微积分 A（2）第八次习题课题目（第十三周）

一、第二型曲面积分

1. 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$，其中$\Sigma$为曲面

$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$的上侧。

2. (1) 求 $I=\oiint\limits_{S^+}\dfrac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

(2) 求 $I=\iint\limits_{S}\left(x^3+az^2\right)dy\wedge dz+\left(y^3+ax^2\right)dz\wedge dx+\left(z^3+ay^2\right)dx\wedge dy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上半球面上侧。

(4) 设 $f(u)$ 连续可微, 计算积分

$$\oiint\limits_{S^+} x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]dx\wedge dy$$

其中S^+为$x>0$的锥面$y^2+z^2-x^2=0$与球面$y^2+z^2+x^2=1$，$y^2+z^2+x^2=4$围成的空间区域的边界面的外侧.

3. 计算$\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S:x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$，外侧.

4. 设 S 为平面 $x-2z=100$ 在柱面 $x^2+(y-10)^2=1$ 内的部分下侧, 则 $\iint_S \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$

【　】

A. ®　　*B.* $-$®　　*C.* 2®　　*D.* -2®

5. 计算高斯积分：$\oiint\limits_{S}\dfrac{\cos(\vec r,\vec n)}{r^2}\mathrm{d}S$，其中$S$为一个不经过原点的光滑闭合曲面. 其中$\vec n$为$S$上点$(x,y,z)$处的单位外法线向量，$\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$，$r=\left|\vec r\right|$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数且.　又设对于空间 R^3 中的任意一张光滑的闭合曲面S，都有$\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求 $f(x)$ 满足的微分方程和 $f(x)$ 的表达式.

7. 求$\oiint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$，其中$S^+$为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧.

8. 设D是平面区域，∂D为逐段光滑曲线，$\mathbf{n}$为D的单位外法向，$u,v\in C^2(D)$，证明：

（1）$\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dl=\iint\limits_{D}\Delta u dxdy$；

（2）$\oint\limits_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dl=\iint\limits_{D}v\Delta u dxdy-\iint\limits_{D}\nabla u\cdot\nabla v dxdy$；

（3）$\oint\limits_{\partial D}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dl=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy$.

其中$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$.

9. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是一空间区域，$\partial\Omega$为逐段光滑曲线，$\mathbf{n}$为$\Omega$的单位外法向，$u,v\in C^2(\Omega)$，证明：

（1）$\oiint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS=\iiint\limits_{\Omega}\Delta u dxdydz$；（2）$\oiint\limits_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS=\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u dxdydz-\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dxdydz$；

（3）$\oiint\limits_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dS=\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz$. 其中$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

10. 用斯托克斯公式解下列问题

（1）求$\oint\limits_{C}ydx+zdy+xdz$，$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$. 从正 z 轴方向看，$C$的正向为反时钟方向。

解：

$$\oint\limits_{C}ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{S}\begin{vmatrix}\text{cos~} & \cos & \text{cos¥}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS=-\iint\limits_{S}\left(\text{cos~}+\cos\quad+\text{cos¥}\right)dS$$

$$=-\left(\text{cos~}+\cos\quad+\text{cos¥}\right)\iint\limits_{S}dS=-\sqrt{3}\text{®}a^2$$

（2）求$\oint_{C^+}y^2dx+y^2dy+z^2dz$，其中$C^+$为曲线$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$ $(z\geq 0,a>0)$，若从x轴正方向看去，C^+方向为逆时针方向.

（3）设L为平面　$x+y+z=1$在第一卦限中的部分的边界，方向是$A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$. 空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}.$$

求单位质点P在L上某点出发，绕L运动一周时，$\vec{F}$对于质点所做的功.

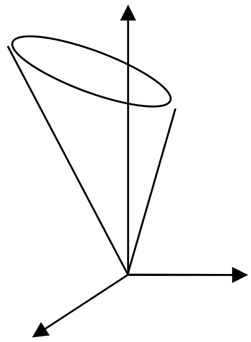
11. 设L是球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，从z轴正向看去L正向为逆时针方向，求以下积分

（1）$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$；　　　　（2）$\int\limits_{L^+}\dfrac{(x+1)dx+(y+1)dy+(z+1)dz}{x^2+y^2+z^2}$；

（3）$\int\limits_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

12. 设有向光滑曲面 S^+，$\mathbf{n}^0$ 为其单位法向量，∂S^+ 为 S^+ 的边界，两者的方向成右手法则，$\boldsymbol{\alpha}$ 为一个常向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$。求证：$\int_{\partial S^+}\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l}=2\iint_{S^+}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{n}^0 dS.$

13. 设 Ω 为由光滑圆锥面 $S:F(x,y,z)=0$ 及平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体，不妨假设此圆锥体的顶点在原点.



