微积分 A（2）第六次习题课参考答案（第九周）

1. 设有空间区域 Ω_1 : $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$ ，

及 Ω_2：$x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，则（　C　）。

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xdv$　　（B）$\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$　　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

【解】应用对称性。

观察发现积分区域 Ω_1 关于 x 轴，y 轴对称，x 关于 y 轴是奇函数，y 关于 x 轴是奇函数，xyz 关于 y 轴和 x 轴均为奇函数。因此 A，B，D 选项的左边均为 0，而右边显然大于 0，所以 A，B，D 均不正确。又因为 z 关于 x，y 均为偶函数，所以可得选项 C 正确。

2.选择题

（1）已知 $f\in C^3(\mathbb{R}^3)$，则 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(x,y,z)dz=$【　】

A. $\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^y f(x,y,z)dz$

B. $\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^z f(x,y,z)dy$

C. $\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_y^1 f(x,y,z)dx$

D. $\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_y^1 f(x,y,z)dx$

选 C

（2）$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\cos z}{1-z}dz=$【　】

A. $\frac{1-\cos 1}{2}$　B. $\frac{1-\sin 1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sin 1+\cos 1}{2}$

选 A。

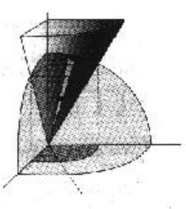
3. 交换积分次序: $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

（1）先积 y，再积 x，最后积 z；（2）先积 x，再积 z，最后积 y.

4. 证明：$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$.

5. 求三重积分: $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-x^2}\\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$

解：由函数与域的对称性；　$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$



球坐标系：$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\, dr=\dfrac{\pi}{8}$；

柱坐标系：$I=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho\, d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} zdz=\dfrac{\pi}{8}$；

直角坐标系：$I=\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx \int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz=\dfrac{\pi}{8}$

先对 xy 积分：　$I=\int_0^1 dz \iint\limits_{D(z)} dxdy=\int_1^{\sqrt{2}/2} z\pi z^2 dz+\int_{\sqrt{2}/2}^1 z\cdot\pi\left(1-z^2\right)dz=\dfrac{\pi}{8}$

6. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz$，　其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

解：用柱坐标系，

$\Omega=\left\{(\rho,\theta,z)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le H,\ \rho\le z\le H\right\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H d\rho \int_{\rho}^H (1+\rho^2)z\rho\, dz=\pi\left(\frac{H^4}{4}+\frac{H^6}{12}\right)$$

7. 计算

(1) $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x+2y+3z\right)dxdydz$，其中积分区域 Ω 是由 $\boldsymbol{0\le x\le a}$，$\boldsymbol{0\le y\le b}$，$\boldsymbol{0\le z\le c}$

所确定。 答案 $I=(\dfrac{a}{2}+2\cdot\dfrac{b}{2}+3\cdot\dfrac{c}{2})abc=\dfrac{abc}{2}(a+2b+3c)$。

(2) 计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z}(ax+by+cz)dxdydz$

方法 1： 由对称性 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z} xdxdydz=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z} ydxdydz=0$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z} zdxdydz=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\sin\theta\cos\theta\, d\rho=\frac{4}{3}\pi$$

于是 $I=\dfrac{4c}{3}\pi$

法 2： $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 的重心坐标在 $(0,0,1)$

所以 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z} zdxdydz=V=\dfrac{4}{3}\pi$

于是 $I=\dfrac{4c}{3}\pi$

8. 设 Ω 由曲面 $\boldsymbol{x^2+y^2=az}$ 和曲面 $\boldsymbol{z=2a-\sqrt{x^2+y^2}}$ （$\boldsymbol{a>0}$）所围成，将

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 化成三类坐标系下的三次积分。

（1）　直角坐标系

$$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)dz$$

（2）　柱坐标系

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{\frac{r^2}{a}}^{2a-r}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

（3）　球坐标系

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{2a}{\cos\varphi+\sin\varphi}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr$$

9.求下列体积

（1）求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围立体 Ω 的体积。

解：记立体 Ω 的体积为 $|\Omega|$。由观察可知平面 $z=z\in[0,1]$ 截立体 Ω 所得的截面为圆盘 D_z

圆心位于 $(0,0,z)$，半径为 $r_z=(z-z^4)^{1/4}$，其面积为 $\pi(z-z^4)^{1/2}$。于是

$$|\Omega|=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(z-z^4)^{1/2}dz=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(1-u^2)^{1/2}du=\frac{\pi^2}{6}。$$

解答完毕。

（2）由六个平面 $3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积为____________________________（$1/2$）

