牛顿迭代数列

牛顿 (1643-1727) 给出了牛顿切线法求函数零点近似值的方法——牛顿切线法迭代

用“作切线”的方法求方程的近似解,设r是函数$y=f(x)$的一个零点

①任意选取x_0作为r的初始近似值，过点$(x_0 f(x_0))$作曲线$y=f(x)$的切线l_1,设l_1与x轴交点的横坐标为x_1 ,并称x_1为r的 1 次近似值;

②过点$(x_1 f(x_1))$作曲线$y=f(x)$的切线l_2 ,设l_2与x轴交点的横坐标为x_2 ,称x_2为r的 2 次近似值.

③ 重复以上操作，直到$|x_n-r|<\epsilon, \epsilon$为所需精度。

一般地，过点$(x_n, f(x_n))$ ($n \in \mathbf{N}^{\star}$)作曲线的$y=f(x)$切线l_{n+1} ,记l_{n+1}与x轴交点的横坐标为x_{n+1} ,并称x_n+1为r的$n+1$次近似值.若$f'(x_n) \neq 0$,那么

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

例题

[安徽六安第二中学25届高三上10月月考T19]从函数的观点看，方程的根就是函数的零点，设函数的零点为r .牛顿在《流数法》一书中，给出了高次代数方程的一种数值解法——— 牛顿法.具体做法如下：先在x轴找初始点$P_0(x_0, 0)$,然后作$y=f(x)$在点$Q_0(x_0, f(x_0))$处切线，切线与x轴交于点$P_1(x_1, 0)$,再作$y=f(x)$在点$Q_1(x_1, f(x_1))$处切线 ($Q_1 P_1 \perp x$轴，以下同),切线与x轴交于点 .$P_2(x_2, 0)$,再作$y=f(x)$在点$Q_2(x_2, f(x_2))$处切线，一直重复，可得到一列数：x_0 ,$x_1, x_2, \cdots, x_n$.显然，它们会越来越逼近r.于是，求r近似解的过程转化为求x_n,若设精度为ε ,则把首次满足$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$的$x_n$称为$r$的近似解

(1)设$f(x)=x^3+x^2+1$,试用牛顿法求方程$f(x)=0$满足精度$\varepsilon=0.4$的近似解 (取$x_0=-1$,且结果保留小数点后第二位);

(2) 如图，设函数 $g(x)=2^x$; (i) 由以前所学知识，我们知道函数 $g(x)=2^x$ 没有零点，你能否用上述材料中的牛顿法加以解释?

(ii) 若设初始点为 $P_0(0,0)$ ，类比上述算法，求所得前 n 个三角形 $\triangle P_0 Q_0 P_1, \triangle P_1 Q_1 P_2, \cdots \triangle P_{n-1} Q_{n-1} P_n$ 的面积和

解析：

(1)由函数$f(x)=x^3+x^2+1$,则$f'(x)=3x^2+2x$,切线斜率$k_1=f'(-1)=1$

又$f(-1)=1$,那么在$x_0=-1$点处的切线方程为$y-1=x+1$

所以$x_1=-2$,且$|x_1-x_0|>0.5$

$k_2=f'(-2)=8, f(-2)=-3$

那么在$x_1=-2$点处的切线方程为$y+3=8(x+2)$

所以 $x_2=-\frac{13}{8}\approx-1.63$,且$|x_2-x_1|<0.4$

故用牛顿法求方程$f(x)=0$满足精度$\varepsilon=0.4$的近似解为-1.63

(2)　设$P_n-1(x_{n-1},0)$,则$Q_n-1(x_{n-1},g(x_{n-1}))$

因为$g(x)=2^x$,所以$g'(x)=2^x\ln 2$

则$Q_{n-1}(x_{n-1},g(x_{n-1}))$处切线为

$$y=2^{x_{n-1}}\times\ln 2\times(x-x_{n-1})+2^{x_{n-1}}$$

切线与x轴相交得$P_n(x_n,0), x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{\ln 2}$

即 $|x_n-x_{n-1}|=\frac{1}{\ln 2}$为定值

根据牛顿法，此函数没有零点；

(ii)因为 $x_0=0$ 得 $x_{n-1}=-\frac{n-1}{\ln 2}$

所以

$$|P_0P_1|=|P_1P_2|=|P_2P_3|=\cdots|P_{n-1}P_n|=\frac{1}{\ln 2}$$
$$g(x_{n-1})=2^{-\frac{n-1}{\ln 2}}=\left(2^{-\log_2 \mathrm{e}}\right)^{n-1}=\frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}$$

所以

$$\begin{aligned}&S_{\triangle P_0Q_0P_1}+S_{\triangle P_1Q_1P_2}+\cdots+S_{\triangle P_{n-1}Q_{n-1}P_n}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 2}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\frac{1}{\mathrm{e}^3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right)\\&=\frac{1}{2\ln 2}\frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^n}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}\\&=\frac{1}{2\ln 2}\frac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{n-1}}\\&=\frac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{n-1}}\log_4\mathrm{e}\end{aligned}$$

故所得前n个三角形$\triangle P_0Q_0P_1,\triangle P_1Q_1P_2,\cdots\triangle P_{n-1}Q_{n-1}P_n$ 的面积和为 $\frac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{n-1}}\log_4\mathrm{e}$