$P \neq NP$ 2

Thomas Käfer

Oktober 2025

Einleitung

Das P-NP-Problem ist trivial:

Für drei Variablen bzw. Sachverhalte gibt es 255 verschiedene Möglichkeiten:

$$2^{\binom{3}{3}*8} - 1 = 2^8 - 1 = 255 \tag{1}$$

Davon sind 254 erfüllbar:

$$2^{2^3} - 2 = 256 - 2 = 254 \tag{2}$$

Für vier Variablen bzw. Sachverhalte gibt es 4 294 967 295 verschiedene Möglichkeiten:

$$2^{\binom{4}{3}*8} - 1 = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \tag{3}$$

Davon sind 65 534 erfüllbar

(https://github.com/123qweasd-tk/Vierte-Stufe-Strenge-Logik/blob/main/SAT mit 4 Variablen.pdf)

(Die Anzahl der As der Ganzformel ist gleich der Anzahl der möglichen Belegungen):

$$2^{2^4} - 2 = 65\,536 - 2 = 65\,534 \tag{4}$$

Für fünf Variablen bzw. Sachverhalte gibt es 18 446 744 073 709 551 615 verschiedene Möglichkeiten:

$$2^{\binom{5}{3}*8} - 1 = 2^{80} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \tag{5}$$

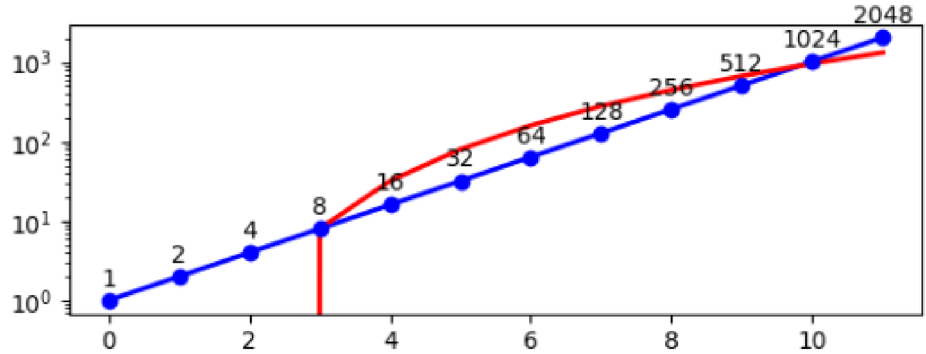

Abbildung 1: 2^x - rot: Binomininalkoeffizient (x=$\binom{n}{3} * 8$) - blau: Anzahl möglicher Ganzformeln (x=2^n)

Davon sind 4 294 967 294 erfüllbar:

$$2^{2^5} - 2 = 4\,294\,967\,296 - 2 = 4\,294\,967\,294 \tag{6}$$

Allgemein gibt es für n Sachverhalte...

$$2^{\binom{n}{3}*8} - 1 \text{ mögliche Formeln...} \tag{7}$$

...mit...

$$2^{2^n} - 2 \text{ ...erfüllbaren Formeln.} \tag{8}$$

Da gilt (siehe Abbildung 1):

$$\frac{2^{2^n} - 2}{2^{\binom{n}{3}*8} - 1} << 0\ (\rightarrow 0) \text{ für } n \leq 9 \tag{9}$$

Und (siehe Abbildung 1):

$$\frac{2^{2^n} - 2}{2^{\binom{n}{3}*8} - 1} >> 0\ (\rightarrow \infty) \text{ für } n > 9 \tag{10}$$

...ist davon auszugehen, dass P mit herkömmlichen Computern ungleich NP ist.

Umschreibung von NP-Problemen.- Ein Beispiel

Bei NP-Problemen (*Entscheidungsprobleme*) hingegen ist bekannt, dass die Lösung ein individueller Sachverhalt ist (z. B. SAT-Problem: Es gibt mindestens eine Belegung (Erfüllbarkeit)). Es handelt sich also um Angewandte Logik und um einen indviduellen Sachverhalt. Hier soll er f^i heißen.

Schauen wir uns ein SAT-Problem an (siehe Abbildung 2).

Schritt 1: Existiert Franz?

Wenn es die Möglichkeit gibt, dass Franz exisiert, schreiben wir A:

	F	$\sim F$
Franz ist möglich	A	u

Tabelle 1: Franz hat die Möglichkeit zu existieren

Falls aber Franz nicht existiert, lautet die Geltungswertformel:

	F	$\sim F$
Franz ist unmöglich	N	u

Tabelle 2: Franz kann nicht exisitieren

Wenn wir aber fragen: Ëxistiert Franz?", bekommt Franz eine Eigenschaft aus einer höheren Ebene.

