

如何判断一个点在一条有向边的左边还是右边？这个利用几何上向量积（叉积）的求解公式即可。如果有向边 1->2 叉乘有向边 1->3 的结果为正，说明 2 在有向边 1->3 的左边，比如图 9-4；如果有向边 1->2 叉乘有向边 1->3 的结果为负，说明 2 在有向边 1->3 的右边，比如图 9-5。

具体过程请参看如下代码中的 `crossProduct` 方法，该方法描述了向量 $(x1,y1)$ 叉乘向量 $(x2,y2)$ ，两个向量的开始点都是原点。

```
public double crossProduct(double x1, double y1, double x2, double y2) {
    return x1 * y2 - x2 * y1;
}
```

至此，我们已经解释了解法二的所有细节，全部过程请参看如下代码中的 `isInside2` 方法。

```
public boolean isInside2(double x1, double y1, double x2, double y2,
    double x3, double y3, double x, double y) {
    // 如果三角形的点不是逆时针输入，改变一下顺序
    if (crossProduct(x3 - x1, y3 - y1, x2 - x1, y2 - y1) >= 0) {
        double tmpx = x2;
        double tmpy = y2;
        x2 = x3;
        y2 = y3;
        x3 = tmpx;
        y3 = tmpy;
    }
    if (crossProduct(x2 - x1, y2 - y1, x - x1, y - y1) < 0) {
        return false;
    }
    if (crossProduct(x3 - x2, y3 - y2, x - x2, y - y2) < 0) {
        return false;
    }
    if (crossProduct(x1 - x3, y1 - y3, x - x3, y - y3) < 0) {
        return false;
    }
    return true;
}
```

折纸问题

【题目】

请把一段纸条竖着放在桌子上，然后从纸条的下边向上方对折 1 次，压出折痕后展开。此时折痕是凹下去的，即折痕突起的方向指向纸条的背面。如果从纸条的下边向上方连续


```
        return;  
    }  
    printProcess(i + 1, N, true);  
    System.out.println(down ? "down " : "up ");  
    printProcess(i + 1, N, false);  
}
```

纸条连续对折 n 次之后一定产生 2^{n-1} 条折痕，所以要打印所有的节点，不管用什么方法，其时间复杂度肯定都是 $O(2^n)$ ，因为解的空间本身就就有这么大，但是本书提供的方法的额外空间复杂度为 $O(n)$ ，也就是这棵满二叉树的高度，额外空间主要用来维持递归函数的运行，也就是函数栈的大小。

蓄水池算法

【题目】

有一个机器按自然数序列的方式吐出球（1 号球，2 号球，3 号球，……），你有一个袋子，袋子最多只能装下 K 个球，并且除袋子以外，你没有更多的空间。设计一种选择方式，使得当机器吐出第 N 号球的时候（ $N > K$ ），你袋子中的球数是 K 个，同时可以保证从 1 号球到 N 号球中的每一个，被选进袋子的概率都是 K/N 。举一个更具体的例子，有一个只能装下 10 个球的袋子，当吐出 100 个球时，袋子里有 10 个球，并且 1~100 号中的每一个球被选中的概率都是 10/100。然后继续吐球，当吐出 1000 个球时，袋子里有 10 个球，并且 1~1000 号中的每一个球被选中的概率都是 10/1000。继续吐球，当吐出 i 个球时，袋子里有 10 个球，并且 1~ i 号中的每一个球被选中的概率都是 $10/i$ ，即吐球的同时，已经吐出的球被选中的概率也动态地变化。

【难度】

尉 ★★☆☆

【解答】

这道题的核心解法就是蓄水池算法，我们先说这个算法的过程，然后再证明。

1. 处理 1~ k 号球时，直接放进袋子里。
2. 处理第 i 号球时（ $i > k$ ），以 k/i 的概率决定是否将第 i 号球放进袋子。如果不决定将第 i 号球放进袋子，直接扔掉第 i 号球。如果决定将第 i 号球放进袋子，那么就从袋子里的 k