微积分 A1 第 8 次习题课答案　函数的单调性、凸凹性、不定积分

1. 计算下列不定积分

（1）$\int \frac{1}{e^x-1}\mathrm{d}x$　　（2）$\int (\sin x+\cos x)e^x\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$　　（4）$\int \frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x$

（5）$\int \frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\mathrm{d}x$　　（6）$\int \frac{\sin 2x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\ (a^2\neq b^2)$

（7）$\int (3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}\mathrm{d}x$　　（8）$\int \sin^4 x\mathrm{d}x$

（9）$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$　　（10）$\int \frac{1}{x^4+x}\mathrm{d}x$

（11）$\int \frac{1}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x$　　（12）$\int x(1-x)^n\mathrm{d}x$

（13）$\int \frac{\sec x\cdot\csc x}{\ln\tan x}\mathrm{d}x$　　（14）$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

（15）$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\mathrm{d}x$　　（16）$\int \frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x$

（17）$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　　（18）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\ (a\neq b)$

（19）$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$　　（20）$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

（21）$\int \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$　　（22）$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（23）$\int (2x+3x^2)\arctan x\mathrm{d}x$　　（24）$\int \frac{x\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

（25）$\int e^{\arccos x}\mathrm{d}x$　　（26）$\int (\arccos x)^2\mathrm{d}x$

（27）$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$　　（28）$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

（29）$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$　　（30）$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\mathrm{d}x$

（31）$\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$　　（32）$\int \frac{1-2x^3}{(x^2-x+1)^3}\,dx$

解：（1）$\int \frac{1}{e^x-1}dx=\int \frac{de^x}{e^x(e^x-1)}=\int\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x}\right)de^x=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C=\ln\left|1-e^{-x}\right|+C$

（2）$\int(\sin x+\cos x)e^x dx=\int(e^x\sin x)'dx=e^x\sin x+C$

（3）$\int \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx=\int\frac{d(a^x+a^{-x})}{a^x+a^{-x}}=\ln(a^x+a^{-x})+C$

（4）$\int\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}dx=\int\frac{(1+x\ln x)'}{1+x\ln x}dx=\ln\left|1+x\ln x\right|+C$

（5）$\int\frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx=\int\frac{x-1}{\sqrt{3-(x+1)^2}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{3-(x+1)^2}}dx-\int\frac{2}{\sqrt{3-(x+1)^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(3-(x+1)^2)}{\sqrt{3-(x+1)^2}}-\int\frac{2}{\sqrt{1-(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2}}d\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

$$=-\sqrt{2-2x-x^2}-2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

（6）$\int\frac{\sin 2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)'}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)+C$$

（7）$\int(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{3x^2-2x+7}d(3x^2-2x+7)$

$$=\frac{1}{3}(3x^2-2x+7)^{3/2}+C$$

（8）$\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

（9）$\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx=\int\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\int(x+1)\sqrt{x}dx-\int x\sqrt{x+1}dx$

$$=\int x\sqrt{x}dx+\int\sqrt{x}dx-\int(x+1)\sqrt{x+1}dx+\int\sqrt{x+1}dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

（10）$\displaystyle\int\frac{1}{x^4+x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x(x^3+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{x^3(x^3+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{x^3(x^3+1)}$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1}\right)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+C$$

（11）$\displaystyle\int\frac{1}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{e^x+e^{x/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{e^{-x/2}}{e^{x/2}+1}\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}e^{-x/2}}{e^{x/2}+1}$

令 $t=e^{-x/2}$, 原式 $\displaystyle=-2\int\frac{t\mathrm{d}t}{t+1}=-2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=-2t+2\ln|1+t|+C$

$$=-2e^{-x/2}+2\ln(1+e^{-x/2})+C=-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+2\ln(1+\sqrt{e^x})-x+C$$

（12）$\displaystyle\int x(1-x)^n\mathrm{d}x=\int(1-x)^n\mathrm{d}x-\int(1-x)^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}+C$

（13）$\displaystyle\int\frac{\sec x\cdot\csc x}{\ln\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2 x}{\tan x\cdot\ln\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x\cdot\ln\tan x}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\ln\tan x}{\ln\tan x}=\ln(\ln\tan x)+C$$

（14）$\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=x-\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x-\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$$

