# 第十次习题课补充答案

注：2.(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$，$x\in[-1,0]$

在$[-1,0]$上，$|S_n|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}x^k\right|=\left|\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right|\leqslant 2$ （$|1-x|$最小为1，$|x|$最大为1，$|1-x^n|$最大为2）

$\frac{1}{\sqrt{n}}$关于$n$单调，且一致收敛于0.

故，由Dirichlet判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$在$[-1,0]$上一致收敛

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$，$x\in[0,1]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

令$f(n)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，$f'(n)=e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}\left(\ln(1+\frac{x}{n})+n\cdot\frac{-\frac{x}{n^2}}{1+\frac{x}{n}}\right)$

$=e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}\cdot\left[\ln\left(\frac{n+x}{n}\right)-\frac{x}{n+x}\right]=e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}\left[\ln\left(1-\frac{x}{n+x}\right)-\frac{x}{n+x}\right]$

$\underline{\left(\ln\left(1-\frac{x}{n+x}\right)\leqslant-\frac{x}{n+x}\right)}\Longrightarrow\cdot\geqslant 0$，故$f(n)$关于$n$单增

且$|f(n)|\leqslant e^x\leqslant e$．一致有界

而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$一致收敛。故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$在$[0,1]$上一致收敛

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$，$x\in[0,+\infty)$，其中级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

$e^{-nx}$关于$n$单减，$|e^{-nx}|\leqslant 1$ 一致有界

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$一致收敛 $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致~~有~~收敛

5.(3) ① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$

假设~~其~~ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上一致收敛，则~~由(2)得~~因$e^{-nx}$在

$[0,+\infty)$上连续，故由(1)得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$x=0$时收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$收敛$\Rightarrow$矛盾

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$在$x\in(1,+\infty)$，假设一致收敛，则因$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$在$[1,+\infty)$上

连续，故由(1)得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$在$x=1$时收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$收敛$\Rightarrow$矛盾

6. 由第6题，我们可以知道，$\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛

但在 $(-1,1)$ 上不一致收敛，~~而任意 $\delta>0$，$[\delta,\delta]$~~

而对任意 $0<\delta<1$，$[-\delta,\delta]$ 上一致收敛。

有定义：若对于任意给定的闭区间 $[a,b]\subset D$，$\{S_n(x)\}$ 在

$[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $S(x)$

显然，$D$ 上一致收敛 $\Rightarrow$ $D$ 上内闭一致收敛

逆命题不成立，例如第6题。

10. (1) 证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot e^{-nx}}=e^{-x}$，故当 $x>0$ 时收敛，$x\leq 0$ 时发散

对于任意的 $x_0\in(0,+\infty)$，取 $a$ 满足 $0<a<x_0$，~~则有 $0<n e^{-nx}\leq n\cdot e$~~

① 则当 $x\geq a$ 时，$0<n\cdot e^{-nx}\leq ne^{-na}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-na}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在

$[a,+\infty)$ 上一致收敛，$n\cdot e^{-nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在

$[a,+\infty)$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续，由 $x_0$ 任意性，$x_0\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

② 当 $x\geq a$ 时，$|-n^2e^{-nx}|\leq n^2e^{-na}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-na}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}-n^2e^{-nx}$ 在

$[a,+\infty)$ 上一致收敛，而 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，故在 $x_0$ 可导，由 $x_0\in(0,+\infty)$

任意性 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导

(2) 证明：与上面类似，$0<\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}$

$(k=1,2,3,\cdots)$ $k$ 阶导：$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}\ln^k n=g(x)$，

$$|(-1)^k n^{-x}\ln^k n|\leq\frac{1}{n^a}\ln^k n \quad (例5.2.4)$$

**定理 10.1.2** 设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 $D$ 上点态收敛于 $S(x)$，则$\{S_n(x)\}$在 $D$ 上一致收敛于 $S(x)$的充分必要条件是：对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0。$$

**证** 先证必要性。设$\{S_n(x)\}$在 $D$ 上一致收敛于 $S(x)$，则

$$d(S_n, S) = \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| \to 0 \quad (n\to\infty)。$$

于是对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，成立

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| \leqslant d(S_n, S) \to 0 \quad (n\to\infty)。$$

关于充分性，我们采用反证法，也就是证明：若$\{S_n(x)\}$在 $D$ 上不一致收敛于 $S(x)$，则一定能找到数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，使得 $S_n(x_n) - S(x_n) \not\to 0 (n\to\infty)$。

由于命题“$\{S_n(x)\}$在 $D$ 上一致收敛于 $S(x)$”可以表述为

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n > N, \forall\, x \in D: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

因此它的否定命题“$\{S_n(x)\}$在 $D$ 上不一致收敛于 $S(x)$”可以表述为：

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, N > 0, \exists\, n > N, \exists\, x \in D: |S_n(x) - S(x)| \geqslant \varepsilon_0。$$

于是，下述步骤可以依次进行：

取 $N_1 = 1, \exists\, n_1 > 1, \exists\, x_{n_1} \in D: |S_{n_1}(x_{n_1}) - S(x_{n_1})| \geqslant \varepsilon_0$，

取 $N_2 = n_1, \exists\, n_2 > n_1, \exists\, x_{n_2} \in D: |S_{n_2}(x_{n_2}) - S(x_{n_2})| \geqslant \varepsilon_0$，

……

取 $N_k = n_{k-1}, \exists\, n_k > n_{k-1}, \exists\, x_{n_k} \in D: |S_{n_k}(x_{n_k}) - S(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$，

……

对于 $m \in \mathbf{N}^+ \setminus \{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$，可以任取 $x_m \in D$，这样就得到数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，由于它的子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$|S_{n_k}(x_{n_k}) - S(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0,$$

显然不可能成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0。$$

证毕

定理 10.1.2 常用于判断函数序列的不一致收敛。

如对例 10.1.7 中的 $S_n(x) = x^n$，$x \in [0,1)$，可以取 $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1)$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \quad (n \to \infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[0,1)$上不一致收敛于 $S(x)=0$;对例 10.1.8 中的 $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in (0,+\infty)$,可以取 $x_n = \frac{1}{n}$,则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \frac{1}{2},$$

同样也说明$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛于 $S(x)=0$。

**例 10.1.11** 设 $S_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$(见例 10.1.5),则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于 $S(x)=0$。取 $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$,则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛于 $S(x)=0$。

**例 10.1.12** 设 $S_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$,则$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上收敛于 $S(x)=e^x$。证明$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛(见例 10.1.10)。

证 取 $x_n = n$,则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = 2^n - e^n \to -\infty \quad (n \to \infty),$$

由定理 10.1.2,$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛于 $S(x)=e^x$。

**例 10.1.13** 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$上不一致收敛(请读者自行证明该函数项级数的收敛域为$(-1,1)$)。

证 记

$$u_n(x) = n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n,$$

则函数序列$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上收敛于 $u(x)=0$。

由推论 10.1.1 知,要证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在$(-1,1)$上不一致收敛,只要证明函数序列$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上不一致收敛于 $u(x)=0$ 即可。

取 $x_n = 1 - \frac{1}{2n} \in (-1,1)$,则

$$u_n(x_n) - u(x_n) = n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

由定理 10.1.2,$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上不一致收敛于 $u(x)=0$。