第 5 章总复习题答案

1. 若 $f\in R[a,b]$, 则存在连续函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

证明: n 等分 $[a,b]$, 记为 $T_n: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$ 依次连接点 $(x_i, f(x_i)), i=0,1,\cdots,n,$

得到折线段 $y=\varphi_n(x), x\in[a,b].$ 则 $\varphi_n\in C[a,b]$, $\varphi_n\in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\varphi_n(\xi_i)\Delta x_i\in[L(f,T_n),U(f,T_n)].$$

又 $f\in R[a,b]$, 令 $\lim\limits_{n\to\infty}U(f,T_n)=\lim\limits_{n\to\infty}L(f,T_n)=\int_a^b f(x)dx.$ 由夹挤原理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\ \square$$

2. 证明: $|f|\in R[a,b]\Leftrightarrow f^2\in R[a,b].$

证明: 若 $|f|\in R[a,b]$, 则 $f^2=|f|\cdot|f|\in R[a,b].$

设 $f^2\in R[a,b]$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 $T_n: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得 $U(f^2,T_n)-L(f^2,T_n)<\varepsilon^2.$ 记 $m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\}$, $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\}$, 则

$$\left(U(|f|,T_n)-L(|f|,T_n)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\sqrt{\Delta x_i}\cdot\sqrt{\Delta x_i}\right)^2$$

$$\le\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)^2\Delta x_i\cdot\sum_{i=1}^n\Delta x_i=(b-a)\sum_{i=1}^n(M_i^2-2M_im_i+m_i^2)\Delta x_i$$

$$\le(b-a)\sum_{i=1}^n(M_i^2-m_i^2)\Delta x_i=U(f^2,T_n)-L(f^2,T_n)<\varepsilon^2,$$

即存在 $[a,b]$ 的分割 T_n, 使得 $U(|f|,T_n)-L(|f|,T_n)<\varepsilon$, 因此 $|f|\in R[a,b].$ $\square$

3. 证明：Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}, m,n\text{互质}, n>0\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积。

证明: $\forall\varepsilon>0,\exists N, s.t. 1/N<\varepsilon.$ $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 在 (x_0-1,x_0+1) 中只有有限个有理数 $\dfrac{m}{n}$ 满足条件 m,n 互质, $0<n\le N.$ 记这有限个点（除 x_0 外）到 x_0 的距离的最小值为 δ, 则有

$$0 \le R(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad \forall 0 < |x - x_0| < \delta.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0.$ 因此 $R(x)$ 在所有无理点连续，在所有有理点间断。而 $[0,1]$ 区间上的有理点集为零测集。故 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积。

4. 可积函数的复合函数是否一定可积?

解：可积函数的复合函数不一定可积。例如上题中的 Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，

$g(x) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ 1, & u \ne 0 \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积，$g(R(x)) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

（注意这一性质与连续函数不同！）

5. 证明：对正整数 n, $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证明：$\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{n} x^{1/n - 1} = 0.$ 于是 $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \mathrm{A} > 0,$ 使得 $\forall x \ge \mathrm{A}$, 有 $0 < f'(x) < \varepsilon.$

$f \in C[0, \mathrm{A}+1],$ 从而 f 在 $[0, \mathrm{A}+1]$ 上一致连续，$\exists \delta \in (0,1),$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, \mathrm{A}+1], |x_1 - x_2| < \delta.$$

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta,$ 必有以下两种情形之一：$x_1, x_2 \in [0, \mathrm{A}+1]$，或者 $x_1, x_2 \in [\mathrm{A}, +\infty)$。前一种情形，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$ 对后一种情形，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = f'(\xi)|x_1 - x_2| < \varepsilon |x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

故 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.□

6. 设 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续, $f(x) \in (a,b)$, $g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续,证明：$g(f(x))$ 在区间 I 上一致连续。

