第一章　基本概念

1.试对下列随机试验各写出一个样本空间：

(1)掷一颗骰子；

(2)一个口袋中有5个外形相同的球，编号分别为1、2、3、4、5，从中同时取出3个球；

(3)10只产品中有3只是次品，每次从中任取一只（取出后不放回），直到将3只次品全部取出，记录抽取的次数；

(4)对某工厂生产的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如果查出2件次品就停止检查，或者查满4件产品也就停止检查，记录检查结果。

解：（1）$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

（2）$\Omega=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$

5个球中选3个球进行组合，有$C_5^3=10$种

（3）$\Omega=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

最少抽取的次数是每次取出的都是次品；最多抽取的次数是把10只产品全部抽出，总能抽出3个是次品

（4）用数字1代表正品，数字0代表次品

$\Omega=\{(0,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,1)\}$

样本空间包括查出2件是次品和查满4件产品这两种情况

(4) 漏一点（0，1，1，1)

2.工厂对一批产品作出厂前的最后检查，用抽样检查方法，约定，从这批产品中任意取出4件产品来做检查，若4件产品全合格就允许这批产品正常出厂；若有1件次品就再作进一步检查；若有2件次品则将这批产品降级后出厂；若有2件以上次品就不允许出厂。试写出这一试验的样本空间，并将“正常出厂”、“再作检查”、“降级出厂”、“不予出厂”这4个事件用样本空间的子集表示。

解：用数字1代表正品，数字0代表次品

设$A=$“正常出厂”；$B=$“再作检查”；$C=$“降级出厂”；

$D=$“不予出厂”

$A=\{(1,1,1,1)\}$

$B=\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$

$C=\{(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$

$D=\{(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,0)\}$

$$\Omega=A\cup B\cup C\cup D$$
$$=\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,0)\}$$

3.设A、B、C是三个事件，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

⑴ A与B都发生，但C不发生；

⑵ A发生，但B与C可能发生也可能不发生；

⑶ 这三个事件都发生；

⑷ 这三个事件都不发生；

⑸ 这三个事件中至少有一个发生；

⑹ 这三个事件中最多有一个发生；

⑺ 这三个事件中至少有两个发生；

⑻ 这三个事件中最多有两个发生；

⑼ 这三个事件中恰有一个发生；

⑽ 这三个事件中恰有两个发生。

解： ⑴ $AB\overline{C}$;

（2） A;

（3） ABC;

（4） $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

（5） $A \cup B \cup C$;

（6） $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C}$;

（7） $AB \cup AC \cup BC$;

（8）$\overline{ABC}$;

（9） $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C}$;

（10） $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$.

4.设Ω＝{1,2,3,4,5,6}，A＝{1,2,3}，B＝{2,3,4}, $C = \{4,5,6\}$，试用Ω的子集表示出下列事件：

(1)$\overline{A}B$; (2)$\overline{A} \cup B$; (3)$\overline{B-A}$; (4)$\overline{A\overline{BC}}$; (5)$\overline{A(B \cup C)}$.

解： ⑴ $\overline{A}B = \{4\}$;

（2） $\overline{A} \cup B = \{2,3,4,5,6\}$;

（3）$\overline{B-A} = \{1,2,3,5,6\}$;

（4）$\overline{A\overline{BC}} = \{4,5,6\}$;

（5）$\overline{A(B \cup C)} = \{1,4,5,6\}$

5.对三个任意给定的事件A、B、C:

(1) 试化简（$A\cup B)(B\cup C)$;

(2) 试将$A\cup B\cup C$表成互斥事件之和。

(3)化简$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

(4)化简$AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}$.

解： (1)$(A\cup B)(B\cup C)=[A(B\cup C)]\cup[B(B\cup C)]=[AB\cup AC]\cup[B\cup BC]$

$=AB\cup AC\cup B=B\cup AC$;

(2) $A\cup B\cup C=(A-AB)+(B-BC)+(C-AC)+ABC$ （用文氏图）

(3)$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=(A+B\overline{B})(\overline{A}+B\overline{B})=A\overline{A}=\Phi$

(4)$AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}=(A+\overline{A})B+(A+\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}$

$=B+\overline{B}-\overline{AB}=\Omega AB=AB$

补充（3）（4）

6.指出下列各题是否正确（提示：可借助文氏图）

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$; (2) $\overline{A}B=A\cup B$;

(3)$\overline{A}\cup\overline{B}\overline{C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; (4) $AB(A\overline{B})=\Phi$;

(5) 若$A\subset B$,则$A=AB$; (6) 若$AB=\Phi, C\subset A$,则$BC=\Phi$;

(7) 若$A\subset B$，则$\overline{B}\subset\overline{A}$; (8) 若$B\subset A$，则$A\cup B=B$.

(9)若$A+C=B+C$,则$A=B$; (10)若$A-C=B-C$,则$A=B$.

解： (1) $A\overline{B}\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=A\cup B$ 正确；

(2) $\overline{A}B=B-A\neq A\cup B$ 错误；

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}\overline{C}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{C})=\overline{AB}\cap\overline{AC}\neq\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 错误；

(4) $AB(A\overline{B})=AB\overline{B}=A\cap\Phi=\Phi$ 正确；

(5) 若$A\subset B$，$AB=A$ 正确；

(6) 若$AB=\Phi, C\subset A$,则$BC\subset AB=\Phi, \therefore BC=\Phi$ 正确；

(7) $A\subset B, \overline{B}\subset\overline{A}$ 正确；

(8) 若$B\subset A$,则$A\cup B=A\neq B$ 错误.

(9)若$A+C=B+C$, A可以不等于B。当$A\subset C, B\subset C$时，$A\neq B$等式也成立。 错误

(10) 若$A-C=B-C$, A可以不等于B。当$\overline{C}\subset A, \overline{C}\subset B$时，$A\neq B$等式也成立。错误

补充（9）（10）

7.对投掷一对均匀骰子的试验，可给出两个样本空间Ω和Ω_1如下：Ω是由第一颗骰子与第二颗骰子出现点数的对子组成，有

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\end{matrix}\right\}$$

而Ω_1由两颗骰子出现点数之和组成，有

$$\Omega_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

在求出现“点数之和等于7”的概率p时，依Ω计算的$p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$；依$\Omega_1$计算得$p=\frac{1}{11}$,试分别解释得此结果的依据，哪一个结果正确？怎样理解这一正确结果？

解：这两个结果都是依古典概率公式算得，因为骰子是均匀的，故每次投掷出现哪一个点数均应是等可能的，所以有理由认为对样本空间Ω，其样本点是具等可能性的，据此用古典概率公式算出的结果$p=\frac{6}{36}$是正确的，因为Ω中有6个样本点使点数之和等于7，而Ω中共有36个样本点。这个概率的意义是说明在作大量次数投掷一对均匀骰子的试验时，约有$\frac{1}{6}$那么多次会碰上点数之和为7的结果。依Ω_1计算得$p=\frac{1}{11}$，同样也用了古典概率公式，Ω_1中共有11个样本点，而点数之和等于7只是1个样本点，所以得$p=\frac{1}{11}$，但是，对Ω_1而言，其样本点的等可能性明显是不成立的。

8.假设发现了一颗不均匀的骰子，由于它，使得在进行掷一对骰子的试验时，在上题的样本空间Ω中出现偶数和（如(1,1)、(1,3)……)的次数比奇数和（如(2,1)、(2,3)……）的次数多一倍，求下列事件的概率：

⑴ 点数和小于6;　（2）点数和等于8;　（3）点数和是偶数.

解：⑴ 在本题中，由于样本空间Ω中出现偶数和的次数比奇数和的次数多一倍，因此样本空间Ω中共有36+18=54个样本点；而点数和小于6这一事件分为点数和出现偶数并小于6和点数和出现奇数并小于6这两个事件，点数和出现偶数并小于6的事件包含$\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$共8个样本点，而点数和出现奇数并小于6的事件包括$\{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1)\}$共6个样本点，因此点数和小于6这一事件包括8+6=14个样本点，所以得到

$p=\dfrac{14}{54}$；

(2) 样本空间中的样本数同 ⑴，包括54个样本点；而点数和等于8这一事件包括$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$共10个样本点，所以得到$p=\dfrac{10}{54}$；

⑶ 样本空间中的样本数同 ⑴，包括54个样本点；而点数和是偶数这一事件包括$18\times2=36$个样本点，所以得到$p=\dfrac{36}{54}$.

相同的符号不能表示不同的样本点

解：⑴ 在本题中，由于样本空间Ω中出现偶数和的次数比奇数和的次数多一倍，因此可设样本空间Ω为中共有36+18=54个样本点，其中偶数和的点算两个点，如(1,1)、(1,3)和$(1,1)'$、$(1,3)'$等等，这样可以看成每个样本点发生的可能性相等，从而可用古典概型计算。

点数和小于6这一事件

包含$\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,1)',(1,3)',(2,2)',(3,1)',(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

共14个样本点，所以得到

$p=\dfrac{14}{54}$；

(2) 样本空间中的样本数同 ⑴，包括54个样本点；而点数和等于8这一事件包括$\{(2,6),(2,6)',(3,5),(3,5)',(4,4),(4,4)',(5,3),(5,3)',(6,2),(6,2)'\}$共10个样本点，所以得到$p=\dfrac{10}{54}$；

⑶ 样本空间中的样本数同 ⑴，包括54个样本点；而点数和是偶数这一事件包括$18\times2=36$个样本点，所以得到$p=\dfrac{36}{54}$.

9.某人忘记了一个电话号码的最后一位数字，因此只能试着随意地拨这位数，试求他拨号不超过三次就能接通电话的概率是多少？若记得最后一位是奇数，则此概率又是多少？

解：随意拨电话号码的最后一个数字，其样本空间Ω共有10个样本点，而他拨号不超过三次这一事件包括3个样本点，所以$p=\frac{3}{10}=0.3$；若记得最后一位是奇数，则样本空间Ω_1共有5个样本点，同样他拨号不超过三次这一事件还是包括3个样本点，所以$p=\frac{3}{5}=0.6$.

10.房间中有4人，试问没有2个人的生日在同一个月份的概率是多少？

解：样本空间Ω共有12^4个样本点，而没有2个人的生日在同一月份这一事件包括A_{12}^4个样本点，因此$p=\frac{A_{12}^4}{12^4}$.

11.从1、2、3、4、5这五个数字中等可能地，有放回地接连抽取三个数字，试求下列事件的概率：

A={三个数字全不相同}，　　B={三个数字中不含1及5}，

C = {三个数字中5出现了两次}

解：样本空间Ω共有5^3个样本点：事件A中包含A_5^3个样本点，因此$p_1=\frac{A_5^3}{5^3}=0.48$；事件$B$中包含$3^3$个样本点，因此$p_2=\frac{3^3}{5^3}=0.216$；事件$C$中包含$C_5^3C_4^1=12$个样本点，因此$p_3=\frac{C_5^3C_4^1}{5^3}=0.096$.

事件C中包含$C_3^2\times1\times1\times C_4^1=12$个样本点，

因此$p_3=\frac{12}{5^3}=0.096$.

12.将十本不同的书放置到一级空书架上去，求其中指定的某三本书恰好放在一起的概率。

解：样本空间Ω共有$A_{10}^{10}=10!$ 个样本点，而其中指定的某三本数恰好放在一起这一事件包括$A_3^3A_8^8=3!\cdot8!$个样本点，因此$p=\frac{A_3^3A_8^8}{A_{10}^{10}}$.

13.将3个球放置到4个盒子中去，求下列事件的概率：

（1）A是没有一个盒子里有2个球；

（2）B是3个球全在一个盒子内。

解：将球与盒子均作编号后处理，即球与盒子都是可辨别的，则样本空间Ω共有4^3个样本点：

（1）事件A中包含A_4^3个样本点，因此$p_1=\dfrac{A_4^3}{4^3}$；

（2）事件B中包含C_4^1=4个样本点，因此$p_2=\dfrac{C_4^1}{4^3}$.

14.教室内10个人分别佩戴着编号从1号到10号的校徽，现从中任选3人并记录其校徽的号码，试求下列事件的概率：

（1）最小号码是5;　　　　（2）最大号码是5.

解：教室内10个人分别佩戴着编号从1号到10号的校徽，即人与校徽都是可辨别的，则样本空间Ω共有C_{10}^3个样本点：

（1）最小号码是5这一事件包含C_5^2个样本点，因为除了最小号码是5外，其余2个号码是从{6,7,8,9,10}中抽取，故为C_5^2，因此$p_1=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}$；

（2）最大号码是5这一事件包含C_4^2个样本点，因为除了最大号码是5外，其余2个号码是从{1,2,3,4}中抽取，故为C_4^2，因此$p_2=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}$.

15.盒中有6只灯泡，其中2只次品,4只正品，现从中有放回地抽取二次（每次取出一只），求下列事件的概率：

（1）A是两次抽到的都是次品；

（2）B是一次抽到正品，另一次抽到次品。

解：灯泡是有放回抽取的，因此样本空间Ω共有6^2个样本点：

（1）事件A中包含2^2个样本点，因此$p_1=\dfrac{2^2}{6^2}=\dfrac{1}{9}$；

（2）事件B中包含$C_2^1C_4^1C_2^1$=16个样本点，因此$p_2=\dfrac{16}{6^2}=\dfrac{4}{9}$.

16.将上题改为无放回抽取两次后（相当于一次抽取，取出2个），再计算这些事件的概率。

解：灯泡是无放回抽取的，因此样本空间Ω共有C_6^2个样本点：

(1) 事件A中包含C_2^2=1个样本点，因此$p_1=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$；

(2) 事件B中包含$C_4^1C_2^1$=8个样本点，因此$p_2=\frac{8}{C_6^2}=\frac{8}{15}$.

17.一公司批发出售服装，每批100套。公司估计某顾客商欲购的那批100套服装中有4套是次品,12套是等级品，其余是优质品，客商在进货时要从中接连抽出2套作样品检查，如果在样品中发现有次品，或者2套都是等级品，客商就要退货。试求下列事件的概率：

(1) 样品中1套是优质品,1套是次品；

(2) 样品中1套是等级品,1套是次品；

(3) 退货；

(4) 该批货被接受；

(5) 样品中有1套优质品。

解：从100套服装中抽取2套，因此样本空间Ω共有C_{100}^2=4950个样本点：

(1) 样本中1套是优质品,1套是次品这一事件包含$C_4^1C_{84}^1$=336个样本点，

因此$p_1=\frac{C_4^1C_{84}^1}{C_{100}^2}=\frac{336}{4950}=\frac{56}{825}$；

(2) 样本中1套是等级品,1套是次品这一事件包含$C_4^1C_{12}^1$=48个样本点，

因此$p_2=\frac{C_4^1C_{12}^1}{C_{100}^2}=\frac{48}{4950}=\frac{8}{825}$；

(3) 退货，即包括样本中2套是等级品，或者有次品这一事件包含

$C_{12}^2+C_4^1C_{84}^1+C_4^1C_{12}^1+C_4^2$=456个样本点，因此$p_3=\frac{456}{4950}=\frac{76}{825}$；

(4) 该批货被接受，是退货的对立事件，因此$p_4=1-p_3=\frac{749}{825}$；

(5) 样本中1套是优质品这一事件包含$C_4^1C_{84}^1+C_{12}^1C_{84}^1$=1344个样本点，

因此$p_5=\frac{C_4^1C_{84}^1+C_{12}^1C_{84}^1}{C_{100}^2}=\frac{1344}{4950}=\frac{224}{825}$.

18.在桥牌比赛中，将52张牌任意地分给东、南、西、北四家，求在北家的13张牌中

(1) 恰有5张黑桃、4张红心、3张方块、1张草花的概率；

(2) 恰有大牌A、K、Q、J各1张，而其余皆为小牌的概率。

解：北家的13张牌是从52张牌中任意抽取，因此样本空间Ω中包含C_{52}^{13}个样本点：

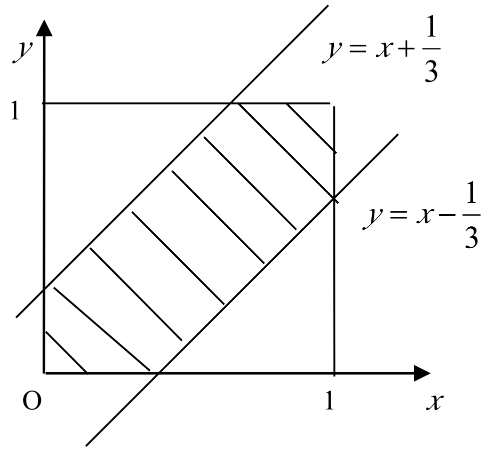
⑴ 恰有5张黑桃、4张红心、3张方块、1张草花这一事件包括$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}$个样本点，因此$p_1=\dfrac{C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}}{C_{52}^{13}}$；

⑵ 恰有大牌A、K、Q、J各1张，而其余皆为小牌的概率这一事件包括$C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9$个样本点，因此$p_2=\dfrac{C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9}{C_{52}^{13}}$.

