微积分 A(1)第一次习题课参考答案（第四周）

1. 设 A,B 均是非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；　（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

证明：仅证（1)；（2）的证法类似于（1)。

设 $a=\inf A, b=\inf B$，由确界的定义，$\forall x\in A, y\in B$ 均有 $x\geq a, y\geq b$，因此 $x+y\geq a+b$，即 $a+b$ 是集合 $A+B$ 的一个下界，另一方面 $\forall\varepsilon>0, \exists x_\varepsilon\in A, y_\varepsilon\in B$，使得 $x_\varepsilon<a+\dfrac{\varepsilon}{2}, y_\varepsilon<b+\dfrac{\varepsilon}{2}$，因此 $x_\varepsilon+y_\varepsilon<a+b+\varepsilon$, 即 $\inf(A+B)=a+b=\inf A+\inf B$.

2. 设 A,B 均是由非负实数构成的有界数集，定义 $AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$；　（2）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$

证明：（1）略，仅证（2)。

设 $a=\sup A, b=\sup B$，若 $a=0\vee b=0$，则结论显然成立，下面设 $a，b>0$。

由确界的定义，$\forall x\in A, y\in B$ 均有 $0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b$，因此 $0\leq xy\leq ab$，即 ab 是集合 AB 的一个上界。另一方面 $\forall\varepsilon>0$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{a+b}$ $\exists x_\varepsilon\in A, y_\varepsilon\in B$ 使得 $x_\varepsilon>a-\dfrac{\varepsilon}{a+b}, y_\varepsilon>b-\dfrac{\varepsilon}{a+b}$，因此

$$x_\varepsilon y_\varepsilon>(a-\frac{\varepsilon}{a+b})(b-\frac{\varepsilon}{a+b})=ab-\frac{\varepsilon}{a+b}(a+b)+(\frac{\varepsilon}{a+b})^2>ab-\varepsilon$$

即 $\sup AB=ab=\sup A\cdot\sup B$。

注：（1）的证明中，也要用到类似“$\forall\varepsilon>0$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{a+b}$ $\exists x_\varepsilon\in A, y_\varepsilon\in B$ 使得 $x_\varepsilon>a-\dfrac{\varepsilon}{a+b}, y_\varepsilon>b-\dfrac{\varepsilon}{a+b}$”的技巧。

3. 已知 $a>1, k>0$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$

方法一：令 $a=1+b(b>0)$，当 $n>[k]+1$ 时，$a^n=(1+b)^n>C_n^{[k]+1}b^{[k]+1}$，$\dfrac{n^k}{a^n}<\dfrac{n^k}{C_n^{[k]+1}}\dfrac{1}{b^{[k]+1}}$

并且注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{C_n^{[k]+1}}=0$，可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$。具体证明应用 $\varepsilon-N$ 定义叙述。

方法二：令 $a_n=\dfrac{n^k}{a^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}<1$，故 a_n 最终单调递减。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在。由 $a_{n+1}=a_n\dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{a}$，$A=\dfrac{A}{a}$，所以 $A=0$。

4. 实数列 $\{a_n\}$，如果偶数子列 $\{a_{2n}\}$ 与奇数子列 $\{a_{2n+1}\}$ 均收敛到实数 A，求证数列 $\{a_n\}$ 也收敛到实数 A。

证明：因为偶数子列 $\{a_{2n}\}$ 与奇数子列 $\{a_{2n+1}\}$ 均收敛到实数 A，所以

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists N_1,\forall n>N_1,|a_{2n}-A|<\varepsilon\\&\qquad\exists N_2,\forall n>N_2,|a_{2n+1}-A|<\varepsilon\end{aligned}$$

取 $N=\max\{2N_1,2N_2+1\},\forall n>N,|a_n-A|<\varepsilon$，故数列 $\{a_n\}$ 也收敛到实数 A。

5．证明：若单调数列具有收敛的子列，则此单调数列收敛.

证明:不妨设 $\{a_n\}$ 为一单调增加数列，$\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A=\sup\{a_{n_k}\}$.

