学院________ 专业班级________ 姓名________ 学号________ 任课教师姓名________ 课序号________ 考试座位号________

密 封 线 内 不 得 答 题

勤奋求学　诚信考试

昆明理工大学试卷（A卷）

考试科目：线性代数　考试日期：2018-6-19　命题教师：集体命题

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

得分	

一、填空题（40 分，每空 4 分）

1、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{21} \\ a_{13} & 2a_{23}-3a_{33} & 2a_{23} \\ a_{12} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{22} \end{vmatrix}=$ ________；

2、设三行列式 $D=1$，D 的第 3 列元素依次为 $1,k,-3$，对应的余子式依次为 $k,-2,1$，则 $k=$ ________；

3、$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 2 & x \\ -2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项为 ________；

4、设三阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $A^*=$ ________________；

5、设 A,B,C 均为三阶方阵，且 $|A|=1$，$|B|=-2$，$|C|=-3$，则 $|-A^TB^{-1}C|=$ ______；

6、设方阵 A,B 可逆，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=$ ______________；

7、仅含一个方程的齐次线性方程组 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 满足条件 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零，则其基础解系中一定含有______个线性无关的解向量；

8、设向量组 $\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T,\alpha_1=(1,1,1+\lambda)^T$ 的秩为 2，则 $\lambda=$ ________；

9、设三阶方阵 A 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则 A 的三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$ ________.

10、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+4x_1x_2$ 正定，则 t 的取值范围为 ______________.

得分	

二、计算题（20 分）：

11、求 $\begin{vmatrix} 0 & a & x & a \\ a & 0 & a & x \\ x & a & 0 & a \\ a & x & a & 0 \end{vmatrix}$.（10 分）

12、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，二阶方阵 X 满足 $A^*X=2A^{-1}-2X$，求 X.（10 分）

得分	

三、解答题（22 分）

13、判定向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)^T$的线性相关性，并求一最大无关组．（10 分）

14、给定线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+2x_3=1 \\ -x_1+(a-3)x_2-2x_3=b \end{cases}$，问$a,b$取何值时，方程组：（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求其通解．（12 分）

得分	

四、综合应用题（18 分）

15、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$（$a>0$）的三个特征值为$1,2,5$．（1）求$a$；（2）求一正交变换$x=Py$，使二次型化为标准形．（12 分）

16、设方阵A满足$A^2-A-2E=O$，证明A及$A+2E$均可逆，并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$．（6 分）

密 封 线 内 不 得 答 题

2017 级线性代数试卷 A 参考答案与评分细则

一、填空题：1. -12　2. $4/3$　3. -3　4. $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　5. $-\frac{3}{2}$　6、$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

7. $n-1$　8. -3　9. 6　10. $t>2$

二、计算题：

11. 原 式 $\xlongequal[\text{再提出}x+2a]{\text{各行加到第一行}}(x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & x \\ x & a & 0 & a \\ a & x & a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{(4\text{ 分})} (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 & x-a \\ 0 & a-x & -x & a-x \\ 0 & x-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{(6\text{ 分})}$

$(x+2a)\begin{vmatrix} -a & 0 & x-a \\ a-x & -x & a-x \\ x-a & 0 & -a \end{vmatrix} \equiv -x(x+2a)\begin{vmatrix} -a & x-a \\ x-a & -a \end{vmatrix} \xlongequal{(9\text{ 分})} x^2(x^2-4a^2)$　(10 分)

12. 易得 $|A|=2$　(2 分)　$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$，于是 $AA^*=2E$　(5 分)

从而 $A(A^*X)=A(2A^{-1}-2X)=2E-2AX=2EX=2X$，即 $(A+E)X=E$　(8 分)

故 $X=(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(10 分)

三、解答题：

13. $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & +2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{分})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (7 分)

于是 $R(A)=3$，向量组线性相关，　(8 分)　由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 知 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ 为一个最大无关组.　(10 分)

14. $(\mathbf{Ab})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-3 & -2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{分})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & -1 & b \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a+b \end{pmatrix}$　(6 分)

(1) 若 $1-a\neq 0$ 或 $a\neq 1$，方程组有唯一解；　(8 分)

(2) 若 $1-a=0$ 而 $2-a+b\neq 0$，即 $a=1, b\neq -1$，$R(\mathbf{A})=2, R(\mathbf{Ab})=3$，方程组无解；　(10 分)

(3) 若 $1-a=0$ 且 $2-a+b=0$，即 $a=1, b=-1$，$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{Ab})=2<3=n$，方程组有无穷多解，这时

$(\mathbf{Ab}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -x_3+1 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(12 分)

四、综合应用题：

15. (1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$，　(2 分)　$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{取}\lambda=1} 4-a^2=0$，

故 $a=2$.　(4 分)

(2) 当 $\lambda=1$ 时，$(A-E)x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为 $k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,;　(6 分)

当 $\lambda=2$ 时，$(A-2E)x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　(8 分)

当 $\lambda=5$ 时，$(A-5E)x=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量为 $k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(10 分)

故取取 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则令 $x=Py$，可将二次型化为标准形. (12 分)

16. 由 $A(A-E)=2E$ 或 $A\cdot\frac{A-E}{2}=E$ 知 $|A|\neq 0$，故 A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$；　(2 分)

又由 $|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$ 知 $A+2E$ 可逆，　(4 分)，再由已知得 $A^2-A-6E=-4E$，即

$(A+2E)\cdot\frac{A-3E}{-4}=0$，得到 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.　(6 分)