第三章 几何空间

一、 向量的运算

1. 向量的数量积

（1） 在仿射坐标系$\{O;e_1,e_2,e_3\}$中给定两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$， $\beta=(\mathrm{y}_1,y_2,y_3)$，则

$$\alpha\cdot\beta=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}，其中A=\begin{pmatrix}e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3\\ e_2\cdot e_1 & e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_3\\ e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3\cdot e_3\end{pmatrix}.$$

（2） 在直角坐标系$\{O;i,j,k\}$中给定两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$， $\beta=(\mathrm{y}_1,y_2,y_3)$，则

$$\alpha\cdot\beta=(x_1,x_2,x_3)I_3\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}x_iy_i$$

- $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=0$

2. 向量的向量积

在直角坐标系$\{O;i,j,k\}$中给定两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$， $\beta=(\mathrm{y}_1,y_2,y_3)$，则

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix}i & j & k\\x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}.$$

- $\alpha//\beta\Leftrightarrow\alpha\times\beta=0$

3. 向量的混合积

在直角坐标系$\{O;i,j,k\}$中给定两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$，$\beta=(\mathrm{y}_1,y_2,y_3)$，$\gamma=(\mathrm{z}_1,z_2,z_3)$

则$(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\\z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

- α，β，γ共面$\Leftrightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=0$

例：（1）设$\alpha\times\beta=\gamma\times\delta$， $\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$，证明$\alpha-\delta$，$\beta-\gamma$共线.

（2）设$\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha=0$，证明$\alpha$，$\beta$，$\gamma$共面.

（3）证明$(\beta\cdot\gamma)\alpha-(\alpha\cdot\gamma)\beta\perp\gamma$.

证明：（1）因为$(\alpha-\delta)\times(\beta-\gamma)=\alpha\times\beta-\alpha\times\gamma-\delta\times\beta+\delta\times\gamma=\alpha\times\beta-\gamma\times\delta-\alpha\times\gamma+\beta\times\delta=0$，所以$\alpha-\delta$，$\beta-\gamma$共线.

(2)因为$(\alpha，\beta，\gamma)=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=-(\beta\times\gamma)\cdot\gamma-(\gamma\times\alpha)\cdot\gamma=-(\beta，\gamma，\gamma)-(\gamma，\alpha，\gamma)=0$，所以$\alpha，\beta，\gamma$共面.

（3） 因为$((\beta\cdot\gamma)\alpha-(\alpha\cdot\gamma)\beta)\cdot\gamma=(\beta\cdot\gamma)(\alpha\cdot\gamma)-(\alpha\cdot\gamma)(\beta\cdot\gamma)=0$，所以$(\beta\cdot\gamma)\alpha-(\alpha\cdot\gamma)\beta\perp\gamma$.

二、 位置关系的判断

1. 两个向量的共线；三个向量的共面.
2. 两条直线异面，共面（相交、平行、重合）
3. 两个平面相交、平行、重合
4. 直线与平面相交、平行、直线在平面上.

三、距离和垂线（在右手直角坐标系中讨论）

1. 点到直线的距离，垂线方程

垂线方程：设直线ℓ过已知点$P_0(x_0,y_0,z_0)$方向向量为$\upsilon_0=(X，Y，Z)$，求过$P(x_1,y_1,z_1)$点直线ℓ的垂线方程。

法（1）：求垂线的方向向量υ，υ满足$\begin{cases}\upsilon\cdot\upsilon_0=0\\(\overrightarrow{P_0P},\upsilon,\upsilon_0)=0\end{cases}$.

法（2）：求垂足点$Q(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$满足$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}\\\overrightarrow{PQ}\cdot\upsilon=0\\(\overrightarrow{PQ},\upsilon,\overrightarrow{P_0P})=0\end{cases}$

2. 点到平面的距离，垂线方程

垂线方程：过点$P(x_1,y_1,z_1)$平面$\pi:Ax+By+Cz+D=0$的垂线方程为

$\dfrac{x-x_1}{A}=\dfrac{y-y_1}{B}=\dfrac{z-z_1}{C}$.

