微积分 A(1)第一次习题课题目（第四周）

1. 设 A,B 均是非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；　（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

2. 设 A,B 均是由非负实数构成的有界数集，定义 $AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$；　（2）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$

3．已知 $a>1,k>0$，用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$

4. 实数列 $\{a_n\}$，如果偶数子列 $\{a_{2n}\}$ 与奇数子列 $\{a_{2n+1}\}$ 均收敛到实数 A，求证数列 $\{a_n\}$ 也收敛到实数 A。

5．证明：若单调数列具有收敛的子列，则此单调数列收敛.

6．计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

7．设 $u_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$（易知数列 $\{u_n\}$ 收敛于 e）.

（1）研究数列 $\{u_n\}$ 的单调性；

（2）利用（1）的结果证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

（3）证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

（4）比较 $(1000000)^{1000000}$ 和 $(1000001)^{999999}$ 的大小.

8．利用 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$ 递增, $b_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$ 递减的结果, 试证明

(1) $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<e(n+1)\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

（2）当$n>6$时, 试导出更强的不等式 $n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$.

9．设$x_1=\ln a\ (a>0)$， $x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

10. 设数列$\{a_n\}$由$a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$定义，求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

11．已知当$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

（1）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$。

（2）当$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$。

12．设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$存在，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.