代数与几何讨论课（四）（向量组的线性相（无）关性）答案

一、选择和填空

1. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则下列命题正确的是（　　　）

(A)　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$线性无关

(B)　$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(C)　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(D)　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-2\alpha_1$线性无关

答：D

2. 已知$A\in M_{3,4}$，则下列结论正确的是（　　　）

(A)　AA^T一定可逆　(B)　AA^T一定不可逆，

(C)　A^TA一定可逆　(D)　A^TA一定不可逆。

答：D

3. $m\times n$矩阵A的秩为r的充分必要条件是（　　　）

(A)　A中存在$r+1$阶子式不为零

(B)　A中存在$r-1$阶子式不为零

(C)　A的列向量组中存在r个线性无关的向量

(D)　A的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数是r

答：D

4. 设$A=\begin{pmatrix}2&b&b&b&b\\b&2&b&b&b\\b&b&2&b&b\\b&b&b&2&b\\b&b&b&b&2\end{pmatrix}$，已知$r(A)=4$，则$b=$_________.

答：$-\dfrac{1}{2}$

5. 下列各陈述中，（　　　）是对的

(A)　若两组向量的秩相等，则两组向量可互相线性表出

(B)　若一组向量可由另一组向量线性表出，且两向量组的秩相等，则两向量组等价

(C) 若向量组（1）可由向量组（2）线性表出，则向量组（1）的秩一定小于向量组（2）的秩

(D) 以上都不对

答：B

6. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为______.

答：$2n$

7. 设 A,B 均为 n 阶方阵，其中 $r(A)=r$，$r(B)=s$ 为可逆矩阵. 则 $r\begin{pmatrix} A & A \\ -B & B \end{pmatrix}=$______.

答： $r+s$

8. 设 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 则 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 的秩为______.

答 s

9. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩为________。

答：1

10. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2， 则 $a=$__________。

答：1/2

11. 设 A 为 n 阶方阵，A 的伴随矩阵的秩为 1. 则 A 的秩为_______.

答： $n-1$

12. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in R^n$ 线性无关. A 为 n 阶可逆矩阵。则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 的秩为________.

答：s

13. 向量组 $(a,\ 1,\ b,\ 0,\ 0)^T$，$(c,\ 0,\ d,\ -2,\ 1)^T$，$(e,\ 4,\ f,\ 5,\ -1)^T$ 的秩为______。

答：3

14. 设 A 为 n 阶方阵满足 $A^2-2I-3I=0$，则 $r(A-3I)+r(A+I)=$__________。

答： n

15. 设 A 是 $s\times n$ 阶矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，满足 $AB=0$，且 $r(B)=m$，则 $A=$______________。

答：$A=0$

二、判断正误，并说明道理。

1. 已知： $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关， 求证： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

试判断下面的证法是否正确？为什么？

证明：因 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，故 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$ 当且仅当 $k_1=k_2=k_3=0$，因而 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3=0$。由于 $k_1+k_3=k_2+k_1=k_3+k_2=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

答：**题中给出的证明有误：并没有讨论对于任意不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是否有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$。**

证明：向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，因此向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的秩（等于 3）小于等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩大于等于 3，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩等于 3，从而线性无关。

2. 设向量组 α,β,γ 线性无关， α,β,δ 线性相关，下列说法是否正确？为什么？

（1） α 必可被 β,γ,δ 线性表出 .

（2） β 必不可由 α,γ,δ 线性表出 .

（3） δ 必可由 α,β,γ 线性表出 .

解：（1）错。反例：$\alpha=(1,0,0)^T$，$\beta=\delta=(0,1,0)^T$，$\gamma=(0,0,1)^T$。

（2）错。反例：$\alpha=\delta=(1,0,0)^T$，$\beta=(0,1,0)^T$，$\gamma=(0,0,1)^T$。

(3)正确。由于 α,β,γ 线性无关，故 α,β 线性无关，又由于 α,β,δ 线性相关，故 δ 可由 α,β 线性表出，从而必可由 α,β,γ 线性表出。

3. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，但不能由向量组（I） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表出，记向量组（II）为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则下列说法正确的是：

（1） α_m 不能由（I）线性表出，也不能由（II）线性表出。

（2） α_m 不能由（I）线性表出，但可由（II）线性表出。

（3） α_m 可由（I）线性表出，也可由（II）线性表出。

（4） α_m 可由（I）线性表出，但不可由（II）线性表出。

解：首先 $\beta\neq 0$。由已知 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，又由于 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表出，故 $k_m\neq 0$，所以 α_m 可由（II）线性表出。

假设 α_m 可由（I）线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 等价，于是 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表出，矛盾。所以（2）正确。

4. 若 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价，则矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与 矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价(相抵).

答：正确。当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价时，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 有相同的秩，从而 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与 矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价(相抵)。

5. 若矩阵 A,B,C 满足 $A=BC$，则 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示.

答：正确。设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times s}$， $C=(c_{ij})_{s\times n}$。按列将 A 和 B 分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=BC=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sn} \end{pmatrix}$，于是

$\alpha_i=c_{i1}\beta_1+c_{i2}\beta_2+\cdots+c_{is}\beta_s$，$1\le i\le n$。

6. 若 $|A|=0$，则 A 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

答：正确。若 $|A|=0$，则 A 的列向量组线性相关， A 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 中 n 个线性无关的列向量，A 是 $n\times s$ 矩阵，$(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s)$ $=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)A$，则向量组 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 等于 $r(A)$。

答：正确。$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r[(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)A]=r(A)$，因为矩阵 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 可逆。

三、证明

1. 已知： $A\in M_{n\times m}$，$B\in M_{m\times n}$ 且 $n<m$，$AB=I$，求证: A 的行向量组以及 B 的列向量组线性无关。

证明：由 $AB=I$，得到 $n=r(AB)\le r(A)\le n$，因此 $r(A)=n$，故 A 的行向量组线性无关。同理可以证明 $r(B)=n$，故 B 的列向量组线性无关。

2. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个线性无关的 n 维向量，$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，且 k_i（$i=1,2,\cdots,n$）全不为零。

求证： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个 n 维向量均线性无关。

证明： 因为 k_i（$i=1,2,\cdots,n$）全不为零，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中包含 α_{n+1} 的任意 n 个向量都与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价，所以线性无关。

3. 设 A 是 n（$n \geq 2$）阶方阵,

(1). 求证：$\left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$ ；(2) 求 $r(A^*)$；(3) 求 $(A^*)^*$。

解：(1) 设 A 可逆，即 $|A| \neq 0$，则对等式 $AA^* = |A|I$ 两边取行列式的得到 $\left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$ 。

设 A 不可逆，即 $|A|=0$，只要证明 $|A^*|=0$ 即可。假设 $|A^*| \neq 0$，则 由 $AA^* = |A|I=0$ 得到 $A = 0$，从而 $A^*=0$，矛盾。所以 $|A^*|=0$ 。

(2) $r(A^*) = \begin{cases} n, \ if \ \ r(A) = n \\ 1, \ if \ \ r(A) = n-1 \\ 0, \ if \ \ r(A) \leq n-2 \end{cases}$

(3) 若 $n = 2$，则 $(A^*)^*=A$ 。设 $n > 2$，由 (2) $(A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2} A, \ if \ \ r(A) = n \\ 0, \ if \ \ r(A) \leq n-1 \end{cases}$ 。