（1）证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

（2）此圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\dfrac{Ah}{3}$

其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.

14.（1）以下哪些命题要求单连通域?（　　）

$A.\oint_L Pdx+Qdy=\iint(Q'_x-P'_y)d\sigma$，$L$ 是 D 的正向边界。

B. $\oint_L Pdx+Qdy=0$，L 为 D 内任一闭曲线 $\Leftrightarrow$ 在 D 内 $\int_l Pdx+Qdy$ 与路径 l 无关。

C. $\int_l Pdx+Qdy$ 在 D 内与路径 l 无关 $\Leftrightarrow$ 在 D 内有 $Pdx+Qdy=du$，$u=u(x,y)$ 是某个二元函数。

D. $Pdx+Qdy=du$ 在 D 内成立 $\Leftrightarrow$ $Q'_x=P'_y$ 在 D 内成立。

（2）向量场 $\vec{F}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ 在域 D 内有连续的偏导数，C 是 D 中任意简单闭曲线，则下列论断中不正确的是(　　).

(A) 若 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$，则在 D 内必有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$；

(B) 若 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$，则在 D 内必有可微函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=X(x,y)dx+Y(x,y)dy$

(C) 若在 D 内处处有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，则 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$；

(D) 若 $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 中固定起点和终点的任意一条简单曲线，$\int_L \vec{\boldsymbol{F}}\,è\, \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 之值

与路径 L 无关，则 $\oint_C \vec{\boldsymbol{F}}\,è\,\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}\ \text{Z}\ \mathbf{0}$.

15.（1）设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$，则 $\mathrm{rot}\mathbf{F}=$______________，$\mathrm{div}\mathbf{F}=$________________.

（2）设 $u=x^2+y^2+z^2$，则 $div(gradu)=$_________________；$rot(gradu)=$_________。

（3）向量场 $\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+\cos z\mathbf{k}$ 是否是保守场 _________ （填是或否）.

16. 设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微，已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，并且对于任意的 t，有 $\int_{(0,\,0)}^{(1,\,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\,0)}^{(t,\,1)}2xydx+Q(x,y)dy$. 求函数 $Q(x,y)$.

17. 已知积分 $\int_L (x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数，且 $f\left(\dfrac{®}{2}\right)=0$，

（1）求 $f(x)$；

（2）对(1)中求得的 $f(x)$，求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\dfrac{f(x)}{x}dy$；

（3）对(1)中求得的 $f(x)$，求上述积分，其中积分路径为从 $A(®,1)$ 到 $B(2®,0)$ 的任意路径.

18. 已知 $f(x)\in C^2$ 且 $f'(0)=0$，又 $[f(x)+y(e^x+x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 为全微分，求

$f(x)$，并使由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{®^2}{8}$。

19. 设 u 为开集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的调和函数（即 $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$），证明：

（1） $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2®}\oint_{\partial D}(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dl$，其中 $(x_0,y_0)\in D$， $\mathbf{r}$ 为 (x_0,y_0) 到 ∂D 上点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$， $\mathbf{n}$ 为 D 的单位外法向量.

（2） $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2®R}\oint_L u(x,y)dl$，其中 L 是以 (x_0,y_0) 为中心，R 为半径位于 D 中的任意一个圆周.

20. 设 u 为有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上的调和函数（即 $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$），证明：

（1） $u(\mathbf{r}_0)=\dfrac{1}{4®}\iint_{\partial\Omega}(u\dfrac{\cos<\mathbf{r},\mathbf{n}>}{r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dS$，其中 $\mathbf{r}_0$ 为 Ω 内任意一点，$\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{r}_0$ 到 $\partial\Omega$ 上点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$， $\mathbf{n}$ 为 Ω 的单位外法向；

（2） $\iint_{\partial\Omega}(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathbf{n}})dS=\iint_{\partial\Omega_0}(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathbf{n}})dS$，

其中 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Omega,\Omega_0=B(M,°)\subset\Omega,r=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$， $r=\|\mathbf{r}\|$.