微积分 A(1)第四次习题课参考答案（第九周）

一、中值定理

1. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1$，$f(x)$可微，且$f'(x)\neq 1$.

证明:在$(0,1)$存在唯一的ξ使$f(\xi)=\xi$。

证明：（1）存在性：作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，

$$F(0)=f(0)>0$$
$$F(1)=f(1)-1<0$$

由连续函数的介值定理得，在$(0,1)$存在ξ使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

（2）唯一性：若存在两点ξ_1,ξ_2，使$f(\xi_1)=\xi_1$，$f(\xi_2)=\xi_2$，由 Lagrange 中值定理，

存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)$（假设$\xi_1<\xi_2$），使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=1,$$

与条件$f'(x)\neq 1$矛盾。

2．设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数切存在相等的最大值，

且$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得　$f''(\xi)=g''(\xi)$。

证明：令$F(x)=f(x)-g(x)$，　则

$$F(a)=0,\quad F(b)=0.$$

设$f(x),g(x)$在(a,b)内的最大值为M分别在$\alpha\in(a,b),\beta\in(a,b)$取得，

当$\alpha=\beta$时，取$\eta=\alpha=\beta\in(a,b)$，则有$f(\eta)=g(\eta)$。

当$\alpha\neq\beta$时，则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geq 0$$

$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=g(\beta)-M\leq 0$$

由介值定理，存在$\eta\in(a,b)$使$F(\eta)=0$，即　$f(\eta)=g(\eta)$.

由 Rolle 定理，　$\exists\xi_1\in(a,\eta)$，$F'(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in(\eta,b)$，$F'(\xi_1)=0$

再由Rolle定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，$h''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

解： 令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理条件，于是

$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]，\text{其中}\eta\in(a,b)$$

由 $f(a)=f(b)=1$，则有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$，

另取 $g(x)=e^x$，则又有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$，其中 $\xi\in(a,b)$，

综合上述两个等式即有　$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

证法二：记 $g(x)=e^x[f(x)-1]$，则 $g(a)=g(b)=0$，$\exists\eta\in(a,b),g'(\eta)=0$。

即　$e^{\eta}[f(\eta)-1+f'(\eta)]=0$，$f(\eta)+f'(\eta)=1$

令 $\xi=\eta$，$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

4. 已知 $e<a<b$，求证：$a^b>b^a$。

证明：只需证明：$b\ln a>a\ln b$，只需证明：$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，而

$$\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(a-b),a<\xi<b,$$

由于 $e<a<b$，因此 $1-\ln\xi<0,a-b<0$，因此 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$.

二、L’Hospital 法则

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解： $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

6. 求极限 $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$。

解：（方法 1） $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（方法 2） $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\text{。}$$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

解：考虑极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}}$

由符合极限定理，只需求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2(1-f(x))}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{-x}{1-f(x)}=\frac{1}{6f'(0)}=\frac{1}{12}$$

三、导数应用

8. 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

证明： $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$f''(x)=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$$

显然 $\ln(1+x)-x<0,\quad x\in(0,1)$，因此 $f''(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f'(x)$ 为单调降函数。因为 $f'(0)=0$，$f'(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f(x)$ 为单调降函数。因为 $f(0)=0$，$f(x)<0, x\in(0,1)$

9. 求函数 $f(x)=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值及单调区间。

解：(1) $f'(x)=3(x+1)^2(x-1)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}(x+1)^3(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{(x+1)^2(11x-7)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

(2) 驻点：$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{7}{11}$。导数不存在的点：$x_3=1$。

(3) 用嫌疑点分割定义区间，列表讨论 $f'(x)$ 的符号，确定极值点与极值，单调区间。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{7}{11}\right)$	$\frac{7}{11}$	$\left(\frac{7}{11},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	—	不存在	+
$f(x)$	↗	$f(-1)=0$ 非极值	↗	$\boldsymbol{f(7/11)\approx 2.2}$ 为极大值	↘	$\boldsymbol{f(1)=0}$ 为极小值	↗

10. 证明对任意 $x\in(0,2)$，成立不等式 $4x\ln x\ge x^2+2x-3$

证明：令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，考虑 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内的正负号与极值问题。先求驻点。$f'(x)=4+4\ln x-2x-2$

令 $f'(x)=0$，解出驻点 $x_0=1\in(0,2)$，进一步考查两个单侧极限的情况。

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=3>0,\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=8\ln2-5>0$$

又 $f''(x)=\dfrac{4}{x}-2$，$f''(x_0)=2>0$，因此 $f(1)=0=\min\limits_{x\in(0,2)}f(x)$。

这意味着 $f(x)\ge0$，即原不等式成立。

11. 证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：记 $F_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，$F_n(0)=-1, F_n(1)=n-1$，由连续函数介值定理

可知，$F_n(x)$ 在在 $(0,1)$ 内必有一实根。

$F_n'(x)=nx^{n-1}+\cdots+1>0$，故 $F_n(x)$ 在在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n。

$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=1$

$x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}=1$

相减，$x_n{}^n+[\left(x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n\right)-\left(x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}\right)]=$

$x_n{}^n+(x_n-x_{n-1})Q=0$

其中 Q 的各项都为正，故 $x_n-x_{n-1}<0$，$\{x_n\}$ 单调降，有下界 0，故收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

$$\frac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$$

$\dfrac{A}{1-A}=1,\quad A=\dfrac{1}{2}$

四、泰勒公式

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $\left|f''(x)\right|\le 2$，求证：$\left|f'(x)\right|\le 1, x\in[0,1]$。

证明：$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2$

$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$

相减，$f(0)=f(1)$，可得 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2\right]$,

$\left|f'(x)\right|\le\dfrac{1}{2}\cdot 2\left[x^2+(1-x)^2\right]\le 1$

13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证明：$f(x)=f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$，

$f(x)=f(b)+\dfrac{f'(b)}{1!}(x-b)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$，

因此 $0=f(b)-f(a)+\dfrac{1}{2}[f''(\xi_2)(x-b)^2-f''(\xi_2)(x-a)^2]$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，因此 $|f(b)-f(a)|\le\dfrac{|f''(\xi)|}{2}[(x-b)^2+(x-a)^2]$

14. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，且 $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$.

证明：记 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(\eta)=-1,\eta\in(0,1)$ 为极小值点。不妨假设 $\eta\in(0,\frac{1}{2}]$，则

$$0=f(0)=f(\eta)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-\eta)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}\eta^2$$

$$f''(\xi)\ge 8$$

15.（1）$y=x^2\sin x$ 的 100 阶导数，（2）$f(x)=\ln(2-3x)$ 的 10 阶导数

解：（1）由莱布尼茨公式，注意到 x^2 的 $n\ge 3$ 阶导数均为零，则有

$$y^{(100)}=x^2(\sin x)^{(100)}+100(x^2)'(\sin x)^{(99)}+\frac{100\times 99}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{100\pi}{2}\right)+200x\sin\left(x+\frac{99\pi}{2}\right)+100\times 99\sin\left(x+\frac{98\pi}{2}\right)$$

$$=x^2\sin x-200x\cos x-9900\sin x\text{。}$$

（2）　$\dfrac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$。只须注意到(-1)的次数（19 次）及阶乘的结果即可。

16. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$。

解： $\sin 6x=6x-\dfrac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$，因此由已知条件

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36+0=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36\text{。}$$

注：下列作法是错误的

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$$

错误原因在于第一个等号后的无穷小量替换不在因子位置，属非法替换，答案亦为错误。