

昆明理工大学 2005 级《线性代数》试卷

(A 卷) (2006 年 6 月 16 日)

一	二	三	四	五	六	总分

一. 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

(1) 设有 4 阶方阵 A 、 B 且 $|A|=2$ 、 $|B|=1$, 则 $||A|B|$ = _____。(2) 设 A 、 B 、 C 为同阶方阵, 且 $AB=AC$, 则当 $|A|$ _____ 时, 必有 $B=C$ 。(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $PA =$ _____(4) $(A-E)^{-1}A - (A-E)^{-1} =$ _____。(E 为与 A 同阶的单位矩阵)(5) 设 A 、 B 为 3 阶方阵, A 等价于 B 且 $|B| \neq 0$, 则 $R(A)$ _____。(6) 设向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2)^T$ 、 $\vec{\alpha}_2 = (2, 3, 3)$ 、 $\vec{\alpha}_3 = (0, -1, \lambda)$ 线性无关, 则 λ 应满足条件 _____。(7) 设有齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$, A 是 $m \times n$ 矩阵, $R(A) = r$, 且 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_k$, 是方程组的一个基础解系, 则 $k =$ _____; 又当 $r =$ _____ 时方程组只有零解。(8) 若 A 为正交矩阵, 则 $|A| =$ _____。

(9) 设 A 为 n 阶方阵, A 与对角方阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 则 A 的 n 个特征值为_____。

(10) 设 $\lambda = 3$ 是方阵 A 的一个特征值, 则方阵 $\frac{1}{2}A^2 + E$ 必有一个特征值为_____。

二. (8 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

三. (12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX = B$ 。

四、 (18 分) 设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = -2 \\ 4x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

问当 λ 为何值时方程组有唯一解；无解；有无穷多组解？在有无穷多组解时求它的通解。

五. (12 分) 已知向量组 $\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$;

(1) 求向量组的秩; (2) 判别向量组的线性相关性; (3) 求向量组的一个最大无关组. (4) 用最大无关组表示不属于最大无关组的向量。

六. (20 分) 设有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求矩阵 A 的二次型 f ; (2) 求 A 的特征值和特征向量; (3) 求一个正交相似变换矩阵 P , 将 A 化为对角矩阵; (4) 试问 f 是否是正定二次型。

