微积分 A（2）第三次习题课题目（第六周）

一、微分学的几何应用

1. 求解下列问题

（1）证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

（2）通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（　　）

（A）通过 y 轴；　　　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　　（D）A，B，C 都不对.

（3）求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L: \begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

（4）过直线 $10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程.

（5）求过直线 $L: \begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$ 相切的平面的方程.

2. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

4. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

5. 解答下列与切线有关的问题

（1）求螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ct \end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\text{®}c}{4})$ 处的切线与法平面.

（2）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ z-x^2-y^2=0 \end{cases}$，在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

（3）设曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

二、泰勒公式

4. 解答下列各题

（1）函数 x^y 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为____________________________。

（2）函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式为

____。

（3）二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为　　　　　　　　　　。

（4）$x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

三、极值

5. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的极值.

6. 求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值.

7. 设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

8. 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在，$z(x,y)$ 在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明：$z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

9. （1）设 D 为 R^2 中的有界闭区域. $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上连续，在 $\boldsymbol{D}$ 内可微，且满足方程 $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=kf(x,y)}$, **(常数** $\boldsymbol{k\neq 0}$**)**，若在 $\boldsymbol{D}$ 的边界上 $\boldsymbol{f(x,y)=0}$，试证 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上恒为零。

（2）设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$．且在 $x^2+y^2=1$

上，$u(x,y)>0$. 证明：（I）当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$；（II）进一步证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)>0$.

10. 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

11. 设 $\boldsymbol{u}$ Z $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在单连域 $\Omega\subseteq R^3$ 内可微，且满足 $\boldsymbol{gradu}$ ÷ $\mathbf{0}$，试证明 $\boldsymbol{u}$ Z $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在 t 内无封闭等值面。

四、条件极值

12. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

13. 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大.

14. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长.

15. 设空间一光滑曲面 S 的方程为 $\boldsymbol{F(x,y,z)}$ Z $\mathbf{0}$，$\boldsymbol{P_0(x_0,y_0,z_0)}$ 为曲面 $\boldsymbol{S}$ 外的一点. 证明：若 $\boldsymbol{S}$ 上的点 $\boldsymbol{Q}$ 使得线段 $\boldsymbol{P_0Q}$ 是 $\boldsymbol{P_0}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 上任意一点连线的最短线段，则向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0Q}}$ 必与曲面 $\boldsymbol{S}$ 在该点的切平面垂直。

16. 当 x,y,z 都大于 0 时，求 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值. 并证明对任意正实数 a,b,c，下述不等式成立：$ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.

17. 求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1,y=0,x+y=6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值.

18. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

微积分 A（2）第三次习题课参考答案（第六周）

一、微分学的几何应用

1. 求解下列问题

（1）证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明：两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，　$G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$

曲面 S_1 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量是

$$gradF(x,y,z)=(2x,2y,2z)^T \quad \text{或者} \ \vec{v}_1=(x,y,z)^T$$

曲面 S_2 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2=(x,\ y,-a^2z)^T$.

设点 $M(x,y,z)$ 是两曲面的公共点，则在该点有

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(x,y,z)^T\cdot(x,y,-a^2z)=x^2+y^2-a^2z^2=0$$

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

（2）通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面（　B　）

（A）通过 y 轴；　　　　（B）平行于 y 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　　（D）A，B，C 都不对.

解题思路 令 $F(x,y,z)=e^{xyz}+x-y+z-3$. 则 S 在其上任一点 M 的法向量为

$$\mathrm{grad}\,F(M)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_M$$

于是 S 在点 M $(1, 0, 1)$ 的法向量为

$$(yze^{xyz}+1,xze^{xyz}-1,xye^{xyz}+1)\big|_{(1,0,1)}=(1,0,1)$$

因此，切平面的方程为 $(x-1)+(z-1)=0$. S 在 $(1, 0, 1)$ 的法向量垂直于 y 轴，从而切平面平行于 y 轴. 但是由于原点不在切平面，故切平面不含 y 轴.

