昆明理工大学试卷（A）

勤奋求学 诚信考试

考试科目：线性代数　考试日期：2022 年 6 月 20 日　　命题教师：外校专家

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

我已知悉《昆明理工大学本科生考试违规处理办法（试行）》，并承诺遵守相关规定，诚信考试。 承诺人________

学院________ 专业班级________ 学号________ 任课教师姓名________ 考场________ 考试座位号________

密封线内不得答题

一. 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$有非零解，则 $a =$__________.

2. 设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$\boldsymbol{B}$ 是3阶正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*| =$________ .

3. 设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值1,2,3，则 $|\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{E}| =$________.

4. 设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = 0$，则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}) =$______________.

5. 设实对称方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则参数 a 满足________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的两个解是 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}, (3,2,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) =$_______.

7. 设3维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 1$，则方阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值是 ______________ .

8. 设向量组 $(1,1,1), (-1,1,3), (0,2,a)$ 的秩是2，则 $a =$ ____________ .

9. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1,3,a$，且 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 2$，　则 $a =$_______.

10. 设二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2} + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 的秩是2，则 $t =$_____.

二. 计算题（20 分）

11. （10 分）计算阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & a & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

12. （10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{BXA}+4\boldsymbol{A}$，求3阶矩阵 $\boldsymbol{X}$.

三．解答题（22 分）

13．（10 分）设向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

（1）求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大线性无关组；（2）将其余向量用该极大无关组线性表示.

14．（12 分）当 a 和 b 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=2\\x_1+bx_2+x_3=1\\x_1+2bx_2+x_3=1\end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求其一般解.

四．综合题（18 分）

15.（12 分）设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 为标准形.

16.（6 分）已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}_0$，其导出组 $\boldsymbol{AX}=0$ 有基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$.　证明：向量组 $\boldsymbol{\eta}_0,\xi_1+\boldsymbol{\eta}_0,\xi_2+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\xi_r+\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关.

密封线内不得答题