第九章 若当标准形

一、 求若当标准形 J 及可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$

1. J 的计算

（1） 求 A 的特征值及代数重数

设 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的所有不同的特性值，代数重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$.

（2） 求特征值 λ_i 对应的若当块的总块数 t_i.

$t_i=n-r(A-\lambda_i I)$.

（3） 求特征值 λ_i 对应的 t_i 个若当块中每一块的阶数.

阶数为 j 的若当块的个数为 $d_j=r((A-\lambda_i I)^{j+1})+r((A-\lambda_i I)^{j-1})-2r((A-\lambda_i I)^{j})$（$j\geq 1$）.

【**注：**由于 d_j 的计算量较大，常结合下面的公式来计算：

• **特征值 λ_i 对应的 t_i 个若当块的阶数之和等于 n_i.**

例如：设 $n_i=3$，$t_i=2$，则两个块的阶数分别为 2，1；设 $n_i=4$，$t_i=2$，则两个块的阶数分别为 3，1 或者 2，2。再计算 d_1，若 d_1=1 则两个块为 3，1. 若 d_1=0 则两个块为 2，2；设 $n_i=5$，$t_i=2$，则两个块的阶数分别为 4，1 或者 3，2。再计算 d_1，若 d_1=1 则两个块为 4，1. 若 d_1=0 则两个块为 3，2。】

（4） 写出 J

J 为准对角，对角块依次为特征值 λ_1 的 t_1 个若当块，特征值 λ_2 的 t_2 个若当块，…，特征值 λ_s 的 t_s 个若当块。将每个特征值的若当块从高到低排列。

2. P 的计算

（1） 对每个特征值 λ_i 设出 U_{λ_i} 的基表。

U_{λ_i} 的基表含 t_i 列，每列的长度分别等于特征值 λ_i 的 t_i 个若当块的阶数（已由 **1. J 的计算**得到）

）. 例如：特征值 λ_i 的 $t_i=2$ 个若当块的阶数分别为 $3,2$，则 U_{λ_i} 的基表可设为：$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_3^{(1)} & \end{matrix}$

（*）。

（2） 求出基表中的向量.

以（1）中（*）为例讨论。

法一：正求法。

基表的第一行为 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的一个基础解系。先求 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的一个基础解系 η_1,η_2. 令 $x_1^{(1)}=k_1\eta_1+k_2\eta_2$. 由于 $(A-\lambda_i I)x_2^{(1)}=x_1^{(1)}$，故线性方程组 $(A-\lambda_i I)x=x_1^{(1)}$ 的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩，得到 k_1,k_2 满足一些等式（1)，并求出一个带参数 k_1,k_2 的解 $x_2^{(1)}$. 又 $(A-\lambda_i I)x_3^{(1)}=x_2^{(1)}$，故线性方程组 $(A-\lambda_i I)x=x_2^{(1)}$ 的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩，得到 k_1,k_2 满足一些等式（2）。最后求出具体的 k_1,k_2 同时满足等式（1）和（2)，并代入 $x_1^{(1)}=k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 和 $x_2^{(1)}$ 中，同时求出 $x_3^{(1)}$，填入基表（*）的第一列。再求基表的第二列，取 η_1,η_2 中的一个向量使得该向量与 $x_1^{(1)}$ 线性无关，记为 $x_1^{(2)}$，通过求解方程组 $(A-\lambda_i I)x_2^{(2)}=x_1^{(2)}$，求得一个解 $x_2^{(2)}$，并填入基表的第二列。

【注：如果 U_{λ_i} 的基表为矩形，即每列的长度都相等，例如 $\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{matrix}$ 为矩形。则第一行中的向量可以为 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的任意一个基础解系，也就是说任取 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的一个基础解系填入基表的第一行都可以求出整个基表，不需要使用参数法。如果 U_{λ_i} 的基表不为矩形，即列的长度不全相等，例如 $\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_3^{(1)} & \end{matrix}$（*）。必须采用法一中参数法求解基表。】

