第 11 课次习题

练习1. 在相应圆环域内对下列函数展开Laurent级数：

$$(1).\ \frac{1}{z(1+z^2)^2}:\ 0<|z|<1,\ 1<|z|<+\infty\ (\text{写出通项})$$
$$(2).\ e^{\frac{1}{1-z}},\ 1<|z|<+\infty\ (\text{写出四项}).$$

练习2. 计算积分

$$(1).\ I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} z\sin\frac{z}{z-1}dz,\quad (2).\ I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} z\sinh\frac{z}{z-1}dz.$$

练习3. 求$\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^{6n}}{(-2n)!}$在$\mathbb{C}-\{0\}$上的和函数。

练习4. 设集合$A=\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$是$\mathbb{C}$中$m-$点集(m为一正整数)。如果函数$f(z)$在$\mathbb{C}\backslash A$上解析且有界，证明：$f(z)\equiv$常数。

练习5. 设函数$f(z)$在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析且处处满足 $|f(z)|\le |z|^m$, 此处m为一非0整数，求证：$f(z)\equiv Kz^m$, 其中K为某常数且$|K|\le 1$.
提示：证明 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上Laurent展开式的所有系数除了c_m外均为0;此题实际对$m=0$也成立，此时$f(z)\equiv K$, K如上，想想为什么?