计算几何专题

姚金宇

概述

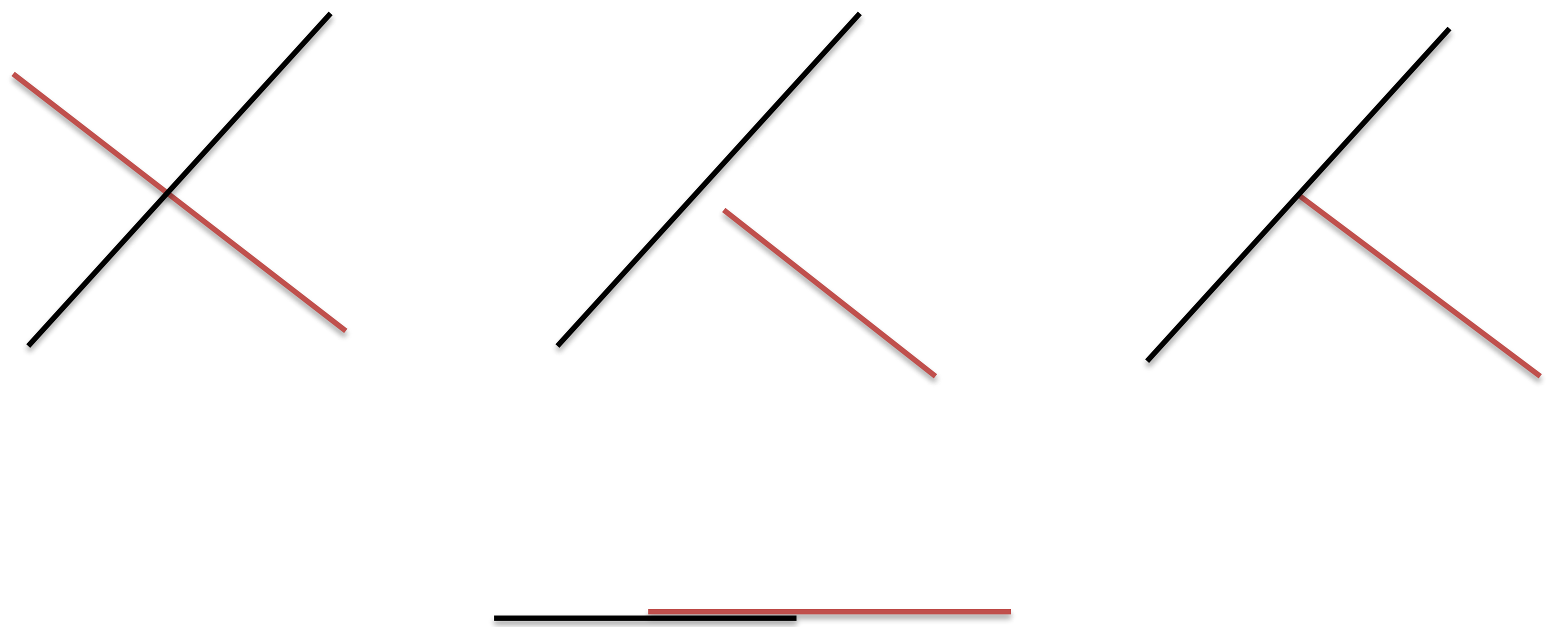
- 特点
  - 思考繁琐
  - 编程繁琐
  - 细节繁琐
- 如何把握
  - 需要在平时将计算几何的相关子问题**透彻**研究
  - 模板的代码一定要**规范**
  - 赛场上重点想**思路**，不能将时间花在纠缠细节上（否则finish egg☹）

简单的解析几何元素

- 点与直线
  - 点到直线距离（扩展：平行线间距离）
  - 直线平移
- 角
  - 夹角：点积、余弦定理
- 圆
  - 圆的方程
  - 两圆位置关系（外离、外切、相交、内切、内含、同心）

问题 1：线段相交

- 二维平面内线段规范相交的判定
  - 两条线段恰有唯一一个不是端点的公共点。



线段相交：解析几何方法

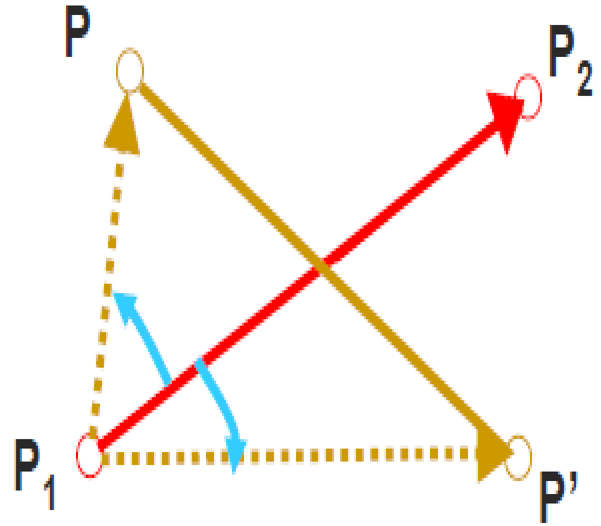
- 列直线方程Ax+By+C=0
- 解二元一次方程组，求交点
- 判断交点是否符合要求
  - 无解情况：平行
  - 无穷多解：共线
  - 唯一解：判断是否分别在两条线段上。

解析方法的弊端

- 浮点除法
  - 浮点误差
  - 运算效率
- 额外判断交点
  - 我们只需要得到是否相交的判断，不需要知道交点

线段相交：计算几何方法

- 两条线段相交时，每条线段两个端点都在另一条线段的异侧
  - 如何判断异侧
  - 有向线段
- 判断一个点是在有向线段的左边还是右边添加一条辅助向量
  - 若要判断P的相对位置，只要判断向量P_1P在向量P_1P_2的顺时针还是逆时针



向量的叉积

- 叉积公式

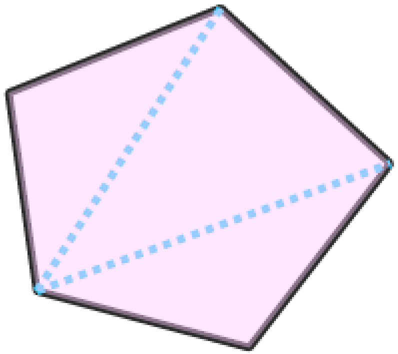
$$\vec{a}\times\vec{b}=x_a y_b - x_b y_a = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = -(x_b y_a - x_a y_b) = -\vec{b}\times\vec{a}$$

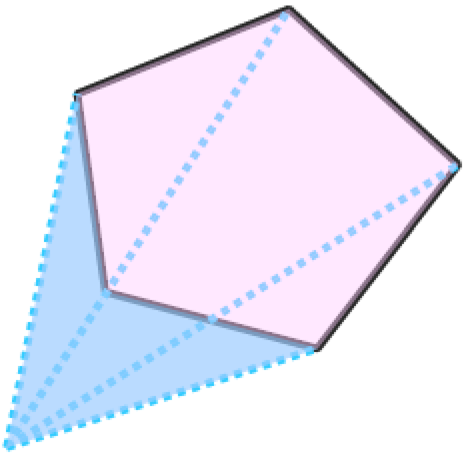
  – 向量a到b逆时针旋转时，叉积>0
  – 向量a到b逆时针旋转时，叉积<0
  – 共线时，叉积=0
- 叉积的本质：有向面积