法二：逆求法。

由于基表的第一列满足 $(A-\lambda_i I)x_3^{(1)}=x_2^{(1)},(A-\lambda_i I)x_2^{(1)}=x_1^{(1)},(A-\lambda_i I)x_1^{(1)}=0$，所以 $(A-\lambda_i I)x_3^{(1)}=x_2^{(1)},(A-\lambda_i I)^2x_3^{(1)}=x_1^{(1)},(A-\lambda_i I)^3x_3^{(1)}=0$，如果能先求出 $x_3^{(1)}$，自动得到 $x_2^{(1)},x_1^{(1)}$。先求解 $(A-\lambda_i I)^3x=0$，得到基础解系含 5 个向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_5$，其中必有向量，设为 η_1，使得 $(A-\lambda_i I)^2\eta_1\neq 0$，则令 $x_3^{(1)}=\eta_1,x_2^{(1)}=(A-\lambda_i I)\eta_1,x_1^{(1)}=(A-\lambda_i I)^2\eta_1$，

填入基表的第一列。再求$(A-\lambda_i I)^2 x=0$的基础解系，含 4 个向量ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4，其中有一个向量，设ξ_1，使得$(A-\lambda_i I)\xi_1\neq 0$，且$(A-\lambda_i I)\xi_1$与$x_1^{(1)}$线性无关，记$x_2^{(2)}=\xi_1, x_1^{(2)}=(A-\lambda_i I)\xi_1$，并填入基表的第二列。

（3） 写出P.

依次将$U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},\cdots,U_{\lambda_s}$基表中的向量从上到下，从左到右排成一个矩阵，该矩阵即为所求的P.

【总结：当U_{λ_i}的基表是矩形时，正求法和逆求法都可以；当U_{λ_i}的基表不是矩形时，逆求法简单。如果只想掌握一种方法的话，选逆求法。

怎样判断自己求出来的U_{λ_i}基表是否正确？只要满足两条就可以：1. 基表的第一行为$(A-\lambda_i I)x=0$的一个基础解系；2. 每一列中后一个向量用$A-\lambda_i I$左乘变成前一个向量。】

例 1：设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ & & & 5 & \\ & & & 2 & 5 \end{bmatrix}$，求若当标准形$J$及可逆阵$P$使得$P^{-1}AP=J$。

解：一、求J.

（1） 求A的特征值及代数重数。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)^3$，故$\lambda_1=-1, n_1=2$；$\lambda_2=5, n_1=3$。

（2） 求特征值λ_1,λ_2对应若当块的总块数t_1,t_2.

$t_1=5-r(A+I)=5-3=2$。$t_2=5-r(A-5I)=5-3=2$.

（3） 分别求特征值λ_1,λ_2对应若当块中每一块的阶数。

特征值λ_1有 2 个若当块，阶数之和等于2，所以阶数分别为 1，1.

特征值λ_2有 2 个若当块，阶数之和等于3，所以阶数分别为 2，1.

（4） 写出J.

$$J=\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5\end{bmatrix}。$$

二、求可逆阵P.

（1） 分别设出U_{λ_1}和U_{λ_2}的基表。

$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$			$x_1^{(3)}$	$x_1^{(4)}$
		和		$x_2^{(3)}$	
U_{λ_1}				U_{λ_2}	

（2） 求出基表中的向量.

先求U_{λ_1}的基表。

求出$(A+I)x=0$的一个基础解系$\eta_1=(1,-1,0,0,0)^T,\eta_2=(1,0,-1,0,0)^T$。由于基表是矩形的，所以可以令$x_1^{(1)}=\eta_1,x_1^{(2)}=\eta_2$，并填入表中。

再求U_{λ_2}的基表。

法一：正求法。

先求$(A-5I)x=0$的一个基础解系η_3=(0,0,0,0,1)^T,η_4=(1,1,1,0,0)^T。由于U_{λ_2}的基表不是矩形，用参数法。

令$x_1^{(3)}=k_1\eta_3+k_2\eta_4$，因为$(A-5I)x=x_1^{(3)}$有解，系数矩阵与增广矩阵的秩相等。可以取$k_1=1,k_2=0$。代入$x_1^{(3)}=k_1\eta_3+k_2\eta_4$，得到$x_1^{(3)}=\eta_3$，并求解$(A-5I)x=x_1^{(3)}$得到解$x_2^{(3)}=(0,0,0,\frac{1}{2},0)^T$，填入基表中的第一列。再取$x_1^{(4)}=\eta_4$。求得$U_{\lambda_2}$的基表。

