第二章 矩阵及其代数运算

一、 求逆矩阵

1. 定义。已知方阵 A 满足一定的条件，直接构造出矩阵 B 使得 $AB=I(\text{或}BA=I)$，则 B 为 A 的逆。

例：设 A 为 n 阶方阵满足 $A^2+3A+3I=0$，求 $(A+2I)^{-1}$.

解：将 $A^2+3A+3I=0$ 左端变形写成 $A+2I$ 和另外一个矩阵的乘积的形式，$(A+2I)(A+I)=-I$，于是 $(A+2I)(-A-I)=I$，故 $(A+2I)^{-1}=-A-I$。

2. 利用公式 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$。当 A 的阶数等于 2 时，可使用该公式计算，但更多的时候是用于理论推导，上面等式给出了 A^{-1} 的明确表达式，可用于数学表达式的运算。

例：设 A 为 $n\ (n\geq 2)$ 阶方阵，证明 $|A^*|=|A|^{n-1}$，并证明 A 可逆当且仅当 A^* 可逆.

解：当 $|A|\neq 0$ 时，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，故 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

当 $|A|=0$ 时，只要证明 $|A^*|=0$ 即可。若 $|A^*|\neq 0$，即 A^* 可逆，由 $AA^*=|A|\,I=0$，得到 $A=0$，所以 $A^*=0$，矛盾。所以当 $|A|=0$ 时，$|A^*|=0$。

3. 初等行变换，$(A\vdots I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I\vdots A^{-1})$. 具体矩阵求逆常用此法。

4. 分块矩阵初等变换求逆。已知分块矩阵 A，将 I 做相应的分块，$(A\vdots I)\xrightarrow{\text{分块阵初等行变换}}(I\vdots A^{-1})$。

例 1：设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{bmatrix}$，其中 $A_1,\ ...,A_s$ 可逆，求 A^{-1}。

解：$(A\vdots I)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & & & I_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & A_s & & & I_s \end{array}\right]\xrightarrow[\cdots]{\substack{A_s^{-1}r_1\to r_1\\ A_{s-1}^{-1}r_2\to r_2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc} I_1 & & & A_1^{-1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & I_s & & & A_s^{-1} \end{array}\right]$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$

例 2：设 $A=\begin{bmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_s & & \end{bmatrix}$，其中 A_1，. . . , A_s 可逆，求 A^{-1}。

解：$(A\vdots I)=\begin{bmatrix} & & A_1 & I_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ A_s & & & & & I_s \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdots]{\substack{r_1\leftrightarrow r_s \\ r_2\leftrightarrow r_{s-1}}} \begin{bmatrix} A_s & & & & & I_s \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & A_1 & I_1 & & \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\cdots]{\substack{A_s^{-1}r_1\to r_1 \\ A_{s-1}^{-1}r_2\to r_2}} \begin{bmatrix} I_s & & & & & A_s^{-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & I_1 & A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} & & A_s^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

二、 初等变换求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}

$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I\vdots A^{-1}B)$；$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$

当 A 经过一些初等行变换变成 I 时，即存在初等矩阵 $P_i(i=1,2,\cdots,s)$ 使得 $P_s\cdots P_1A=I$，则经过相同的初等行变换把 B 变成 $A^{-1}B$，因为 $P_s\cdots P_1B=A^{-1}B$。

当 A 经过一些初等列变换变成 I 时，即存在初等矩阵 $Q_i(i=1,2,\cdots,t)$ 使得 $AQ_1\cdots Q_t=I$，则经过相同的初等列变换把 B 变成 BA^{-1}，因为 $BQ_1\cdots Q_t=BA^{-1}$。

例：求 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

解：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_3\to r_3 \\ r_2\leftrightarrow r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -6 & -8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$。

例：求$\begin{bmatrix}1&3&2\\2&5&1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}$。

解：$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&1&0\\1&3&2\\2&5&1\\2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2c_2+c_1\to c_1]{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-5&2&3\\-8&1&5\\2&1&0\end{bmatrix}$，

所以$\begin{bmatrix}1&3&2\\2&5&1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-5&2&3\\-8&1&5\\2&1&0\end{bmatrix}$。

三、 **分块矩阵及矩阵的分块**

1. 求行列式，求矩阵的逆时常常分块，方便计算。（按需要分块）

例 1：设$A=\begin{bmatrix}&&&a_1\\a_2&&&\\&\ddots&&\\&&a_n&\end{bmatrix}$，其中$a_i\neq 0$，求$A^{-1}$。

解：将A分块为$A=\begin{bmatrix}0&a_1\\A_1&0\end{bmatrix}$，则$A^{-1}=\begin{bmatrix}&A_1^{-1}\\a_1^{-1}&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\\a_1^{-1}&&&\end{bmatrix}$.

例 2：求$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&0&0\\0&2&0&0\\1&3&4&1\end{bmatrix}$的行列式.

