

昆明理工大学试卷（A）

勤奋求学 诚信考试

考试科目：线性代数 考试日期：2021年6月30日 命题教师：外校专家

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一. 填空题（每小题4分，共40分）

1. 已知4阶行列式 D 中第1行元素依次为 $1, 3, a, b$ ，第2行元素依次为 $2, 0, b, a$ ，第3行元素对应的代数余子式依次为 $3, -2, 1, 2$ ，则 $a + b =$ _____.

2. 设3阶方阵 A 有特征值 $1, 2, 4$ ， E 为3阶的单位矩阵，则 $|A + E| =$ _____.

3. 设3阶矩阵 A 的行列式 $|A| = 2$ ， A^* 是它的伴随矩阵， A^{-1} 是它的逆矩阵，则 $|A^* + A^{-1}| =$ _____.

4. 设 n 阶方阵 A 和 B 满足 $A^2 + 2A - E = 0$ ， E 为 n 阶的单位矩阵，则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 10 \\ 2 & 5 & a & -1 \\ 1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ 的秩为2，则 $a =$ _____.

6. 设向量组 $(1, 0, 1), (-2, 1, 3), (2, 2, a)$ 线性相关，则 $a =$ _____.

7. 设 P 为3阶可逆矩阵. 3阶矩阵 A 的秩是2，则 $r(AP^3) =$ _____.

8. 设 A, B 均为3阶矩阵，其中矩阵 A 的三个特征值是 $1, 1, a$ ，矩阵 B 为可逆矩阵，并且 $AB = B$. 则 $a =$ _____.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $A^{2021} =$ _____.

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2tx_2x_3$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围是_____.

二 计算题 (20 分)

11. (10 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$

12. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

矩阵 X 满足 $AXB = XB + C$, 求 X .

三. 解答题 (22 分)

13. (10 分) 设 4 维向量组

$$A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求向量组 A 的一个最大无关组; (2) 将其余向量用该最大无关组线性表示.

14. (12 分) 当 a 为何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = -1 \\ 2x_1 - ax_3 = b \end{cases}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解? 在有无穷多解时, 求其通解.

四. 综合题 (18 分)

15. (12 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(1) 求二次型的矩阵 A ; (2) 求 A 的特征值和特征向量;

(3) 求一个正交变换 $x = Py$, 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形.

16. (6 分) 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 $1, -2, 4$. 其中特征值 1 的特征向量是 $\alpha_1 = (2, 1, -2)^T$, 特征值 4 的特征向量是 $\alpha_2 = (2, -2, 1)^T$. 求矩阵 A .