证明：$g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，则 $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0,$ 使得

$$|g(u) - g(v)| < \varepsilon, \quad \forall u, v \in (a,b), |u - v| < \delta.$$

对此 δ, 因为 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续,所以 $\exists \eta > 0,$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta, \quad \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \eta.$$

而 $f(x) \in (a,b),$ 于是 $\forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \eta$, 有 $|g(f(x_1)) - g(f(x_2))| < \varepsilon.$ 因此 $g(f(x))$

在区间 I 上一致连续. □

7. （1）已知 $f(x)\in C[0,+\infty), \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0,$ 证明： $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（2）已知 $f(x)\in C[0,+\infty), \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=0,$ 证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

证明：（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0,$ 则 $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists \mathrm{A}>0,$ 使得 $\forall x\ge \mathrm{A},$ 有 $\left|f(x)-x\right|<\varepsilon/3.$

$f\in C[0,\mathrm{A}+1],$ 从而 f 在 $[0,\mathrm{A}+1]$ 上一致连续，$\exists\delta\in(0,\varepsilon/3),$ 使得

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon,\quad \forall x_1,x_2\in[0,\mathrm{A}+1],\left|x_1-x_2\right|<\delta.$$

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty),\left|x_1-x_2\right|<\delta,$ 必有以下两种情形之一： $x_1,x_2\in[0,\mathrm{A}+1$，或者 $x_1,x_2\in[\mathrm{A},+\infty)$。前一种情形，有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$ 对后一种情形，有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-x_1\right|+\left|f(x_2)-x_2\right|+\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

因此， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=0,$ 则对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2},\exists\mathrm{A}>0,$ 使得 $\forall x\ge\mathrm{A},$ 有 $\left|f(x)-x^2\right|<\dfrac{1}{2}.$ 于是，$\forall n>\mathrm{A},$ 我们有

$$\left|f(n+\frac{1}{n})-f(n)\right|\ge(n+\frac{1}{n})^2-n^2-\left|f(n+\frac{1}{n})-(n+\frac{1}{n})^2-f(n)+n^2\right|$$

$$>2-\left|f(n+\frac{1}{n})-(n+\frac{1}{n})^2\right|-\left|f(n)-n^2\right|>1.$$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。□

8. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b],\ M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),$ 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}=M.$

证明： 不妨设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)>0,$ 且 $\exists x_0\in(a,b),s.t.\,f(x_0)=M.$ 因 $f\in C[a,b],$ $\forall\varepsilon\in(0,M),\exists 0<\delta<\min\{\left|a-x_0\right|,\left|b-x_0\right|\},s.t.$

$$M-\varepsilon\le f(x)\le M,\quad\forall\left|x-x_0\right|<\delta.$$

于是

$$\left(2\delta(M-\varepsilon)^n\right)^{1/n}\le\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\le\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\le\left(M^n(b-a)\right)^{1/n}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\delta(M-\varepsilon)^n\right)^{1/n}=M-\varepsilon,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(M^n(b-a)\right)^{1/n}=M$, 于是 $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left(2\delta(M-\varepsilon)^n\right)^{1/n}>M-2\varepsilon,\ \left(M^n(b-a)\right)^{1/n}<M+\varepsilon,\ \forall n>N.$$

继而有

$$M-2\varepsilon<\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}<M+\varepsilon,\qquad \forall n>N.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}=M$. □

9. 已知 $f(x)\in C^1(-1,1)$, 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{4x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t$.

解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{4x^2}\int_{-x}^{x}[f(t+x)-f(t-x)]\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_{-x}^{x}f(t+x)\mathrm{d}t-\int_{-x}^{x}f(t-x)\mathrm{d}t}{4x^2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{2x}f(s)\mathrm{d}s-\int_{-2x}^{0}f(s)\mathrm{d}s}{4x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{2x}f(s)\mathrm{d}s+\int_0^{-2x}f(s)\mathrm{d}s}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2f(2x)-2f(-2x)}{8x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2f'(2x)+2f'(-2x)}{4}=f'(0).\ \square$$

10. 设 $f(x)$ 非负、连续，$a>0$, 已知 $y=f(x)$ 与 $x=0,x=a$ 围成的面积为

$S(a)=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a}{2}\sin a+\dfrac{\pi}{2}\cos a$, 求 $f(\dfrac{\pi}{2})$.