（3）求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解：(1) 直线$L:\begin{cases}x=x\\y=4x+5\\z=-5x-5\end{cases}$ 的方向：$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\3 & -2 & -1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$.

切点为$P(x,y,z)$处曲面S的法向：$\vec{n}=4x\vec{i}-4y\vec{j}+2\vec{k}$.

所求轨迹：$\vec{n}\perp\vec{s}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{s}=-4x+16y+10=0$，

轨迹为空间曲线：$\Rightarrow\begin{cases}2x-8y=5\\2x^2-2y^2+2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=(2x-5)/8\\z=(-60x^2-60x+57)/64\end{cases}$

（4）过直线$10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求该切平面的方程.

解：设切平面过曲面$3x^2+y^2-z^2=27$上的(x_0,y_0,z_0)点，则切平面的法向量为

$$(6x_0,2y_0,-2z_0)$$

过直线$10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$的平面可以表示为

$$(10x+2y-2z-27)+\lambda(x+y-z)=0$$

其法向量为　$(10+\lambda,2+\lambda,-2-\lambda)$

$$\frac{10+\lambda}{6x_0}=\frac{2+\lambda}{2y_0}=\frac{-2-\lambda}{-2z_0}\qquad(1)$$

(x_0,y_0,z_0)是曲面$3x^2+y^2-z^2=27$上的点，

$$3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\qquad(2)$$

$$(10x_0+2y_0-2z_0-27)+\lambda(x_0+y_0-z_0)=0\qquad(3)$$

联立（1），（2），（3），解得$(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$，或$(x_0,y_0,z_0)=(-3,-17,-17)$，

切平面方程为

$$9x+y-z-27=0，或9x+17y-17z+27=0$$

（5）求过直线$L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$且与曲面$2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$相切的平面的方程.

解：直线L平面F可表示为 $3x-2y-z-5+\lambda(x+y+z)=0$，设曲面为G

则相切处有　$gradF=(3+\lambda,\lambda-2,\lambda-1)=k\cdot gradG=k\cdot(4x,-4y,2)$

解得 $\begin{cases} ª = 3, x = 3/2, y = -1/4, z = -15/8 \quad or \\ ª = 7, x = 5/6, y = -5/12, z = -5/24 \end{cases}$

因此切平面方程为 $6(x-3/2)+(y+1/4)+2(z+15/8)=0$ 或

$$10(x-5/6)+5(y+5/12)+6(z+5/24)=0.$$

2. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

证明：设 $f_1^{'}=\frac{\partial f}{\partial x}, f_2^{'}=\frac{\partial f}{\partial y}$，于是有：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_2'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial z}=f_1'\cdot\frac{a-x}{(z-c)^2}+f_2'\cdot\frac{b-y}{(z-c)^2}.$$

则曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面是：

$$f_1'(P_0)\frac{x-x_0}{z_0-c}+f_2'(P_0)\frac{y-y_0}{z_0-c}+\left(f_1'(P_0)\frac{a-x_0}{(z_0-c)^2}+f_2'(P_0)\frac{b-y_0}{(z_0-c)^2}\right)(z-z_0)=0$$

可以得到：

$$f_1^{'}(P_0)(z_0-c)(x-x_0)+f_2^{'}(P_0)(z_0-c)(y-y_0)+$$

$$f_1^{'}(P_0)(a-x_0)(z-z_0)+f_2^{'}(P_0)(b-y_0)(z-z_0)=0.$$

易见当 $x=a, z=c, y=b$ 时上式恒等于零。于是知道曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，此定点为 (a,c,b) .

3. S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明: 曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$

设相交的定直线为 $\frac{x-x_1}{\sim}=\frac{y-y_1}{}=\frac{z-z_1}{¥}$，与法线向交:

$\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)$ 不平行于 $(\sim,\ \ ,¥)$

$$\left[\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2), c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)\times(\sim,\ \ ,¥)\right] \cdot(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)=0$$

$$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \sim & & ¥ \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \sim & & ¥ \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}+2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \sim & & ¥ \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0$$

只要取 $(\sim,\ \ ,¥)=(a,b,c),\quad (x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ 即可.

4. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为 $(1,1,1)$，设该点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$gradF\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})=k(1,1,1)$，该点坐标为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$

5. 解答下列与切线有关的问题

（1）求螺线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ct \end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},\frac{®c}{4})$ 处的切线与法平面.

解　由于点 M 对应的参数为 $t_0=\frac{®}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$$\vec v=(x'(®/4),\ y'(®/4),\ z'(®/4))=(-a/\sqrt2,\ a/\sqrt2,\ c)$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases} x=a/\sqrt2-a/\sqrt2\,t, \\ y=a/\sqrt2+a/\sqrt2\,t, \\ z=(®/4)c+c\,t, \end{cases}$

法平面方程为 $-(a/\sqrt2)(x-a/\sqrt2)+(a/\sqrt2)(y-a/\sqrt2)+c(z-(®/4)c)=0$.

（2）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6=0 \\ z-x^2-y^2=0 \end{cases}$，在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

解：　取 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$gradF(M_0)=(2,2,4),\ \ gradG(M_0)=(-2,-2,1)$

所以曲线在 $M_0(1,1,2)$ 处的切向量为 $v=gradF(M_0)\times gradG(M_0)=(10,-10,0)$，

于是所求的切线方程为 $\begin{cases} x=1+10t \\ y=1-10t \\ z=2 \end{cases}$

（3）设曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解：曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的切线方向为 $(1,2t,3t^2)$．曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$ 可知

$$1+4t+3t^2=0$$

$$t=-\frac{1}{3},\quad -1$$

所求的点为 $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right),\quad (-1,1,-1)$.

二、泰勒公式

4. 解答下列各题

（1）函数 x^y 在 $x=1,y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为______________________________。

【答案】$1+(x-1)y$

（2）函数 $f(x,y)=\frac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式为

____。

【答案】$f(x,y)=1-y+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}-\frac{\cos{}^{-}x}{1+{}^{-}y} & \frac{\sin{}^{-}x}{(1+{}^{-}y)^2}\\ \frac{\sin{}^{-}x}{(1+{}^{-}y)^2} & \frac{2\cos{}^{-}x}{(1+{}^{-}y)^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad {}^{-}\in(0,1)$

（3）二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为＿＿＿＿＿＿＿＿。

【答案】$\sin1+(\cos1)(x-1)+(\sin1)(y-1)-\frac{1}{2}(\sin1)((x-1)^2+(y-1)^2)+(\cos1-\sin1)(x-1)(y-1)$

（4）$x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$．求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

【解】$z(0,0)=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0$

$z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为 $z=-x-y+o\left(\circ^3\right)$

三、极值

5. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的极值.

解　求偏导数得 $\frac{\hat{o}f}{\hat{o}x}=8x^3-4x,\frac{\hat{o}f}{\hat{o}y}=4y^3-4y$，解 $\begin{cases}\frac{\hat{o}f}{\hat{o}x}=8x^3-4x=0\\ \frac{\hat{o}f}{\hat{o}y}=4y^3-4y=0\end{cases}$，

得到 9 个驻点：

$$(x_1,y_1)=(0,0),\qquad (x_2,y_2)=(0,1),\qquad (x_3,y_3)=(0,-1),$$
$$(x_4,y_4)=(\frac{1}{\sqrt{2}},0),\qquad (x_5,y_5)=(\frac{1}{\sqrt{2}},1),\qquad (x_6,y_6)=(\frac{1}{\sqrt{2}},-1),$$
$$(x_7,y_7)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0),\qquad (x_8,y_8)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},1),\qquad (x_9,y_9)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$$

求二阶偏导数得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

在上述每个点计算 A,B,C 得到下表：

(x_i,y_i)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},1)$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$
A_i	-4	-4	-4	8	8	8	8	8	8
B_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_i	-4	8	8	-4	8	8	-4	8	8
$A_iC_i-B_i^2$	16	-32	-32	-32	64	64	-32	64	64

由极值的充分条件可知，函数 f 在 (x_1,y_1) 点取极小值，$(x_5,y_5),(x_6,y_6)(x_8,y_8)(x_9,y_9)$ 取局部极大值，其它点均为鞍点（非极值点）.