Schritt 2: Ist ein SAT-Problem *entscheidbar*?

Gibt es also eine mögliche Belegung der Variablen, sodass entscheidbar ist, ob ein SAT-Problem lösbar ist?

Wenn es keine Möglichkeit gibt, dass eine Entscheidung exisiert, schreiben wir:

	F	$\sim F$
SAT-Problem ist unlösbar	N	N

Tabelle 3: Ein SAT-Problem ist unlösbar

Schritt 3: Ist ein SAT-Problem *erfüllbar*?

Falls aber eine Lösung existiert, schließen sie sich gegenseitig aus, denn die Geltungswertformeln dazu lauten:

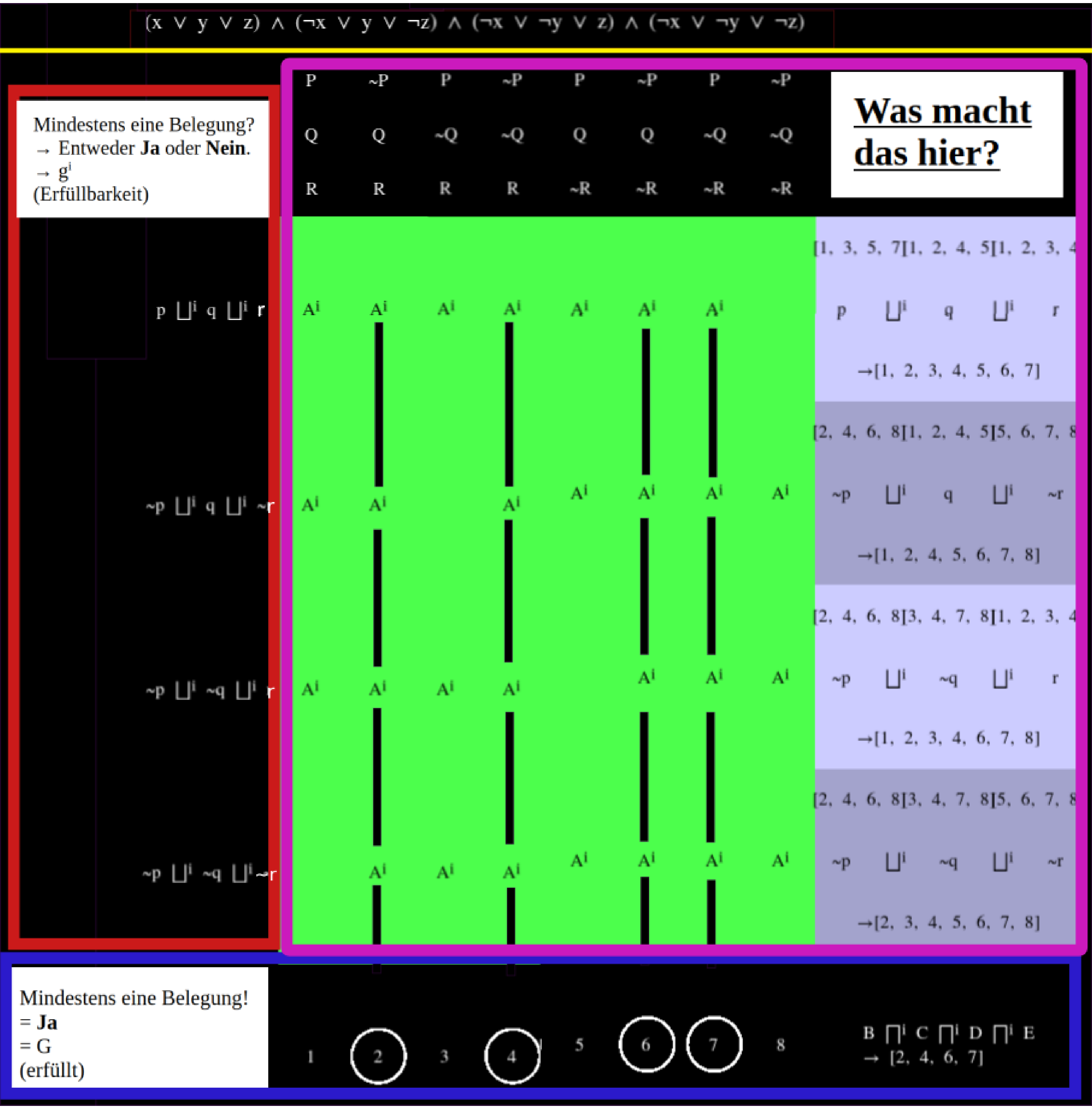

Abbildung 2: Übersicht über ein SAT-Problem

	F	$\sim F$
Es gibt eine Belegung	A	N
Es gibt keine Belegung	N	A

Tabelle 4: Ein SAT-Problem ist lösbar

Schritt 4: Synthese individueller Sachverhalte - Existiert Franz? - Existiert eine Erfüllung der Variablenbelegung, wenn es lösbar ist?