解： $f(a)=S'(a)=a+\dfrac{1}{2}\sin a+\dfrac{a}{2}\cos a-\dfrac{\pi}{2}\sin a,\ f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2}$. □

11. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R}),F(x)=\dfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$.

（1）证明：$F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并求导函数。

（2）当 $f(x)=|x|$ 时，求 $F(x)$。

（3）证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=a$.

解答：（1） $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 则 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $g'(x)=f(x)$. 而

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^{x-1}f(t)dt\right)=\frac{1}{2}\left(g(x+1)-g(x-1)\right),$$

由复合函数的链式法则知 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(g'(x+1)-g'(x-1)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x+1)-f(x-1)\right).$$

（2）当 $f(x)=|x|$ 时，$F(x)=\begin{cases} x, & x>1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, & -1\le x\le 1 \\ -x, & x<-1 \end{cases}$。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a,$ 则 $\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{A}>0, s.t.$

$$|f(x)-a|<\varepsilon,\quad \forall x>\mathrm{A}.$$

由积分中值定理，$\forall x>\mathrm{A}+1,\exists\xi_x\in[x-1,x+1], s.t.\ F(x)=f(\xi_x).$ 而 $\xi_x>\mathrm{A},$ 因此

$$|F(x)-a|=|f(\xi_x)-a|<\varepsilon,\quad \forall x>\mathrm{A}+1.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=a.$ □

12. 已知 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a,$ 定义 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt,$ 求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性。

解： $f(x)$ 连续,则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0\cdot a=0.$ 于是 $\varphi(0)=\int_0^1 f(0)dt=0.$

当 $x\ne0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(s)ds.$ 于是

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(s)ds}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{a}{2}.$$

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(s)ds}{x^2},\ x\ne0.$$

$$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(s)ds}{x^2}=a-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{a}{2}=\varphi'(0),$$

故 $\varphi'(x)$ 在点 $x=0$ 连续。□

13. 求 $I_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的递推计算公式。

解： $I_0=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C,$

$$I_1=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x^2=-\int x^{n-1}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\int(n-1)x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}.\ \square$$

14. 常数 $a\neq 0,$ 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+a)}.$

解： $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+a)}=\int\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{x^n(x^n+a)}=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{x^n(x^n+a)}$

$$=\frac{1}{na}\int\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^n+a}\right)\mathrm{d}x^n=\frac{1}{na}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+a}\right|+C.\ \square$$

15. 证明： $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.$

证明： $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2}\sin^n 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi/2}\sin^n 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t+\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t+\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^n(\pi-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t+\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi/2}\sin^n s\mathrm{d}s=\frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.\ \square$$

16. 证明： $\forall x\geq 0,\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t\geq 0.$

证明： 只需证 $\forall k\in\mathbb{Z}^+,\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t\geq\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t.$ 而

$$\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin(t-2\pi)}{1+t}\mathrm{d}t=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin s}{1+s+2\pi}\mathrm{d}s$$

$$\leq\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin s}{1+s}\mathrm{d}s=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t.\ \square$$

17. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，证明: $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

证法一： 记 $c=(a+b)/2$。$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升，则有 $(x-c)(f(x)-f(c))\ge 0$，$\forall x\in[a,b]$。对这个不等式在区间 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b (x-c)f(x)dx \ge f(c)\int_a^b (x-c)dx = 0 \text{。}$$

由此得 $\int_a^b xf(x)dx \ge c\int_a^b f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

证法二： 令 $F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\ t\in[a,b].$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单增,则

$$F'(t) = tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2}f(t) = \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$\ge \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(t)\mathrm{d}x = 0.$$

