# 微积分 A(1)第六次习题课参考答案（第十三周）

一．关于定积分的证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

证明：令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \text{。}$$

2．设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

**证明：**

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)dt=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt - x\int_0^x tg(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt\text{，}$$

等式两边求导，得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{2}x^2 g(x)-(\int_0^x tg(t)dt+x^2 g(x))+\frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt\text{。}$$

再求导，得到 $f''(x)=\int_0^x g(t)dt,\ f'''(x)=g(x)$，所以

$f''(1)=2$，$f'''(1)=5$。

3．（积分中值定理的应用）设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b |f'(x)|\,dx\text{。}$$

**证**　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可设

$$\left|f(\xi)\right|=\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|,\xi\in[a,b]\text{，}\ \left|f(\eta)\right|=\min_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\text{，}\ \eta\in[a,b]\text{。}$$

于是

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|-\min_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|=\left|f(\xi)\right|-\left|f(\eta)\right|\le\left|f(\xi)-f(\eta)\right|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f'(x)\right|dx\text{。}$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\left|f(\varsigma)\right|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\text{。}$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)| = \min_{a\le x\le b}|f(x)| + (\max_{a\le x\le b}|f(x)| - \min_{a\le x\le b}|f(x)|) \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|\,dx 。$$

4． 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明:

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

**证**　将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x) = f(\frac{a}{2}) + f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2}) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2，(0<\xi<a)。$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x) \ge f(\frac{a}{2}) + f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})。$$

对上述不等式两边从 0 到 $a$ 积分，由于 $\int_0^a (x-\frac{a}{2})dx = 0$，就得到

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

二、定积分的应用

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0, x=1, y=0$ 所围的图形 $S$ 的面积为 2.

⑴求函数 $f(x)$；⑵ $a$ 为何值时，图形 $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

**解**　⑴由已知条件可得

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}\quad (x\ne 0).$$

对上式求不定积分，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性得

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx\quad (x\in[0,1])，$$

又由已知条件有

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\frac{3a}{2}x^2+Cx)dx=\frac{a}{2}+\frac{C}{2},$$

故$C=4-a$，所以

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x.$$

⑵旋转体的体积

$$V=V(a)=\pi\int_0^1\left[\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x\right]^2dx=(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})\pi.$$

上式两边对$a$求导，并令一阶导数为零，求其驻点。由$V'(a)=(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3})\pi=0$，解得$a=-5$是惟一驻点，又$V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$，所以$a=-5$为体积$V$的惟一极小值点，故为最小值点，因此$a=-5$时旋转体体积最小。

2. 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合，水的密度为 1，求闸门受的压力.

解：以水平面为$y$轴，垂直向下为$x$轴建立坐标系，$dp=2x\sqrt{R^2-x^2}dx$，其中$R$为半径. 压力

$$p=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{2}{3}R^3$$

3. 将一半径为$R$的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力作的功(设水的密度为 1).

解:

取厚度为$\Delta y$的水平薄片，其受水的浮力微元为$dF=\pi x^2dy$，功的微元为

$$dW=\pi x^2(2R-y)dy$$

$x^2+(y-R)^2=R^2$，　　$W=\pi\int_0^{2R}\left[R^2-(y-R)^2\right](2R-y)dy=\frac{4}{3}\pi R^4$

4. 一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

**解**　$W=\int_{15}^{30}x\cdot10^3g\cdot\pi10^2dx=1.04\times10^9$ (J)。

5. 使某个自由长度为 1m 的弹簧伸长 2.5cm 需费力 15N，现将它从 1.1m 拉至 1.2m，问要做多少功？

**解**　由$F=kx$，当$x=0.025$ m 时，$F=15$ N，代入得 $k=600$。于是所做的功为

$W=\int_{0.1}^{0.2}kxdx=9$ J。

6. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度$h$随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高$h$时，出水速度$v=0.6\times\sqrt{2gh}$。）

**解** 设$t$时刻水面的高度为$h$，过了$dt$时间后水面的高度降低了$dh$，则

$$\pi 1^2 dh = -\pi(0.01)^2 v dt = -\pi(0.01)^2 \times 0.6\sqrt{2gh}dt，$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -6\times 10^{-5}\sqrt{2g}dt 。$$

对上式两边积分，注意$t=0$时，$h=2$，得到$h = 2(1-3\times 10^{-5}\sqrt{g}t)^2$，

以$h=0$代入，解得 $t = \dfrac{10^5}{3\sqrt{g}} = 1.06\times 10^4$（s）。

三、广义积分

1. 判断下列广义积分的敛散性.

（1）$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$　　（2）$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$　　（3）$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$

解：（1）$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，

第一个积分显然收敛，对第二个积分令$x-\pi=t, dx=dt$，

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{\sin t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx = \int_0^{1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx + \int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$

$x\to 0^+$，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \backsim -\ln x$，$\int_0^{1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$收敛；

$x\to +\infty$，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} \backsim \frac{1}{2x^2}$，$+\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$收敛。

故$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$收敛。

（3）$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$

$x\to 1^-$，$\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2} \sim -\frac{1}{1-x}$，$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$发散，故$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$发散。

2. 讨论 $p$ 为何值时，广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛、条件收敛、发散。

解： 当 $p>1$ 时，对充分大的 $x$，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\dfrac{2}{x^p}$，由于积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{x^p}dx$ 收敛，可知积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，利用等式

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}。$$

这时积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛；积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$ 当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时收敛，当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 发散。

当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时，由于 $\int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx\ge\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$ 发散，所以积分 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx$ 发散。

综上所述，当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 条件收敛；当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 发散。

当 $p\le 0$ 时，因为有 $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx>\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{2}dx>\dfrac{\sqrt{2}}{16}\pi$，由 Cauchy 收敛原理，可知积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 发散。

3. 计算下列广义积分

（1） $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$ 。

解：取变换 $x=\tan t, dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{1+5\tan^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+4\sin^2 t}=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\arctan 2.$$

（2） $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解: $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x})$

$$=-\frac{1}{x}arctanx\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$。

解: $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}xd(\frac{-1}{1+e^x})$

$$=\frac{-x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=0+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt=\ln\frac{t}{1+t}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

（4） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

解: 取变换 $e^x=\sec t$，则 $x=\ln(\sec t)$, $e^x dx=\sec t\tan t dt$，

$$I=\int_{\arccos e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan t}dt=\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}=\arcsin e^{-1}.$$