线性代数讨论课（一）（行列式部分）答案

一、选择、填空

(1) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le 3}(x_i - x_j) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$.

解：$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le 3}(x_i - x_j)$。

(2) 已知n阶排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为k，则n阶排列$i_ni_{n-1}\cdots i_1$的逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

解：因为$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数是k，所以$i_ni_{n-1}\cdots i_1$的正序数为k，从而$i_ni_{n-1}\cdots i_1$的逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}-k$。

(3)　$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix} = 0$的实根的个数为 2.

解：因为

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x-2 \\ 0 & 2x-1 & 2x-2 \\ -x+2 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ 0 & 1 & 2x-2 \\ -x+2 & -x+3 & 4x-5 \end{vmatrix} =$$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 2x-2 \\ -x+2 & 1 & 4x-5 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}}(-x)(-x+2) = -x(x-2)$，所以$f(x)=0$有两个实根$0,2$。

(4) 已知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a$，则$\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & b_1+2c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2+2b_2 & b_2+2c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3+2b_3 & b_3+2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} = 9a$.

解：$\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & b_1+2c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2+2b_2 & b_2+2c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3+2b_3 & b_3+2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+2c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2 & b_2+2c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3 & b_3+2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & b_1+2c_1 & c_1+2a_1 \\ 2b_2 & b_2+2c_2 & c_2+2a_2 \\ 2b_3 & b_3+2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+2a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+2a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2 & 2c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3 & 2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 2c_1 & c_1+2a_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & c_2+2a_2 \\ 2b_3 & 2c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} +0+$

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & 2c_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & 2c_3 & 2a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2b_1 & 2c_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & 2c_3 & 2a_3 \end{vmatrix} = 9a$$

(5) 线性方程组$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + bx_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$有唯一解，则$a,b$的取值为$b \neq 0$且$a \neq -\frac{1}{2}$.

解：由 Crammer 法则，系数行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -4 & b \\ -1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b(2a+1) \neq 0$，所以$b \neq 0$且$a \neq -\frac{1}{2}$.

(6) 设行列式D中偶数号码各行的和等于奇数号码各行的和，则$D=0$.

解：将行列D中从第 4 行开始的偶数号码各行加到第 2 行，再将行列式D中从第 3 行开始的奇数号码各行加到第 1 行，得到的行列式的值等于原行列式的值，但由已知新行列式的第一行和第二行对应相等，所以等于 0.

(7) 设D是 6 阶行列式，则下面选项（D）为D中带有正号的项。

（A） $a_{25}a_{16}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$　　（B）$a_{11}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{62}$

（C）$a_{13}a_{61}a_{32}a_{46}a_{54}a_{25}$　　（D）$a_{12}a_{26}a_{35}a_{44}a_{51}a_{63}$

解：直接计算得到，例如（A）前面的符号为$(-1)^{\tau(213456)+\tau(564321)} = -1$，（B）前面的符号为$(-1)^{\tau(136542)} = -1$。

(8) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$的展开式中x^3的系数为-1.

解：设行列式中的项$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$含$x^3$。假如$j_4 \neq 4$，则 j_3=3，j_2=2，进而$j_1=4$，j_4=1，但$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$不含x^3，矛盾。下面假设j_4=4。若$j_3 \neq 3$，则j_2=2，进而j_3=1，$j_1=3$，但$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$不含x^3，矛盾。于是可设j_3=3，由于j_4=4，很容易看出来j_2=1，$j_1=2$。所以行列式中含x^3的项只有$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3$，于是$x^3$的系数为$-1$。

(9) 行列式$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

解：交换行列式中第 1 行和第 3 行的位置，再交换行列式的第 1 列和第 3 列的位置的到

$$D=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{53} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{24} & a_{25} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & 0 \\ a_{43} & a_{42} & 0 \\ a_{53} & a_{52} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

(10) （D）是行列式 D_n 非零的充分条件.

（A）D_n 中所有元素非零. （B）D_n 中至少 n 个元素非零.

（C）D_n 中任意两行元素不成比例. （D）某一非零行的各元素的代数余子式与对应元素相等.

(11) （B）是行列式 D_n 为零的充分条件。

（A）零元素的个数大于 n. （B）D_n 中各行元素之和为零.

（C）主对角线上元素全为零. （D）次对角线上元素全为零.

