微积分 A(2)第一次习题课参考答案（第三周）

一、n 维空间的点集

1. $A,B \subseteq R^n$，证明下列结论：

（1）$A^\circ \bigcup B^\circ \subseteq (A \bigcup B)^\circ$　（2）$\partial(A \bigcup B) \subseteq \partial A \bigcup \partial B$　（3）$A^\circ = A \setminus \partial A$

证明：（1）$\forall a \in A^\circ \bigcup B^\circ$，那么 $a \in A^\circ$ 或者 $a \in B^\circ$。如果 $a \in A^\circ$，那么存在 ¢ >0，使得 $B(a,¢) \subseteq A$，因此 $B(a,¢) \subseteq A \bigcup B$，从而 $a \in (A \bigcup B)^\circ$；若 $a \in B^\circ$ 有同样的结论。

（2）$\forall a \in \partial(A \bigcup B)$，那么 $\forall ¢ > 0,$ 均有 $U(a,¢) \bigcap (A \bigcup B) \neq \varnothing$ 且 $U(a,¢) \bigcap (A \bigcup B)^c \neq \varnothing$

因此 $[U(a,¢) \bigcap A] \bigcup [U(a,¢) \bigcap B] \neq \varnothing$ 且 $U(a,¢) \bigcap (A^c \bigcap B^c) \neq \varnothing$，从第二个表达式可以看出，$U(a,¢) \bigcap A^c \neq \varnothing$，$U(a,¢) \bigcap B^c \neq \varnothing$。由于 $[U(a,¢) \bigcap A] \bigcup [U(a,¢) \bigcap B] \neq \varnothing$，那么 $U(a,¢) \bigcap A, U(a,¢) \bigcap B$ 至少有一个不是空集. 不妨设 $U(a,¢) \bigcap A$ 不为空集，因此 $a \in \partial A$，进一步可以得到 $a \in \partial A \bigcup \partial B$。

（3）首先 $A^\circ \subseteq A, A^\circ \bigcap \partial A = \varnothing$，从而 $A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$

下面只需证明，$A \setminus \partial A \subseteq A^\circ$。事实上，$\forall a \in A \setminus \partial A$，可以得到 $a \in A, a \notin \partial A$。由 $a \notin \partial A$ 可知，$\exists ¢ > 0,$ 要么 $U(a,¢) \bigcap A = \varnothing$，要么 $U(a,¢) \bigcap A^c = \varnothing$。由于 $a \in A$，显然 $U(a,¢) \bigcap A$ 非空，只能 $U(a,¢) \bigcap A^c = \varnothing$，从而有 $U(a,¢) \subseteq A$，即 $a \in A^\circ$。

2. $f: R^n \to R^m$ 是一个连续映射，求证：$\forall R^m$ 中的开集 G，它的原像集 $f^{-1}(G) = \{x \in R^n \mid f(x) \in G\}$ 是 R^n 中的开集。

证明：由于 $f: R^n \to R^m$ 是一个连续映射，由定义，有 $\forall a \in R^n$，$\forall £ > 0, \exists ¢ > 0$，当 $d_n(x,a) < ¢$ 时，有 $d_m(f(x), f(a)) < £$。

下面 $\forall a \in f^{-1}(G)$，得到 $f(a) \in G$。由于 G 为 R^n 中的开集，那么 $\exists £_0 > 0$，使得 $U(f(a), £_0) \subseteq G$。对这个 $£_0 > 0$ 利用连续的定义，$\exists ¢_0 > 0$，当 $d_n(x,a) < ¢_0$ 时，有 $d_m(f(x), f(a)) < £_0$。即 $x \in U(a, ¢_0)$ 时，有 $f(x) \in U(f(a), £_0) \subseteq G$，从而 $x \in f^{-1}(G)$。即 $U(a, ¢_0) \subseteq f^{-1}(G)$，即 $f^{-1}(G)$ 是 R^n 中的开集，证毕。

二、多元函数的极限与连续

3. 下列极限是否存在？若存在，求出极限值；若不存在，说明理由。

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$；　　（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\cdot(x+y+1)}=e^2$；

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0$.

（3）$\left|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$。

(4) 令 $y=x$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3}{x^2+x}=0$

再令 $y=-x^2+x^3$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+(-x^2+x^3)^3}{x^3}=1$ 因此原极限不存在

(5) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right|+\left|\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right|=\frac{|x|}{\frac{3}{4}x^2+(\frac{x}{2}-y)^2}+\frac{|y|}{\frac{3}{4}y^2+(\frac{y}{2}-x)^2}$$

$$\le\frac{4}{3}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ =0.