6. 求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值.

解：

$$z'_x=\left(2x-2x(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

$$z'_y=\left(2y-2y(x^2+y^2)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

驻点为 $(0,0)$ 与曲线 $x^2+y^2=1$ 上的所有的点．在 $(0,0)$ 点，

$$z''_{xx}(0,0)=2,\quad z''_{xy}(0,0)=0,\quad z''_{yy}(0,0)=2$$

$(0,0)$ 点是极小值点，极小值为 0 .

设 $t=x^2+y^2$，$z=te^t$，$t=1$ 是其驻点，且 $z''(1)<0$，函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上取到极大值 e^{-1} .

7.（隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值.

解：

$$4xdx+4ydy+2zdz+8xdz+8zdx-dz=0$$

$$dz=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\frac{4y}{2z+8x-1}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0$$

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$$

三个方程联立，得驻点 $(-2,0)$, $\left(\frac{16}{7},0\right)$.

在 $(-2,0)$ 点

$$\left[z''_{xy}(-2,0)\right]^2 - z''_{xx}(-2,0)z''_{yy}(-2,0) = -\frac{16}{15} < 0$$

且 $z''_{xx}(-2,0) = \dfrac{4}{15} >$，$(-2,0)$ 点是极小值点；

在 $\left(\dfrac{16}{7},0\right)$ 点

$$\left[z''_{xy}\left(\frac{16}{7},0\right)\right]^2 - z''_{xx}\left(\frac{16}{7},0\right)z''_{yy}\left(\frac{16}{7},0\right) = -\frac{16}{15} < 0$$

且 $z''_{xx}\left(\dfrac{16}{7},0\right) = -\dfrac{4}{15} < 0$，$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$点是极大值点.

8. 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内部偏导数存在, $z(x,y)$ 在 D 的边界上的值为零，在 D 内部满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y} = f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明：$z(x,y)\equiv 0$，$((x,y)\in D)$.

证明：假设 $z(x,y)$ 不恒为 0，不妨设其在区域 D 上某点 P (x_0,y_0) 处取极大值，则有 $f(z)\big|_P = 0$，这与 f 是严格单调函数矛盾。

9. （1）设 D 为 R^2 中的有界闭区域. $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上连续，在 $\boldsymbol{D}$ 内可微，且满足方程 $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y} = kf(x,y)}$**,(常数**$\boldsymbol{k\neq 0}$**)**，若在 $\boldsymbol{D}$ 的边界上 $\boldsymbol{f(x,y)=0}$，试证 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上恒为零。

证明：　设 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上不恒为零。因为函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在有界闭域 $\boldsymbol{D}$ 上连续，所以 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在上存在最大值 $\boldsymbol{M}$ 和最小值 $\boldsymbol{m}$，且最大值 $\boldsymbol{M}$ 和最小值 $\boldsymbol{m}$ 不能同时为零。

不妨设最小值 $\boldsymbol{m\neq 0}$，因为在 $\boldsymbol{D}$ 的边界上 $\boldsymbol{f(x,y)=0}$，于是必有 $\boldsymbol{D}$ 内的点 $\boldsymbol{(x_0,y_0)}$ 使得 $\boldsymbol{f(x_0y_0)=m\neq 0}$，由 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 内可微，点 $\boldsymbol{(x_0,y_0)}$ 必为极值点（驻点）。

所以 $\boldsymbol{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0}$，这与 $\boldsymbol{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = kf(x_0,y_0)\neq 0}$，

矛盾！因此 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上恒为零。

（2）设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$. 且在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)>0$. 证明：(I) 当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$；(2) 进一步证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)>0$.

证明：1）假设存在一点 (x_0,y_0) 使得 $u(x_0,y_0)<0$，那么必然 ${x_0}^2+{y_0}^2<1$. 则 u 在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最小值（也是极小值）必在内部达到，设其为 (x_1,y_1)，则 $u(x_1,y_1)<0$.

