若当标准形习题课订正[*]

助教：田威

2014 年 5 月 12 日[†]

本文档仅针对上周四（5月8号）上若当标准形习题课的同学。周五习题课的讲解没有问题。

1 第1题第（3）问

因为本题的数域限制在实数域上，不能取复特征值，故此线性变换对应的矩阵不能对角化。周四给出的不能对角化的理由有误。

另外也可以按照下述思路完成证明，由于$dim(W_2) = 2$，可以证明必定存在$v \in W_2, v \neq 0$，使得$v, \sigma v$线性无关（即$v, \sigma v$为W_2的一组基）。反证法。若$\forall v \in W_2, v \neq 0$，$v, \sigma v$都线性相关，则有

$$k_1 v + k_2 \sigma v = 0, \quad k_1, k_2\text{不全为}0 \tag{1}$$

令σ作用于上式两边，有

$$k_1 \sigma v + k_2 \sigma^2 v = 0, \quad k_1, k_2\text{不全为}0 \tag{2}$$

又因为

$$\sigma^2 v = -v \quad \text{由}W_2\text{的定义容易得到} \tag{3}$$

若$k_1 \neq 0$，则式(2)可化为

$$\sigma v + \frac{k_2}{k_1}\sigma^2 v = \sigma v - \frac{k_2}{k_1} v = 0$$

得到

$$\sigma v = \frac{k_2}{k_1} v$$

将上式代回式(1)得到

$$k_1 v + k_2 \frac{k_2}{k_1} v = 0$$

[*]给周四上课的同学

[†]本文档开始于 2014 年 5 月 12 日

于是

$$k_1^2 v + k_2^2 v = 0$$

即$k_1 = k_2 = 0$，与k_1, k_2不全为0矛盾。同样的思路，若$k_2 \neq 0$时，也证得矛盾。

因此，必定存在$v \in W_2, v \neq 0$，使得$v, \sigma v$线性无关。

2 第3题的一个数学表示

以下表示是正确的：

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$$

以下表示是错误的：

$$\beta_i = \alpha_i P, \quad i = 1, 2, 3$$

3 第7题的结果

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$