微积分 A1 第 9 次习题课答案　不定积分(2)

1. 计算下列不定积分

（1）$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+1)^2}$　　（2）$\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

（3）$\displaystyle\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x$　　（4）$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

（5）$\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$　　（6）$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)\sqrt{x^2+2x-3}}$

（7）$\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}\mathrm{d}x$　　（8）$\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

（9）$\displaystyle\int \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$　　（10）$\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$

（11）$\displaystyle\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$　　（12）$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+3\sin x+4\cos x}$

（13）$\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$　　（14）$\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$

解：（1）令 $t=x^3$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+1)^2}=\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x^3}{x^3(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+\frac{1}{3(x^3+1)}+C$$

（2）令 $t=x+1$,

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t+\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2(t^2+1)}+\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

为计算右端积分 $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$，用两种方法计算 $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$：

$$\arctan t=\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t-\int\frac{2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{t^2+1}+2\arctan t-\int\frac{2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

解得 $\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right)+C$，因此

$$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{t-1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{x}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C\,.$$

（3）$\int\frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x=5\int\frac{1}{(x^3+3x+1)^2}\mathrm{d}x-6\int\frac{2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x=5I_1-6I_2$

由 $I_1=\int\frac{1}{(x^3+3x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+6\int\frac{x(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+6\int\frac{(x^3+3x+1)-(2x+1)}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+6\int\frac{1}{(x^3+3x+1)^2}\mathrm{d}x-6\int\frac{2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+6I_1-6I_2$$

解得 $\int\frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x=5I_1-6I_2=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}+C$

（4）令 $t=\sqrt[6]{x+1}$, 则 $x=t^6-1,\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t,$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t^3-3t^2-+6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+C$$

（5）令 $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, 则 $x=\frac{2(1-t^3)}{1+t^3}=-2+\frac{4}{1+t^3},\mathrm{d}x=\frac{-12t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2},$

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}=-\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{t^3}=\frac{3}{8}t^{-2}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}+C$$

（6）令 $\sqrt{x^2+2x-3}=(x+3)t$，则 $x=\frac{1+3t^2}{1-t^2}=-3+\frac{4}{1-t^2}, \mathrm{d}x=\frac{8t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)\sqrt{x^2+2x-3}}=-\int\frac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}t}{4t^2}=\frac{1}{4t}+C=\frac{x+3}{4\sqrt{x^2+2x-3}}+C.$$

注：此题若根据 $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{(x+1)^2-4}$, 令 $x+1=2\sec t$, 化为有理三角函数的积分，再利用万能变换，会非常复杂。对 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型积分，若 ax^2+bx+c 有相异实根 α,β, 即 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，则令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, 比三角替换要简单。本题是 $a>0$ 的例子，下题是 $a<0$ 的例子。

（7）$\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}=\frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$，令 $t=\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$, 则 $x=\frac{2-t^2}{1+t^2}=\frac{3}{1+t^2}-1$, $\mathrm{d}x=\frac{-6t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$,

$$\int\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{-18t^2}{(1+t^2)^2(2-t^2)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{-4}{2-t^2}+\frac{-4t^2+2}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+t}-\frac{4}{1+t^2}+\frac{6}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

由 $\arctan t=\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{t}{1+t^2}+\int\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t-\int\frac{2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{t}{1+t^2}+2\arctan t-\int\frac{2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

解得 $\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan t+C$。因此

$$\int\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|-4\arctan t+3\left(\frac{t}{(1+t^2)}+\arctan t\right)+C$$

$$=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2(x+1)}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2(x+1)}}\right|-4\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+\sqrt{2+x-x^2}+C$$

（8）令 $\sqrt{x^2+x+1}=tx+1$, 则 $x=\frac{2t-1}{1-t^2}, \mathrm{d}x=\frac{2(1-t+t^2)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{-2t}{1-t^2}\mathrm{d}t=\ln\left|1-t^2\right|+C=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)^2\right|+C.$$

（9）令 $t=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}$, 则 $x^2=\dfrac{a^2+b^2t^2}{1+t^2}=b^2+\dfrac{a^2-b^2}{1+t^2}$, $2x\mathrm{d}x=\dfrac{2t(b^2-a^2)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$,

$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{t(b^2-a^2)}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)}\mathrm{d}t$,

$$\int\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\frac{(b^2-a^2)t^2}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\arctan t-\frac{a}{b}\arctan\frac{bt}{a}+C=\arctan\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}-\frac{a}{b}\arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\right)+C$$

（10）令 $x=\sin t,|t|<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}=\int\frac{\sin^2 t\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int\sin^2 t\,\mathrm{d}\tan t=\sin^2 t\tan t-2\int\tan t\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\sin^2 t\tan t-\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\sin^2 t\tan t-t+\frac{1}{2}\sin 2t+C$$

$$=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+C$$

（11）令 $t=\tan x$, 则 $x=\arctan t,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$,

$$\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\tan x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(a+bt)(1+t^2)}=\frac{1}{a^2+b^2}\int\left(\frac{b^2}{a+bt}+\frac{a-bt}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a+bt\right|+\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t-\frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2)+C$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|+\frac{ax}{a^2+b^2}+C$$

（12）令 $t=\arctan\dfrac{x}{2}$, 则 $x=2\arctan t,\mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{5+3\sin x+4\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+3)^2}=\frac{-2}{t+3}+C=\frac{-2}{3+\arctan\dfrac{x}{2}}+C$$

（13）令 $t=\arctan\dfrac{x}{2}$, 则

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{1}{4}t^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$$

（**14**）被积函数分子分母同时除以 x^2, 得

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left|x+\frac{1}{x}\right|}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}}$$

令 $t=x+\frac{1}{x}$, 则 $(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=\mathrm{d}t,$

$$\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{|t|\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-1/t^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}(1/t)}{\sqrt{1-1/t^2}}$$

$$=-\arcsin\frac{1}{t}+C=-\arcsin\frac{x}{x^2+1}+C$$