第六章 线性变换

一、 线性变换的核与值域

设$\sigma \in L(V)$在V的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为A，即：$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$。

因为线性空间的同构$\varphi: V \to F^n(\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x \mapsto x)$诱导了下面子空间的同构，

$\varphi: \mathrm{Im}\sigma = L(\sigma\alpha_1,\cdots,\sigma\alpha_n) \to R(A)=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ ；

$\varphi: \mathrm{Ker}\sigma = \{\alpha \in V \mid \sigma\alpha=\theta\} \to N(A)=\{x \in F^n \mid Ax=0\}$，所以有

1. 设 $A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，且 $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\cdots,\gamma_{i_r}$ 为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的极大线性无关组，则 $\sigma(\alpha_{i_1}),\sigma(\alpha_{i_2}),\cdots,\sigma(\alpha_{i_r})$为$\mathrm{Im}\sigma$的基。
2. 设$Ax=0$的一个基础解系为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，于是我们可以得到Ker（$\sigma$）的基为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\eta_1,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\eta_2,\cdots,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\eta_{n-r}$。

例：设$\sigma \in L(V)$在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求$\mathrm{Im}\sigma$，$\mathrm{Ker}\sigma$，$\mathrm{Im}\sigma$+$\mathrm{Ker}\sigma$的基。

解：$A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$，故$\gamma_1,\gamma_3$为$A$的列向量组的极大无关组，于是$\beta_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\gamma_1$，$\beta_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\gamma_3$为$\mathrm{Im}\sigma$的基；

取$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，求得$Ax=0$的基础解系$\eta_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，所以Ker（$\sigma$）的基为$\beta_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\eta_1$，$\beta_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\eta_2$。

因为$\mathrm{Im}\sigma$+$\mathrm{Ker}\sigma$=$L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组为$\mathrm{Im}\sigma$+$\mathrm{Ker}\sigma$的基。$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标分别为$\gamma_1,\gamma_3,\eta_1,\eta_2$。

$$\left(\gamma_1,\gamma_3,\eta_1,\eta_2\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ & 2 & 7 & 0\\ & & 2 & 1\\ & & & -\dfrac{9}{2}\end{pmatrix},$$

所以$\gamma_1,\gamma_3,\eta_1,\eta_2$线性无关，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$为$\mathrm{Im}\sigma+\mathrm{Ker}\sigma$的基。

二、 不变子空间

设V为数域F上的线性空间，σ为V上的线性变换。

1. 求包含向量$\alpha\neq\theta$的最小不变子空间。

显然存在r使得$\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{r-1}(\alpha)$线性无关，但$\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{r-1}(\alpha),\sigma^{r}(\alpha)$线性相关，

则子空间$W=L(\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{r-1}(\alpha))$即为所求。

2. 已知σ在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$,则$\sigma$的所有不变子空间为$\{\theta\}$，

   $L(\alpha_1)$，$L(\alpha_1,\alpha_2)$，$\cdots$，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。（每个维数一个不变子空间）

3. 设σ在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中$\lambda_i\neq\lambda_j$（$i\neq j$），则$\sigma$的所有不变子空间为$\{\theta\}$，$L(\alpha_i)(1\le i\le n)$，$L(\alpha_i)\oplus L(\alpha_j)(i\neq j)$，

   $L(\alpha_i)\oplus L(\alpha_j)\oplus L(\alpha_k)\ (i,j,k$互不相同$)$，$\cdots$，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

三、 特征值和特征向量

1. 由定义$Ax=\lambda x$，$x\neq 0$，则λ为A的特征值，x为对应的特征向量。

例 1:设方阵A的各行元素之和为定数a,则a为A的一个特征值。因为$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$。

例 2：设方阵A的各列元素之和为定数a，则a为A的一个特征值。因为$A^T\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，所以$a$为$A^T$的一个特征值，又$A$和$A^T$有相同的特征值，所以$a$为

A 的一个特征值.

• 设 λ 为 A 的特征值，则 $g(\lambda)$ 为 $g(A)$ 的特征值，其中 $g(x)$ 为多项式。（存在特征向量 ξ 使得 $A\xi=\lambda\xi$，容易得到 $g(A)\xi=g(\lambda)\xi$。）

• 设 $g(x)$ 为多项式满足 $g(A)$=0，则 A 的特征值都是 $g(x)$=0 的根。

例：设 $A\in M_n$ 满足 $A^2=A$，且 $0<r(A)=r<n$，求 A 的特征值.

解：由于 $A^2=A$，x^2-x 为 A 的化零多项式，所以 A 的特征值为 x^2-x 的根，故 A 的特征值为 0；或 1，或 0, 1。若 A 的特征值为 0；或 1，由于 $A(A-I)=0$，则 $A=0$，或 $A=I$，这与 $0<r(A)=r<n$ 矛盾，所以 A 的特征值为 0, 1。

2. 求 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的根，及求解 $(\lambda I-A)x=0$。

例：设 $A,B\in M_n(F)$，证明：（1）AB 和 BA 有相同的特征值；（2）A 和 A^T 有相同的特征值.

