学院________ 专业班级________ 学号________ 任课教师姓名________ 考场________ 考试座位号________

密 封 线 内 不 得 答 题

考试科目：线性代数　考试日期：2020 年 7 月 6 日　命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一. 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知 3 阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $1,3,-2$，且对应的代数余子式依次为 $3,-2,1$，则行列式 $D=$ $1\times3+3\times(-2)+(-2)\times1=-5$.

2. 设 A 和 B 为 3 阶方阵，且 $|A|=2,|B|=4$，则 $|2A^TB^{-1}|=$ $2^3|A^T||B^{-1}|=8|A|\cdot\frac{1}{|B|}=4$

3. 设 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $AA^*=$ $\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$

或 $AA^*=|A|E=6E$

4. 设 n 阶方阵 A 和 B 满足 $A^2+A-4E=0$，E 为 n 阶的单位矩阵，则 $(A+2E)^{-1}=$________.

$\Rightarrow (A+2E)(A-E)=2E$

$\Rightarrow (A+2E)(\frac{1}{2}(A-E))=E$ $\therefore (A+2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

5. 设向量组 $\alpha_1=(2,1,1)^T,\alpha_2=(-1,2,7)^T,\alpha_3=(1,2,\lambda)^T$ 线性相关，则 $\lambda=$________.

解一：$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&2\\1&7&\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=5$　解二：$\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&2\\1&7&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-5&-3\\0&0&\lambda-5\end{pmatrix}$

$\because$ 线性相关 $\therefore$ 秩 <3 故 $\lambda-5=0$

6. 设 A,B 均为满秩的 n 阶方阵，则 $r(AB)=$ n .

7. 设 A 为 3 阶矩阵. 将 A 的第 2 行加到第 1 行，得 B. 设 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $B=$ PA (用矩阵 A 和 P 表示).

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}P$

PA：相当于 $A\xrightarrow{r_1+r_2}B$

AP：相当于 $A\xrightarrow{c_2+c_1}$

8. 设 η_1,η_2,η_3 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $\eta_1=(1,2,3,4)^T$ 和 $\eta_2+\eta_3=(2,0,-2,0)^T$. 若秩 $r(A)=3$，则 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解 $x=$ "$Ax=0$ 通解"+"$Ax=b$ 特解" $=k(0,1,2,2)^T+(1,2,3,4)^T$.

解：$\because n-r(A)=4-3=1$ $\therefore Ax=\vec{0}$ 通解形式为 $k\vec{\xi}$，$\vec{\xi}\neq\vec{0}$

由 $A(\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-2\vec{\eta}_1)=\vec{b}+\vec{b}-2\vec{b}=\vec{0}$ 知 $\vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3-2\vec{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\-4\\-8\\-8\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\vec{0}$ 的解

$\therefore$ 可取 $\vec{\xi}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}$ 是 $Ax=\vec{0}$ 的非零解.

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 有一个特征值为0，则 $a=$ ________．

说明 $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=0$

$\Rightarrow |A|=2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&a\end{vmatrix}=2(a-1)=0\Rightarrow a=1$

10. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}-2tx_2x_3$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围是________________．

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-t\\0&-t&2\end{pmatrix}$ 正定 $\Rightarrow 1>0,\ \begin{vmatrix}2&-t\\-t&2\end{vmatrix}=4-t^2>0$

$\Rightarrow -2<t<2$

二 计算题（20分）

11. （10分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&-a&0&0\\0&a&-a&0\\0&0&a&-a\end{vmatrix}$．

$\xrightarrow{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}4&1&1&1\\0&-a&0&0\\0&a&-a&0\\0&0&a&-a\end{vmatrix}$

$=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-a&0&0\\a&-a&0\\0&a&-a\end{vmatrix}=4\cdot(-a^3)$

12. （10分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 满足 $2AX=BX+C$，求2阶矩阵 X．

$\Rightarrow (2A-B)X=C$

解一：$X=(2A-B)^{-1}C$

$2A-B=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (2A-B)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $\therefore X=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

解二：$(2A-B,C)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&1\\0&1&1&0\end{array}\right)$

注：① $AX=B\xrightarrow[\text{可逆}]{\text{若}A}X=A^{-1}B$

$XA=B\xrightarrow[\text{可逆}]{\text{若}A}X=BA^{-1}$

$AXB=C\xrightarrow[\text{可逆}]{A,B}X=A^{-1}CB^{-1}$

② 初等变换法

求 $AX=B$：$(A,B)\xrightarrow{r}(E,X)$

求 $XA=B$：$(XA)^T=B^T\Rightarrow A^TX^T=B^T$

由 $(A^T,B^T)\xrightarrow{r}(E,X^T)$

将 X^T 再转置即为 X

三．解答题（22 分）

13．（10 分）设 4 维向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-3,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,-1,4)^T$