法二、逆求法（**基表不为矩形，推荐此法**）。

求$(A-5I)^2x=0$的一个基础解系$\eta_1=(0,-1,1,0,0)^T$，$\eta_2=(0,0,0,1,0)^T$，$\eta_3=(0,0,0,0,1)^T$，其中η_2满足$(A-5I)\eta_2\neq 0$。令$x_2^{(3)}=\eta_2$，$x_1^{(3)}=(A-5I)x_2^{(3)}$
$=(0,0,0,0,2)^T$，填入基表第一列。

再求$(A-5I)x=0$的一个基础解系ξ_1=(0,0,0,0,1)^T,ξ_2=(1,1,1,0,0)^T，显然ξ_2与$x_1^{(3)}$线性无关，令$x_1^{(4)}=\xi_2$，填入表中第二列。

（3） 写出P.

U_{λ_2} 的基表通过法一和法二得到的不一样，所以最终的 P 也不一样。

通过法一得到 $P=(x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_1^{(4)})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\-1&0&0&0&1\\0&-1&0&0&1\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$.

通过法二得到 $P=(x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_1^{(4)})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\-1&0&0&0&1\\0&-1&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&2&0&0\end{pmatrix}$

例 2：设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}$，求若当标准形 J 及可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$ 。

解：一、求 J .

（1）求 A 的特征值及代数重数。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4$，故 $\lambda_1=1,n_1=4$ 。

（2）求特征值 $\lambda_1=1$ 对应若当块的总块数 t_1.

$t_1=5-r(A-I)=5-3=2$ 。

（3）求特征值 $\lambda_1=1$ 对应若当块中每一块的阶数。

特征值 λ_1 有 2 个若当块，阶数之和等于 4，所以两个若当块阶数可能为 3，1 或者 2，2.

阶数为 1 的若当块的个数 $d_1=4+r((A-I)^2)-2r(A-I)=1$，所以两个若当块阶数为 3，1

（4）写出 J .

$J=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$。

二、求 P .

（1）设出 U_{λ_1} 的基表。

$x_1^{(1)}$ $x_1^{(2)}$

$x_2^{(1)}$

$x_3^{(1)}$

U_{λ_1}

（2）求出U_{λ_1}的基表中的向量。

法一：正求法。

先求$(A-I)x=0$的一个基础解系$\eta_1=(0,0,1,0)^T,\eta_2=(3,1,0,1)^T$。由于基表不是矩形，用参数法，令$x_1^{(1)}=k_1\eta_1+k_2\eta_2$。由于$(A-I)x=x_1^{(1)}$有解，所以系数矩阵与增广矩阵的秩相等，$k_1,k_2$满足等式$k_1-3k_2=0$（1），且求得一个特解$x_2^{(1)}=(3k_2,-k_2,3,0)^T$。由于$(A-I)x=x_2^{(1)}$有解，所以系数矩阵与增广矩阵的秩相等，$k_1,k_2$满足等式$3-3k_2=0$（2）。

求出具体的$k_1=3,k_2=1$同时满足等式（1）和（2），并最终确定$x_1^{(1)}=(3,1,3,1)^T$，

$x_2^{(1)}=(3,-1,3,0)^T$，同时通过$(A-I)x=x_2^{(1)}$，求得$x_3^{(1)}=(4,-1,0,0)^T$。取

$x_1^{(2)}=\eta_1=(0,0,1,0)^T$。

法二：逆求法（**基表不为矩形，推荐此法**）。

求解方程组$(A-I)^3x=0$的基础解系$\eta_1=(1,0,0,0)^T$，$\eta_2=(0,1,0,0)^T$，$\eta_3=(0,0,1,0)^T$，

$\eta_4=(0,0,0,1)^T$。由于$(A-I)^2\eta_1\neq 0$，可令$x_3^{(1)}=\eta_1=(1,0,0,0)^T$，

$x_2^{(1)}=(A-I)x_3^{(1)}=(0,-2,0,-1)^T$，$x_1^{(1)}=(A-I)^2x_3^{(1)}=(3,1,3,1)^T$。由于$(A-I)x=0$的基础解系为$\eta_1=(0,0,1,0)^T,\eta_2=(3,1,0,1)^T$，令$x_1^{(2)}=\eta_1=(0,0,1,0)^T$。

（4） 写出P.

