昆明理工大学2017级高等数学A(1)A卷参考答案及评分细则

一、

1. $\frac{1}{2}$；2. $-\frac{1}{2}$；3. 3；4. 2017；5. $y=x+5$ ；6. $2\sec^2 x\tan x$；7. $\frac{\pi}{2}$；

8. 2；9. $y=Ce^x+1$；10. $p>1$；

二、

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^x$ 2 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)\frac{x}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{x^2+1}}=e^0=1;$$ 7 分

12. 等式两端对 x 求导得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2};$$ 6 分

解得 $y'=\frac{x+y}{x-y}$； 7 分

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x^4}{6x^5}=\frac{1}{3}$ ； 7 分

三、

14. 由 $y'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=0$ 得 $x=e^{-1}$ ，

易知其极小值为 $(e^{-1})^{e^{-1}}=\frac{1}{e^{e^{-1}}}$ ； 7 分

15. $\int e^x\cos xdx=\int\cos xde^x$

$=e^x\cos x-\int e^xd\cos x=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx$ 3 分

$=e^x\cos x+\int\sin xde^x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int\cos xde^x$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int\cos x\cdot e^xdx$ 6 分

所以 $\int e^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$； 7 分

16. 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt$,

$$\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2tdt}{1+t} \quad = 2\int_1^3 \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2\int_1^3 (1-\frac{1}{1+t})dt$$

$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_1^3 = 2(2-\ln 2)$； 7 分

四、

17.（1）由 $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0),(2,4)$,

$A = \int_0^2 (2x - x^2)dx$

$= (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$； 3 分

（2）$V_x = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx$

$= \pi (\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^2 = \frac{64}{15}\pi = 4\frac{4}{15}\pi$； 6 分

18..特征方程为 $r^2+1=0$,得 $r_1 = i, r_2 = -i$;故其对应的齐次方程的通解为

$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; 3 分

因 $\lambda = 1, m = 1, P_1(x) = 2x, p = 0, q = 1$; $\lambda \neq r_1, r_2$,

故设 $Q(x) = Q_1(x) = Ax + B$, $Q'(x) = A$, $Q''(x) = 0$,

将其代入 $Q(x)$ 满足的等式：$Q'' + (2\lambda + P)Q' + (\lambda^2 + P\lambda + q)Q = 2x$ 得

$$2A + 2Ax + 2B = 2x$$

即 $\begin{cases} 2A = 2, \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$,解得：$A = 1, B = -1$,所以特解 $y^* = (x-1)e^x$,

通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x-1)e^x$ ； 6 分

19. 由 $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} \qquad x \in (0,4)$. 6 分