微积分 A1 第 6 次习题课答案　　微分中值定理与洛必达法则

1. f 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $\forall x\in[0,1]$, 有 $0<f(x)<1, f'(x)\neq 1$. 证明: $\exists!\,\xi\in(0,1), s.t.$

   $f(\xi)=\xi.$

证明： **存在性**. 令 $F(x)=f(x)-x$. 因 $0<f(x)<1$, 有 $F(0)>0>F(1)$. 由连续函数的介值性质，$\exists\xi\in(0,1), s.t. F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

唯一性. 假设 $\exists\xi,\eta\in(0,1), \xi\neq\eta, f(\xi)=\xi, f(\eta)=\eta$, 则 $F(\xi)=F(\eta)=0$. 由 **Rolle** 定理, 存在介于ξ,η之间的$\lambda, s.t. F'(\lambda)=0$. 于是 $f'(\lambda)=1$, 与已知矛盾. □

2. f 在 $[3\pi/4, 7\pi/4]$ 上可导, $f(3\pi/4)=f(7\pi/4)=0$. 证明: $\exists\xi\in(3\pi/4,7\pi/4), s.t.$

$$f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi.$$

证明： 令 $F(x)=e^{x}\left(f(x)+\dfrac{\sin x+\cos x}{2}\right)$. $F(3\pi/4)=F(7\pi/4)=0$, 由 **Rolle** 定理, 存在 $\xi\in(3\pi/4,7\pi/4), s.t.$

$$F'(\xi)=e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)+\cos\xi\right)=0,$$

$$f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi. \ \square$$

3. $f\in C[0,+\infty)$, f 在$(0,+\infty)$上可导, $f(0)=0$. 证明: $\forall x\in(0,+\infty), \exists\xi\in(0,x), s.t.$

$$f(x)=(1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi).$$

证明： 由 **Cauchy** 中值定理, $\exists\xi\in(0,x), s.t.$

$$\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln(1+0)}=\frac{f'(\xi)}{1+\xi},$$

因而 $f(x)=(1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi)$. □

4. f 在$[0,1]$上可导, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 且 $f(x)>0, \forall x\in(0,1]$. 证明: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 在$(0,1]$上无界.

证明：由 **Lagrange** 中值定理， $\forall x\in(0,1],\exists\xi_x\in(x,1),s.t.$

$$\ln f(x)-\ln f(1)=\frac{f'(\xi_x)}{f(\xi_x)}.$$

令 $x\to0^+$, 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(\xi_x)}{f(\xi_x)}=-\infty$. 因此 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $(0,1]$ 上无界. □

5. f 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=f(b)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b),s.t.$

$$f(a)-f(\xi)=\xi f'(\xi)/2.$$

证明：对 $x^2f(x)$ 和 x^2 使用Cauchy中值定理, $\exists\xi\in(a,b),s.t.$

$$f(a)=\frac{b^2f(b)-a^2f(a)}{b^2-a^2}=\frac{2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)}{2\xi}=\frac{2f(\xi)+\xi f'(\xi)}{2}. \ \square$$

6. $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, $|f'(x)|$ 在 $(a,+\infty)$ 上递减. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$$

证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists X>\max\{a,0\},s.t.$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\quad \forall x_2>x_1>X.$$

进一步地， $\forall x>2X$, 由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(\frac{x}{2},x),s.t.$

$$\varepsilon>\left|f(x)-f(\frac{x}{2})\right|=\frac{x}{2}|f'(\xi)|\geq\frac{x}{2}|f'(x)|=\left|\frac{xf'(x)}{2}\right|.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$. □

7. f 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $0\le f(x)\le\dfrac{x}{1+x^2}$. 证明: $\exists\xi,s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

证明： $0\le f(x)\le\dfrac{x}{1+x^2}$, 令 $x\to0^+$, 得 $f(0)=0$. 令 $F(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-f(x)$, 则

$$F(x)\geq0,\quad F(0)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0,\quad F'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}-f'(x).$$