$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,4,2,-3)^T$．（1）求向量组 A 的秩；（2）求向量组 A 的一个最大无关组；

（3）将其余向量用该最大无关组线性表示．

解：$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4})=\begin{pmatrix}0&2&2&0\\1&1&1&4\\2&-3&-1&2\\0&3&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&0\\0&3&4&-3\\0&-5&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&0\\0&0&1&-3\\0&0&2&-6\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=3$，一最大无关组为 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$，且 $\alpha_4=4\vec{\alpha_1}+3\vec{\alpha_2}-3\vec{\alpha_3}$

14．（12 分）当 a 和 b 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\3x_1+2x_2+ax_3=-1\\2x_1-4x_3=b\end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解．

解一：$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\3&2&a\\2&0&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&a+6\\2&0&0\end{vmatrix}=(a+6)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2(a+6)$

① $a\neq-6$ 时，A 可逆，方程组有唯一解 $X=A^{-1}\vec{\beta}$，$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}0\\-1\\b\end{pmatrix}$

② $a=-6$ 时，$(A,\vec{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\3&2&-6&-1\\2&0&-4&b\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&b+2\end{pmatrix}$

第一，若 $b+2\neq0$ 即 $b\neq-2$ 时，方程组无解

第二，若 $b=-2$，对应同解方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_3=-1\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2k-1\\x_2=1\\x_3=k\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

解二：$(A,\vec{\beta})=\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\3&2&a&-1\\2&0&-4&b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&-1&a+6&-1\\0&0&-2a-12&b+2\end{pmatrix}$

① $-2a-12\neq0$ 即 $a\neq-6$ 时，$r(A)=r(A,\vec{\beta})=3=$ 未知数个数，故方程组有唯一解

② 若 $a=6$，$b\neq-2$ 则 $r(A)=2\neq r(A,\vec{\beta})=3$ $\therefore$ 此时方程组无解

③ 若 $a=-6$，$b=-2$，则由 $r(A)=r(A,\vec{\beta})=2<3$ 知方程组有无穷解．由 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\-x_2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

四. 综合题（18 分）

15.（12 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.（1）求二次型的矩阵 A；（2）求 A 的特征值和特征向量；（3）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&3-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

① 将 $\lambda_1=0$ 代入：$(A-\lambda E)X=0 \Rightarrow AX=0$，由 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

对应 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=k\\x_2=0\\x_3=k\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ∴ 特征向量为 $\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

全部特征向量为 $k_1\vec{\xi_1}$

② 将 $\lambda_2=2$ 代入：$(A-\lambda E)X=0 \Rightarrow (A-2E)X=0$，由 $(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

对应 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=k\\x_2=0\\x_3=-k\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

∴ 对应 λ_2 的特征向量为 $\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，全部特征向量为 $k_2\vec{\xi_2}$

③ 将 $\lambda_3=3$ 代入：$(A-\lambda E)X=0 \Rightarrow (A-3E)X=0$，由 $A-3E=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

对应 $\begin{cases}x_1=0\\x_3=0\\x_2=k\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ∴ λ_3 对应特量 $\vec{\xi_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，全部特…量为 $k_3\vec{\xi_3}$

对于 $\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{\xi_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 已两两正交 故只须单位化

∴ $P=\left(\frac{1}{\sqrt2}\vec{\xi_1},\frac{1}{\sqrt2}\vec{\xi_2},\vec{\xi_3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}$

做 $X=PY$ 化 f 为标准形 $0\cdot y_1^2+2y_2^2+3\cdot y_3^2=2y_2^2+3y_3^2$

16. （6 分）已知向量组α_1，α_2，α_3线性无关. 证明：向量组

$\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_3+2\alpha_1$也线性无关.

证明：由 $x_1(\vec{\alpha_1}+2\vec{\alpha_2})+x_2(\vec{\alpha_2}+2\vec{\alpha_3})+x_3(\vec{\alpha_3}+2\vec{\alpha_1})=\vec{0}$

$\Rightarrow (x_1+2x_3)\vec{\alpha_1}+(2x_1+x_2)\vec{\alpha_2}+(2x_2+x_3)\vec{\alpha_3}=\vec{0}$

$\because$ $\vec{\alpha_1}$，$\vec{\alpha_2}$，$\vec{\alpha_3}$ 线性无关

$\therefore \begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2=0 \quad (*) \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases}$ 又$\because$ $(*)$ 系数行列式 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0$

$\therefore$ $(*)$ 只有零解 即 $x_1=x_2=x_3=0$

故 . . . .