Wenn es lösbar ist, kann **entweder** die Erfüllung **oder** die Nicht-Erfüllung der Variablenbelegung eines SAT-Problems das Ergebnis sein.

Die Geltungswertformel heißt damit A^iA^i. D.h. Bei individuellen Sachverhalten kann nur eins der A^i zu A werden und die restlichen A^is werden dann zu N (Siehe Seite 164ff und Seite 109ff. Ein individueller Sachverhalt kann nicht geteilt werden.). Dass beide A^iA^i zu N werden, stellt keinen Widerspruch dar (NN, ebd.). Beim Schließen bleiben die A^is immer zusammen (ebd.).

	F	$\sim F$
f^i	A^i	A^i

Tabelle 5: Franz - existiert er?

Ïndividuelle Begriffe entziehen sich wegen ihrer komplexen Struktur der genauen logischen Analyse. schrieb Walther Brüning in seinem Buch (S. 164).

Wir behaupten nun **faktisch** diesen individuellen Sachverhalt. Dazu Brüning: "Vorausgesetzt ist dabei, daß die so verknüpften Sachverhaltsverbindungen nicht analytisch (positiv oder negativ) aufeinander bezogen sind, d. h. daß zwischen ihnen keine Identitäts- oder Widerspruchsverhältnisse bestehen."(S. 97).

Schritt 5: Franz ist äquijunkt (nicht identisch!) Eva

Franz sei mit Eva liiert; das heißt Franz und Eva machen alles zusammen. Nach Diskussionen könnte es auch sein, dass sie zusammen Dinge unterlassen. Sie sind also sozusagen zwei äquijunkte Individuen.

Wir brauchen diese erste **individuelle Sachverhaltsverbindung**, um zu beurteilen, ob ein komplizierterer Sachverhalt einem einfacheren, zerlegbaren Sachverhalt äquijunkt ist.

	F G	$\sim F$ G	F $\sim G$	$\sim F$ $\sim G$
Entweder nur F und G zusammen oder nur $\sim F$ und $\sim G$ zusammen. $F \cap^i G$ (Äquijunktion)	A^i	N	N	A^i

Tabelle 6: Franz - existiert er?

Nun soll es aber im Weiteren nicht **über** das SAT-Problem als NP-Problem handeln, sondern wir schauen uns das SAT-Problem **direkt** an.

Schritt 6: Einschränkung auf das *Exakt*-3-SAT-Problem mit individuellen Klauseln

Beginnen wir nun von der anderen Seite: Wir synthetisieren die einfachste Klasse von SAT-Problemen. Das einfachste 3-SAT-Problem Beispiel besteht aus höchstens 3 Literalen jeweils pro Klausel.

Schränken wir diese Klasse zusätzlich ein auf das *Exakt*-3-SAT-Problem; das heißt das zusätzlich jede der Klauseln genau drei Literale enthält.

Zuletzt schränken wir auf **individuelle Klauseln** ein, dass heißt das alle Literale innerhalb einer Klausel verschieden sein müssen; also dass keines doppelt vorkommt.

Alle diese Probleme sind NP-vollständig.

Schritt 7: Franz, Eva und ihre Freundinnen gehen mit dem Kollektiv der sozialistischen Eigenbrödler Eis essen - Die Klassenvereinigung von Literalen zu Klauseln

Franz und Eva und ihre zwei Freundinnen Anna und Maria entschläßen sich (nach einer Diskussion) mit dem Kollektiv der sozialisitschen Eigenbrödler Eis essen zu gehen.

Jeder und jede entschließt sich zudem seine oder ihre Lieblingssorte für ihr Stanizel (bzw. Tüte) zu bestellen. Das Angebot sei, dass ein Stanizel mit einer Kugel sehr viel koste, aber es gäbe ein Sonder-Sonderangbeot, dass ein Stanizel mit drei Kugeln vergleichsweise günstig wäre. Das Kollektiv bestelle zuerst, während Franz und Eva und ihre zwei Freundinnen noch überlägen.

Das Kollektiv bestellt also drei Stanizel mit jeweils drei Kugeln. Niemand im Kollektiv hat dieselbe Lieblingssorte, weshalb alle Kugeln unterschiedlich sind.