解：作线性变换 $u=3x-y-z$，$v=-x+3y-z$，$w=-x-y+3z$，则

$$\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16$$ 。于是所求体积为

$$|V|=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iiint\limits_{U}\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{16}|U|$$，其中 U 为 $|u|\le1$，$|v|\le1$，

$|w|\le1$，其体积为 8。故所得结论为 $1/2$。

（3）由 $z=x-y,z=0,x^2+y^2=ax,(a>0)$ 围成；

解：

$$\boldsymbol{V = \iint\limits_{D_1}(x+y)d\sigma + \iint\limits_{D_2}(x+y)d\sigma = \frac{a^3}{48}(10 \cup 3\pi)},$$

注意：$D = D_1 \cup D_2$，分界线为 $y = x$

（4）设 $A=(a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V| = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

证明：由于 A 对称正定，因此存在可逆矩阵 P，使得 $A = P^tP$。在线性变换 $y = Px$ 下，V 的象 U 为单位球。这是因为

$1 = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = x^tAx = x^tP^tPx = y^ty = y_1^2 + y_2^2 + y_3^3$。 于是

$|V| = \iiint\limits_V dx_1dx_2dx_3 = \iiint\limits_U |\det P^{-1}|dy_1dy_2dy_3 = |\det P^{-1}||U| = \dfrac{4\pi}{3}|\det P^{-1}|$。根据关系

$A = P^tP$，我们有 $(\det P)^2 = \det A$，于是 $|\det P^{-1}| = \dfrac{1}{|\det P|} = \dfrac{1}{\sqrt{\det A}}$。故

$|V| = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。证毕。

10.令曲面 S 在球坐标下方程为 $r = a(1+\cos\varphi)$，Ω 是 S 围成的有界区域，计算 Ω 在直角坐标系下的形心坐标。

解： Ω 的体积 $V = \iiint\limits_\Omega dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 dr = \dfrac{8}{3}\pi a^3$,

Ω 关于 z=0 平面的静力矩

$$V_{xy} = \iiint\limits_\Omega z dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 dr = \frac{32}{15}\pi a^4,$$

Ω 的形心坐标为 $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \dfrac{4}{5}a$；

11.设 $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$，$h = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$ 上连

续，证明：$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz = ® \int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

证明：作变量代换

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{h}(ax+by+cz) \\ v &= a_2x+b_2y+c_2z \\ w &= a_3x+b_3y+c_3z \end{aligned}$$

其中系数矩阵为正交矩阵。则

$$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz = \int_{-1}^{1}du\iint\limits_{D_u} f(hu)dvdw$$

其中 $D_u = \left\{(v,w)\middle|v^2+w^2 \le 1-u^2\right\}$。故 $\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz = ® \int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

12. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$F(t) = \iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中

$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le h, x^2+y^2 \le t^2\right\}$ $(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

解:用柱坐标系，$F(t) = \int_0^{2®} d¨ \int_0^t d° \int_0^h \left[z^2+f(°^2)\right]° dz = \dfrac{®h^3}{3}t^2 + 2®h\int_0^t °f(°^2)d°$ ，

用 L’Hospital 法则，$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2} = \dfrac{®h^3}{3} + 2®h\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t °f(°^2)d°}{t^2} = \dfrac{®h^3}{3} + ®hf(0)$.

13. 计算 $I = \iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)d±$ ，其中 $D = \left\{(x,y)\middle|x^2+y^2 \le R^2\right\}$.

解：考虑极坐标系 $\begin{cases} x = °\cos¯ \\ y = °\sin¯ \end{cases}$， $d± = °d°d¯$. $D = \left\{(x,y)\middle|x^2+y^2 \le R^2\right\}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{°}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{°}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{°}\frac{\partial f}{\partial(°,¯)}\cdot\frac{\partial(°,¯)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = -\frac{1}{°}\frac{\partial f}{\partial ¯}$$

因为：
$$\frac{\partial(°,¯)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(°,¯)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos¯ & -°Sin¯ \\ Sin¯ & °Cos¯ \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{°}\begin{pmatrix} °Cos¯ & °Sin¯ \\ -Sin¯ & Cos¯ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \frac{1}{°}\begin{pmatrix} 0 \\ -° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)d±$$

$$= -\iint\limits_{°\le R}\frac{1}{°}\frac{\partial f}{\partial ¯}°d°d¯ = -\int_0^R d°\int_0^{2®}\frac{\partial f}{\partial ¯}d¯ = -\int_0^R\left(f(2®,°) - f(0,°)\right)d° = 0$$