第3次讨论课　(YAO　G.　W.)

¶ 内容

1. 内积，标准正交基，欧式空间与酉空间；
2. 正交变换，酉变换，正规变换，Hermite阵。

¶ 教学要求

1. 掌握内积、欧氏空间，酉空间等概念; 熟练运用 Schmidt 正交化方法求标准正交基;
2. 掌握正交变换的概念，会用正交变换的等价条件和正交矩阵的某些性质;
3. 掌握酉变换，正规变换等概念，对Hermite阵及其正定性有一定了解。

Exercise 1 设 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换，$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$，试证

(1) σ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 W_1 (或 W_2)的投影变换 $\Longleftrightarrow$ $\sigma^2 = \sigma$；

(2) 若 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 W_1 的投影变换，则 $Id - \sigma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 W_2 的投影(Id表示恒同映射)；

(3) 若 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 W_1 的投影变换，则 $W_1 = \operatorname{Im}\sigma,\ W_2 = \operatorname{Ker}\sigma$。

注：这里称σ是 $\mathbb{R}^n$ 到 W_1上的投影变换，如果对$\forall\ \xi = \xi_1 + \xi_2,\ \xi_1 \in W_1,\ \xi_2 \in W_2$, 有$\sigma\xi = \xi_1$.

Exercise 2 用 Schmidt 正交化方法将欧氏空间的向量组 S 正交化，并扩充为欧氏空间的标准正交基，求出指定向量 α 在标准正交基下的坐标。

(1) $\mathbb{R}^4$，$S = \{(1,2,2,-1)^T, (1,1,-5,3)^T, (3,2,8,-7)^T\}$，$\alpha = (3,1,1,-3)^T$；

(2) $\mathbb{R}_3[x]$，内积定义为 $(f(x), g(x)) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$，$S = \{1, x, x^2\}$，$\alpha = 1 + x$。

Exercise 3 设 $\alpha_1 = (1,0,2,1)^T, \alpha_2 = (2,1,2,3)^T, \alpha_3 = (0,1,-2,1)^T, W = L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，在 $\mathbb{R}^4$ 上定义内积为:

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^4,\ (\alpha, \beta) = \alpha^T \beta.$$

试求 W 在 $\mathbb{R}^4$ 的正交补子空间 $W^\perp$ 的一个基。

Exercise 4 证明两个酉空间V, V'同构的一个充分必要条件是存在V到V'的一个双射f, 使得$\forall\ \alpha, \beta \in V$，都有

$$(\alpha, \beta) = (f(\alpha), f(\beta)).$$

Exercise 5 设$\alpha, \beta, \gamma, \xi$是$\mathbb{R}^4$的4个列向量，若$W = L(\alpha, \beta, \gamma)$，求实数$a$, b, c使得$a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma$恰为$\xi$在$W$上的正交射影。
注：先从理论上证明，再举事例实践.

Exercise 6 设n维欧氏空间$V = L(\alpha) + V_1$，其中α是单位向量，$V_1 = (L(\alpha))^\perp$，又设σ_1是V_1的一个正交变换，定义V上的线性变换σ, τ:

$$\sigma(a\,\alpha + \beta) = a\,\alpha + \sigma_1(\beta), \quad \tau(a\,\alpha + \beta) = -a\,\alpha + \sigma_1(\beta),$$

其中$a \in \mathbb{R}, \beta \in V_1$。求证:
(1) σ, τ都是V 的正交变换;
(2) 若σ_1是V_1中的反射，则σ是V中的反射，τ是V的旋转。

Exercise 7 设e_1, e_2 是平面上两个互相垂直的单位向量，以e_1 为始边，OT 为终边的一个角为$\frac{\varphi}{2}$。又σ是以OT 为轴的反射。试证明σ 在e_1, e_2 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

反过来，若正交变换σ 在一个标准正交基下的阵为A，则σ 必是以直线$y = \operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2})\, x$ 为轴的反射。

Exercise 8 设σ是n维酉空间V上的线性变换，求证：σ是正规变换的充要条件是若ξ是σ的属于其特征值λ的特征向量，则ξ是σ^* 的属于其特征值$\bar{\lambda}$的特征向量。

Exercise 9 设A, B皆是Hermite矩阵, 证明：(1). 若B正定，则AB的特征值都是实数；(2). 若A, B均正定且$AB = BA$，则AB也是正定Hermite矩阵。