微积分 A(2)第五次习题课参考答案（第八周）

1.（1）若 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x-y)^2 d\sigma$，$D:0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}$，则（　A　）。

（A）$I_1=I_2$.　（B）$I_1>I_2$.（C）$I_1<I_2$.　（D）与 I_2 之大小相等关系不定而与 r 有关.

【解】D 关于 y 轴对称，$f(x,y)=xy$ 是关于 x 的奇函数，可知 $\iint\limits_D xyd\sigma=0$。

（2）设 $0<R<1$，则二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 等于［ B ］

（A）$4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\,y>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$　（B）$2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$　（C）$4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\,y<0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。（D）0.

（3）已知 $f(x)\in C[0,1]$,且 $\int_0^1 f(x)dx=A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=?$

2. 积分顺序(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$；

$$(2)\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\quad I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

解：(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

（2）$I_1=\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta\qquad I_2=\int_0^2 rdr\int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

3.计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2}}[x+y]d\sigma$.

解　（1）把 D 分成四个区域 D_1，D_2，D_3，D_4，f 分别在它上取值 0，1，2，3.于是

$$\iint\limits_D [x+y]d\sigma=\iint\limits_{D_1}0\cdot d\sigma+\iint\limits_{D_2}d\sigma+\iint\limits_{D_3}2d\sigma+\iint\limits_{D_4}3d\sigma$$
$$=1\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{1}{2}=6.$$

4.求解下列各题

（1）由曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$，$z=x,x=0$ 所围成。空间体体积

解：$V=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2}-x)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{1+\cos\theta}}[1-r(1+\cos\theta)]rdr=\dfrac{2}{9}$

（2）求由曲线所围的平面图形面积：$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})=x^2+y^2$。

解：令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$,则 $\left|J\right|=abr$

$$D^{'}=\{(r,\theta):0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\}.$$

于是所求面积

$$\begin{aligned}\Delta D&=\iint\limits_{D}dxdy=\iint\limits_{D^{'}}abrdrd\theta\\&=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}rdr\\&=\frac{1}{2}ab\pi(a^2+b^2).\end{aligned}$$

5.求解下列各题

（1）求积分 $\iint\limits_{D}|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2|dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

（2）计算二重积分：$\iint\limits_{D}\left|xy\right|dxdy$,其中 D 为圆域: $x^2+y^2\le a^2$。

解：由对称性有

$$\iint\limits_{D}\left|xy\right|dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a}r\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta\cdot\int_0^{a}r^3dr=2\cdot\frac{-\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{a}=\frac{a^4}{2}.$$

（3）$\iint\limits_{D}(x-y)dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$。

解法一：作变量代换（平移）$u=x-1, v=y-1$，$D=\left\{(u,v)\middle|u^2+v^2\le 2, v\ge u\right\}$,

$$\iint\limits_{D}(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr=-\frac{8}{3}$$

解法二：由 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ 得 $r\le 2(\sin\theta+\cos\theta)$,

$$\iint\limits_{D}(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

（4）化为极坐标下的累次积分

$$\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy,\quad f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|+|y|\le 1\\ 2, & 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}, D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 2\}.$$

（5）化 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$ 为极坐标下的累次积分，并在极坐标系下交换积分次序.

解：由 $D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$，用极坐标变换后,有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{\sec\theta} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt2 r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$$

$$+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}rdr\int_{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt2 r}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta+\int_1^{\sqrt2}rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$$

6. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数，在 D 的边界 ∂D 上 $f(x,y)=0$。证明：$\iint\limits_D f(x,y)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy\le 0$。

7. 设函数 $f(t)$ 连续，$f(t)>0$，求积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$.

8.设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$.证明:

$$\int_0^1dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

证：令 $x=1-u,y=1-v$,则

$$0\le v\le 1,0\le u\le v,\left|J\right|=1.$$

于是

$$\int_0^1dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy=\int_0^1dv\int_0^v f(u,v)du$$
$$=\int_0^1dv\int_0^v f(v,u)du=\int_0^1dx\int_0^x f(x,y)dy.$$

9.在下列积分中引入新变量 u,v 后，试将它化为累次积分，其中 $x=u\cos^4 v,y=\sin^4 v$.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\quad D=\{(x,y)\,|\,\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a},x\ge 0,y\ge 0\}.$$

解：由 $3x=u\cos^4 v,y=\sin^4 v$，得 $D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le a,0\le v\le\frac{\pi}{2}\}$,

$\left|J\right|=4u\sin^3 v\cos^3 v$. 于是

$$\begin{aligned}&\iint_D f(x,y)dxdy\\&=\iint_{D'} f(u\sin^4 v,u\cos^3 v)4u\sin^3 v\cos^3 vdudv\\&=4\int_0^{\frac{®}{2}}dv\int_0^a u\sin^3 v\cos^3 vf(u\sin^3 v,u\cos^3 v)du\\&=4\int_0^a du\int_0^{\frac{®}{2}}u\sin^3 v\cos^3 vf(u\sin^3 v,u\cos^3 v)dv\end{aligned}$$