19.甲、乙两人相约9点到10点间在某地点会面，约定先到者等候20分钟，过时就可离去。试求两人能会面的概率。

解：以X、Y分别表示甲、乙二人到达的时刻，于是$0\le X\le 1, 0\le Y\le 1$，即点M落在下图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点都是等可能的。而两人会面的条件是：$|X-Y|\le\dfrac{1}{3}$，因此利用几何概型计算几何概率为：

$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{1^2-2\times\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^2}{1^2}=\frac{5}{9}.$$



20.在观察投掷一对均匀骰子100次之后，一个观察者估计第101次投掷出现点数和是偶数的概率为0.85。请评说对这一概率应给以相对频率解释（即统计概率）还是主观概率解释？试说明理由。

解：观察者通过投掷骰子100此，从而估计第101次投掷出现点数和是偶数的概率为0.85，这是对只发生一次的过程自信程度，只能作为主观概率解释，不是统计概率。

21.某地区的最新生存率统计数据表明，每10万人中有6万人活到了70岁以上，故而长期在该地区生活的A先生能活到70岁以上的概率是$\frac{6}{60}$=0.6，对这一概率应怎样理解？试说明理由。

解：这一概率只是反映了对A先生能活到70岁以上的自信程度，这一主观概率值是依据相对频率数据（生存率统计）作出的。

概率论与数理统计第二章习题

1.解：$B \subset A$则

$A = B \cup (A-B)$

而B与$A-B$互不相容，因此由概率　的可加性，有：

$P(A) = P[B \cup (A-B)] = P(B) + P(A-B)$

从而$P(A-B) = P(A) - P(B)$　（*）

若$B \not\subset A$则

$P(A-B) = P(A-AB)$

显然$AB \subset A$利用（*）式，有

$P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$

2.解:(1)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$

(2)$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.4} = 0.25$

(3)$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{0.5} = 0.2$

(4)$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A-B)}{1-P(B)} = \dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)} = \dfrac{2}{3}$

3.解：（1）$P(A|B)=P(A)=0.3$

(2)$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.72$

(3)$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B)=0.4$

(4)$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A)=0.7$

4.解：$P（A\bigcup B）=P（A）+P（B）-P（AB）$

$\therefore P（A）+P（B）\geq P（A\bigcup B）$

当$P（AB）=0$时“=”成立

$\because A\subset A\bigcup B\therefore P（A）\leq P（A\bigcup B）$

当$B\subset A$时“=”成立

$\because AB\subset A\therefore P（AB）\leq P（A）\leq P（A\bigcup B）\leq P（A）+P（B）$

第一个等号在 $A\subset B$时成立。

5.解：根据题意可得：$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$,根据事件$A,B$是独立的可知，事件$A$与$\overline{B}$以及事件$\overline{A}$与$B$都是独立的，从而有：$P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$,再由对立事件的概率公 式及一些简单计算可得$P(A)=P(B)$.

又由题意可得：$P(\overline{A}\overline{B})=\dfrac{1}{9}$,结合独立性以及$P(A)=P(B)$可推出$P(A)=\dfrac{2}{3}$.

6.解：（1）$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=3P(A)-3P(A)^2=\dfrac{9}{16}$.

所以$P(A)=\dfrac{1}{4}$,或者$P(A)=\dfrac{3}{4}$(舍去).

（2）$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P(A)^2$

由于$A\bigcup B\subset A\bigcup B\bigcup C$,于是

$2P(A)-P(A)^2\leq 3P(A)-3P(A)^2$

从而有$P(A)\leq\dfrac{1}{2}$.

注解：有反例可以说明 题中要求证明是$P(A)<\dfrac{1}{2}$是不正确.由于要画图，反例略.

7.解：（1）$P[(A\cup B)C]=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=P(C)[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]$

$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B)$

（2）$P[(AB)C]=P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=P(AB)\cdot P(C)$

（3）$P[(A-B)C]=P[A\bar{B}C]=P(A)\cdot P(\bar{B})\cdot P(C)=P(A\bar{B})\cdot P(C)$

$=P(A-B)\cdot P(C)$

8.解：设$A=$“相距100米处射击击中”

$B=$“相距150米处射击击中”

$C=$“相距200米处射击击中”

$D=$“击中目标”

$P(A)=0.6$

$$P(B/\bar{A})=\frac{100}{150}\times 0.6=0.4$$

$$P(C/\bar{A}\bar{B})=\frac{100}{200}\times 0.6=0.3$$

$P(D)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B\bar{A})+P(C\bar{A}\bar{B})$

$=0.6+0.4\times 0.4+0.4\times 0.6\times 0.3=0.832$

9.解:(1) $A_1=$“点数和为偶数”

$B_1=$“点数和为 8”

$$P(B_1\mid A_1)=\frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)}{P(A_1)}=\frac{5}{18}$$

(2) $A_2=$“点数和为奇数”

$B_2=$“点数和大于 6”

$$P(B_2\mid A_2)=\frac{P(A_2B_2)}{P(A_2)}=\frac{12}{18}$$

（3）$$P(A_2\mid B_2)=\frac{P(A_2B_2)}{P(B_2)}=\frac{12}{1+2+3+\cdots+6}=\frac{12}{21}$$

10.解：$A=$“甲破译密码”

$B=$“乙破译密码”

$C=$“丙破译密码”

$P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{47}{60}-\frac{12}{60}+\frac{1}{60}=\frac{3}{5}$

另解：$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}.$

11.解：$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{C_{10}^{1}}=\frac{1}{10}$

$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{6}$

12.解：$A=$“第一次取出的全是黄　球”

$B=$“第二次取出的黄、白　球各半”

$P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=\frac{C_{20}^{5}}{C_{30}^{5}}\cdot\frac{C_{10}^{5}\cdot C_{15}^{5}}{C_{25}^{10}}$

13.解：$A_1=$“第一次取黄球”

$A_2=$“第 2次取黄球”

$A_3=$“第 3次取白球”

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)\ P(A_3\,|\,A_1A_2)$

$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}$

14.解：A_1 =“第一次抽到次品”

A_2 =“第 2次抽到次品”

D =“被退货”

（1）$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{67}{70}\cdot\frac{66}{69}=\frac{1474}{1610}$

（2）$P(\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)$

$=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)+P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)$

$=\frac{67}{70}\cdot\frac{3}{69}+\frac{3}{70}\cdot\frac{67}{69}=\frac{134}{1610}$

（3）$P(D)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-\frac{1474}{1610}=\frac{136}{1610}$

15.解：A =“次品”

$P(A\mid B_1)=1\%$，$P(A\mid B_2)=2\%$

$P(B_1)=\frac{1800}{3000}=\frac{3}{5}$，$P(B_2)=\frac{2}{5}$

（1）$P(A)=P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)=1\%\times\frac{3}{5}+2\%\times\frac{2}{5}=1.4\%$

$$(2)P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{1\%\times\frac{3}{5}}{1.4\%}=\frac{3}{7}$$

$$(3)P(B_1\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\mid B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})}=\frac{[1-P(A\mid B_1)]\cdot\frac{3}{5}}{1-1.4\%}=\frac{297}{493}$$

16.解：A =“次品”， B =“某方法检验为次品”

$P(B\mid A)=0.9$

$P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.99$

$P(A)=0.05$

$(1)P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})$

$=0.9\times0.05+[1-P(\overline{B}\mid\overline{A})]P(\overline{A})$

$=0.9\times0.05+0.01\times0.95=0.045+0.0095=0.0545$

(2)

$$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)=1-\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B)}=1-\frac{0.9\times0.05}{0.0545}=0.17$$

17.解：

（1）男生人数：$5000\times\frac{2}{5}=2000$，男生选修会计人数　$2000\times10\%=200$

女生人数：$5000\times\frac{3}{5}=3000$，女生选修会计人数　$3000\times6\%=180$

$\therefore P(A)=\frac{180}{5000}$

（2）$P(B)=\frac{1800}{5000}$

（3）$P(C)=\frac{200+180}{5000}=\frac{380}{5000}$

18.解：$A=$“用 X光查肺癌”，　$B=$“患有肺癌”

$P(B)=3\%$，$P(A|B)=98\%$，$P(\overline{A}|\overline{B})=99\%$

（1）$P(A)=P(A|B)\,P(B)+P(A|\overline{B})\,P(\overline{B})$

$=98\%\times3\%+[1-(\overline{A}|\vec{B})]P(\overline{B})$

$=98\%\times3\%+1\%\times97\%$

$P(B|A)=\frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}=\frac{98\%\times3\%}{98\%\times3\%+1\%\times97\%}=0.7519$

（2）$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|B)\,P(B)}{P(\overline{A})}=\frac{(1-98\%)\times3\%}{0.7519}=0.0006$

19.解：$A=$“发送 0”，$\overline{A}=$“发送 1”，$B=$“收到 0”，$\overline{B}=$“收到 1”

$P(A)=0.7, P(\overline{A})=0.3$

$P(\overline{B}|A)=0.02, P(B|\overline{A})=0.01$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{(1-0.02)\times0.7}{((1-0.02)\times0.7+0.01\times0.3}=\frac{686}{689}$$

20.解：

A_1 =“畅销”， A_2 =“一般”， A_3 =“滞销”， B =“卖出2000台以上”

$P(A_1)=0.5$

$P(A_2)=0.3$

$P(A_3)=0.2$

$P(B|A_1)=0.9$

$P(B|A_2)=0.5$

$P(B|A_3)=0.1$

(1) $P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$

$=0.9\times0.5+0.5\times0.3+0.1\times0.2=0.62$

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.9\times0.5}{0.62}=0.726$$

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.5\times0.3}{0.62}=0.242$

(3) $P(A_3|B)=1-P(A_1|B)-P(A_2|B)=0.032$

(4) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)=0.968$

21.解：

A =“字面”

(1) $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_5)P(B_5)$

$=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\cdots+1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}[0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1]=0.5$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{0}{0.5}=0$

$$P(B_2|A)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}}{0.5}=\frac{1}{10}=0.1$$

$$P(B_3|A)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}{0.5}=0.2$$

$$P(B_4|A)=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}}{0.5}=0.3$$

$$P(B_5A)=\frac{1\times\frac{1}{5}}{0.5}=0.4$$

(3) C = 再次出现字面”

$P(C)=P[C|(B_1|A)]\cdot P(B_1|A)+P[C|(B_2|A)]\cdot P(B_2|A)+\cdots+P[C|(B_5|A)]P(B_5|A)$

$=0\times0+\frac{1}{4}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.2+\frac{3}{4}\times0.3+1\times0.4$

$=0.75$

22.解：设A_1 =“一人击中”， A_2 =“两人击中”， A_3 =“三人击中”

B =“飞机被击落”

C_1 =“甲射击”， C_2 =“乙射击”， C_3 =“丙射击”

$P(A_1) = P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1C_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$

$= P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3) + P(\overline{C}\,\overline{C}_2C_3)$

$= P(C_1)\ P(\overline{C}_2)\ P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)\ P(C_2)\ P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)\ P(\overline{C}_2)\ P(C_3)$

$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7$

$= 0.36$

$P(A_2) = P(C_1C_2\overline{C}_3 \cup C_1\overline{C}_2C_3 \cup \overline{C}_1C_2C_3)$

$= P(C_1C_2\overline{C}_3) + P(C_1\overline{C}_2C_3) + P(\overline{C}_1C_2C_3)$

$= P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3) \backslash$

$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7$

$= 0.41$

$P(A_3) = P(C_1C_2C_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$

$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$

$= 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$

$= 0.458$

23.解：A_1＝“第1次抽出的是正品”

A_2＝“第2次抽出的是正品”

A_3＝“第3次抽出的是正品”

B_1＝“第1次检验出的是正品”

B_2＝“第2次检验出的是正品”

B_3＝“第3次检验出的是正品”

$$P(A_1)=\frac{96}{100}$$

$$P(A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid \overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

$$=\frac{95}{99}\times\frac{96}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{96}{99}\times\frac{4}{100}=\frac{96}{100}$$

$$P(A_3)=P(A_3\mid A_1A_2)P(A_1A_2)+P(A_3\mid \overline{A_1}A_2)P(\overline{A_1}A_2)+P(A_3\mid A_1\overline{A_2})$$

$$=\frac{94}{98}\times\frac{96}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{95}{98}\times\frac{4}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{95}{98}\times\frac{96}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{96}{98}\times\frac{4}{100}\times\frac{4}{100}$$

$$=\frac{96}{100}$$

$$P(B_1)=P(B_1\mid A_1)P(A_1)+P(B_1\mid \overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

$$=0.99\times0.96+0.05\times0.04=0.9524$$

$$P(B_2)=P(B_2\mid A_2)P(A_2)+P(B_2\mid \overline{A_2})P(\overline{A_2})=0.9524$$

$$P(B_3)=0.9524$$

$$\therefore P(B_1B_2B_3)=[0.9524]^3=0.8639$$

另解：设 A＝“这批原件能出厂”

B_i＝“抽取3件元件中恰有 i件次品”$,i=0,1,2,3.$

则有：$P(B_0)=\dfrac{C_{96}^3}{C_{100}^3},P(B_1)=\dfrac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3},P(B_2)=\dfrac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3},P(B_3)=\dfrac{C_4^3}{C_{100}^3}$

又根据独立性，我们有 ：

$P(A\mid B_0)=(0.99)^3,P(A\mid B_1)=(0.99)^2*0.05,P(A\mid B_2)=(0.05)^2*0.99,P(A\mid B_3)=(0.05)^3$

利用全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)=0.8629$$

注解：两种方法有微小 误差是因为我们在考虑 无放回抽取问题时，对 于总量很大抽取少数几件的情况， 我们可以把每次抽取产 品之间近似看成是相互 独立的。

24.解：设 A＝“合格品”， B＝“检验为合格品”

C_1＝“抽出第一箱中的产品 ”， C_2＝“抽出第二箱中的产品 ”

C_3＝“抽出第三箱中的产品 ”

$P(C_1) == \frac{1}{3}$，$P(C_2) = \frac{1}{3}$，$P(C_3) = \frac{1}{3}$

$P(A|C_1) = \frac{20}{25}$，$P(A|C_2) = \frac{12}{16}$，$P(A|C_3) = \frac{17}{22}$

$P(\overline{B}|A) = 0\cdot04$，$P(B|\overline{A}) = 0\cdot06$

$P(A) = P(A|C_1)\ P(C_1) + P(A|C_2)\ P(C_2) + P(A|C_3)\ P(C_3)$

$= \frac{20}{25}\times\frac{1}{3}+\frac{12}{16}\times\frac{1}{3}+\frac{17}{22}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

$P(\overline{A}) = \frac{2}{9}$

(1) $P(B) = P(B|A)\ P(A) + P(B|\overline{A})\ P(\overline{A})$

$= 0\cdot96\times\frac{7}{9}+0\cdot06\times\frac{2}{9} = 0\cdot76$

(2) $P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)} = \frac{0\cdot96\times\frac{7}{9}}{0\cdot76} = 0\cdot9824$

25.解：设事件 A是取甲袋，事件 B是取得的第一份表格是 男生的报名表，事件 C是取得的第二份表格是 男生的报名表 .根据题意：

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B|A)=\frac{1}{2},P(B|\overline{A})=\frac{1}{4}$$

(1)利用全概率公式：

$$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*\frac{3}{4}=\frac{5}{8}.$$

(2)利用贝叶斯公式：

$$P(\overline{B}|C)=\frac{P(C|\overline{B})P(\overline{B})}{P(C|\overline{B})P(\overline{B})+P(C|B)P(B)}$$

而 $P(C|B)P(B)=P(A)P(B|A)P(C|AB)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(C|\overline{A}B)$

$$=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{7}=\frac{17}{168}$$

$$P(C|\overline{B})P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)P(C|A\overline{B})+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})P(C|\overline{A}\overline{B})$$

$$=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*\frac{3}{4}*\frac{2}{7}=\frac{23}{84}$$

因此： $P(\overline{B}|C)=\dfrac{\frac{23}{84}}{\frac{23}{84}+\frac{17}{168}}=\dfrac{46}{63}$

第三章 离散型随机变量

1.一射手对某目标进行了 三次独立射击，现将观 察这些次射击是否命中作为试验，试写出此试 验的样本空间；试在样 本空间上定义一个函数 以指示射手在这三次独立 射击中命中目标的次数 ；设已知射手每次射击 目标的命中率为**0.7**，试写出命中次数的概 率分布。

解： 设A_i =“第i次射中”，$i=1,2,3$

则$\Omega=\{(A_1,A_2,A_3),(A_1,A_2,\overline{A}_3),(A_1,\overline{A}_2,A_3),(\overline{A}_1,A_2,A_3),(A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3),$
$(\overline{A}_1,\overline{A}_2,A_3),(\overline{A}_1,A_2,\overline{A}_3),(\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3)\}$
$=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8\}$

令ξ代表击中目标的次数，则

$\xi(\omega_1)=3$，$\xi(\omega_2)=\xi(\omega_3)=\xi(\omega_4)=2$，$\xi(\omega_5)=\xi(\omega_6)=\xi(\omega_7)=1$

$\xi(\omega_8)=0$

$$P(\xi=3)=P(\omega_1)=P(A_1A_2A_3)=(0.7)^3=0.343$$

$$P(\xi=2)=P(\omega_2+P(\omega_3)+P(\omega_4)=3P(A_1A_2\overline{A}_3)$$
$$=3\times0.7\times0.7\times(1-0.7)=0.441$$

$$P(\xi=1)=P(\omega_5)+P(\omega_6)+P(\omega_7)=3P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$
$$=3\times0.7\times(1-0.7)\times(1-0.7)=0.189$$

$$P(\xi=0)=P(\omega_8=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=(1-0.7)^3=0.027$$

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.027 & 0.189 & 0.441 & 0.343\end{pmatrix}.$$

2. 一批零件中有 **9**个合格品、**3**个废品，安装机器时从 这批零件中任取 **1**个来使用，若取得废品就 不再放回而再取 **1**个，求在取得合格品之 前已取出的废品数的概率分布 。

解：令ξ代表废品数，则ξ可能取值为:0,1,2,3

$$P(\xi=0)=\frac{C_9^1}{C_{12}^1}=\frac{9}{12}$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_9^1}{C_{11}^1}=\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{27}{132}$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_9^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{54}{1320}$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_9^1}{C_9^1}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{54}{11880}$$

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{9}{12} & \frac{27}{132} & \frac{54}{1320} & \frac{54}{11880}\end{pmatrix}.$$

3.设在**10**个同类型的一堆产品内 混有**2**个废品，现从中任取 **3**件，每次取 **1** 个，试分别就（**1**）取后不放回；（**2**）取后放回两种不同情 况，求出取得废品数的概率分布。

解： **⑴ 令ξ代表废品数，则ξ的可能值有:0,1,2**

$$P(\xi=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3},\quad P(\xi=1)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3},\quad P(\xi=2)=\frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}$$

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{C_8^3}{C_{10}^3} & \frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3} & \frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3} \end{pmatrix}$$

⑵ 设废品数为η，则可能取值有:0,1,2,3，有

$$P(\eta=0)=\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}\right)^3=0.512,\quad P(\eta=1)=C_3^1\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}\right)^2\left(\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\right)=0.384$$

$$P(\eta=2)=C_3^2\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}\right)\left(\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\right)^2=0.096,\quad P(\eta=3)=\left(\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\right)^3=0.008$$

所以，η的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.512 & 0.384 & 0.096 & 0.008 \end{pmatrix}.$$

4.自动生产线经调整后出 次品的概率是 p，若在生产过程中出现 次品就立即要进行调整，试求在 两次调整之间生产的合 格品数的概率分布。

解：令合格品数为ξ，则

$P(\xi=0)=P\{$两次调整之间生产的是一件次品$\}=p$

$P(\xi=1)=P\{$两次调整之间生产一件正品，再是一件次品$\}=pq$

…………

$P(\xi=n)=P\{$两次调整之间前n次生产正品，第$(n+1)$件是次品$\}=pq^n$

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ p & pq & pq^2 & pq^3 & \cdots & pq^n & \cdots \end{pmatrix},\ 其中q=1-p.$$

5.甲、乙两人分别独立的 对同一目标各射击 **1**次，甲、乙击中目标的 概率分别为p_1, p_2，试求击中目标次数的 概率分布。

解：甲、乙二人分别独立对同一目标各射击一次，令ξ为击中目标次数，

则ξ的取值为0,1,2

$P(\xi=0)=(1-p_1)(1-p_2)$

$P(\xi=1)=(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)$

$P(\xi=2)=p_1p_2$

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (1-p_1)(1-p_2) & (1-p_1)p_2+p_1(1-p_2) & p_1p_2 \end{pmatrix}$$

6.⑴ 已知随机变量ξ所有的可能值是1,2,…，N，且已知

$$P(\xi=k)=\frac{a}{N}，\ k=1,2,\cdots,N$$

试确定a的值；

⑵ 试问下式的c取何值能使

$$P(\eta=k)=c\left(\frac{2}{3}\right)^k，\ k=1,2,\cdots$$

为分布律。

解：（1）由概率的规范性，可 知

$$\sum_{k=1}^{N}P(\xi=k)=1，则\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=1，从而\ a=1;$$

⑵ 由概率的规范性，可 知

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\eta=k)=1，则\sum_{k=1}^{\infty}c\left(\frac{2}{3}\right)^k=1，而\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{2}{3}}=2$$

所以，$2c=1$，从而 $c=\frac{1}{2}$.

