昆 明 理 工 大 学 试 卷（A）

勤奋求学 诚信考试

考试科目：线性代数 考试日期：2020 年 7 月 6 日 命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一．填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知3阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中第3列元素依次为$1,3,-2$，且对应的代数余子式依次为$3,-2,1$，则行列式 $\boldsymbol{D}$= ______________________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为3阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=4$，则$|2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^{-1}|=$______________.

3. 设2阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=$_____________.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶的单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=$______________________________.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,\lambda)^T$ 线性相关，则 λ= _________.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为满秩的 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{AB})=$ ___________ .

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第2行加到第1行，得 $\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{B}$= ______________________ (用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 表示).

8. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是4元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3,4)^T$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(2,0,-2,0)^T$. 若秩 $\boldsymbol{r}(A)=3$，则4元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$____ .

我已知悉《昆明理工大学本科生考试违规处理办法（试行）》，并承诺遵守相关规定，诚信考试。 承诺人________

学院________ 专业班级________ 学号________ 任课教师姓名________ 考场________ 考试座位号________

密 封 线 内 不 得 答 题

9. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$有一个特征值为$0$，则$a=$ ___________ .

10. 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2-2tx_2x_3$为正定二次型，则参数$t$的取值范围是________________________________.

二 计算题（20 分）

11. （10 分）计算行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&-a&0&0\\0&a&-a&0\\0&0&a&-a\end{vmatrix}$.

12.（10 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 满足 $2\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{C}$，求$2$阶矩阵$\boldsymbol{X}$.

三．解答题（22 分）

13.（10 分）设 4 维向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-3,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,-1,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,4,2,-3)^T$．（1）求向量组 A 的秩；（2）求向量组 A 的一个最大无关组；（3）将其余向量用该最大无关组线性表示.

14. （12 分）当 a 和 b 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+ax_3=-1 \\ 2x_1-4x_3=b \end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解.

四．综合题（18 分）

15．（12 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\,2}+3x_2^{\,2}+x_3^{\,2}-2x_1x_3$．（1）求二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；（3）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 为标准形.

16．（6 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.