第2次讨论课 (YAO G. W.)

¶ 内容

1. 幂零变换;
2. 极小多项式;
3. Jordan标准型.

¶ 教学要求

1. 掌握幂零变换和幂零矩阵的性质;
2. 会求极小多项式，并利用极小多项式确定Jordan标准型;
3. 给定矩阵A，会求其Jordan标准型J并过渡矩阵P,使得$P^{-1}AP=J$.

Exercise 1 设σ是实数域上3维线性空间$\mathbf{V}$ 的一个线性变换，它关于$\mathbf{V}$的某个基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) 求σ的极小多项式$m(x)$，并将$m(x)$在$\mathbb{R}[x]$内分解为两个首项系数为1的不可约多项式的乘积：$m(x)=m_1(x)m_2(x)$；

(2) 令$\mathbf{W}_i=\{\xi\in\mathbf{V}|m_i(\sigma)\xi=0\},\ i=1,2$，证明：$\mathbf{W}_i$是$\sigma$的不变子空间，并且$\mathbf{V}=\mathbf{W}_1\oplus\mathbf{W}_2$；

(3) 在每一个子空间$\mathbf{W}_i$中选取一个基，凑成$\mathbf{V}$的基，使得σ关于这个基的矩阵里只出现3个非零元素。

Exercise 2 设σ是n维复线性空间$\mathbf{V}$ 上的线性变换，试证明存在可对角化的线性变换τ和幂零变换υ，使得

$$\sigma=\tau+\upsilon,$$

且满足$\tau\upsilon=\upsilon\tau$。

如果已知σ在$\mathbf{V}$的某个基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

试求出τ和υ，使得$\sigma=\tau+\upsilon$。

Exercise 3 设σ是n维复线性空间$\mathbf{V}$上的线性变换，举一个5阶矩阵为例，说明σ的$r(\leq n)$维不变子空间的一般方法。

Exercise 4 试证明满足$A^m=I$的n阶矩阵A（其中m是某个正整数）相似于对角矩阵。

Exercise 5 设σ是n维复线性空间$\mathbf{V}$上的线性变换，σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵是$A$。

(1) 怎样求包含α_1的最小不变子空间？

(2) $\forall\alpha\in\mathbf{V},\alpha\neq 0$，怎样求包含$\alpha$的最小不变子空间？

举一个4阶矩阵的例子，算一下。

Exercise 6 (1)设N_1和N_2都是3阶矩阵。证明N_1 与N_2相似当且仅当它们有相同的特征多项式以及极小多项式;

(2) 设N_1和N_2都是3阶幂零矩阵。证明N_1 与N_2相似当且仅当它们有相同的极小多项式。

如果N_1和N_2都是4阶矩阵，上述论断是否还成立？为什么？举出两个4阶幂零矩阵说明之。

Exercise 7 设6阶复方阵A的特征多项式为$f(x)=(x-2)^2(x+3)^4$，极小多项式为$m(x)=(x-2)(x+3)^3$，试写出A的Jordan标准形。如果极小多项式为$m(x)=(x-2)(x+3)^2$，A的Jordan标准形有几种可能的形式？

Exercise 8 求可逆矩阵P和Jordan标准形J，使得$P^{-1}AP=J$：

$$(1).\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad (2).\ A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$