证明：（1）$f_{AB}(\lambda)=|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|=f_{BA}(\lambda)$；（2）$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=|\lambda I-A^T|=f_{A^T}(\lambda)$

3. 应用 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的所有特征值（包括重的）.

例：设 $A\in M_n(F)$，$|A|=0$，则 0 为 A 的特征值。

例：设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&2&a\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 a,b 的值。

解：（1）由 $tr(A)=tr(B)$，得到 $a+2=1+b$（2）由 $|A|=|B|$，得到 $-8=-2b$，即 $b=4$，求得 a=3。

4. 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交。

例：设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3，A 的属于 1, 2 的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^T$。

（1）求 A 的属于 3 的特征向量；

（2）求 A.

解：设 A 的属于 3 的特征向量为 $\alpha_3=(a_1,a_2,a_3)^T$，故 $(\alpha_1,\alpha_3)=0$，$(\alpha_2,\alpha_3)=0$，于是得

到$\begin{cases}-a_1-a_2+a_3=0\\ a_1-2a_2-a_3=0\end{cases}$，解得$\alpha_3=k(1,0,1)^T$（$k\neq 0$）.

（2）记$P=(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|})$，则$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$，所以$A=P\mathrm{diag}(1,2,3)P^T$。

四、 矩阵的相似对角化

1. 一般n阶方阵A可对角化的判定，及求可逆阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵.

设A的所有不同的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，代数重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_s$，几何重数分别为$m_1,m_2,\cdots,m_s$。

- **A可对角化当且仅当$r(A-\lambda_i I)=n-n_i$，$1\le i\le s$；或者$m_i=n_i$，$1\le i\le s$；或者$\sum_{i=1}^{s}m_i=n$。**
- **A有n个不同的特征值A可以相似对角化。**

例1：设$A\in M_n$满足$r(A)=1$，$\mathrm{tr}(A)\neq 0$，则A可以相似对角化。

证明：由于$r(A)=1$，故特征值0的几何重数为$n-1$，其代数重数等于$n-1$或n，若特征值0的代数重数等于n，则A的所有特征值都为0，故$\mathrm{tr}(A)=0$，矛盾。所以A的0特征值的代数重数为$n-1$，且有一个非零的特征值$\mathrm{tr}(A)$，其代数重数等于几何重数都等于1。所以A的每一个特征值的代数重数都等于几何重数，从而可以相似对角化。

例2：设$A\in M_n$满足$A^2+A-2I=0$，则A可以相似对角化。

证明：由于$f(x)=x^2+x-2$为A的化零多项式，所以A的特征值值为$f(x)$的根，从而A的特征值为-2；或1；或-2，1。若A的特征值为-2，或1，由已知$A^2+A-2I=(A+2I)(A-I)=0$，得到$A=-2I$或者$A=I$，A可以相似对角化；可设A的特征值为-2，1，因为$A^2+A-2I=(A+2I)(A-I)=0$，得到$r(A+2I)+r(A-I)=n$，令特征值$-2,1$的几何重数分别为m_1,m_2，则$m_1=n-r(A+2I)$，$m_2=n-r(A-I)$，则$m_1+m_2=n$，所以A可以相似对角化。

2. 已知实对称矩阵A，求正交阵Q使得$Q^{-1}AQ$为对角阵。

五、 设$A\in M_m$，求A^n

1. 若 A 可以相似对角化，则可以求得可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，所以

$A^n=P\mathrm{diag}(\lambda_1{}^n,\cdots,\lambda_n{}^n)P^{-1}$。

2. 若 A 不可以相似对角化，用归纳法求 A^n.

练习题

1. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为V 的基，σ 在V 的上述基下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -3 & 1\\ 1 & -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$，求

（1）$\mathrm{Im}\sigma$， $\ker\sigma$ 的基；

（2）求 $\mathrm{Im}\sigma+\ker\sigma$， $\mathrm{Im}\sigma\bigcap\ker\sigma$ 的基；

（3）求包含 ε_3 的最小的 σ 不变的子空间。

2. 设 σ 在V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,

（1）求 σ 的全部特征值和特征向量；

（2）求一正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，或$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，求 A^n.

4. 已知三阶对称阵 A 的三个特征值分别为 2, 8, 5，相应的 2，8 的特征向量为$(2,1,0)^T$，$(-1,2,1)^T$，求 A 。

5. 设 $A,B\in M_n$，$r(A)+r(B)<n$，求证 A,B 有公共的特征向量。

6. 设 A,B 为 n 阶实对称阵，证明：存在正交阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=B$ 当且仅当 A,B 有相同的特征多项式。

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$，证明 A 可以相似对角化。