代数与几何讨论课（七）（矩阵的相似对角化，二次型）

一、判断下列结论是否正确,并说明理由:

(1) 对称矩阵可以相似对角化。

(2) 设 A 为实对称方阵，则 A 分别相抵，相似，相合于同一个对角阵。

(3) 只有特殊的二次型才可以通过配方法化成标准形。

(4) 设实二次型经过初等变换法化成标准形，则标准形中的系数就是原二次型的矩阵的特征值。

(5) 可逆线性替换不改变二次型的秩。

(6) 可逆线性替换可能改变实二次型的正惯性指数和负惯性指数。

(7) 两个实对称矩阵相似当且仅当它们相合。

(8) 实对称矩阵 A 负定当且仅当 A 的顺序主子式都小于零。

(9) 若实矩阵 A 的特征值都大于零，则 A 正定。

(10) 度量矩阵一定是正定矩阵.

(11) 对称矩阵一定可以相似对角化。

(12) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 可以相似对角化当且仅当 A^{-1} 可以相似对角化。

(13) 若 $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则 P 的列向量都是 A 的特征向量。

(14) 若 A 与 B 有共同的特征值及都有 n 个线性无关的特征向量，则

（**A**）$A \sim B$；（**B**）$A = B$；（**C**）$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$；（**D**）$|A - B| = 0$.

（**15**）设 A，B 为 n 阶实对称矩阵，则 A，B 相似当且仅当 A，B 有相同的特征多项式。

二、下列矩阵可否相似对角阵，可对角化的条件是什么？

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(\underset{i \neq j}{a_{ii} \neq a_{jj}}\right)$；

2. $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ & a_{11} & \ddots & & \vdots \\ & & a_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \left(\underset{i \neq j}{a_{ii} \neq a_{jj}}\right)$ ； **3.** $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ ；

4． $A\in M_n$，且 $A^2+A-2I=0$。

三、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$ 。令 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$ ，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$ 。

（**1**）求二次型 f 的矩阵。

（**2**）若 α,β 为相互正交的单位向量，求一正交替换将 f 化成标准形。

四、设 $A,B\in M_n$ ，且 A 有 n 个互异的特征值。

证明：$AB=BA\Leftrightarrow A$ 的特征向量也是 B 的特征向量。

五、设 A 为三阶实对称矩阵，$\lambda=1,2,-1$ 是其三个特征值，$\alpha_1=\left(1,\quad a+1,\quad 2\right)^T$，$\alpha_2=\left(a-1,\quad -a,\quad 1\right)^T$，分别为 A 的对应 $\lambda=1,2$ 的特征向量，A^* 的特征值为 λ_0，且 $A^*\beta_0=\lambda_0\beta_0$，其中 $\beta_0=\left(2,\quad -5a,\quad 2a+1\right)^T$，求 a 及 λ_0 的值。

六、设 A 为 m 阶正定矩阵，B 是 $m\times n$ 的实矩阵。证明 B^TAB 正定的充分必要条件是 $r(B)=n$ 。