几何与代数讨论课　　　（特征值, 特征向量）

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由：

(1) 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^m = 0$，则 A 的特征值只能是零.

(2) 设 A 是 n 阶实方阵，若 $A^2 = A$，则 A 的特征值只能是 1 或 0.

(3) 设 X, Y 是 n 阶方阵 A 的属于不同特征值的特征向量，则必有 $X^T Y = 0$.

(4) 设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是 A 的一个特征值，X_1, X_2 是 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的基础解系，则 A 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量为 $k_1X_1 + k_2X_2$，其中 k_1, k_2 是两个任意常数.

(5) 设 A 是 3 阶方阵，A 的特征值为 $0, 0, 1$，X_1, X_2 是 $AX = 0$ 的基础解系，X_3 是 $AX = X$ 的非零解，则 A 的全部特征向量为 $k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3$，其中 k_1, k_2, k_3 是不全为零的任意常数.

(6) 设 X 是 n 阶方阵 A 的特征向量，P 是 n 阶可逆方阵，则 $P^{-1}X$ 是 $P^{-1}AP$ 的特征向量.

(7) 设 X 是 n 阶方阵 A 的特征向量，若 A 可逆，则 $A^{-1}X$ 是 A^{-1} 的特征向量.

(8) 设 A 是 n 阶方阵，若 A 的特征值都是 1，则 A 与 I 相似.

(9) 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^2 + A + I = 0$，则 A 没有实的特征值.

(10) 设 A 是 n 阶方阵，若 A 可相似于对角阵，则 A 的 n 个特征值互异.

(11) 若 n 阶矩阵 A, B 的特征值相同，则 $A \sim B$(相似).

(12) 若 A 与 B 等价 (相抵)，则 $A \sim B$(相似).

(13) 若 $A \sim B$(相似)，则 A 与 B 等价 (相抵).

(14) 若 A 与 B 有共同的特征值 (包含重数) 及都有 n 个线性无关的特征向量，则

(A) $A \sim B$ （相似）; (B) $A = B$; (C) $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$; (D) $|A - B| = 0$.

（15）若 A, B 的特征值分别为 λ, μ，则：

（A）A^T 与 A 有相同的特征值与特征向量；（B）$A + A^T$ 及 AA^T 的特征值分别为 2λ 及 λ^2；

（C）$A + B$ 及 AB 的特征值分别为 $\lambda + \mu$ 及 $\lambda\mu$;

（D）以上结论都不正确.

二、下列矩阵可否与对角矩阵相似，矩阵可对角化的条件是什么？

1.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

.

2. $A \in M_n, r(A) = 2, A^2 + A = 0.$

三、设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，且 A 可逆，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a \neq 0 (i = 1, \cdots, n)$，试证：$a^{-1}$ 为 A^{-1} 的一个特征值，并求对应的一个特征向量.

四、设 $A, B \in M_n$，且 A 有 n 个互异的特征值.

证明：$AB = BA \Longleftrightarrow A$ 的特征向量也是 B 的特征向量.

五、设 A 为三阶实对称矩阵，$\lambda = 1, 2, -1$ 是其三个特征值，$\alpha_1 = (1, a+1, 2)^T$，$\alpha_2 = (a-1, -a, 1)^T$，分别为 A 的对应 $\lambda = 1, 2$ 的特征向量，A^* 的特征值为 λ_0，且 $A^*\beta_0 = \lambda_0\beta_0$，其中 $\beta_0 = (2, -5a, 2a+1)^T$，求 a 及 λ_0 的值.

六、设 A, B 为 n 阶矩阵，证明：AB 与 BA 有相同的特征值.