

微积分 A(1) 第七次习题课题目 (第十四周)

一、一阶微分方程

1. 已知 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足条件: $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, 试研究该函数的单调性, 凹凸性, 奇偶性及无穷远处的性质。

2. 解下列方程

(1) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

(2) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

(3) $(x + 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$

(4) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

3. 设 $f(x)$ 满足 $f(x) \int_0^x f(t) dt = 1$, 求 $f(x)$ 的表达式。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有的 $x, t \in (0, +\infty)$, 满足条件

$$\int_1^{xt} f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_0^t f(u) du, \text{ 求 } f(x).$$

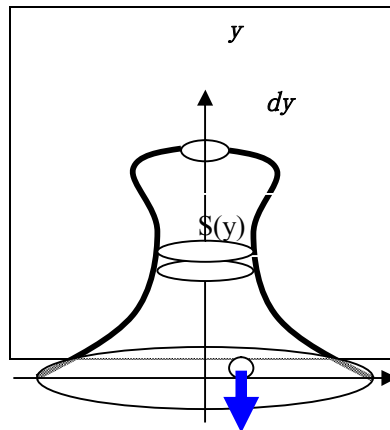
二、物理应用

5. 将质量为 m 的物体, 以初速 v_0 垂直向上射出, 设空气阻力与运动速度的平方成正比, 比例系数 $k > 0$. 求物体到达的高度, 到这最高处的时间, 落到原地时的速度及下落时间?

6. 某湖泊水量为 V , 每年入湖含污物 A 的污水, 入湖污水量 $\frac{V}{6}$, 入湖不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出量 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中有污物 $5m_0$, 超过国家标准. 为治污从 2000 年初开始, 限定

入湖污水含 A 浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$, 问多少年后湖中含污物的量降至 m_0 .

7. 一容器总高为 H , 在高度为 h 处的断面面积为 $S = S(h)$, 在底部有一面积为 s_0 的小孔, 若水流出速度 v 是水深 h 的函数, $v = \mu \sqrt{2gh}$, 若在容器装满水后, 将底部小孔打开, 问多久水将流尽?



8. 一个 1000m^3 的大厅中的空气内含有 $a\%$ 的废气, 现以 $1\text{m}^3/\text{min}$ 注入新鲜空气, 混合后的空气又以同样的速率排出, 求 t 时刻空气内含有的废气浓度, 并求使废气浓度减少一半所需的时间。

9. 半径为 1m , 高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水, 拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出, 试导出水面高度 h 随时间变化的规律, 并求水完全流空所需的时间。(水面比出水口高 h 时, 出水速度 $v = 0.6 \times \sqrt{2gh}$ 。)

补充:

广义积分的收敛性

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx \quad (5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$$