

第 10 课次习题

练习1. 在相应点对下列函数展开Taylor级数(前四项即可),并指出收敛半径:

$$(1). \tan z, z_0 = \frac{\pi}{4}, \quad (2). e^{\frac{z}{z-1}}, z_0 = 0.$$

练习2. 求下列幂级数在复平面上和函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

练习3. 求值: $\ln^{(2n)}(1+iz^2)|_{z=0}$ ($n \geq 1$). (此处为 $2n$ 阶导数)

练习4. 设整函数 $f(z)$ 在复平面 \mathbb{C} 上处处满足 $|f(z)| \leq |z|^s$, 此处 s 为正常数但 $s \notin \mathbb{Z}$, 求证: $f(z) \equiv 0$. (提示: 证明Taylor展开式的所有系数为0)

练习5. 证明解析函数唯一性定理: 设函数 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 D 上解析, $a \notin \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D$, $a \in D$, 若

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad (2) f(z_n) = g(z_n), n \in \mathbb{N},$$

则 $f(z) \equiv g(z)$.