4. 讨论下列函数的累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 与二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$

（1）$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\cdot y\neq0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$；（2）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

（3）$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

解：（1）两个二次极限都不存在，但二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

（2）$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

（3）$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；同理，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$。

沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$；沿直线 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 点，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

5. 若 $z=f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，证明：$f$ 在 R^2 上有最小值。

证明：任取 $P\in R^2$，设 $f(P)=M$；

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=+\infty \Rightarrow \exists d>0,\forall ° =\sqrt{u^2+v^2}>d : f(u,v)>M；$$

存在 $Q\in B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le d^2\}$： $f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B} f(x,y)$.

显然，$f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in R^2} f(x,y)$。

三、偏导数与可微

6. 证明下列各题

(1)证明:若 $f(x,y)$ 的偏导数在点 $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ 的某邻域内存在且有界,则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

证明：$\forall £>0$，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\le|f_x(¶,y)|\,|\Delta x|+|f_y(x_0,¦)|\,|\Delta y|$$

$$\le M(|\Delta x|+|\Delta y|)\le 2M\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ .$$

其中 M 为 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的界.

取 $¢=\dfrac{£}{M}$，当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<¢$ 时，$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le £$.

（2）设 $f(x,y)=(x+y)¨(x,y)$，其中 $¨\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在点（0, 0）处连续,，证明 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在（0, 0）点处可微，并写出全微分 $\boldsymbol{df(x,y)}$ 。

[解]要明确可微与微分的概念，极限性质、连续的定义。

$f(0,0)=0$，$\Delta f=(\Delta x+\Delta y)¨(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x+\Delta y)¨(\Delta x,\Delta y)$

因为 $¨(x,y)$ 在点（0, 0）处连续，$¨(x,y)=¨(0,0)+\sim(x,y)$，（$(x,y)\to 0$ 时 $\sim(x,y)\to 0$），则 $\Delta f=(\Delta x+\Delta y)¨(0,0)+(\Delta x+\Delta y)\sim(\Delta x,\Delta y)$

而 $\dfrac{(\Delta x+\Delta y)\sim(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0$，所以 $\Delta f=¨(0,0)\Delta x+¨(0,0)\Delta y+o(°)$

根据可微与微分的定义，$f(x,y)$ 在（0, 0）点处可微，$\boldsymbol{f(x,y)}$ 在（0, 0）处的全微分

$df(x,y) = \ddot{}\,(0,0)dx + \ddot{}\,(0,0)dy$ 。

7. 设 $f_x'(x_0, y_0)$ 存在， $f_y'(x\quad y)$ 在点 $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ 处连续，证明 $f(x,y)$ 在点 $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ 处可微.

分析：证明函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在某点可微的关键, 是利用题目条件, 将函数改变量

$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ 表示成 $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \sim$ ，其中当 $x^2+y^2\to 0$

时, ~ 与 $\sqrt{x^2+y^2}$ 比较是高阶无穷小量. 或者设法将 Δf 表示成

$A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \sim\cdot\Delta x + \quad\cdot\Delta y$, 其中当 $\boldsymbol{x^2}$ H $\boldsymbol{y^2}$ ì **0** 时, ~ ì **0,** ì **0**.

证：

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\end{aligned} \quad (1)$$

因为 $\boldsymbol{f_y'(x,y)}$ 在点 $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ 连续，所以，根据一元函数的拉格朗日微分中值定理，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)$$

$$= f_y'(x_0+\Delta x, y_0+{}^{-}\Delta y)\cdot\Delta y = [f_y'(x_0, y_0) + \quad (°)]\cdot\Delta y \qquad (2)$$

其中，° $=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ， **(°)** 为当 ° ì **0** 时的无穷小量.

又由已知， $\boldsymbol{f_x'(x_0, y_0)}$ 存在，根据偏导数定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x'(x_0, y_0)$$

根据有极限函数和无穷小量的关系，得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x'(x_0, y_0) + \sim(\Delta x)$$

其中，~**(a*x*)** 是当 a*x* ì **0** 时的无穷小量.

即 $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\cdot\Delta x + \sim(\Delta x)\cdot\Delta x$ (3)

将(2), (3)式代入(1)式, 得到

$$\Delta f = f_x'(x_0, y_0)\cdot\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\cdot\Delta y + \sim(\Delta x)\cdot\Delta x + \quad (°)\cdot\Delta y$$

因为当 $\boldsymbol{x^2}$ H $\boldsymbol{y^2}$ ì **0** 时， **~(a*x*) 和 (°)** 都是无穷小量, 所以根据函数在一点可微性定义

推出 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在点 $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ 处可微.

