第一次习题课题目　　极限的定义与性质

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0,$求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}{n}=0.$

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0,\ \forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N},s.t.$

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|<\varepsilon,\forall n>N_1.$$

对此ε及$N_1,\exists N>N_1,s.t.$

$$\left|\frac{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{N_1}\}}{n}\right|<\varepsilon,\forall n>N.$$

于是，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}{n}\right|\le\left|\frac{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{N_1}\}}{n}\right|+\left|\frac{\max\{a_{N_1+1},a_{N_1+2},\cdots,a_n\}}{n}\right|\le 2\varepsilon,$$

由极限的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}{n}=0.\square$

2. 设$a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1.$求证：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$　　　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=0.$

证明：取定$\varepsilon_0\in(0,1-q).$因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1,\ \exists N\in\mathbb{N},$s.t.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-q\right|<\varepsilon_0,\forall n>N,$$

从而

$$0<a_n<(q+\varepsilon_0)a_{n-1}<\cdots<(q+\varepsilon_0)^{n-N}a_N,\forall n>N;$$

$$0<\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}<(q+\varepsilon_0)^n,\forall n>N.$$

而 $0<q+\varepsilon_0<1,$在以上两式中令$n\to\infty,$由夹挤原理得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=0.\square$

3. 判断数列$\{a_n\}$的收敛性，并求收敛数列的极限。

（1）$a_1>0, a_{n+1}=a_n+(2-a_n^2)/2a_n$.

解：$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}\geq\sqrt{2}$, $a_{n+1}=a_n+(2-a_n^2)/2a_n<a_n$. $\{a_n\}$单调下降有下界，因此有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a(\geq\sqrt{2})$. 在$a_{n+1}=a_n+(2-a_n^2)/2a_n$中令$n\to\infty$, 得

$$a=a+(2-a^2)/2a, \qquad a=\sqrt{2}.\square$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$, 则$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$, 当$n>N$时，有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon, \qquad |a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon+|a_{n-1}|.$$

于是
$$\begin{aligned}|a_n|&<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2^2}\varepsilon+\frac{1}{2^2}|a_{n-2}|<\cdots\\&<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2^2}\varepsilon+\cdots+\frac{1}{2^{n-N}}\varepsilon+\frac{1}{2^{n-N}}|a_N|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2^{n-N}}|a_N|, \forall n>N.\end{aligned}$$

又$\exists N_1>N$, 当$n>N_1$时，有 $\dfrac{1}{2^{n-N}}|a_N|<\varepsilon$. 从而有

$$|a_n|<2\varepsilon, \forall n>N_1.$$

由极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（3）$\{a_n+a_{n+1}\}, \{a_n+a_{n+2}\}$均收敛。

解：设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1})=x, \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n+2})=y$. 由

$$a_{n+1}=\frac{(a_n+a_{n+1})+(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+2})}{2}$$

知$\{a_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2x-y}{2}$.$\square$

（4）$\lambda>0, a_1>0, a_2>0, a_{n+1}=a_n(2-\lambda a_n)$.

解：由$a_{n+1}=a_n(2-\lambda a_n)$得

$$1-\lambda a_{n+1}=(1-\lambda a_n)^2=\cdots=(1-\lambda a_1)^{2^n}.$$

$\lambda>0, a_1>0, a_2=a_1(2-\lambda a_1)>0$知$|1-\lambda a_1|<1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda a_{n+1})=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1-\lambda a_{n+1})}{\lambda}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}(1-\lambda a_{n+1})}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}.\square$$

（5）$a_{n+1}=b(a_n+1/a_n),a_1>0,b>1.$

解：假设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.在$a_{n+1}=b(a_n+1/a_n)$中令$n\to\infty$,得

$$a=b(a+1/a)\quad(1-b)a^2=b$$

与$b>1$矛盾。故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在。

（6）$a_n=\sin n.$

解：若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a\neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\cos n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{2\sin n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n}{2\lim\limits_{n\to\infty}\sin n}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos 2n}{2}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n}{2}=\frac{1}{4},$$

