昆明理工大学2018级高等数学A(1)试题A卷参考答案及评分细则

一、填空题（每题4分，共40分）

1.10； 2. 8；3. 2；4. $f'(e^{\sin x})e^{\sin x}$ ；5. $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+o(x^3)$；6. $(-\frac{1}{2},e^{\operatorname{arccot}\frac{-1}{2}})$；

7. $y=4x-2$；8. $\arcsin^2 x+C$；9.发散；10. $p>1$.

二、（每题6分，共18分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$. 6分

12．解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{2x}(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\arctan^2 2x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\dfrac{\pi^2}{2}$. 6分

13．解：方程两边对x求导，得

$y+xy'+\frac{1}{y}y'=3y^2y'$， $y'(1)=1$ 4分

所求法线的斜率$k=-\dfrac{1}{y'(1)}=-1$，

所求的法线方程为$y-1=-(x-1)$，

即$x+y=2$. 6分

三、（每题6分，共18分）

14．解：$\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=2\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ 令$x=a\sin t$

$=2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\dfrac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\dfrac{a^4\pi}{8}$. 6分

15．解：$\int 8x\cos^2 xdx=\int 4x(1+\cos 2x)dx$

$=2x^2+\int 2xd\sin 2x=2x^2+2x\sin 2x-\int\sin 2xd2x$

$=2x^2+2x\sin 2x+\cos 2x+C$. 6分

16. 解： $n=-1,1-n=2$ ， $y^2=e^{-\int 2xdx}[\int 2xe^{\int 2xdx}dx+C]$

$=e^{-x^2}(e^{x^2}+C)=Ce^{-x^2}+1$. 6 分

四、（每题 8 分，共 24 分）

17. 解：对应的齐次方程的特征方程为$r^2-2r+1=0$ ， $r_1=r_2=1$，

对应的齐次方程的通解为$Y=(C_1+C_2x)e^x$； 4 分

由 $f(x)=6xe^x$ 得 $m=1,P_1(x)=6x,\lambda=1$ ，因 $\lambda=r_1=r_2$ ，

故设$Q(x)=x^2Q_1(x)=x^2(Ax+B)=Ax^3+Bx^2$ ，

$Q'=3x^2A+2xB,Q''=6xA+2B$ ，

代入$Q''+(2\lambda+p)Q'+(\lambda^2+\lambda p+q)Q=P_m(x)$

得$6A=6,2B=0$ ，$A=1,B=0$ ，原方程的特解 $y^*=x^3e^x$ ，

通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x^3e^x$. 8 分

18. 解：设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$ $x\in(-\infty,+\infty)$ ； 4 分

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=e^{x^2}(1+2x^2)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=S'(1)=3e$. 8 分

19. 解： $V_x=2\pi b^2\int_0^a(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4\pi}{3}ab^2$ ， 3 分

类似 $V_y=2\pi a^2\int_0^b(1-\frac{y^2}{b^2})dy=\frac{4\pi}{3}a^2b$， 6 分

$\frac{V_x}{V_y}=\frac{b}{a}$. 8 分