第 12 课次习题

练习1. 找出下列函数在扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$上所有奇点并进行分类:

$$(1).\ \frac{z}{(1+e^{\pi z})^3(1+z^2)^2},\quad (2).\ \frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}+\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^5}.$$

练习2. 证明Weierstrass定理: 设z_0为$f(z)$一个本性奇点, 对$\forall$给定 $A\in\overline{\mathbb{C}}$, 在$z_0$点某个空心邻域$B_\delta^*(z_0)$内存在复数列$\{z_n\}_{n=1}^\infty$,使得

$$(1).\ \lim_{n\to\infty} z_n = z_0,\quad (2).\ \lim_{n\to\infty} f(z_n)=A.$$

练习3. 设z_0为$f(z)$一个孤立奇点, m, k为两个正整数且$m<k$. 若

(1). $\lim\limits_{z\to z_0} f^{(m)}(z)=0$, 则$z_0$为$f(z)$可去奇点;

(2). $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f^{(m)}(z)=A\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则$z_0$为$f(z)$之$(k-m)$级极点.

练习4. 设$f(z)$在$z=0$的某个空心邻域$B=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<R\}$ $(R>0)$内解析且以$z=0$为奇点，已知存在复数列$\{z_n\}_{n=0}^\infty\subset B$满足下列条件(i)(ii)(iii):

$$(i)\ \ \lim_{n\to\infty} z_n=0,\quad (ii)\ \ \lim_{n\to\infty} f'(z_n)=1,\quad \text{及}\quad (iii)\ \ f(z_n)\equiv 2, \text{对}\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

试判断$z=0$为$f(z)$的何种孤立奇点，并证明你的结论。