代数与几何讨论课（七）（矩阵的相似对角化，二次型）答案

一、判断下列结论是否正确,并说明理由：

(1) 对称矩阵可以相似对角化。

答：不对。实对称矩阵才可以相似对角化。

(2) 设 A 为实对称方阵，则 A 分别相抵，相似，相合于同一个对角阵。

答：正确。实对称方阵可以通过正交矩阵相似于对角阵。

(3) 只有特殊的二次型才可以通过配方法化成标准形。

答：二次型都可以通过配方法化成标准形。

(4) 设实二次型经过初等变换法化成标准形，则标准形中的系数就是原二次型的矩阵的特征值。

答：不对。只有通过正交替换化成标准形，标准形中的系数才是原二次型的矩阵的特征值。

(5) 可逆线性替换不改变二次型的秩。

答：正确。二次型的秩就是二次型矩阵的秩，矩阵相合不改变矩阵的秩。

(6) 可逆线性替换可能改变实二次型的正惯性指数和负惯性指数。

答：不对。由惯性定理，实二次型的规范形唯一，则正惯性指数唯一，负惯性指数唯一。

(7) 两个实对称矩阵相似当且仅当它们相合。

答：不正确。两个实对称矩阵相似，则它们都可以通过正交矩阵相似于同一个对角阵，因此它们相合。但两个实对称矩阵相合，不一定相似。

(8) 实对称矩阵 A 负定当且仅当 A 的顺序主子式都小于零。

答：不对。 A 负定当且仅当 $-A$ 正定， $-A$ 正定当且仅当 $-A$ 的顺序主子式都大于零，当且仅当 A 的奇阶顺序主子式小于零，偶阶顺序主子式大于零。

(9) 若实矩阵 A 的特征值都大于零，则 A 正定。

答：不对。二次型的矩阵都是对称矩阵，一个矩阵正定首先必须实对称。

(10) 度量矩阵一定是正定矩阵.

答：正确。由内积的正定性得到。

(11) 对称矩阵相合于对角阵。

答：正确。给定对称矩阵可以构造一个二次型，二次型经过可逆替换化为标准形，即对称矩阵可以相合于对角阵。

(12) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 A 可以相似对角化当且仅当 A^{-1} 可以相似对角化。

答：正确。 $P^{-1}AP$ 为对角阵当且仅当 $P^{-1}A^{-1}P$ 为对角阵。

(13) 若 $P^{-1}AP = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则 P 的列向量都是 A 的特征向量。

答：正确。令 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，则由 $AP = Pdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，得到 $A\gamma_i=\lambda_i\gamma_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

(14) 若 A 与 B 有共同的特征值及都有 n 个线性无关的特征向量，则

（A）$A\sim B$；（B）$A=B$；（C）$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$；（D）$|A-B|=0$.

答：（A），（C）。

（15）设 A，B 为 n 阶实对称矩阵，则 A，B 相似当且仅当 A，B 有相同的特征多项式。

答：正确。因为 A，B 为 n 阶实对称矩阵，所以 A，B 都相似于对角矩阵。若 A,B 有相同的特征多项式，则 A,B 都相似于同一个对角阵，从而 A,B 相似。

二、下列矩阵可否相似对角阵，可对角化的条件是什么？

1． $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \left(\underset{i\neq j}{a_{ii}\neq a_{jj}}\right);$$

2． $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ & a_{11} & \ddots & & \vdots \\ & & a_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \left(\underset{i\neq j}{a_{ii}\neq a_{jj}}\right);$$

3． $$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix};$$

4．$A\in M_n$，且 $A^2+A-2I=0$。

解：1. A 有 n 个不同的特征值，A 可以相似对角化。

2. A 可以相似对角化当且仅当 a_{11} 的几何重数等于代数重数等于 2 当且仅当 $r(a_{11}I-A)=n-2$ 当且仅当 $a_{12}=0$。

3. A 可以相似对角化当且仅当 $A_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$ 可以相似对角化。

4. A 可以相似对角化。设 λ_0 为 A 的特征值，γ 为对应的特征向量。因为 $A^2+A-2I=0$，所以 $0=(A^2+A-2I)\gamma=(\lambda_0{}^2+\lambda_0-2)\gamma$，因此 $\lambda_0{}^2+\lambda_0-2=0$。故 A 的所有不同的特征值为 -2，或 1，或 $-2,1$。若 A 的特征值只有 -2，则 $A-I$ 可逆。由 $A^2+A-2I=(A+2I)(A-I)=0$ 得到 $A+2I=0$，即 $A=-2I$，成立。若 A 的特征值只有 1，则由 $A^2+A-2I=(A+2I)(A-I)=0$ 得到 $A-I=0$，即 $A=I$，

