代数与几何讨论课（六）（欧式空间，线性变换，特征值与特征向量）答案

一、判断下列结论是否正确,并说明理由:

(1) 设σ是n维线性空间V上的线性变换，则σ在V的所有基下的矩阵刚好为一个相似等价类。

答：正确。

(2) 设A 是n阶方阵, 若 $A^2=A$, 则A 的特征值只能是 1 或 0.

答：正确。设λ为A 的特征值，X为对应的特征向量，则$AX=\lambda X$。由于$A^2=A$，两边右乘X等到$\lambda^2X=\lambda X$，即$(\lambda^2-\lambda)X=0$，因此$\lambda^2-\lambda=0$。故$\lambda=1$，或$\lambda=0$

(3) **设X,Y是n阶方阵A的属于不同特征值的特征向量, 则必有 $X^TY=0$.**

答：不对。例如$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$的两个特征值分别为$1,2$，$X=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$为对应的特征向量，$X^TY\neq 0$.

(4) 设A是n阶方阵，λ_0是A的一个特征值，X_1,X_2是$(\lambda_0I-A)X=0$的基础解系, 则A的属于特征值λ_0的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$, 其中k_1,k_2是两个任意常数.

答：不对。当k_1,k_2都等于 0 时，$k_1X_1+k_2X_2=0$不是特征向量。当k_1,k_2不全为 0 时，$k_1X_1+k_2X_2$为特征向量。

(5) 设A 是 3 阶方阵，A的特征值为 0, 0, 1，X_1,X_2是$AX=0$的基础解系，X_3是$AX=X$的非零解, 则A的属于特征值1的全部特征向量为 $k_1X_1+k_2X_2+X_3$, 其中 k_1,k_2是不全为零的任意常数.

答：不正确。因为只要k_1,k_2不全为零，则$A(k_1X_1+k_2X_2+X_3)=X_3\neq k_1X_1+k_2X_2+X_3$。

(6) 设X是n阶方阵A的特征向量，P是n阶可逆方阵, 则 $P^{-1}X$是$P^{-1}AP$的特征向量.

答：正确。设$AX=\mu X$，则$(P^{-1}AP)(P^{-1}X)=\mu P^{-1}X$，且$P^{-1}X\neq 0$。

(7) 设X是n阶方阵A的特征向量, 若A可逆, 则X是A^{-1}的特征向量.

答：正确。设$AX=\lambda X$，则$A^{-1}X=\dfrac{1}{\lambda}X$。（若$A$可逆，则$A$的特征非零。）

(8) 设A是n阶方阵, 若A的特征值都是 1, 则 A与I 相似.

答：不对。如$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$特征值都为1，但$A$不能与$I$ 相似，与I相似的矩阵就I本身。

(9) 设σ是n维线性空间V上的线性变换，则$V=\mathrm{Im}(\sigma)\oplus\ker(\sigma)$.

答：不对。$\mathrm{Im}(\sigma)$ 与 $\ker(\sigma)$ 的交不一定只含零向量。

(10) 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，W 为 σ 的不变子空间，$\sigma|_W$ 的特征值不一定是 σ 的特征值。

答：不对。设 μ 为 $\sigma|_W$ 的特征值，α 为对应的特征向量，则 $\sigma|_W\,\alpha=\mu\alpha$。但是 $\sigma|_W\,\alpha=\sigma\alpha$，所以 $\sigma\alpha=\mu\alpha$，即 μ 为 σ 的特征值。

（11）设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，λ 为 σ 的特征值，则 $V_\lambda=Ker(\sigma-\lambda\varepsilon)$.

答：对。

（12）若 $A\sim B$（相似），则 A 与 B 等价（相抵）。

答：对。

（13）若 A,B 的特征值分别为 λ,μ 则：

（A）A 与 A^T 有相同的特征值与特征向量；

（B）$A+A^T$ 及 AA^T 的特征值分别为 2λ 及 λ^2；

（C）$A+B$ 及 AB 的特征值分别为 $\lambda+\mu$ 及 $\lambda\mu$；

(D) 以上结论都不正确.

