

第3周作业

第3周：教材上习题8：12, 23.

补充题：

练习1. 证明下列命题：在 $F[x]$ 中，设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x) (\neq 0)$ 的 k 重因式($k \geq 2$)，则 $p(x)$ 正好是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式；反过来，若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x) (\neq 0)$ 的 j 重因式($j \geq 1$)，且 $p(x)|f(x)$ ，则 $p(x)$ 正好是 $f(x)$ 的 $j+1$ 重因式。

练习2. 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ， $\deg f(x) \geq 1$ 且 $f(x)|f(x^m)$ ($m > 1$, m 为一固定整数)，求证： $f(x)$ 的根只能是零或者1的某个方根。

练习3. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ ， $(f(x), g(x)) = 1$ ，求证： $(f(x))^2 + (g(x))^2$ 的重根是 $(f'(x))^2 + (g'(x))^2$ 的根。—此处作了更正，原先也是重根。

练习4. 设 $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ，试给出 $x^n - 1 | x^m - 1$ 的条件并证明之。

练习5. 在 $\mathbb{R}[x]$ 中分解： $x^{2n} + 1, x^{2n} - 1, x^{2n+1} + 1, x^{2n+1} - 1$.