7.设在某种试验中，试验 成功的概率为 $\frac{3}{4}$，以ξ表示首次取得成功的试 验次数序号，试写出 ξ的分布律，并求出 ξ为偶数的概率 p。

解：令ξ代表首次取得成功的试验次数序号，从而ξ的取值为$1,2,\cdots$

$$P(\xi=1)=\frac{3}{4};$$

$$P(\xi=2)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{4};$$

$$P(\xi=3)=\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4};$$

…………

$$P(\xi=k)=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{4};$$

…………

所以，ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{3}{4} & \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} & \left(1-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4} & \cdots & \left(1-\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{4} & \cdots \end{pmatrix},\quad k=1,2,\cdots$$

ξ为偶数时，$P=P(\xi=2)+P(\xi=4)+\cdots$

$$=\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots\right]$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2(n-1)}\right]}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1/4}{15/16}=\frac{1}{5}.$$

8.一本**500**页的书，共有 **100**个错别字，设每个错别 字等可能的出现在**500**页的任何一页上，现考 察该书某一页上的错别 字数，试用 n重贝努利试验描述之。

解：每个错别字以概率$p=\frac{1}{500}$出现在该页，而以概率$q=\frac{499}{500}$不出现在该页，由于错别字是否出现在该页对其他错别字是否出现没有影响，故该页上错别字字数$\xi\sim B(100,\frac{1}{500})$.

9.人类的血型可粗分成 O、A、B、AB等四型，设已知某地区 人群中这四种血型人数的百分比 依次为0.4、0.3、0.25、0.05，要从该地区任意选出 10人，考察带 AB型的人数，试用 n重贝努利试验描述之。

解：由于只关心AB血型的人数，其他血型可不予区分，故在此时每个人血型只有两个可能结果：AB型或者非AB型。这样$p=0.05$是任取一人，其血型为AB型的概率，而问题可说成是成功概率为p的10重贝努利试验，带AB血型的人数$\xi \sim B(10,0.05)$.

10.某建筑物内装有 5个同类型的供水设备， 设在任一时刻每个设备 被使用的概率是 0.2，又设各个设备是否被 使用相互独立，求在同 一时刻下列事件的概率：

(1) 恰有 2个设备在使用；

(2) 最多有 2个设备在使用；

(3) 至少有 2个设备在使用；

(4) 有多数设备在使用。

解：设ξ代表设备使用的个数，$\xi=0,1,2,\cdots,5$，由题意，显然$\xi \sim B(5,0.2)$

(1) $P(\xi=2)=C_5^2 p^2 q^3 = C_5^2 \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^3 = 0.2048$

(2) $P(\xi \le 2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)$

$$= C_5^0 (0.2)^0 (0.8)^5 + C_5^1 (0.2)^1 (0.8)^4 + C_5^2 (0.2)^2 (0.8)^3 = 0.94208$$

(3) $P(\xi \ge 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)$

$$=1-C_5^0 (0.2)^0 (0.8)^5 - C_5^1 (0.2)^1 (0.8)^4 = 0.26272$$

(4)有多数设备在使用，即超过半数以上的设备在使用，故ξ应取3,4,5,即$\xi>2$，从而

$$P(\xi>2)=1-P(\xi\le 2)=1-0.94208=0.05792.$$

11.设事件A在一次试验中发生的概 率为0.3，当在进行多次试验时 ，若A发生3次或更多次时，指示灯 就要发出信号，求下列 情况下，指示灯发出信号的概率：

(1) 共进行 3次试验；

(2) 共进行 5次试验。

解：设ξ代表事件A发生的次数，由题意$\xi \sim B(n,0.3)$

(1)$P(\xi \geq 3) = P(\xi = 3)$　因为试验只进行3次，要指示灯发出信号，则事件A只能出现3次

$P(\xi = 3) = C_3^3(0.3)^3(0.7)^0 = 0.027$

(2)$P(\xi \geq 3) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5)$　因为试验进行5次，要指示灯发出信号，则事件A可发生3次、4次和5次

$P(\xi \geq 3) = C_5^3(0.3)^3(0.7)^2 + C_5^4(0.3)^4(0.7)^1 + C_5^5(0.3)^5(0.7)^0 = 0.16308$

12.某商店有4名售货员，据统计，每 名售货员平均在一小时 内用秤的时间为15分钟，各人何时用秤相 互独立。试问：

① 该店配备几台秤较为 合适？

② 若按（1）的结果配秤，一天 8小时内平均有多少时间 秤不够用？

解：设ξ代表一小时内用秤的售 货员数，则$\xi \sim B(4,\frac{1}{4})$

(1)$P(\xi = 0) = C_4^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} = 0.3164$

$P(\xi = 1) = C_4^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4219$

$P(\xi = 2) = C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.2109$

$P(\xi \leq 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.9492$

故同时用秤的人数不超 过2人的概率接近0.95，从而可配2台秤，这样既不使秤过度闲置，也不致常 因秤不够用而影响业务；

(2)由题(1)，每小时，2台秤的平均使用率为0.9492，那么还有$(1-0.9492)\times 1$的时间内秤不够用，而在8小时内，秤不够用的时 间就为

$(1-0.9492)\times 8 = 0.4064$（小时）

13已知某厂产品的次品率 是$\frac{1}{10}$，今从其大批产品中任 取10件来检验，问其中是否必有1件次品？为什么？

解：任取一件产品为次 品的概率为$\frac{1}{10}$，任查十件产品的次品 率是在这十件产品中次品出现的频率 ，两者有区别，可算出 任取10件产品其中1件是次品的概率为$p = C_{10}^1(0.1)(0.9)^9 \approx 0.3874$，可见，如果经常任抽 十件检查，约有38.74%的机会会遇到1件次品。

14.进行**8**次独立的射击，设每次 击中目标的概率均为 **0.3**，试问：

⑴ 击中几次的可能性最 大？并求出相应的概率 ；

⑵ 求至少击中目标 **2**次的概率。

解：设ξ代表击中目标的次数，则ξ=0,1,2,3,$\cdots$,8，显然$\xi \sim B(8,0.3)$

(1) $(n+1)p=2.7$，由二项分布的$Th.2$，取$k=ent((n+1)p)=2$时，

$B(2;8,0.3)$的值最大，故击中2次的可能性最大$p=C_8^2(0.3)^2(0.7)^6=0.2965$;

(2) $P(\xi \ge 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-C_8^0(0.3)^0(0.7)^8-C_8^1(0.3)^1(0.7)^7=0.7447.$

15.某厂产品的次品率为**0.005**，问在它生产的**1000**件产品中：

⑴ 只有**1**件次品的概率；

⑵ 至少有**1**件次品的概率；

⑶ 最大可能有几件次品，概率是多少？

解：设ξ代表产品为次品的件数，$\xi=0,1,2,\cdots,1000$，显然$\xi \sim B(1000,0.0005)$

显然n很大，p很小，从而$\xi \sim P(\lambda)$，$\lambda=np=5$

(1)$P(\xi=1)=\dfrac{5}{1!}e^{-5}\approx 0.0337$

(2)$P(\xi \ge 1)=1-P(\xi=0)=1-\dfrac{5^0}{0!}e^{-5}\approx 0.9933$

(3)最多可能有5件次品，其概率为$P(\xi=5)=\dfrac{5^5}{5!}e^{-5}\approx 0.1755$

16.为了保证设备能够正常 运转，需配备适当数量 的维修人员（配少了有时会影响设备正常运 转，配多了会造成浪费 人力资源），根据检验 ，每台设备发生故障的概 率是**0.01**，各台设备情况相互独 立，试问：

⑴ 若由**1**人负责维护 **20**台设备，有设备发生故 障而不能得到及时维修 的概率；

⑵ 若有设备 **100**台，每台发生故障时均 需**1**人去处理，则至少要配 多少维护人员，才能使设备 发生故障时不能得到及 时维修的概率不超过 **0.01**。

解:(1)设ξ代表一人负责的20台设备中，同时发生故 障的台数，$\xi=0,1,\cdots,20$,
显然$\xi\sim P(\lambda)$，$\lambda=np=0.2$

$$P(\xi\ge 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-\frac{0.2^0}{0!}e^{-0.2}-\frac{0.2^1}{1!}e^{-0.2}\approx 0.01755$$

(2)设η代表100台设备中，同时发生故 障的台数，$\xi=0,1,\cdots,100$，显然$\eta\sim P(\lambda)$,
$\lambda=np=1$

$$P(\eta=0)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}\approx 0.3679;\qquad P(\eta=1)=\frac{1^1}{1!}e^{-1}\approx 0.3679;$$

$$P(\eta=2)=\frac{1^2}{2!}e^{-1}\approx 0.1839;\qquad P(\eta=3)=\frac{1^3}{3!}e^{-1}\approx 0.0613;$$

$$P(\eta=4)=\frac{1^4}{4!}e^{-1}\approx 0.0153$$

$$\therefore P(\eta=0)+P(\eta=1)+P(\eta=2)+P(\eta=3)+P(\eta=4)=0.9963$$

故在100台设备中，有4台同时发生故障的概率 在0.9963，所以应派4个维修人员，才能使得设备发生故障 而不能得到及时维修的 概率不超过0.01.

17.设要对某一物理量进行 测量，已知由于各种原 因而导致带过大测量误差的概率是 **0.05**，现在独立的进行了 **100**次测量，求误差过大的 次数不小于**3**的概率。

解：设ξ代表100次测量中，出现过分布大测量误传的次数，$\xi=0,1,\cdots,100$,
显然$\xi\sim B(100,0.05)$，由于n较大p较小,故用泊松分布近似计算,$\lambda=np=5$

$$P(\xi\ge 3)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=2)$$

$$\approx 1-\frac{5^0}{0!}e^{-5}-\frac{5^1}{1!}e^{-5}-\frac{5^2}{2!}e^{-5}=0.8753$$

18.设随机变量 ξ服从参数为 λ的泊松分布，问 m为何值时，概率 $P(\xi=m)$最大。

解：$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$P(\xi=k-1)=\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$

$$\therefore \frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{\lambda}{k}$$

(1)$\lambda>k$，$P(\xi=k)>P(\xi=k-1)$，$P(\xi=k)\uparrow$；

(2)$\lambda=k$，$P(\xi=k)=P(\xi=k-1)$，$P(\xi=k)$**达到最大值；**

(1)$\lambda<k$，$P(\xi=k)<P(\xi=k-1)$，$P(\xi=k)\downarrow$

从而，当λ非整数时，$m=[\lambda]$，使$P(\xi=m)$最大；当λ是整数时，$m=\lambda$
或$m=\lambda-1$，同时使得$P(\xi=m)$最大.

19.一产品的次品率为 **0.1**，检验员每天抽检 **4**次，每次随机抽查 **10**件产品进行检验，如发现 次品多于 **1**件，就要调整设备，以 ξ表示**1**天要调整设备的次数，求 $E\xi$.

解：ξ**代表**1**天要调整设备的次数，**$\xi=0,1,2,3,4$

令η**代表**1**次抽检中抽出次品的件数，**$\eta=0,1,\cdots,10$，**显然**$\eta\sim B(10,0.1)$,

令$A_i=$**"第**i**次抽检时，抽出次品多于**1**件，从而调整设备"，**$i=1,2,3,4$

$P(A_i)=1-P(\eta=0)-P(\eta=1)=0.2642$

$P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)=0.7358$

则$\xi\sim B(4,P(A_i))$

$P(\xi=0)=[P(\overline{A}_i)]^4=0.2931$

$P(\xi=1)=C_4^1P(A_i)[P(\overline{A}_i)]^3=0.421$

$P(\xi=2)=C_4^2[P(A_i)]^2[P(\overline{A}_i)]^2=0.2267$

$P(\xi=3)=C_4^3[P(A_i)]^3P(\overline{A}_i)=0.0543$

$P(\xi=4)=C_4^4[P(A_i)]^4=0.0049$

从而 $\xi\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\0.2931&0.421&0.2267&0.0543&0.0049\end{pmatrix}$

所以，$E\xi=0\times0.2931+1\times0.421+2\times0.2267+3\times0.0543+4\times0.0049=1.0569$

或直接用$E\xi=np=4\times0.2642=1.0569$

20. 长 沿途可停k个站， 途中只可下客不能上客，一个站若无人下车可不停。设始发时车上乘客数是参数为λ的泊松分布随机变量ξ，每个乘客在这k个站中的哪一站下车是等可能的。求有2个乘客在终点站下车的概率p.

解：设始发时车上人数为m个，则$P(\xi=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},m=2,3,4,\ldots\ldots$。由于每个乘客在$k$个站中下车是等可能的，所以乘客在终点站下车的概率为$\dfrac{1}{k}$,不在终点站下车的概率为$q=1-\dfrac{1}{k}$.则每个乘客是否在终点站下车是独立的，因此可把在终点站下车的乘客数看作服从$p=\dfrac{1}{k}$的m重伯努利试验。设在终点站下车的乘客数为η，$\eta\sim B(m,\dfrac{1}{k})$。则

$\mathrm{P}(\eta=2\mid\xi=m)=C_m^2p^2q^{m-2}$.则由全概率公式$P(\eta=2)=\sum\limits_{m=2}^{\infty}P(\xi=m)P(\eta=2\mid\xi=m)=\dfrac{\lambda^2e^{-k/\lambda}}{2!k^2}$.

21.某生产流水线一天出次品件数ξ为$\lambda=5$的泊松分布，若采用新工艺，则有0.75的可能使ξ成为$\lambda=3$的泊松分布，但也有0.25的可能无效。现采用新工艺生产，结果一天出了2件次品。问新工艺有效的概率多大？（令A="新工艺有效"。）

解：令A="新工艺有效"，则$P(A)=0.75$;新工艺无效为$\overline{A}$, $P(\overline{A})=0.25$;新工艺有效情况下次品件数ξ服从参数为3的泊松分布，$P(\xi=k\mid A)=\dfrac{3^k e^{-3}}{k!}$;新工艺无效，即旧工艺有效情况下，次品件数$\xi$服从参数为5的泊松分布，$P(\xi=k\mid \overline{A})=\dfrac{5^k e^{-5}}{k!}$.

则有贝叶斯公式$P(A\mid \xi=2)=\dfrac{P(\xi=2\mid A)P(A)}{P(\xi=2\mid A)P(A)+P(\xi=2\mid \overline{A})P(\overline{A})}=0.89.$

22.某设备一天发生故障次数τ服从泊松分布。已知一天内发生1次故障与发生2次故障的概率相同，求每天发生故障不超过1次的概率。

解：设发生故障次数服从参数为λ的泊松分布, $P(\tau=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$。由$P(\tau=1)=P(\tau=2)$,可得$\lambda=2(\lambda$

$P(\tau\le 1)=P(\tau=0)+P(\tau=1)=3e^{-2}.$

23.已知 ξ的分布列为

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3a & \frac{1}{6} & 3a & a & \frac{11}{30} \end{bmatrix}$$

试求：

（1） a的值；

（2） $E\xi$；

（3） $\eta=\xi^2-1$的分布列；

（4）用两种方法算出 $E\eta$.

解:(1)$3a+\dfrac{1}{6}+3a+a+\dfrac{11}{30}=1$，从而$a=\dfrac{1}{15}$

因此$\xi\sim\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$

(2)$E\xi=(-2)\times\dfrac{1}{5}+(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{1}{15}+3\times\dfrac{11}{30}=\dfrac{3}{5}$

(3)$\eta=\xi^2-1 \qquad \therefore \eta\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 8 \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{30} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$

(4)$E\eta=(-1)\times\dfrac{1}{5}+0\times\dfrac{7}{30}+3\times\dfrac{1}{5}+8\times\dfrac{11}{30}=\dfrac{10}{3}$

$E\eta=E(\xi^2-1)=3\times\dfrac{1}{5}+0\times\dfrac{1}{6}+(-1)\times\dfrac{1}{5}+0\times\dfrac{1}{15}+8\times\dfrac{11}{30}=\dfrac{10}{3}$

24.设已知

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

试求 $E\xi$，$E\xi^2$，$E(3\xi^2+5)$，$D\xi$.

解： $E\xi = (-2)\times 0.4 + 0\times 0.3 + 2\times 0.3 = -0.2$

$E\xi^2 = (-2)^2\times 0.4 + 0\times 0.3 + 2^2\times 0.3 = 2.8$

$E(3\xi^2+5) = 3E\xi^2 + 5 = 13.4$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2.76$

25.设随机变量 ξ的分布列为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$$

试问 p取何值时，使 $D\xi$达到最大值。

解： $E\xi = 1\cdot p + 0\cdot q = p$

$E\xi^2 = 1^2\times p + 0\times q = p$

从而， $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = -(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

所以，当 $p=\frac{1}{2}$**时，** $D\xi_{max} = \frac{1}{4}$.