解：$|A|\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\1&3&4&1\\0&2&0&0\\-2&1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1&2\\4&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\-2&1\end{vmatrix}=(-9)\times 4=-36$.（第二个等式源于把矩阵分成大小相等的 4 块，分块后得到该行列式是一个斜准上三角行列式。）

2. 打“洞”法求行列式$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}$，只要$A,B,C,D$中有一块可逆，就可以求出其行列式。

例如C可逆，则第二行左乘$-AC^{-1}$加到第一行得到$\begin{vmatrix}0&B-AC^{-1}D\\C&D\end{vmatrix}$，对分块阵做第三

类初等行（或列）变换不改变矩阵的行列式，所以$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & B-AC^{-1}D \\ C & D \end{vmatrix}$

$= (-1)^{st} |C| |B - AC^{-1}D|$

其中s,t分别为B,C的阶数。

在行列式的计算中常可以使用上面的方法，将行列式分成4块，其中一块可逆，“打洞”求行列式。

例：设A,B,C,D为n阶矩阵，其中A可逆，证明（1）$|A^T - BA^{-1}C| = |A - C(A^T)^{-1}B|$；（2）$|A - BA^{-1}C| = |A - CA^{-1}B|$；（3）$|A|^2 |A^{-1} - BA\ C| = |A - CA^{-1}B|$。

证明：构造$2n$阶行列式，分别通过第一块和第四块“打洞”求行列式，得到所要的等式。

（1）$\begin{vmatrix} A & C \\ B & A^T \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} A & C \\ B & A \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} A & C \\ B & A^{-1} \end{vmatrix}$

四、 矩阵乘积可交换的条件

1. 设$A,B \in M_n$，其中A可逆，则$AB = BA \Leftrightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$.

例：设$A \in M_n$，$A+I$可逆，证明$A(A+I)^{-1} = (A+I)^{-1}A$.

证明：因为$A(A+I) = (A+I)A$，所以$A(A+I)^{-1} = (A+I)^{-1}A$.

2. 设$A,B \in M_n$，若$AB = kI(k \neq 0)$，则$AB = BA$

3. 设$A \in M_n$，$f(x),g(x)$为多项式，则$f(A)g(A) = g(A)f(A)$。

五、 设$A \in M_m$，求A^n

1. 形如$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$的矩阵，求$A^n$。以后我们会知道任何一个方阵求$n$次方幂，都可以化为上述特殊矩阵的$n$次方幂的计算。

例：设$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}$，求$A^n$。

解：$A=\lambda I+\Delta$，其中 $\Delta=\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times m}$，由于 λI 和 Δ 可以交换，所以有二项展开式，

即：$A^n=(\lambda I+\Delta)^n=\lambda^n I+C_n^1\lambda^{n-1}\Delta+C_n^2\lambda^{n-2}\Delta^2+\cdots+\Delta^n$，由于 Δ 的特殊性，可以很容易

地计算出 Δ 的所有方幂，结果如下：$\Delta=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，$\Delta^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$，

$\Delta^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$，……，$\Delta^{m-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，$\Delta^m=\Delta^{m+1}=\cdots=0$。

所以，$A^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & \\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^n & \ddots & C_n^2\lambda^{n-2} \\ & & & \ddots & C_n^1\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{bmatrix}$。

2. 低阶矩阵求 n 次方幂可以通过归纳法。

例：求 $\begin{bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^n$。

解：设 $A=\begin{bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} 2^2 & \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix} 2^3 & \\ 3\cdot 2^3 & 2^3 \end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix} 2^4 & \\ 4\cdot 2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$，…….

归纳得到，$\begin{bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 2^n & \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{bmatrix}$。

练习题

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角矩阵，且对角线元素为 0，求 A^n 。

2. 求 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\3&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&1&6\\1&3&0&1\\0&0&2&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2&1&5\\0&2&1\\-2&3&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{-1}$ 。

3. 设 A 可逆，将 A 的第二行的 3 倍加到 A 的第一行的矩阵为 B，证明 B 可逆，并求 BA^{-1} 。

4. 设 A 可逆，且 A 的各行元素之和为定数 k，证明 $k\neq 0$，且 A^{-1} 的各行元素之和为定数 $1/k$ 。

5. 设 $A\in M_3$，$B\in M_2$，且 $|A|=5$，$|B|=2$，求

（1）$\begin{vmatrix}0 & A^*\\(2B)^{-1} & 0\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}-A^{-1} & \\ & (3B)^{-1}\end{vmatrix}$；（3）$|(3A)^{-1}-(2A)^*|$。

6. 设 A 实对称，即 A 为实矩阵且 $A^T=A$，且 $A^2=0$，证明 $A=0$。

7. 设 $A\in M_n$，证明：A 反对称（即 $A^T=-A$）当且仅当对所有的 $x\in M_{n,1}$ 有 $x^TAx=0$ 。

8. 设 $A\in M_n$ 满足 $A^TA=I$，证明：（1）$|A|=\pm 1$；（2）若 $|A|=-1$，则 $|A+I|=0$；（3）若 $|A|=1$ 且 n 为奇，则 $|A-I|=0$ 。

9. 证明：当 n（$n\geq 2$）阶矩阵 A 可逆时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ 。

10. 设 $A,B,C\in M_n$ 且 $ABC=I$，求 B^{-1}

11. 求 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^n$.

12. 设 $A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$，其中 B,C 是方阵，求 A^*