线性代数 A 卷 参考答案与评分标准

一. 1. × 2. × 3. × 4. × 5. √ 6. √ 7. × 8. √ 9. √ 10. ×

二. 1. 24 ; 2. 16 ; 3. -4; 4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 5. -4; 6. 1 ;

7. $C_1(\vec{\eta_2}-\vec{\eta_1})+\vec{\eta_3}=C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (不唯一) ; 8. -1 ; 9. 6 ; 10. -1和 0 .

三. < I > 由 $2AX=BX+C$ 得 $X=(2A-B)^{-1}C$ (4 分)

$$[2A-B|C]=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{-r_2+r_1}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ (10 分)

$$X=[2A-B]^{-1}C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (12 分)

< II > 由 $2AX=BX+C$ 得 $X=(2A-B)^{-1}C$ (4 分)

$\because 2A-B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (6 分) 于是 $[2A-B]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (10 分)

$$\therefore X=[2A-B]^{-1}C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (12 分)

四. 令 $A=[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}]$ (2 分)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3 \\ -3r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_4]{-r_2+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (7 分)

$$\Rightarrow R[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}]=R(A)=2$$ (8 分)

因 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 不成比例，故可取极大无关组为 $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$. (10 分)

五. 令 $[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (2 分)

则 $[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (6 分)

$\therefore R(A)=R(A|\vec{b})=2<4=n \quad \therefore$ 方程组有无穷多解 (8 分)

$$[A|b]\to\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&\frac{2}{3}&1&\frac{4}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{3}&2&\frac{7}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&1&\frac{4}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (10\text{ 分}) \quad \Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{5}{3}x_3-2x_4+\frac{7}{3}\\x_2=-\frac{2}{3}x_3-x_4+\frac{4}{3}\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases} \quad (12\text{ 分})$$

即 $\vec{x}=x_3\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{4}{3}\\0\\0\end{bmatrix}$ 或 $\vec{x}=C_1\begin{bmatrix}5\\2\\-3\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{4}{3}\\0\\0\end{bmatrix}$

六. $f=x^TAx=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 或 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ (2 分)

令 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1-\lambda)=0$ 得: $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$ (6 分)

当 $\lambda_1=-1$ 时, $[A-\lambda_1E]\vec{x}=\vec{0}$ 为 $\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$ 即 $x_1+x_2=0$

$\Rightarrow$ 可取特征向量 $\vec{P_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ (8 分)

当 $\lambda_2=3$ 时, $[A-\lambda_2E]\vec{x}=\vec{0}$ 为 $\begin{bmatrix}-2&2\\2&-2\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$ 即 $x_1-x_2=0$

$\Rightarrow$ 可取特征向量 $\vec{P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (10 分)

由 $\vec{P_1},\vec{P_2}$ 正交, 可取正交矩阵 $P=(\vec{P_1},\vec{P_2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$, 并令 $\vec{x}=P\vec{y}$ (12 分)

则 $f=x^TAx=(P\vec{y})^TA\left(P\vec{y}\right)=\vec{y}^T(P^{-1}AP)\vec{y}=\vec{y}^T\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}\vec{y}=-y_1^2+3y_2^2$

七. 由 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B$ 得 $AB+BA=0$ (2 分)

于是 $\begin{cases}A(AB+BA)=A^2B+ABA=AB+ABA=0\\(AB+BA)A=ABA+BA^2=ABA+BA=0\end{cases}$ (3 分)

由此解出 $AB=BA$, 结合 $AB+BA=0$ 即得 $AB=BA=0$ (4 分)