2019 级线性代数（A）卷

参考答案及评分标准

一，填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. −5，2. 4， 3. $6\boldsymbol{E}$，4. $\frac{1}{2}$(A−E)，5. 5，6. $\boldsymbol{n}$，7. $\boldsymbol{PA}$，

8. $(1,2,3,4)^T+\boldsymbol{k}(0,2,4,4)^T$（k为任意常数），或

$(1,0,-1,0)^T+\boldsymbol{k}(0,2,4,4)^T$（k为任意常数），9. 1， 10. $-2<\boldsymbol{t}<2$.

二. 计算题（每小题 10 分，共 20 分）

11. 解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix}=4a^3$$

每化简一次得 2 分，共 10 分.

12.（10 分）解：由 $2\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{C}$，得：$(2A-B)X=\boldsymbol{C}$. 2 分

计算 $2A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4 分

（方法 1）对分块矩阵 $(2A-B,C)$ 做初等行变换

$$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 8 分

$\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 10 分

（方法 2）对分块矩阵 $(2A-B,E)$ 做初等行变换

$$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 8 分

$$\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 10 分

三. 解答题（共 22 分）

13.（10 分）解：对矩阵A做初等行变换 1 分

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&2&0\\1&1&1&4\\2&-3&-1&2\\0&3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&0\\0&1&2&-3\\0&5&3&6\end{pmatrix}$$ 4 分

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 6 分

（1）向量组 A 的秩为 3. 7 分

（2）向量组 A 的一个最大无关组是： $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$. 8 分

（3）用最大无关组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$ 线性表示向量 $\vec{\alpha}_4$

$\vec{\alpha}_4=4\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2-3\vec{\alpha}_3$ 10 分

14.（12 分）解：系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\3&2&\boldsymbol{a}\\2&0&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&\boldsymbol{a}+6\\2&0&0\end{vmatrix}=2(\boldsymbol{a}+6)$$ 3 分

（1）当 $a\neq-6$ 时，线性方程组有唯一解. 5 分

当 $a=-6$ 时，对增广矩阵 (A,b) 做初等行变换

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\3&2&-6&-1\\2&0&-4&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&-1&0&-1\\0&-2&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&b+2\end{pmatrix}$$ 7 分

（2）当 $a\neq-6$ 且 $b\neq-2$ 时，$r(A)=2,r(A,b)=3$. 线性方程组无解. 9 分

（3）当 $a\neq-6$ 且 $b=-2$ 时，

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时方程组有无穷多组解. 其通解为 10 分

$X=(-1,1,0)^T+k(2,0,1)^T$ (k为任意常数) 12 分

四．综合题（共 18 分）

15.（12 分）解：（1）二次型的矩阵

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 2 分

（2）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\lambda(\lambda-2)$ 4 分

A 的特征值分别为 $0,2,3$. 5 分

当 λ=0 时，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 的特征向量；$\xi_1=(1,0,1)^T$ 6 分

当 λ=2 时，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 的特征向量；$\xi_2=(1,0,-1)^T$ 7 分

当 λ=3 时，

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A 的特征向量；$\xi_3=(0,1,0)^T$ 8 分

由于 A 的特征值两两不同，A 的特征向量两两正交. 单位化，得单位正交组：

$P_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$P_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$P_3=(0,1,0)^T$

正交矩阵 $P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$ 11 分

做正交变换 $X=PY$，化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 为标准形：$2y_2^2+3y_3^2$ 12 分

16.（6 分）证明（方法一）：

设向量 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$， $\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$， $\beta_3=\alpha_3+2\alpha_1$，则

可由向量组 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ 3 分

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$， $C=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，秩 $r(A)=3$．$|\boldsymbol{C}|=9$，矩阵 C 为可逆矩阵.

秩 $r(B)=3$．5 分

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关. 6 分

（方法二）：

设存在实数 x_1,x_2,x_3，使得 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$.

2 分

$$\Rightarrow (x_1+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，得 $\begin{cases}x_1+2x_3=0\\2x_1+x_3=0\\2x_2+2x_3=0\end{cases}$ 4 分

求解该方程组的 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$.

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关. 6 分