26.袋中有8个球,6个黑球、2个白球。每次从袋中取2球，取出后不放回。在第3次从袋中取球时，所得白球数为ξ，求$E\xi$.

解：第三次取球时，已经取出4个球，这四个球有三种情况。第一种情况4个黑球用A表示，$P(A)=\frac{C_6^4}{C_8^4}=\frac{3}{14},P(\xi=0\mid A)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6},P(\xi=1\mid A)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3},$

$P(\xi=2\mid A)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$;第二种情况3黑一白用$B$表示，$P(B)=\frac{C_6^3C_2^1}{C_8^4}=\frac{4}{7},$

$P(\xi=0\mid B)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2},P(\xi=1\mid B)=\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2},P(\xi=2\mid B)=0;$

第三种情况两黑两白用C表示，$P(C)=\frac{C_6^2C_2^2}{C_8^4}=\frac{3}{14},P(\xi=0\mid C)=\frac{C_4^2}{C_4^2}=1,$

$P(\xi=1\mid C)=0,P(\xi=2\mid C)=0$;由全概率公式，

$$P(\xi=0)=P(\xi=0\mid A)P(A)+P(\xi=0\mid B)P(B)+P(\xi=0\mid C)P(C)=\frac{15}{28};$$

$$P(\xi=1)=P(\xi=1\mid A)P(A)+P(\xi=1\mid B)P(B)+P(\xi=1\mid C)P(C)=\frac{12}{28};$$

$$P(\xi=2)=P(\xi=2\mid A)P(A)+P(\xi=2\mid B)P(B)+P(\xi=2\mid C)P(C)=\frac{1}{28};$$

$$E\xi=0*P(\xi=0)+1*P(\xi=1)+2*P(\xi=2)=\frac{1}{2}.$$

也可以把第三次取出的白球数ξ看作服从伯努利分布，即$\xi\sim B(2,1/4),$

$E\xi=np=1/2.$

27.一台仪器有 3 个元件，各个元件发生故障与否相互独立，且发生故障的概率分别为 0.2，0.3，0.4.求发生故障元件总数ξ的 Eξ 和 $D\xi$ 。

解：设发生故障的元件数为ξ，则$\xi=0,1,2,3$..三个元件发生故障分别记为$A,B,C.$

$P(A)=0.2,P(B)=0.3,P(C)=0.4.$三个元件发生故障与否相互独立，因而，

$P(\xi=0)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.336;$

$P(\xi=1)=P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=0.452;$

$P(\xi=2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0.188;$

$P(\xi=3)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.024;$

$E\xi=0*P(\xi=0)+1*P(\xi=1)+2*P(\xi=2)+3*P(\xi=3)=0.9;$

$E\xi^2=0^2*P(\xi=0)+1^2*P(\xi=1)+2^2*P(\xi=2)+3^2*P(\xi=3)=1.42;$

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=0.61.$

28.设一部机器在一天内发 生故障的概率是 0.2，若一周5个工作日无故障则机器可产生利润 10万元，发生 1次故障仍可生利 5万元，发生 2次故障就没有利润了，若发生 3次或3次以上的故障就要亏损 2万元。试求一周利润的期望值。

解：令ξ代表一周内机器发生故障的次数，$\xi = 0,1,\cdots,5$，显然$\xi \sim B(5,0.2)$，

$$P(\xi = 0) = \binom{5}{0} 0.2 \times 0.8^5 \approx 0.32768$$

$$P(\xi = 1) = \binom{5}{1} 0.2^1 \times 0.8^4 \approx 0.4096$$

$$P(\xi = 2) = \binom{5}{2} 0.2^2 \times 0.8^3 \approx 0.2048$$

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = 0.05792$$

$$\therefore E\xi = 10 \times 0.32768 + 5 \times 0.4096 + 0 \times 0.2048 + (-2) \times 0.05792 = 5.126(\text{万元}).$$

第四章　连续型随机变量

1.试根据习题**3**第**1**题随机变量ξ的概率分布列写出ξ的分布函数，并画出分布函数的图形。

解：概率分布列为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.027 & 0.189 & 0.441 & 0.343 \end{pmatrix}$

其分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.027 & 0 \leq x < 1 \\ 0.216 & 1 \leq x < 2 \\ 0.657 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

（图形略）。

2已知离散型随机变量　ξ的分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{10}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{10}, & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$

试求ξ的概率分布列。

解：$P(\xi=0)=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{10}-0=\frac{1}{10}$

$P(\xi=\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{2}-0)=\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$

$P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=1-\frac{5}{10}=\frac{5}{10}$

$\therefore \qquad \xi\sim\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{5}{10}\end{pmatrix}.$

3.已知 ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\le x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{2}{3}, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x<+\infty\end{cases}$$

试求 $\eta=\xi^2$的分布函数。

解：$P(\xi=-1)=F(-1)-F(-1-0)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

$P(\xi=0)=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$P(\xi=2)=F(2)-F(2-0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore \qquad \xi\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$

而$\eta=\xi^2$，从而$\eta\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\therefore \quad \eta$的分布函数为$F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{6} & 0\le y<1\\ \frac{2}{3} & 1\le y<4\\ 1 & y\ge 4\end{cases}.$

4已知离散型随机变量 ξ的分布列和分布函数可 以写出

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & a & b & \frac{1}{6} & c \end{pmatrix}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ r, & -1 \le x < 0 \\ s, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ t, & 2 \le x < 3 \\ u, & 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

其中a,b,c,r,s,t,u是常数，试先求概率 $P(\xi=1.2)$，$P(\xi>0.5)$,再求常数 $a,b,$ c,r,s,t,u的值。

解：$P(\xi=1.2)=F(1.2)-F(1.2-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$$P(\xi>0.5)=1-P(\xi\le 0.5)=1-P(\xi=0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$0=P(\xi=-1)=F(-1)-F(-1-0)=r-0=r \qquad \therefore r=0$$

$$\frac{1}{3}=P(\xi=0)=F(0)-F(0-0)=s-r=s \qquad \therefore s=\frac{1}{3}$$

$$a=P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=\frac{1}{2}-s=\frac{1}{6} \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}=P(\xi=2)=F(2)-F(2-0)=t-\frac{1}{2} \qquad \therefore t=\frac{2}{3}$$

又 $x\ge 3$时，$F(x)=1,$ $\qquad \therefore u=1$

$$c=P(\xi=3)=F(3)-F(3-0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \qquad \therefore c=\frac{1}{3}$$

而 $\sum_i p_i=1,$ 从而 $\frac{1}{3}+a+b+\frac{1}{6}+c=1,$ $\quad \therefore b=0$

因此，$a=\frac{1}{6}$，$b=0$，$c=\frac{1}{3}$，$r=0$，$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{2}{3}$，$u=1.$

5.设连续型随机变量 ξ的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

求系数 A和B.

解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}=A$，　$\therefore A=1$

又因为连续型随机变量　的分布函数也连续，所　以 $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$

从而　$0=\lim\limits_{x\to 0^+} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}=A+B$，　$\therefore B=-1$.

6.设随机变量 ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

试求：（1）系数 A；

(2) 概率 $P\left(|\xi|<\frac{1}{2}\right)$；

(3) 分布函数 $F(x)$.

解:(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，　$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=1$

　解得$A=\frac{1}{\pi}$

(2) $P(|\xi|<\frac{1}{2})=P(-\frac{1}{2}<\xi<\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{3}$

(3) $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x & -1\le x<1.\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

7.设随机变量 ξ服从拉普拉斯分布，其 密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty$$

试求：（1）系数A;

(2) 概率$P(0<\xi<1)$;

(3) 分布函数$F(x)$.

解:(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx = 1$

解得$A = \frac{1}{2}$

(2)$P(0 < \xi < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1}$

$$(3)F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{x}dx & -\infty < x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-x}dx & 0 \le x < +\infty \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & -\infty < x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & 0 \le x < +\infty \end{cases}.$$

8.设连续型随机变量ξ的密度函数是

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 e^{-x^2/2}, x > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

试求：(1) ξ的分布函数$F(x)$;

(2)$\eta = \xi^2 + 1$的密度函数$f_\eta(y)$.

解：(1) (i) 当$x \le 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 0$;

(ii)当$x > 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x f(u)du = 1 - (\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{-x^2/2}$.

综上，$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1 - (\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{-x^2/2}, x > 0. \end{cases}$

(2)$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(\xi^2 + 1 \le y) = P(\xi^2 \le y - 1)$.当$y < 1$时，$F_\eta(y) = 0$;

当$y \ge 1$时，$F_\eta(y) = P(\xi^2 \le y - 1) = P(-\sqrt{y-1} \le \xi \le \sqrt{y-1}) = F_\eta(\sqrt{y-1})$

$-F_\eta(-\sqrt{y-1}) = 1 - (\frac{1}{2}(y-1) + 1)e^{-(y-1)/2}$.

综上，$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 1 \\ 1 - (\frac{1}{2}(y-1) + 1)e^{-(y-1)/2}, y \ge 1. \end{cases}$

因而，$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 1 \\ \frac{1}{4}(y-1)e^{-(y-1)/2}, y \ge 1. \end{cases}$

9.设随机变量 ξ服从瑞利($Rayleigh$)分布，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

试求：$E\xi$，$D\xi$，$P(\xi > E\xi)$.

解：$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

$$E\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2$$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$$

$$P(\xi>E\xi)=P(\xi>\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}^{+\infty}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

10.在每次试验中，事件A发生的概率为0.5，试用切比雪夫不等式估计，在1000次独立重复试验中，事件A发生450到550次之间的概率。

解：设在1000次试验中A发生ξ次，则$\xi\sim B(1000,0.5)$，从而$E\xi=np=500$，$D\xi=npq=250$，由切比雪夫不等式得到：

$$P(450\le\xi\le550)=P(|\xi-500|\le50)\ge1-\frac{D\xi}{50^2}=0.9.$$

11.一个供电网内共有1万盏功率相同的灯，在夜晚的某段时间内每盏灯开着的概率是0.7，设各盏灯的开或关彼此独立，试用切比雪夫不等式估算该时段内同时开着的灯数ξ在6800到7200之间的概率。

解：设ξ代表同时开着得灯数，从而$\xi\sim B(10000,0.7)$

$$\therefore E\xi=np=7000,\quad D\xi=npq=2100$$

由切比雪夫不等式可得

$$P(6800\le\xi\le7200)=P(|\xi-7000|\le200)\ge1-\frac{D\xi}{200^2}=0.9475.$$

12.设一条自动生产线生产的产品之合格率为0.8，要使一批产品的合格率达到0.76与0.84之间的概率不小于0.9，试用切比雪夫不等式估计这批产品至少应生产多少件。

解：设至少生产n件，其中合格品件数为$\xi \sim B(n,0.8)$,

从而 $E\xi = np = 0.8n$，$D\xi = npq = 0.16n$

又 $P(0.76 \le \frac{\xi}{n} \le 0.84) = P(0.76n \le \xi \le 0.84n) = P(|\xi - 0.8n| \le 0.04n)$

$$\ge 1 - \frac{D\xi}{(0.04n)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

由题意 $P(0.76 \le \frac{\xi}{n} \le 0.84) \ge 0.9$

所以 $1 - \frac{100}{n} \ge 0.9$, **从而**$n \ge 1000$

故，至少应生产1000件产品。

13.设随机变量ξ在(0,1)上服从均匀分布，试求一常数a，使任取4次ξ的值，至少有1个大于a的概率为0.9。

解：ξ**的密度函数**$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & 其他 \end{cases}$

令A=**“取1次**ξ**的值大于**a**”，则**

$p = P(A) = \int_{\xi > a} f(x)dx = \int_a^1 1dx = 1 - a$

令η**代表4次取值中，事件**A**发生的次数，则**$\eta \sim B(4,p)$

$\therefore P(\eta > 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - C_4^0 p^0 (1-p)^4 = 1 - a^4 = 0.9$

从而 $a^4 = 0.1$ $\quad \therefore a = \sqrt[4]{0.1} = 0.562.$

14.设随机变量 ξ在(1,6)上服从均匀分布，求方 程$x^2 + \xi x + 1 = 0$有实根的概率。

解：ξ**的密度函数为**$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x \in (1,6) \\ 0 & 其他 \end{cases}$

方程$x^2 + \xi x + 1 = 0$**有实根，则**$\xi^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow \xi \ge 2$**或**$\xi \le -2$

$\therefore p = \int_{x^2 - 4 \ge 0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_2^6 \frac{1}{5} dx = \frac{4}{5}.$

15.某次考试中，考生得分ξ服从（50,90）上的均匀分布，求任意4个考生至少有3人在60分以上的概率。

解：分数ξ服从（50,90）上的均匀分布，其密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{40},50<x<90,\\ 0,其他\end{cases}$

$P(\xi\geq 60)=\int_{60}^{90}\dfrac{1}{40}dx=3/4.$设4个人中在60分以上的人数为$\eta$，则$\eta\sim B(4,3/4).$

所求概率为$P(\eta\geq 3)=P(\eta=3)+P(\eta=4)=0.738.$

16.设某连续型随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a,x<1\\ x\ln x-bx+d,1\leq x<e\\ c,x\geq e\end{cases}$$

试求：（1）a、b、c、d之值；

（2）$P(\xi>2)$;

(3)概率密度$f(x)$.

解：（1）由分布函数的性质，$\lim\limits_{n\to-\infty}F(x)=0,$得$a=0;$$\lim\limits_{n\to\infty}F(x)=1,$得$c=1;$

又由连续型随机变量的分布函数的连续性，$F(1)=F(1-0)=0,$得$-b+d=0;(*)$

$F(e)=F(e-0)=1,$得$e-eb+d=1;(**)$由（*），（**）得$b=1,d=1.$

(2)$P(\xi>2)=1-P(\xi\leq 2)=1-F(2)=2-2\ln 2.$

(3)$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\ln x,x\in[1,e]\\ 0,x\notin[1,e]\end{cases}.$

17.客车到达某一站的时刻为每个整点的第5分、25分、55分钟。设一乘客在早8点到9点间随时到达该站，求候车时间的数学期望。

解：设乘客到站时刻为8点ξ分，则$\xi\sim U(0,60)$，令候车时间为η，则

$$\eta=\begin{cases}5-\xi & 0\leq\xi\leq 5\\ 25-\xi & 5\leq\xi\leq 25\\ 55-\xi & 25\leq\xi\leq 55\\ 60-\xi+5 & 55\leq\xi\leq 60\end{cases}$$

$$\therefore E\eta=\int_0^5(5-x)\cdot\frac{1}{60}dx+\int_5^{25}(25-x)\cdot\frac{1}{60}dx+\int_{25}^{55}(55-x)\cdot\frac{1}{60}dx+\int_{55}^{60}(65-x)\cdot\frac{1}{60}dx$$

$$=11.7\text{（分）}$$

18.假定在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量$\xi\sim U(2000,4000)$(单位：t)，设每售出此商品1t，可得外汇3万元，若因售不出而囤积，仓库则需花保养费1万元$/t$，问组织多少货源可使收益最大。

解：$\xi \sim U(2000,4000)$，则ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000} & 2000\le x\le 4000\\ 0 & 其他\end{cases}$$

组织货源x_0，再令收益为η，则

$$\eta=\begin{cases}3x_0 & \xi\ge x_0\\ 3\xi-(x_0-\xi) & \xi<x_0\end{cases}$$

$$\therefore E\eta=\int_{x_0}^{4000}3x_0\cdot\frac{1}{2000}dx+\int_{2000}^{x_0}[3x-(x_0-x)]\cdot\frac{1}{2000}dx$$

$$=\frac{1}{2000}\left\{3x_0(4000-x_0)+\frac{1}{8}[9x_0^2-(8000-x_0)^2]\right\}$$

要使$E\eta$最大，则$\dfrac{d(E\eta)}{d\eta}=0$，从而　$x_0=3500$（t）

19.设随机变量ξ具有连续的分布函数$F(x)$，试证$\eta=F(\xi)$是(0,1)上的均匀分布。

解：因为$F(x)$单调连续，且$0\le F(x)\le 1$，从而

当$y\le 0$时，$P(\eta\le y)=0$

当$y\ge 1$时，$P(\eta\le y)=1$

在$y\in(0,1)$时，$P(\eta\le y)=P(F(\xi)\le y)=P(\xi\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$

$$\therefore F_\eta(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ y & 0<y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}\qquad 从而\qquad f(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

因此，$\eta=F(\xi)$是(0,1)上的均匀分布。

20.设$\xi\sim N(1,2^2)$，试查表求出下列概率：

(1)$P(\xi\le 2.2)$;　　　(2)$P(-1.6<\xi\le 5.8)$;

(3)$P(|\xi|\le 3.5)$;　　　(4)$P(|\xi|>4.56)$.

解：因为$\xi \sim N(1,2^2)$，所以有：

$$(1)P(\xi \le 2.2) = P(\frac{\xi-1}{2} \le \frac{2.2-1}{2}) = P(\frac{\xi-1}{2} \le 0.6) = \Phi(0.6) = 0.7257$$

$$(2)P(-1.6 < \xi \le 5.8) = P(\frac{-1.6-1}{2} < \frac{\xi-1}{2} \le \frac{5.8-1}{2}) = P(-1.3 < \frac{\xi-1}{2} \le 2.4)$$

$$= \Phi(2.4) - \Phi(-1.3) = \Phi(2.4) + \Phi(1.3) - 1 = 0.8950$$

$$(3)P(|\xi| \le 3.5) = P(-3.5 \le \xi \le 3.5) = P(\frac{-3.5-1}{2} \le \frac{\xi-1}{2} \le \frac{3.5-1}{2})$$

$$= \Phi(1.25) + \Phi(2.25) - 1 = 0.8822$$

$$(4)P(|\xi| > 4.56) = 1 - P(-4.56 \le \xi \le 4.56) = 1 - P(\frac{-4.56-1}{2} \le \frac{\xi-1}{2} \le \frac{4.56-1}{2})$$

$$= 1 - [\Phi(1.78) + \Phi(2.78) - 1] = 0.0402.$$

21.设$\xi \sim N(60,9)$，试求出分点x_1，x_2，x_3，x_4使ξ落在区间$(-\infty, x_1), (x_1，x_2)$, $(x_2，x_3), (x_3，x_4), (x_4, +\infty)$内的概率值之比为7:24:38:24:7.

