OBE

041691

B. Sc. (Hons) Semester III Open Book Examination 2 0 2 1 – 2 2

MATHEMATICS

Paper No. MTB-302 : Differential Equations

Time : 4 hours 30 minutes *Full Marks* : 70

Instructions :

(i) The Question Paper contains 08 questions out of which you are required to answer any 04 questions. The question paper is of 70 Marks with each question carrying 17·5 Marks.

प्रश्नपत्र में 8 प्रश्न पूँछे गये हैं जिनमें से 4 प्रश्नों का उत्तर देना है। प्रश्नपत्र 70 अंकों का है, जिसमें प्रत्येक प्रश्न 17·5 अंक का है।

(ii) The total duration of the examination will be 4·30 Hours (Four Hours and Thirty Minutes), which includes the time for downloading the question paper from the portal, writing the answers by hand and uploading the hand-written answer sheets on the portal.

परीक्षा का कुल समय 4·30 घंटे का है जिसमें प्रश्नपत्र को पोर्टल से डाउनलोड करके पुनः प्रश्नों का हस्तलिखित उत्तर पोर्टल पर अपलोड करना है।

(iii) For the students with benchmark disability as per Persons with Disability Act, the total duration of examination shall be 6 Hours (Six Hours) to complete the examination process, which includes the time for downloading the question paper from the portal, writing the answers by hand and uploading the hand-written answer sheets on the portal.

दिब्यांग छात्रों के लिये परीक्षा का समय 6 घंटे निर्धारित है जिसमें प्रश्नपत्र को पोर्टल से डाउनलोड करना एवं हस्तलिखित उत्तर को पोर्टल पर अपलोड करना है।

(iv) Answers should be hand-written on plain white A4 size paper using black or blue pen. Each question can be answered in up to 350 words on 3 (Three) plain A4 size paper (only one side to be used).

प्रश्नों का हस्तलिखित उत्तर सादे सफेद A4 साइज के पन्ने पर काले अथवा नीले कलम से लिखा होना चाहिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 350 शब्दों तक तीन सादे पृष्ठ A4 साइज में होना चाहिये। प्रश्नों के उत्तर के लिए केवल एक तरफ के पृष्ठ का ही उपयोग किया जाना चाहिये।

(v) Answers to each question should start from a fresh page. All pages are required to be numbered. You should write your Course Name, Semester, Examination Roll Number, Paper Code, Paper Title, Date and Time of Examination on the first sheet used for answers.

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से शुरू करना है। सभी पृष्ठों को पृष्ठांकित करना है। छात्र को प्रथम पृष्ठ पर प्रश्नपत्र का विषय, सेमेस्टर, परीक्षा अनुक्रमांक, प्रश्नपत्र कोड, प्रश्नपत्र का शीर्षक, दिनांक एवं समय लिखना है।

Q.1. Solve the differential equations : 8½+9

(i) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1-x^2)^{3/2}}=\frac{x+(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^2}$

(ii) $\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x}\log z=\frac{z}{x^2}(\log z)^2$

Q.2. Solve the differential equations : 8½+9

(i) $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$

(ii) $(x^2y-2xy^2)\,dx-(x^3-3x^2y)\,dy=0$

Q.3. Solve the differential equations : 8½+9

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+5y=e^x\cos x$

(ii) $(D^2+2D+1)\,y=x\cos x$

Q.4. Solve the differential equations : 8½+9

(i) $x^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+3x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y=x+\log x$

(ii) $(D^3+8)\,y=x\sin x$

Q.5. Using the method of variation of parameters, solve the following differential equations : 8½+9

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=\frac{2}{(1+e^x)}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{(1+\sin x)}$

Q.6. Verify that $x = 0$ is a regular singular point of

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x+1)\,y = 0$$

and find two independent Fröbenius series solutions of it. 17½

Q.7. Show that—

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\,P_l^m(x)\,dx = \frac{2\,((n+m)!)}{(2n+1)\,((n-m)!)}\,\delta_{nl}$$

where

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 0\,, \text{ if } & n \neq l \\ 1\,, \text{ if } & n = l \end{cases}$$

where $P_n(x)$ is a Legendre polynomial of order n. 17½

Q.8. *(a)* Solve

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{xy}{2} = 0$$

in terms of Bessel's function. 8½

(b) Show that

$$\frac{d\,(x^n J_n(ax))}{dx} = ax^n J_{n-1}(ax)$$

and hence deduce that

$$\frac{d\,(xJ_1(x))}{dx} = xJ_0(x)$$

where $J_n(x)$ is a Bessel's function of first kind of order n. 9

★★★