线性代数讨论课（一）（行列式部分）

一、选择、填空

(1) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} =$______________.

(2) 已知n阶排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数为k，则n阶排列$i_n i_{n-1} \cdots i_1$的逆序数为__________.

(3) $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix} = 0$的实根的个数为__________.

(4) 已知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a$，则$\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & b_1+2c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2+2b_2 & b_2+2c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3+2b_3 & b_3+2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} =$____________ .

(5) 线性方程组$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + bx_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$有唯一解，则$a,b$的取值为_________________.

(6) 设行列式D中偶数号码各行的和等于奇数号码各行的和，则$D =$___________.

(7) 设D是 6 阶行列式，则_______为D中带有正号的项。

（A） $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$　　（B）$a_{11}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{62}$

（C）$a_{13}a_{25}a_{32}a_{46}a_{54}a_{61}$　　（D）$a_{12}a_{26}a_{35}a_{44}a_{51}a_{63}$

(8) 设$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则$f(x)$的展开式中$x^3$的系数为______________.

(9) 行列式$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$_________.

(10) _____是行列式D_n非零的充分条件.

（A） D_n中所有元素非零.　　（B） D_n中至少n个元素非零.

（C） D_n 中任意两行元素不成比例. （D） 某一非零行的各元素的代数余子式与对应元素相等.

(11) _____是行列式 D_n 为零的充分条件。

（A） 零元素的个数大于 n. （B） D_n 中各行元素之和为零.

（C） 主对角线上元素全为零. （D） 次对角线上元素全为零.

(12) 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=$ _________ .

(13) 对于 n 阶行列式 D，如果从第二列开始，每一列减去它的前一列，同时第一列减去原先最后一列，则得到的新行列式 D'=____________.

(14) 对于 n 阶行列式 D，如果从第二列开始，每一列加上它的前一列，同时第一列加上原先最后一列，则得到的新行列式 D'= ______________.

(15) 对于 n 阶行列式 D 中每一个元素 a_{ij} 都乘以 $c^{i-j}\,(c\neq 0)$，则得到的新行列式 D'= ________.

二、设 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$，不直接计算 A_{ij}，求解以下各题，并指出解每题时所使用的理论根据。

求：（1）$-A_{41}+\ 2A_{42}-\ 2A_{43}-\ 3A_{44}$

（2）$-2A_{11}+\ 2A_{12}+\ 3A_{13}+\ 4A_{14}$

三、设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=c$，令 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}-a_{ij}\ (i,j=1,\cdots,n)$，求 $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

四、 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 F 中 n 个不同的数， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 F 中任意一组给定的数，证明：存在唯一的数域 F 上的次数小于 n 的多项式 $f(x)$，使得 $f(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots n)$。

五、求 $D_n=\begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$。