代数与几何讨论课（一）（行列式、矩阵部分）

一、下列命题是否正确

(1) 若 A,B 都是 n 阶方阵，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(2) 若矩阵 A,B,C 满足 $AB=AC$，则 $B=C$.

(3) 若矩阵 A 满足 $A^2=I$，则 $A=\pm I$.

(4) 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$，则 $A=0$.

(5) 若可逆阵 A 经初等行变换可以化为方阵 B，则 $A^{-1}=B^{-1}$.

(6) 若 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=I$，则

$$BCA=I,\qquad A^{-1}C^{-1}B^{-1}=I,\qquad C^TB^TA^T=I$$

(7) 若 A 为 n 阶方阵**,** k 为任意常数，则 $|kA|=k|A|$.

(8) 若 A 可逆，且 $|A+AB|=0$，则 $|B+I|=0$.

(9) 若矩阵 A 满足 $A^2=A$，$|A-I|\neq 0$，则 $A=0$.

(10) 对方阵进行初等行变换，不改变该方阵的行列式.

二、填空、选择

(1) 已知 $A\in M_4$，$|A|=4$，且 $A^2+A+2I=0$，则 $|A+I|=$______________.

（**2**） 设 A 为 n 阶对称矩阵，设 B 为 n 阶反对称矩阵，则_______是反对称矩阵.

(A) $AB-BA$ (B) $AB+BA$ (C) $(AB)^2$ (D) BAB

（3）设 $A,B,C\in M_n$ 且 $ABC=I$，则 $B^{-1}=$_______________.

（4）对方阵 A 施行初等变换得到 B，若 $|A|\neq 0$，则__________.

(A) 必有 $|B|=|A|$， (B) 必有 $|B|\neq|A|$

(C) 必有 $|B|\neq 0$， (D) $|B|=0$ 或 $|B|\neq 0$ 依赖于所作的初等变换

（5）设 n 阶矩阵 A 与 B 相抵，则必有____.

（A）当 $|A|\geq 0$ 时，$|B|\geq 0$. （B） 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$.

（C） B 可由 A 经过一系列初等行变换得到. （D） 存在可逆阵 P，使得 $B=PA$.

（**6**） $A\in M_n$，$AA^T=I$ 且 $|A|<0$，则 $|A+I|=$__________.

（7）设 M_{ij} 和 A_{ij} 分别是 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，且

$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a$，则 $\begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix} =$ ______.

（8）设 α_1，α_2 和 α_3 均为 3 维列向量或3行 1 列的矩阵，记矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，

$B=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3]$.如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$ _____.

（9）设 n 阶可逆矩阵 A 中每行元素之和均为常数 a，则 A^{-1} 的每行元素之和均为____.

（10）设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^m = I$ 其中 m 是正整数，又 $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，

其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $B^m =$ ______________.

三、已知 n 阶矩阵 A 满足方程：$A^2+3A-4I=0$ 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

1. 求 $(A+3I)^{-1}$　　　　2. 求 $(A+5I)^{-1}$

3. 问当 m 满足什么条件时，$(A+mI)$ 必可逆。

四、已知列矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **，行矩阵** $D = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$

1、 试计算 $A = CD$ 及 $B = DC$ ；

2、 求 A^{100} ， 通过此题的计算你能归纳出什么样的结论？

五、设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 都是 n 阶方阵，

试计算 $AJ, JA, J^2, J^3, \cdots, J^n, J^{n+1}$ 。

六、设 A^* 是 n 阶可逆矩阵 A 的伴随矩阵（$n \geq 2$）。

求：1、$(A^*)^{-1}$　　2、$(A^{-1})^*$

3、$(kA)^*, (k \neq 0)$　　4、$(A^*)^*$