成立。下面假设A的特征值为$-2,1$，代数重数分别为$r,n-r$。由矩阵秩的性质可以得到

$r(A+2I)+r(A-I)=n$（略）。特征值-2的几何重数等于$\dim V_{-2}=\dim\{x\in F^n \mid Ax=-2x\}=$

$\dim N(A+2I)=n-r(A+2I)$， 同理特征值1的几何重数等于$n-r(A-I)$。由于几何重数总是小于等于代数重数，所以$n-r(A+2I)\le r$，$n-r(A-I)\le n-r$。由于$n=(n-r(A+2I)+(n-r(A-I))$

$\le r+(n-r)=n$，所以$n-r(A+2I)=r$，$n-r(A-I)=n-r$，即对于A的每一个特征值都有代数重数等于几何重数，所以A可以相似对角化。

三、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$ 。令 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$ ，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$ 。

（1）求二次型f的矩阵。

（2）若α,β为相互正交的单位向量，求一正交替换将f化成标准形。

解：（1）$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x^T\begin{pmatrix}2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3\\2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3\\2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2\end{pmatrix}x$。二次型$f$的矩阵

$\begin{pmatrix}2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3\\2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3\\2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2\end{pmatrix}$。

（2）由于α,β为相互正交的单位向量，将α,β扩充成R^3的标准正交基α,β,γ。令$Q=(\alpha,\beta,\gamma)$，则经过正交替换$y=Q^Tx$或$x=Qy$，将二次型f化成标准形$2y_1^2+y_2^2$。

四、设 $A,B\in M_n$ ，且A 有n个互异的特征值。

证明：$AB=BA\Leftrightarrow A$ 的特征向量 也是B的特征向量。

证明：由于A 有n个互异的特征值，A有n个线性无关的特征向量，令P为A的n个线性无关的特征向量排成的矩阵，则$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$两两不同。另一方面与矩阵

$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$交换的矩阵只有对角阵。

$AB=BA\Leftrightarrow P^{-1}ABP=P^{-1}BAP\Leftrightarrow P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP\Leftrightarrow P^{-1}BP$为对角阵$\Leftrightarrow P$

的列向量都是 B 的特征向量 $\Leftrightarrow$ A 的特征向量都是 B 的特征向量。

五、设 A 为三阶实对称矩阵，$\lambda=1,2,-1$ 是其三个特征值，$\alpha_1=\left(1,\quad a+1,\quad 2\right)^T$，$\alpha_2=\left(a-1,\quad -a,\quad 1\right)^T$，分别为 A 的对应 $\lambda=1,2$ 的特征向量。设 λ_0 为 A^* 的特征值，$\beta_0=\left(2,\quad -5a,\quad 2a+1\right)^T$ 为对应的特征向量，求 a 及 λ_0 的值。

解：首先 α_1 和 α_2 正交，所以 $a=\pm 1$，且 α_1，α_2，β_0 线性无关。因为 A 的三个特征值为 $\lambda=1,2,-1$，所以 $|A|=-2$。于是 $A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$。因此 β_0 为 A^{-1}，也为 A 的特征向量。故为 A 的属于特征值 -1 特征向量。因此 β_0 与 α_1 和 α_2 都正交，得到 $a=-1$。从而 β_0 为 A^{-1} 属于特征值 -1 的特征向量。故

$A^*\beta_0=-2A^{-1}\beta_0=2\beta_0$，则 $\lambda_0=2$。

六、设 A 为 m 阶正定矩阵，B 是 $m\times n$ 的实矩阵。证明 B^TAB 正定的充分必要条件是 $r(B)=n$。

证明："$\Leftarrow$"若 $r(B)=n$，则任取 $0\neq x\in R^n$，$Bx\neq 0$（因为 B 列满秩，$Bx=0$ 只有零解）。于是

$x^T(B^TAB)x=(Bx)^TA(Bx)>0$（这里用到了 A 的正定性），故 B^TAB 正定。

"$\Rightarrow$"设 B^TAB 正定，则 $r(B^TAB)=n$。因为 A 正定，则存在可逆实矩阵 C 使得 $A=C^TC$。于是

$n=r(B^TAB)=r(B^TC^TCB)=r((CB)^T(CB))=r(CB)=r(B)$。