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$，所以 $\exists N_0>0$，当 $k\ge N_0$ 时，有 $|a_{n_k}-A|<\varepsilon$.

由于 $\{a_n\}$ 单增，所以当 $n>n_{N_0}$ 时，有 $A-\varepsilon<a_{n_{N_0}}\le a_n$.

对于 $n>n_{N_0}$，总存在 k_n，使得 $n_{k_n}>n$，由单调性知 $a_n\le a_{n_k}$.

综上可知，当 $n>n_{N_0}$ 时，总有 $A-\varepsilon<a_{n_{N_0}}\le a_n\le a_{n_k}\le A$ 成立. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

6. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解：

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}=\frac{\prod\limits_{k=3}^{n+1}k\prod\limits_{k=1}^{n-1}k}{\prod\limits_{k=2}^{n}k^2}=\frac{1\times2\times n(n+1)}{2^2n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

故极限为 $\dfrac{1}{2}$.

7．设 $u_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$（易知数列 $\{u_n\}$ 收敛于 e）.

（1）研究数列 $\{u_n\}$ 的单调性；

（2）利用（1）的结果证明 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

（3）证明：数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

（4）比较 $\left(1000000\right)^{1000000}$ 和 $\left(1000001\right)^{999999}$ 的大小.

解：（1）

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}})^n\cdot\frac{n}{n+1}=(1+\frac{1}{n^2-1})^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\geq(1+\frac{n}{n^2-1})\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1$$

所以数列 $\{u_n\}$ 单调减.

（2）因为 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调减，$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调增，所以

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e，\ (1+\frac{1}{n})^n<e.$$

两边取对数，得

$$(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})>1\Rightarrow\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$$

$$n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})<e\Rightarrow\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

所以 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

（3）$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$，则 $\{a_n\}$ 单调递减，又

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(\mathrm{n})$$

$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln(n)=\ln(n+1)-\ln(\mathrm{n})>0$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

（4）

解法一：

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}=\frac{n+1}{a_n}>\frac{n+1}{e}>1，当 n\geq 2。$$

解法二：

令 $b_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n-1}}$，则 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{(n+1)^{2n}}{(n+2)^n n^n} = \left(\dfrac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^n > 1$

又有 $b_2 = \dfrac{4}{3} > 1$，故 $b_n > 1, \forall n > 1$。故 $(1000000)^{1000000} > (1000001)^{999999}$。

解法三：

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = (n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \geq (n+1)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = 1$$

其中用到 $(1+x)^n \geq 1+nx, \mathrm{n} > 0, \mathbb{N} x \geq -1$。

8．利用 $a_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ 递增，$b_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$ 递减的结果，试证明

（1）$\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < e(n+1)\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

（2）当 $n > 6$ 时，试导出更强的不等式 $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

证明：容易得到 $a_n < a_{n+1} < e, b_n > b_{n+1} > e$。

（1）

$$e^n > \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \frac{(n+1)^n}{\mathrm{n}!}$$

故 $n! > \dfrac{(n+1)^n}{e^n} > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

$$e^n < \prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{n}!}$$

故 $n! < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^n} = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{e} \times e(n+1)\left(\dfrac{n}{e}\right)^n = \dfrac{a_n}{e} \times e(n+1)\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < e(n+1)\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

（2）当 $n=7$ 时，$n!=5040,\mathrm{n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}>5256$，故不等式成立。

因为 $\frac{(n+1)n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}{(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}=\frac{e}{b_n}<1$，故若 $n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$，

则 $(n+1)!<(n+1)n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}<(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$。由数学归纳法，当 $n>6$ 时不等式成立。

9．设 $x_1=\ln a(a>0)$，$x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

解：注意到不等式 $\ln(x)\le x-1$.

显然有 $x+\ln(a-x)\le x+a-x-1=a-1$

所以 $x_n\le a-1$.

所以 $x_{n+1}-x_n=\ln(a-x_n)\ge 0$.

于是极限存在，设其值为 x^*，则 $x^*=x^*+\ln(a-x^*)$，解得 $x^*=a-1$.

