2011级线性代数(A/B)试卷A参考答案与评分细则

一、1. √　2. ×　3. √　4. ×　5. ×

二、1. B　2. C　3. C　4. A　5. D　6. A　7. D

三、1. -24　2. $(A^{-1})^2$　3. 8　4. 无　5. $k\begin{pmatrix}0\\-2\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ (答案不唯一)　6. $n-1$

7. $-\dfrac{1}{2}$　8. $\dfrac{3}{4}$

四、原式 $=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\0&0&2&-2\\0&2&0&-2\\0&2&-2&-4\end{vmatrix}\underline{\underline{(4\text{分})}}\begin{vmatrix}0&2&-2\\0&2&2\\2&-2&-4\end{vmatrix}\underline{\underline{(6\text{分})}}\ 2\begin{vmatrix}2&-2\\2&2\end{vmatrix}=16$　(8 分)

五、(1) 易得 $2B=AB-4A$，　(1 分)　于是有 $(A-2E)(B-4E)=8E$，　(3 分)

即 $(A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{8}(B-4E)$ 所以可逆 （或直接由 $|A-2E|\cdot|B-4E|=8\neq0$ 知可逆）(4 分)

另解：由 $2B=AB-4A$ 得 $AB-2B=4A$，或 $|(A-2E)B|=|A-2E|\cdot|B|=|4A|=4^2|A|\neq0$，(3 分)　（因为由题设知 A 可逆），

即 $|A-2E|\neq0$，$A-2E$ 可逆。　(4 分)

(2) 易得 $A=2B(B-4E)^{-1}$，(7 分)　即

$$A=2\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\underline{\underline{(8\text{分})}}\begin{pmatrix}-6&-8\\0&-6\end{pmatrix}\qquad(9\text{ 分})$$

六、$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&k&1\\k&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2\text{分})}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&k-1&0\\k-1&0&0\end{pmatrix}$　(4 分)

(1) 若 $k=1$，则 $r(A)=2$，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3$ 或 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 为一极大无关组；　(6 分)

(2) 若 $k\neq1$，则 $r(A)=3$，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 为其极大无关组。　(8 分)

七、$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(2分)}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&1&-1&1\end{pmatrix}$，(5 分)

即$\begin{cases}x_1=-2x_4\\x_2=-x_3+x_4+1\end{cases}$，或 $\vec{x}=x_3\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ (8 分)

八、 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-2-\lambda&1\\-2&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-3\lambda+2)=-\lambda(\lambda^2-9)=0$

得 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$ (4 分)

当 $\lambda_1=3$ 时，$(A-3E)\vec{x}=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\1&-5&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$， (6 分)

当 $\lambda_2=-3$ 时，$(A+3E)\vec{x}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$， (8 分)

当 $\lambda_3=0$ 时，$(A-0E)\vec{x}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， (10 分)

单位化得正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt3&1&\sqrt2\\0&-2&\sqrt2\\-\sqrt3&1&\sqrt2\end{pmatrix}$ 即为所求。 (12 分)