昆明理工大学2012级《高等数学》A（2）试卷（A卷）参考答案 及评分细则

一、（每小题4分，共40分）

1.e，　2.$dx+2\ln 2dy$，　3.$x=t+2, y=4, z=t+5$，4.$(x-1)+2(y-2)-3(z+3)=0$，5.$\frac{2}{3}\pi$，

6.-4π，　7.$4\pi a^4$，　8.0，9.$(c_1+c_2x)e^{2x}$（c_1,c_2为取定的常数），10.$c_1x+c_2x^2+1$。

二、（每小题8分）

1. 解：原式$=\iint\limits_D r^2 drd\theta$

$=\int_0^\pi d\theta\int_{a\sin\theta}^a r^2dr+\int_\pi^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr$ ——————6分

$=\frac{2}{3}a^3(\pi-\frac{2}{3})$ ——————8分

2. 解：$V=\iiint\limits_\Omega dv=\iiint\limits_\Omega r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr$ ——————6分

$=\pi a^3$ ——————8分

3. 解：补充$\Sigma':z=0$　$(x^2+y^2\le a^2)$取下侧，则

$\iint\limits_\Sigma=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}-\iint\limits_{\Sigma'}$ ——————4分

$=\iiint\limits_\Omega 3dv-0=2\pi a^3$ ——————8分

三、解：设$F(x,y,z)=x-y-z+xe^z$， ——————2分

$F_x=1+e^z, F_y=-1, F_z=-1+xe^z$， ——————6分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1+e^z}{1-xe^z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-1}{1-xe^z}$ ——————8分

四、解：设x,y,z分别是长方体的长、宽、高，则问题转化为在条件

$2xy+2xz+2yz-a^2=0\ (x>0,y>0,z>0)$之下求$V=xyz$的最大值.

作函数$L=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2)$ ————2 分

解方程组$\begin{cases} L_x = yz+2\lambda(y+z)=0 \\ L_y = xz+2\lambda(x+z)=0 \\ L_z = xy+2\lambda(x+y)=0 \\ L_\lambda = 2xy+2xz+2yz-a^2=0 \end{cases}$

即得

$$x=y=z=\frac{a}{\sqrt{6}}。$$ ————7 分

依据题意，最大值必存在，故$V=\dfrac{a^3}{6\sqrt{6}}$为最大体积. ————8 分

五、解：$P=x^2-y,Q=-x-\sin^2 y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ —4 分

故积分与路径无关

$$\int_L=\int_{(0,0)}^{(1,1)}=\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy$$

$=-1\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sin 2}{4}$ ————10 分

六、解：$f(1)=1$ ————2 分

等式两端对x求导得：$f'(x)=\dfrac{f(x)}{f^2(x)+x}$

令$y=f(x)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y^2+x}\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y$ ————6 分

其通解为 $x=y^2+cy$，$y(1)=f(1)=1\Rightarrow c=0$

故$x=y^2=f^2(x)\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$. ————10 分