但由于 (x_1,y_1) 也是极小值，所以 $\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{pmatrix}$ 半正定（也称非负定），所以

$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(x_1,y_1)\ge 0$ 与 $u(x_1,y_1)<0$ 矛盾。

2）注意到如果 $u(x,y)$ 是方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$ 的解，那么 $u(x,y)-£(e^x+e^y)$ 也为该方程的解，并且当 £ 充分小时 $u(x,y)-£(e^x+e^y)$ 在边界 $x^2+y^2=1$ 上仍然大于 0, 因此由(1)得到, $u(x,y)-£(e^x+e^y)\ge 0$，进一步得到 $u(x,y)>0$.

10. 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明：

①证明原点之外任意点 (x,y) 都不是驻点，从而不是极值点.

任意固定 $(x,y)\ne(0,0)$，由题目条件推出 $\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \mathrm{grad}\, f(x,y)>0$．于是

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 沿方向 $\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的方向导数不等于零．从而 $(x,y)\ne(0,0)$ 不是驻点.

②证明原点是驻点.

对于任意的 $x>0$，考察点 $(x,0)$．由题目条件推出 $x\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$，进而推出 $\frac{\partial f}{\partial x}>0$．令 $x\to 0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性推出 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\ge 0$

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\frac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$．进而推出 $\frac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$．令 $x\to 0^-$，又得到 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\le 0$．

由 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\ge 0$ 和 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\le 0$ 推出 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$．同样的方法又可以推出 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$．因此原点是驻点.

③证明 $f(0,0)$ 是极小值.

任取 $y=kx$，现在证明在该直线上，$f(0,0)$ 是极小值.

设 $g(x)=f(x,kx)$，

$$g'(x)=f_1'(x,kx)+kf_2'(x,kx)=f_1'(x,kx)+\frac{y}{x}f_2'(x,kx)=\frac{xf_1'(x,kx)+yf_2'(x,kx)}{x},$$

从而得到 $x>0$ 时，$g(x)$ 单增；$x<0$ 时，$g(x)$ 单减。（y 轴有类似的证明，从略）从而证明 $f(0,0)$ 是极小值.

④证明 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$．由于 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$．所以 $\mathrm{d}f(0,0)=0$．

再由 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，则 $f(x,y)$ 可微，有 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$．

11. 设 $\boldsymbol{u}$ Z $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在单连域 $\Omega\subseteq R^3$ 内可微，且满足 $\boldsymbol{gradu}$ ÷ **0**，试证明 $\boldsymbol{u}$ Z $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在 t 内无封闭等值面。

证明：反证法，设有封闭等值面 $\boldsymbol{C:u(x,y,z)}$ Z $\boldsymbol{a}$，其围成的闭区域为 t * Ċ t ，

∵ $\boldsymbol{u}$ Č $\boldsymbol{C}$(t *)，y $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在 t * 上存在最大、最小值。由于 $\boldsymbol{gradu}$ ÷ **0**，最值在边界 $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ Z $\boldsymbol{a}$ 上取得。从而 **max** $\boldsymbol{u}$ Z **min** $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u(x,y,z)}$ 在 t * 上为常数，与 $\boldsymbol{gradu}$ ÷ **0** 矛盾。

四、条件极值

12. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

解：拉格伦日函数：$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - x + y - 4)$

$$
\begin{aligned}
L'_x &= 2x - \lambda(y+1) = 0 \\
L'_y &= 2y + \lambda(-x+1) = 0 \\
L'_z &= 2z + 2\lambda z = 0 \\
L'_\lambda &= z^2 - xy - x + y - 4 = 0
\end{aligned}
$$

解方程组，$x = -1, y = 1, z = \pm\sqrt{3}$．拉格伦日函数的两个驻点为

$$P_1(-1,2,\sqrt{3}),\quad P_2(-1,2,-0\sqrt{3})$$

距离 $d(P_1) = d(P_2) = \sqrt{5}$，由实际意义，本问题存在最短距离，故 $\sqrt{5}$ 就是最短距离.

