第八章　　多项式

一、　　整除性

1. 带余除法。具体多项式做带余除法，若余式等于 0，则除式整除被除式。

2. 设 $0 \neq f(x)$，$g(x) \in F[x]$，则 $f(x) \mid g(x)$ 在 F 中成立 $\Leftrightarrow$ $f(x) \mid g(x)$ 在 C 中成立

$\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ 的根都是 $g(x)=0$ 的根，且在 $f(x)$ 中的重数小于等于它在 $g(x)$ 中的重数 $\Leftrightarrow$

$f(x)=0$ 的根都是 $g(x)=0$ 的根，且 $(f(x), f'(x)) \mid (g(x), g'(x))$。

例 1：证明：$x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$

证明：$x^2+x+1=0$ 的两个根分别表示为 ω，ω^2，其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$，显然 ω，ω^2 都是

$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=0$ 的根，所以 $x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$。

3. $0 \neq f(x)$，$g(x) \in F[x]$，设 $f(x)$，$g(x)$ 有下面的分解

$f(x)=rp_1(x)^{n_1}p_2(x)^{n_2}\cdots p_l(x)^{n_l}$，$g(x)=sp_1(x)^{m_1}p_2(x)^{m_2}\cdots p_l(x)^{m_l}$，其中 $p_i(x)$ 为 F 上的不可约多项式，n_i，$m_i \geq 0$，则 $f(x) \mid g(x)$ $\Leftrightarrow n_i \leq m_i$，$1 \leq i \leq l$。

例 1：证明 $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow f(x)^2 \mid g(x)^2$.

证明：若 $g(x)=0$，结论显然成立。下面假设 $g(x) \neq 0$。设 $f(x)=rp_1(x)^{n_1}p_2(x)^{n_2}\cdots p_l(x)^{n_l}$，

$g(x)=sp_1(x)^{m_1}p_2(x)^{m_2}\cdots p_l(x)^{m_l}$，其中 $p_i(x)$ 为 F 上的不可约多项式，n_i，$m_i \geq 0$，则

$f(x)^2=rp_1(x)^{2n_1}p_2(x)^{2n_2}\cdots p_l(x)^{2n_l}$，$g(x)^2=sp_1(x)^{2m_1}p_2(x)^{2m_2}\cdots p_l(x)^{2m_l}$。因此

$f(x) \mid g \Leftrightarrow n_i \leq m_i$，$1 \leq i \leq l \Leftrightarrow 2n_i \leq 2m_i$，$1 \leq i \leq l \Leftrightarrow f(x)^2 \mid g(x)^2$.

4. 设 $f_1(x) \mid g(x)$，$f_2(x) \mid g(x)$，则 $[f_1(x), f_2(x)] \mid g(x)$.

例 1：证明 $(x^{m+1}+x^m+1)(x+1) \mid x^{m+3}-2x^{m+2}-5x^{m+1}-2x^m+x^2-3x+2$.

证明：做带余除法得到 $x^{m+1}+x^m+1 \mid x^{m+3}-2x^{m+2}-5x^{m+1}-2x^m+x^2-3x+2$，又 -1 为

$x^{m+3}-2x^{m+2}-5x^{m+1}-2x^m+x^2-3x+2=0$ 的根，所以

$x+1 \mid x^{m+3}-2x^{m+2}-5x^{m+1}-2x^m+x^2-3x+2$。

因为$[x^{m+1}+x^m+1,x+1]=(x^{m+1}+x^m+1)(x+1)$，所以

$(x^{m+1}+x^m+1)(x+1)\mid x^{m+3}-2x^{m+2}-5x^{m+1}-2x^m+x^2-3x+2$。

二、　　最大公因式

1．辗转相除

2．利用性质：$(f(x),g(x))=d(x)$ $\Leftrightarrow$ $d(x)$为$f(x)$，$g(x)$首 1 的公因式，且

$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

例 1：设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$为数域F上的多项式，且$h(x)$首 1，证明：

$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$.

证明：存在$u(x),v(x)$使得$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，因此

$(f(x),g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$，又显然$(f(x),g(x))h(x)$为$f(x)h(x)$和$g(x)h(x)$的公因式，故$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$.

例 2：设$f(x)$，$g(x)$，$d(x)$为数域F上的多项式，$f(x)$，$g(x)$不全为 0，且$d(x)$首 1，

证明$(f(x),g(x))=d(x)\Leftrightarrow(f(x^m),g(x^m))=d(x^m)$，其中$m$为一正整数。

证明：设$(f(x),g(x))=d(x)$，则$d(x)$为$f(x)$，$g(x)$首 1 的公因式，且

$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，于是$d(x^m)$为$f(x^m)$，$g(x^m)$首 1 的公因式，且

$d(x^m)=u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)$，因此$(f(x^m),g(x^m))=d(x^m)$。反之，假设