10.试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le ®,0\le x-y\le ®\};$

(2) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy, D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}.$

解 (1)令 $x=\dfrac{1}{2}(u+v),y=\dfrac{1}{2}(u-v)$, 则 $D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le ®,0\le v\le ®\}$,

$\left|J(u,v)\right|=\dfrac{1}{2}.$

于是 $\iint_D (x+y)\sin(x-y)dxdy=\iint_{D'}u\sin v\cdot\dfrac{1}{2}dudv=\dfrac{1}{2}\int_0^{®}udu\int_0^{®}\sin vdv=\dfrac{1}{2}®^2$

(2) 令 $x=u-v,y=u$, 则 $D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le v,0\le v\le 1\}$, $\left|J(u,v)\right|=1.$

于是 $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy=\iint_{D'}e^{\frac{u}{v}}dudv=\int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}du=\dfrac{1}{2}(e-1).$

11.试作适当变换,把 $\iint_D f(x+y)dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$ 化为单重积分。

解：令 $x=\dfrac{1}{2}(u+v),y=\dfrac{1}{2}(u-v)$, 则

$-1\le u\le 1,-1\le v\le 1;|J|=\dfrac{1}{2}.$

于是

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(u)du\int_{-1}^1 dv=\int_{-1}^1 f(u)du.$$

12. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y)=f(x)，(x,y)\in\mathbf{D}。$$

证明：$F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证：将 $[a,b]$、$[c,d]$ 分别作划分：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

和　$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<y_m=d$，

则 $\mathbf{D}$ 分成了 nm 个小矩形 $\Delta D_{ij}(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$。

记 μ_i 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，$\mu_{ij}(F)$ 是 F 在 ΔD_{ij} 上的振幅，则

$$\mu_{ij}(F) = \mu_i,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij}(F)\Delta\pm_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \Delta x_i \Delta y_j = (d-c)\sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta x_i,$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \Delta x_i \to 0$ (ª $\to 0$)，所以

$$\lim_{ª\to 0} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij}(F)\Delta\pm_{ij} = \lim_{ª\to 0}\left\{(d-c)\sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta x_i\right\} = 0,$$

即 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

13.若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的非负连续函数,且在 D 上不恒为零,则 $\iint\limits_D f(x,y)d\pm > 0$

证：由题设存在 $P_0(x_0,y_0) \in D$ 使得 $f(P_0) > 0$. 令 ¢ $= f(P_0)$,则由连续函数的局部保号性知:$\exists$ ¦ > 0 使得 $f(P) >$ ¢$/2$,$\forall P \in D_1 (D_1 = U(P_0,$ ¦ $) \cap D)$.又因 $f(x,y) \ge 0$ 且连续，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)d\pm = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\pm + \iint\limits_{D-D_1} f(x,y)d\pm \ge \frac{¢}{2}\cdot \Delta D_1 > 0$$

故 $\quad \iint_D f(x,y)d\pm > 0$

14.证明：若平面曲线 $x = ¨(t), y = \cdot(t), \sim \le t \le$ 　光滑（即 $¨(t), \cdot(t)$ 在 $[\sim,\ ]$ 上具有连续的导数），则此曲线的面积为零。

证：由条件，该平面曲线 L 的长度

$$l = \int_{\sim} \sqrt{¨'^2(t) + \cdot'^2(t)}dt$$

为有限值。对 $\forall$ £ > 0，将 L 分成 $n = [\frac{l}{£}] + 1$ 段：L_1，L_2，$\cdots, L_n$，在每段 L_i 上取一点 P^i，使 P_i 与其一端点的弧长为 $\frac{l}{2n}$，以 P_i 为中心作边长为 £ 的正方形 Δ_i，则 $L_i \subset \Delta_i (i = 1,2,\cdots,n)$，从而 $L \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$，记 $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$，则 Δ 为一多边形，设 Δ 的面积为 W，那么

$$W \le n£^2 = ([\frac{l}{£}] + 1)£^2 \le (\frac{l}{£} + 1)£^2 = (l + £)£,$$

因此 L 的面积 $W_L \le W \le (l + £)£$ 。

由 £ 的任意性有 $W_L = 0$，即曲线 L 的面积为零。

15.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

其中等号仅在 $f(x)$ 为常量函数时成立.

证：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $f^2(x)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上可积,从而

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b f(y)dy = \int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dxdy \le \int_a^b\int_a^b \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f^2(x)dxdy + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f^2(y)dxdy = \int_a^b\int_a^b f^2(x)dxdy = \int_a^b dy\int_a^b f^2(x)dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

且其中等号仅在 $\forall x, y \in [a,b],\ f(x) = f(y)$, 即时成立.