$$a \times b = |a||b| \sin \theta$$

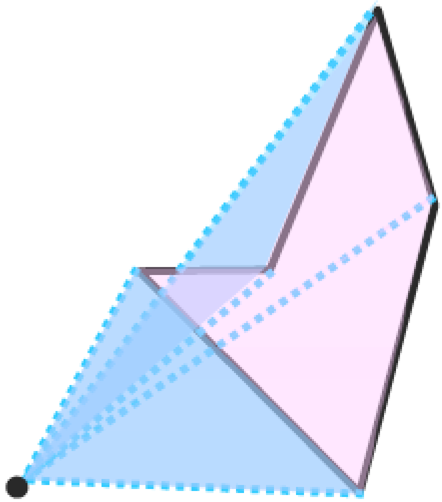
叉积的作用

- 求凸多边形面积
  - 三角剖分
  - 有向面积





- 求任意多边形面积



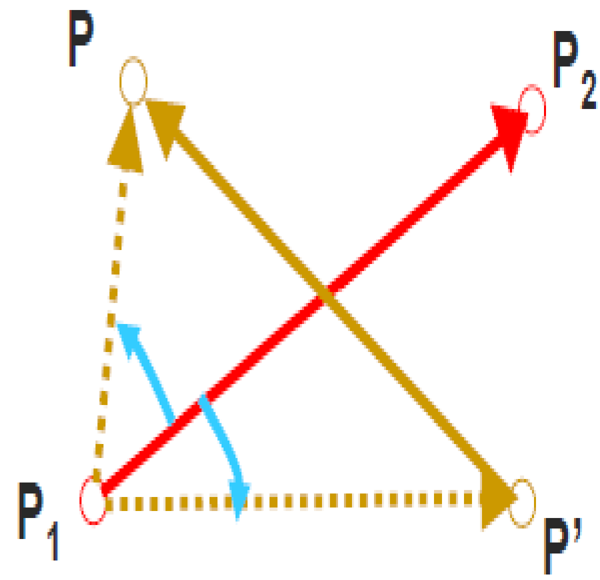
线段相交：计算几何方法

- 规范相交的计算几何判定P和P’在向量P_1P_2的异侧，即

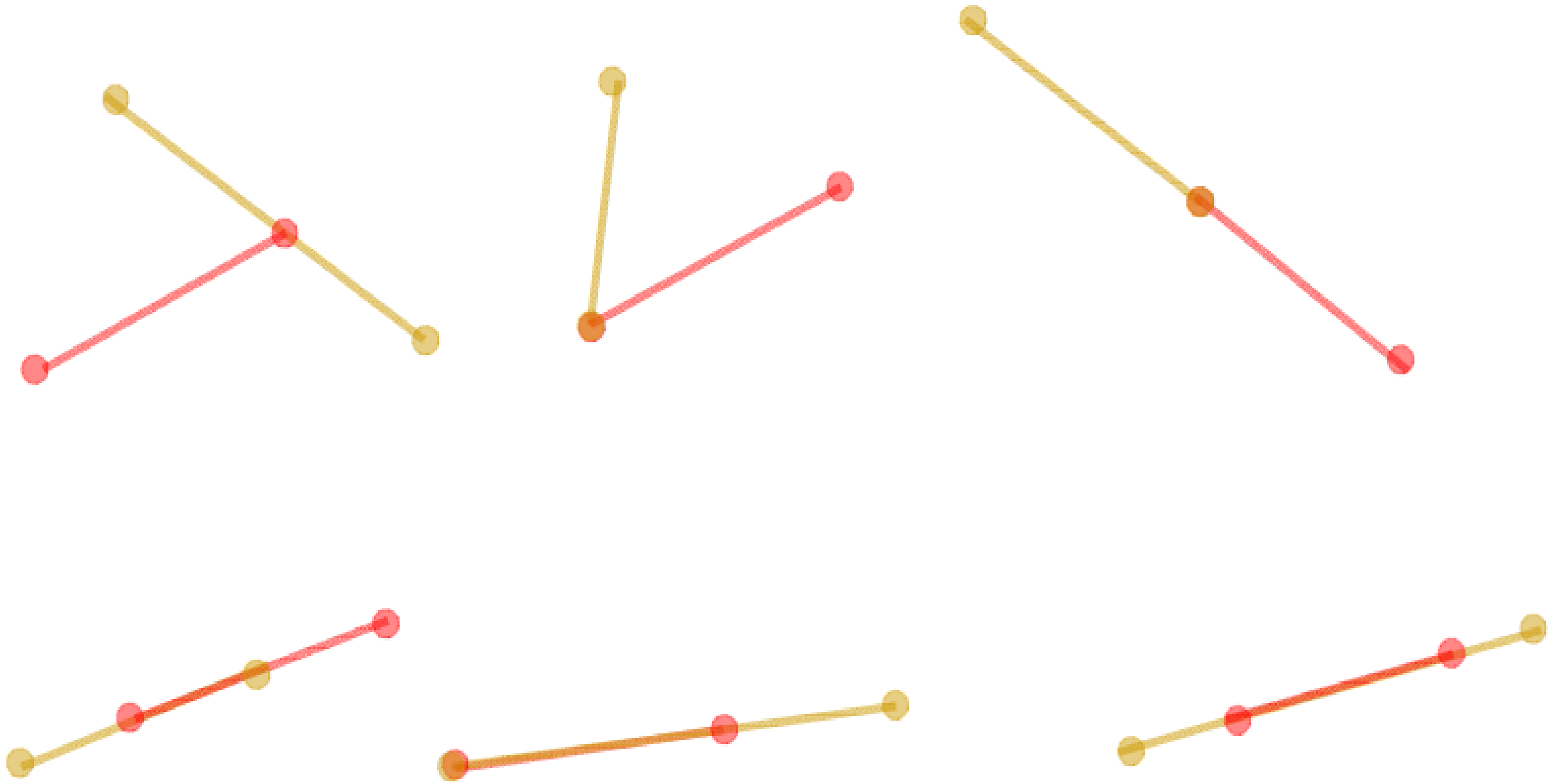
$$(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P})\bullet(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P'})<0$$

- 且P_1和P_2在向量PP’的异侧，即

$$(\overrightarrow{P'P}\times\overrightarrow{P'P_1})\bullet(\overrightarrow{P'P}\times\overrightarrow{P'P_2})<0$$

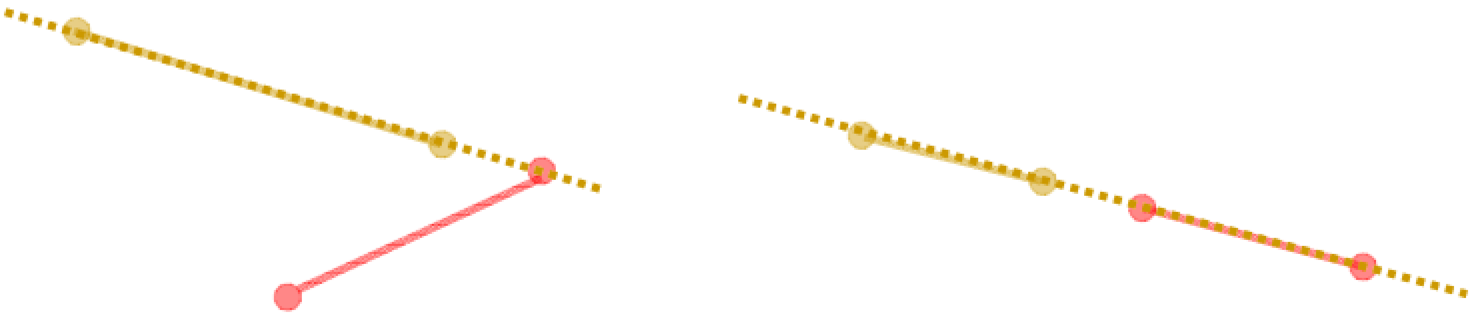


非规范相交



非规范相交（续）

- 它们没有被判断为规范相交是因为它们在叉乘过程中，都至少有一次叉乘结果是0。
- 但是叉乘结果为0并不一定就是非规范相交。因为叉乘结果为0表示是某个点在某向量所在的直线上。如下情况也可能使叉乘结果是0，尽管它们并不是非规范相交或者规范相交。



非规范相交的判断

- 某个端点P在另外一条线段P_1P_2所在的直线上即$P_1P_2 \times P_1P=0$

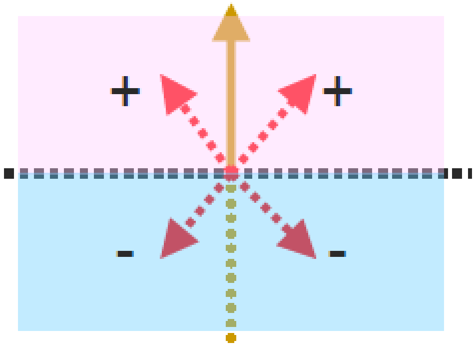
- 且该端点P在线段P_1P_2上即
  - $\min(P_1.x, P_2.x) \le P.x \le \max(P_1.x, P_2.x)$且
  - $\min(P_1.y, P_2.y) \le P.y \le \max(P_1.y, P_2.y)$

向量的点积

- 点积公式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_a y_b-x_b y_a=\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}=-(x_b y_a-x_a y_b)=-\vec{b}\times\vec{a}$$