$(f(x^m),g(x^m))=d(x^m)$，若$(f(x),g(x))=h(x)\neq d(x)$，则由上面必要性的证明，

$(f(x^m),g(x^m))=h(x^m)\neq d(x)$，矛盾。所以$(f(x),g(x))=d(x)$。

3．设$f(x)$，$g(x)\in F[x]$都不为 0，且$f(x)$，$g(x)$有下面的分解

$f(x)=rp_1(x)^{n_1}p_2(x)^{n_2}\cdots p_l(x)^{n_l}$，$g(x)=sp_1(x)^{m_1}p_2(x)^{m_2}\cdots p_l(x)^{m_l}$，其中$p_i(x)$为$F$上的不可约多项式，$n_i$，$m_i\geq 0$，则$(f(x),g(x))=p_1(x)^{\min(n_1,m_1)}p_2(x)^{\min(n_2,m_2)}\cdots p_l(x)^{\min(n_l,m_l)}$，

且$[f(x),g(x)]=p_1(x)^{\max(n_1,m_1)}p_2(x)^{\max(n_2,m_2)}\cdots p_l(x)^{\max(n_l,m_l)}$。

例 1：证明$(f(x)^2,g(x)^2)=(f(x),g(x))^2$.

证明：若 $f(x)=0$ 或者 $g(x)=0$ 显然成立，所以可以假设 $f(x)$， $g(x)\in F[x]$ 都不为 0，且 $f(x)$， $g(x)$ 有下面的分解 $f(x)=rp_1(x)^{n_1}p_2(x)^{n_2}\cdots p_l(x)^{n_l}$，

$g(x)=sp_1(x)^{m_1}p_2(x)^{m_2}\cdots p_l(x)^{m_l}$，其中 $p_i(x)$ 为 F 上的不可约多项式， n_i， $m_i\geq 0$，于是 $f(x)^2=rp_1(x)^{2n_1}p_2(x)^{2n_2}\cdots p_l(x)^{2n_l}$ ， $g(x)^2=sp_1(x)^{2m_1}p_2(x)^{2m_2}\cdots p_l(x)^{2m_l}$ ，故

$(f(x)^2,g(x)^2)=p_1(x)^{2\min(n_1,m_1)}p_2(x)^{2\min(n_2,m_2)}\cdots p_l(x)^{2\min(n_l,m_l)}=(f(x),g(x))^2$.

例 2：求 $(x^2+x-2,x^{m+1}+2x^m)$.

解：因为 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$， $x^{m+1}+2x^m=x^m(x+2)$，所以

$(x^2+x-2,x^{m+1}+2x^m)=x+2$。

4. 利用互素的性质，若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),h(x))$。

例：求 $(x^2+x-2,x^{m+1}+2x^m)$.

解：因为 $x^{m+1}+2x^m=x^m(x+2)$，且 $(x^2+x-2,x^m)=1$，所以

$(x^2+x-2,x^{m+1}+2x^m)=(x^2+x-2,x+2)=x+2$。

三、 **互素**

1. 求最大公因式来判断是否互素.
2. 证明互素时常用反证法，假设 $(f(x),g(x))\neq 1$，则存在不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)|f(x)$， $p(x)|g(x)$.

例 1：设 m,n 为任意正整数，证明 $(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow(f(x)^m,g(x)^n)=1$。

证明：必要性：反证，设 $(f(x),g(x))=1$，但 $(f(x)^m,g(x)^n)\neq 1$，故有不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)|f(x)^m$， $p(x)|g(x)^n$，从而 $p(x)|f($， $p(x)|g(x)$，矛盾. 故 $(f(x)^m,g(x)^n)=1$。

充分性：设 $(f(x)^m,g(x)^n)=1$，则显然 $(f(x),g(x))=1$。

例 2：设 $f(x)$，$g(x)$ 都不等于 0，证明：$(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

证明：必要性：设 $(f(x),g(x))=1$，若 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))\neq 1$，则存在不可约多

项式 $p(x)$ 使得 $p(x)\mid f(x)g(x)$， $p(x)\mid f(x)+g(x)$，因此 $p(x)\mid f(x)$， $p(x)\mid g(x)$，矛盾。故 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

充分性：设 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$，若 $(f(x),g(x))\neq 1$，则存在不可约多

项式 $p(x)$ 使得 $p(x)\mid f(x)$， $p(x)\mid g(x)$，于是 $p(x)\mid f(x)g(x)$， $p(x)\mid f(x)+g(x)$，矛盾。故 $(f(x),g(x))=1$。

3. 设 $f(x)$， $g(x)\in F[x]$ 不全为 0，则 $(f(x),g(x))=1$ 在 F 中成立 $\Leftrightarrow$ $(f(x),g(x))=1$ 在 C 中成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 没有公共根。

例：证明 $(x^2+1, x^m+x^n-1)=1$.

证明：$x^2+1=0$ 的根为 $\pm i$，它们都不是 $x^m+x^n-1=0$ 的根，所以 $(x^2+1, x^m+x^n-1)=1$.

