第 9 周(次)作业

书上习题9：10, 11, 20.

补充题:

练习1. 设$N \in M_n(F)$是数域F上幂零矩阵$(n \geq 2)$, 幂零次数为n, 证明：不存在方阵$A \in M_n(\mathbb{C})$, 使得$A^2 = N$.

练习2. 设$A \in M_4(\mathbb{C})$, $r(A) = 2$及$tr(A) = 0$, 试列出A的所有可能的$Jordan$标准形(不计$Jordan$块的排列次序).

练习3. *(1)* 设λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$\sigma$ $(\in L(V))$的m $(m \geq 2)$ 个不同的特征值, X_1, X_2, $\cdots, X_m$是分属于这m 个特征值的非零根向量, 证明$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$不是$\sigma$的根向量(即$X$不属于$\sigma$ 的任何一个根子空间);
(2) 证明若σ $(\in L(V))$以V中每个非零向量作为它的根向量，则σ只有一个特征值(不计算重数);
***(3)* 如*(1)*所设,证明若$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$属于$\sigma$的某个不变子空间$U$,则每个$X_j \in U$, $(j = 1, 2, \cdots, m)$.

注：此题*(1)(2)*部分是教材上习题*9*第*20*题的推广。

**注：*(3)*的证明较难,可选做。由*(3)*我们将可以定性σ的每个不变子空间：即σ的每个k维不变子空间一定由k个线性无关的根向量生成(想想为什么？)。