昆明理工大学试卷（A）

勤奋求学 诚信考试

考试科目：高等数学A（2） 考试日期：2019年6月18日 命题教师：命题小组

题号	一	二	三	四	总分
评分					
阅卷人					

我已知悉《昆明理工大学本科生考试违规处理办法（试行）》，并承诺遵守相关规定，诚信考试。 承诺人________

学院________ 专业班级________ 学号________ 任课教师姓名________ 考场________ 考试座位号________

密 封 线 内 不 得 答 题

一、填空题（每题4分，共40分）：

1. 将 xoz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为

________________；

2. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 互相垂直，又 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}-3\vec{b}|=$________________；

3. 已知直线过点 $M_0(1,2,3)$，且与平面 $2x-y+3z-5=0$ 垂直，则此直线的对称式方程为________________________________；

4. 设 $z=\sin(\quad+2^y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________________；

5.曲面 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(1,0,0)$ 处的切平面方程是________________________；

6. $I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 D 是：$x^2+y^2\le 1$. 由二重积分的几何意义 $I=$________；

7. 设积分区域 Ω：$0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left[e^z xy+3\right]dv=$________________；

8. 若 L 的方程是 $y=1\ (0\le x\le 2)$，则 $\int_L y\,ds=$________________________；

9. 若方程 $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^\lambda y+12ye^y)dy=0$ 是全微分方程，则 $\lambda=$____________；

10. Σ 为平面 $x+y+z=2$ 在第一卦限中的部分.

则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$________________________________.

二、计算题（每题6分，共18分）：

11.已知 $M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求：(1) $\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_2M_3}$，(2)与 $\overline{M_1M_2},\overline{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

12.求过直线 $L:\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 且与平面 $x-y-z+1=0$ 垂直的平面方程.

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 dz.

三、计算题（每题 6 分，共 18 分）：

14. 求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

15. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=Ry$ 所围成的闭区域.

16.计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\,dv$，其中 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$x^2+y^2\le z^2$ 所确定.

四、计算与综合应用题（每题 8 分，共 24 分）：

17. 在一切面积等于 A 的直角三角形中，求斜边最短的直角三角形.

18. 计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，L 的方向为逆时针方向.

19. 计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma \dfrac{1}{y}f\left(\dfrac{x}{y}\right)dydz+\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{x}{y}\right)dzdx+z^2dxdy$，其中 $f(u)$ 具有一阶连续导数，Σ 为柱面 $(x-a)^2+(y-a)^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 及平面 $z=0,z=1(a>0)$ 所围成立体的表面外侧.

一、

1. $x^2+y^2+z^2=1$；2. $3\sqrt{5}$；3. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$；

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2^y\ln 2\sin(x+2^y)$；5. $-2x+z+2=0$；6. $\dfrac{2\pi}{3}$；

7. 3π；8. 2；9. 2；10. $4\sqrt{3}$.

二、11. 解：由题意知：$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\},\overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\}$ 2分

（1）$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}=2\times0+4\times(-2)+(-1)\times2=-10$. 4分

（2 所求向量为

$$\vec{c}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(6,-4,-4).$$

其单位向量为

$$\vec{c}^{\,0}=\pm\frac{1}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}(6,-4,-4)=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-3,2,2).$$ 6分

12.设过L的平面束方程为：$x+y+3z+\lambda(x-y-z)=0$， 2分

其法向量$\vec{n}_1=(1+\lambda,1-\lambda,3-\lambda)$，已知平面的法向量$\vec{n}_2=(1,-1,-1)$，

由$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$，得$\lambda=1$， 4分

故所求平面方程为：$x+z=0$. 6分

13 设$F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$

$F_x=(x+1)e^x,F_y=-(y+1)e^y,F_z=-(z+1)e^z$， 3分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z},(z\neq-1\ )$$

$$dz=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}dx-\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}dy$$ 6分

三、14. 解：方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2-8x+2y=0, \\ f'_y(x,y)=2x-2y=0. \end{cases}$$ 得驻点 $M_1(0,0),M_2(2,2)$， 2 分

$A=f''_{xx}(x,y)=6x-8,B=f''_{xy}(x,y)=2,C=f''_{yy}(x,y)=-2.$ 4 分

在 $M_1(0,0)$处，$AC-B^2=(-8)(-2)-2^2=12>0,A=-8<0$，函数在点 $M_1(0,0)$取得极大值 $f(0,0)=0$.

在 $M_2(2,2)$ 处，$AC-B^2=4\times(-2)-2^2=-12<0$，点 $M_2(2,2)$不是极值点. 6 分

15. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho$

$=\frac{-1}{3}R^3\int_0^{\pi}(|\cos\theta|^3-1)d\theta=\frac{1}{9}R^3(3\pi-4)$. 6 分

16.方法一：$\iiint\limits_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^3\cos\varphi\sin\varphi d\rho$

$=\frac{7}{6}\pi a^4$ 6 分

方法二：$\iiint\limits_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}\rho d\rho\int_{\rho}^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}zdz=\frac{7}{6}\pi a^4$ 6 分

17. 解：设直角三角形两直角边分别为x,y，则问题即为求目标函数

$$s=\sqrt{x^2+y^2}\left(x>0,y>0\right),\quad s^2=x^2+y^2$$

为化简计算，转求目标函数 $f(x,y)=x^2+y^2$

在约束条件 $A=\frac{1}{2}xy$之下的最大值.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)+\lambda(\frac{1}{2}xy-A)$ 4 分

$$\begin{cases} L'_x=2x+\frac{1}{2}\lambda y=0, \\ L'_y=2y+\frac{1}{2}\lambda x=0, \\ L'_\lambda=\frac{1}{2}xy-A=0. \end{cases}$$

解得$x=y=\sqrt{2A}$.故所求最短斜边为$s=\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{A}$. 8分

18.方法一：$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\oint_L ydx-xdy=\frac{1}{4}\iint_D -2d\sigma=-2\pi$. 8分

方法二：$\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ ，

$$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-4\sin^2 t-4\cos^2 t}{4}dt=-2\pi$$

8分

19. $P=\frac{1}{y}f(\frac{x}{y}),Q=\frac{1}{x}f(\frac{x}{y}),R=z^2,P_x=\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}),,Q_y=\frac{-1}{y^2}f(\frac{x}{y}),,R_z=2z$,

由高斯公式得

$$\oiint_\Sigma \frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+z^2dxdy=2\iiint_\Omega zdv$$

$$=2\int_0^1 zdz\iint_{D_z} d\sigma=\frac{\pi}{4}a^2$$

8分