(12) 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0$.

解：因为 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，所以 $x_1+x_2+x_3=0$。因此

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0。$$

(13) 对于 n 阶行列式 D，如果从第二列开始，每一列减去它的前一列，同时第一列减去原先最后一列，则得到的新行列式 $D'=0$.

解：将 D' 的第 2 列到第 n 都加到第一列，得到的行列式的值跟原行列式的值相等，且该行列式的第一列都等于 0。

(14) 对于 n 阶行列式 D，如果从第二列开始，每一列加上它的前一列，同时第一列加上原先最后一列，则得到的新行列式 $D'=(1+(-1)^{n-1})D$.

解：因为行列式 D' 的每一列都是两组数的和，按第一列可以拆分成两个行列式的和，其中每一个行列式再按第二列拆分成两个行列式的和，再将每一个行列式按第三列拆分成两个行列式的和，直到最后按第 n 列拆分成两个行列式的和，很容易得到结论。

(15) 对于 n 阶行列式 D 中每一个元素 a_{ij} 都乘以 $c^{i-j}(c\neq 0)$，则得到的新行列式 $D'=D$

解：将 D' 中的第 i 行提出 c^i（$i=1,2,\cdots,n$），再将 D' 中的第 j 列提出 c^{-j}（$j=1,2,\cdots,n$），

则 $D'=\prod_{i=1}^{n}c^{i}\prod_{j=1}^{n}c^{-j}D=D$.

二、设 $D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&1&0&-1\\-2&2&3&4\\-1&2&-2&-3\end{vmatrix}$，不直接计算 A_{ij}，求解以下各题，并指出解每题时所使用的理论根据。

求：（1）$-A_{41}+\ 2A_{42}-\ 2A_{43}-\ 3A_{44}$

（2）$-2A_{11}+\ 2A_{12}+\ 3A_{13}+\ 4A_{14}$

解：（1）由行列式的展开定理 $-A_{41}+2A_{42}-2A_{43}-3A_{44}$ 为行列式按第 4 行展开，所以等于 $D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&1&0&-1\\-2&2&3&4\\-1&2&-2&-3\end{vmatrix}=18$.

（2）将 D_1 的第一行换成 $(-2,2,3,4)$，再按第一行展开，则得到

$$-2A_{11}+\ 2A_{12}+\ 3A_{13}+\ 4A_{14}\ =\begin{vmatrix}-2&2&3&4\\2&1&0&-1\\-2&2&3&4\\-1&2&-2&-3\end{vmatrix}=0$$

三、设行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=c$，令 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}-a_{ij}\ (i,j=1,\cdots,n)$，求 $\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$.

解：令 $s_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$，则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}-a_{ij}=s_i-a_{ij}$，于是

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1-a_{11} & s_1-a_{12} & \cdots & s_1-a_{1n} \\ s_2-a_{21} & s_2-a_{22} & \cdots & s_2-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n-a_{n1} & s_n-a_{n2} & \cdots & s_n-a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1-a_{11} & \cdots & s_1-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_n-a_{n1} & \cdots & s_n-a_{nn} \end{vmatrix} \text{（加边）}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1-a_{11} & \cdots & s_1-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_n-a_{n1} & \cdots & s_n-a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -n+1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-n+1)(-1)^n c$$

四、 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 F 中 n 个不同的数， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 F 中任意一组给定的数，证明：存在唯一的数域 F 上的次数小于 n 的多项式 $f(x)$，使得 $f(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots n)$。

证明：设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$，则有

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1 \\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n \end{cases},$$

若把它看成关于未知元 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的线性方程组，则系数行列式为范德蒙行列式。于是由 Cramer 法则，此方程组有唯一解 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$。

五、 求 $D_n=\begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$。

解：使用递推法来计算。按第一行展开得到 $D_n=xD_{n-1}+a_0$，再将 D_{n-1} 按第一行展开得到 $D_{n-1}=xD_{n-2}+a_1$，同理 $D_i=xD_{i-1}+a_{n-i}$ （$i>3$），又 $D_2=x^2+a_{n-1}x+a_{n-2}$。所以

$$D_n=xD_{n-1}+a_0=x^2D_{n-2}+a_1x+a_0=x^3D_{n-3}+a_2x^2+a_1x+a_0=\cdots=x^{n-2}D_2+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_0$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0。$$