2020年线性代数阶段性测试试题答案

一．填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. $-\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4$，2. 4， 3. $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，4. $\boldsymbol{E}$，5. $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，6. $\lambda=1$，

7. −16，8. 16， 9. $|\boldsymbol{B}|=2$，10. −3

二 计算题（每小题 10 分，共 20 分）

11. 解：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=3\times 16=48$$

每化简一次得 2 分，共 10 分。

12. 解：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ a & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ a & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ a & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ a & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

每化简一次得 2 分，共 10 分。

三．解答题（每小题 10 分，共 20 分）

13. 解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

每化简一次得 2 分，共 10 分。

14. 解：

将 3 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 视为分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ 2 分

2 阶矩阵 $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，1 阶矩阵 $A_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ， 它们均为可逆矩阵。 4 分

$A_1^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 6 分

$A_1^{-1}=\frac{1}{|A|}A_1^*=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8 分

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 1 0 分

四．综合题（每小题 10 分，共 20 分）

15. 解：

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得：$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。 1 分

由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，得：$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。 2 分

$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 4 分

$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$

$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{E}$ 6 分

$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 7 分

$\boldsymbol{B}=8(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ 8 分

$\boldsymbol{B}=8(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{*})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ 10 分

16. 解：

$\because \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{2}+\boldsymbol{X}, \therefore \boldsymbol{AX}$-X=(A-$\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{2}-\boldsymbol{E}$

(A-$\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{2}-\boldsymbol{E}$ 2 分

$\boldsymbol{A}^{2}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{2}-\boldsymbol{E}^{2}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ 5 分

$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1$ 6 分

3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$- $\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵，且

$\because$（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$）X $=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$,

$\therefore$ X $=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 8 分

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 10 分