3. 异面直线的距离，公垂线方程

公垂线方程：设异面直线ℓ_1和ℓ_2分别过点$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$，方向向量分别为υ_1

和υ_2，公垂线方程为$\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ & \upsilon_1 & \\ & \upsilon_1\times\upsilon_2 & \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ & \upsilon_2 & \\ & \upsilon_1\times\upsilon_2 & \end{vmatrix}=0 \end{cases}$。因为公垂线为过直线$\ell_1$平行于向量$\upsilon_1$和$\upsilon_1\times\upsilon_2$的平面与过直线$\ell_2$平行于向量$\upsilon_2$和$\upsilon_1\times\upsilon_2$的平面的交线。

四、 投影（在右手直角坐标系中讨论）

1. 点到平面的投影点坐标

   先求过已知点到已知平面的垂线，再求垂线与已知平面的交点即投影点。

2. 点到直线的投影点坐标

   参见三 1 的法（2）直接求垂足点（即投影点）的坐标。

3. 直线到平面的投影线方程

   投影线为已知平面和另一个平面的交线，这个平面为过已知直线并且垂直于已知平面的平面.

   假设已知直线为：$\ell:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$，已知平面为$\pi: Ax+By+Cz+D=0$，

   则ℓ到平面π的投影线方程为：$\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X & Y & Z \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$.

例：已知直线$\ell:\begin{cases} 3x-2z-6=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$，求$\ell$在平面$\pi$：$x+y+2z-5=0$的投影直线。

解：ℓ的方向向量为$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2i+4j+3k$，于是过$\ell$垂直于$\pi$的平面为$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$，即$5x-y-2z-13=0$，所以投影线方程为$\ell':\begin{cases} 5x-y-2z-13=0 \\ x+y+2z-5=0 \end{cases}$.

五、 对称点、对称直线或反射线（在右手直角坐标系中讨论）

1. 点关于直线的对称点坐标
2. 点关于平面的对称点坐标
3. 直线关于平面的对称直线方程

例：在直角坐标系下光线从 $A(2,1,2)$ 点射至镜面上的 $C(1,1,0)$ 点，设镜面方程为 π：$x-y+z=0$，求反射线所在直线的标准方程。

解：过 A 点平面 π 的垂线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$，与平面 π 的交点为 $D(3,0,3)$，设 $A'(x,y,z)$ 为 A 相对于平面的对称点， 则 $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AD}$，所以（$x-2$，$y-1$，$z-2$）$=2$（$3-2$，$0-1$，$3-2$），故（$x$，$y$，$z$）$=(4,-1,4)$.

过 A' 点和 C 点的直线方程为 ℓ：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{4}$， ℓ 即为所求。

注：这里也可以求点 A 关于直线 ℓ' 的对称点 A'，其中 ℓ' 为过 C 点平面 π 的垂线，但计算量要大很多，因为**确定一点关于平面的对称点比确定一点关于直线的对称点容易很多**。

练习题

1. 化直线方程 ℓ：$\begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ 为标准方程。

2. 已知右手直角坐标系中两条直线 ℓ_1：$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$， ℓ_2：$\begin{cases} z+2=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$，

（1）证明 ℓ_1 和 ℓ_2 异面；

（2）求 ℓ_1、ℓ_2 之间的距离及公垂线方程.

3. 求右手直角坐标系中直线 ℓ：$\begin{cases} 2x+3z-5=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$ 分别在平面 xoy 和平面 $x-y+z=0$ 上的投影。

4. 光线沿直线 ℓ：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 投射到平面 π：$x+y+z+1=0$，求反射线所在的直线方程.

5. 已知右手直角坐标系中点 $M_0(1,0,1)$，平面 π_1：$x-2y+3z+2=0$ 和平面 π_2：$x+2y-3z-2=0$，求过点 M_0 且与平面 π_1，π_2 都垂直的平面方程.

6. 已知仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 中向量 $\alpha=(a,b,c)$ 及平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$，证明：$\alpha//\pi \Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$.