微积分 A1 第 5 次习题课答案　　导数与高阶导

1. 设 $y=f(g(x))$，求 y'''.

解： $y'=f'(g(x))g'(x)$，

$$y''=f''(g(x))\left(g'(x)\right)^2+f'(g(x))g''(x)$$

$$y'''=f'''(g(x))\left(g'(x)\right)^3+2f''(g(x))g'(x)g''(x)+f''(g(x))g'(x)g''(x)+f'(g(x))g'''(x)$$

$$=f'''(g(x))\left(g'(x)\right)^3+3f''(g(x))g'(x)g''(x)+f'(g(x))g'''(x)$$

2. 设 f,g 在 x_0 的邻域中有定义,且

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=0,\qquad \left|f(x)\right|\le M\left|x-x_0\right|,\forall\left|x-x_0\right|<\delta.$$

求证：$F(x)=f(x)g(x)=0$在x_0处可导,且$F'(x_0)$=0.

证明： 已知$\left|f(x)\right|\le M\left|x-x_0\right|,\forall\left|x-x_0\right|<\delta$，则$\left|f(x_0)\right|\le M\left|x_0-x_0\right|=0,F(x_0)=0$，且

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-0\right|=\left|\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}\right|\le M\left|g(x)\right|,\qquad \forall\left|x-x_0\right|<\delta.$$

于是

$$-M\left|g(x)\right|\le\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\le M\left|g(x)\right|,\qquad \forall\left|x-x_0\right|<\delta.$$

令 $x\to x_0$，得

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=0.\square$$

3. 设 $xf(x)$ 在 $x_0\ne 0$ 处有导数 A , 证明$f'(x_0)$ 存在并求 $f'(x_0)$.

证明： $xf(x)$ 在 $x_0\ne 0$ 处有导数 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}=\mathrm{A}$. 记

$$\rho(x)=\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}-\mathrm{A},$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\rho(x)=0$，且

$$xf(x)-x_0 f(x_0)=\mathrm{A}(x-x_0)+\rho(x)(x-x_0).$$

于是

$$xf(x)-xf(x_0)+xf(x_0)-x_0 f(x_0)=\mathrm{A}(x-x_0)+\rho(x)(x-x_0),$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\mathrm{A}-f(x_0)}{x}+\frac{1}{x}\rho(x),$$

令 $x\to x_0$，得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\mathrm{A}-f(x_0)}{x_0}.\square$$

4. 设：设 $f'\in C[0,+\infty)$, 证明: 存在常数 α,β, 使得函数

$$g(x)=\begin{cases}\alpha f(-x)+\beta f(-2x), & x<0\\ f(x), & x\geq 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导.

证明：$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而在 $x=0$ 处连续，应有

$$f(0)=g(0)=\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha f(-x)+\beta f(-2x)\right)=(\alpha+\beta)f(0).$$

$x<0$ 时，$g'(x)=-\alpha f'(-x)-2\beta f'(-2x)$。而 $f'\in C[0,+\infty)$，因此

$$g'_-(0)=-\alpha f'(0)-2\beta f'(0).$$

由 $g'_-(0)=g'_+(0)$，应有

$$-(\alpha+2\beta)f'(0)=f'(0).$$

令 $\alpha+\beta=1, -(\alpha+2\beta)=-1.$ 解得 $\alpha=3,\beta=-2.$ 此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导.$\square$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, $a_n\leq x_0\leq b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=x_0$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0).$$

证明：$a_n\leq x_0\leq b_n$,则 $\dfrac{b_n-x_0}{b_n-a_n}+\dfrac{x_0-a_n}{b_n-a_n}=1$, 且 $0\leq\dfrac{b_n-x_0}{b_n-a_n}\leq 1, 0\leq\dfrac{x_0-a_n}{b_n-a_n}\leq 1$. 于是

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right)\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}+\left(\frac{f(x_0)-f(a_n)}{x_0-a_n}-f'(x_0)\right)\frac{x_0-a_n}{b_n-a_n}\right|$$

$$\le\left|\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\left|\frac{f(x_0)-f(a_n)}{x_0-a_n}-f'(x_0)\right|$$

令 $n\to+\infty$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=x_0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)\right|=0,\quad \text{即}\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0).\square$$

6. 试求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ (已知$f'(x_0)$存在).

