2021 级线性代数（A）卷参考答案及评分标准

一．填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. ± 2；　2. 4；　3. 198；　4. 3；　5. $\frac{-2\sqrt{3}}{3} < \boldsymbol{a} < \frac{2\sqrt{3}}{3}$；　6. 1；

7. 0, 0, 1；　8. 4；　9. 0；　10. 0.

二 计算题（20 分）

11. 解:将行列式的第一列乘以 -2 加到第二列，第三列，…, 第 n 列得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 4-2a & 4-2a & 4-2a & \cdots & 4-2a \\ 1 & a-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-2 \end{vmatrix}$$ 4 分

在将第二行乘以 2 加到第一行，第三行乘以 2 加到第一行，…, 第 n 行乘以 2 加到第一行得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a+2(n-1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-2 \end{vmatrix}$$ 8 分

$$= \begin{vmatrix} a+2(n-1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-2 \end{vmatrix} = \big(a+2(n-1)\big)(a-2)^{n-1}$$ 10 分

12. 解: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵. 2 分

由 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{BXA}+4\boldsymbol{A}$，得到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}+4\boldsymbol{E}$，从而 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{E}$.　　4 分

故 $\boldsymbol{X}=4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$.　　6 分

$$\boldsymbol{X}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$　　10 分

三．解答题（22 分）

13. 解:（1）将向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$

组成矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$.　　2 分

将矩阵进行初等行变换化为阶梯形，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$　　4 分

向量组 A 的一个极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　6 分

（极大无关组也可以是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$）

（2）$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$.　　10 分

14. 解:线性方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=b(1-a)\cdot$　　2 分

（1）故当 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，非齐次线性方程组有唯一解.　　4 分

（2）当 $b\neq 0$ 且 $a=1$ 时，非齐次线性方程组无解.　　6 分

（3）当 $b=0$ 时，非齐次线性方程组有无穷多解.　　8 分

此时线性方程组为$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$，它的一个特解$\xi_0=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$

其导出组为$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$，它的基础解系是$\xi_1=(-1,a-1,1)^{\mathrm{T}}$

线性方程组的一般解是$\xi=\xi_0+k\xi_1$，其中k为任意常数. 12 分

四. 综合题（18 分）

15. 解:二次型的矩阵是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

$$|\lambda \mathrm{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

故$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$. 4 分

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=5$，求出特征方程组$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$的基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

将它们正交化，

令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{|\boldsymbol{\beta}_1|^2}\boldsymbol{\beta}_1=(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5},-1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=(\dfrac{4\sqrt{5}}{15},\dfrac{2\sqrt{5}}{15},-\dfrac{\sqrt{5}}{3})^{\mathrm{T}}$. 8 分

对于特征值$\lambda_3=-4$，求出特征方程组$(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$的基础解系:$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$

令 $\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}\boldsymbol{\alpha}_3=(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})^{\mathrm{T}}$ 10 分

令
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则二次型在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下化为标准形 $5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$. 12 分

16. 证明：设 $x_0\boldsymbol{\eta}_0+x_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta}_0)+x_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}_0)+\cdots+x_r(\boldsymbol{\xi}_r+\boldsymbol{\eta}_0)=0$

即 $(x_0+x_1+\cdots+x_r)\boldsymbol{\eta}_0+x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\xi}_r=0$ ……(1) 2 分

既然方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}_0$，其导出组 $\boldsymbol{AX}=0$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$.

这样 $\boldsymbol{A}\left((x_0+x_1+\cdots+x_r)\boldsymbol{\eta}_0+x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\xi}_r\right)=\boldsymbol{A}0=0$

即 $(x_0+x_1+\cdots+x_r)\boldsymbol{b}=0$. 4 分

由于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的 $\boldsymbol{b}\neq 0$.

这样 $(x_0+x_1+\cdots+x_r)=0$, 则（1）式变为 $x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\xi}_r=0$.

又有 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是导出组的基础解系，故是线性无关的，这样得到

$x_1=x_2=\cdots=x_r=0$. 组合 $(x_0+x_1+\cdots+x_r)=0$，得到

$x_0=x_1=x_2=\cdots=x_r=0$.

所以 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r+\boldsymbol{\eta}_0$ 是线性无关的. 6 分