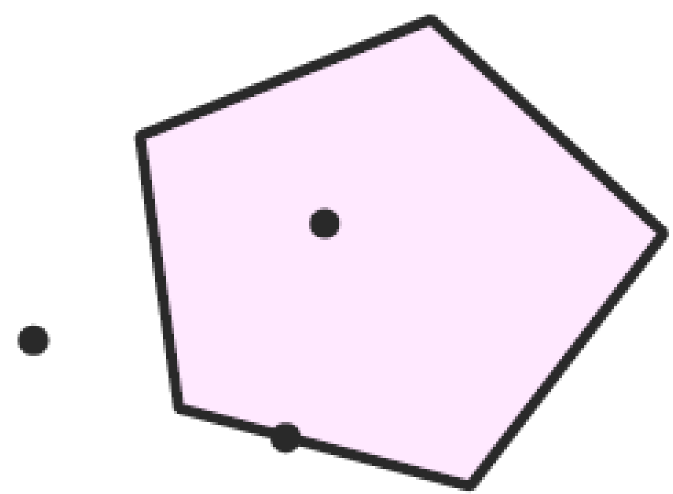


点积的作用

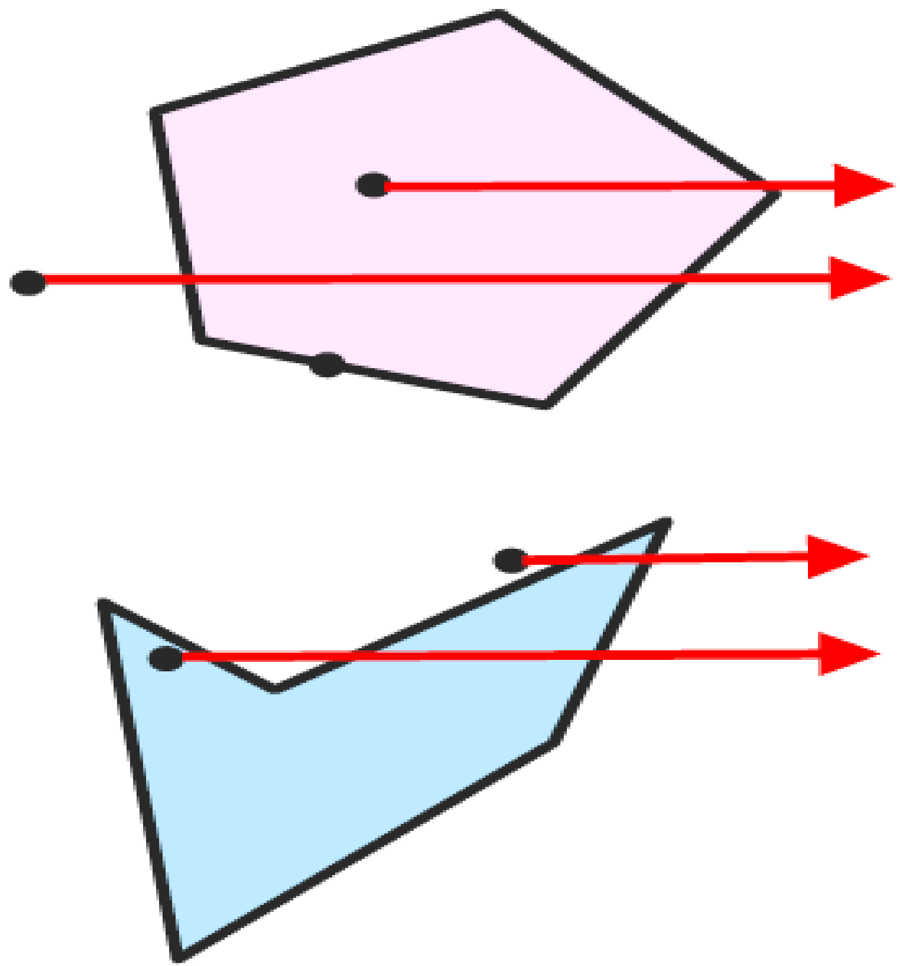
- 在已知P在P_1P_2所在直线上时，判断点积的符号即可知道是否在线段P_1P_2上。
  - 若$PP_1 \bullet PP_2 < 0$，则P在P_1P_2内部
  - 若$PP_1 \bullet PP_2 > 0$，则P在P_1P_2外部
  - 若$PP_1 \bullet PP_2 = 0$，则P与P_1或P_2重合

问题2：点与多边形的位置关系

- 位置关系讨论
  - 点在形内
  - 点在形外
  - 点在边界上



观察

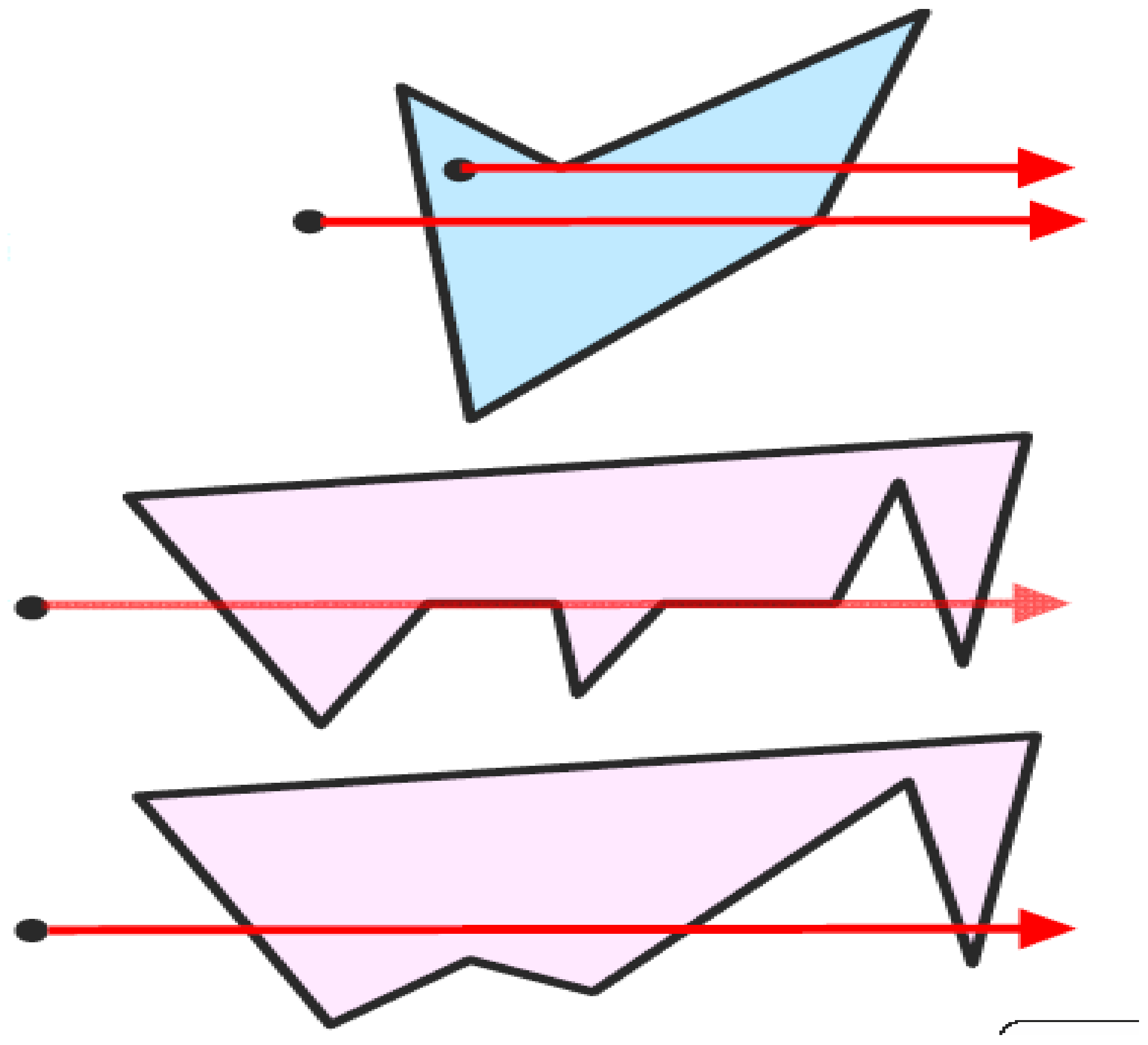


射线法

- 通常取x轴正方向为射线方向
- 奇数次相交，则在形内
- 偶数次相交，则在形外

- 有没有特殊情况？

射线法的特殊情况



解决办法

- 缩点法
- 随机法
- 平移法

- 不够优美？

- 其他方法
  - 转角法：需要反三角函数、开根、浮点除法的计算。因此实际运算的速度慢很多。

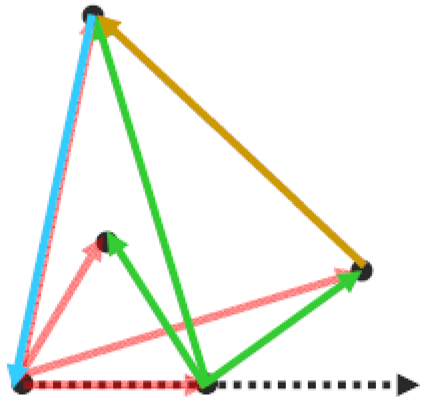
问题3：求凸包

- 凸多边形
  - 整个图形在任一条边的一侧

- 凸包
  - 对于一个平面点集或者一个多边形，它的凸包指的是包含它的最小凸图形或最小凸区域

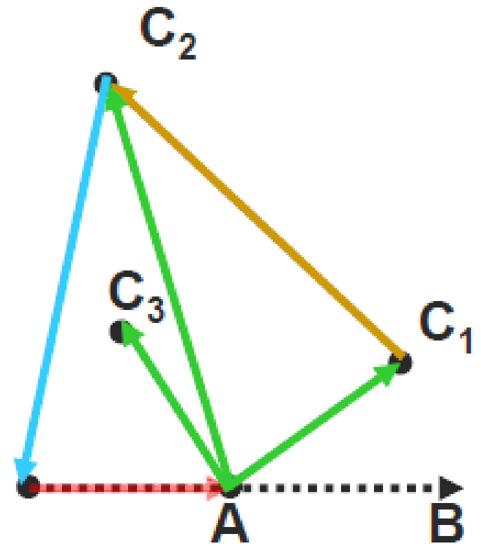
凸包求法：卷包裹法

- 从最左边的最低点P_0开始
- 找一个点P_1，使得P_0为起点的水平方向的射线到P_0P_1的角度最小
- 然后找下一个点P_2,使得P_2P_1到P_1P_0角度最小。
- ……
- 则$P_0P_1…P_m$是凸包上的顶点



卷包裹法细节及效率分析

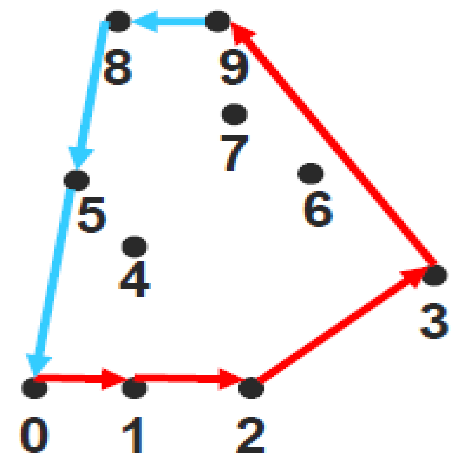
- 实际比较的时候，不一定要用角度来衡量。
  - 可以采用叉乘来判断：只要知道相对的方向（顺时针还是逆时针）就可以
    - 比如判断AC_1比AC_2的夹角小，只要判断AC_1在AC_2的右边
- 这样每次查找需要O(n)的时间复杂度。
- 因此总的时间复杂度为$O(n_2)$



