第一次习题课（一元多项式）

一、判断下列结论是否正确，并说明理由。

设$0\neq f(x),\ g(x),\ h(x)\in F[x]$ ，K为F的扩域.

(1) $f(x)\mid g(x)$在$F[x]$中成立当且仅当$f(x)\mid g(x)$在$K[x]$中成立.

(2) 在$F[x]$和$K[x]$中最大公因式$(f(x),g(x))$相同。

(3) 在$F[x]$和$K[x]$中$f(x)$、$g(x)$的最大公因式相同。

(4) 若$f(x)$、$g(x)$在C上有公共根，则在$F[x]$上$(f(x),g(x))\neq 1$.

(5) $f(x)$在C上有重根当且仅当在$F[x]$上$(f(x),f'(x))\neq 1$。

(6) 设$f(x)$为F上的不可约多项式，且$f(x),g(x)$有公共的复根，则$f(x)\mid g(x)$.

(7) $f(x),g(x)$的公共根恰好为$(f(x),g(x))$的根。

(8) $\alpha\in C$为$f(x)$的2重根当且仅当$f'(\alpha)=0,f''(\alpha)=0$，但$f'''(\alpha)\neq 0$.

(9) $(f(x),g(x)h(x))=1$ 当且仅当$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$.

(10) $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))(f(x),h(x))$.

(11) 若$x-1\mid f(x^n)$, 则$x^n-1\mid f(x^n)$.

(12) 若$x+1\mid f(x^n)$, 则$x^n+1\mid f(x^n)$.

二、设a,b,c 是三个不同的数，用$x-a$，$x-b$，$x-c$ 除一元多项式$f(x)$ 的余式依次为$r;s;t$，试求用$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 除$f(x)$ 的余式.

三、求$f(x)=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-2x-1$的公共根。

四、求$f(x)=x^5-3x^4+2x^3-x^2-3x+4$在$Q$上的标准分解式。

五、设$0\neq f(x),\ q(x)\in F[x]$，其中$q(x)$为$F$上首1的不可约多项式，证明：$q(x)$为$f(x)$的$n$重不可约因式的充要条件是$q(x)\mid f(x),q(x)\mid f'(x),...,q(x)\mid f^{(n-1)}(x)$，但$q(x)\nmid f^{(n)}(x)$.

六、证明：(1) $f(x)\mid g(x)$ 当且仅当$f(x)^n\mid g(x)^n$ (n为正整数).

(2) $(f(x),g(x))=1$当且仅当$(f(x)^m,g(x)^n)=1$（m,n为正整数）。