2017 级线性代数（期中卷）参考答案

一、填空题：

1、18　2、$\dfrac{5}{2}$　3、0　4、$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$　5、3　6、$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7、$-\dfrac{16}{3}$　8、2　9、 $a\neq-\dfrac{1}{2}$且$a\neq 1$　10、$\dfrac{1}{2}(A+2E)$

11．计算$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

解： 从最后一行开始，后行减去前行

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{c_i-c_1}{\underset{i=2,\cdots,5}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 0 & -5 & 0\\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0\\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{5}c_i}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=3\times(-5)^4=1875.$$（10 分）

12. **解**　利用行列式展开定理，构造一个等值的$n+1$行列式，其中第一列元素根据行列式的特点确定，即

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & x_1+y_1 & x_1 & \cdots & x_1\\ x_2 & x_2 & x_2+y_2 & & x_2\\ \vdots & & & & \vdots\\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n+y_n\end{vmatrix}\overset{c_j+(-1)\cdot c_1}{\underset{j=2,3,\cdots,n+1}{=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ x_1 & y_1 & 0 & \cdots & 0\\ x_2 & 0 & y_2 & & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ x_n & 0 & 0 & \cdots & y_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_1+\frac{1}{y_{i-1}}\cdot c_i}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & y_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & y_n \end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i})y_1y_2\cdots y_n .$$（10 分）

13. **解**　由题设

$$a_{11}=2, a_{12}=m, a_{13}=k, a_{14}=3;$$

$$M_{11}=1, M_{12}=1, M_{13}=1, M_{14}=1;$$

$$A_{31}=3, A_{32}=1, A_{33}=4, A_{34}=2,$$

则有 $A_{11}=1, A_{12}=-1, A_{13}=1, A_{14}=-1$．据行列式展开定理及其推论有

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=1 \\ a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0 \end{cases},$$（8 分）

即

$$\begin{cases} 2\times1+m\times(-1)+k\times1+3\times(-1)=1 \\ 2\times3+m\times1+k\times4+3\times2=0 \end{cases}.$$

解得 $\begin{cases} m=-4 \\ k=-2 \end{cases}$.（10 分）

14. **解**　因为 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4$，所以 $AA^*=A^*A=4E$.

用 A 左乘表达式 $A^*X=A^{-1}+2X$ 的两边，得 $4X=E+2A$，（5 分）

从而

$$X=(4E-2A)^{-1}=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$（10 分）

15. **解**　因为方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$，所以当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程组有唯一解.（4 分）

又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda&1+\lambda&1\\ \lambda^2&1&1+\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\ 1&\lambda&1\\ 1&\lambda^2&1+\lambda\end{vmatrix}=2\lambda^2-\lambda;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\ 1&1+\lambda&\lambda\\ 1&1&1+\lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2-\lambda$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-\lambda^2+2}{\lambda(\lambda+3)}=;x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}=;x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$.（10 分）

16．**证明**　(1) 设 $|A|=0$，若 $A=O$，则 $A^*=O$，当然有 $|A^*|=0$；若 $A\neq O$，则可以利用等式 $AA^*=AA^T=|A|E$ 得到 $A^*A=O$，考虑齐次线性方程组 $A^*X=O$，由于 $A^*A=O$，且 $A\neq O$，故方程组 $A^*X=O$ 有非零解，从而有 $|A^*|=0$.（5 分）

(2) 由（1）只要证明 $|A|\neq 0$ 的情形．事实上，当 $|A|\neq 0$ 时，由 $AA^*=AA^T=|A|E$ 可得 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，两边同除以 $|A|$，则有结论 $|A^*|=|A|^{n-1}$ 成立.（10 分）