Graham-Scan法

- Graham-Scan算法每一步是得到一个临时凸包
  - 只要当前点在上一条边的左手方向，就加入这个点
- 否则回溯，直到新的点在左手方向为止

Graham-Scan法



- 用水平序
  - 先按y坐标排
  - y相同的按x坐标排
- 2次扫描
  - 先从第1个点即0开始到最后1个点即9得到右链
  - 再从最后1个点即9开始到第1个点即0，不包括已经在右链的点
- 时间复杂度O(nlogn)

凸包的应用

- 凸包的性质
  - 左链、右链
  - 单调性

- 应用问题
  - 点与凸包的位置关系：形内和形外
  - 直线与凸包的位置关系：最近点和最远点
  - ……

小结

- 解析方法
- 点积、叉积
- 判断线段相交
- 面积求法
- 点与多边形的位置关系
- 求解凸包
- 凸包应用

例：Open-air shopping malls(2009宁波赛区)

- 平面上有n个圆，给定他们各自的圆心和半径。保证任意两个圆不会互相重叠。现在求一个大圆，它的圆心与某个给定圆的圆心重合，且对于每一个给定的圆，大圆至少覆盖该圆面积的一半。请求得满足要求的大圆的最小半径。

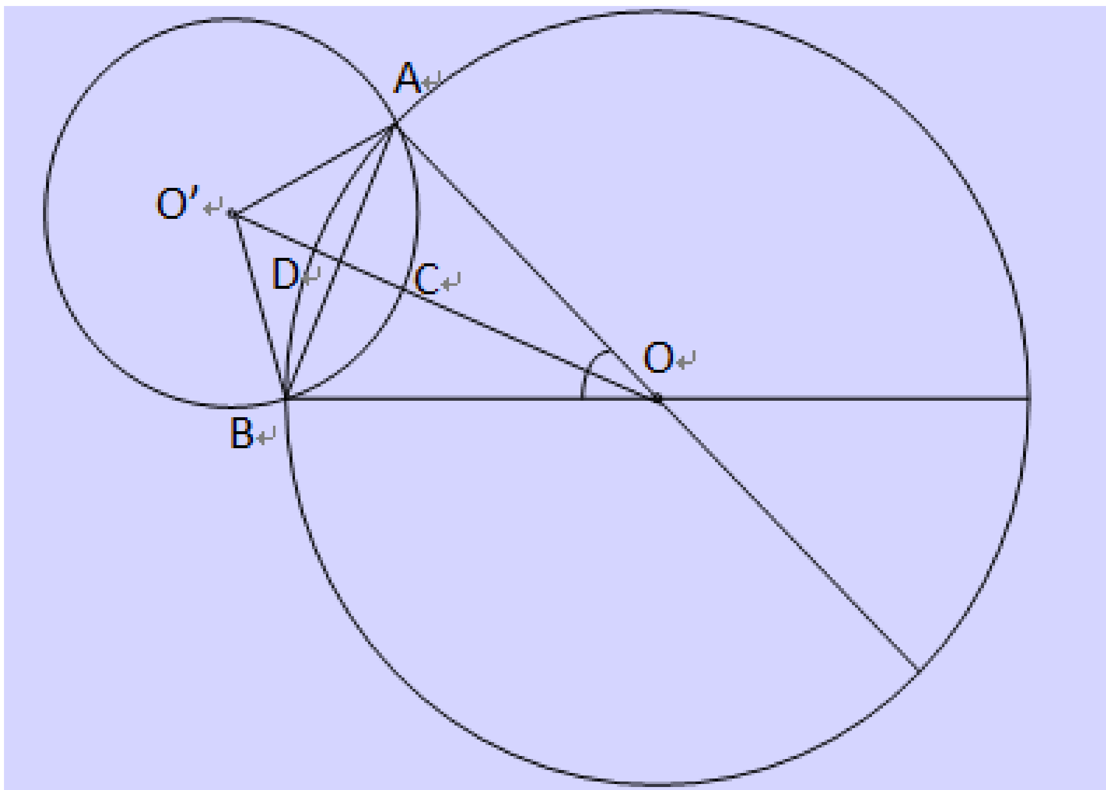
例：Open-air shopping malls(2009宁波赛区)

- 困难问题：直接求满足要求的最小半径
- 简单问题：已知一个半径，要判断它是否覆盖了给定圆的至少一半面积

- 性质：当圆心确定，若半径r的圆可以覆盖每一个给定圆至少一半的面积，那么对于半径R>r的圆，都可以覆盖至少一半的面积。
- 算法：二分答案

例：Open-air shopping malls(2009宁波赛区)

- 求两圆的相交面积



例：Open-air shopping malls(2009宁波赛区)

- 算法流程
  - 枚举圆心位置O_i。
  - 二分查找，求得对于当前圆心位置，满足要求的最小半径r_i
  - 记录上述所有r_i中的最小值，并且输出结果。
- 时间复杂度
  - $O(n^2 \log n)$

例：Rotational Painting(2010杭州赛区)

- 有一块均匀厚度的多边形玻璃板，现在需要将它稳定地竖直放置，求有多少种不同的放置方法。题目描述中的图1和图2分别表示两个多边形的所有放置方法，而图3中的两种放法我们认为是不稳定的。

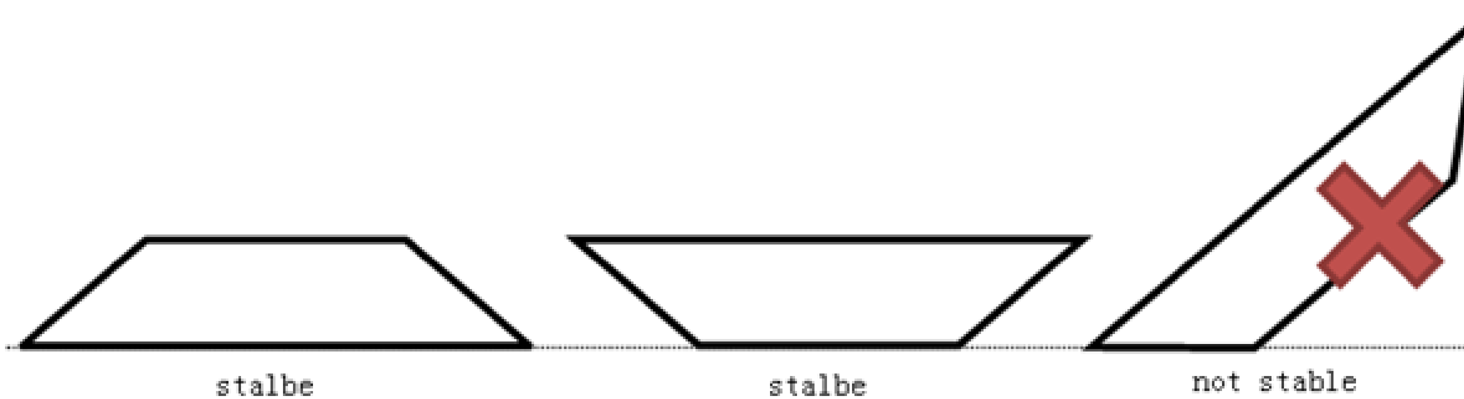
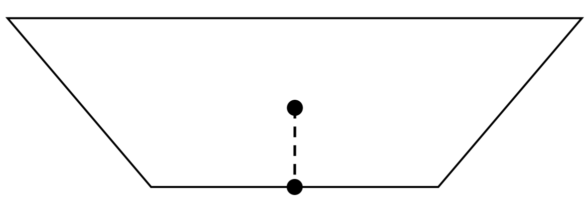
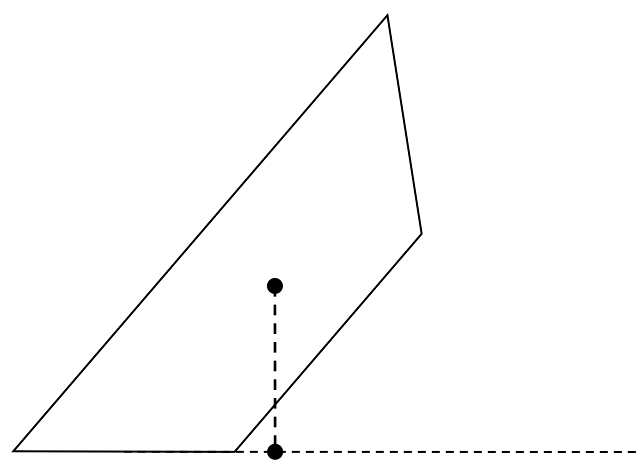


Figure 1

例：Rotational Painting(2010杭州赛区)

