代数与几何讨论课（三）（几何空间中的向量）

一、1．设 O 是点 A 和点 B 连线外的一点，证明：三点 A，B，C 共线的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad \text{其中}\ \lambda+\mu=1。$$

2．下列命题是否成立？

（1）如果 $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\beta=\gamma$；（2）如果 $\alpha\times\beta=\alpha\times\gamma$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\beta=\gamma$。

3．已知 α,β 满足下列条件，讨论 α,β 之间的关系：

（1） $(\alpha\cdot\beta)^2=(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)$ ；（2） α 与 $\alpha\times\beta$ 共线 ；（3） α， β， $\alpha\times\beta$ 共面。

二、1．给定仿射坐标系 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 满足：

$$e_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{2+\sqrt{2}}{2}j,e_2=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{2-\sqrt{2}}{2}j,e_3=k$$

（1） 求 数量积在 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 坐标系下的度量矩阵;

（2） 设向量 α,β 在 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 坐标系下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$ 和 $\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}^T$，

试写出 α,β 的数量积与坐标和度量矩阵的关系式。

2．在仿射坐标系 $\{O:e_1,e_2\}$ 下，对任意向量 $\alpha=(x_1,x_2)$， $\beta=(y_1,y_2)$，定义

$$\alpha\cdot\beta=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2,$$

（1） 试验证它满足数量积的 4 条性质； （2）写出它的度量矩阵；

（3） 证明 $(\alpha\cdot\beta)^2\leq(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)$ 对任意向量 α， β 成立。

3．在仿射坐标系 $\{O:e_1,e_2,e_3\}$ 下，对任意向量 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$， $\beta=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$，

定义 $\alpha\cdot\beta=ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2+x_3y_3$，（其中 $a,b,c,d\in R$）

试讨论 a,b,c,d 满足什么条件时， (α,β) 满足数量积的 4 条性质。

4. 已知向量 α,β,γ 不共线，证明 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 当且仅当 $\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$。

三、1．已给平面 $\begin{aligned}\pi_1:&\quad x-2y+2z+d=0\\ \pi_2:&\quad -2x+4y+cz+1=0\end{aligned}$

（1） 求 c,d，使 $\pi_1//\pi_2$ 且不重合，并问答案是否唯一？

（2） 求 c,d，使 $\pi_1//\pi_2$，且它们之间的距离为 1；

（3） 求 d，使原点到 π_1 的距离为 1；

（4） 求 d，使点 $M(1,1,1)$ 到平面 π_1 的距离为 1。

2．设有两条直线 $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{n}$， $L_2:\begin{cases} x=-2-4t \\ y=2+mt \\ z=3+2t \end{cases}$

（1） 求 m,n，使 $L_1 // L_2$；

（2） 当 $m=n=1$ 时，求 L_1,L_2 之间的最短距离；

（3） 当 $m=n=1$ 时，求 L_1 与 L_2 的公垂线 L 的方程（ L 与 L_1,L_2 垂直且相交）；

（4） 求 m,n，使 $L_1 \perp L_2$，并问 m,n 是否唯一？

（5） 求 m,n，使 L_1 与 L_2 共面，并问这样的 m,n 是否唯一？

（6） 当 $m=-4, n=-1$ 时，求 L_1 与 L_2 的夹角。

3．已知平面 π： $x-2y-2z+4=0$，直线 L： $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{n}$

（1） 求 n，使 $L \perp \pi$；

（2） 求 n，使 $L // \pi$；

（3） 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 之间的交点，并求 L 在 π 上的投影线方程；

（4） 当 $n=-2$ 时，求直线 L_1，使 L_1 与 L 关于平面 π 对称；

（5） 求原点关于平面 π 的对称点的坐标。