1、求下列极限

（1） $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$　　　（2） $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解：（1） $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$。

（2） $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=1$$

2、设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_1}{a_n}\right)$，$(n=1,2,\cdots)$，证明极限

$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

证明：思路是运用**单调有界准则**。

由平均值不等式得到：

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_1}{a_n})\geq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{a_1}{a_n}}=\sqrt{a}>1,$$

a_n 有下界，只须再证单调减。注意上述结果对一切 n 成立，于是

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_n^2}{a_n})=a_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

即 a_n 单调减有下界，必有极限。记 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$。

由极限的唯一性，可得方程

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$$

解此方程得到 $\lim_{n\to\infty}a_n=A=\sqrt{a}$ （舍弃了负根）。

3、假设序列 $\{a_n\}$ 满足极限 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在。证明

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!\, a_1a_2\cdots a_n} = 0$， 这里假设 $a_n > 0$， $\forall n \geq 1$.

证明：(i) 记 $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ， 则由假设知 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 极限存在。设 $S_n \to S$. 注意到

$a_n = S_n - S_{n-1}$，其中 $S_0 = 0$。于是

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1})}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} kS_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k}{n}$$

$$= \frac{nS_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k}{n} = S_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k}{n} \to S - S = 0 。$$

注意：这里已利用了 Stolz 定理得到 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k}{n} \to S$ 。

(ii) 根据结论(i) 以及几何平均与算术平均不等式得

$$0 < \sqrt[n]{n!\, a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{1a_1 2a_2 \cdots na_n} \leq \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} \to 0.$$

证毕。