\mathrm{G}(y)=0$;

当$\mathrm{y}\ge 1$时，$\mathrm{G}(y)=1$;

当$0<\mathrm{y}<1$时，

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(\mathrm{y}) &= \mathrm{P}(Y\le y)=P(F(X)\le y) \\ &= P\left\{\sqrt[3]{X}-1\le y\right\}=P\left\{X\le (y+1)^3\right\} \\ &= F_X\left((y+1)^3\right)=y \end{aligned}$$

10 分

$$\therefore G(y)=\begin{cases} 0, & \mathrm{y}<0, \\ \mathrm{y} & 0\le y<1, \\ 1, & \mathrm{y}\ge 1. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

12 分

**四、综合题（共 14 分）**

**15.（14 分）**

$$(1)\text{由}1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=A\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{A}{12}(e^{-3x}\Big|_0^{+\infty})(e^{-4y}\Big|_0^{+\infty})$$

$$\text{得}:A=12$$ 2 分

（2）$X$ 的边缘概率密度为

当 $x>0$，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\infty}12e^{-(3x+4y)}dy=3e^{-3x}$， 4 分

当 $y>0$，$f_Y(y)=\int_0^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^{\infty}12e^{-(3x+4y)}dx=4e^{-4y}$， 6 分

可知边缘分布密度为：$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\0, & \text{其它},\end{cases}$ 7 分

$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\0, & \text{其它},\end{cases}$ 8 分

$\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 10 分

$\therefore X$ 和 $Y$ 是否相互独立

（3）$P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy$

$=(e^{-3x}\big|_0^1)(e^{-4y}\big|_0^2)=(e^{-3}-1)(e^{-8}-1).$ 14 分