Nun ergeben sich auch drei individuelle Gruppen: Die Fruchtgruppe (Melone, Mango und Banane), die 'klassisch' Gruppe (Vanille, Schokolade und Erbeere) und die 'moderne Gruppe (Nutella, Cookies und Schlumpfeis).

Sehen wir uns eins der drei Stanizel genauer an: Es ist die **Vereinigung von drei individuellen Sachverhalten**.

Die Klassenvereinigung ist ein bestimmter Klassenausschnitt (Selektionsoperator), also wird zunächst keine eigene Klasse erzeugt. Deshalb ist eine Klasse äquijunkt zu einer Klassenvereinigung zu definieren (synthetisieren), falls man mit ihr weiterarbeiten will.

Für jedes der drei Stanizel, also für jede Klausel definieren wir die Vereinigung der Eiskugeln bzw. Literale folgendermaßen:

	K P Q R	$\sim K$ P Q R	K $\sim P$ Q R	$\sim K$ $\sim P$ Q R	K P $\sim Q$ R	$\sim K$ P $\sim Q$ R	K $\sim P$ $\sim Q$ R	$\sim K$ $\sim P$ $\sim Q$ R	... ...
K ist mit der Vereinigung von P, Q und R äquijunkt. $K \cap^i (P \bigsqcup^i Q \bigsqcup^i R)$	A^i	N	A^i	N	A^i	N	A^i	N	...

... ...	K P Q $\sim R$	$\sim K$ P Q $\sim R$	K $\sim P$ Q $\sim R$	$\sim K$ $\sim P$ Q $\sim R$	K P $\sim Q$ $\sim R$	$\sim K$ P $\sim Q$ $\sim R$	K $\sim P$ $\sim Q$ $\sim R$	$\sim K$ $\sim P$ $\sim Q$ $\sim R$
...	N	N	N	N	N	N	N	u

Tabelle 7: Individuelle Literale werden zu individuellen Klauseln (Stanizel)

Es ergeben sich bei einem Stanizel bzw. einer Klausel $4A^i$s.

Bei 3 Stanizeln bzw. 3 Klauseln entspricht das $12A^i$s.

Schritt 8: Franz will nur die beste Eiskugel der drei Stanizel - Der Klassendurchschnitt von 3 individuellen Klauseln zu f^i

Nun beställen Eva, Maria und Anna ihre Stanizel. Sie bestellten nur jeweils eine Kugel für ihre Stanizel. Weiters haben sie alle unterschiedliche Lieblingskategorien. Während Eva am Liebsten Fruchtsorten hat, hat Anna am Liebsten die klassischen Sorten, während Maria am Liebsten moderne Sorten hat.

Sie hatten jetzt lange Zeit zu überlegen und in dieser Zeit haben sie jeweils von den zugehörigen Gruppen des Kollektivs die Stanizel gekostet. Nach reiflicher Überlegung entscheiden sie sich gemäß ihrer Kategorien für ihre Lieblingssorte ihres Lieblingsstanizel, dass sie gekostet haben.

Franz ist als letzter dran. Er hat alles genau beobachtet. Welche Kugel soll er nähmen? Hin- und Hergerissen, fragt er die Eisverkäuferin mutig, ob sie ihm ein Stanizel mit

Drittel Kugeln machen kann? Nämlich mit ein Drittel Melone, ein Drittel Vanille und ein Drittel Nutella. Als er es in den Händen hält, kann er sein Glück kaum fassen.

	K P Q R	$\sim K$ P Q R	K $\sim P$ Q R	$\sim K$ $\sim P$ Q R	K P $\sim Q$ R	$\sim K$ P $\sim Q$ R	K $\sim P$ $\sim Q$ R	$\sim K$ $\sim P$ $\sim Q$ R	... ...
Das Element f^i gehört zum Durchschnitt der Klassen B, C und D. $f^i \supset (B \prod^i C \prod^i D)$	A^i	u	N	u	N	u	N	u	...

... ...	K P Q $\sim R$	$\sim K$ P Q $\sim R$	K $\sim P$ Q $\sim R$	$\sim K$ $\sim P$ Q $\sim R$	K P $\sim Q$ $\sim R$	$\sim K$ P $\sim Q$ $\sim R$	K $\sim P$ $\sim Q$ $\sim R$	$\sim K$ $\sim P$ $\sim Q$ $\sim R$
...	N	u	N	u	N	u	N	u

Tabelle 8: Franz' Kugel ist das Beste aus drei Welten

Schritt 9: Die Diskussion im Eissalon - Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Franz dasselbe bestellt hätte, wenn er als erster bestellt hätte

Während dem Eis essen, beginnt eine Diskussion, die zu folgender Frage führt: Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit, dass Franz dasselbe bestellt hätte, falls er als erster bestellt hätte?

