求三角函数最小正周期的五种方法

张英

关于求三角函数最小正周期的问题，是三角函数的重点和难点，教科书和各种教参中虽有讲解，但其涉及到的题目类型及解决方法并不多，学生遇到较为复杂一点的问题时，往往不知从何入手。本文将介绍求三角函数最小正周期常用的五种方法，仅供参考。

一、定义法

直接利用周期函数的定义求出周期。

例 1. 求函数 $y=\cos(\frac{m}{5}x-\frac{\pi}{6})$ （m≠0）的最小正周期。

解：因为 $y=\cos(\frac{m}{5}x-\frac{\pi}{6})$

$$=\cos(\frac{m}{5}x-\frac{\pi}{6}+2\pi)$$
$$=\cos[\frac{m}{5}(x+\frac{10}{m}\pi)-\frac{\pi}{6}]$$

所以函数 $y=\cos(\frac{m}{5}x-\frac{\pi}{6})$ （m≠0）的最小正周期

$$T=\frac{10\pi}{|m|}$$

例 2. 求函数 $y=\cot\frac{x}{a}$ 的最小正周期。

解：因为 $y=\cot\frac{x}{a}=\cot(\frac{x}{a}+\pi)=\cot[\frac{1}{a}(x+a\pi)]$

所以函数 $y=\cot\frac{x}{a}$ 的最小正周期为 $T=|a|\pi$ 。

二、公式法

利用下列公式求解三角函数的最小正周期。

1. $y=A\sin(\omega x+\phi)+h$ 或 $y=A\cos(\omega x+\phi)+h$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ 。

2. $y=A\tan(\omega x+\phi)+h$ 或 $y=A\cot(\omega x+\phi)+h$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$ 。

3. $y=|\sin\omega x|或y=|\cos\omega x|$的最小正周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$。

4. $y=|\tan\omega x|或y=|\cot\omega x|$的最小正周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$

例 3. 求函数$y=|\tan 3x|$的最小正周期。

解：因为$T=\frac{\pi}{|\omega|}而\omega=3$

所以函数$y=|\tan 3x|$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{3}$。

例 4. 求函数$y=\cot(3-\frac{n\pi}{m}x)$的最小正周期。

解：因为$T=\frac{\pi}{|\omega|}而\omega=|-\frac{n\pi}{m}|$，

所以函数$y=\cot(3-\frac{n\pi}{m}x)$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{|-\frac{n\pi}{m}|}=|\frac{m}{n}|$。

三、转化法

对较复杂的三角函数可通过恒等变形转化为$y=A\sin(\omega x+\phi)+h$等类型，再用公式法求解。

例 5. 求函数$y=\sin^6 x+\cos^6 x$的最小正周期。

解：因为$y=\sin^6 x+\cos^6 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$

$=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}$

所以函数$y=\sin^6 x+\cos^6 x$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$。

例 6. 求函数$f(x)=4\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x$的最小正周期。

解：因为$f(x)=4\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x$

$$
\begin{aligned}
&=2\sin 2x+\cos 2x+1\\
&=\sqrt{5}\sin(2x+\phi)+1
\end{aligned}
$$

其中$\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\phi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

所以函数$f(x)=4\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$。

四、最小公倍数法

由三角函数的代数和组成的三角函数式，可先找出各个加函数的最小正周期，然后找出所有周期的最小公倍数即得。

注：

1. 分数的最小公倍数的求法是：（各分数分子的最小公倍数）÷（各分数分母的最大公约数）。

2. 对于正、余弦函数的差不能用最小公倍数法。

例 7. 求函数$y=\csc 4x+\tan\frac{3x}{2}$的最小正周期。

解：因为 csc4x 的最小正周期$T_1=\frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{3x}{2}$的最小正周期$T_2=\frac{2\pi}{3}$，由于$\frac{\pi}{2}$和$\frac{2\pi}{3}$的最小公倍数是2π。

所以函数$y=\csc 4x+\tan\frac{3x}{2}$的最小正周期为$2\pi$。

例 8. 求函数$y=\sin\frac{2}{7}x+\cot\frac{4}{5}x$的最小正周期。

解：因为$\sin\frac{2}{7}x$的最小正周期$T_1=7\pi$，$\cot=\frac{4}{5}x$最小正周期$T_2=\frac{5}{4}\pi$，由于7π和$\frac{5}{4}\pi$的最小公倍数是35π，

所以函数$y=\sin\frac{2}{7}x+\cot\frac{4}{5}x$的最小正周期为 T＝$35\pi$。

例 9. 求函数$y=\sin x-2\cos 2x+4\sin 4x$的最小正周期。

解：因为 sinx 的最小正周期$T_1=2\pi$，$\cos 2x$的最小正周期$T_2=\pi$，

sin4x 的最小正周期$T_3=\frac{\pi}{2}$，由于2π，π，$\frac{\pi}{2}$的最小公倍数是 2π。

所以函数$y=\sin x-2\cos 2x+4\sin 4x$的最小正周期为 T＝$2\pi$。

五、图像法

利用函数图像直接求出函数的周期。

例 10. 求函数$y=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期。

解：函数$y=|\sin x|+|\cos x|$的图像为图 1。

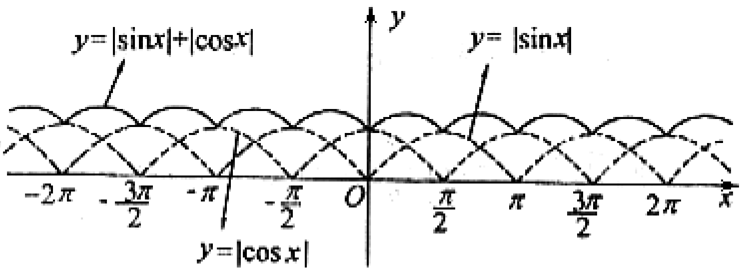

图 1

由图 1 可知：函数的最小正周期为$T=\frac{\pi}{2}$。