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增。又 $F(a)=0,$ 所以 $F(b)\ge F(a)=0.$ 得证。□

18. 设 $f(x)\in C[0,\pi], \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0.$ 证明：$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 中至少有两个零点。

证明： 反证。假设命题不成立，则

(i) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 无零点，或

(ii) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有且仅有一个零点，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 不变号；或

(iii) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个零点，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 变号。

对于情形(i)和(ii)，由于 $f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 不变号，并且它们的乘积不恒为零。因此不可能有 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx = 0$，矛盾。

对于情形(iii)，假设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个零点 $x_0\in(0,\pi)$，且 $f(x)$ 在 x_0 的两侧反号。不妨设 $f(x)<0$，$\forall x\in(0,x_0)$；$f(x)>0$，$\forall x\in(x_0,\pi)$。于是 $f(x)\sin(x-x_0)$ 在 $[0,\pi]$ 非负，且不恒为零。因此

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx > 0 \text{.}$$

另一方面，由假设我们有

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx = \cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin xdx - \sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0 \text{。}$$

矛盾。□

19. 设 $f(x)\in R[a,b]$, 求证：$\forall \varepsilon>0$, 存在 $g(x)\in C[a,b]$, 使得 $\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x<\varepsilon.$

证明： $f(x)\in R[a,b]$, 则 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$U(f,T)-L(f,T)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon,$$

其中 $m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{f(x)\right\}$, $M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{f(x)\right\}$.

依次连接点 $(x_i, f(x_i)), i=0,1,\cdots,n$, 得到折线段 $y=g(x), x\in[a,b]$. 则 $g\in C[a,b]$, 且

$$\left|f(x)-g(x)\right|\le M_k-m_k, \qquad \forall x\in[x_{k-1},x_k], \forall 1\le k\le n.$$

于是

$$\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon. \square$$

20. 已知 $f(x)\in R[0,\pi]$, 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$

证明： 作 $[0,\pi]$ 的 n 等分割 T_n, $\forall 1\le k\le n$, 令

$$m_k=\inf\left\{f(x):\frac{(k-1)\pi}{n}\le x\le\frac{k\pi}{n}\right\}, M_k=\sup\left\{f(x):\frac{(k-1)\pi}{n}\le x\le\frac{k\pi}{n}\right\}.$$

则 $$\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} M_k\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{2M_k}{n}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi M_k}{n}=\frac{2}{\pi}U(f,T_n).$$

同理，$$\frac{2}{\pi}L(f,T_n)\le\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x\le\frac{2}{\pi}U(f,T_n).$$

因 $f(x)\in R[0,\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}L(f,T_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}U(f,T_n)=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$. 令 $n\to+\infty$, 由夹挤原理得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x. \square$$

21. 设 $f(x),g(x)$ 均为周期为 T 的连续函数，称函数 $(f*g)(x)=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积。证明：

（1） $f*g$ 也是周期为 T 的周期函数；

（2）$(f*g)(x)=\dfrac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t,\forall a\in\mathbb{R};$

（3） $f*g=g*f.$

证明： $f(x+T)=f(x),\ g(x+T)=g(x),$ 则

（1） $(f*g)(x+T)=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x+T-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=(f*g)(x).$

（2）
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{T}\int_a^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_T^{a+T} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_a^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^a f(s+T)g(x-T-s)\mathrm{d}s\qquad (t=s+T)\\
&=\frac{1}{T}\int_a^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^a f(s)g(x-s)\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=(f*g)(x)
\end{aligned}
$$

（3） 令（2）中 $a=x,$ 得

$$
\begin{aligned}
(f*g)(x)&=\frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x-s)g(s)\mathrm{d}s\qquad (令 s=x-t)\\
&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x-s-T)g(T+s)\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)\mathrm{d}s\qquad (令 t=s+T)\\
&=(g*f)(x).\quad \square
\end{aligned}
$$