组合数学

主讲人：万涛

E-mail: wtommy84@gmail.com

组合数学简介

组合数学是一个古老而又年轻的数学分支。

组合学问题到处可见，通常分为两类大问题：

(1)排列的存在性

(2)排列的计数和分类

引题

- 棋盘的完美覆盖
- 切割立方体
- 幻方
- 四色问题
- 36军官问题
- 最短路径问题
- Nim取子游戏

Nim取子游戏

Nim取子游戏是由两个人面对若干堆石子进行的游戏。设有$k \le 1$堆石子， 各堆分别含有$n_1, n_2, \ldots, n_k$个石子。游戏的目的就是选择最后剩下的硬币。游戏法则如下：

(1) 游戏人交替进行游戏

(2) 当轮到每个游戏人取子时，选择这些石子堆中的一堆，并从所选的堆中取走至少一个石子

Nim取子游戏

想法：　2进制

定义：　平衡态

游戏结论：任何人可以在非平衡态做一次取子，使其变成平衡态。任何人在平衡态下取子一定会打破平衡态。

Nim取子游戏变化题目（1）

一局游戏在两个游戏人之间如下交替进行：游戏从一空堆开始。当轮到一个游戏人时，他可以往该堆中加进1, 2, 3或4枚硬币。往堆中加进第100枚硬币的游戏人为得胜者。确定在这局游戏中是游戏人I还是游戏人II能够确保取胜。取胜的策略是什么？

Nim取子游戏变化题目（1）

此问题是一个更简单的问题，答案很明显，我们发现游戏人II一定是赢家，因为他只需要保持他和游戏人I放硬币的数和为5即可。又由于100可以被5整除，所以游戏人II一定是赢家。

Nim取子游戏变化题目（2）

有一棵树，高度为h($\leq 10^8$)，现在有n($\leq 10^5$)只猴子分别在树上n个不同的位置，两个游戏人来玩这个游戏，在这种状态下，两个玩家可以命令任何一只猴子往上爬至少一个格子，当没有任何猴子有爬的空间时，这个玩家算为输掉了游戏？请问如果事先告诉你这些状态，你能判断出两个玩家的输赢吗？

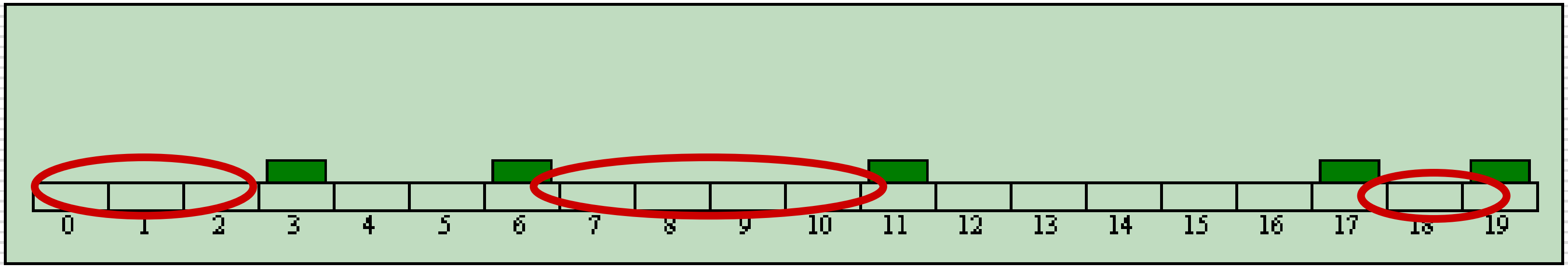
Nim取子游戏变化题目（2）

仔细考虑这个Nim建模的问题，通过把Nim取子的问题转化成，又可取子，又可放子问题。

这样完全可以把n分为奇数、偶数两个情况，把每两个相临猴子的距离差作为Nim取子每堆石子的数量。

Nim取子游戏变化题目（2）

- 如果有偶数只猴子，则把两两相邻的猴子之间的距离看作一堆石子
- 如果有奇数只猴子，把最上面一只猴子到树顶的距离看作一堆石子，剩下的猴子同上。



变成了一个“可以加石子”的Nim!

