微积分 A（2）第十一次习题课参考答案（第十六周）

1. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$；　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$　　$a,b>0$.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x^{n^2}$　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{3}$

$|x|<\sqrt{3}$ 时收敛，收敛半径 $R=\sqrt{3}$. 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，通项不趋于零，级数发散. 故收敛域为 $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(t)^n$ 的收敛半径 $R=1$, 确由 Leibnize 法则，收敛域为 $t\in[-1,1)$.

解 $-1\le\frac{x}{x+1}<1$，关于 x 的收敛域为 $\left\{x\middle|x<-1,\text{或}\ge-\frac{1}{3}\right\}$.

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!^2}(x-1)^{2(n+1)}}{\frac{n!^2}{(2n)!^2}(x-1)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(x-1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{(x-1)^2}{4},$$

所以收敛半径为 $R=2$，收敛区间为 $(-1,3)$.

$|x-1|=2$ 时，$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}>1$，级数发散，所以收敛域与收敛区间相同.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$　　$a,b>0$.

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ 的收敛域为$[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ 的收敛域为$[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$. 所以当$a\geq b$ 时级数的收敛域为$[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$，当$a<b$ 时级数收敛域为$[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$. 收敛半径为$R=\frac{1}{\max(a,b)}$.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x^{n^2}$　　比值判别法，求得收敛域为[-1，1]

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$　根式判别法，求得收敛域为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

2.解答下列选择题

（1）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=2$收敛，则实参数$a$的取值范围是____________。

解: 显然$R=1$，且收敛域为　$a-1\leq x<a+1$，
级数在$x=2$收敛，则有　$a-1\leq 2<a+1$，因此应有$1<a\leq 3$。

（2）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在$x=-1$处条件收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　[　　]

（A）　绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不定。　　　[A]

（3）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为**1**，记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为r，则 [　　].

(A)　$r=1$.　　　(B)　$r\leq 1$.　　　(C)　$r\geq 1$.　　　(D)　r不能确定.

解：$a_n=\frac{1}{n!}-1$，$a_n+1=\frac{1}{n!}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径$r=+\infty$。　　　　（ C ）

（4）已知 ã ĝ nZ1 a_nx^n 的收敛域为**[J8，8]**，则 ã ĝ nZ2 $\frac{a_nx^n}{n(n\,\text{J}\,1)}$ 的收敛半径 R 为[　　].

（A）**R ñ 8**.（B）**R á 8**.　（C）**R Z 8**.（D）不能确定.

[C]　(收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

（5）设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点$x_1=-2$条件收敛, 则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$ 在点$x_1=\frac{1}{2}$的收敛情况是 [　　]　　　[　C　]

(A)绝对收敛. (B)条件收敛.　(C)发散.　(D)不能确定.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 收敛半径，已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $r\in(0,+\infty)$.

解：取定 x_0 满足 $0<x_0<r$．由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x_0{}^n$ 绝对收敛，所以存在 $M>0$，使得

$$\left|a_n x_0^n\right|\le M\ (\forall\ n).$$

任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，因为

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|a_n x_0^n\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|\le M\left|\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|,$$

且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 绝对收敛．因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，故其收敛半径为＋∞.

4. 写出下列函数在指定点的幂级数

（1） $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处；

解:

$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\right]'$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

收敛半径 $R=2$， $x=-1,3$ 时幂级数发散，故收敛域为 $(-1,3)$.

（2） $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处；

解：由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ (x\in(-\infty,+\infty))$，对函数 $f(x)=xe^x$ 进行间接展开

$$\begin{aligned}xe^x&=e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}]\\&=e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n\right]\\&=e\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right]\text{。}\end{aligned}$$

（3） $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处；

解： 注意到 $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}=\arctan(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x})$

$f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，则当 $|x|<1$ 时有

$$f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

（4） $f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$　　$x_0=0$；

（5） $\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$， $x_0=-1$；

（6） $f(x)=\sin^3 x, x_0=0$；

（7） $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$，　$g(x)=\dfrac{xf(x)}{1+x}$，求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

解： $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$， $g(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$，

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-(1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)'$$
$$=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$$

故
$$g(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}=x^2\left(1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots\right)$$

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$， 求 $f^{(100)}(0)$.

