昆明理工大学 2020 级高等数学 A(1)试题 A 卷参考答案及评分细则

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 0; 2. 充分； 3. 1 ； 4. $2xf'(x^2)$ ； 5. $x=\dfrac{3}{4}$ ； 6. $(0,0)$ ；

7. $e^{x^2}+C$ ； 8. $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ ； 9. $0<q<1$ ； 10. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

二、计算题（每题 6 分，共 18 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^x(1+\dfrac{x}{e^x})\right]^{\frac{1}{x}}$ ……………………………………(2 分)

$$=e\lim_{x\to 0}\left[(1+\frac{x}{e^x})^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}$$ …………………………………… (4 分)

$$=e^2$$ ………………………………………………………(6 分)

12．解：$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}$ …………………………(2 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1}$$ ……………………………………(4 分)

$$=1$$ ……………………………………………(6 分)

13. 解： $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$ ………………………………………………………(2 分)

$$y''=\frac{e^y\cdot y'\left(1-xe^y\right)-e^y\left(-e^y-xe^yy'\right)}{\left(1-xe^y\right)^2}$$ ……………………………(4 分)

$$=\frac{e^yy'+e^{2y}}{\left(1-xe^y\right)^2}=\frac{e^{2y}\left(2-xe^y\right)}{\left(1-xe^y\right)^3}$$ ………………………………………(6 分)

三、计算题（每题 6 分，共 18 分）

14．解：令 $\sqrt{5-4x}=t$， $x=\dfrac{1}{4}\left(5-t^2\right)$， $dx=-\dfrac{1}{2}tdt$ …………………(2 分)

当 $x=-1$ 时， $t=3$；当 $x=1$ 时， $t=1$ …………………………(4 分)

原式=$\displaystyle\int_3^1\frac{\frac{1}{4}\left(5-t^2\right)}{t}\left(-\frac{1}{2}t\right)dt=\frac{1}{8}\int_1^3\left(5-t^2\right)dt=\frac{1}{6}$ ………………(6 分)

15. 解： 原式=$\displaystyle\int e^{-x}d\sin x=e^{-x}\sin x-\int\sin x de^{-x}$ ……………………(2 分)

$$=e^{-x}\sin x-\left(e^{-x}\cos x-\int\cos x de^{-x}\right)$$

$$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x dx$$ ……………………(4 分)

$$\int e^{-x}\cos x dx=\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x-\cos x\right)+C$$ ……………………………(6 分)

16. 解： $y=e^{-\int\cos x dx}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx+C\right)$ ……………………...…(4 分)

$$=e^{-\sin x}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx+C\right)=e^{-\sin x}\left(x+C\right)$$ ………………(6 分)

四、计算与应用题（每题 8 分，共 24 分）

17. 解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$ ， $r_1=2;r_2=3$，

对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$； ………………………(4 分)

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，设 $y^*=x\left(b_0x+b_1\right)e^{2x}$，代入原方程得：

$b_0=-\frac{1}{2}$， $b_1=-1$

所以 $y^*=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$ ………………………………………………(7 分)

原微分方程的通解： $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)e^{2x}$ ………………(8 分)

18. 解：对方程两边关于 x 求导得 $e^y y'+y+xy'=0$

将 $x=0$ 代入原方程得 $y=1$，

再将 $x=0,y=1$ 代入上式得 $y'|_{x=0}=-\frac{1}{e}$ ……………………………(4 分)

再关于 x 求导可得 $e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0$ …………………(7 分)

所以 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$ ………………………………………………………(8 分)

19. 解：平面 $x-2y+4z-7=0$ 的法向量： $n_1=\left(1,-2,4\right)$

平面 $3x+5y-2z+1=0$ 的法向量: $n_2=\left(3,5,-2\right)$…………………(2 分)

所求平面的法向量 $n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=\left(-16,14,11\right)$ ……(6 分)

则所求平面方程为 $16x-14y-11z-65=0$。………………………(8 分)