Nim取子游戏变化题目（2）

- 实际上，“加石子”的性质并不影响结果。如果一方面对平衡态时选择加石子，那么另一方可以选择把加上的石子原样拿走，仍把平衡态留给对方。
- 而本题由于猴子的爬行方向有限制，这个过程不可能无限进行下去。游戏总会有一个结束。

Nim取子游戏变化题目（3）

假设有n个Nim堆，每堆的石子数量为a_i，现在把经典的Nim取子的方法改变，设一个集合s，这个集合里有k个数，每个数为s_i，我们说如果在任何一个堆里取石子的话，你只能拿个数在集合s中的一种情况。再规定，如果说哪个游戏人无法取子，则说明他输。请问如果给你一个这样的状态，你能否确定谁是赢家吗？

Nim取子游戏变化题目（3）

此问题为有限制的Nim取子问题，希望参考Game Theory论文中的Sprague-Grundy Function。

这种问题可以解决一类Nim取子问题。

S-G函数（博弈论）

1. 如果说在普通的Nim取子的问题上，加一个特殊的限制，就是每个人在选择某一堆后，只能拿2^m个石子，请问谁是最后的赢家？

2. 如果说在普通的Nim取子的问题上，加一个特殊的限制，就是每个人在选择某一堆后，不能拿超过这堆数量一半的石子，请问谁是最后的赢家？

一些简单的知识

- 鸽笼原理
- 生成排列数
- 容斥原理

错位排列

经典问题：

在一个聚会上，n位绅士查看他们的帽子。有多少种方式使得这些绅士中没有人能够拿到他们来时所戴的帽子？

错位排列

定理：对于n ≥ 1，

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

递推表达式:

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

Catalan数

第n个Catalan数为：

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Catalan序列递推关系式：

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

$$C_1 = 1$$

Catalan数的经典问题

1. $P=a_1a_2a_3...a_n$为n个数$a_1a_2a_3...a_n$的乘积,依据乘法的结合率,不改变其顺序,只用括号表示成对的乘积.试问有几种不同的乘法方案?
2. n个1和n个0组成一2n位的2进制数，要求从左到右扫描，1的累计数不小于0的累计数，试求满足这条件的数有多少？
3. 设在圆上选择2n个（等间隔的）点。请问将这些点成对的连接起来使得所得到的n条线段不相交的方法数是多少？

经典的买票问题

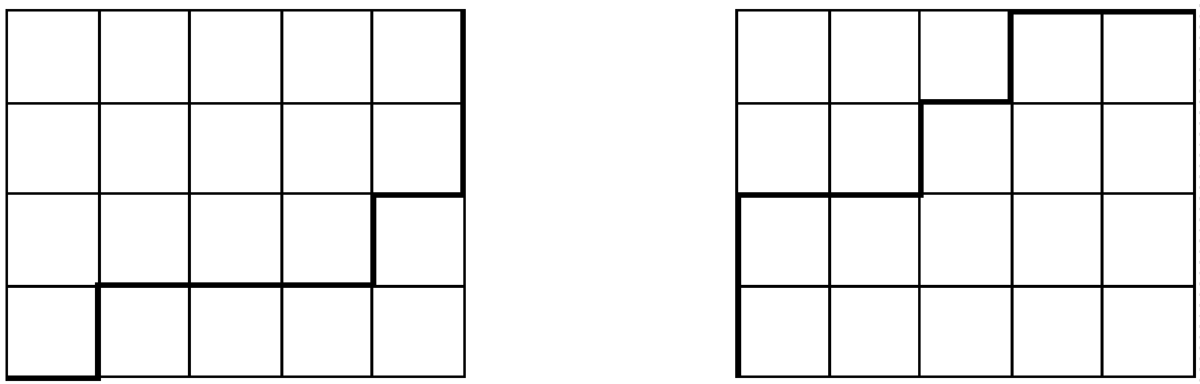
本次足球比赛的门票为50元，而站排买票的球迷有m个人手里拿着一张面值50元的钞票，有n个人手里拿着一张面值100元的钞票。工作人员事先忘了为售票处准备任何零钱，请问您是否能算出这(m+n)个人共有多少种排队方式买票，使售票处不至于出现找不开钱的尴尬局面？

经典的买票问题

此问题堪称经典，是因为如果说当m=n时，恰好是个Catalan数问题。并且可以轻松转化成2进制串01限制问题，和方格对角限制走法问题。但是由于题目中并没有说明m一定等于n，所以本问题要再复杂一点？