解： $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

$f^{(3n+1)}(0)=(-1)^n(3n+1)!$

$n=33$，

$f^{(100)}(0)=-100!$

6. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

解：设　$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$，收敛域为$(-1,1)$．在收敛域内，

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4},\qquad f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^4}dx=\cdots$$

7. 求$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$的和函数.

解：设　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\int_0^x\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(x)dx\right]dx=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(x)dx\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{1-x}$$

8. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和

解：部分和　$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_m=\frac{1}{4}.$$

解法二：记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

$$S'(x)=\int_0^x-\ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$$S(x)=\int_0^x[(1-x)\ln(1-x)+x]dx=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}$$

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$$

9. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数。

解：当 $x=0$ 时幂级数收敛，

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}(\frac{x^2}{3})^n$

由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^2+2n+2}{(n+2)}}{\dfrac{n^2+2n}{(n+1)}}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2n}{(n+1)}$ 发散，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}t^n$ 的收敛域为

$(-1,1)$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}$ 收敛域为 $\frac{x^2}{3}\in(-1,1)$， $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ …………………3 分

当 $t=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}t^n=0$

当 $t\neq 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}t^n$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n=(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+1})'=(\frac{1}{1-t}-1-t)'=\frac{1}{(1-t)^2}-1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}t^n=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}t^{n+1}=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t u^n du=\frac{1}{t}\int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}u^n)du=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{u}{1-u}du=-1-\frac{\ln(1-t)}{t}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}t^n=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{\ln(1-t)}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)}(\frac{x^2}{3})^n$$

$$=\begin{cases}\dfrac{9x}{(3-x^2)^2}+\dfrac{3\ln(3-x^2)-3\ln 3}{x}, & x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$$

10（自己练习）．（1）设 $f_n(x)$ 满足 $f_n{}'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和。

解：$f_n(x)=e^x\dfrac{x^n}{n}$， $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=e^x\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

答案：3

（3）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为[ ]

(A) $2e^{-1}$。 (B) 0。 (C) e^{-1} (D) $e^{-1}-1$。 [B]

11. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-R,R)$，那么当 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛时，不论 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 是否收敛，均有 $\int_0^R S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

二、傅立叶级数

1．傅立叶展开

(1) 在 $(-\frac{®}{2},\frac{®}{2})$ 展开 $f(x)=x\cos x$ 为 fourier 级数；

解：由于 f(x)为奇函数，所以 Fourier 级数展开式中只含有正弦项

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\sin(2nx)$$

（2）将 $f(x)=x$ 在 $[0,®]$ 上展开为余弦级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和

解：展开为余弦级数，需将 $f(x)=x$ 作偶延拓.

$$a_n=\frac{2}{®}\int_0^{®}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2®}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2®}, & n=2k+1\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$$

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x,x\in[0,2\pi].$$

令 $x=0$，得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

(3) 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 展开为余弦级数、正弦级数。

解：展开为余弦级数，需将 $f(x)$ 作偶延拓，则 $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x$.

展开为正弦级数，需将 $f(x)$ 作奇延拓，则 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$.

2. 将 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展开为 Fourier 级数.

解 由于函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数，且

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \pi-x, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi],\end{cases}$$

所以

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & n=2k,\\ \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1,\end{cases}$$

从而

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x，\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,且 $f(x)=e^x$，$x\in[0,2]$.若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数,试求 $S(0),S(2),S(3)$.

解 根据狄里克雷收敛定理，$S(x)$ 的周期为 2，且

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+e^2), & x=0,\\ e^x, & 0<x<2,\\ \frac{1}{2}(1+e^2), & x=2,\end{cases}$$

所以 $S(0)=S(2)=\dfrac{1}{2}(1+e^2)$，$S(3)=S(1)=e$。

4. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在区间 $[-\pi,\pi]$ 可积，$a_n\ (n=0,1,\cdots)$，$b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求函数 $f(x+c)$（c 是常数）的 Fourier 系数。

解：设 $f(x+c)$ 的 Fourier 系数分别为 a'_n，b'_n，有

$$b'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+c)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+c}^{\pi+c} f(x)\sin n(x-c)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(\sin(nx)\cos(nc)-\cos(nx)\sin(nc)\big)dx=\cos(nc)b_n-\sin(nc)a_n$$

同理 $a'_{\mathrm{n}}=\cos(nc)a_n+\sin(nc)b_n$ (n>0) 当 n=0 时，$a'_0=a_0$。

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数

（1）如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

（2）如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么 $a_{2n}=b_{2n}=0$.