- “稳定”的定义
  - 多边形玻璃板的重心向水平面作垂线时，**垂足落在支撑边所在的线段上（不包括线段端点）**



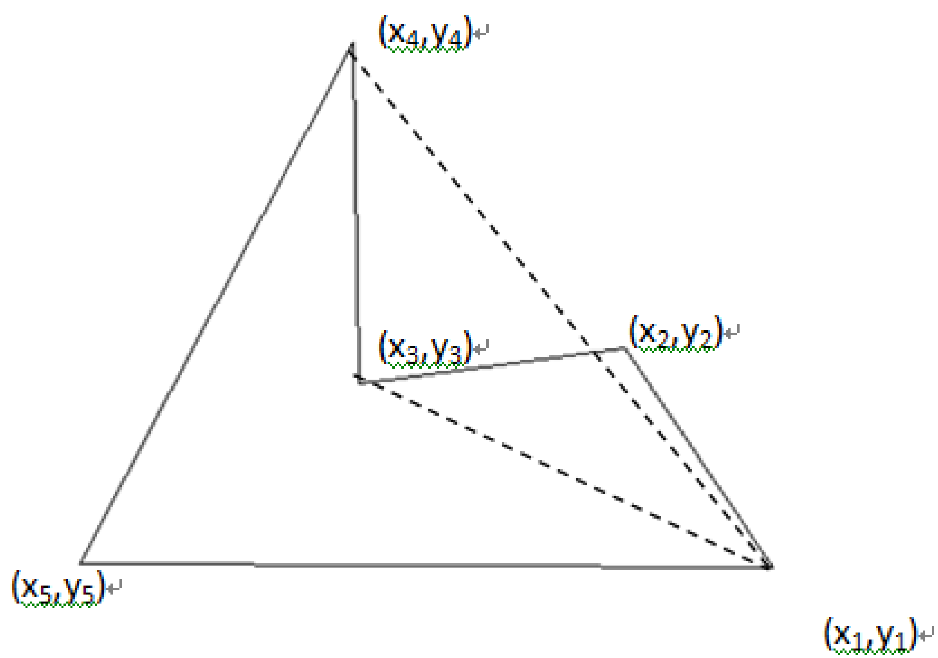


例：Rotational Painting(2010杭州赛区)

- 对多边形**支撑边**的枚举
  - 由于有可能出现凹多边形，因此可供选择的“支撑边”包括该多边形的**凸包**的所有边。
- 重心的求法
  - 有向质量（回顾有向面积）

例：Rotational Painting(2010杭州赛区)

- 重心的求法
  - 对于三顶点坐标为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)及(x_3,y_3) 的三角形，其重心公式为：
    - $x_o=(x_1+x_2+x_3)/3$
    - $y_o=(y_1+y_2+y_3)/3$
  - 多边形三角剖分
    - 有向面积作为质量（有向质量）



例：Rotational Painting(2010杭州赛区)

- 总结
  - 求出多边形凸包；
  - 求出多边形重心坐标；
  - 由重心向每一条凸包边所在直线引垂线，通过垂足的位置判断该凸包边能否作为支撑边。并在枚举过程中统计符合条件的支撑边（即摆放方法）的个数。

例：Shade of Hallelujah Mountain(2010福州赛区)

- 给出一个点光源、一个凸多面体和一个平面，保证多面体和光源处在平面的同一侧，要求平面上阴影的面积。

例：Shade of Hallelujah Mountain(2010福州赛区)

- 本题的解题过程可以分为两步
  - 第一步首先求出凸多面体的每个顶点在平面上的投影
  - 第二步将平面旋转到x-y平面，用二维凸包求出阴影面积大小。当然也可以求出阴影多边形以后用三维凸包算面积。

例：Shade of Hallelujah Mountain(2010福州赛区)

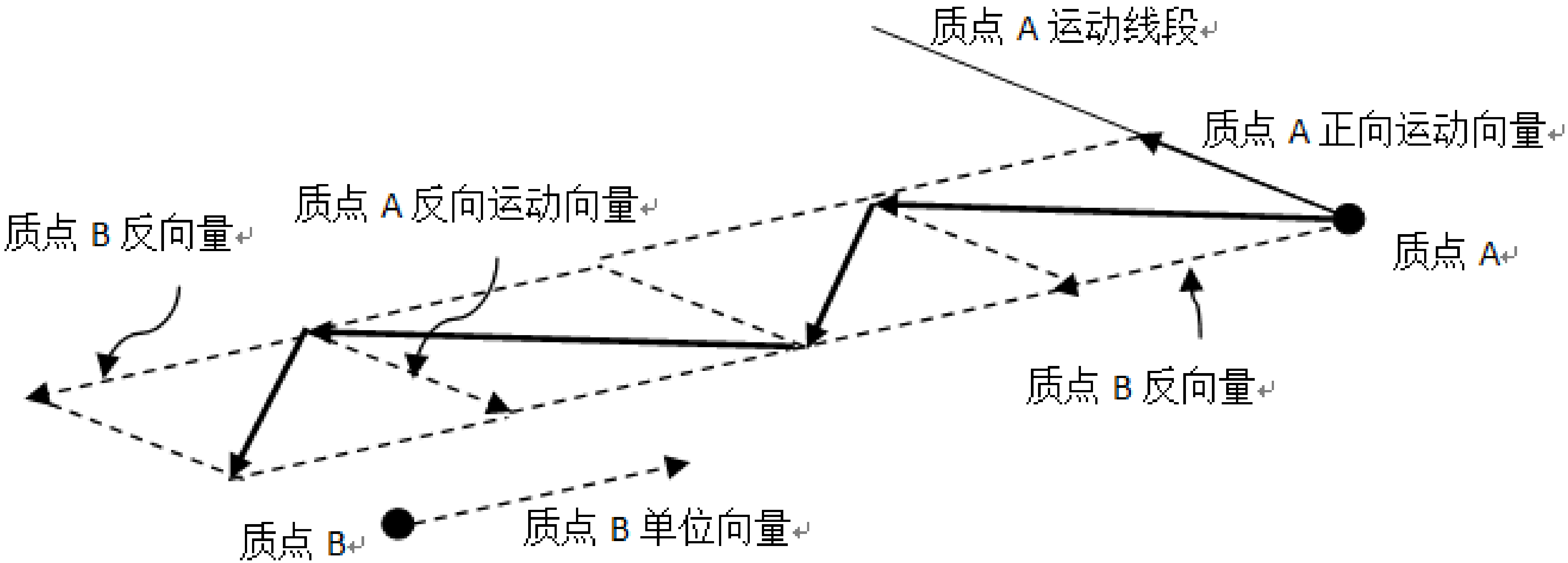
- 第一步（空间解析几何）
  - 求顶点在凸多面体投影这一步相当于求射线和平面的交。射线可以看成起点加向量的形式，即$(x_s,y_s,z_s)+t(dx,dy,dz)$ $t\geq 0$的形式，联立平面方程$ax+by+cz=d$可以求出交点位置。
  - 在求交点结束以后，我们可以知道，当交点个数为0时，阴影大小为0；当交点个数等于多面体顶点个数的时候，阴影面积是有限值；否则阴影面积是无限的。
- 第二步（空间解析几何）
  - 旋转平面这一步在题目的提示中有比较详细的介绍，没有准备三维旋转公式的参赛选手也是有足够的知识去解决这道题的。
- 第三步（计算几何）
  - 求凸包O(nlogn)

例：Tornado(2008北京赛区)

- 平面上一个质点从点(x_{t1},y_{t1})开始，以速度v_t在点(x_{t1},y_{t1})到(x_{t2},y_{t2})之间做往返匀速直线运动。另一个质点从点(x_{w1},y_{w1})开始，以速度v_w沿着从(x_{w1},y_{w1})为端点的某射线方向作匀速直线运动。设两个质点在运动过程中最近的距离为d。
- 给定两个阈值d_l和d_w，若$d<d_l$则输出“Dangerous”；若$d>d_w$则输出“Miss”；否则输出“Perfect”。

例：Tornado(2008北京赛区)

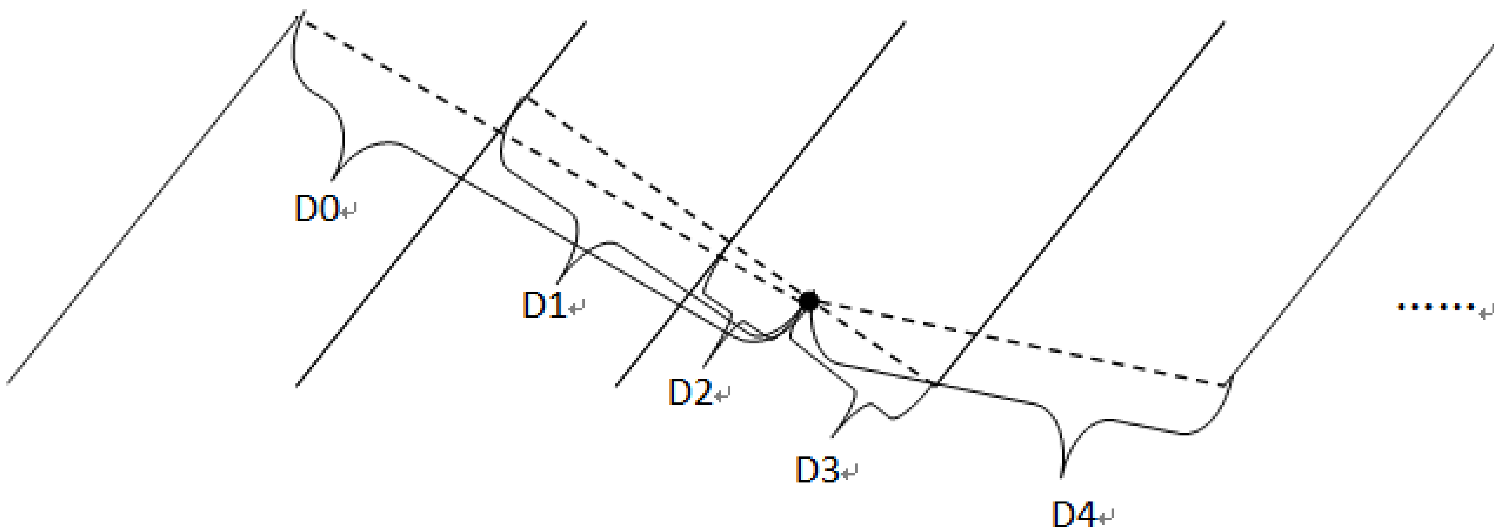
- 相对运动



例：Tornado(2008北京赛区)