（15）$\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}}$

$$=-\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}\right|+C$$

$$=-\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}\right|+C$$

（16）令 $t=\sin^2 x$,则

$$\int\frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}=\int\frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{e^{-t}+1}$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}e^{-t}}{e^{-t}+1}=-\ln(1+e^{-t})+C=-\ln(1+e^{-\sin^2 x})+C$$

（17）令 $\sin x=a(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)+b(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'+c$, 解得

$$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2},c=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})+C$$

（**18**）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\left(\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)\right)\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+b)\mathrm{d}x}{\sin(x+b)}-\int\frac{\cos(x+a)\mathrm{d}x}{\sin(x+a)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\ln\left|\sin(x+b)\right|-\ln\left|\sin(x+a)\right|+C\right)$$

（**19**）$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln^2 x\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\int\ln x\mathrm{d}\frac{1}{x}$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln x}{x}+2\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$$

（**20**）$\int\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\ln x-\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$

令 $x=\tan t$,则右端第二个积分

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos^2 t}=-\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\sin^2 t\cos^2 t}=-\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{2(1-\cos t)}+\frac{1}{2(1+\cos t)}\right)\mathrm{d}\cos t$$

$$=\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}+C=\sqrt{1+x^2}-\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|}+C$$

因此，$\displaystyle\int\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\ln x-\sqrt{1+x^2}+\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|}+C$

（21） 令 $t=\sqrt{x+1}$, 则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t,\ x^2-1=(t^2-1)^2-1=t^2(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}),$

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x&=4\int\ln t\mathrm{d}t+2\int\ln(t-\sqrt{2})\mathrm{d}t+2\int\ln(t+\sqrt{2})\mathrm{d}t\\&=4t(\ln t-1)+2\int\ln(t-\sqrt{2})\mathrm{d}(t-\sqrt{2})+2\int\ln(t+\sqrt{2})\mathrm{d}(t+\sqrt{2})\\&=-8t+2t\ln t^2(t^2-2)+2\sqrt{2}\ln\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}+C\\&=-8\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}\ln(x^2+1)+2\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

（22） 令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int te^t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}e^t=2te^t-2\int e^t\mathrm{d}t=2(t-1)e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$$

（23） $\displaystyle\int(2x+3x^2)\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}(x^2+x^3)=(x^2+x^3)\arctan x-\int\frac{x^2+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=(x^2+x^3)\arctan x-\int(x+1-\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x\\&=(x^3+x^2-1)\arctan x-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

（24） $\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

令 $x=\sin t,|t|<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}=\int\frac{\csc^2 t\mathrm{d}t}{\csc^2 t+1}=-\int\frac{\mathrm{d}\cot t}{\cot^2 t+2}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\cot t}{\sqrt{2}}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}+C\end{aligned}$$

于是 $\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}+C$

（25） $\displaystyle\int e^{\arccos x}\mathrm{d}x=xe^{\arccos x}+\int\frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=xe^{\arccos x}-\int e^{\arccos x}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$

$$= xe^{\arccos x} - \sqrt{1-x^2}e^{\arccos x} - \int e^{\arccos x}\,\mathrm{d}x$$

因此 $$\int e^{\arccos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2})e^{\arccos x} + C$$

（**26**）$$\int (\arccos x)^2\,\mathrm{d}x = x(\arccos x)^2 + \int \frac{2x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\int \arccos x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2\int \mathrm{d}x$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C$$

（**27**）$$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \ln\sin x\,\mathrm{d}(\cot x) = -\cot x\ln\sin x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\ln\sin x + \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x\ln\sin x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C$$

（**28**）$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{xe^x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}e^x + \int e^x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \int e^x\,\mathrm{d}\frac{e^x}{1+x^2} = \frac{e^x}{1+x^2} + C$$

（**29**）$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x) = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln(1+\cos x) + C = x\tan\frac{x}{2} + C$$

（**30**）$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\tan\frac{x}{2})^2 e^x\mathrm{d}x$$

$$= \int e^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int e^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$$

$$= \int \mathrm{d}(e^x\tan\frac{x}{2}) = e^x\tan\frac{x}{2} + C$$

（**31**）$(x\sin x + \cos x)' = x\cos x$

$$\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{(x\sin x+\cos x)'\cdot x\sec x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=-\int x\sec x\,\mathrm{d}\frac{1}{x\sin x+\cos x}$$

$$=-\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x}+\int \frac{\sec x+x\sec x\tan x}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x}+\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x}+\tan x+C$$