证明：（1）

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

又

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\overset{x=t+\pi}{=}\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt=\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos nt\cos n\pi dt$$

$$=(-1)^n\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos ntdt$$

所以 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}[1+(-1)^n]f(x)\cos nxdx$，因此 $a_{2n-1}=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

又

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx\overset{x=t+\pi}{=}\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\sin n(t+\pi)dt=\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin nt\cos n\pi dt$$

$$=(-1)^n\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin ntdt$$

所以 $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}[1+(-1)^n]f(x)\sin nxdx$，因此 $b_{2n-1}=0$.

（2）

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

又

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \overset{x=t+\pi}{=} \int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt = -\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos nt\cos n\pi dt$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos ntdt$$

所以$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\cos nxdx$，因此$a_{2n}=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

又

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \overset{x=t+\pi}{=} \int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\sin n(t+\pi)dt = -\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin nt\cos n\pi dt$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin ntdt$$

所以$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\sin nxdx$，因此$b_{2n}=0$.

6. 设$f(x)$周期为2π，$f(x)\in R[-\pi,\pi]$，其 Fourier 系数为a_n,b_n

求证：（1）.若$f(x)$在$(0,2\pi)$内递增（减），则$b_n\le 0(\ge 0)$

（2）若$\exists L>0,\forall x,y\in\mathbb{R},|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$，则$|a_n|\le\dfrac{2L}{n},|b_n|\le\dfrac{2L}{n},n\ge 1$.

证明：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}} f(x)\sin nxdx+\int_{\frac{\pi(2k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} f(x)\sin nxdx\right]$$

$$\overset{t=x-\frac{\pi}{n}}{=}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}} f(x)\sin nxdx-\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}} f(t+\frac{\pi}{n})\sin ntdt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nxdx\le 0$$

（2）由（1）有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nxdx$$

因此

$$|b_n|\le\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}} M\frac{\pi}{n}|\sin nx|dx=\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{\pi(2k-1)}{n}}|\sin nx|dx=\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}=\frac{2M}{n^2}$$

类似可以证明$|a_n|\le\dfrac{2L}{n},n\ge 1$

7. 设 $f(x)\in C(0,\frac{®}{2})$,若使 $f(x)$ 展开成的 Fourier 级数的形式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\ x\in(0,\frac{®}{2}),$$

应对 $f(x)$ 在 $(-®,®)$ 内作什么样的延拓.

解：因为 $f(x)$ 展开成的 Fourier 级数的形式为余弦级数，所以要对 $f(x)$ 在 $(-®,®)$ 内作偶延拓。又因为

$$0=\int_0^{®}F(x)\cos 2nxdx=\int_0^{\frac{®}{2}}F(x)\cos 2nxdx+\int_{\frac{®}{2}}^{®}F(x)\cos 2nxdx$$

$$=\int_0^{\frac{®}{2}}[f(x)+F(®-x)]\cos 2nxdx,$$

所以当 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\frac{®}{2}], \\ -f(®-x), & x\in(\frac{®}{2},®) \end{cases}$ 时，便有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\ x\in(0,\frac{®}{2}).$$

8. 求函数 $f(x)=x,g(x)=x^2,h(x)=x^3$ 在 $[-®,®]$ 的 Fourier 级数。

解： $f(x)=x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

由逐项积分公式，得到

$$\int_0^x tdt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x\sin ntdt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2}(1-\cos nx)=\frac{®^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

所以

$$g(x)=x^2=\frac{®^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

类似的，$\frac{1}{3}x^3=\frac{®^2}{3}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$，又 $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

所以 $h(x)=x^3\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n-1}}{n}(\frac{®^2}{3}-\frac{2}{n^2})\sin nx$.

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$ 的 Fourier 系数 A_n, B_n．并证明 Paseval 等式 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.(假设积分可交换顺序).

解 因为

$$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt=F(x),$$

且

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)f(u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u)du=F(x),$$

所以 $F(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数。因此

$$B_n=0,\ n=1,2,3,\cdots ,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt\cos nx\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nxdx\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)[\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt]du\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cos nt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nudu+f(t)\sin nt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nudu\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n f(t)\cos nt+b_n f(t)\sin nt\right)dt=a_n^2+b_n^2,\ n=1,2,3,\cdots。$$

$A_0=a_0^2$。

由于

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,$$

令 $x=0$，便得 Paseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$