微积分 A（2）第六次习题课题目（第九周）

1. 设有空间区域 Ω_1 ： $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$ ，

及 Ω_2： $x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，则（　　）。

（A） $\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xdv$　　（B） $\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

（C） $\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$　　（D） $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

2.选择题

（1）已知 $f\in C^3(\mathbb{R}^3)$，则 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(x,y,z)dz=$（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^y f(x,y,z)dz$

B. $\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^z f(x,y,z)dy$

C. $\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_y^1 f(x,y,z)dx$

D. $\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_y^1 f(x,y,z)dx$

（2） $\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_y^1 \frac{\cos z}{1-z}dx=$【　】

A. $\frac{1-\cos 1}{2}$　B. $\frac{1-\sin 1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sin 1+\cos 1}{2}$

3. 交换积分次序: $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

（1）先积 y，再积 x，最后积 z；（2）先积 x，再积 z，最后积 y .

4. 证明： $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$.

5. 求三重积分: $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$ ，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-z^2}\\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$

6. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2)zdxdydz$，　其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

7. 计算

(1) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz$，其中积分区域 Ω 是由 **0** á ***x*** á ***a***，**0** á ***y*** á ***b***，**0** á ***z*** á ***c*** 所确定。

(2) 计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2z}(ax+by+cz)dxdydz$

8. 设Ω由曲面$x^2+y^2=az$和曲面$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$　($a>0$)所围成，将

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 化成三类坐标系下的三次积分。

9.求下列体积

（1）求由曲面$S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$所围立体Ω的体积。

（2）由六个平面 $3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积为______________________________

（3）由$z=x-y, z=0, x^2+y^2=ax, (a>0)$围成立体体积；

（4）设$A=(a_{ij})$为3×3实对称正定矩阵，$\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体$V$的体积为 $|V|=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

10.令曲面S在球坐标下方程为$r=a(1+\cos\varphi)$，Ω是S围成的有界区域，计算Ω在直角坐标系下的形心坐标。

11.设$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$在区间$[-h,h]$上连续，证明：$\iiint\limits_{V} f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$。

12. 设 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$　$(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

13. 计算$I=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)d\sigma$， 其中$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$.