（32）法一：这是一个有理函数，可以利用待定系数法将被积函数分解为简单函数之和，再积分。过程繁琐，略。

法二：记 $I=\int \frac{1-2x^3}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x$. **首先用两种方法计算** $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$-\frac{1}{x^2-x+1}=\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{(2x^3-1)-3(x^2+3x-1)-2x+4}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}-2I-6\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^2}-4\int \frac{(x-2)\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^3}$$

又 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{x(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$$

$$=\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{2(x^2-x+1)+(x-2)}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{(x-2)}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x$$

解得 $$3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^2}+2\int \frac{(x-2)}{(x^2-x+1)^3}\mathrm{d}x=-\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+C$$

代入第一个连等式，得

$$-\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}-2I+\frac{2x}{(x^2-x+1)^2}+C$$

由此得 $$I=\frac{2x^2+1}{2(x^2-x+1)^2}+C$$

2. 证明下列不等式

（1）$\sin x+\tan x>2x\ (0<x<\pi/2)$

（2）$\sin(\tan x)\ge x\ (0\le x\le \pi/4)$

（3）$2^{1-p}(|a|+|b|)^p\ge |a|^p+|b|^p\quad (0\le p\le 1)$

（4）$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k+\dfrac{1}{x_k}\right)^a\ge \dfrac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}\ \ (a>1, x_1+\cdots+x_n=1, x_k\in(0,1), k=1,2,\cdots,n)$

证明：（1） 令 $f(x)=\sin x-\tan x-2x$，则

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{\cos^3 x+1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{(1-\cos x)(1-\cos x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}>0,\qquad \forall x\in(0\pi/\ \ 2$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,\pi/2]$ 上严格单调递增， $f(x)>f(0)=0,\ \forall x\in(0,\pi/2).$

（2） 令 $f(x)=\sin(\tan x)-x$, 则 $f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}-1.$ 欲证 $f(x)\ge 0,$ 只要证 $f'(x)\ge 0.$ 为此，只要证 $\cos(\tan x)\ge\cos^2 x\ (0\le x\le\pi/4)$。

令 $g(x)=\cos x-1-\dfrac{1}{2}x^2$, 则 $g'(x)=-\sin x+x>0(0<x\le\pi/4),\ g(x)>g(0)=0$. 因此， $\cos(\tan x)\ge 1-\dfrac{1}{2}\tan^2 x=\dfrac{2\cos^2 x-\sin^2 x}{2\cos^2 x}\ge\dfrac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}\ge\cos^2 x.$ □

（3） 令 $f(x)=x^p(x\ge 0)$，$0\le p\le 1$，则 $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}\le 0,\ f(x)$ 上凸，于是

$$f\Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)\ge\frac{f(|a|)+f(|b|)}{2},\ \text{即}\ \ 2^{-p}(|a|+|b|)^p\ge\frac{|a|^p+|b|^p}{2}.$$

（4） 令 $f(x)=(x+\dfrac{1}{x})^a\ \ (x>0)$, 因 $a>1$,

$$f'(x)=a(x+\frac{1}{x})^{a-1}(1-\frac{1}{x^2}),$$

$$f''(x)=a(x+\frac{1}{x})^{a-2}\left[(a-1)(1-\frac{1}{x^2})^2+\frac{2}{x^3}(x+\frac{1}{x})\right]>0,\ \forall x>0.$$

因此 $f(x)$ 下凸， $\dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\ge f(\dfrac{x_1+\cdots x_n}{n})$，即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a \ge (\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}x_k})^a=(n+\frac{1}{n})^a=\frac{(n^2+1)^a}{n^a}.$$

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0,\ f''(x)+2f'(x)+f(x)\ge 0.$ 证明：$f(x)\le 0, \forall x\in[0,1].$

证明：令 $F(x)=e^x f(x),$ 则 $F''(x)=e^x(f''(x)+2f'(x)+f(x))\ge 0,\ F(x)$ 下凸。由下凸函数的定义，有

$$e^x f(x)=F(x)=F(\lambda\cdot 0+(1-\lambda)x)\le \lambda F(0)+(1-\lambda)F(1)=0.$$

因此 $f(x)\le 0, \forall x\in[0,1].$ □

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可导，$f(x)\le 0$，$f''(x)\ge 0$。证明 $f(x)$ 为常数函数。

证明： $f''(x)\ge 0,\ f(x)$ 下凸，曲线位于切线上方。于是对 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\text{，}\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)\text{。}$$