- 求质点B到折线的最近距离

➔求质点B到两组等距平行线段的最近距离



D0 > D1 > D2 < D3 < D4 < ……

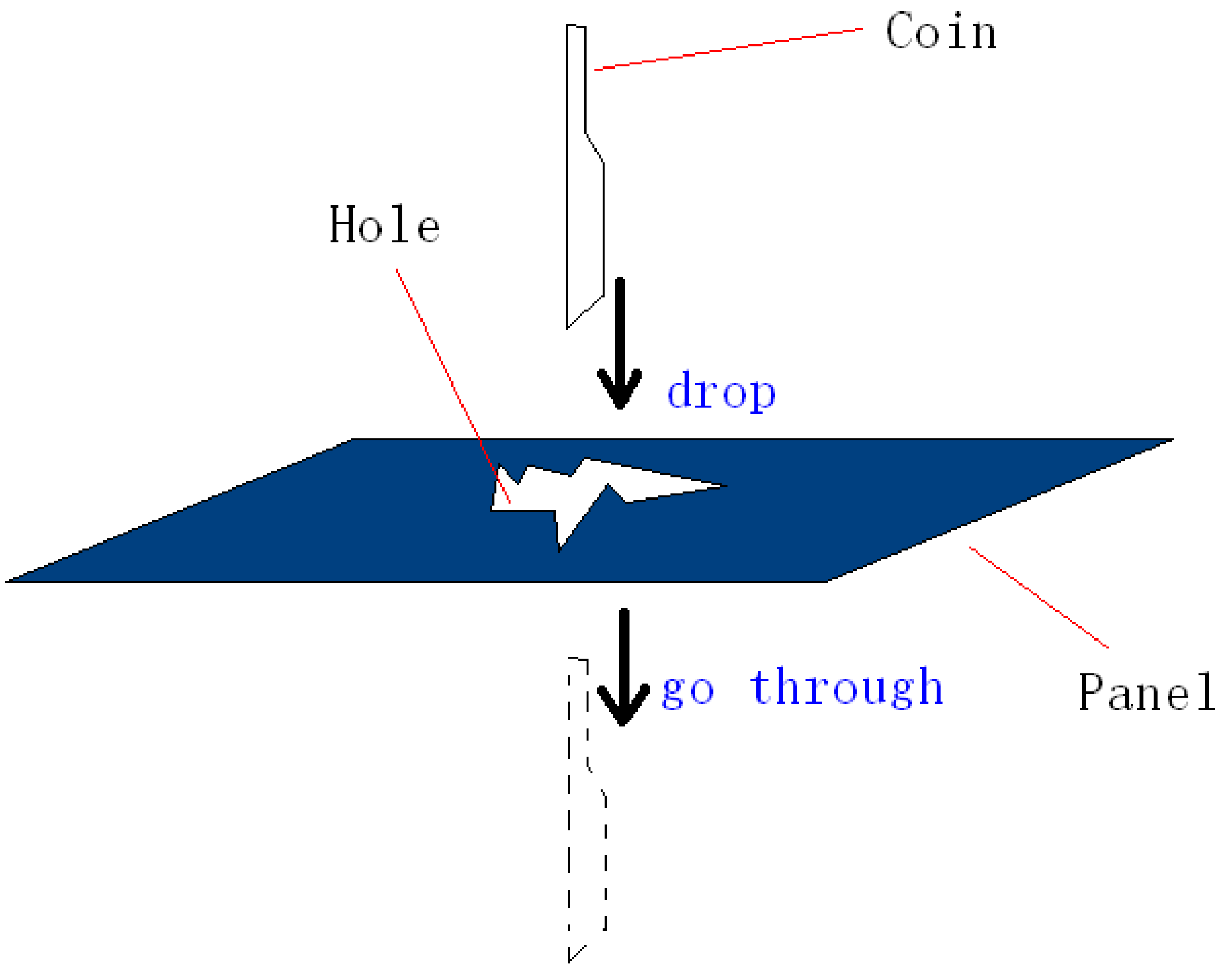
例：Tornado(2008北京赛区)

- 特殊情况
  - 沿射线走的质点速度为0的情况。
  - 沿线段来回走的质点速度为0的情况。
  - 沿线段来回走的质点运行的线段长度为0的情况。
  - ……

例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

- 有一枚多边形的硬币，以及平面上一个多边形的孔洞。要求判断能否做到：在孔洞上方为硬币选择好一个位置后松手，让硬币竖直下落，硬币会穿过孔洞（假定硬币的初始角度可以随意调整，而且硬币下落过程中在任何方向都不会发生旋转）。实际上就是要问是否存在该硬币的一个平面投影，该投影否能完全被多边形孔洞包含。孔洞和硬币都有可能是凹多边形的，但都不会自交。