若$F(x)\equiv 0$, 则 $\forall\xi\in(0,+\infty), F'(\xi)=0,\ f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

若$F(x)\not\equiv 0$, 则 $\exists a\in(0,+\infty), F(a)>0$. 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, 对$\varepsilon_0=\dfrac{F(a)}{2}$, $\exists \mathrm{X}>a$, s.t.

$$|F(x)-0|<\varepsilon_0=\frac{F(a)}{2},\quad \forall x>\mathrm{X}.$$

设连续函数 $F(x)$ 在 $[0,\mathrm{X}]$ 上的最大值在 $\xi\in(0,\mathrm{X}]$ 取得, 则

$$0<F(a)\le F(\xi)=\max_{x\in[0,\mathrm{X}]}F(x)=\max_{x\in[0,+\infty)}F(x).$$

因此ξ 为 $F(x)$ 的极大值点, $F'(\xi)=0,\ f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$. □

8. 试用微分中值定理求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x^x-\sin a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}\ (a>1)$.

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\arctan\ln(n+1)-\arctan\ln n\right)$.

解:（1）对 $\sin t$ 与 a^t 使用Cauchy中值定理, 存在介于a^x 与x^x 之间的ξ_x, $s.t.$

$$\frac{\sin x^x-\sin a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}=\frac{\cos\xi_x}{a^{\xi_x}\ln a}.$$

令 $x\to a$, 得
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x^x-\sin a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}=\frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a}.$$

（2）令 $f(x)=\arctan\ln x$, 由Lagrange中值定理,

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)=\frac{1}{(1+\ln^2\xi_n)\xi_n},\quad n<\xi_n<n+1.$$

$$\frac{n}{(1+\ln^2(n+1))(n+1)}\le n(f(n+1)-f(n))=\frac{n}{(1+\ln^2\xi_n)\xi_n}\le\frac{1}{1+\ln^2 n}.$$

由夹挤原理得

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\arctan\ln(n+1)-\arctan\ln n\right)=0.\ \square$$

9. 证明下列不等式

（1）$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\ (a>1).$

（2）$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a\quad(0<x<y<\pi/2,a>1).$

证明：（1） 由Lagrange中值定理,$\exists\xi_n\in(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}),s.t.$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=a^{\xi_n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{a^{\xi_n}}{n(n+1)}.$$

于是
$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

（2） 对a^t与$\cos t$使用Cauchy中值定理,存在介于x,y之间的$\xi,s.t.$

$$\frac{a^y-a^x}{\cos y-\cos x}=\frac{a^{\xi}\ln a}{-\sin\xi}\le\frac{a^x\ln a}{-1}\quad(0<x<y<\pi/2,a>1).$$

10. 试用洛必达法则求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right).$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}.$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0).$　　（4）$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}).$

（5）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}(a_1,a_2,\cdots,a_n>0).$

解：（1） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x\cot x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cot x+x\csc^2 x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{2x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}.$$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=-e\cdot\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x)}{2+6x}=-\frac{e}{2}.$$

（3）$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x)+u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x).$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a+x)^{x-1}+(a+x)^x\ln(a+x)-a^x\ln a}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a+x)^{x-1}}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\ln(a+x)-a^x\ln a}{2x}$$

$$=\frac{1}{2a}+\lim_{x\to 0}\frac{x(a+x)^{x-1}\ln(a+x)+(a+x)^x\ln^2(a+x)+(a+x)^{x-1}-a^x\ln^2 a}{2}$$

$$=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+x)}{\tan(\frac{\pi}{4}+x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}=2.$因此，

$$\lim_{n\to+\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}=e^2.$$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right\}$$

$$=e^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\ \square$$

11. $g\in C^2(\mathbb{R}), g(0)=1, g'(0)=-1,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 证明：$f'\in C(\mathbb{R})$.

