微积分 A（2）第十次习题课参考答案（第十五周）

1.　求下列级数的收敛域

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{200}}x^n$；　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!e^{nx}$.

解：（1）$D=\left\{x\in R\left|\left|x-k\text{®}\right|\le\frac{\text{®}}{6},k=0,\pm1,\cdots\right.\right\}$；　　（2）$D=\left(-\infty,+\infty\right)$

（3）$D=\{0\}$；　　（4）$D=\text{¤}$

2．考查下列函数项级数在指定区间上是否一致收敛，并给出证明：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$，$|x|<a$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin x}$.

（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n}),x\in[1,+\infty)$　（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$x\in(0,+\infty)$

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$　（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$，$x\in[-1,0]$；

（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$，$x\in[0,1]$　（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nx}$　$x\in[0,+\infty)$ 其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

解：(1)　当 n 充分大时，$\left|\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})\right|\le\frac{3}{2}\frac{a}{n\ln^2 n}$，且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$ 收敛，由 Weierstrass 比较判别法知一致收敛.

(2)　$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\le\left|\frac{nx}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}\right|=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 Weierstrass 比较判别法知一致收敛.

(3)　莱布尼茨级数，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k-\sin x}\right|<\frac{1}{n+1-\sin x}<\frac{1}{n}$，故由柯西收敛准则知一致收敛.

（4）设 $x_n=n\ln^2 n$，则 $u_n(x_n)=\ln 2$ 不趋于 0，故非一致收敛

（5）设 $x_n=(\frac{2}{3})^n$，则 $u_n(x_n)\to 1\ne 0$ 不趋于 0，故非一致收敛

（6）$\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 连续，$S(x)=\begin{cases}1, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 不连续，故非一致收敛

3．设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数．$g_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$．求证：

（1）在任意闭区间 $[a,b]$ 上，$\{g_n(x)\}$ 一致收敛于 $f'(x)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx=f(b)-f(a)$.

证明：(1)　由中值定理：

$$g_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'\left(x+\frac{¯(x,n)}{n}\right)\left(0<¯(x,n)<1\right).$$

由于 $f'(x)$ 在 R 上连续，所以在有界闭区间 $[a,b+1]$ 上一致连续．即对于任意 $£>0$，存在 $¢>0$，使得当 $|x-y|<¢$ 时，$|f'(x)-f'(y)|<£$．特别取 $N>\frac{1}{¢}$，则对于 $n>N$，取 $y=x+\frac{¯(x,n)}{n}$，则有 $\left|f'(x)-f'\left(x+\frac{¯(x,n)}{n}\right)\right|=|f'(x)-g_n(x)|<£$．即 $g_n(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$；

(2)　对于一致收敛的 $g_n(x)$，可在积分号下取极限．然后利用牛顿－莱布尼茨公式.

4．设函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n® x^2$.

（1）证明：当 $0<L<3$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n® x^2$ 在 $(-L,L)$ 内一致收敛；

（2）求 $\lim\limits_{x\to1}S(x)$.

（1）证 $|L|<3$ 时，$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\le\frac{|x|^n}{3^n}\le(\frac{L}{3})^n$，由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{L}{3})^n$ 收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$

在 $(-L,L)$ 内一致收敛，

（2）取 $L(3>L>1)$，$\frac{x^n}{3^n}\cos n® x^2$ 在 $(-L,L)$ 内连续，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$ 在 $(-L,L)$ 内一致收敛，所以 $S(x)$ 在 $(-L,L)$ 内连续，从而 $S(x)$　在 $x=1$ 连续，

$$\lim_{x\to1}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to1}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

5．设$u_n(x) \in C[a,b], n \in N$，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$内一致收敛，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a), \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$均收敛；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

（3）考察函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, x \in (0,+\infty)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x \in (1,+\infty)$的一致收敛性

证明：用 Cauchy 一致收敛准则

（1）由条件$\forall \pounds > 0, \exists N$，使得当$n > N$，任意自然数$p$，$\forall x \in (a,b)$有

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \pounds \qquad (*)$$

又$u_n(x) \in C[a,b], n \in N$，在（*）中令$x \to a^+$，即有

$$\left|u_{n+1}(a) + u_{n+2}(a) + \cdots + u_{n+p}(a)\right| \le \pounds \text{，}$$

由数项级数 Cauchy 收敛准则，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$收敛.

同理可证$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$收敛.

（2）由上述证明可知，$\forall \pounds > 0, \exists N$，使得当$n > N$，任意自然数$p$，$\forall x \in [a,b]$

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| \le \pounds \text{，}$$

由 Cauchy 一致收敛准则知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

（3）非一致收敛。

6．设函数$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x + \dfrac{1}{n})^n$.

