第6(周)次作业

第6周次：教材上习题9：27(1)(2)(3).

补充题：

练习1. 设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明：
(1) 若存在复数$\mu \in \mathbb{C}$使得$det(A+\mu B) \neq 0$,则必存在实数$\lambda \in \mathbb{R}$使得$det(A+\lambda B) \neq 0$;
(2) 若存在复可逆阵$P \in M_n(\mathbb{C})$,使得$P^{-1}AP = B$,则必存在实可逆阵$Q \in M_n(\mathbb{R})$,使得$Q^{-1}AQ = B$. (从某种意义上说明相似关系不依赖于数域的扩大，提示：先对复阵P 进行实矩阵分解$P = D + iE$)

练习2. 证明Schur Lemma: 设$A \in M_n(F)$, 若$\Lambda(A) \subset F$, 则必存在可逆阵$P \in M_n(F)$,使得$R = P^{-1}AP$为上三角阵;

练习3. 证明: (1) 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$, 则$(AB)^* = B^*A^*$; (A^*为伴随矩阵. hint:先证当A, B可逆时成立，然后考虑扰动矩阵$\lambda I + A$,$\lambda I + B$)
(2) 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 若A 可对角化，则A^*可对角化。(思考：反过来是否成立?先自己举例算算看，理论上解决要待以后)