2017 级线性代数试卷 A 参考答案与评分细则

一、填空题：1. -12　2. $4/3$　3. -3　4. $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　5. $-\frac{3}{2}$　6. $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

7. $n-1$　8. -3　9. 6　10. $t>2$

二、计算题：

11. 原 式 $\overset{\text{各行加到第一行}}{\underset{\text{再提出}x+2a}{=\!=\!=\!=}}(x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & x \\ x & a & 0 & a \\ a & x & a & 0 \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{(4\ 分)}}$ $(x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 & x-a \\ 0 & a-x & -x & a-x \\ 0 & x-a & 0 & -a \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{(6\ 分)}}$

$(x+2a)\begin{vmatrix} -a & 0 & x-a \\ a-x & -x & a-x \\ x-a & 0 & -a \end{vmatrix} \equiv -x(x+2a)\begin{vmatrix} -a & x-a \\ x-a & -a \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{(9\ 分)}}$ $x^2(x^2-4a^2)$ (10 分)

12. 易得 $|A|=2$ (2 分) $A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$，于是 $AA^*=2E$ (5 分)

从而 $A(A^*X)=A(2A^{-1}-2X)=2E-2AX=2EX=2X$，即 $(A+E)X=E$ (8 分)

故 $X=(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (10 分)

三、解答题：

13. $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2分)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (7 分)

于是 $R(A)=3$，向量组线性相关， (8 分) 由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 知 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ 为一个最大无关组. (10 分)

14. $(\mathbf{Ab})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-3 & -2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{(2分)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & -1 & b \end{pmatrix}$

$$\dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a+b \end{pmatrix} \qquad (6\text{分})$$

（1）若$1-a\neq 0$或$a\neq 1$，方程组有唯一解；　(8 分)

（2）若$1-a=0$而$2-a+b\neq 0$，即$a=1,b\neq -1$，$R(\mathbf{A})=2,R(\mathbf{Ab})=3$，方程组无解；　(10 分)

（3）若$1-a=0$且$2-a+b=0$，即$a=1,b=-1$，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{Ab})=2<3=n$，方程组有无穷多解，这时

$$(\mathbf{Ab}) \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -x_3+1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (12\text{分})$$

四、综合应用题：

15. （1）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$，　(2 分)　$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{取}\lambda=1}{=\!=\!=} 4-a^2=0$，

故$a=2$．　(4 分)

（2）当$\lambda=1$时，$(A-E)x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为$k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,;　(6 分)

当$\lambda=2$时，$(A-2E)x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为$k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　(8 分)

当$\lambda=5$时，$(A-5E)x=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为$k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(10 分)

故取取$P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则令$x=Py$，可将二次型化为标准形. (12 分)

16. 由$A(A-E)=2E$或$A\cdot\dfrac{A-E}{2}=E$知$|A|\neq 0$，故A可逆且$A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$；　(2 分)

又由$|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$知$A+2E$可逆，　(4 分)，再由已知得$A^2-A-6E=-4E$，即$(A+2E)\cdot\dfrac{A-3E}{-4}=E$，得到　$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3E)$．　(6 分)