# 第1次讨论课 (YAO G. W.)

¶ 内容

1. 一元多项式;
2. 线性变换与不变子空间。

¶ 教学要求

1. 掌握带余除法求商式和余式;
2. 掌握代数基本定理，根与系数的关系，实数域和复数域上的因式分解;
3. 掌握线性子空间直和概念，会找出子空间的直和补;
4. 掌握不变子空间概念，会找出线性变换的不变子空间。

---

**Exercise 1** 设$a,b,c$ 是三个不同的数，用$x-a,x-b,x-c$ 除一元多项式$f(x)$ 的余式依次为$r,s,t$，试求用$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 除$f(x)$ 的余式。

**Exercise 2** 求$p,q,r$ 之间的关系，使得$x^3+px^2+qx+r$ 的根成等比数列。

**Exercise 3** 如果任意多项式或者与多项式$p(x)$ 互素，或者能被$p(x)$ 整除，试证明$p(x)$ 不可约。

**Exercise 4** 证明: $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ $(n\geq 2)$ 在$\mathbb{Q}$上没有重因式。

**Exercise 5** $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, $deg f_i>0$,且$(f_1,f_2)=1$,试证明: 若$deg g(x)<deg f(x)$,则存在$u_i(x)$使得

$$g(x)=u_2(x)f_1(x)+u_1(x)f_2(x),\ \text{且}\ deg u_i<deg f_i,\ i=1,2.$$

**Exercise 6** 设$W=L\left(\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}\right)$，求$M_2(\boldsymbol{F})$ 的一个子空间$W'$，使得$W\oplus W'=M_2(\boldsymbol{F})$。

**Exercise 7** 设$\boldsymbol{\alpha}_1=3x^2+1$，$\boldsymbol{\alpha}_2=x-1$，试求$\boldsymbol{F}_3[x]$ 的两个子空间$W_1$ 和$W_2$，使得$\boldsymbol{F}_3[x]=W_1\oplus L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，且$\boldsymbol{F}_3[x]=W_2+L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 但不是直和。

试讨论:

(1) 满足条件的$W_1$ 和$W_2$ 是否唯一?

(2) 试将本命题在$\mathbb{R}^3$ 中重新描述，并给出几何解释。

**Exercise 8** 在$\mathbb{R}^3$ 上，下列子空间是否是所给线性变换$\sigma$ 的不变子空间?

(1) $W_1=\{(a_1,a_2,0)^T\,|\,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$, $\sigma((a_1,a_2,a_3)^T)=(a_2,a_1,a_3)^T$;

(2) $W_2=\{(0,a_2,0)^T\,|\,a_2\in\mathbb{R}\}$, $\sigma((a_1,a_2,a_3)^T)=(a_2,0,0)^T$.

**Exercise 9** 设$\sigma\in L(V)$，$W$ 是$V$ 的子空间，$\sigma^{-1}(W)$ 是$W$ 在$\sigma$ 下的原像，如果$W$ 是$\sigma$ 的不变子空间时，$\sigma^{-1}(W)$ 是不是$\sigma$ 的不变子空间? 反之，如果$\sigma^{-1}(W)$ 是$\sigma$ 的不变子空间时，$W$ 是不是$\sigma$ 的不变子空间? 为什么?

**Exercise 10** 设$n$ 维线性空间$V$ 的线性变换$\sigma$ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ $(n\geq 2)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

试证:

(1) 若$V_0$ 是$\sigma$ 的一个不变子空间，且$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k\in V_0$, $1\leq k\leq n$, $a_k\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in V_0$。

(2) $\{0\}$, $L(\alpha_1)$, $L(\alpha_1,\alpha_2),\cdots$, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$, $V$ 是$V$ 的全部$\sigma$ 的不变子空间。

(3) 不存在$\sigma$的不变子空间$W$使得$V=L(\alpha_1)\bigoplus W$.