昆明理工大学试卷（A）

勤奋求学 诚信考试

考试科目：高等数学 A（1）考试日期：2020 年 01 月 06 日命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n} =$ ________；

2. 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{h} =$ ________；

3. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，则 $f'(1)=$ ________；

4. 设 $f(x)$ 可导，$y=f(e^{\sin x})$，则 $dy=$ ________ $d\sqrt{x}$；

5. 设点 $(0,1)$ 为曲线 $f(x)=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则 $b=$ ______, $c=$ ______；

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 的斜渐近线方程是________；

7. 函数 $f(x)=3x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为:________；

8. $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$ ________；

9. 若反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^q}dx$ 收敛，则 q 的取值范围是:________；

10. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ____；该级数的敛散性为________.

我已知悉《昆明理工大学本科生考试违规处理办法（试行）》，并承诺遵守相关规定，诚信考试。 承诺人________

学院________ 专业班级________ 学号________ 任课教师姓名________ 考场________ 考试座位号________

密 封 线 内 不 得 答 题

二、计算题（每题 6 分，共 18 分）：

11.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} 6t^2 dt}{x^3+x^4}$.

13. $e^y+(x-1)y=e$，求 $y''(1)$.

三、计算题（每题 6 分，共 18 分）：

14. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$.

15. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \ (a>0)$.

16. 求解初值问题 $y'+2xy=0, y\big|_{x=0}=2$ 的特解.

四、计算与应用题（每题 8 分，共 24 分）：

17.求方程求方程 $y''+y'=2xe^x$ 的通解.

18.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成关于 $x-2$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}(2)$.

19. 求由曲线 $y=4-x^2$ 及直线 $y=0$ 所围平面图形的面积及该图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

密　封　线　内　不　得　答　题

昆明理工大学 2019 级高等数学 A(1)试题 A 卷参考答案及评分细则

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. x； 2. -2 ；3. 24 ；4. $2\sqrt{x}f'(e^{\sin x})e^{\sin x}\cos x d\sqrt{x}$ ；5. $b=0;c=1$；

6. $y=x-1$；7. 1；8. 2；9. $q<1$ ；10. $\frac{1}{2}$；发散.

二、（每题 6 分，共 18 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\ln(1-x^2)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x^2}{-x^2}}=e^2$. 6 分

12．解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}6t^2dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin^2 x\cos x}{3x^2+4x^3}=2$. 6 分

13. 解：由方程得 $x=1,y=1$；

方程两边对 x 求导得: $e^y y'+y+(x-1)y'=0$ (1)；$y'(1)=-e^{-1}$； 4 分

(1)式两端对 x 求导得: $e^y(y')^2+e^y y''+2y'+(x-1)y''=0$

$y''(1)=e^{-2}$； 6 分

三、（每题 6 分，共 18 分）

14．解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx$

$=e^{\pi}+2e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\dfrac{e^{\pi}-2}{5}$. 6 分

15. 令 $x=a\sin t$ ，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ，$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int a^2\sin^2 tdt$

$=\int a^2\dfrac{1-\cos 2t}{2}dt=\dfrac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+C$.

$=\dfrac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2})+C=\dfrac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2})+C$ 6 分

16. 解：$y=Ce^{-\int 2xdx}=Ce^{-x^2}$ ；由 $y\big|_{x=0}=2$ 得 $C=2$

特解: $y=2e^{-x^2}$. 6 分

四、（每题 8 分，共 24 分）

17. 解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+r=0$ ，$r_1=0;r_2=-1$，

对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$； 4 分

由 $f(x)=2xe^x$ 得 $m=1,P_1(x)=2x,\lambda=1$ ，因 $\lambda\neq r_1,r_2$ ，

故设 $Q(x)=Q_1(x)=Ax+B$ ，$Q'=A,Q''=0$ ，

代入 $Q''+(2\lambda+p)Q'+(\lambda^2+\lambda p+q)Q=P_m(x)$

得 $2A=2,3A+2B=0$ ，$A=1,B=-\frac{3}{2}$ ，原方程的特解 $y^*=(x-\frac{3}{2})e^x$ ，

通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+(x-\frac{3}{2})e^x$. 8 分

18. 解：设 $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})}-\frac{1}{4(1+\frac{x-2}{4})}$

$\frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-2)^n;\ x\in(-1,5)$； 3 分

$\frac{1}{4(1+\frac{x-2}{4})}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-2)^n;\ x\in(-2,6)$ ； 6 分

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}})(x-2)^n;\ x\in(-1,5)$

$f^{(n)}(2)=(-1)^n n!(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}})$. 8 分

19. 解：面积元素：$dA=(4-x^2)dx$ ，

$A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=2\int_0^2(4-x^2)dx=\frac{32}{3}$ ； 4 分

体积元素：$dV=\pi r_1^2dy-\pi r_2^2dy=\pi(r_1^2-r_2^2)dy$

$$=\pi((3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2)dy=12\pi\sqrt{4-y}dy$$

故所求立体体积为：

$V=\int_0^4 dV=\int_0^4 12\pi\sqrt{4-y}dy=64\pi$. 8 分