解：由$\xi \sim N(60,9)$，令$\eta = \dfrac{\xi-60}{3} \sim N(0,1)$

由正态分布密度函数的对称性，可见

$$x_4 - 60 = -(x_1 - 60),\ x_3 - 60 = -(x_2 - 60)$$

由$\Phi\left(\dfrac{x_3-60}{3}\right) = 0.69$，**得到**$\dfrac{x_3-60}{3} \approx 0.496$，**从而** $x_3 \approx 61.488$，$x_2 \approx 58.512$

由$\Phi\left(\dfrac{x_4-60}{3}\right) = 0.93$，**得到**$\dfrac{x_4-60}{3} \approx 1.474$，**从而** $x_4 \approx 64.422$，$x_1 \approx 55.578.$

22.设$\xi \sim N(2,\sigma^2)$，若$P(-1 \le \xi \le 2+\sigma) = 0.6826$，求$\sigma$.

解：由$\xi \sim N(2,\sigma^2)$，令$\eta = \dfrac{\xi-2}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(-1 \le \xi \le 2+\sigma) = P(\frac{-1-2}{\sigma} \le \frac{\xi-2}{\sigma} \le \frac{2+\sigma-2}{\sigma}) = P(\frac{-3}{\sigma} \le \frac{\xi-2}{\sigma} \le 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-\frac{3}{\sigma}) = \Phi(1) + \Phi(\frac{3}{\sigma}) - 1 = 0.6826$$

$\therefore \Phi(\dfrac{3}{\sigma}) = 0.8413$，**从而**$\dfrac{3}{\sigma} = 1$，**因此**$\sigma = 3.$

23.测量到某一目标的距离 时发生的随机误差 ξ（米）具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{3200}}$$

求在3次独立的测量中至少有 1次误差的绝对值不超过 30米的概率。

解：由题意，$\xi \sim N(20,40^2)$

令$A=$"1次误差的绝对值不超过30米"，则

$$P(A)=P(|\xi|\le 30)=P(-30\le\xi\le 30)=P(\frac{-30-20}{40}\le\frac{\xi-20}{40}\le\frac{30-20}{40})$$

$$=P(-1.25\le\frac{\xi-20}{40}\le 0.25)=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1=0.4931$$

以η代表3次独立重复测量中，事件A发生的次数，则$\eta\sim B(3,0.4931)$

$\therefore P(\eta\ge 1)=1-P(\eta<1)=1-P(\eta=0)=1-(1-0.4931)^3=0.8698.$

24.设电视机的使用寿命ξ是服从参数值$\lambda=0.1$的指数分布，某人买了一台旧电视机，问尚能使用5年以上的概率；若ξ不服从指数分布，设其分布函数为$F(x)$，且已知此电视机已用过s年，则上述的概率将成什么？

解：ξ的密度函数为$f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$\therefore P(\xi>5)=\int_5^{+\infty}0.1e^{-0.1x}dx=e^{-0.5}=0.6065$$

$$P(\xi\ge s+5|\xi\ge s)=\frac{P(\xi\ge s+5)}{P(\xi\ge s)}=\frac{1-P(\xi<s+5)}{1-P(\xi<s)}=\frac{1-F(s+5)}{1-F(s)}.$$

25.设随机变量ξ服从参数为2的指数分布，试证$\eta=1-e^{-2\xi}$在区间$(0,1)$上服从均匀分布。

解：$\xi\sim E(2)$，ξ的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$\therefore 当0<y<1时，\quad P(\eta<y)=P(1-e^{-2\xi}<y)=P(\xi<-\frac{1}{2}\ln(1-y))$$

$$=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2e^{-2x}dx=y$$

$$\therefore F_\eta(y)=P(\eta<y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1,\\ 1 & y\ge 1\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$\therefore \eta=1-e^{-2\xi}\sim U(0,1).$$

26.某厂产品的寿命 T（单位：年）服从指数 分布，其概率密度函数 为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

工厂规定，售出的产品 若在1年内损坏可以调换。若 工厂售出1件产品可获利100元，调换 1件产品工厂要损失 300元，试求工厂售出 1件产品获利的数学期望值。

解：由题意,1件产品获利 $p=\begin{cases}100 & T>1\\ -300 & 0\le T\le 1\end{cases}$

则 $E(p)=\int_0^1(-300)\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt+\int_1^{+\infty}100\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt=400e^{-0.2}-300=27.49$

27.已知随机变量ξ有$P(\xi=1)=1/4$极其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ 1/8, x=-1\\ ax+b, -1<x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

试求参数a,b的值。

解：由$P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=1-(a+b)=1/4$, (*);又由分布函数的右连续性 $F(-1)=F(-1+0)$, 得$1/8=-a+b$, (**)由（*），（**）得$a=5/16, b=7/16$.

28.设某个卫星的寿命长度 是服从指数分布的随机 变量，期望寿命是 2年，若同时发射 3颗这样的卫星，问 3年后，至少还有 1颗卫星仍在轨道上运行的概率。

解：令ξ代表某个卫星的寿命长度，由于$E(\xi)=2$，从而$\lambda=\frac{1}{2}$，

所以$\xi\sim E(\frac{1}{2})$，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0.5e^{-0.5x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令A=“3年后，此卫星还正常运行”，则

$$P(A)=P(\xi\ge 3)=\int_3^{+\infty}0.5e^{-0.5x}dx=e^{-1.5}$$

令η代表“3年后，仍在轨道运行的卫星数量”，则$\eta\sim B(3,e^{-1.5})$

$\therefore P(\eta\ge 1)=1-P(\eta<1)=1-P(\eta=0)=1-(1-e^{-1.5})^3=0.532$

概率论与数理统计第五章习题

1.解：设ξ是甲击中目标的次数，则ξ的所有可能取值是 0,1,2；并服从二项分布B(2,0.8)。设η是乙击中目标的次数，则η的所有可能取值也是 0,1,2;并服从二项分布 B(2,0.6)。于是二维随机变量(ξ,η)的所有可能取值对是(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)。对应的概率为：

$P(\xi=0,\eta=0)=(1-0.8)^2*(1-0.6)^2=0.0064;$

$P(\xi=0,\eta=1)=(1-0.8)^2*C_2^1(1-0.6)*0.6=0.0192;$

$P(\xi=0,\eta=2)=(1-0.8)^2*0.6^2=0.0144;$

$P(\xi=1,\eta=0)=C_2^1(1-0.8)*0.8*(1-0.6)^2=0.0512;$

$P(\xi=1,\eta=1)=C_2^1(1-0.8)*0.8*C_2^1(1-0.6)*0.6=0.1536;$

$P(\xi=1,\eta=2)=C_2^1(1-0.8)*0.8*0.6^2=0.1152;$

$P(\xi=2,\eta=0)=0.8^2*(1-0.6)^2=0.1024;$

$P(\xi=2,\eta=1)=0.8^2*C_2^1(1-0.6)*0.6=0.3072;$

$P(\xi=2,\eta=2)=0.8^2*0.6^2=0.2304.$

即(ξ,η)的联合概率分布列为

ξ \ η	0	1	2
0	0.0064	0.0192	0.0144
1	0.0512	0.1536	0.1152
2	0.1024	0.3072	0.2304

2.解:(ξ_1,ξ_2)所有可能取值对是 (0,0),(0,1),(1,0),(1,1)。对应的概率分别为：

$P(\xi_1=0,\xi_2=0)=0.1$;(即抽到三等品); $P(\xi_1=0,\xi_2=1)=0.1$;(即抽到二等品)

$P(\xi_1=1,\xi_2=0)=0.8$;(即抽到一等品); $P(\xi_1=1,\xi_2=1)=0$

(即抽到的产品同时是一 等品和二等品，不可能 事件)。

即(ξ_1,ξ_2)的联合概率分布列为：

ξ_1 \ ξ_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

3.解：根据 $P(\xi_1\xi_2=0)=1$可知：$P(\xi_1=0,\xi_2=-1)+P(\xi_1=0,\xi_2=0)+P(\xi_1=0,\xi_2=1)+P(\xi_1=1,\xi_2=0)+P(\xi_1=-1,\xi_2=0)=1$。

利用离散型随机变量所 有可能取值对应的概率 非负，并且和等于 **1**，得到：

$P(\xi_1=-1,\xi_2=-1)=P(\xi_1=-1,\xi_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=-1)=P(\xi_1=1,\xi_2=1)=0$。

又利用 ξ_1和ξ_2的边缘分布可以得到 (ξ_1,ξ_2)的联合概率分布列为：

ξ_1 \ ξ_2	-1	0	1	
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	

4.解：根据 ξ的概率密度可知：

$$P(\xi\le 1)=\int_{-\infty}^{1}\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{e^{2x}+1}de^x=\frac{2}{\pi}\arctan\ e$$

于是 $P(\xi>1)=1-\frac{2}{\pi}\arctan\ e$,从而对 $k=1,2$,有：

$$P(\xi_k>1)=1-\frac{2}{\pi}\arctan\ e,\ P(\xi_k\le 1)=\frac{2}{\pi}\arctan\ e.$$

(η_1,η_2)的所有可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$,对应的概率为：

$$P(\eta_1=0,\eta_2=0)=P(\xi_1>1,\xi_2>1)=P(\xi_1>1)P(\xi_2>1)=(1-\frac{2}{\pi}\arctan\ e)^2$$

$$P(\eta_1=0,\eta_2=1)=P(\xi_1>1,\xi_2\le 1)=P(\xi_1>1)P(\xi_2\le 1)=(1-\frac{2}{\pi}\arctan\ e)\frac{2}{\pi}\arctan\ e$$

$$P(\eta_1=1,\eta_2=0)=P(\xi_1\le 1,\xi_2>1)=P(\xi_1\le 1)P(\xi_2>1)=\frac{2}{\pi}\arctan\ e(1-\frac{2}{\pi}\arctan\ e)$$

$$P(\eta_1=1,\eta_2=1)=P(\xi_1\le 1,\xi_2\le 1)=P(\xi_1\le 1)P(\xi_2\le 1)=(\frac{2}{\pi}\arctan\ e)^2$$

所以(η_1,η_2)的联合分布列为：

η_1 \ η_2	0	1
0	$(1-\frac{2}{\pi}\arctan e)^2$	$(1-\frac{2}{\pi}\arctan e)\frac{2}{\pi}\arctan e$

1	$(1-\frac{2}{\pi}\arctan e)\frac{2}{\pi}\arctan e$	$(\frac{2}{\pi}\arctan e)^2$

5.解:(1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(3x+4y)}dxdy=A\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=\frac{A}{12}$

所以$A=12$.

(2)当$x\le 0$或者$y\le 0$时，联合密度函数$f(x,y)=0$,于是对应的分布函数$F(x,y)=0$.

当$x>0,y>0$时，$f(x,y)=12e^{-(3x+4y)}$.于是对应的分布函数：

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3x+4y)}dxdy=(e^{-3x}-1)(e^{-4y}-1).$$

因此：$F(x,y)=\begin{cases}(e^{-3x}-1)(e^{-4y}-1),\text{当}x>0,y>0\text{时}\\0, \qquad\qquad\qquad\text{当}x\le 0\text{或者}y\le 0\text{时}\end{cases}$

(3)$P(0<\xi\le 3,0<\eta\le 4)=F(3,4)-F(0,4)-F(3,0)+F(0,0)=(e^{-9}-1)(e^{-16}-1).$

6.解：由于D的面积为2，所以(ξ,η)对应的概率密度是：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x+y\le 1,-1\le x-y\le 1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

（i）当$x<-1$或者$x>1$时，$f(x,y)=0$,于是对应的边缘分布$f_\xi(x)=0$;

（ii）当$-1\le x\le 0$时，$-1-x\le y\le x+1$,对应的概率密度是$f(x,y)=\frac{1}{2}$,于是

$$f_\xi(x)=\int_{-1-x}^{1+x}\frac{1}{2}dy=1+x;$$

（iii）当$0\le x\le 1$时，$-1+x\le y\le -x+1$,对应的概率密度是$f(x,y)=\frac{1}{2}$,于是

$$f_\xi(x)=\int_{-1+x}^{1-x}\frac{1}{2}dy=1-x;$$

因此：$f_\xi(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\1-x, & 0\le x\le 1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

7.解:(1)根据$a+2*\frac{1}{8}+3*\frac{1}{12}+4*\frac{1}{16}=1$,可得：$a=\frac{1}{4}$.

(2)ξ的边缘分布为:$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$;

η的边缘分布为:$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{25}{48} & \frac{13}{48} & \frac{7}{48} & \frac{1}{16}\end{pmatrix}$.

(3)$P(\xi=\eta)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=2,\eta=2)+P(\xi=3,\eta=3)+P(\xi=4,\eta=4)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$.

8.解：对任意的x,y，满足：

$$\begin{cases}1=F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})\\ 0=F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})\\ 0=F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

利用x,y的任意性可知：$B=C=\frac{\pi}{2}$,从而$A=\frac{1}{\pi^2}$.

(2)$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1/2}{1+(x/2)^2}\frac{1/3}{1+(y/3)^2}=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{4+x^2}\frac{1}{9+y^2}$.

(3)边缘分布函数 $F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$,所以

边缘密度函数$f_\xi(x)=F_\xi'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1/2}{1+(x/2)^2}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}$.

边缘分布函数 $F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$,所以

边缘密度函数$f_\eta(y)=F_\eta'(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1/3}{1+(y/3)^2}=\frac{3}{\pi}\frac{1}{9+y^2}$.

9.解：$P(\eta<\xi^2)=\int_0^1(\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy)dx=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445$.

其中 $\Phi(x)$为标准正态分布的分布　　函数 .

10.解:(1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^2(x^2+cxy)dy\right]dx=\int_0^1(2x^2+2cx)dx=\frac{2}{3}+c$,

所以$c=\frac{1}{3}$.

(2)利用$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$,下面我们对 x,y的范围分情况进行讨论 .

(i)当$x<0$或者$y<0$时,概率密度$f(x,y)=0$,于是$F(x,y)=0$;

(ii)当$x>1$并且$y>2$时,$F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$;

(iii)当$0\le x\le 1$并且$0\le y\le 2$时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^x\left[\int_0^y(x^2+\frac{1}{3}xy)dy\right]dx=\int_0^x(x^2y+\frac{1}{6}xy^2)dx=\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{12}x^2y^2;$$

(iv)当$0\le x\le 1$并且$y>2$时,

$$F(x,y)=F(x,2)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2;$$

(v)当$x>1$并且$0\le y\le 2$时,

$$F(x,y)=F(1,y)=\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}y^2;$$

因此:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或者}y<0\\ \frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{12}x^2y^2, & 0\le x\le 1\text{并且}0\le y\le 2\\ \frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2, & 0\le x\le 1\text{并且}y>2\\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{12}y^2, & x>1\text{并且}0\le y\le 2\\ 1, & x>1\text{并且}y>2\end{cases}$$

(3)ξ的边缘密度函数为:

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2(x^2+\frac{1}{3}xy)dy=2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

η的边缘密度函数为:

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}xy)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4)当$y>2$或者 $y<0$时，$f_\eta(y)=0$，于是 $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$没有定义；

当$0\le y\le 2$时，$f_\eta(y)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y$，于是

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+\frac{1}{3}xy}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y}=\dfrac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同样，当 $x>1$或者 $x<0$时，$f_\xi(x)=0$，于是 $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$没有定义；

当$0\le x\le 1$时，$f_\xi(x)=2x^2+\dfrac{2}{3}x$，于是

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+\frac{1}{3}xy}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\dfrac{3x+y}{2+6x}, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

11.解：(1)ξ的边缘密度函数为：

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}(2e^{-(2x+y)})dy=2e^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

于是当 $x<0$时，$f_\xi(x)=0$，所以 $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$没有定义；

当$x\ge 0$时，$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}=\begin{cases}\dfrac{2e^{-(2x+y)}}{2e^{-2x}}=e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

η的边缘密度函数为：

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}(2e^{-(2x+y)})dx=e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

于是当 $y<0$时，$f_\eta(y)=0$，所以 $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$没有定义；

当$y\ge 0$时，$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{2e^{-(2x+y)}}{e^{-y}}=2e^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$(2)P(\xi \le 2 | \eta \le 1) = \frac{P(\xi \le 2, \eta \le 1)}{P(\eta \le 1)} = \frac{\int_0^2 \left[\int_0^1 2e^{-(2x+y)} dy \right] dx}{\int_0^1 e^{-y} dy} = 1 - e^{-4}.$$

12.解：(1)由于 ξ服从区间 (0,1)上的均匀分布，所以 ：

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

又根据 $\xi = x(0 < x < 1)$时,η服从区间 $(x,1)$上的均匀分布，可得 ：

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此,(ξ,η)的联合密度函数为:

$$f(x,y) = f_\xi(x) f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2)η的边缘密度为:

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -1n(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3)P(\xi + \eta > 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{1-y}^y \frac{1}{1-x} dx \right] dy = \ln 2.$$

13.解：根据联合分布列的 性质及 ξ,η是独立的随机变量可得 ：

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + A + B = 1 \\ \frac{1}{9} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18})(\frac{1}{9} + A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} = \frac{1}{3}(\frac{1}{9} + A) \end{cases}$$

解得： $A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{9}.$

代入联合分布列验证可 知：ξ,η的确是独立的随机变量 .

