第 9 课次习题

补充题：

练习1. 求下列幂级数收敛半径：

$$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^{2n},\quad (2).\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\frac{1}{n})^{-n^2}z^n.$$

练习2. 设$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$的收敛半径分别为$R_1\,(>0)$, $R_2\,(>0)$, 求证: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n z^n$的收敛半径$R\geq R_1R_2$（提示：用定义）；并举例使得$R>R_1R_2$成立。

练习3. 确定幂级数的收敛圆盘并求和函数：

$$(1).\ f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^n,\quad (2).\ g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}z^n.$$

练习4. 下列三个幂级数具有相同的收敛半径（用定义证明, 只需要考虑收敛半径为正数的情形）：

$$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad (2).\ \sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1},\quad (3).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}.$$

注：只需要证明前面两个幂级数的收敛半径相同就可以了。