例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

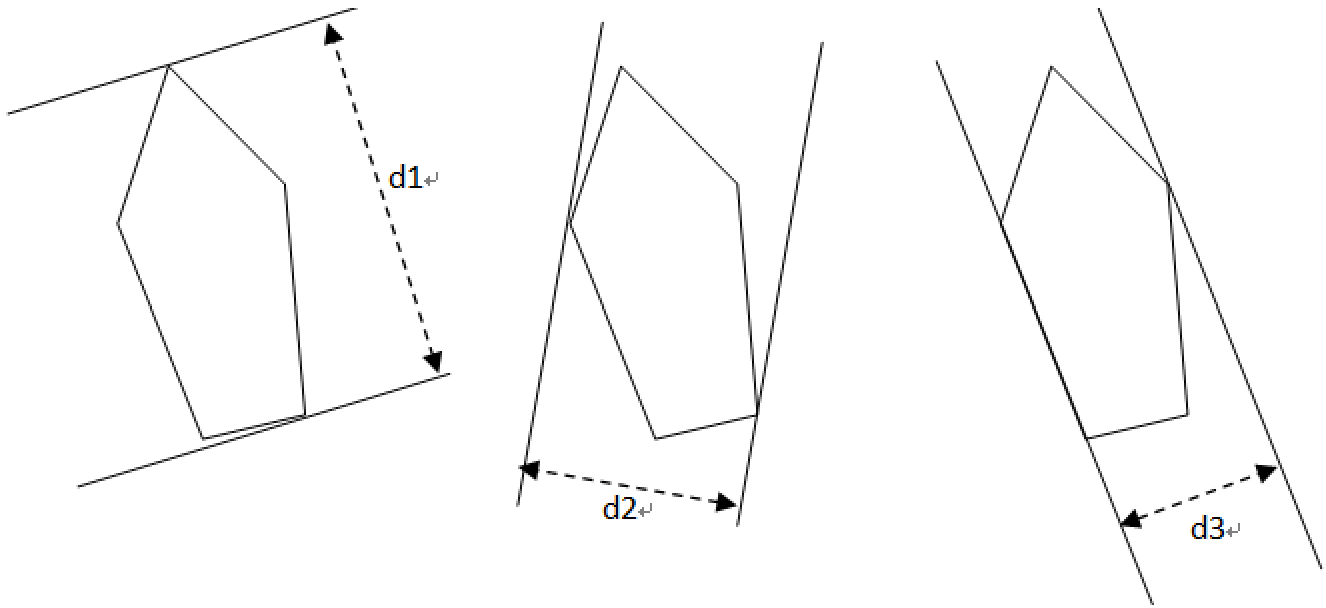


例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

- 硬币“径直”下投的分析
  - 最佳的投硬币方案一定是垂直下投

例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

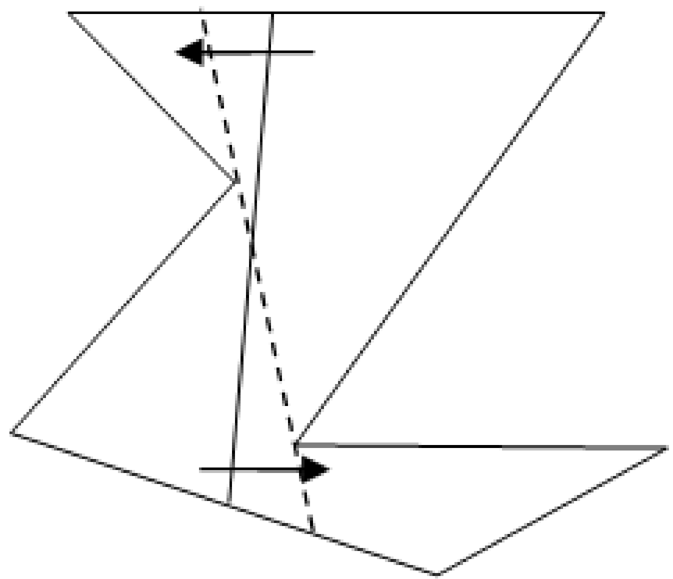
- 求硬币多边形最短的垂直投影线段的长度l_{max}



最短距离的两条平行切线，其中一条一定平行于某条凸包边。

例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

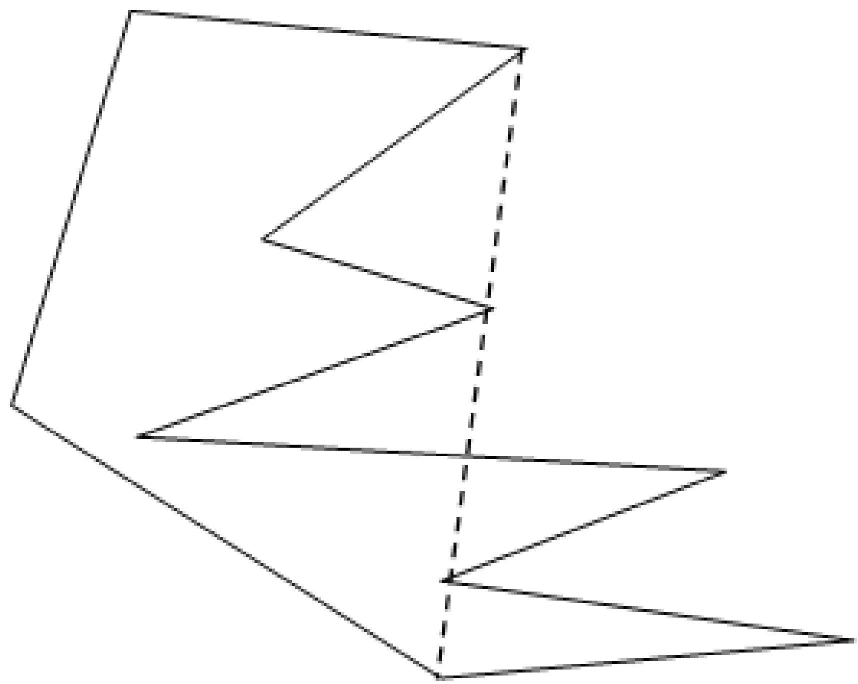
- 求孔洞多边形长度最长且完全在孔洞内部的线段长度L_{min}



- 一定有两个多边形的顶点在这样的最长线段上

例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

- 求得某条直线在多边形内部的最长段



例：Ancient vending machine(2009宁波赛区)

- 求得上述两个问题之后，若l_{max}<=L_{min}，则原问题有解，硬币是legal的；否则原问题无解，硬币是illegal的。
- 整个算法的时间复杂度是$O(n^4)$.

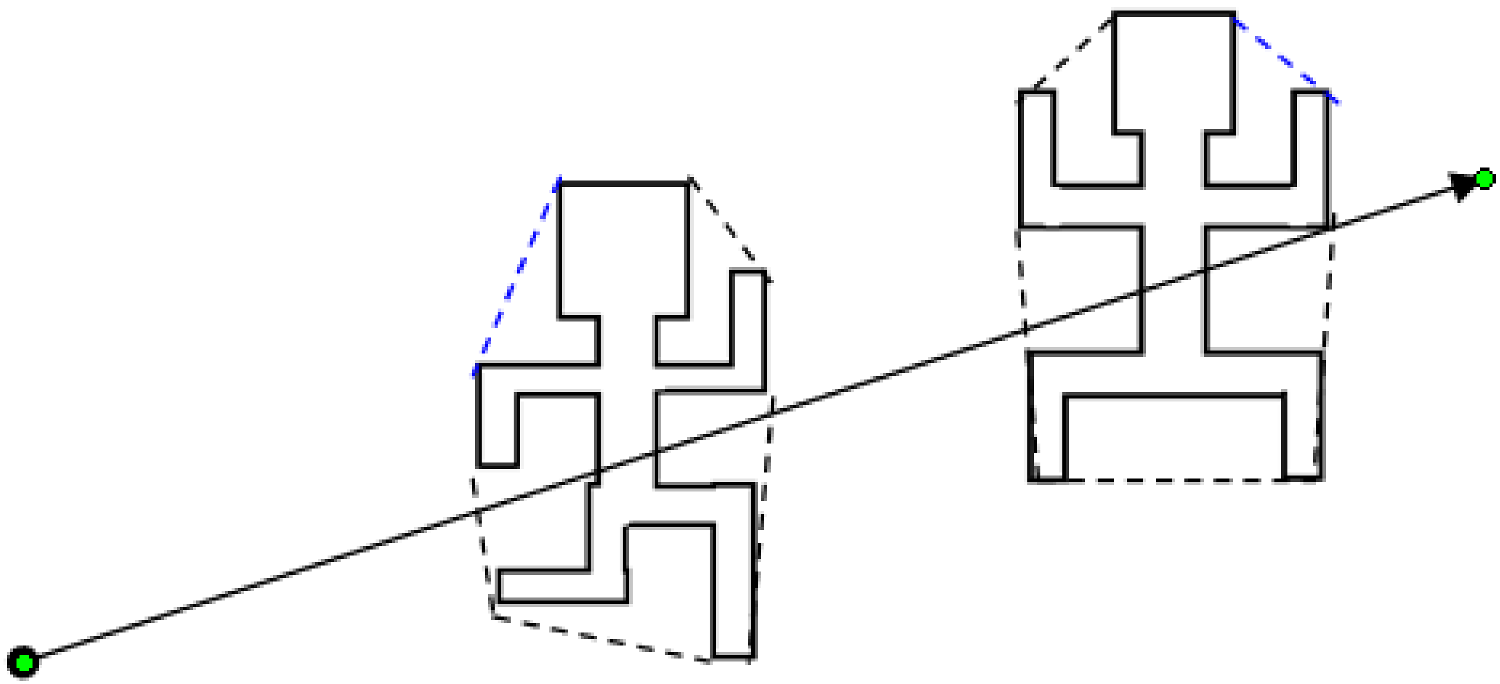
例：Gunshots(2010杭州赛区)

- 平面上有M个任意多边形（可凹且可自交），以及N条射线。保证任何两个多边形之间可以用一条直线完全分离，任一射线的端点和任一多边形之间也可以用一条直线完全分离。对于每一条射线，若其与某些多边形相交，求出交点距离射线端点最近的多边形编号；若没有于任何多边形相交，输出“MISS”。

例：Gunshots(2010杭州赛区)

- “**we assume that any two polygons can be completely separated by a line. Also each start point of the gunshot can be separated from each polygon by a line.**”（我们假设任意两个多边形都可以被一条直线完整分离。并且任一射线起点和任一多边形都可以被一条直线完全分开）

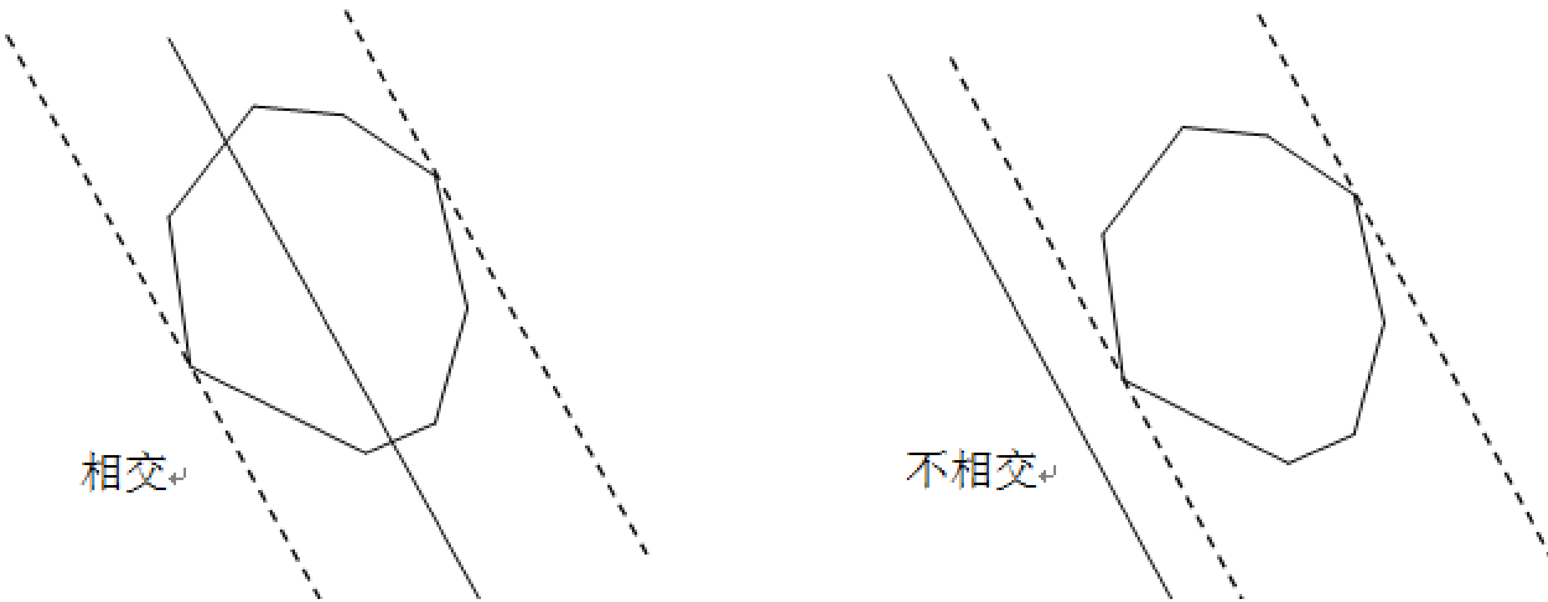
例：Gunshots(2010杭州赛区)



- **判断射线与凸包是否相交。**

➔判断直线与凸包是否相交

例：Gunshots(2010杭州赛区)



- 利用凸包左右链斜率单调性降低时间复杂度

- THE END -

Thank you for your attention!