8. 求解下列有关偏导数的题目.

（1）设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz；

（2）　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（3）若函数 $f(u)$ 有二阶导数，设函数 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（4）设函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（5）　设函数 $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$，证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（6）设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec v=\vec i-\vec j$, $\vec u=-\vec i+2\vec j$.

如果 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec v}=-2,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec u}=1$，求 $df(x_0,y_0)$；

答案：$(\sqrt5-4\sqrt2)dx+(\sqrt5-2\sqrt2)dy$.

（7）设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 且在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分 $\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1$,

$\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$. 则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　　　　）

A. $\vec i$　　　*B.* $\vec j$　　　*C.* $\vec i+\vec j$　　　*D.* $\vec i-\vec j$

（8）$z=\sqrt{|xy|}$，　求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

解：
$$z=\begin{cases}\sqrt{|y|}\sqrt{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ \sqrt{|y|}\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

$x>0$　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{|y|}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；　$x<0$　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{|y|}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}$

$x=0$　$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{|y|}\sqrt{|x|}-0}{x}=\begin{cases}\infty & y\neq0\\ 0 & y=0\end{cases}$

9. 求解下列各题，并体会多元函数可微、连续、偏导数存在性与连续性之间的关系。

（1）下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（ D ）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

解题思路 用两个条件判断：(1) $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$；

$$(2)\quad \frac{\Delta f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\xrightarrow{\circ\to 0}0\ (1)$$

条件(1)都成立，只有 D 中条件(2)成立, 故选 D.

（2）设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点（ B ）

(A) 连续, 但偏导数不存在；　(B) 偏导数存在, 但不可微；

(C) 可微；　(D) 偏导数存在且连续.

解题思路 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 在 $(0,0)$ 的两个偏导数都等于零. 如果 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 在 $(0,0)$ 可微, 则 $df(0,0)=0$, 从而 $\Delta f(x,y)-df=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$； 但它不是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小.

（3）若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在，则（ B ）

（A） $f(x,y)$ 在 P_0 点连续；

（B）一元函数 $z=f(x,y_0)$ 和 $z=f(x_0,y)$ 分别在 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 连续；

（C） $f(x,y)$ 在 P_0 点的微分为 $dz=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}dx+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}dy$；

（D） $f(x,y)$ 在 P_0 点的梯度为 $grad\ f(P_0)=\left.(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y})\right|_{P_0}$.

（4）如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（ C ）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\bar{v}$ 的方向导数不存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数都存在且连续；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

10. 分别考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-e^{-xy}) & x\neq 0\\ y & x=0\end{cases}$ 在全平面上连续性与可微性，并证明.

解:这里只讨论关于 x 的连续性与可微性。对于 y 的类似.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(1-e^{-xy})=y=f(0,y)$ ， 因此 $f(x,y)$ 连续。

$x\neq 0$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}(1-e^{-xy})+\dfrac{ye^{-xy}}{x}$

$x=0$ 时，$\dfrac{\partial f(0,x)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}(1-e^{-xy})-y}{x}=-\dfrac{y^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}(1-e^{-xy})+\dfrac{ye^{-xy}}{x}\right)=-\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}$

偏导数连续，所以可微。

11. 设 $u(x,y)\in C^2, u\neq 0$, 证明 $u(x,y)=f(x)\ddot{}(y)$ 的充要条件

是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

证：

"$\Rightarrow$"易,

"$\Leftarrow$"：

已知 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，令 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=V$，□有 $V\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=u\dfrac{\partial V}{\partial x}$,

$\therefore \dfrac{u\frac{\partial V}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=\dfrac{\partial(\frac{V}{u})}{\partial x}=0$　　$\therefore \dfrac{V}{u}$ □x无□□

□$\dfrac{V}{u}=\cdot\ (y)=\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，而 $\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial(\ln|u|)}{\partial y}$　$\therefore \dfrac{\partial(\ln|u|)}{\partial y}=\cdot\ (y)$

$\ln|u|=\int\cdot\ (y)dy+g(x)$　[$g(x)$□y是常□]

$u=\pm e^{\int\cdot\ (y)dy+g(x)}=\pm e^{\int\cdot\ (y)dy}\cdot e^{g(x)}=f(x)\cdot\ddot{}(y)$