2020级线性代数（A）卷

参考答案及评分标准

一，填空题（每小题4分，共20分）

1. -1，　2. 30，　3. $\dfrac{27}{2}$，　4. $\boldsymbol{A}$，　5. 3，　6. 12，　7. 2，

8. 1，　9. $\begin{pmatrix} 1 & 4042 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，　10. $-1<\boldsymbol{t}<1$.

二．计算题（每小题10分，共20分）

11.解：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$ 4分

$$=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b & b \\ 1 & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$ 8分

$=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.　　10分.

12.（10分）解：由 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{C}$，得：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$.　　2分

计算 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　4分

计算 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.　　6分

$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　10分

三．解答题（共22分）

13.（10分）解：将向量组按列写成矩阵 $\boldsymbol{B}$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\4&1&2&1&3\\2&5&4&-1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$ 1 分

（1）将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行行初等变换化为阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\4&1&2&1&3\\2&5&4&-1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\0&3&2&3&-1\\0&0&0&-6&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$ 5 分

（每进行一次初等行变换，得 1 分，但总得分不超过 3 分。）

向量组 $\boldsymbol{A}$ 的极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. 7 分

（2）用最大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$$ 10 分

14.（12 分）解：系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&a\\2&0&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-2&a+1\\0&-2&-a+2\end{vmatrix}=4a-2$$ 3 分

（1）当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，线性方程组有唯一解. 5 分

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 做初等行变换

$$(\mathbf{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&-1&\frac{1}{2}&-1\\2&0&\frac{-1}{2}&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&\frac{3}{2}&-1\\0&-2&\frac{3}{2}&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&\frac{3}{2}&-1\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}$$ 7 分

（2）当 $a=\frac{1}{2}$ 且 $b\neq-1$ 时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=2,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$. 线性方程组无解. 9 分

（3）当$a=\dfrac{1}{2}$且$b=-1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & \dfrac{3}{2} & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

此时方程组有无穷多组解. 10 分

其通解为 $\boldsymbol{x}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)^T+k(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},1)^T$ （k为任意常数） 12 分

四．综合题（共 18 分）

15.（12 分）解：（1）二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 2 分

（2）$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(8-\lambda)(\lambda+1)^2$ 4 分

$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$-1,8$. 5 分

当$\lambda=-1$时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$的属于特征值-1的特征向量是$\xi_1=(-1,2,0)^T$， $\xi_2=(1,0,-1)^T$ 6 分

当λ=8时，

$$\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的属于特征值 8 的特征向量；$\xi_3=(2,1,2)^T$，， 7 分

（3） 将A的属于特征值-1 的特征向量$\xi_1=(-1,2,0)^T,\xi_2=(1,0,-1)^T$

施密特正交化：

$\beta_1=\xi_1=(-1,2,0)^T$，

$\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5},-1)^T$

然后单位化 $\boldsymbol{P}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)^T,\boldsymbol{P}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=(\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{-\sqrt{5}}{3})^T$，

将 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 8 的特征向量单位化 $\boldsymbol{P}_3=\frac{(2,1,2)^T}{|(2,1,2)^T|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$

得到正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{-\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 11 分

做正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$为标准形：$-y_1^2-y_2^2+8y_3^2$ 12 分

16.（6 分）解：由于实对称矩阵的特征向量具有性质：属于不同特征值的特征向量是正交的。这样特征值 -2 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)^T$

满足 $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=0\\ 2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$

这样得到特征值 -2 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,2)^T$ 2 分。

由 $\boldsymbol{A}$ 于可以对角化，且令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 4 分

故

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 6 分