# 微积分 A（2）第五次习题课题目（第八周）

1.（1）若 $\mathrm{I}_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\pm$，$\mathrm{I}_2=\iint\limits_D (x-y)^2 d\pm$，$D: 0\le y\le \sqrt{r^2-x^2}$，则（　　）。

（A）$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_2$．（B）$\mathrm{I}_1>\mathrm{I}_2$．(C）$\mathrm{I}_1<\mathrm{I}_2$．（D）与 $\mathrm{I}_2$ 之大小相等关系不定而与 $r$ 有关.

（2）设 $0<R<1$，则二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\pm$ 等于[　　]

（A）$4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\, y>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\pm$　（B）$2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\pm$　（C）$4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\, y<0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\pm$。（D）0.

（3）已知 $f(x)\in C[0,1]$,且 $\int_0^1 f(x)dx=A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=?$

2. 积分顺序(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$；

(2) $I_1=\int_0^{\frac{®}{3}} d¯\int_0^1 f(r\cos¯, r\sin¯)rdr \quad I_2=\int_{-\frac{®}{2}}^{\frac{®}{2}} d¯\int_0^{2\cos¯} f(r\cos¯, r\sin¯)rdr$

3.计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2}}[x+y]d\pm$ .

4.求解下列各题

（1）由曲面 **z Z 1 J $\sqrt{x^2 \text{ H } y^2}$，z Z x, x Z 0** 所围成。空间体体积

（2）求由曲线所围的平面图形面积: $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})=x^2+y^2$。

5.求解下列各题

（1）求积分 $\iint\limits_D |\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2|\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

（2）计算二重积分：$\iint\limits_D |xy|dxdy$ ,其中 $D$ 为圆域: $x^2+y^2\le a^2$。

（3）$\iint\limits_D (x-y)dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$。

（4）化为极坐标下的累次积分

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\quad f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|+|y|\le 1\\ 2, & 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}, D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 2\}.$$

（5）化 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$ 为极坐标下的累次积分，并在极坐标系下交换积分次序.

6. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上有二阶连续偏导数，在 $D$ 的边界 $\partial D$ 上

$f(x,y)=0$。证明：$\iint_D f(x,y)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy \le 0$。

7. 设函数 $f(t)$ 连续，$f(t)>0$，求积分 $\iint_{x^2+y^2\le R^2} \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$ .

8.设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$.证明:

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

9.在下列积分中引入新变量 $u,v$ 后，试将它化为累次积分，其中 $x=u\cos^4 v, y=\sin^4 v.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

10.试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le ®, 0\le x-y\le ®\};$

(2) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy, D=\{(x,y)\mid x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$

11.试作适当变换,把 $\iint_D f(x+y)dxdy$ ,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$ 化为单重积分。

12. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y)=f(x)，(x,y)\in\mathbf{D}。$$

证明：$F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

13.若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的非负连续函数,且在 D 上不恒为零,则 $\iint_D f(x,y)d± >0$

14.证明：若平面曲线 $x=¨(t), y=·(t), ~\le t\le$ 光滑（即 $¨(t),·(t)$ 在 [~, ] 上具有连续的导数），则此曲线的面积为零。

15.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

其中等号仅在 $f(x)$ 为常量函数时成立.