答：D。

二、设 F 为一个数域，在 F^3 上定义线性变换 $\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\-x_1-2x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$，分别求 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 和 $\ker(\sigma)$ 的基.

解：先求 σ 在自然基下的矩阵，令 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\sigma(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$。

令 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$。

由于 $\mathrm{Im}(\sigma)=R(A)$，则 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的基为 $(1,-1,0)^T,(1,0,1)^T$。

由于 $\ker(\sigma)=N(A)$，则 $\ker(\sigma)$ 的基为 $(-2,1,1)^T$。

三、设 V 为数域 F 上的 3 维线性空间，σ 为 V 上的线性变换，σ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&-1&4\\2&4&-1\end{pmatrix}.$$

（1）求σ在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的矩阵.

（2）求σ的全部特征值和特征向量.

（3）设$\alpha\in V$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,1,1)^T$，求$\alpha$在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的坐标。

解：（1）基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$的过渡矩阵为

$P=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&3&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，则$\sigma$在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的矩阵为

$P^{-1}AP$，详细计算略。

（2）σ的全部特征值即A的全部特征值。由于$|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-6)$，所以$A$的全部特征值为

$3,3,-6$。

当$\lambda=3$时，求解$(3I-A)x=0$得到基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，所以$A$属于特征 3 的所有特征向量为

$k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中k_1,k_2不全为零。所以σ属于特征 3 的所有特征向量为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(k_1\eta_1+k_2\eta_2)$，其中$k_1,k_2$不全为零。

当$\lambda=-6$时，求解$(-6I-A)x=0$得到基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以$A$属于特征$-6$的所有特征向量为$k\eta_1$，

其中k不等于零。所以σ属于特征-6的所有特征向量为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(k\eta_1)$，其中$k$不等于零。

（3）设α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的坐标分别为

x,y，则$x=Py$。故$y=P^{-1}y$，详细计算略。

四、设V=$M_n(F)$，A为一固定的F上的n阶方阵，定义V的线性变换σ为$\sigma: X\mapsto AX$，证明σ和A有相同的特征值。

证明：由已知

$$\sigma:\ \begin{array}{c}M_n(F)\to M_n(F)\\ X\mapsto AX\end{array},$$

于是λ是σ的特征值$\Leftrightarrow (\sigma-\lambda\varepsilon)X=0$有非零的解$X$（方阵）

$\Leftrightarrow (A-\lambda I)X=0$有非零的解$X$（方阵）

$\Leftrightarrow (A-\lambda I)X=0$有非零的解$X$（$n$维向量）

$\Leftrightarrow$ λ是A的特征值。得证。

五、设 A,B 为 n 阶矩阵 ，证明：AB 与 BA 有相同的特征值。

证明：只要证明AB与BA有相同的特征多项式，即$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$。当$\lambda\neq 0$时，由例 2.43，$\left|I-(\frac{1}{\lambda}A)B\right|=\left|I-B(\frac{1}{\lambda}A)\right|$，于是$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$。当$\lambda$=0时，$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$显然成立。从而$AB$与$BA$有相同的特征值。

六、设A为五阶方阵，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5是R^5中的线性无关列向量组，且有

$$A(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)\begin{pmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&1\\&&&&3\end{pmatrix}$$

试判断，(1) $\{X_i\}$中哪一个是A的特征向量 ；

(2)不是A的特征向量的X_j与A的特征向量有什么关系?

解：(1）从矩阵的结构上看出，X_1,X_4是A的特征向量。

（2）X_1,X_4是A的特征向量，分别属于特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$。且$(A-\lambda_1 I)X_2=X_1$，

$(A-\lambda_1 I)^2X_3=(A-\lambda_1 I)X_2=X_1$；$(A-\lambda_2 I)X_4=X_3$。