13. 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大.

解：设三边分别为 $x, y, 2p - x - y$，不妨绕边长为 x 的边旋转，设该边上的高为 h，

则有
$$\frac{1}{2}xh = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

则
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 x = \frac{4p\pi}{3}(p-x)(p-y)(x+y-p)/x$$

由极值点处偏导数等于 0 得

$$
\begin{cases}
(2p - 2x - y)x - (p-x)(x+y-p) = 0 \\
2p - x - 2y = 0
\end{cases}
$$

解得 $x = p/2, y = 3p/4$.

14. 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长.

解：设 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 为椭圆上的两点,

$$
\begin{cases}
\min\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right] \\
z_1 = x_1^2 + y_1^2 \\
x_1 + y_1 + z_1 = 1 \\
z_2 = x_2^2 + y_2^2 \\
x_2 + y_2 + z_2 = 1
\end{cases}
$$

这是条件极值问题,

$$L=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2$$
$$+\lambda_1\left(z_1-x_1^2-y_1^2\right)+\lambda_2\left(x_1+y_1+z_1-1\right)+\lambda_3\left(z_2-x_2^2-y_2^2\right)+\lambda_4\left(x_2+y_2+z_2-1\right)$$

求出驻点，由几何意义可知存在最小值.

15. 设空间一光滑曲面S的方程为$\boldsymbol{F(x,y,z)=0}$，$\boldsymbol{P_0(x_0,y_0,z_0)}$为曲面$\boldsymbol{S}$外的一点. 证明：若$\boldsymbol{S}$上的点$\boldsymbol{Q}$使得线段$\boldsymbol{P_0Q}$是$\boldsymbol{P_0}$与$\boldsymbol{S}$上任意一点连线的最短线段，则向量$\overrightarrow{\boldsymbol{P_0Q}}$必与曲面$\boldsymbol{S}$在该点的切平面垂直。

［证］考虑极小化问题 $\begin{cases} Min\ \ r(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ s.t.\ \ F(x,\ y,\ z)=0 \end{cases}$

方法一：由 $\boldsymbol{grad\ r}=\lambda\,\boldsymbol{grad\ F}$ 得

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\quad\frac{y-y_0}{r}\quad\frac{z-z_0}{r}\right)^T=\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\quad\frac{\partial F}{\partial y}\quad\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{P_0}\quad\Rightarrow\quad\vec{r}_0\big|_{P_0}=\lambda\vec{n}\big|_{P_0},$$

所以$\vec{r}_0$与$\boldsymbol{S}$正交。

方法二：
$$\vec{i}\quad\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}-\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x-x_0}{r}-\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0\quad(1)$$
$$\vec{j}\quad\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}-\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y-y_0}{r}-\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0\quad(2)$$
$$\vec{k}\quad\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial z}-\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z-z_0}{r}-\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0\quad(3)$$
，左边三式相加，得

$\dfrac{\vec{r}}{r}-\lambda\vec{n}=0$，即$\vec{r}_0=\lambda\vec{n}$.

16. 当x,y,z都大于0时，求$u=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的最大值. 并证明对任意正实数a,b,c，下述不等式成立：$ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.

解：令$L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+x^2-6r^2)$

由 $\dfrac{\partial L}{\partial(x\ y\ z)}=0$，得$x^2=\dfrac{1}{2\lambda},y^2=\dfrac{2}{2\lambda},z^2=\dfrac{3}{2\lambda}$，代入球面方程得，$\lambda=\dfrac{1}{2r^2}$，所以

$$f_{\max}=\ln r+\ln 2r^2+3\ln(\sqrt{3}r)=6\ln r+\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2$$

所以$\ln xyz^3=\ln x+\ln y+3\ln z<=6\ln r+\ln\sqrt{108}=\ln[\sqrt{108}(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6})^3]$.

