专试座位号

昆明 理 工 大 学 试 卷(A)

勤奋求学 诚信考试

考试科目: 高等数学 A(2) 考试日期: 2019 年 6 月 18 日 命题教师: 命题小组

题号	_	-	=	四	总分
评分					
阅卷人					

- 一、填空题 (每题 4 分, 共 40 分):
- 1. 将 xoz 坐标面上的圆 $x^2 + z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面方程为
- 2. 己知向量 \bar{a}, \bar{b} 互相垂直,又 $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=2$,则 $|\bar{a}-3\bar{b}|=$ ______;
- 3. 已知直线过点 $M_0(1,2,3)$, 且与平面 2x-y+3z-5=0 垂直,则此直线的对称式方程
- 4. 设 $z = \sin(z^{2})$,则 $\frac{\partial^{2}z}{\partial x \partial y} = ______;$
- 5.曲面 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 在点(1,0,0)处的切平面方程是_____;
- 6. $I = \iint \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma$,其中 D 是: $x^2+y^2 \le 1$. 由二重积分的几何意义 $I = _____$;
- 7. 设积分区域 Ω : $0 \le z \le 1$, $x^2 + y^2 \le 1$, 则 $\iiint_{\Omega} \left[e^z xy + 3 \right] dv =$ _____;
- 9. 若方程 $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^3y + 12ye^y)dy = 0$ 是全微分方程,则 $\lambda = _____;$
- 10. \sum 为平面x+y+z=2在第一卦限中的部分.

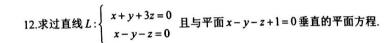
则曲面积分
$$\iint_{\Sigma} (x+y+z)dS = \underline{\hspace{1cm}}$$
.

第1页共4页

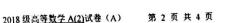
2018 级高等数学 A(2)试卷 (A)

二、计算题 (每题 6 分, 共 18 分):

11.已知 $M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3), 求:(1)$ $\overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}, \overline{M_3M_3}, \overline{M_3M_3}$ 同时垂直的单位向量.



13. 设函数 z = z(x, y) 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 dz.



14. 求函数
$$f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$$
 的极值.

15.
$$\iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$$
, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = Ry$ 所围成的闭区域.

16.计算三重积分
$$\iint_{\Omega} z dv$$
,其中 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \le a^2$, $x^2 + y^2 \le z^2$ 所确定.

- 四、计算与综合应用题 (每题 8 分, 共 24 分):
- 17. 在一切面积等于 A的直角三角形中, 求斜边最短的直角三角形.

18. 计算曲线积分
$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$
,其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$, L 的方向为逆时针方向.

1.
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
; 2. $3\sqrt{5}$; 3. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$;

4.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2^y \ln 2 \sin(x+2^y)$$
; 5. $-2x+z+2=0$; 6. $\frac{2\pi}{3}$;

7.
$$3\pi$$
; 8. 2; 9. 2; $10.4\sqrt{3}$.

二、11. 解: 由题意知:
$$\overline{M_1M_2} = \{2,4,-1\}, \overline{M_2M_3} = \{0,-2,2\}$$
 2分

(1)
$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_2 M_3} = 2 \times 0 + 4 \times (-2) + (-1) \times 2 = -10.$$

(2 所求向量为

$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_2 M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4).$$

其单位向量为

$$\vec{c}^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2}} (6, -4, -4) = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} (-3, 2, 2).$$
 6 \(\frac{1}{2}\)

12.设过
$$L$$
的平面束方程为: $x+y+3z+\lambda(x-y-z)=0$, 2分

其法向量 $\bar{n}_1=(1+\lambda,1-\lambda,3-\lambda)$,已知平面的法向量 $\bar{n}_2=(1,-1,-1)$,

由
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$
 ,得 $\lambda = 1$,

故所求平面方程为:
$$x+z=0$$
 . 6分

13 设 $F(x, y, z) = xe^x - ye^y - ze^z$

$$F_x = (x+1)e^x, F_y = -(y+1)e^y, F_z = -(z+1)e^z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}, (z \neq -1)$$

$$dz = \frac{(x+1)e^{x}}{(z+1)e^{z}}dx - \frac{(y+1)e^{y}}{(z+1)e^{z}}dy$$

三、14. 解: 方程组



$$\begin{cases} f'_{x}(x,y) = 3x^{2} - 8x + 2y = 0, \\ f'_{y}(x,y) = 2x - 2y = 0. \end{cases}$$
 得驻点 $M_{1}(0,0), M_{2}(2,2), 2$ 分

$$A = f_{xx}''(x,y) = 6x - 8, B = f_{xy}''(x,y) = 2, C = f_{yy}''(x,y) = -2.$$

在 $M_1(0,0)$ 处, $AC-B^2=(-8)(-2)-2^2=12>0, A=-8<0$,函数在点 $M_1(0,0)$ 取得极大值 f(0,0)=0.

在 $M_2(2,2)$ 处, $AC-B^2=4\times(-2)-2^2=-12<0$,点 $M_2(2,2)$ 不是极值点. 6分

15.
$$\iint_{D} \sqrt{R^{2} - x^{2} - y^{2}} d\sigma = \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{R\sin\theta} \sqrt{R^{2} - \rho^{2}} \rho d\rho$$
$$= \frac{-1}{3} R^{3} \int_{0}^{\pi} (|\cos\theta|^{3} - 1) d\theta = \frac{1}{9} R^{3} (3\pi - 4).$$

16.方法一: $\iint_{\Omega} z dv = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{2a\cos\varphi} \rho^{3} \cos\varphi \sin\varphi d\rho$ $= \frac{7}{6}\pi a^{4}$ 6分

方法二:
$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{a} \rho d\rho \int_{\rho}^{a+\sqrt{a^{2}-\rho^{2}}} z dz = \frac{7}{6}\pi a^{4}$$

17. 解:设直角三角形两直角边分别为 x, y,则问题即为求目标函数

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} (x > 0, y > 0), \quad s^2 = x^2 + y^2$$

为化简计算,转求目标函数 $f(x,y) = x^2 + y^2$

在约束条件 $A = \frac{1}{2}xy$ 之下的最大值.

构造拉格朗日函数
$$L(x,y,\lambda) = (x^2 + y^2) + \lambda(\frac{1}{2}xy - A)$$

$$\begin{cases} L'_{x} = 2x + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ L'_{y} = 2y + \frac{1}{2}\lambda x = 0, \\ L'_{\lambda} = \frac{1}{2}xy - A = 0. \end{cases}$$



解得
$$x = y = \sqrt{2A}$$
 . 故所求最短斜边为 $s = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{A}$.

8分

8分

18.方法一:
$$\oint_{L} \frac{ydx - xdy}{x^{2} + y^{2}} = \frac{1}{4} \oint_{L} ydx - xdy = \frac{1}{4} \iint_{D} -2d\sigma = -2\pi$$
. 8 分
方法二:
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

$$\oint_{L} \frac{y dx - x dy}{x^{2} + y^{2}} = \int_{0}^{2\pi} \frac{-4 \sin^{2} t - 4 \cos^{2} t}{4} dt = -2\pi$$

19.
$$P = \frac{1}{y} f(\frac{x}{y}), Q = \frac{1}{x} f(\frac{x}{y}), R = z^2, P_x = \frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}), Q_y = \frac{-1}{y^2} f(\frac{x}{y}), R_z = 2z$$

由高斯公式得

$$\bigoplus_{z} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dydz + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_{\Omega} z dy$$

$$= 2 \int_{0}^{1} z dz \iint_{\Omega} d\sigma = \frac{\pi}{4} a^2$$