14.解：设 (ξ,η)的概率分布为 $P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}, i=1,2; j=1,2,3.$ 于是根据边缘分布以及 ξ,η是独立随机变量：

$$p_{11}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24};\qquad p_{1\bullet}=\frac{p_{11}}{p_{\bullet 1}}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4};\qquad p_{2\bullet}=\frac{p_{21}}{p_{\bullet 1}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4};$$

$$p_{13}=p_{1\bullet}-p_{11}-p_{12}=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12};\qquad p_{\bullet 2}=\frac{p_{12}}{p_{1\bullet}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2};$$

$$p_{22}=p_{\bullet 2}-p_{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\qquad p_{\bullet 3}=1-p_{\bullet 1}-p_{\bullet 2}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3};$$

$p_{23}=p_{\bullet 3}-p_{13}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$ 因此，联合分布列如下 表：

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	y_3	
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
	1/6	1/2	1/3	1

15.解：由于 ξ,η分别是参数为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2}$的0－1分布，所以：

$$E\xi=\frac{3}{4}, E\eta=\frac{1}{2}; D\xi=\frac{3}{16}, D\eta=\frac{1}{4}.$$

$$E(\xi\eta)=E\xi E\eta+Cov(\xi,\eta)=E\xi E\eta+r_{\xi\eta}\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}=\frac{3}{4}*\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}*\frac{\sqrt{3}}{4}*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

设(ξ,η)的概率分布为 $P(\xi=i,\eta=j)=p_{ij}, i=0,1; j=0,1.$则：

$P(\xi\eta=1)=p_{11}$，$P(\xi\eta=0)=p_{10}+p_{01}+p_{00}$。于是结合边缘分布可 得：

$$\begin{cases} p_{00}+p_{01}=\frac{1}{4} \\ p_{10}+p_{11}=\frac{3}{4} \\ p_{00}+p_{10}=\frac{1}{2} \\ p_{11}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

解得：$p_{11}=\frac{1}{2}$， $p_{10}=\frac{1}{4}$，
$p_{00}=\frac{1}{4}$， $p_{01}=0.$ 　联合分布列为

ξ \ η	0	1
0	0	1/4
1	1/4	1/2

16.解：(1) $F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_\xi(x)=\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}=\begin{cases}0.5e^{-0.5x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_\eta(y)=\dfrac{dF_\eta(y)}{dy}=\begin{cases}0.5e^{-0.5y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(3)由于 $f(x,y)=f_\xi(x)*f_\eta(y)$，所以 ξ,η 相互独立．

(4)根据 ξ,η 的相互独立性可知，两部件寿命均超过 0.1(千小时)的概率为：

$P(\xi\ge 0.1,\eta\ge 0.1)=P(\xi\ge 0.1)P(\eta\ge 0.1)=\int_{0.1}^{+\infty}0.5e^{-0.5x}dx*\int_{0.1}^{+\infty}0.5e^{-0.5y}dy=e^{-0.1}$.

17.解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x c(x+y)dy\right]dx=c\int_0^1\frac{3}{2}x^2dx=\frac{1}{2}c$，

所以 $c=2$.

(2)当 $x<0$ 或者 $x>1$ 时，概率密度函数 $f(x,y)=0$，于是 $f_\xi(x)=0$；

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 2(x+y)dy=3x^2$，所以：

$f_\xi(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

当 $y<0$ 或者 $y>1$ 时，概率密度函数 $f(x,y)=0$，于是 $f_\eta(y)=0$；

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 2(x+y)dx=1+2y-3y^2$，所以：

$f_\eta(y)=\begin{cases}1+2y-3y^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

(3)由于 $f(x,y)\ne f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以 ξ,η 不独立．

(4) $P(\xi+\eta\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_y^{1-y}2(x+y)dx\right]dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-4y^2\right]dy=\frac{1}{3}$.

18.解:(1)利用 ξ,η是独立的随机变量，

$$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2)$P(\xi\le 1\mid\eta>0)=P(\xi\le 1)=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$.

19.解:

ξ_1 \ ξ_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

$E\xi_1=0.8, E\xi_2=0.1; E\xi_1{}^2=0.8, E\xi_2{}^2=0.1;$

$D\xi_1=E\xi_1{}^2-(E\xi_1)^2=0.16, D\xi_2==E\xi_2{}^2-(E\xi_2)^2=0.09;$

$E\xi_1\xi_2=0*(0.1+0.8+0.1)+1*0=0;$

于是$Cov(\xi_1,\xi_2)=E\xi_1\xi_2-E\xi_1E\xi_2=-0.08;$

相关系数 $r=\dfrac{Cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}}=-\dfrac{2}{3}.$

20.解:(1)由于$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，于是$xf(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，因此$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0.$

$x^2f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，

$$E\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x^2*\frac{1}{2}e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-x}$$

$$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}2xde^{-x}=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2;$$

于是$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=2.$

(2)同样，$x|x|f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，所以$E(\xi|\xi|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=0,$

因此，$Cov(\xi,|\xi|)=E(\xi|\xi|)-E(\xi)E(|\xi|)=0-0*E(|\xi|)=0.$

(3)由于ξ和$|\xi|$的协方差为0，即ξ和$|\xi|$不相关.又因为对任何使 $0<F_\xi(a)<1$的正常数a，

我们有$P(\xi\le a)<1$，于是$P(\xi\le a,|\xi|\le a)=P(|\xi|\le a)>P(\xi\le a)P(|\xi|\le a)$

所以ξ和$|\xi|$不独立.

21.解:(1)$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1 x(2-x-y)dy\right]dx=\int_0^1(\frac{3}{2}x-x^2)dx=\frac{5}{12}$;

$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1 y(2-x-y)dx\right]dy=\int_0^1(\frac{3}{2}y-y^2)dy=\frac{5}{12}$;

$E\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1 x^2(2-x-y)dy\right]dx=\int_0^1(\frac{3}{2}x^2-x^3)dx=\frac{1}{4}$;

$E\eta^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1 y^2(2-x-y)dx\right]dy=\int_0^1(\frac{3}{2}y^2-y^3)dy=\frac{1}{4}$;

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1}{4}-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$;$D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\frac{1}{4}-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$;

$E\xi\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^1 xy(2-x-y)dy\right]dx=\int_0^1(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{1}{6}$;

$Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=\frac{1}{6}-(\frac{5}{12})^2=-\frac{1}{144}$;

$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2Cov(\xi,\eta)=\frac{11}{144}+\frac{11}{144}+2(-\frac{1}{144})=\frac{5}{36}$.

(2)协方差不等于0,所以ξ,η相关,因此也不独立.

22.解：先求ξ,η的边缘密度函数$f_\xi(x),f_\eta(y)$.

当$x<0$或者$x>1$时,概率密度函数$f(x,y)=0$,所以$f_\xi(x)=0$;

当$0\le x\le 1$时,$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_5^{+\infty}2xe^{-(y-5)}dy=2x$;因此:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$y\le 5$时,概率密度函数$f(x,y)=0$,所以$f_\eta(y)=0$;

当$y>5$时,$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 2xe^{-(y-5)}dx=e^{-(y-5)}$;因此:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5\\ 0, & y\le 5\end{cases}$$

由于$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$,所以ξ,η相互独立.

$E(\xi\eta)=E\xi E\eta=(\int_0^1 x*2xdx)(\int_5^{+\infty}ye^{-(y-5)}dy)=4$.

23.解：设两台仪器无故障工作 时间为随机变量 ξ_1,ξ_2,于是有：

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

设随机变量 η对应的分布函数为 $F_\eta(t)$,

当$t\le 0$时,显然 $F_\eta(t)=0$;

当$t>0$时,

$$F_\eta(t)=P(\eta\le t)=P(\xi_1+\xi_2\le t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-x}5e^{-5x}*5e^{-5y}dy\right]dx$$

$$=\int_0^t 5e^{-5x}(1-e^{-5(t-x)})dx=1-e^{-5t}-5te^{-5t}$$

所以：$F_\eta(t)=\begin{cases}1-e^{-5t}-5te^{-5t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$

因此：概率密度 $f_\eta(t)=\dfrac{dF_\eta(t)}{dt}=\begin{cases}25te^{-5t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$

期望 $E\eta=\int_0^{+\infty}t*25te^{-5t}dt=-\int_0^{+\infty}5t^2de^{-5t}=\int_0^{+\infty}10te^{-5t}dt$

$$=-\int_0^{+\infty}2tde^{-5t}=\int_0^{+\infty}2e^{-5t}dt=-\frac{2}{5}e^{-5t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{5}$$

$$E\eta^2=\int_0^{+\infty}t^2*25te^{-5t}dt=-\int_0^{+\infty}5t^3de^{-5t}=\int_0^{+\infty}15t^2e^{-5t}dt=\frac{15}{25}*\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

方差 $D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\frac{6}{25}-(\frac{2}{5})^2=\frac{2}{25}$.

24.证明： ξ,η独立,所以有 ：$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$.

于是 ：$\nu_{ik}=E(\xi^i\eta^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^iy^kf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^iy^kf_\xi(x)f_\eta(y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^if_\xi(x)dx*\int_{-\infty}^{+\infty}y^kf_\eta(y)dy=E\xi^iE\eta^k=\nu_{i0}\nu_{0k};$$

$$\mu_{ik}=E((\xi-E\xi)^i(\eta-E\eta)^k)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^i(y-E\eta)^kf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^i(y-E\eta)^kf_\xi(x)f_\eta(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^if_\xi(x)dx*\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E\eta)^kf_\eta(y)dy$$

$$=E(\xi-E\xi)^iE(\eta-E\eta)^k=\mu_{i0}\mu_{0k};$$

$$Cov(\xi,\eta)=E((\xi-E\xi)(\eta-E\eta))=\mu_{11}=\mu_{10}\mu_{01}=E(\xi-E\xi)E(\eta-E\eta)=0.$$

25.证明：根据题意可知 $:E\xi=P(A),E\eta=P(B)$;
又因为 $P(\xi\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=P(AB),P(\xi\eta=0)=1-P(AB)$,
于是 $E(\xi\eta)=P(AB)$.由于 $r_{\xi\eta}=0$,可知 $:Cov(\xi,\eta)=0$.
因此 $0=Cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta=P(AB)-P(A)P(B)$;
即事件 A和事件 B相互独立 .于是 ,A与$\overline{B}$,$\overline{A}$与B,$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立 .
$P(\xi=1,\eta=1)=P(AB)=P(A)P(B)=P(\xi=1)P(\eta=1)$;
$P(\xi=1,\eta=0)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(\xi=1)P(\eta=0)$;
$P(\xi=0,\eta=1)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=P(\xi=0)P(\eta=1)$;
$P(\xi=0,\eta=0)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P(\xi=0)P(\eta=0)$;
从而 ξ,η相互独立 .

26.解：由于 ξ和η服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$,可知 $\xi-\eta$服从正态分布 $N(0,1)$.

于是 $E(|\xi-\eta|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=-2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}d(-\frac{x^2}{2})=-2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}$;

$E(|\xi-\eta|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xde^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$;

$D(|\xi-\eta|)=E(|\xi-\eta|^2)-[E(|\xi-\eta|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$.

27.解：根据题意有 $:E\xi=1,E\eta=0;D\xi=9,D\eta=16$.

$Cov(\xi,\eta)=r_{\xi\eta}\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}=-\frac{1}{2}*3*4=-6$.

(1)$E\zeta=E(\frac{\xi}{3}+\frac{\eta}{2})=\frac{1}{3}E(\xi)+\frac{1}{2}E(\eta)=\frac{1}{3}$,

$D\zeta=D(\frac{\xi}{3}+\frac{\eta}{2})=\frac{1}{9}D(\xi)+\frac{1}{4}D(\eta)+2*\frac{1}{6}Cov(\xi,\eta)$

$=\frac{1}{9}D(\xi)+\frac{1}{4}D(\eta)+\frac{1}{3}Cov(\xi,\eta)$

$=\frac{1}{9}*9+\frac{1}{4}*16+\frac{1}{3}*(-6)=3$.

(2)$Cov(\xi,\zeta)=Cov(\xi,\frac{\xi}{3}+\frac{\eta}{2})=\frac{1}{3}D\xi+\frac{1}{2}Cov(\xi,\eta)=\frac{1}{3}*9+\frac{1}{2}*(-6)=0$.
所以 ξ和ζ的相关系数也为 0.
(3)对于二维正态分布，不 相关和相互独立等价 .所以 ξ和ζ相互独立 .

28.解：设 $f(x,y)$是二维随机变量 (ξ_1,ξ_2)的概率密度函数 .

$$F_\eta(z)=P(\eta\le z)=P(\xi_1^2+\xi_2^2\le z)=\iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy$$

当$z\le 0$时，$F_\eta(z)=0$;

当$z>0$时，

$$F_\eta(z)=\iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le z} f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}*rdr\right]d\theta$$

$$=1-e^{-\frac{z}{2}}$$

所以 $F_\eta(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

于是 η的概率密度函数为 $f_\eta(z)=\dfrac{dF_\eta(z)}{dz}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$.

29.解：ξ,η的概率密度函数为别为 :

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<y<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设标准正态分布的分布 函数为 $\Phi(x)$.

由于 ξ,η相互独立 ,于是根据卷积公式 :

$$f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(z-y)f_\eta(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}f_\xi(z-y)\frac{1}{2\pi}dy$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

30.解：设事件 $A=$“$\xi\le 1$”,事件 $B=$“$\eta\le 1$”.

根据题意 $P(AB)=P(\xi\le 1,\eta\le 1)=P(\max(\xi,\eta)\le 1)=\dfrac{3}{8}$; $P(A)=P(B)=\dfrac{5}{8}$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{8}.$$

$$P(\min(\xi,\eta)\le 1)=1-P(\min(\xi,\eta)>1)=1-P(\xi>1,\eta>1)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{7}{8}.$$

31.解:(1)(η_1,η_2)的所有可能取值为 $(i,j), i=1,2,3; j=1,2,3.$
由于最大值不可能比最 小值要小，所以

$$P(\eta_1=1,\eta_2=2)=P(\eta_1=1,\eta_2=3)=P(\eta_1=2,\eta_2=2)=0;$$

$$P(\eta_1=1,\eta_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=1)=P(\xi_1=1)P(\xi_2=1)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$P(\eta_1=2,\eta_2=2)=P(\xi_1=2,\xi_2=2)=P(\xi_1=2)P(\xi_2=2)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$P(\eta_1=3,\eta_2=3)=P(\xi_1=3,\xi_2=3)=P(\xi_1=3)P(\xi_2=3)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$P(\eta_1=2,\eta_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=2)+P(\xi_1=2,\xi_2=1)=\frac{2}{9};$$

$$P(\eta_1=3,\eta_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=3)+P(\xi_1=3,\xi_2=1)=\frac{2}{9};$$

$$P(\eta_1=3,\eta_2=1)=P(\xi_1=3,\xi_2=2)+P(\xi_1=2,\xi_2=3)=\frac{2}{9}.$$

$$P(\eta_1=2,\eta_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=2)+P(\xi_1=2,\xi_2=1)=\frac{2}{9};$$

所以(η_1,η_2)的联合分布列为 ：

η_1 \ η_2	1	2	3	
1	1/9	0	0	1/9
2	2/9	1/9	0	1/3
3	2/9	2/9	1/9	5/9
	5/9	1/3	1/9	1

$$(2)E\eta_1=1*\frac{1}{9}+2*\frac{1}{3}+3*\frac{5}{9}=\frac{22}{9}.$$

32.解：$F_\zeta(z)=P(\zeta\le z)=P(\frac{\xi}{\eta}\le z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy$

当 $z\le 0$时，$F_\zeta(z)=0$;

当$0<z\le 1$时，

$$F_\zeta(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy=\int_{1000}^{+\infty}\left[\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}\frac{1000}{y^2}dy\right]dx=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1000^2}{x^3}zdx=\frac{z}{2};$$

当 $z>1$时，

$$F_\zeta(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy=\int_{1000}^{+\infty}\left[\int_{1000}^{zy}\frac{1000}{x^2}\frac{1000}{y^2}dx\right]dy$$

$$=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1000^2}{y^2}(\frac{1}{1000}-\frac{1}{zy})dy=1-\frac{1}{2z};$$

因此，分布函数为 $F_\zeta(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2z}, & z>1\\ \frac{z}{2}, & 0<z\le 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

对应的概率密度函数为 $f_\zeta(z)=\frac{dF_\zeta(z)}{dz}=\begin{cases}\frac{1}{2z^2}, & z>1\\ \frac{1}{2}, & 0<z\le 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

33.解：(ξ,η)的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_\zeta(z)=P(\zeta\le z)=P(\xi\eta\le z)=\frac{S_{\xi\eta\le z}}{2}$$

因此，分布函数为 $$F_\zeta(z)=\begin{cases}1, & z\ge 2\\ \dfrac{z+\int_z^2\frac{z}{x}dx}{2}=\dfrac{z+z(\ln 2-\ln z)}{2}, & 0<z<2\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

对应的概率密度函数为 $$f_\zeta(z)=\frac{dF_\zeta(z)}{dz}=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

34.解：该时段内同时开着的灯数ξ服从二项分布 $B(10000,0.7)$.

$E\xi=10000*0.7=7000$，$D\xi=10000*.07*0.3=2100$.

根据棣莫弗－拉普拉斯定理：

$$P(6800\le\xi\le 7200)=P(\frac{6800-7000}{\sqrt{2100}}\le\frac{\xi-7000}{\sqrt{2100}}\le\frac{7200-7000}{\sqrt{2100}})$$

$$=P(-4.36\le\frac{\xi-7000}{\sqrt{2100}}\le 4.36)=\Phi(4.36)-\Phi(-4.36)$$

$$=2\Phi(4.36)-1=0.999.$$

35.解：设生产n件产品，则合格品数ξ服从二项分布 $B(n,0.8)$.

$E\xi=0.8n, D\xi=0.8*0.2*n=0.16n$.

根据棣莫弗－拉普拉斯定理：

$$P(0.76\le\frac{\xi}{n}\le 0.84)=P(\frac{0.76n-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\le\frac{\xi-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\le\frac{0.84n-0.8n}{0.4\sqrt{n}})$$

$$=P(-0.1\sqrt{n}\le\frac{\xi-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\le 0.1\sqrt{n})=2\Phi(0.1\sqrt{n})-1\ge 0.9;$$

于是 $\Phi(0.1\sqrt{n})\ge 0.95$，查表得 $0.1\sqrt{n}\ge 0.64$,,解得：$n\ge 268.96$，

即n至少为269件.

36.解：(1)设每个加数的取整误差为$\xi_i, i=1,2,\cdots,300$.

由于ξ_i服从$[-0.5,0.5]$上的均匀分布，于是

$$E\xi_i=0, D\xi_i=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}.$$

令$\xi=\sum_{i=1}^{300}\xi_i$,则$E\xi=E\sum_{i=1}^{300}\xi_i=\sum_{i=1}^{300}E\xi_i=0$;

$$D\xi=D\sum_{i=1}^{300}\xi_i=\sum_{i=1}^{300}D\xi_i=\frac{300}{12}=25.$$

根据中心极限定理：

$$P(|\xi|\le 15)=P(|\frac{\xi-0}{\sqrt{25}}|\le\frac{15}{\sqrt{25}}=3)=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1=0.9973.$$

(2)设$\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$,则$E\eta=E\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=0$;

$$D\xi=D\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{n}{12}.$$

根据中心极限定理：

$$P(|\xi|<10)=P(|\frac{\xi-0}{\sqrt{\frac{n}{12}}}|\le\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})=2\Phi(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})-1\ge 0.9,$$

于是$\Phi(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})\ge 0.95$,查表得$\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\ge 1.645$,即$n\le\frac{1200}{1.645^2}\approx 443.5$.

