第一章 行列式的计算

一、 化上（下）三角行列式，斜上（下）三角行列式

1. 具体行列式（通常化上三角）.

例 1：求 $D=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&3&1&0\\1&4&2&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&3&1&0\\1&4&2&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}\xrightarrow[\longleftarrow]{\substack{-2r_1+r_2\to r_2\\-r_1+r_3\to r_3}}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&3&2&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}\xrightarrow[\longleftarrow]{-3r_2+r_3\to r_3}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-2$.

2. 箭头形行列式“↗”，“↙”，“↘”，“↖”.

例 2：求 $D=\begin{vmatrix}n&\cdots&2&1\\&&2&1\\&\iddots&&\vdots\\n&&&1\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}n&\cdots&2&1\\&&2&1\\&\iddots&&\vdots\\n&&&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\longleftarrow]{\substack{-(1/n)c_1+c_n\to c_n\\-(1/n-1)c_2+c_n\to c_n\\\cdots\\-(1/2)c_{n-1}+c_n\to c_n}}\begin{vmatrix}n&\cdots&2&-n+2\\&&2&\\&\iddots&&\\n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-n+2)n!$

二、 两行（列）有许多项成比例，常用一行（列）的一个倍数加到另一行（列），化出很多零。

例：求 $D=\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&\cdots&a&b\end{vmatrix}$.

解：

$$D=\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&\cdots&a&b\end{vmatrix}\xrightarrow[\longleftarrow]{\substack{-r_1+r_2\to r_2\\-r_1+r_3\to r_3\\\cdots}}\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a-b&b-a&&\\\vdots&&\ddots&\\a-b&&&b-a\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\longleftarrow]{\substack{c_2+c_1\to c_1\\ c_3+c_1\to c_1\\ \cdots\\ c_n+c_1\to c_1}} \begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ & b-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & b-a \end{vmatrix} = (b+(n-1))(b-a)^{n-1}$$

三、　　拆分法

若行列式许多行（列）都可以拆分成两行（两列）的和，且拆分开的行（列）有成比例的

例 1：求 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 \\ 0 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=3x^2+x^3$$

例 2：已知 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，在行列式 D 中任意取 m 行 $i_1,i_2,\cdots,i_m$，由这 m 行和相应的 m 列 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 交点上的 m^2 个元素构成的行列式称为 D 的一个 m 阶主子式，例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$ 为 2 阶主子式。证明 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

$=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k S_{n-k}\lambda^k+\cdots+|A|$，其中 S_{n-k} 为行列式

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中所有 $n-k$ 阶主子式的和。

证明：行列式的每一列$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ii}-\lambda \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$都可以拆成两组数的和$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$。由于行列式的第一列可以拆成两组数的和，由行列式的性质，原行列式可以分解成两个行列式的和 $f(\lambda)=$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

再将其中每一个行列式的第二列拆成两组数的和，从而每一个行列式等于两个行列式的和，类似的再将行列式的第三列拆成两组数的和，最后将 $f(\lambda)$ 分解成 2^n 个行列式的和，

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

其中每一个行列式的第i列要么为D的第i列，要么为$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，且所有的$-\lambda$都在该行列式的对角线上。假设其中一个行列式$D_k$，对角线上刚好有$k$个$-\lambda$，它们分别出现在第$i_1,\cdots,i_k$列，行列式按第$i_1$列展开，等于$-\lambda$乘上一个$n-1$阶行列式（去掉$D_k$的第$i_1$行和$i_1$列后得到的），这个$n-1$阶行列式对角线上有$k-1$个$-\lambda$，分别出现在第$i_2-1,\cdots,i_k-1$列，再将这个$n-1$阶行列式按照第$i_2-1$列展开，等于$-\lambda$乘上一个$n-2$阶行列式，这个$n-2$阶行列式对角线上有$k-2$个$-\lambda$，分别出现在第$i_3-2,\cdots,i_k-2$列，……，因此原行列式$D_k$等于$(-\lambda)^k$乘以一个$n-k$阶行列式，这个$n-k$阶行列式刚好为$D_k$也刚好为$D$分别去掉第$i_1$行$i_1$列，$i_2$行$i_2$列，…，$i_k$行$i_k$列后的$n-k$阶主子式。上面$2^n$个行列式中的每一个只要对角线上有$k$个$-\lambda$，则展开后就是$(-\lambda)^k$乘以一个$D$的$n-k$阶主子式。对角线上有$k$个$-\lambda$的行列式共$C_n^k$个，这是所有展开含$\lambda^k$项的行列式。所有这些行列式求和刚好为

$(-1)^k S_{n-k}\lambda^k$。因此 $f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k S_{n-k}\lambda^k+\cdots+|A|$

四、　　归纳法，降阶递推法.

例 1：证明：$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$.

例 2：求：$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta\\ & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$.

解：按第一行展开得到 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，于是可以求得

$D_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta\ +\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha\ \beta^{n-1}+\beta^n$.

例 3：证明：$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1s}\\ & * & & \vdots & & \vdots\\ & & & b_{s1} & \cdots & b_{ss}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{ss}\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1s}\\ & & & \vdots & & \vdots\\ & & & b_{s1} & \cdots & b_{ss}\end{vmatrix}$.

例 3 的推论：证明：$D=\begin{vmatrix}\boxed{A_1} & & & *\\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s}\end{vmatrix}=|A_1||A_2|\cdots|A_s|=\begin{vmatrix}\boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \boxed{A_s}\end{vmatrix}$.

五、　加边法.

例 1:　求 $D=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$.

解：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=$$

$$2x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=2x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)-$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(2x_1x_2\cdots x_n-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1))\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

例 2：求 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}$.

解：考察 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\\ x^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}$，由于 D_{n+1} 为范德蒙行列式，

$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$. D_{n+1} 按照第一列展开为 x 的多项式，其中 x^{n-1} 的系数为

$(-1)^{n+1}D_n$，又由 $D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$ 得到 x^{n-1} 的系数为 $(-1)^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$，所以 $D_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$.

六、　利用已知特殊行列式的结论求行列式.

1. 范德蒙行列式.

例 1：求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12

2. 三对角行列式。

例 2：求 $D_n=\begin{vmatrix}3&1&&\\2&3&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&2&3\end{vmatrix}$.

解：$D_n=\begin{vmatrix}3&1&&\\2&3&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&2&3\end{vmatrix}=2^n\begin{vmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&&\\1&\frac{3}{2}&\ddots&\\&\ddots&\ddots&\frac{1}{2}\\&&1&\frac{3}{2}\end{vmatrix}$，令 $\alpha+\beta=3/2,\alpha\beta=1/2$，可求得 α=1，

$\beta=\frac{1}{2}$，所以 $D_n=1+1/2+(1/2)^2+\cdots+(1/2)^n=\frac{2^n-1}{2^n}$.