由法一得到$P=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},x_1^{(2)})=\begin{pmatrix}3&3&4&0\\1&-1&-1&0\\3&3&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

由法二得到$P=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},x_1^{(2)})=\begin{pmatrix}3&0&1&0\\1&-2&0&0\\3&0&0&1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$.

例 3：设 $A=\begin{pmatrix}3&0&2&-1\\0&3&-2&2\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$，求若当标准形 J 及可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$ 。

解：一、求 J .

（1）求 A 的特征值及代数重数。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-3)^4$，故 $\lambda_1=3,n_1=4$。

（2）求特征值 $\lambda_1=3$ 对应若当块的总块数 t_1.

$t_1=4-r(A-I)=4-2=2$ 。

（3）求特征值 $\lambda_1=3$ 对应若当块中每一块的阶数。

特征值 λ_1 有 2 个若当块，阶数之和等于 4，所以两个若当块阶数可能为 3，1 或者 2，2.

阶数为 1 的若当块的个数 $d_1=4+r((A-3I)^2)-2r(A-3I)=0$，所以两个若当块阶数为 2，2.

（4）写出 J .

$$J=\begin{bmatrix}3&1&&\\&3&&\\&&3&1\\&&&3\end{bmatrix}.$$

二、求 P .

（1）设出 U_{λ_1} 的基表。

$x_1^{(1)}$ $\quad$ $x_1^{(2)}$

$x_2^{(1)}$ $\quad$ $x_2^{(2)}$

U_{λ_1}

（2）求出 U_{λ_1} 的基表中的向量。

法一：正求法。

先求 $(A-3I)x=0$ 的一个基础解系 $\eta_1=(1,0,0,0)^T,\eta_2=(0,1,0,0)^T$ 。由于基表为矩形，不需要用参数法，直接令 $x_1^{(1)}=\eta_1$， $x_1^{(2)}=\eta_2$。求解 $(A-I)x=x_1^{(1)}$，得到一个解 $x_2^{(1)}=(0,0,1,1)^T$。求解 $(A-I)x=x_1^{(2)}$，得到一个解 $x_2^{(2)}=(0,0,\frac{1}{2},1)^T$ 。

法二：逆求法。

先求解$(A-3I)^2x=0$。由于$J^2=0$，$(A-3I)^2=0$，所以$(A-3I)^2x=0$的基础解系为

$\eta_1=(1,0,0,0)^T$，$\eta_2=(0,1,0,0)^T$，$\eta_3=(0,0,1,0)^T$，$\eta_4=(0,0,0,1)^T$。由于$(A-3I)\eta_3\neq 0$，

可以令$x_2^{(1)}=\eta_3=(0,0,1,0)^T$，$x_1^{(1)}=(A-3I)\eta_3=(2,-2,0,0)^T$。同时$(A-3I)\eta_4\neq 0$，且

$(A-3I)\eta_4=(-1,2,0,0)^T$与$x_1^{(1)}=(A-3I)\eta_3=(2,-2,0,0)^T$线性无关，可以令

$x_2^{(2)}=\eta_4=(0,0,0,1)^T$，$x_1^{(2)}=(A-3I)\eta_4=(-1,2,0,0)^T$

（3）写出P.

由法一得到$P=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.

由法二得到$P=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})=\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\-2&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

二、求不变子空间

设V为$\mathbb{C}$上的线性空间，$\sigma\in L(V)$。取W为σ的一个不变子空间，则$\sigma|_W$为W的线性变换，设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$为$\sigma|_W$的所有不同的特征值，它们也是$\sigma$的特征值，不妨假设$\sigma$的所有不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_s$。于是$W$和$V$关于线性变换$\sigma|_W$和$\sigma$分别有根子空间的分解$W=U'_{\lambda_1}\oplus U'_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus U'_{\lambda_r}$，$V=U_{\lambda_1}\oplus U_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus U_{\lambda_r}\oplus\cdots\oplus U_{\lambda_s}$，$U'_{\lambda_i}$为$\sigma$不变的子空间，且$U'_{\lambda_i}\subseteq U_{\lambda_i}$（$1\le i\le r$）。所以要求出所有的不变子空间$W$，只需要求出根子空间$U_{\lambda_i}$的所有的不变子空间，然后分别在$U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},\cdots,U_{\lambda_s}$中取一个不变子空间做直和就给出所有的不变子空间$W$.

