微积分 A（2）第十次习题课题目（第十五周）

1.　求下列级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{200}}x^n$；　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{nx}$.

2．考查下列函数项级数在指定区间上是否一致收敛，并给出证明：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$，$|x|<a$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin x}$.

（4）$\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n}), x\in[1,+\infty)$　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$x\in(0,+\infty)$

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$　　（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$，$x\in[-1,0]$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$，$x\in[0,1]$　　（9）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ $x\in[0,+\infty)$ 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

3．设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数．$g_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$．求证：

（1）在任意闭区间 $[a,b]$ 上，$\{g_n(x)\}$ 一致收敛于 $f'(x)$；

（2）$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx=f(b)-f(a)$.

4．设函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n® x^2$.

（1）证明：当 $0<L<3$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n® x^2$ 在 $(-L,L)$ 内一致收敛;

（2）求 $\lim_{x\to1}S(x)$.

5．设 $u_n(x)\in C[a,b],n\in N$，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，证明：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a),\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 均收敛；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

（3）考察函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}, x\in(0,+\infty)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x\in(1,+\infty)$ 的一致收敛性

6．设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^{n}$.

（1）确定 $f(x)$ 的定义域 D；（2）证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^{n}$ 在 D 上不一致收敛；

（3）证明 $f(x)\in C(D)$.

7．证明：函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^{2}e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义且有界.

8．若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$，而每一个 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致有界.

9.求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^{2}}$ 的收敛域,并证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内可导 。

10.　（1）证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 是 $(0,+\infty)$ 上连续，进一步证明在 $(0,+\infty)$ 上可微.

（2）证明：Riemann ¸ 函数 ¸$(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续，并在这个区间内有各阶连续导数.