所以 $xyz^3 <= \sqrt{108}(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^3$，两边平方得 $x^2y^2z^6 <= 108(\frac{x^2+y^2+z^2}{6})^6$

所以对任意正数 a,b,c 有 $abc^3 <= 108(\frac{a+b+c}{6})^6$

17. 求 $z = xy(4-x-y)$ 在 $x=1, y=0, x+y=6$ 所围闭区域 $\overline{D}$ 上的最大值.

解：（1）先求开区域 D^0 内的最大值.

$$\begin{aligned} z'_x &= 4y - 2xy - y^2 = 0 \\ z'_y &= 4x - x^2 - 2xy = 0 \end{aligned}$$

驻点 $(0,0), \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right), (0,4), (4,0)$，在 D^0 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

（2）三条边界上的驻点

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ x+y=6 \end{cases}$$

将 $x=1$ 代入 $z = xy(4-x-y)$

$$\begin{aligned} &z = y(4-1-y) \\ &z' = 3-2y = 0 \\ &y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

在边界 $x=1$ 上的驻点为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，经检验，这个点在 $\overline{D}$ 的边界上.

将 $y=0$ 代入 $z = xy(4-x-y)$，

$$z = 0$$

不必考虑.

作拉格伦日函数 $L = xy(4-x-y) + \lambda(x+y-6)$

$$L_x' = 4y - 2xy - y^2 + \lambda = 0$$
$$L_y' = 4x - x^2 - 2xy + \lambda = 0$$
$$L_\lambda' = x + y - 6 = 0$$

驻点 $(3,3)$ 在 $\overline{D}$ 的边界上.

现有驻点 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\left(1,\frac{3}{2}\right),(3,3)$，加上三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$. 函数 $z = xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，必有最大值，而且最大值必为上述六个点之一. 计算函数 $z = xy(4-x-y)$ 在六个点上的值，

$$z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$$

最大；

$$z(3,3,) = -18$$

最小.

18. 求 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ 椭圆域 $D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

解：　解法 Ⅰ　由 $\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x = 0. \\ f_y'(x,y) = -2y = 0. \end{cases}$ 先求得 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ 在区域 $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$ 内的唯一驻点（0, 0）；在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上，$f(x,y) = x^2 - (4-2x^2) + 2 = 5x^2 - 2$ $(-1 \le x \le 1)$

求得椭圆域 D 上可能的最值 $f(\pm 1, 0) = 3$，$f(0, \pm 2) = -2$。

又 $f(0,0) = 2$，因此 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为－2。

解法 2　由 $\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x = 0. \\ f_y'(x,y) = -2y = 0. \end{cases}$ 先求得 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ 在区域 $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$ 内的唯一驻点（0, 0）。$A = f_{xx}''(0,0) = 2$，$B = f_{xy}''(0,0) = 0$，$C = f_{yy}''(0,0) = -2$，$B^2 - AC = 4 > 0$，

因此（0, 0）不是极值点，故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值必在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上取得。

在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上，$f(x,y) = x^2 - (4-2x^2) + 2 = 5x^2 - 2$　$(-1 \le x \le 1)$，

问题转化为一元函数的极值问题，且为闭区间上的最大值与最小值问题。记

$g(x) = 5x^2 - 2$，$(-1 \le x \le 1)$，显然最大值为 $g(\pm 1) = 3$，最小值为 $g(0) = -2$。

所以 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为－2.

解法 3　（在区域 $x^2+\frac{y^2}{4}<1$ 内同解法 2），在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上用拉格朗日乘数法求条件极值问题。　设　$L=x^2-y^2+2+A\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$，由

$$\begin{cases} L'_k = 2x + 2\text{a}x = 0, \\ L'_F = -2y + \frac{\text{a}}{2}y = 0, \\ L'_{\text{a}} = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

求得 4 个驻点 $M_1(0,2)$， $M_2(0,-2)$， $M_3(1,0)$ 和 $M_4(-1,0)$. 又 $f(M_1)=-2$，

$f(M_2)=-2$， $f(M_3)=3$， $f(M_4)=3$，因此 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3，最小值为－2。