（取 $g(a)=\ln a-a+1$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1$，易知 $g(1)=0$ 是 $g(a)=\ln a-a+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值．所以 $\ln a\le a-1$.）

10. 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$ 定义，求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

证明：先证数列 $\{a_n\}$ 收敛。由数学归纳法可证 $a_n>0$，

设 $A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，显然 $A=\frac{1}{1+A}$。

$$|a_{n+1}-A|=\left|\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+A}\right|=\frac{|a_n-A|}{(1+a_n)(1+A)}\le\frac{1}{1+A}|a_n-A|=A|a_n-A|,$$

故　$0\le|a_n-A|\le A|a_{n-1}-A|\le A^2|a_{n-2}-A|\le\cdots\le A^{n-1}|a_1-A|$，

显然，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$。

11．已知当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

（1）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$。

（2）当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$。

证明：

（1）　显然由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0,\text{s.t.}\forall n>N_1,|a_n|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$。

令 $A_\varepsilon=\sum\limits_{k=1}^{N_1}|a_n|$，则 $\exists N_2>0,\text{s.t.}\forall n>N_2,\dfrac{A_\varepsilon}{n}\le\dfrac{\varepsilon}{2}$。

令 $N=\max(N_1,N_2)$，于是 $\forall n>N,\left|\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_n}{n}\right|\le\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_n|}{n}=\dfrac{A_\varepsilon}{n}+\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_n|}{n}\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{n-N}{n}\dfrac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon$。

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，设 $a_n=A+\alpha_n\ ,b_n=B+\beta_n$，

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。

由于 $a_kb_{n-k+1}=(A+\alpha_k)(B+\beta_{n-k+1})=AB+A\beta_{n-k+1}+B\alpha_k+\alpha_k\beta_{n-k+1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[AB+A\frac{\beta_n+\beta_{n-1}+\cdots+\beta_1}{n}+B\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right]$$

而 $\left|\dfrac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\le M\dfrac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}$，其中 $|\beta_n|\le M$，

从而根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta_n+\beta_{n-1}+\cdots+\beta_1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_3}{n}=0$，及

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}=0$，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$。

12．设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$ 存在，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

证：

方法一：

令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_n, S_0=0$，注意到当 $n\geq 2$ 时

$$\sum_{i=1}^{n} ia_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}\left(S_n-S_{j-1}\right)=nS_n-\sum_{j=1}^{n-1}S_j$$

有 $b_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}ia_i}{n}=S_n-\dfrac{\sum_{j=1}^{n-1}S_j}{n}=S_n-\dfrac{n-1}{n}\dfrac{\sum_{j=1}^{n-1}S_j}{n-1}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{j=1}^{n-1}S_j}{n-1}=a$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a-1\times a=0$

方法二:

任给 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$，所以存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有 $a-\varepsilon<a_1+a_2+\cdots+a_n<a+\varepsilon$.

记

$$\begin{aligned}b_n&=a_1+2a_2+\cdots+na_n\\&=[a_1+a_2+\cdots+a_n]+[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_1]+[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_1-a_2]\\&\quad+\cdots+[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}]\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&-n\varepsilon+[a+(a-a_1)+(a-a_1-a_2)+\cdots+(a-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1})]\\&<b_n<\\&n\varepsilon+[a+(a-a_1)+(a-a_1-a_2)+\cdots+(a-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1})]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&-\varepsilon+\frac{a+(a-a_1)+(a-a_1-a_2)+\cdots+(a-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1})}{n}\\&<\frac{b_n}{n}<\\&\varepsilon+\frac{a+(a-a_1)+(a-a_1-a_2)+\cdots+(a-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1})}{n}\end{aligned}$$

根据条件易知 $c_1=a, c_n=a-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}(n=2,3,\cdots,n)$ 的极限为零，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}=0\,.$$

从而对上述$\varepsilon>0$，存在$N>0$（不妨设$N>N_1$），当$n>N$时，有

$$-\varepsilon<\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}<\varepsilon\,.$$

综上，当$n>N$时，有 $-2\varepsilon<\dfrac{b_n}{n}<2\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$.