于是，$$1=\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=\frac{5}{16},$$ 矛盾。

若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$，则由$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\cos n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)-\sin n\cos 1}{\sin 1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)-\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\cos 1}{\sin 1}=0,$$

于是 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=0+0=0,$ 矛盾。

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在。□

（7）$b_1+b_2+b_3=0,a_n=b_1\sqrt{n}+b_2\sqrt{n+1}+b_3\sqrt{n+2}.$

解：$$a_n=(b_1+b_2+b_3)\sqrt{n}+b_2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+b_3(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$=b_2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+b_3(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\frac{b_2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2b_3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{2b_3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\quad\square$$

（8）$a_{n+1}=\lambda a_n+(1-\lambda)a_{n-1}, 0<\lambda<1.$

解：$a_{n+1}-a_n=(\lambda-1)(a_n-a_{n-1})=\cdots(\lambda-1)^{n-1}(a_2-a_1)$，

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots(a_2-a_1)+a_1\\&=\left[(\lambda-1)^{n-2}+(\lambda-1)^{n-1}+\cdots 1\right](a_2-a_1)+a_1\\&=\frac{1-(\lambda-1)^{n-1}}{1-(\lambda-1)}(a_2-a_1)+a_1.\end{aligned}$$

而$-1<\lambda-1<0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{(1-\lambda)a_1+a_2}{2-\lambda}$.□

4. 求下列数列的极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha-n^\alpha\right](0<\alpha<1).$

解：$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[(1+\dfrac{1}{n})^\alpha-1\right]<n^\alpha(1+\dfrac{1}{n}-1)=\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$，

令$n\to\infty$, 由夹挤原理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha-n^\alpha\right]=0.$ □

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2.$

解：令$b=\sqrt[n]{n}-1.$则$\sqrt[n]{n}=1+b,$

$$n=(1+b)^n>C_n^3b^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3,\quad b<\left(\frac{6}{(n-1)(n-2)}\right)^{1/3}.$$

于是，$$0<n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2=n^2b<\left(\frac{36n^3}{(n-1)^2(n-2)^2}\right)^{1/3}$$

令$n\to\infty$, 由夹挤原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2=0.$□

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0).$

解：若$0<a<1$, 则$0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<a^n,$

令$n\to\infty$, 得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=0.$

若a=1, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0.$

若 $a>1$, 则 $0<\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<\dfrac{a^n}{a^{1+2+\cdots+n}}=\dfrac{1}{a^{n(n-1)/2}}$,

令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=0.$ □

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$

解：$0<\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\dfrac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}<\dfrac{1}{2n+1}$,

$$0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0.$ □

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{1/(2n+n\sin n)}.$

解：$1<(n+1+n\cos n)^{1/(2n+n\sin n)}<(1+2n)^{1/n}<(3n)^{1/n}=\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}.$

令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{1/(2n+n\sin n)}=1.$ □

5. $I_n=n(an+\sqrt{2+bn+cn^2}),\lim\limits_{n\to\infty}I_n=2.$求$a,b,c.$

解：若 $a\ge 0$, 则 $I_n\ge an^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=+\infty$, 矛盾。故 $a<0$.

$$I_n=n(an+\sqrt{2+bn+cn^2})=\frac{n(a^2n^2+2+bn+cn^2)}{\sqrt{2+bn+cn^2}-an}=\frac{(a^2+c)n^2+bn+2}{\sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{b}{n}+c}-a}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=2$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[(a^2+c)n^2+bn+2\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{b}{n}+c}-a\right)\cdot\lim_{n\to\infty}I_n=2(\sqrt{c}-a).$$

因此 $\qquad a^2+c=b=0,\quad 2(\sqrt{c}-a)=2.$

解得 $\qquad a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=\dfrac{1}{4}.$ □