所以最多将443个数相加，可使误差总和绝对值小于10的概率不小于0.9.

(3)舍误差的绝对值不超过m.根据中心极限定理：

$$P(|\xi|\le m)=P(|\frac{\xi-0}{\sqrt{25}}|\le\frac{m}{\sqrt{25}}=\frac{m}{5})=2\Phi(\frac{m}{5})-1=0.997.$$

可得：$\Phi(\frac{m}{5})=0.9985$，查表得：$\frac{m}{5}=2.97$,即$m=14.85$.

37.解：设ξ是10万人中遇重大事故的人数，则ξ服从二项分布$B(10*10^4,2*10^{-4})$.

$E\xi=10*10^4*2*10^{-4}=20, D\xi=10*10^4*2*10^{-4}*(1-2*10^{-4})=19.996$.

保险公司收取保险费用为$400*10=4000$(万元),理赔为100ξ(万元).

所以根据题意有：

$$P(4000-100\xi\ge 1000)=P(\xi\le 30)=P(\frac{\xi-20}{\sqrt{19.996}}\le\frac{30-20}{\sqrt{19.996}}\approx 2.236)$$

$$=\Phi(2.236)=0.987.$$

38.解：(1)设每个螺丝钉的重量为 $\xi_i, i=1,2,\cdots,100$.于是：

$E\xi_i = 0.05, D\xi_i = 0.005^2$.

设 $\xi = \sum_{i=1}^{100}\xi_i, E\xi = 100*0.05 = 5, D\xi = 100*0.005^2$.

于是根据中心极限定理：

$$P(\xi \geq 5.1) = P(\frac{\xi - 5}{\sqrt{100*0.005^2}} \geq \frac{5.1-5}{\sqrt{100*0.005^2}} = 2)$$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

(2)设每袋螺丝钉中重量超过5.1千克的袋数为 η,

则 η 服从二项分布 $B(500, 0.0228)$,

$E\eta = 500*0.0228 = 11.4, D\eta = 500*0.0228*(1-0.0228) = 11.14$.

于是根据中心极限定理：

$$P(\eta \leq 0.04*500 = 20) = P(\frac{\eta - 11.4}{\sqrt{11.14}} \leq \frac{20-11.4}{\sqrt{11.14}} = 2.58)$$

$= \Phi(2.58) = 0.9951$.

39.解：(1)设1000个人中能进入掩体的人数为 ξ,

则 ξ 服从二项分布 $B(1000, 0.9)$,

$E\xi = 1000*0.9 = 900, D\xi = 1000*0.9*0.1 = 90$.

设至少有 m 个人能进入掩体，于是根据中心极限定理：

$$P(\xi \geq m) = P(\frac{\xi - 900}{\sqrt{90}} \geq \frac{m-900}{\sqrt{90}}) = 1 - \Phi(\frac{m-900}{\sqrt{90}}) = 1 - 0.95.$$

查表得：$\frac{m-900}{\sqrt{90}} = -1.645$，于是 $m \approx 884.4$,

所以至少有884个人能进入掩体.

(2)设至多有 k 个人能进入掩体，于是根据中心极限定理：

$$P(\xi \leq k) = P(\frac{\xi - 900}{\sqrt{90}} \leq \frac{k-900}{\sqrt{90}}) = \Phi(\frac{k-900}{\sqrt{90}}) = 0.95.$$

查表得：$\frac{k-900}{\sqrt{90}} = 1.645$，于是 $k \approx 915.6$,

所以至多有916个人能进入掩体.

习题 6

1.某射手独立重复地射击18次，击中靶子的环数如下：

环数	10	9	8	7	6	5	4
频数	1	3	0	8	4	1	1

求经验分布函数并作图。

解：经验分布函数$F_{18}(x)=\begin{cases}0, x<4\\1/18, 4\le x<5\\2/18, 5\le x<6\\6/18, 6\le x<7\\14/18, 7\le x<9\\17/18, 9\le x<10\\1, x\ge 10.\end{cases}$ 图略。

2.设$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中μ为已知，σ^2未知，ξ_1，ξ_2,……，ξ_n是总体ξ的样本，问下列哪些是统计量？哪些不是？并简述其理由。

(1) $\xi_1+\xi_2+\sigma$; (2)$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)$;

(3) $\min\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ (4)$(\xi_1+\xi_2+\xi_3)/\sigma^2$;

(5)$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\mu)^2}{\sigma^2}$; (6)$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\mu)^2}{\tilde{S}^2}$;

解： (1),(4),(5)不是统计量，因为含有未知数σ; (2),(3),(6)是统计量。

3.当样本容量大小为2时，求证：

(1) $\tilde{S}^2=\frac{1}{4}(\xi_1-\xi_2)^2$; (2)$S^2=2\tilde{S}^2$.

证明： (1) $\tilde{S}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\bar{\xi})^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\xi_i^2+\bar{\xi}^2-2\xi_i\bar{\xi})=\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2-2\bar{\xi}^2)=\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)$

$$-(\frac{\xi_1+\xi_2}{2})^2=\frac{1}{4}(\xi_1-\xi_2)^2.$$

(2)$S^2=\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\bar{\xi})^2=2\tilde{S}^2$.证毕。

4.设总体ξ服从区间（-1,1）上均匀分布，求从总体ξ抽取样本ξ_1，ξ_2,……，ξ_n的均值的数学期望和方差。

解：$E\xi=\frac{-1+1}{2}=0; D\xi=\frac{(1+1)^2}{12}=\frac{1}{3}; E\bar{\xi}=E\xi=0; D\bar{\xi}=\frac{1}{n}D\xi=\frac{1}{3n}.$

5.ξ_1，ξ_2,……，ξ_n是总体ξ的样本，$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, S^2=\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$,若 (1) $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$;
(2)$\xi\sim B(1,p)$,试分别求$E(\bar{\xi}), D(\bar{\xi}), E(S^2)$.

解：（1）$E\xi=\mu, D\xi=\sigma^2. E(\bar{\xi})=\mu, D(\bar{\xi})=\frac{1}{n}\sigma^2. E(S^2)=\frac{1}{(n-1)}E\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$

$$=\frac{1}{(n-1)}E\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2-2\xi_i\bar{\xi}+\bar{\xi}^2)$$

$$=\frac{1}{(n-1)}E[\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-n\bar{\xi}^2]=\frac{n}{(n-1)}[(D\xi_i+(E\xi_i)^2)-(D\bar{\xi}+(E\bar{\xi})^2)]$$

$$=\frac{n}{(n-1)}[(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2)]=\frac{n}{(n-1)}\frac{(n-1)}{n}\sigma^2=\sigma^2.$$

(2)$E\xi=p, D\xi=p(1-p). E(\bar{\xi})=p, D(\bar{\xi})=\frac{1}{n}p(1-p). E(S^2)=p(1-p).$

6.从总体$\xi\sim N(52,6.3^2)$中抽取一容量为36的样本，求样本均值$\bar{\xi}$落在50.8到53.8之间的概率。

解：$E\xi=52, D\xi=6.3^2, E\bar{\xi}=52, D\bar{\xi}=\frac{1}{36}6.3^2. P(50.8<\bar{\xi}<53.8)$

$$=P(\frac{50.8-52}{6.3/6}<\frac{\bar{\xi}-52}{6.3/6}<\frac{53.8-52}{6.3/6})$$

$$=\Phi(1.714)-\Phi(-1.143)=\Phi(1.714)+\Phi(1.143)-1=0.8293.$$

7.设总体$\xi\sim N(0,0.3^2)$, $\xi_1,\xi_2,\ldots\ldots,\xi_{10}$是从总体$\xi$抽取的一个样本，求$P(\sum_{i=1}^{10}\xi_i^2>1.44)$.

解：$\xi_i\sim N(0,0.3^2), \frac{\xi_i-0}{0.3}\sim N(0,1).\qquad \sum_{i=1}^{10}\frac{\xi_i^2}{0.09}\sim\chi^2(10).$

$$P(\sum_{i=1}^{10}\xi_i^2>1.44)=P(\sum_{i=1}^{10}\frac{\xi_i^2}{0.09}>\frac{1.44}{0.09})=P(\chi^2(10)>16)=0.1.$$

8.求下列各题中有关分布的“上α分为数”（即α上侧分位点）：

（1）$\chi^2_{0.05}(6)$; $\qquad\chi^2_{0.01}(9)$；

（2）$t_{0.01}(12)$; $\qquad t_{0.05}(8)$;

(3)$F_{0.025}(5,10)$, $\qquad F_{0.95}(10,5)$.

解：（1）$\chi^2_{0.05}(6)=12.6$; $\qquad\chi^2_{0.01}(9)=21.7$;

（2）$t_{0.01}(12)=2.68$; $\qquad t_{0.05}(8)=1.86$;

(3)$F_{0.025}(5,10)=4.24$, $\qquad F_{0.95}(10,5)=\frac{1}{F_{0.05}(5,10)}=\frac{1}{3.33}=0.3.$

9.查表求下列各式中C的值：

(1) 设ξ～χ^2(24)， $P(\xi > C) = 0.1;$

(2)设ξ～χ^2(40)， $P(\xi < C) = 0.95;$

(3)设ξ～t（6）， $P(\xi > C) = 0.05;$

(4)设ξ～$F(10,10)$, $P(\xi > C) = 0.05;$

(5)设ξ～$t(10)$, $P(\xi > C) = 0.95.$

解： (1) $C = \chi^2_{0.1}(24) = 33.2;$

(2)$P(\xi < C) = 0.95$,即$P(\xi \geq C) = 0.05$,则$C = \chi^2_{0.05}(40) = 55.8;$

(3)$C = t_{0.05}(6) = 1.943;$

(4)$C = F_{0.05}(10,10) = 2.98;$

(5)$P(\xi > C) = 0.95$,即$P(\xi > -C) = 0.05$,则$-C = t_{0.05}(10) = 1.812$,因而$C = -1.812.$

10.设ξ_1，ξ_2,……，ξ_n是相互独立同分布的随机变量，且都服从$N(0,\sigma^2)$，求证：

(1)$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \sim \chi^2(n);$

(2)$\dfrac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 \sim \chi^2(1).$

证明： (1) $\xi_i \sim N(0,\sigma^2), \xi_i/\sigma \sim N(0,1), \sum_{i=1}^{n}(\xi_i/\sigma)^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \sim \chi^2(n).$

(2)$\xi_i \sim N(0,\sigma^2), \sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(0,n\sigma^2), \dfrac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(0,1), \dfrac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 \sim \chi^2(1).$

11.设ξ_1，ξ_2,……ξ_n是相互独立的随机变量，且每一个都服从标准正态分布，

求常数C，使$\dfrac{C(\xi_1+\xi_2)}{\sqrt{\xi_3^2+\xi_4^2+\xi_5^2}}$服从$t$分布。

解：已经ξ_i～$N(0,1), i = 1,2,\ldots\ldots, n,$ 则$\xi_1+\xi_2 \sim N(0,2), (\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2} \sim N(0,1).$

$\xi_3^2+\xi_4^2+\xi_5^2 \sim \chi^2(3)$.则$\dfrac{(\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(\xi_3^2+\xi_4^2+\xi_5^2)/3}}$服从$t$分布，也即$C = \sqrt{3/2}.$

12.设随机变量ξ服从分布$F(n_1,n_2)$,求$\dfrac{1}{\xi}$的分布。

解：已知$\xi \sim F(n_1,n_2)$,则存在ξ_1～$\chi^2(n_1), \xi_2 \sim \chi^2(n_2)$,使得$\xi = \dfrac{\xi_1/n_1}{\xi_2/n_2} \sim F(n_1,n_2).$

则$\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\xi_2/n_2}{\xi_1/n_1} \sim F(n_2,n_1).$

13.设总体$\xi \sim N(0,\sigma^2), \xi_1, \xi_2$为$\xi$的样本，求证$\dfrac{(\xi_1+\xi_2)^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}$服从分布$F(1,1)$.

证明：已知$\xi_i \sim N(0,\sigma^2), i=1,2.$　　则$\xi_1+\xi_2 \sim N(0,2\sigma^2), \xi_1-\xi_2 \sim N(0,2\sigma^2)$,
$(\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2}\sigma \sim N(0,1).(\xi_1-\xi_2)/\sqrt{2}\sigma \sim N(0,1).$则$[(\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2}\sigma]^2 \sim \chi^2(1)$,
$[(\xi_1-\xi_2)/\sqrt{2}\sigma]^2 \sim \chi^2(1)$,因而$\dfrac{(\xi_1+\xi_2)^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}$服从分布$F(1,1)$.

14.已知$\xi \sim t(n)$,求证：$\xi^2 \sim F(1,n)$.

证明：由$\xi \sim t(n)$,则存在$\xi_1 \sim N(0,1), \xi_2 \sim \chi^2(n)$,使得$\xi = \dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_2/n}}$。而$\xi_1^2 \sim \chi^2(1)$,

故$\xi^2 = \dfrac{\xi_1^2/1}{\xi_2/n} \sim F(1,n)$.

第 7 章习题答案

1.设总体ξ有分布律

ξ	-1	0	2
p	2θ	θ	$1-3\theta$

其中$0<\theta<\dfrac{1}{3}$为待估参数，求θ的矩估计。

解：$E\xi = (-1)*2\theta + 0*\theta + 2*(1-3\theta) = -8\theta + 2.$　　令$\bar{\xi} = -8\hat{\theta}+2$，则$\hat{\theta} = \dfrac{1}{8}(2-\bar{\xi})$.

2.设总体ξ有分布密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta^2}(\theta - x), 0<x<\theta \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

其中$\theta>0$为待估参数，求θ的矩估计。

解：$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} x\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx = \dfrac{\theta}{3}$.令$\bar{\xi} = \dfrac{\hat{\theta}}{3}$,则$\hat{\theta} = 3\bar{\xi}$.

3.设总体ξ在$[a-b, 3a+b]$上服从均匀分布，其中$a>0, b>0$为待估参数，求a,b的矩估计。

解：$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a-b}^{3a+b} x\dfrac{1}{2a+2b}dx = 2a \approx \bar{\xi}$　　(1), $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (2a)^2 \approx \tilde{S}^2 \qquad (2);$$

由（1），（2）得，$\hat{a} = \dfrac{1}{2}\bar{\xi}, \hat{b} = -\dfrac{1}{2}\bar{\xi} + \sqrt{3}\tilde{S}.$

4.有一批灯泡寿命（小时）的抽取样本：

1458，　1395，　1562，　1614，　1351

1490，　1478，　1382，　1536，　1496

试用矩估计法对这批灯泡的平均使用寿命μ及寿命方差σ^2作出矩估计。

解：$\bar{\xi}=\frac{1}{10}(1458+1395+1562+1614+1351+1490+1478+1382+1536+1496)\approx\mu$，

解得$\hat{\mu}=1476.2$；$\tilde{S}^2=\frac{1}{10}[(1458-1476.2)^2+(1395-1476.2)^2+\ldots\ldots+(1496-1476.2)^2]\approx\sigma^2$，

解得$\hat{\sigma}^2=6198.56$.

5.已知某电子设备的使用寿命ξ服从指数分布，其分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0,\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，现随机抽取10台，测得寿命的数据（小时）如下：

1050，　1100，　1080，　1120，　1200

1250，　1040，　1130，　1300，　1200

求θ的最大似然估计。

解：似然函数为

$L(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{10}f(x_i)=\frac{1}{\theta^{10}}e^{-\sum_{i=1}^{10}x_i/\theta}$，两边取对数得$\ln L(x_i,\theta)=\ln 1-10\ln\theta-\sum_{i=1}^{10}x_i/\theta$.

令$\frac{d\ln L(x_i,\theta)}{d\theta}=0$，解得$\hat{\theta}_{最大似然估计}=\bar{x}=1147$（小时）.

6.设$\xi_1,\xi_2,\ldots\ldots,\xi_n$是取自总体$\xi$的一个样本，$\xi\sim B(1,p)$，其中$p$为未知，$0<p<1$，求总体参数$p$的矩估计与最大似然估计。

解：由$E\xi=p\approx\bar{\xi}$，得$\hat{p}_{矩估计}=\bar{\xi}$，似然函数为$L(\xi_i,p)=\prod_{i=1}^{n}p^{\xi_i}(1-p)^{(n-\xi_i)}$.令$\frac{d\ln L(\xi_i,p)}{dp}=0$，

得$\hat{p}_{最大似然函数}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}=\bar{\xi}$.