若 $f'(x_0)>0$，则由上式可知 $f(+\infty)=+\infty$。若 $f'(x_0)<0$，则由上式可知 $f(-\infty)=+\infty$。这两种情形都与 $f(x)\le 0$ 矛盾，因此必有 $f'(x_0)=0$。由 x_0 的任意性，$f'(x)\equiv 0$，$f(x)$ 为常数函数。□

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可导。若 $f(a)>0, f'(a)<0, f''(x)<0, \forall x\in[a,+\infty),$ 则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恰有一个零点。

证明: $f''(x)<0,$ 则 $f'(x)$ 在严格单调下降，$f'(x)<f'(a)<0,\ \forall x\in[a,+\infty)$，于是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上严格单调下降。另一方面，$f''(x)<0,\ f(x)$ 为上凸函数，曲线位于切线下方，即

$$f(x)<f(a)+f'(a)(x-a),\quad \forall x\in[a,+\infty).$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$。而 $f(a)>0,\ f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上严格单调下降，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恰有一个零点。□

6. 证明开区间上的凸函数处处连续。

证明： 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的下凸函数。 我们来证明 $f(x)$ 于开区间 (a,b) 上处处连续。任意取定一点 $x_0 \in (a,b)$, 取点 $x_1 < x_0 < x < x_2$，由 $f(x)$ 的凸性可得

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

上式两边同乘 $x-x_0$ 得

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x-x_0) \le f(x)-f(x_0) \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x-x_0)$$

令 $x \to x_0^+$, 由夹挤原理得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

同理可证 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。故 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。由点 $x_0 \in (a,b)$ 的任意性，可知函数 $f(x)$ 于开区间 (a,b) 上处处连续。□

7. 证明：

（1） $f^{(4)}(x)>0, \forall x,$ 且 $\exists\, x_0, s.t. f''(x_0)=f'''(x_0)=0,$ 则 f 下凸。

（2） $f(x)$ 在 x_0 处 3 阶可导， $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\ne 0,$ 则 $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点。

证明：（1） $f^{(4)}(x)>0,$ 则 $f'''(x)$ 严格单增，而 $f'''(x_0)=0,$ 因此

$$f'''(x)\begin{cases} >0, & x>x_0 \\ <0, & x<x_0 \end{cases}, \qquad f''(x)\begin{cases} \text{严格递增}, & x>x_0 \\ \text{严格递减}, & x<x_0 \end{cases}$$

又 $f''(x_0)=0,$ 所以 $f''(x)\ge 0, \forall x,$ 从而 f 下凸。

（2）不妨设 $f'''(x_0)>0,$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0.$ 由极限的保序性, $\exists \delta>0, s.t.$

$$\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0, \quad \forall 0<|x-x_0|<\delta.$$

而 $f''(x_0)=0,$ 所以 $f''(x)\begin{cases} >0, & x>x_0 \\ <0, & x<x_0 \end{cases}$, $f(x)\begin{cases} \text{下凸}, & x>x_0 \\ \text{上凸}, & x<x_0 \end{cases}$, $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

8. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，存在 $\xi \in (a,b), s.t. f''(\xi)\ne 0$ 。证明: $\exists\, x_1, x_2 \in (a,b), s.t.$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证明：不妨设 $f''(\xi)>0.$ 令 $F(x)=f(x)-f'(\xi)x,$ 则 $F'(\xi)=0,\ F''(\xi)=f''(\xi)>0,$ 即

$$\lim_{x\to\xi}\frac{F'(x)-F'(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{F'(x)}{x-\xi}>0.$$

由极限的保序性，$\exists\delta>0, s.t.\ \dfrac{F'(x)}{x-\xi}>0,\quad \forall 0<|x-\xi|\le\delta.$ 于是，

当 $x\in(\xi-\delta,\xi)$ 时，$F'(x)<0,\ F(x)$ 严格单调递减，$F(\xi-\delta)>F(\xi)$；

当 $x\in(\xi,\xi+\delta)$ 时，$F'(x)>0,\ F(x)$ 严格单调递增，$F(\xi+\delta)>F(\xi)$。

不妨设 $F(\xi+\delta)>F(\xi-\delta)>F(\xi)$，记 $x_1=\xi-\delta,$ 由介值定理，存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta), s.t.$

$F(x_2)=F(\xi-\delta)=F(x_1)$。于是

$$0=F(x_2)-F(x_1)=f(x_2)-f(x_1)-f'(\xi)(x_2-x_1),$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).\square$$