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{f(x_0)}\right)^{1/(\ln x-\ln x_0)}$ (已知$x_0>0,\ f'(x_0)$存在$,\ f(x_0)>0$).

（3）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{1+nf(x)}\right)$ (已知f为正周期函数$,\ f\in C^1(\mathbb{R})$).

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{x}{i}\right)$ (已知$f'(0)$存在$,\ f(0)=0$).

解：（1） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-xf(x)+xf(x)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}+f(x)\right)=-x_0f'(x_0)+f(x_0).$$

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{f(x_0)}\right)^{1/(\ln x-\ln x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{\frac{\ln f(x)-\ln f(x_0)}{\ln x-\ln x_0}}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{\frac{\ln f(x)-\ln f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{\ln x-\ln x_0}}$

$$=e^{(\ln f(x))'\big|_{x=x_0}\big/(\ln x)'\big|_{x=x_0}}=e^{x_0f'(x_0)/f(x_0)}.$$

（3） $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{1+nf(x)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f'(x)(1+nf(x))-f(x)(1+nf(x))'}{(1+nf(x))^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{(1+nf(x))^2}.$

$f\in C^1(\mathbb{R})$， f为正周期函数, 设周期为T, 则 f'亦为T-周期连续函数, 由闭区间上连续函数的最值定理，存在m, M $\in\mathbb{R}$,s.t.

$$\mathrm{m}=\min_{x\in[0,\mathrm{T}]} f(x)=\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)>0,$$

$$\mathrm{M}=\max_{x\in[0,\mathrm{T}]}\left|f'(x)\right|=\max_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|.$$

于是 $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{1+nf(x)}\right)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f'(x)}{(1+nf(x))^2}\right|\le\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{M}}{(1+n\cdot\mathrm{m})^2}=0.$$

故 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{1+nf(x)}\right)=0.$$

（4） $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{x}{i}\right)=\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x/i)-f(0)}{x/i}\cdot\frac{1}{i}=f'(0)(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}).$□

7. 求和

（1）$\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{kx}$　　（2）$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kk^2$

（3）$\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$　　（4）$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$

解：（1） $\sum\limits_{k=0}^{n}e^{kx}=\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$，两边求导，得

$$\sum_{k=1}^{n}ke^{kx}=\sum_{k=0}^{n}ke^{kx}=\frac{ne^{(n+2)x}-(n+1)e^{(n+1)x}+e^x}{(1-e^x)^2}.$$

（2） $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ ，

两边求导得　$n(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}.$

两边同乘 x 得　$nx(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^k.$

两边求导得　$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^kx^{k-1}$

令 $x=1$ 得　$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kk^2=n\cdot2^{n-1}+n(n-1)\cdot2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}.$

（3） $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{2}x-\cos\frac{2k+1}{2}x\right)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\cos kx=\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{2n+1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x)\sin\frac{x}{2}-(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{-1+(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

(4) $\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}=\ln(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n})=\ln\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\ln\sin x-\ln\sin\frac{x}{2^n}-n\ln 2$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=-\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}\right)'$$

$$=-\left(\ln\sin x-\ln\sin\frac{x}{2^n}-n\ln 2\right)'=-\cot x+\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}.\square$$

8. 求下列函数的 n 阶导数

（1） $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$ （2） $f(x)=x^2\cos 2x$

（3） $f(x)=e^x\sin x$ （4） $f(x)=x^n\ln x$

解：（1） $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+d/c)+b-ad/c}{c(x+d/c)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}(x+d/c)^{-1}$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{x+d/c}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{bc-ad}{c^2}\cdot n!(x+d/c)^{-(n+1)}.$$