例：POJ 2972 Laser-ball (Northeastern Europe 2004, Western Subregion)

- 题目大意：在平面上有N(<=100)块镜子，镜子看作是线段，双面反光，镜子之间互不相交。激光威力有限，至多反射K(<=10)次，允许在同一面镜子上反射多次，并且保证N^K<=1e6。激光可以贴着镜子传播，并且在激光与目标点误差小于1e-4的时候认为是击中。激光从(0,0)发射，问是否能够击中(X,Y)点？如果可以，给出一种方案。

- 思考：反射到底表示什么？N^K的值又有什么意义？

例：Laser-ball

- 题目只要求求出一种方案，因此我们从镜面反射的物理意义来处理这道题。

- 很明显，题目意思中的N^K<=1e6就是枚举的一个提示，而且镜子可以多次反射，降低了很多需要处理的繁杂情况。

例：Laser-ball

- 每多一次镜面反射，对每面镜子相当于多出了一个目标点。因此，多一次镜面反射总目标点的数目就翻了N倍。

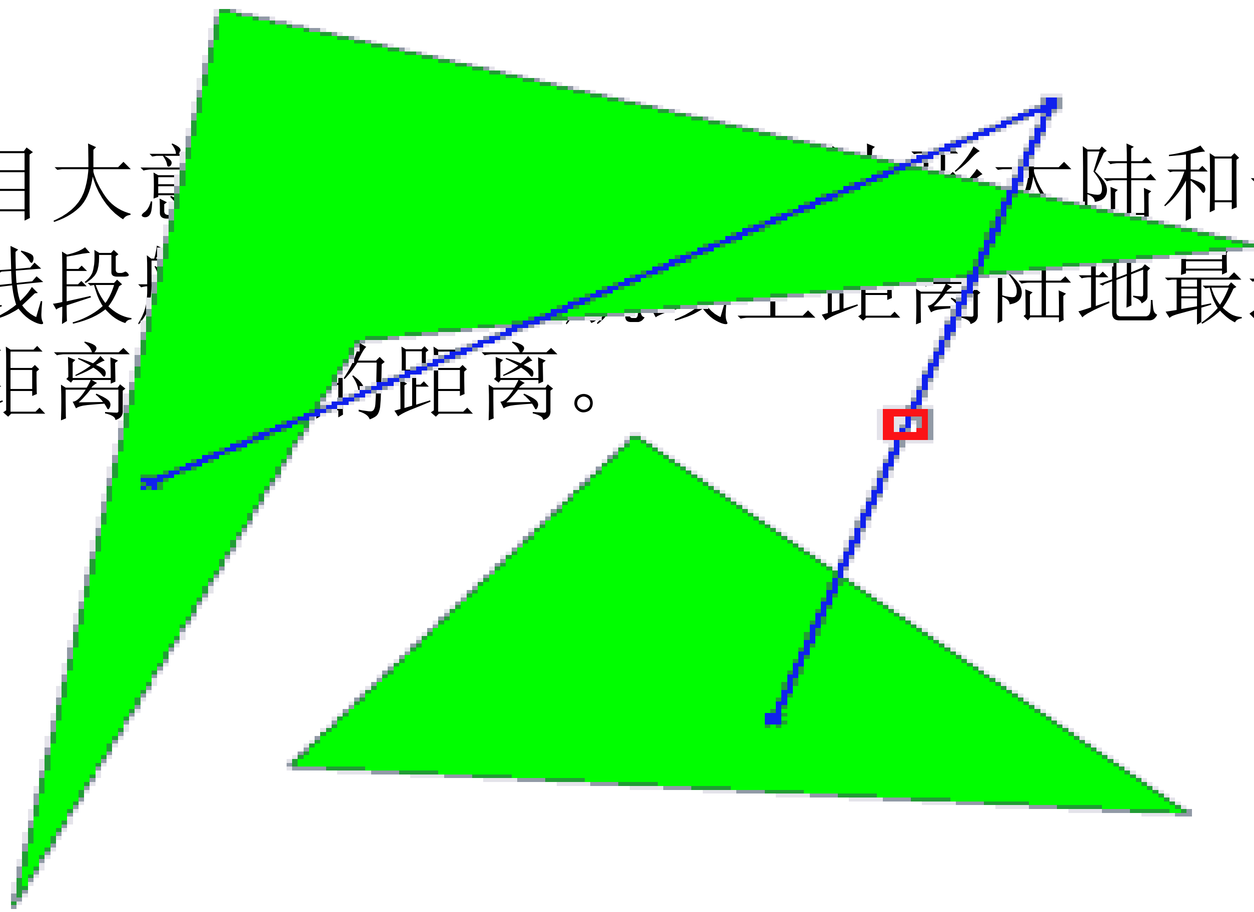
- 题目限定了N^K<=1e6，就意味着就算不去除任何重复计算的情况，时间复杂度依然能够承受。

例：Laser-ball

- 因此，我们列举出所有经过至多K次镜面反射之后目标点可能存在的位置。
- 算出这些就完了吗？
- NO!必须对这些位置进行验证，能否成功击中目标？
- 验证的方法则是模拟……

例：POJ 3502 Flight Safety (Northwestern Europe 2007)

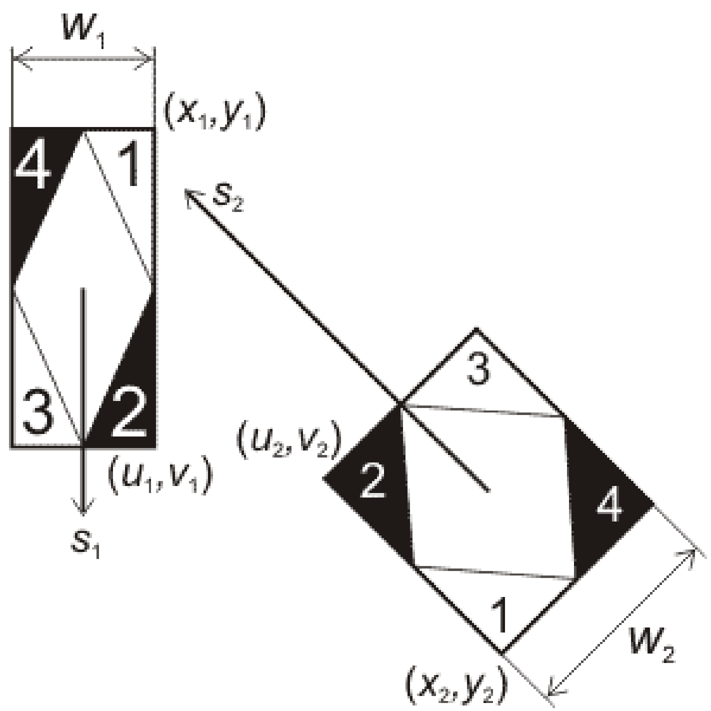
- 题目大意 陆和一条
  折线段 上距离陆地最远的
  点距离 的距离。

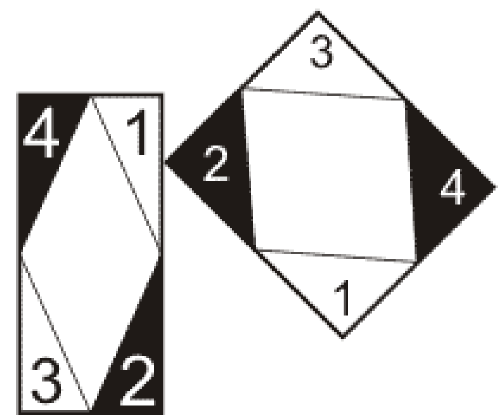


例：Flight safety

- 思考：距离大陆最远的点有什么特点？如何在能找到这个点？
- 不断扩展原来的大陆的边界，那么最后一个被覆盖的点一定是距离大陆最远的点
- 二分扩展的大小，然后模拟扩展的结果，检验覆盖的结果。

例：POJ 3433 Road accident (Northeastern Europe 2005, Far-eastern Subregion)





例：Road accident

- 题目大意：有两辆车子行驶在路上。现在已知初始时车辆左前方和左后方的坐标，车子的宽度，车子行进的方向以及速度。车子被看作是矩形，并根据位置划分为4个区域。求两车撞击的时候到底是哪两个区域相撞？同时相撞时取编号小的。

- 思考：车子怎样才算相撞？车子相撞的状态究竟有多少种？

例：Road accident

- 通过刚刚的描述，本题的麻烦之处在于模拟两车相撞的过程，在两车都运动的时候，无法直观地计算出相撞的情况。

- 经典物理方法：选择“相对参考系”，令一台车子固定不动，再来分析另一台车子的情况。

例：Road accident

- 然后，讨论车子相撞时候的样子。
- 点对点？
- 点对线？
- 线对线？
- 依次枚举各种情况下两车相撞的时间，选择其中最小的一个，那就是两车真正相撞的情况。