昆明理工大学 2009 级线性代数 A 卷 参考答案及评分标准

一 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $(A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$　　2. 2　　3. 10^4　　4. $A^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$　　5. 3　　6. $t=3$

7. 线性相关　　8. $X=K(\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2)=K\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, K 为任意常数　　9. $t=2$　　10. 18

二（10 分）

解 $A=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}$ **。。。5 分**

$=-\begin{vmatrix}2&2&2\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=-4$ **。。。10 分**

三（10 分）

解 因 $AX+E=A^2+X\Rightarrow(A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E)$ **。。。4 分**

而 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　$|A-E|\neq 0$　$A-E$ 可逆。 **。。。7 分**

故 $X=(A+E)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ **。。。10 分**

四 (16 分)

解 方程的系数行列式 $A=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1 & 1\\ \lambda+2 & \lambda & 1\\ \lambda+2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ **。。。5 分**

(1) 当 $\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -2$ 时 $|A|\neq 0$，方程组有唯一的解。 **。。。7 分**

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，原方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$R(A)=2<R(B)=3$ 无解 **。。。10 分**

(3) 当 $\lambda=1$ 时

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(B)=1$ **。。。13 分**

方程组有无穷解 $\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3\\ \quad x_2=x_2\\ \quad x_3=x_3\end{cases}$

通解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $(C_1,C_2\in R)$ **。。。16 分**

五 (15 分)

解（1） A 的列向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ **。。。5 分**

(2) $A\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&-6&-3&-3\\0&-5&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&9&-3\\0&0&9&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&0\\0&0&9&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=3<4$ 故 向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 线性相关 **。。。10 分**

(3) 由(2)可知 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 的秩 $=R(A)=3$

一个最大线性无关组为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 或 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ **。。。15 分**

六.(15 分)

解 (1) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ **。。。3 分**

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)$

令 $|A-\lambda E|=0$ 得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ **。。。6 分**

对 $\lambda_1=1$,解 $\left(A-E\right)\vec{X}=\vec{0}$

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\\x_3=x_3\end{cases}$ 基础解系 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 特征向量 $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},C\neq0.$ **。。。8 分**

对 $\lambda_2=2$，解 $(A-2E)\vec{X}=\vec{0}$

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$ 基础解系 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 特征向量 $C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},C\neq 0.$ **。。。10 分**

对 $\lambda_3=5$，解 $(A-5E)\vec{X}=\vec{0}$

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}$ 基础解系 $\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 特征向量 $C\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},C\neq 0.$ **。。。12 分**

（3）A 的三个特征值不同，故 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 必两两正交.

取 $\vec{p}_1=\dfrac{\vec{\xi}_1}{\|\vec{\xi}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. $\vec{p}_2=\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{p}_3=\dfrac{\vec{\xi}_3}{\|\vec{\xi}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{p}=(\vec{p}_{1,}\vec{p}_{2\ ,}\vec{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\dfrac{-1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ p 为正交阵，

令正交变换 $X=PY$. 则 $f={y_1}^2+2{y_2}^2+5{y_3}^2$ **。。。15 分**

七、（4 分）

证明：由矩阵特征值的定义，若 A 得特征值为 λ，则有 $|A-\lambda E|=0$ **。。。2 分**

因 $|A-(-1)E|=|A+E|=|A+AA^T|=|A|\cdot|E^T+A^T|$

$=|A|\cdot|(A+E)^T|=-|A+E|\Rightarrow|A+E|=0$

故 $\lambda=-1$ 是 A 的特征值 **。。。4 分**