（2） $(\cos 2x)'=-2\sin 2x=2\cos(2x+\frac{\pi}{2})$

$$(\cos 2x)'' = -4\cos 2x = 2^2\cos(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos 2x)''' = 8\sin 2x = 2^3\cos(2x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos 2x)^{(4)} = 16\cos 2x = 2^4\cos(2x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(x) = (x^2\cos 2x)^{(n)} = x^2(\cos 2x)^{(n)} + 2nx(\cos 2x)^{(n-1)} + n(n-1)(\cos 2x)^{(n-2)}$$

$$= 2^n x^2\cos(2x+\frac{n}{2}\pi) + 2^n nx\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi) + 2^{n-2}n(n-1)\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)$$

$$= 2^n\left(x^2-\frac{n(n-1)}{4}\right)\cos(2x+\frac{n\pi}{2}) + 2^n nx\sin(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

（3） $(e^x\sin x)' = e^x(\sin x+\cos x) = \sqrt{2}e^x(\sin x+\frac{\pi}{4}),$

$$(e^x\sin x)'' = \sqrt{2}e^x\left(\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{\pi}{4})\right) = (\sqrt{2})^2e^x\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{4}),$$

设 $(e^x\sin x)^{(m)} = (\sqrt{2})^m e^x\sin(x+\frac{m\pi}{4})$, 则

$$(e^x\sin x)^{(m+1)} = (\sqrt{2})^m\left(e^x\sin(x+m\cdot\frac{\pi}{4})\right)'$$

$$= (\sqrt{2})^m e^x\left(\sin(x+\frac{m\pi}{4})+\cos(x+\frac{m\pi}{4})\right) = (\sqrt{2})^{m+1}\sin(x+\frac{m+1}{4}\pi).$$

由归纳法知 $(e^x\sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4}).$

（4） $f^{(n)}(x) = (f'(x))^{(n-1)} = (nx^{n-1}\ln x + x^{n-1})^{(n-1)}$

$$= (nx^{n-1}\ln x)^{(n-1)} + (n-1)! = (nx^{n-1}\ln x)^{(n-1)} + n!\cdot\frac{1}{n}$$

$$= (n(n-1)x^{n-2}\ln x + nx^{n-2})^{(n-2)} + n!\cdot\frac{1}{n}$$

$$= (n(n-1)x^{n-2}\ln x)^{(n-2)} + n!(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$= (n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ln x + n(n-1)x^{n-3})^{(n-3)} + n!(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$= (n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ln x)^{(n-3)} + n!(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$= n!(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n})$$

9. 设 $P_{n,m}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$，求 $P_{n,m}(1)$.

解：记 $f(x)=(1+x+x^2+x^{m-1})^n$，由 Leibniz 公式得

$$P_{n,m}(x)=\left((1-x)^n f(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-x)^{n-k}f^{(n-k)}(x),$$

$$P_{n,m}(x)=\left((1-x)^n f(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-x)^{n-k}f^{(n-k)}(x)$$

10. 设 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^m$，求 $y^{(n)}(0)$.

解： $y'=m(x+\sqrt{x^2+1})^{m-1}(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\dfrac{my}{\sqrt{x^2+1}}$，即

$$\sqrt{x^2+1}y'=my.$$

两边对 x 求导，得 $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y'+\sqrt{x^2+1}y''=my'=\frac{m^2y}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$xy'+(x^2+1)y''=m^2y.$$

两边对 x 求 n 阶导，由 Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}&xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+(x^2+1)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}=m^2y^{(n)},\\&(x^2+1)y^{(n+2)}+(1+2n)xy^{(n+1)}+(n^2-m^2)y^{(n)}=0.\end{aligned}$$

令 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0)=(m^2-n^2)y^{(n)}(0).$$

又 $y(0)=1, y'(0)=m, y''(0)=m^2$，故

$$\begin{aligned}&y^{(2k+1)}(0)=(m^2-(2k-1)^2)(m^2-(2k-3)^2)\cdots(m^2-3^2)(m^2-1^2)m,\\&y^{(2k)}(0)=(m^2-(2k-2)^2)(m^2-(2k-4)^2)\cdots(m^2-4^2)(m^2-2^2)m^2.\square\end{aligned}$$