考试科目：线性代数 考试日期：2019 年 月 日 命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）：

1．若 $D_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}0&0&\lambda-1\\0&\lambda-2&0\\\lambda-3&0&0\end{vmatrix}$ 且 $D_1=D_2$，则 $\lambda=$ $\underline{1,2,3}$ ；

$=0$

$=(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

2. 若 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{vmatrix}$，则 $4A_{12}+3A_{22}+2A_{32}+A_{42}=$ $\underline{0}$ ；

3.设三阶可逆矩阵 A 满足 $|A|=2$，则 $|3A^{-1}A^*|=$ $3^3|A^{-1}||A^*|=27|A^{-1}|\cdot||A|A^{-1}|=27|A^{-1}|\cdot 2^3\cdot|A^{-1}|$ ；

$=27\times 8\times\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|A|}=54$

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，则 $(A-2E)^{-1}=$ ________ ；

$\Rightarrow(A-2E)(A+3E)=-3E\Rightarrow(A-2E)\cdot\left(-\frac{1}{3}(A+3E)\right)=E\Rightarrow(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+3E)$

5. 设 A,B 均为 n 阶可逆方阵，则 $\left|-\begin{pmatrix}A^T&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}\right|=$ $(-1)^{2n}\cdot|A^T||B^{-1}|=|A|\cdot\frac{1}{|B|}$ ；

6.方程 $x_1+x_2-x_3-x_4=0$ 的基础解系中必含有 $\underline{4-r(A)=4-1=3}$ 个线性无关的解向量；

7. 若向量组 $\alpha_1=(1,1,1+\lambda),\alpha_2=(1,1+\lambda,1),\alpha_3=(1+\lambda,1,1)$ 的秩为 1，则 $\lambda=$ ________ ；

$|(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda+3)\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=0,\ -3$

舍（$\because\lambda=-3$ 时秩为 2）

8. 若三阶方阵 A 与方阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-3&0\\2&1&-4\end{pmatrix}$ 相似，则 A 的三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

满足 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$ ________ ；

$|A|=|B|\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2\times(-3)\times(-4)=24$

9. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r_1$，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的秩为$r_2$，若两个向量组等价，则$r_1$与$r_2$之间的关系为 $r_1=r_2$ ；

10. 若二次型$f=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2-2x_2x_3$正定，则$a$的取值范围是 ________ .

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&a\end{pmatrix}$ 正定：$1>0$，$\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&a\end{vmatrix}>0 \Rightarrow a>\frac{1}{2}$

二、计算题（20分）：

11. 解方程$\begin{vmatrix}1&1&2&2\\1&2-x^2&3&3\\2&2&1&1\\3&3&5&9-x^2\end{vmatrix}=0$。（10分）

12. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求解矩阵方程$A^{-1}XA=6A+XA$。（10分）

考试科目：线性代数　　考试日期：2018-6-19　　命题教师：集体命题

题 号	一	二	三	四	总分
评 分					
阅卷人					

得分	

一、填空题（40 分，每空 4 分）

1、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{21} \\ a_{13} & 2a_{23}-3a_{33} & 2a_{23} \\ a_{12} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{22} \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{31} & 2a_{21} \\ a_{13} & -3a_{33} & 2a_{23} \\ a_{12} & -3a_{32} & 2a_{22} \end{vmatrix} = (-6)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= 6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12$

2、设三行列式 $D=1$，D 的第 3 列元素依次为 $1,k,-3$，对应的余子式依次为 $k,-2,1$，则 $k=$________；

$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot k + (-1)^{1+2}\cdot k\cdot(-2) + (-1)^{1+3}\cdot(-3)\cdot 1 = 1$

$\Rightarrow k=\frac{4}{3}$

3、$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 2 & x \\ -2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项为 ________；

$= x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，常数项在 $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = -2x-3$

即为-3

4、设三阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $A^{*}=$ $|A|\cdot A^{-1}$；

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$|A|\cdot|A^{-1}|=1 \Rightarrow |A|=-\frac{1}{2}$

5、设 A,B,C 均为三阶方阵，且 $|A|=1$，$|B|=-2$，$|C|=-3$，则 $|-A^TB^{-1}C|=$ $(-1)^3|A^T||B^{-1}||C|$

$= -|A|\cdot\frac{1}{|B|}\cdot|C| = -\frac{3}{2}$

6、设方阵 A,B 可逆，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} =$ $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；设 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 由 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} AZ=E \\ AW=O \\ BX=O \\ BY=E \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Z=A^{-1} \\ W=O \\ X=O \\ Y=B^{-1} \end{matrix}$

(A、B可逆)

7、仅含一个方程的齐次线性方程组 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 满足条件 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零，则其基础解系中一定含有________个线性无关的解向量；

$n-r(A)=n-1$

8、设向量组 $\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T,\alpha_1=(1,1,1+\lambda)^T$ 的秩为 2，则 $\lambda=$ ________；

$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda+3)\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0、-3$

舍(若λ=0则秩为1)

9、设三阶方阵 A 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则 A 的三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$________.

$|A|=|B| \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3=6$

10、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+4x_1x_2$ 正定，则 t 的取值范围为 ________________ .

$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ 正定：$2>0$，$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}>0 \Rightarrow t>2$