4. $(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

例：证明 $(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow (f(x^m),g(x^m))=1$。

证明：必要性：设 $(f(x),g(x))=1$，故存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，从而 $u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1$，因此 $(f(x^m),g(x^m))=1$。

充分性：设 $(f(x^m),g(x^m))=1$，若 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$，则 $d(x^m)\mid g(x^m)$，

$d(x^m)\mid f(x^m)$，矛盾。

四、 重根和重因式

定义：设 $f(x)\in F[x]$，且 deg $f(x)\geq 1$， $p(x)$ 为 F 上的不可约多项式，若 $p(x)^n\mid f(x)$，但 $p(x)^{n+1}\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 重不可约因式。

1. $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 重不可约因式 $\Leftrightarrow$ $p(x)\mid f(x)$，$p(x)\mid f'(x)$，$\cdots$，$p(x)\mid f^{(n-1)}(x)$，$p(x)\nmid f^{(n)}(x)$.

2. a 为 $f(x)=0$ 的 n 重根 $\Leftrightarrow$ $x-a$ 为 $f(x)$ 的 n 重不可约因式 $\Leftrightarrow$ $x-a\mid f(x)$，$x-a\mid f'(x)$，$\cdots$，$x-a\mid f^{(n-1)}(x)$，但 $x-a\nmid f^{(n)}(x)$.

3. $f(x)\in F[x]$ 无重因式 $\Leftrightarrow$ $(f(x),f'(x))=1$；$f(x)\in C[x]$ 无重根 $\Leftrightarrow$ $(f(x),f'(x))=1$

例：设 $f(x)$ 为 n 次多项式，且 $f(x)=0$ 的所有根都是实根，设 $a\in R$ 为 $f'(x)=0$ 的重根，证明 a 为 $f(x)=0$ 的根。

证明：设 a_i（$1\le i\le s$）为 $f(x)=0$ 的所有不同的根，重数为 n_i，于是 $f(x)=r\prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{n_i}$，

且 $f'(x)=r\prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{n_i-1}g(x)$，其中 $g(x)$ 为 $s-1$ 次多项式，且 a_i（$1\le i\le s$）不是 $g(x)=0$ 的根。由罗尔中值定理，$f'(x)=0$ 存在根 $b_i\in(a_i,a_{i+1})$，$1\le i\le s-1$，所以 $b_1,\cdots,b_{s-1}$ 刚好为 $g(x)=0$ 的所有根。故若 $a\in R$ 为 $f'(x)=0$ 的重根，则 a 为 $f(x)=0$ 的根。

五、　有理系数多项式的因式分解

设 $f(x)\in Q[x]$，$\deg f(x)\ge 1$，则 $f(x)=rq_1(x)^{n_1}q_2(x)^{n_2}\cdots q_l(x)^{n_l}$（标准因式分解）。因此给定具体的多项式 $f(x)\in Q[x]$ 要求其标准因式分解，就是要求出 $f(x)$ 的所有不可约因式 $q_i(x)$，及其重数 n_i。具体步骤如下：

（1）　先用**四** 2 的方法求出所有有理根 α_i（$1\le i\le k$）及重数 m_i（$1\le i\le k$），则 $f(x)=a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{m_i}g(x)$，其中 $g(x)$ 无有理根或无一次因式。

下面对 $g(x)$ 进行因式分解。

（2）　先求 $g(x)$ 所有不同的不可约因式，即分解 $\dfrac{g(x)}{(g(x),g'(x))}=q_1(x)\cdots q_r(x)$。这里的分解可以用待定系数法，比如 $\dfrac{g(x)}{(g(x),g'(x))}$ 为 3 次多项式一定不可约，为 4 次或 5 次的多项式，若能分解必有一个二次因式，设为 x^2+ax+b，由整除性可以求得 a,b 就可分解，否则不能分解。（配合使用艾森斯坦判别准则。）

（3）　再用**四** 1 的方法求不可约因式 $q_i(x)$ 在 $g(x)$ 中的重数 n_i。

（4）　最后得到 $f(x)$ 的标准因式分解 $f(x)=a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{n_i}\prod_{i=1}^{r}q_i(x)^{n_i}$。

例：求 $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$ 在 $Q[x]$ 中的标准因式分解。

解：先求 $f(x)=0$ 的有理根，有理根只能为± 1，代入检验得 1 为根，由于 $f'(1)=0$，$f''(1)=0$，$f'''(1)=0$，$f^{(4)}(1)\neq 0$，所以 1 为 4 重根，且 $f(x)=(x-1)^4(x^2+1)$，由于 x^2+1在Q上不可约，所以 $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$在$Q[x]$中的标准因式分解为 $f(x)=(x-1)^4(x^2+1)$。

例：求 $f(x)=x^7-x^6-x^5+3x^4+x^3-5x^2-x+3$在$Q[x]$中的标准因式分解。

请自己练习。