昆明理工大学试卷（A）

勤奋求学 诚信考试 .

考试科目：线性代数　考试日期：2022年5月 日　　命题教师：

题号	一	二	三	四	总分
评分	36	15	35		86
阅卷人					

一、填空题（每小题4分，共40分）

（1） 设A是3阶方阵，且$|A|=\frac{1}{2}$，则$|(2A)^{-1}-5A^*|=$ -16 .

$|(2A)^{-1}-5A^*|=\frac{|(2A)^{-1}-5A^*||A|}{|A|}=\frac{|\frac{1}{2}A^{-1}A-5A^*A|}{|A|}=2|\frac{1}{2}E-5|A|E|=2|\frac{1}{2}E-\frac{5}{2}E|=2|-2E|=-16$

（2）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$为线性 无 关的向量组.

（3）设$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$为二阶单位阵，且满足$BA=B+2E$，则$|B|=$ 2 .

$B(A-E)=2E$

$|B(A-E)|=|2E|$

$|B|\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=4$

（4）设$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&t&0\\-2&0&t\end{pmatrix}$，则当$t$满足条件 $t\neq0$且$t\neq4$ 时，$R(A)=3$.

$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&t&0\\-2&0&t\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&t&t\\0&t&t-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&t&t\\0&0&t-4\end{pmatrix}$

（5）设A是4×3矩阵，$r(A)=2$，又$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则$r(AB)=$ 2 .

$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $r(B)=3$

满秩 $\Rightarrow r(AB)=r(A)=2$

（6）设$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$PA=$ $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a&b&c\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$

（7）设向量组$\alpha_1=(1,1,2)^T,\alpha_2=(2,2,3)^T,\alpha_3=(0,-1,\lambda)^T$线性无关，则$\lambda$应满足条件 $\lambda\in R$.

（8）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$是$p$维向量组，若$p<m$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$是线性 相 关的向量组.

（9）假设n阶方阵A满足$A^2=A$，则$r(A)+r(A-E)=$ n .

（10）已知$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix}-2a_{11}&-2a_{13}&-2a_{12}\\-2a_{21}&-2a_{23}&-2a_{22}\\-2a_{31}&-2a_{33}&-2a_{32}\end{vmatrix}=$ ~~-16~~ 16.

$=(-2)^3\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

二、计算题（20 分）

11. （10 分）计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix}.$$

解：$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_4 \\ r_4-r_3}]{r_2-r_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \\ 0 & 0 & x & -x \end{vmatrix} \Rightarrow D=\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & -x & x \\ 0 & x & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & x \\ x & -x \end{vmatrix}$

$\therefore D=\begin{vmatrix} -x & x \\ x & -x \end{vmatrix}=(-x)^2-x^2=0$

5

12. （10 分）假设矩阵 X 满足 $\underline{AXA=AXB+E}$，且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求 X.

解：$AXA=AXB+E \Rightarrow AXA-AXB=E$

$AX(A-B)=E$

$\therefore A^{-1}AX(A-B)=A^{-1}E$

$\therefore X(A-B)=A^{-1}$

$X(A-B)(A-B)^{-1}=A^{-1}(A-B)^{-1}$

$\therefore X=A^{-1}(A-B)^{-1}$

由题可知

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

三、解答题（25 分）

13.（10 分）假设方阵 A 满足 $A^3-2A-6E=O$，证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$.

证明: $A^3-2A-6E=0$ $\qquad (A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+2E)$.

$\because A^3-2A+4E=(A+2E)(A^2-2A+2E)$

$\therefore A^3-2A+4E=10E$

即 $(A+2E)\frac{1}{10}(A^2-2A+2E)=E$

$\therefore A+2E$ 可逆

14（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\2&-2&-1&-1\\3&1&2&0\end{pmatrix}$

（1）写出 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；（2）判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性;；

（3）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个最大无关组；（4）将其余向量用最大线性无关组表示.

解:(1) $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$

$\alpha_2=(2,1,-2,1)^T$

$\alpha_3=(1,2,-1,2)^T$

$\alpha_4=(1,0,-1,0)^T$

(2) 线性无关

(3) ~~[illegible]~~ $\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\2&-2&-1&-1\\3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\3&0&0&0\\3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&-1&-2&0\\3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$

$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&-5&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+5r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&9&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}$

$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&9&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad\therefore r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4])=3$

10

四、综合题（15 分）

15. （10 分）设 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，求：

（1）D 中第三行元素代数余子式的和：$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$；

（2）D 中第四行元素余子式的和：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解：(1) $\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\1&1&1&1\\5&3&-2&2\end{vmatrix}=A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0$

(2) $M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56$，$M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$

$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42$，$M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14$

$\therefore M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-56+0+42-14=-28$.

16. （5 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，试证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

证明：$\because$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

$\therefore$ 存在 x_1,x_2,x_3 使得

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ （其中 x_1,x_2,x_3 不全为0）

$\therefore x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+0\cdot x_4=0$

$\because$ 上式的非0解为 $x_1,x_2,x_3,0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.