昆明理工大学 2012 级线性代数试卷(A 卷)
评分标准及参考答案

一、 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$， 2. $R(A)=R(A\vdots\vec{b})=r<n$

3. $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ ；

4. A 具有 n 个线性无关的特征向量； 5. 48

6. $\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$ 7、162；8. 无关；9. $-\dfrac{4}{5}<t<0$；

10. $\vec{\xi}_1=(-2,1,0,\cdots,0)^T,\vec{\xi}_2=(-3,0,1,\cdots,0)^T,\cdots\vec{\xi}_{n-1}=(-n,0,0,\cdots,1)^T$

二、（15'）

（1）

$$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & 7 & -4 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-r_1}}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 \\ 0 & -9 & 5 & -5 \\ 0 & -18 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=B$$ （6'）

则 $R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=2$ (2')

$$(2)\ B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ （3'）

向量组 A 的最大无关组为：$\vec{a}_1,\vec{a}_2$ （2$'$）

且 $\vec{a}_3=\frac{11}{9}\vec{a}_1-\frac{5}{9}\vec{a}_2$， $\vec{a}_4=-\frac{2}{9}\vec{a}_1+\frac{5}{9}\vec{a}_2$. （2$'$）

三、（15$'$）

$$(A\vdots\vec{b})=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&\lambda^2\\0&-3&3&\lambda-\lambda^2\\0&0&0&\lambda^2+\lambda-2\end{pmatrix}\text{（5}'\text{）}$$

（1） 当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，线性方程组无解；（2$'$）

（2） 当 $\lambda=-2$ 时，线性方程组有无穷多解

$$(A\vdots\vec{b})\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{（2}'\text{）}$$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ （2$'$）

（3） 当 $\lambda=1$ 时，线性方程组有无穷多解

$$(A\vdots\vec{b})\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{（2}'\text{）}$$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ （2$'$）

四、（8$'$）由于 $\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$是 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的线性无关的解，（2$'$）

$R(A)=2$，也是方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系，（2′）

而 $\vec{\eta}_1=\dfrac{(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_3)+(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)-(\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3)}{2}=\begin{pmatrix}4\\5\\7\\8\end{pmatrix}$ 是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解 （2′）

故方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\7\\8\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$ （2′）

五、（16′）（1） $f=\vec{x}^TA\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ （3′）

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\0 & 1-\lambda & -1\\0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)=0$$

所以 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$ （3′）

(2)当 $\lambda_1=1$ 时，$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\therefore\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ （3′）

当 $\lambda_2=2$ 时，$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ （3ˊ）

当 $\lambda_3 = 0$ 时，$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ （3ˊ）

故 $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ， $f = y_1^2 + 2y_2^2$ （1ˊ）

六、（6ˊ）

$AA^T = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$， $|A|^2 = 1$

$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = E$， A^{-1} 是正交矩阵。（3ˊ）

$A^* = |A|A^{-1}, AA^* = |A|E \Rightarrow A^*(A^*)^T = (|A|A^{-1})(A^*)^T$

$= |A|A^T(A^*)^T = |A|(A^*A)^T = |A||A|^T E = |A|^2 E = E$

故 A^* 也是正交矩阵。（3ˊ）