以下假设σ的每一个特征值λ_i只有一个若当块。先求一组基使得σ在上述基下的矩阵为

$J=diag(N_1,N_2,\cdots,N_s)$，其中$N_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\lambda_i&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}_{t_i\times t_i}$. 不妨设$\sigma$在基

$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t_2},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{st_s}$下的矩阵为$J=diag(N_1,N_2,\cdots,N_s)$. 因此$U_{\lambda_i}$的

基为 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i}$，且 $\sigma|_{U_{\lambda_i}}$ 在基 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i}$ 下的矩阵为 $N_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{t_i\times t_i}$.

容易验证这时 U_{λ_i} 的所有不变子空间为 $\{\theta\}$，$L(\alpha_{i1})$，$L(\alpha_{i1},\alpha_{i2})$，$\cdots$，$L(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{it_i})$。

例 4：设 σ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ -1 & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，求 σ 的所有不变子空间.

解：先求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为若当标准形 J。

A 的所有特征值为 λ_1=1, $n_1=2$；λ_2=2, $n_2=1$。于是 $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$。可求得

$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}AP=J$。

令 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 σ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为

$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$。于是 U_{λ_1} 的基为 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$，且 $\sigma|_{U_{\lambda_1}}$ 在基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}$，所以 U_{λ_1} 的所有不变子空间为 $\{\theta\}$，$L(\alpha_1+\alpha_2)$，$L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)$. U_{λ_2} 的基为 α_3.

U_{λ_2} 的所有不变子空间为 $\{\theta\}$，$L(\alpha_3)$. 分别在 U_{λ_1} 和 U_{λ_2} 中取一个不变子空间做直和，就给出所有的不变子空间：$\{\theta\}$，$L(\alpha_3)$，$L(\alpha_1+\alpha_2)$，$L(\alpha_1+\alpha_2)\oplus L(\alpha_3)=L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$，

$L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)$，$V=L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)\oplus L(\alpha_3)$。

三、 极小多项式的性质及计算

- 设 $A\in M_n(C)$ 的所有不同的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，且特征值 λ_i 对应的若当块的最高阶数为 k_i（$1\le i\le s$）。于是 A 的极小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$.
- 设 $f(\lambda)$ 为 $A\in M_n(C)$ 化零多项式，则 $m_A(\lambda)\mid f(\lambda)$.

• 设 $A\in M_n(C)$ 可以相似对角化当且仅当 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$ 无重根.

例 5：设 $A\in M_n(C)$ 满足 $(A+I)(A+2I)=0$，证明 A 可以相似对角化。

证明：$f(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)$ 为 A 的化零多项式，则 $m_A(\lambda)\,|\,(\lambda+1)(\lambda+2)$。所以 A 的极小多项式没有重根，从而 A 可以相似对角化。

四、 求 A^m

设 $A\in M_n(C)$，存在可逆矩阵 P 及若当标准型 J 使得 $P^{-1}AP=J$，于是 $A=PJP^{-1}$。从而 $A^m=PJ^mP^{-1}$。令 $J=diag(N_1,N_2,\cdots,N_s)$，其中 $N_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$。则

$J^m=diag(N_1{}^m,N_2{}^m,\cdots,N_s{}^m)$。$N_i{}^m=\begin{pmatrix}\lambda_i{}^m & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} & C_m^2\lambda_i{}^{m-2} & \cdots & \\ & \lambda_i{}^m & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & C_m^2\lambda_i{}^{m-2} \\ & & & \ddots & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} \\ & & & & \lambda_i{}^m\end{pmatrix}$

例 6：设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：可求得 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，及 $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}AP=J$。于是 $A=PJP^{-1}$，

$$A^n=PJ^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-n & n\\ -n & n+1\end{pmatrix}.$$