Franz hat gepokert, das ist allen Beteiligten an der Diskussion klar. Zum Glück ist Paul aus dem Kollektiv der Mathmatiker und sagt: Die Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ereignis, ist die Wahrscheinlichkeit aller Fälle durch die Wahrscheinichkeit aller möglichen Fälle.

Nun ja, sagt Emilia aus dem Kollektiv. Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit 1, also ein sicheres Ereignis.

Damit will sich Erich aus dem Kollektiv aber nicht zufrieden geben. Er sagt, dass man die Teilwahrscheinlichkeiten doch irgendwie aufsummieren könnte und dann eventuell eine Gesamtwahrscheinlichkeit bekäme.

Bei der hitzigen Diskussion halten die Beteiligten folgendes fest:

- Die Wahrscheinlichkeit wäre unter 100% gewesen.

- Die Wahrscheinlichkeit der eintretenden Ereignisse wäre die Aufeinanderfolge der Fälle für die Möglichkeiten, dass er jeweils alle Kugeln der Stanizel des Kollektivs errät mal den Fall, dass er jeweils die Auswahl von Eva, Anna und Maria errät: $[((1/3) * 1/3) * 1/3] * 1/3 = 1/81$
- Die Wahrscheinlichkeit der möglichen Fälle wäre die Wahrscheinlichkeit, dass er alle Kugeln aufeinanderfolgend richtig **zuweist - Nehme ich oder nehme ich nicht**: $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8}$

mit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{11}$$

Da dies das einfachste denkbare Beispiel für ein NP-Problem ist und sich alle SAT Varianten darauf reduzieren lassen, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass Franz sich von vornherein richtig entschieden hätte:

$\frac{81}{510} = \frac{1}{2\pi}$

Synthese von Einleitung und Umschreibung

Kehren wir zu **Schritt 4** der Umschreibung zurück. Wir haben **faktisch** diesen individuellen Sachverhalt behauptet:

$$\begin{gathered}((b \overset{i}{\bigsqcup} c \overset{i}{\bigsqcup} d) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (e \overset{i}{\bigsqcup} f \overset{i}{\bigsqcup} g) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (h \overset{i}{\bigsqcup} i \overset{i}{\bigsqcup} j)) \Supset k^i\end{gathered} \tag{12}$$

Das sind 10 Sachverhalte! Die verschiedenen Grade der Verknüpfung dürfen aber nicht miteinander vermengt werden (*Grundlagen der Strengen Logik*, S. 98). Der logische Gehalt von Sachverhaltsverbindungen würde zwar gänzlich erhalten bleiben (S.97), aber da die Selektionsoperatoren (Durchschnitt, Vereinigung, etc.) keine Sachverhaltsverbindungen sind - sondern bloße Selektionen von Teilbereichen (S. 125) - kann er faktisch gar nichts nach sich ziehen, sondern nur äquijunkt sein:

$$\begin{gathered}((b \overset{i}{\bigsqcup} c \overset{i}{\bigsqcup} d) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (e \overset{i}{\bigsqcup} f \overset{i}{\bigsqcup} g) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (h \overset{i}{\bigsqcup} i \overset{i}{\bigsqcup} j)) \cap^i k^i\end{gathered} \tag{13}$$

In der Einleitung haben wir aber gesehen, dass ab 10 Sachverhalten nur noch faktisch sinnvoll geschlossen werden kann, weil...

$$\frac{2^{2^{10}}-2}{2^{\binom{10}{3}*8}-1} = 1,872597015481579 * 10^{305} >> 0 \tag{14}$$

Und deshalb ist ein neues NP-Problem zu synthetisieren.

Umschreibung von NP-Problemen

Nun können wir NP-Probleme tatsächlich umschreiben:

$$\begin{gathered} B \bullet C \\ C \bullet D \\ \underline{B \bullet D} \\ Ganzformel \Supset k^i \end{gathered} \tag{15}$$

Oder einfacher:

$$\begin{gathered} ((b \overset{i}{\bigsqcup} c \overset{i}{\bigsqcup} d) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (e \overset{i}{\bigsqcup} f \overset{i}{\bigsqcup} g) \overset{i}{\bigsqcap} \\ (h \overset{i}{\bigsqcup} i \overset{i}{\bigsqcup} j)) \Cap^i k^i \end{gathered} \tag{16}$$