证明： $g(0)=1, g'(0)=-1,$ 由洛必达法则

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$

$x\neq 0$ 时, $f'(x)=\dfrac{x(g'(x)+e^{-x})-(g(x)-e^{-x})}{x^2}=\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$.

由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0).$$

又 $g\in C^2(\mathbb{R})$，故 $f'\in C(\mathbb{R})$. □

12. $f''(0)=2, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 试求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$.

解： $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} x=0\cdot 0=0.$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$

$$I=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{f(x)}{x^2}}=e. \ \square$$

13. $f\in C^2(\mathbb{R}), f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-1$. 试求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln f\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln f(at)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{af'(at)}{2tf(at)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{a}{2f(at)}\cdot\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f'(at)}{t}$

$$=\frac{a}{2f(0)}\cdot\lim_{t\to 0^+} af''(at)=\frac{a^2 f''(0)}{2f(0)}=-\frac{a^2}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}=e^{-a^2/2}. \ \square$$

14. $0<a_1<\pi, a_{n+1}=\sin a_n$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$.

证明： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2-\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x}=3.$$

$0 < a_1 < \pi, a_{n+1} = \sin a_n, \{a_n\}$单调下降有下界, 因而有极限$a$, 且 $0 \le a \le a_1 < \pi.$

在 $a_{n+1} = \sin a_n$ 中令 $n \to +\infty$, 得 $a = \sin a, a = 0$, 即 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$ 由 Stolz 定理及上面的函数极限可得

$$\lim_{n\to+\infty} na_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1/a_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1/a_{n+1}^2 - 1/a_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 \sin^2 a_n}{a_n^2 - \sin^2 a_n} = 3.$$

于是 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}.$ □

15. 证明：n 阶 Laguerre 多项式 $L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 n 个根。

证明：记 $f(x) = x^n e^{-x}$，n 次多项式 $e^x f(x) = x^n$ 有 n 重根 0，首项系数为 1。

$f'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$，$n$ 次多项式 $e^x f'(x) = x^{n-1}(n-x)$ 有 $n-1$ 重根 0 和单根 n，首项系数为 -1。

设 $k < n$ 时，

$$e^x f^{(k)}(x) = (-1)^k x^{n-k}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k),$$

其中 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$。记 $a_0 = 0$，则 $f^{(k)}(x)$ 有零点 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$，由 Rolle 定理可知，$f^{(k+1)}(x)$ 有 k 个零点 $b_i \in (a_{i-1}, a_i), i = 1,2,\cdots,k$。而 n 次多项式

$$\begin{aligned} e^x f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} x^{n-k}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k) \\ &\quad + (-1)^k x^{n-k}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)\left[\frac{n-k}{x} + \frac{1}{x-a_1} + \cdots + \frac{1}{x-a_k}\right] \end{aligned}$$

（注意这种写法下，$0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为可去间断点，可去间断点处的函数值理解为函数在该点的极限）有 $n-k-1$ 重根 0。此外，

$$e^{a_k} f^{(k+1)}(a_k) = (-1)^k a_k^{n-k}(a_k - a_1)\cdots(a_k - a_{k-1})$$

与 $(-1)^k$ 同号。而 $e^x f^{(k+1)}(x)$ 的首项系数为 $(-1)^{k+1}$，因此存在 $M > a_k, s.t.\ e^M f^{(k+1)}(M)$ 与 $(-1)^{k+1}$ 同号。故 $e^x f^{(k+1)}(x)$ 有根 $b_{k+1} \in (a_k, M)$。

至此，我们证明了 n 次多项式

$$e^x f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} x^{n-k-1}(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{k+1}),$$

其中，$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{k+1}$。

由归纳假设法知，n 次多项式 $L_n(x)=e^x\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})=e^x f^{(n)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 n 个根。

而 n 次多项式至多有 n 个实根，因此 $L_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 n 个根。