（1）确定$f(x)$的定义域D；（2）证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x + \dfrac{1}{n})^n$在$D$上不一致收敛；

（3）证明$f(x) \in C(D)$.

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(x+\dfrac{1}{n})^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|x + \dfrac{1}{n}\right| = |x|$,

所以$|x|<1$时级数收敛，$|x|>1$时级数发散，$|x|=1$时级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{n})^n$，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$知这两个级数发散，从而$f(x)$的定义域为$(-1,1)$.

（2）用反证法，再利用上题结果.

（3）只须证$\forall x_0\in(-1,1)$，$f(x)$在x_0连续．事实上总$\exists\text{¢}$ $(|x_0|<\text{¢}<1)$，因对

$\forall n,\forall x\in[-\text{¢},\text{¢}]$有$\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|\le(|x|+\frac{1}{n})^n\le(\text{¢}+\frac{1}{n})^n$，

由根式判敛法可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\text{¢}+\frac{1}{n})^n$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$在$[-\text{¢},\text{¢}]$上 一致收敛，又

$(x+\frac{1}{n})^n\in C[-\text{¢},\text{¢}]$，因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$在$[-\text{¢},\text{¢}]$上连续，由此可得$f(x)$在$x_0$连续.

由x_0的任意性，即有$f(x)\in C(-1,1)$.

7．证明：函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$上有定义且有界.

证明：$x=0$时，级数显然收敛；$x\neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}x^2e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n}x^2e^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}e^{-x}=e^{-x}=\begin{cases}<1, & x>0,\\ >1, & x<0.\end{cases}$$

因此，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$当$x\ge 0$时收敛，$x<0$时发散. 即函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$上有定义.

设$f(x)=x^2e^{-nx}$，$x\in[0,+\infty)$，

$$f'(x)=e^{-nx}(2x-nx^2)=e^{-nx}x(2-nx)\begin{cases}>0, & 0<x<\frac{2}{n}\\ 0, & x=\frac{2}{n}\\ <0, & x>\frac{2}{n}\end{cases}$$ 所以

$f(x)=x^2e^{-nx}$在$x\in[0,+\infty)$上取得最大值$f(\frac{2}{n})=\frac{4}{n^2}e^{-2}$，从而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}\le\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\frac{4}{n^2}e^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{-2}}{n^{3/2}}\quad x\in[0,+\infty)$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{-2}}{n^{3/2}}$ 收敛可得函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

8．若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$，而每一个 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致有界.

证明：已知 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$，则对于 $1>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$\forall x\in I$ 有

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<1，即有\left|f(x)\right|<\left|f_n(x)\right|+1，$$

取定某个 $n_0>N$，有

$$\left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|<1 即 \left|f(x)\right|<\left|f_{n_0}(x)\right|+1 .$$

已知 $f_{n_0}(x)$ 在 I 上有界．即 $\exists L>0,\forall x\in I$ 有 $\left|f_{n_0}(x)\right|<L$，从而，$\forall x\in I$，有

$$\left|f(x)\right|<\left|f_{n_0}(x)\right|+1<L+1 .$$

于是 $\forall n>N$，$\forall x\in I$ 有

$$\left|f_n(x)\right|<\left|f(x)\right|+1<L+2 .$$

又已知 $f_k(x)$ 在 I 上有界（$k=1,2,\cdots,N$）．即 $\exists M_k>0,\ \forall x\in I$ 有

$$|f_k(x)|\le M_k, k=1,2,\cdots,N .$$

取 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_N,L+2\}$，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\forall x\in I$ 有

$\left|f(x)\right|<M$，即 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致有界.

9.求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 的收敛域,并证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内可导 。

解：因为 $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(n+1)x}}{1+(n+1)^2}\frac{1+n^2}{e^{-nx}}=e^{-x}$，所以当 $x>0$ 时，$e^{-x}<1$，原级数收敛；当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1$，原级数发散；当 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 收敛.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 的收敛域为 $[0,+\infty)$.

对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，由于 $0<\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\le\dfrac{1}{1+n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．又因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续．

对任意的 $x_0\in(0,+\infty)$，取 a 满足 $0<a<x_0$．当 $x\ge a$ 时，由于 $\left|\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right|\le\dfrac{n\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，从而可知函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，故在 x_0 处可导．考虑到 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性，可知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导．

10.　（1）证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 是 $(0,+\infty)$ 上连续，进一步证明在 $(0,+\infty)$ 上可微.

（2）证明：Riemann ¸ 函数 ¸ $(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续，并在这个区间内有各阶连续导数.