昆明理工大学 2018 级线性代数期末试题参考答案及评分细则

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 1,2,3；2. 0；3. 54；4. $-\frac{1}{3}(A+3E)$；5. $|A||B|^{-1}$；6. 3；7. 0；8. 24；9. $r_1=r_2$；10. $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

二、计算题（每题 8 分，共 16 分）

11. 解：由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2-x^2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 9-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-x^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3-x^2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-x^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}$ 6 分

$$=-3(1-x^2)(4-x^2)=0$$ 8 分

则，$x=\pm1,\pm2.$ 10 分

12. 解：由 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，可得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，$A^{-1}-E=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$。

又由 $A^{-1}XA=6A+XA$，可得 $(A^{-1}-E)XA=6A$，从而

$$X=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$ 4 分

8 分

三、解答题（每题 8 分，共 32 分）

13. 解：由初等行变换，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4 分

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是该向量组的一个最大无关组且

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$. 8 分

14. 解：由

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda-1\\ 0 & 3 & -1 & \lambda-2\\ 0 & \lambda & -1 & (\lambda-3)(\lambda+4)+\lambda-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda-1\\ 0 & 3 & -1 & \lambda-2\\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{3}-1 & \frac{2}{3}(\lambda-3)(\lambda+7)\end{pmatrix},$$

可见，当$\lambda=3$时，$r(A,b)=r(A)=2<3$，方程组有无穷多解，此时

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{k}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, k\in R.$

15. 由 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{pmatrix}$ 且 $r(A)=1$，可得$|A|=0$，从而 $a=0$。 4 分

这时 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=-\lambda(2-\lambda)=0$，

则 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$。 8 分

当$\lambda_1=0$时，由$(A-0E)x=0$，可得$x=k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，取 $p_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=2$时，由$(A-2E)x=0$，可得$x=k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，取 $p_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$。

令 $P=(p_1,p_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $x=Py$，可把 f 化为标准型。

16. 证明：由 $H^T=(E-2xx^T)^T=E^T-2(xx^T)^T=E-2(x^T)^Tx=H$，则 H 是对称矩阵。又由 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1$ ，可得 $(xx^T)(xx^T)=x(x^Tx)x^T=xx^T$，从而

$H^T H=(E-2xx^T)(E-2xx^T)=E-4xx^T+4(xx^T)(xx^T)=E$ ，故 H 是正交矩阵。

4 分