7.在某道口观察每15秒内通过汽车辆数，得数据如下：

汽车辆数	i	0	1	2	3	4
频数	μ_i	92	68	28	11	1

根据以上数据求每 15 秒钟内通过该道口的汽车辆数ξ的 $E\xi$ 和 $D\xi$ 的无偏估计。

解：$E\xi$的无偏估计$\bar{\xi}=\frac{1}{200}(0*92+1*68+2*28+3*11+4*1)=\frac{161}{200}=0.8.$

$D\xi$的无偏估计$S^2=\frac{1}{199}[(0-0.8)^2*92+(1-0.8)^2*68+(2-0.8)^2*28+(3-0.8)^2*11$

$+(4-0.8)^2*1]=0.83.$

8.设$\xi_1,\xi_2,\ldots\ldots,\xi_n$是取自总体$\xi$的一个样本，$n\geq 2,\xi\sim B(1,p)$,其中$p$为未知,$0<p<1$,求证：

(1) ξ_1^2是p的无偏估计；

(2) ξ_1^2不是p^2的无偏估计;

(3)$\xi_1\xi_2$是p^2的无偏估计。

证明： (1) $E\xi_1^2=E\xi^2=D\xi+(E\xi)^2=p(1-p)+p^2=p$，即$\xi_1^2$是$p$的无偏估计。

(2) $E\xi_1^2\neq p^2$，所以ξ_1^2不是p^2的无偏估计。

(3)因为ξ_1,ξ_2独立，所以$E\xi_1\xi_2=E\xi_1E\xi_2=E\xi E\xi=p^2$,即$\xi_1\xi_2$是$p^2$的无偏估计。

9.设总体ξ服从正态分布$N(\mu,1),\xi_1,\xi_2$是从总体ξ中抽取的一个样本，验证下面三个估计量：

(1) $\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2$；　(2) $\hat{\mu}_2=\frac{1}{4}\xi_1+\frac{3}{4}\xi_2$；　(3) $\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2$

都是μ的无偏估计，并求出每个估计量的方差，问哪一个最好？

解：由ξ_1,ξ_2独立，则 (1) $D\hat{\mu}_1=D(\frac{2}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2)=\frac{4}{9}D\xi_1+\frac{1}{9}D\xi_2=\frac{5}{9}.$

(2)$D\hat{\mu}_2=D(\frac{1}{4}\xi_1+\frac{3}{4}\xi_2)=\frac{1}{16}D\xi_1+\frac{9}{16}D\xi_2=\frac{7}{16}.$

(3)$D\hat{\mu}_3=D(\frac{1}{2}\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2)=\frac{1}{4}D\xi_1+\frac{1}{4}D\xi_2=\frac{1}{2}$最小，也即最好。

10.用某仪器间接测量温度，重复测量5次，得（单位:$^0\ C$）:

1250,　1265,　1245,　1260,　1275

假定重复测量所得温度$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，求总体温度真值μ的95%的置信区间：

(1) 根据以往长期经验，已知测量精度$\sigma=11$;

(2) 当σ未知时。

解:(1)已知$\bar{\xi}$～$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$,取统计量$U=\frac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$,则有$U\sim N(0,1)$,对于给定的置信概率$1-\alpha$,

可求出$u_{\alpha/2}$使得 $P(\left|\frac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$, 即$P(\bar{\xi}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{\xi}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$,

即μ的置信概率为$1-\alpha$的置信区间为（$\bar{\xi}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{\xi}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$） （*）,

将$\bar{\xi}=\frac{1}{5}(1250+1265+1245+1260+1275)=1259, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$,查表得$u_{\alpha/2}=1.96$,

$\sigma=11, n=5$代入(*),求得μ的置信区间为（1249.375,1268.625）；

(2)取统计量$t=\frac{\bar{\xi}-\mu}{S/\sqrt{n}}$,则有$t\sim t(n-1)$,对于给定的置信概率$1-\alpha$,可求出$t_{\alpha/2}(n-1)$

使得 $P(\left|\frac{\bar{\xi}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\alpha/2})=1-\alpha$, 即$P(\bar{\xi}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{\xi}+t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}})=1-\alpha$,

即μ的置信概率为$1-\alpha$的置信区间为（$\bar{\xi}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{\xi}+t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$） （*）,

将$\bar{\xi}=\frac{1}{5}(1250+1265+1245+1260+1275)=1259, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$,查表得

$t_{\alpha/2}(4)=2.78, S=11.937, n=5$代入(*),求得$\mu$的置信区间为（1244.185,1273.815).

11.假定到某地旅游的一个游客的消费额ξ～$N(\mu,\sigma^2)$,且$\sigma=500$元，今要对该地每一个游客的平均消费额μ进行估计，为了能以不小于95%的置信概率确信这估计的绝对误差小于50元，问至少需要随机调查多少个游客？

解：已知$\sigma=500, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05, u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$.为确保$P(|\bar{\xi}-\mu|<50)\geq 95\%$,

即$P\left(\frac{|\bar{\xi}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{50}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\geq 95\%$,又知$P\left(\frac{|\bar{\xi}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha=95\%$,因而只需$\frac{50}{\sigma/\sqrt{n}}\geq u_{\alpha/2}$,

将已知数据代入求得$n\geq 384.16$,即随机调查人数不少于385人。

12.已知某种零件的长度$\xi\sim N(32.05,1.1^2)$，现从中抽查6件，测得它们的长度（单位：*cm*）为：

32.56， 29.66， 31.64， 30.00， 31.87， 31.03

试问这批零件的平均长度是否就是32.05厘米？检查使用两个不同的显著性水平：

$\alpha=0.05$，$\alpha=0.01$.

解：（1）提出假设，$H_0:\mu=\mu_0=32.05$.(2)找统计量。确定统计量$U=\frac{\bar{\xi}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(3)求临界值。给定显著性水平α（$0<\alpha<1$),查正态分布表求$u_{\alpha/2}$,使$P(|U|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$.

(4)求观察值。已知$\mu_0=32.05$，$\sigma=1.1$，$n=6$,计算

$\bar{\xi}=\frac{1}{6}(32.56+29.66+31.64+30.00+31.87+31.03)=31.127$.将以上数据代入$U$得

观察值$u_1=-2.056$.(5)作出判断。当$\alpha=0.05$时，$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96, |u_1|>1.96$,

因而$\alpha=0.05$时，拒绝H_0;当$\alpha=0.01$时，$u_{\alpha/2}=u_{0.005}=2.58, |u_1|<2.58$,因而$\alpha=0.01$时，接受$H_0$。

13.从正态总体$N(\mu,1)$中抽取100个样品，计算得$\bar{\xi}=5.32$，试检验$H_0:\mu=5$是否成立（显著性水平$\alpha=0.01$）？

解：⑴ 提出假设，$H_0:\mu=\mu_0=5$.(2)找统计计量。确定统计量$U=\dfrac{\bar{\xi}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
(3)求临界值。给定显著性水平α（$0<\alpha<1$），查正态分布表求$u_{\alpha/2}$，使$P(|U|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$.
(4)求观察值。已知$\mu_0=5$，$\sigma=1$，$n=100$，计算$\bar{\xi}=5.32$.将以上数据代入U得观察值$u_1=3.2$
(5) 作出判断。当$\alpha=0.01$时，$u_{\alpha/2}=u_{0.005}=2.58$，$|u_1|>2.58$，因而$\alpha=0.01$时，拒绝$H_0$。

14.某公司用自动灌装机灌装营养液，设自动灌装机的正常灌装量$\xi\sim N(100,1.2^2)$，现测量9支灌装样品的灌装量（单位：g）为

99.3， 98.7， 100.5， 101.2， 98.3， 99.7， 102.1， 100.5， 99.5.

问在显著性水平$\alpha=0.05$下，(1)灌装量是否符合标准？（2）灌装精度是否在标准范围内？

解：⑴(i)提出假设，$H_0:\mu=\mu_0=100$.(ii)找统计计量。确定统计量$U=\dfrac{\bar{\xi}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0<\alpha<1$），查正态分布表求$u_{\alpha/2}$，使$P(|U|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$.
(iv)求观察值。已知$\mu_0=100$，$\sigma=1.2$，$n=9$，计算$\bar{\xi}=99.98$.将以上数据代入U得观察值$u_1=-0.05$.
（v）作出判断。当$\alpha=0.05$时，$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，$|u_1|<1.96$，因而接受$H_0$，即灌装量符合标准。
(2)(i)提出假设，$H_{00}:\sigma^2=\sigma_0^2=1.2^2$.$(ii)$找统计计量。确定统计量$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{9}(\xi_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$
(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0<\alpha<1$），查正态分布表求$\chi^2_{\alpha/2}(n)$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$使
$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(n))=1-\alpha$.$(iv)$求观察值。已知$\mu=100$，$\sigma_0=1.2$，$n=9$，
将以上数据代入χ^2得观察值$\chi_1^2=8.17$.(v)作出判断。当$\alpha=0.05$时，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)=\chi^2_{1-\alpha/2}(9)=2.7$，
$\chi^2_{\alpha/2}(n)=\chi^2_{\alpha/2}(9)=19$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\chi_1^2<\chi^2_{\alpha/2}(n)$，因而接受$H_{00}$，即灌装精度在标准范围内。

15.某工厂用自动包装机包装葡萄糖，规定标准重为袋净重500g，现随机地抽取10袋，测得各袋净重(g)为

495， 510， 505， 498， 503， 492， 502， 505， 497， 506

设每袋净重服从正态分布N(μ,σ^2)，问包装机工作是否正常（取显著性水平$\alpha=0.05$）？
如果：
⑴ 已知每袋葡萄糖净重的标准差$\sigma=5g$;
(2)未知σ。

解：（1）（i）提出假设，$H_0: \mu = \mu_0 = 500$.(ii)找统计量。确定统计量$U = \dfrac{\bar{\xi} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0 < \alpha < 1$),查正态分布表求$u_{\alpha/2}$,使$P(|U| < u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

(iv)求观察值。已知$\mu_0 = 500$，$\sigma = 5$，$n = 10$,计算$\bar{\xi} = 501.3$.将以上数据代入U得观察值$u_1 = 0.822$

（v）作出判断。当$\alpha = 0.05$时，$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96, |u_1| < 1.96$,因而$\alpha = 0.05$时，接受$H_0$。

(2)(i）提出假设，$H_{00}: \mu = \mu_0 = 500$.($ii$)找统计量。确定统计量$t = \dfrac{\bar{\xi} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0 < \alpha < 1$),查正态分布表求$u_{\alpha/2}$,使$P(|t| < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

(iv)求观察值。已知$\mu_0 = 500$，$S = 5.62$，$n = 10$,计算$\bar{\xi} = 501.3$.将以上数据代入t得观察值$t_1 = 0.73$

（v）作出判断。当$\alpha = 0.05$时，$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96, |t_1| < 1.96$,因而$\alpha = 0.05$时，接受$H_{00}$。

16.在上题中，能否认为每袋葡萄糖净重的标准差$\sigma = 5g$(取显著性水平$\alpha = 0.05$)？如果：

(1) 已知每袋葡萄糖净重的均值$\mu = 500g$;

(2)未知μ。

解：(1)(i)提出假设，$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 5^2$.($ii$)找统计量。确定统计量$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{10}(\xi_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0 < \alpha < 1$),查正态分布表求$\chi^2_{\alpha/2}(n), \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$使

$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)) = 1 - \alpha$.($iv$)求观察值。已知$\mu = 500$，$\sigma_0 = 5$，$n = 10$,

将以上数据代入χ^2得观察值$\chi_1^2 = 12.04$.(v)作出判断。当$\alpha = 0.05$时，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n) = \chi^2_{1-\alpha/2}(10) = 3.25$,

$\chi^2_{\alpha/2}(n) = \chi^2_{\alpha/2}(10) = 20.5, \chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \chi_1^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)$,因而接受$H_0$，即可认为每袋葡萄糖净重的标准差为$\sigma = 5g$。

(2)(i)提出假设，$H_{00}: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 5^2$.($ii$)找统计量。确定统计量$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{10}(\xi_i - \bar{\xi})^2 \sim \chi^2(n-1)$

(iii)求临界值。给定显著性水平α（$0 < \alpha < 1$),查正态分布表求$\chi^2_{\alpha/2}(n), \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$使

$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)) = 1 - \alpha$.($iv$)求观察值。已知$\sigma_0 = 5$，$n = 10$,计算得$\bar{\xi} = 501.3$,

将以上数据代入χ^2得观察值$\chi_1^2 = 11.365$.(v)作出判断。当$\alpha = 0.05$时，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n) = \chi^2_{1-\alpha/2}(9) = 2.7$,

$\chi^2_{\alpha/2}(n) = \chi^2_{\alpha/2}(9) = 19, \chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \chi_1^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)$,因而接受$H_{00}$，即可认为每袋葡萄糖净重的标准差为$\sigma = 5g$。

17.两家工厂用同样的生产过程生产塑料，假定两个工厂的塑料强度都服从正态分布，生产已定型且方差都已知，收集到的数据如下：

$$n_1 = 9, \quad \bar{\xi} = 39, \quad \sigma_1 = 3$$
$$n_2 = 16, \quad \bar{\eta} = 35, \quad \sigma_2 = 5$$

问两个工厂塑料的平均强度是否相等？取显著性水平$\alpha = 0.05$.

解：（1）提出假设。$H_0=\mu_1-\mu_2=0$.(2)找统计量$U=\dfrac{(\bar{\xi}-\bar{\eta})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

(3)求临界值。对给定的显著性水平α（$0<\alpha<1$),查正态表求$u_{\alpha/2}$,使$P(|U|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$.

(4)求观察值。已知$\mu_1-\mu_2=0$，$n_1=9,\bar{\xi}=39,\sigma_1=3$，$n_2=16,\bar{\eta}=35,\sigma_2=5$，计算得$U$的观察值$u_1=2.5$.(5)作出判断。$u_1>u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$,所以拒绝$H_0$,即认为两个工厂塑料的平均强度不相等。

18.某种橡胶配方中，原用氧化锌$5g$，现改为$1g$,今分别对两种配方各作若干试验，测得橡胶伸张率如下：

原配方:540，　533，　525，　520，　545，　531，　541，　529，　534

现配方:565，　577，　580，　575，　556，　542，　560，　532，　570，　561

设同一批橡胶伸张率服从正态分布，问在两种配方下，橡胶伸张率是否服从同分布（取显著性水平$\alpha=0.01$）？

解：检验分两步。第一步：检验$\sigma_1^2=\sigma_2^2$.检验步骤为（1）提出假设。$H_0:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$.(2)找统计量。

$F=\dfrac{\dfrac{1}{(n_1-1)\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\dfrac{1}{(n_2-1)\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(\eta_i-\bar{\eta})^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$.(3)求临界值。对给定的的显著性水平$\alpha$，查表求$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1),F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$,使$P(F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))=1-\alpha$.

(4)求观察值。由给定的样本得$S_1^2=511/8,S_2^2=2132/9$,算出统计量F的值$F_1=0.27$.(5)作出判断。

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.995}(8,9)=1/F_{0.005}(9,8)=0.136$，$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.005}(8,9)=6.69$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F_1<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，因而，接受$H_0$,即认为橡胶伸张率方差相同。

第二步：检验$\mu_1=\mu_2$.检验步骤为（1）提出假设，$H_{00}:\mu_1-\mu_2=0$.（2）找统计量。

$t=\dfrac{(\bar{\xi}-\bar{\eta})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$.其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.(3)求临界值。对给定的显著性水平$\alpha$，查表求得$t_{\alpha/2}=t_{0.005}(17)=2.9$,使得$P(|t|<t_{\alpha/2})=1-\alpha$.(4)求观察值。由所给的样本得$\bar{\xi}=533$，$\bar{\eta}=562$，$\mu_1-\mu_2=0$，$n_1=9,n_2=10$，$S_1^2=511/8,S_2^2=2132/9,S_w=12.47$,求得$t$的观察值为$t_1=-5.063$.

(5)作出判断。$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.005}(17)=2.9.|t_1|>t_{\alpha/2}$,因而，拒绝$H_{00}$,即认为橡胶伸张率均值不相同。

综上，认为橡胶伸张率不服从相同的分布。

19.某种物品在处理前与处理后分别抽样分析其含脂率如下：

处理前ξ_i:0.19,　0.18,　0.21,　0.30,　0.41,　0.12,　0.27

处理后η_i:0.15,　0.13,　0.07,　0.24,　0.19,　0.06,　0.08,　0.12

假定处理前后的含脂率都服从正态分布，且标准差不变，问处理后含脂率的均值是否显著降低？处理前后含脂率的方差是否有显著差异？均取显著性水平$\alpha=0.05$.

解：检验含脂率（1）提出假设，$H_{00}:\mu_1-\mu_2=r>0$.(2）找统计量。

$t=\dfrac{(\bar{\xi}-\bar{\eta})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$.其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.(3)求临界值。

对给定的显著性水平α，查表求得$t_{\alpha/2}=t_{0.025}(13)=2.16$,使得$P(|t|<t_{\alpha/2})=1-\alpha$.

(4)求观察值。由所给的样本得$\bar{\xi}=0.24$，$\bar{\eta}=0.13$，$\mu_1-\mu_2=r>0$，$n_1=7,n_2=8$，

$S_1^2=0.0548,S_2^2=0.0272,S_w=0.034$,求得$t$的观察值为$t_1=(0.11-r)/0.0176$,

(5)作出判断。当$r>0.072$时，$t_1<t_{\alpha/2}=t_{0.025}(13)=2.16$,即接受$H_{00}$,即认为处理后含脂率的均值显著降低。

下面检验含脂率的方差是否有显著差异。（1）提出假设。$H_0:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$.(2)找统计量。

$F=\dfrac{\dfrac{1}{(n_1-1)\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\dfrac{1}{(n_2-1)\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(\eta_i-\bar{\eta})^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$.(3)求临界值。对给定的的显著性水平$\alpha$，

查表求$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1),F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$,

使$P(F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))=1-\alpha$.

(4)求观察值。由给定的样本得$S_1^2=0.0548,S_2^2=0.0272$,算出统计量$F$的值$F_1=2.0147$.

(5)作出判断。

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(6,7)=1/F_{0.025}(7,6)=0.1754$，$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(6,7)=5.12$，

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F_1<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，因而，接受$H_0$,

即认为处理前后含脂率的标准差无显著差异。

20.某交通警察对一个道口行人情况观察200次（每次上午7:30至8:00），记录了违反交通规则人数情况如下：

人数ξ_i:	0	1	2	3	4
频数n_i:	109,	65,	22,	3,	1

问该道口在早上7:30至8:00违反交通规则的人数是否服从泊松分布？取显著性水平$\alpha=0.05$.

解：（1）提出假设。H_0:总体ξ服从泊松分布

$$P(\xi=\xi_i)=\frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i!}e^{-\lambda} \qquad (\xi_i=0,1,2,\ldots\ldots)$$

其中λ为未知参数，先用最大似然估计法求其估计值

$$\hat{\lambda}=\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_i n_i\xi_i=0.61$$

即要求假设检验$H_0:\xi\sim P(\lambda)=P(0.61)$.

(2)找统计量。

$$\chi^2=\sum_i\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(k-r-1),\text{这里}k=5,r=1,p_i=P(\xi=\xi_i)$$

$$=\frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i!}e^{-\lambda}=\frac{0.61^{\xi_i}}{\xi_i!}e^{-0.61},(\xi_i=0,1,2,\ldots\ldots)$$

(3)求临界值。对$\alpha=0.05$，查χ^2分布表得$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

（4）求观察值。列出表格7.1

表格 7.1

ξ_i	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
0	109	$e^{-0.61}$	109	0
1	65	$0.61e^{-0.61}$	66.5	0.034
2	22	$\frac{0.61^2}{2}e^{-0.61}$	20.3	0.142
3	3	$\frac{0.61^3}{6}e^{-0.61}$	4.1	0.295
4	1	$\frac{0.61^4}{24}e^{-0.61}$	0.6	0.267

(5)作出判断。因为观察值$\chi_1^2=0.738<7.82$,所以接受H_0,即违反交通规则的人数服从泊松分布。