第 6 章总复习题参考答案

1. 略。

2. 判断下列积分的敛散性

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ （2） $\int_0^{\pi/2}\cos x\ln(\tan x)dx$

解：（1） $x\to 0^+$时$,\frac{\sin^2 x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-2}},\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^p}dt$收敛$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{x^{p-2}}dt$收敛$\Leftrightarrow p<3.$

$p>1$时$,\frac{\sin^2 x}{x^p}\le\frac{1}{x^p},\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dt$收敛.

$0<p\le 1$时$,\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx,$ 由 Dirichlet 判别法，

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$ 收敛，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx$ 发散，故 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 发散。

$p<0$时$,\int_0^{2n\pi+3\pi/4}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{1}{2}dx=\frac{n\pi}{4}\to+\infty,$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 发散。

综上，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$（绝对）收敛$\Leftrightarrow 1<p<3.$

（2） $\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x\ln(\tan x)=\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x\ln(\sin x)-\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x\ln(\cos x)=0-\lim\limits_{t\to 0}t\ln t=0.$ 因此 $\frac{\pi}{2}$ 不是瑕点，0 是唯一瑕点。而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|\cos x\ln(\tan x)\right|}{-\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\tan x)}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x/\tan x}{1/x}=1,$$

$$\int_0^{\pi/4}\ln xdx=x\ln x\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}(\ln\frac{\pi}{4}-1),\text{收敛},$$

因此 $\int_0^{\pi/4}\cos x\ln(\tan x)dx$ 绝对收敛，$\int_0^{\pi/2}\cos x\ln(\tan x)dx$ 绝对收敛。

3. 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$ 的绝对收敛性与条件收敛性

解： $x\to+\infty$时$,\sin\frac{1}{x}$单调趋于$0,\left|\int_1^x\sin tdt\right|\le 2,$ 由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$ 收

敛。另一方面，$\left(\sin t\right)'' = -\sin t \le 0, \forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$. $\sin t$在$(0, \frac{\pi}{2})$上凸, 因而有

$$\sin t = \sin\left((1-\frac{2t}{\pi})\cdot 0 + \frac{2t}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \ge (1-\frac{2t}{\pi})\sin 0 + \frac{2t}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2t}{\pi}, \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

于是，$\int_1^{2n\pi+5\pi/6}\left|\sin x \sin\frac{1}{x}\right| dx \ge \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/6}^{2k\pi+5\pi/6}\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right| dx$

$$\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/6}^{2k\pi+5\pi/6}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}dx \ge \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/6}^{2k\pi+5\pi/6}\frac{1}{\pi x}dx$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi+\pi/6}^{2k\pi+5\pi/6}\frac{1}{(2k+1)\pi^2}dx = \frac{2}{3\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} \quad \to +\infty, n \to +\infty \text{时}.$$

即 $\int_1^{+\infty}\left|\sin x \sin\frac{1}{x}\right| dx$ 发散. 综上，$\int_1^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$ 条件收敛。

4. 设广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 均收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

证明： $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(a) + \int_a^x f'(t)dt\right)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b.$

若 $b \ne 0,$ 不妨设 $b > 0,$ 则 $\exists M > a, s.t. \left|f(x) - b\right| < \frac{b}{2}, \ \forall x \ge M.$ 于是，

$$\left|\int_n^{n+1} f(x)dx\right| = \int_n^{n+1} f(x)dx \ge \frac{b}{2}, \quad \forall n > M.$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，与已知矛盾。故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

证明： 反证。若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ne 0,$ 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n > n, \ s.t. \left|f(x_n)\right| > \varepsilon_0.$ 不妨设 $f(x_n) > \varepsilon_0$ $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续，则对此 ε_0, $\exists \delta > 0, s.t.$

$$\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon_0 / 2, \quad \forall x \ge a, y \ge a, \left|x - y\right| < \delta.$$

特别地，$$\left|f(x) - f(x_n)\right| < \varepsilon_0 / 2, \quad \forall x \in (x_n, x_n + \delta), \forall n.$$

$$f(x) \ge f(x_n) - \varepsilon_0 / 2 > \varepsilon_0 / 2, \quad \forall x \in (x_n, x_n + \delta), \forall n.$$

于是，$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx \ge \int_{x_n}^{x_n+\delta}\frac{\varepsilon_0}{2}dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta, \quad \forall n.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, 由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，与已知矛盾。

6. 利用广义积分收敛的 Cauchy 收敛准则证明：$f(x)$ 单调，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

$$f(x)=o(1/x)(x\to+\infty).$$

证明： $f(x)$ 单调，则 $\left|\int_x^{2x} f(t)dt\right|\ge\min\{x|f(x)|,x|f(2x)|\},\ \forall x\ge a.$ 因此，

$$x|f(x)|\le 2\left|\int_x^{2x} f(t)dt\right|,\ \forall x\ge a.$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则，$\forall\varepsilon>0,\exists M>0, s.t.$

$$\left|\int_x^{2x} f(t)dt\right|<\varepsilon,\forall x>M.$$

继而有，$x|f(x)|\le 2\varepsilon,\ \forall x>M.$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0,$ 也即

$$f(x)=o(1/x)(x\to+\infty).$$

7. 混合型广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ 的计算过程中，能否利用分部积分公式？通过本题，可以得出计算混合型广义积分时，使用分部积分公式需要满足什么条件？

解： 若将混合型广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ 按分部积分如下计算，

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ln x d\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx,$$

由于 $-\dfrac{\ln x}{2(1+x^2)}\bigg|_0^{+\infty}$ 不收敛，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x^2)}dx$ 也不收敛，此计算方法不可行。

$\int_0^{+\infty}u(x)dv(x)=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b u(x)dv(x)=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}u(x)v(x)\Big|_a^b-\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b v(x)du(x).$ 因此，计算混合型广义积分时，使用分部积分公式

$$\int_0^{+\infty}u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}v(x)du(x)$$

的条件是 $u(x)v(x)\Big|_0^{+\infty}$ 与 $\int_0^{+\infty}v(x)du(x)$ 均存在。

8. 略。

9. 见课件。

10. 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内**单调**，在 $x=0$ 的邻域中无界，证明：$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛时，有

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).$$

对于一般的 $f(x)$，瑕积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 是否可以看成相应 Riemann 和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限？

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内单调递减，则

$$\int_{1/n}^{2/n} f(x)dx \le \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \le 2\int_{1/2n}^{1/n} f(x)dx.$$

$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{2/n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{1/2n}^{1/n} f(x)dx = 0.$$

由夹挤原理，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) = 0.$$

又
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} f(\frac{i}{n}) - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n} f(\frac{i+1}{n})$$

$$\le \int_{1/n}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n} f(x)dx \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} f(\frac{i}{n}) - \frac{1}{n} f(1),$$

即
$$\frac{1}{n} f(1) + \int_{1/n}^{1} f(x)dx \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} f(\frac{i}{n}) \le \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + \int_{1/n}^{1} f(x)dx,$$

令 $n\to+\infty$, 由夹挤原理得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} f(\frac{i}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

对于一般的 $f(x)$，瑕积分 $\int_0^1 f(x)dx$ **不能**可以看成相应 Riemann 和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限。例如，取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 一方面，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$. 另一方面，$n$ 等分 $[0,1]$ 取 $\xi_1 = \frac{1}{9n^2}, \xi_i = \frac{i}{n}, i=2,3,\cdots,n,$ 则 Riemann 和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \frac{1}{n} f(\xi_1) = 3,$ 令 $n\to+\infty$, 得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 3 > 2 = \int_0^1 f(x)dx.$$