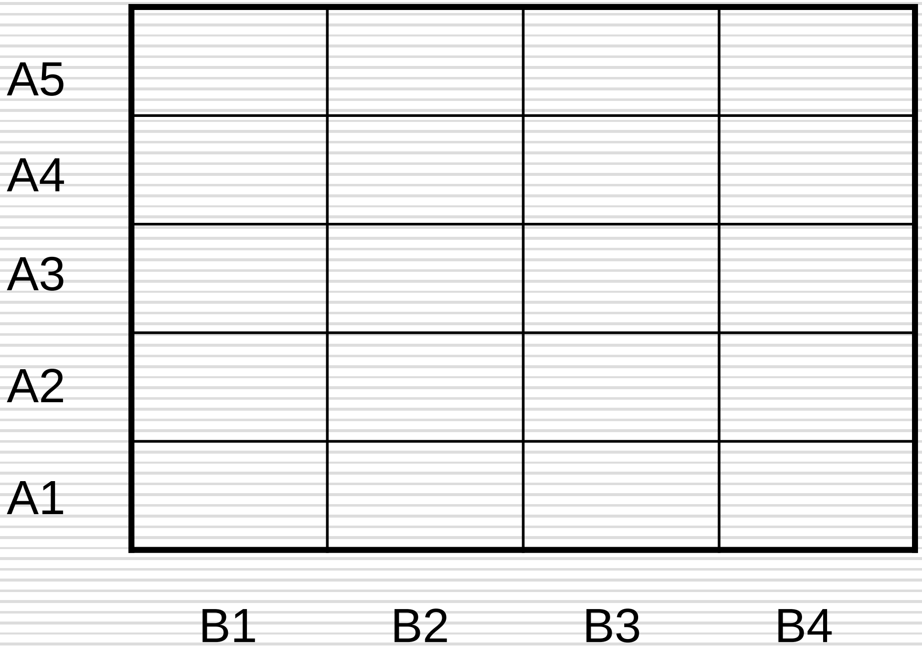
经典的买票问题

让我们先来看一个简单的引题



请问从图中的左下角到右上角有多少条路径呢？（你只能向上走或者向右走）

经典的买票问题



如果将这个图的每一小段边进行编号又会怎样呢？？

经典的买票问题

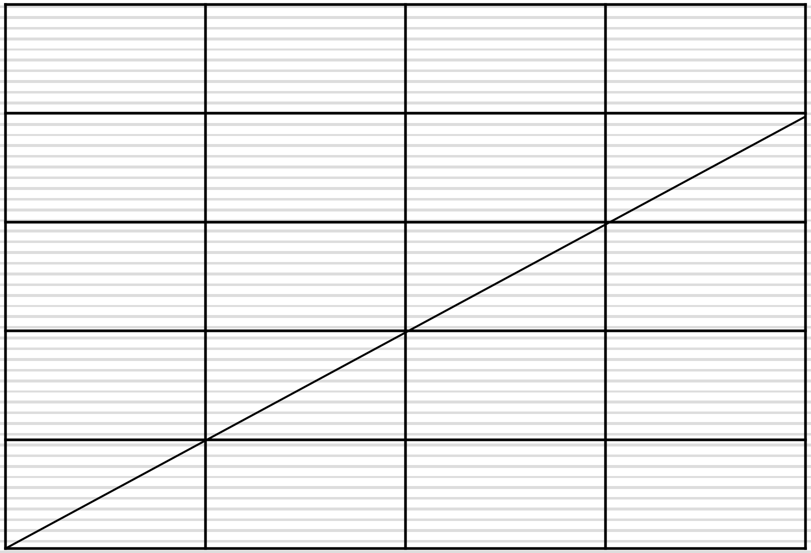
答案很显然：

对于A和B两组边，他们的排列顺序都应该符合1,2,3……,那么最后得出的答案（所谓的路径）也一定一个A_iB_j的序列，我们很容易的就得出路径的总数应该是：

$$C_{m+n}^{m} \quad \text{或者} \quad C_{m+n}^{n}$$

经典的买票问题

假设我们巧妙的在格子上加一条对角线，又会出现什么情况呢？



经典的买票问题

其实此问题可以用递推的方法来解决：

用f(m, n)表示m个50元和n个100元的人站排的方案数，有：

$$f(m,n)=\begin{cases} 0 & m<n \\ 1 & n=0 \\ f(m,n-1)+f(m-1,n) & others \end{cases}$$

二分图

二分图的构图应该说是一个难点。

二分图的最大匹配： 匈牙利算法（最大流）

二分图的最优匹配： KM算法（最小费用流）

二分图

经典问题：

稳定婚姻

延迟认可算法