第七章 二次型

一、 二次型的标准形

1. 矩阵的初等变换法.

已知二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$，将 A 和 I 排成一个 $2n\times n$ 的矩阵，然后对该矩阵做下面的初等变换：做一次初等列变换，然后做一次相应的初等行变换；再做一次初等列变换，然后做一次相应的初等行变换；$\cdots$. 直到将 A 变成对角矩阵 $diag(d_1,\cdots,d_n)$，此时将 I 变成可逆矩阵 P。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{再做一次初等列变换，接着做一次相应的行变换；}\ \cdots]{\text{做一次初等列变换，接着做一次相应的行变换；}} \begin{pmatrix} P_s^T\cdots P_1^TAP_1\cdots P_s \\ IP_1\cdots P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \\ & P & \end{pmatrix}。$$

做可以替换 $x=Py$，则 $Q(\alpha)=x^TAx$ 化为标准形 $d_1{y_1}^2+\cdots+d_n{y_n}^2$。

（初等变换法，即求出了可逆替换的可逆矩阵 P，同时求出了标准型的系数 $d_1,\cdots,d_n$.）

2. 配方法

当二次型的项易配成平方和时使用，每做一次替换，写出替换矩阵，最后把所有替换矩阵依次相乘得到总的可逆替换矩阵 P。当一次同时对多项配方时要检验所做的替换是否为可逆替换。

3. 用主轴定理对实二次型做正交替换化标准形。

已知实二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$，先求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角阵 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。于是经过正交替换 $x=Qy$，实二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$ 化为标准形 $\lambda_1{y_1}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2$。

例：设 $Q(\alpha)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆替换化 $Q(\alpha)$ 为标准形。

解：法一：用初等变换法。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1\to r_1]{c_2+c_1\to c_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3\to r_3]{c_1+c_3\to c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2+r_3\to r_3]{-c_2+c_3\to c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则经过可逆替换 $x=Py$ 将 $Q(\alpha)$ 为标准形 $-{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$。

法二：配方法

$Q(\alpha)=x^TAx={x_2}^2+{x_3}^2-2x_1x_2+2x_2x_3=(x_1-x_2+x_3)^2-(x_1+x_3)^2+{x_3}^2$，做可逆替换

$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x\\ y_2=x_1+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，或 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=Py$，化为标准形 ${y_1}^2-{y_2}^2+{y_3}^2$

二、　　规范形的求法

1.　　对于复二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$。只要求出 A 的秩 $r(A)=r$，就得到其规范形

${y_1}^2+\cdots+{y_r}^2$。

2.　　对于实二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$。

（1）求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，设其中非零的特征值为 r 个，大于零的为 p 个，则规范形为 ${y_1}^2+\cdots+{y_p}^2-{y_{p+1}}^2-\cdots{y_r}^2$。

（2）配方法或初等变换法求出标准形 $d_1{y_1}^2+\cdots+d_n{y_n}^2$，设其中非零的项为 r 项，大于零的项为 p 项，则规范形为 ${y_1}^2+\cdots+{y_p}^2-{y_{p+1}}^2-\cdots{y_r}^2$。

三、**实二次型的正定性，半正定性**

实对称阵 A 正定 $\Leftrightarrow$ $\forall 0\neq x\in R^n$，$x^TAx>0$

$\Leftrightarrow$ A 的特征值都大于零

$\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式大于零

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 C 使得 $A=C^TC$

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式大于零

（按照已知条件合理选取正定的刻画条件）

实对称阵 A 半正定 $\Leftrightarrow$ $\forall 0\neq x\in R^n$，$x^TAx\geq 0$，且有 $0\neq x_0\in R^n$ 使得 ${x_0}^TAx_0=0$

$\Leftrightarrow$ A 的特征值都大于等于零，且有零特征值

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式大于等于零，且有主子式等于零

$\Leftrightarrow$ 存在奇异方阵（即不可逆矩阵）C 使得 $A=C^TC$。

例：设 $C\in M_{m,n}(R)$，令 $A=C^TC$，证明 A 正定或半正定。

证明：如果 $r(C)=m$，则 $\forall 0\neq x\in R^n$，$Cx\neq 0$，所以 $x^TAx=(Cx)^T(Cx)>0$．因此 A 正

定。

如果 $r(C)<m$，则存在 $0\neq x_0\in R^n$ 使得 $Cx_0=0$．由于 $\forall 0\neq x\in R^n$，$x^TAx=(Cx)^T(Cx)\geq 0$，且有 $0\neq x_0\in R^n$ 使得 ${x_0}^TAx_0=(Cx_0)^T(Cx_0)$=0，所以 A 半正定。

四、　矩阵的相合

复对称矩阵 A 相合于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（复对称矩阵的相合标准形）；

实对称矩阵 A 相合于 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & \end{pmatrix}$（实对称矩阵的相合标准形）。

例：设 A，B 分别为 n 阶实对称矩阵，其中 A 正定，证明存在可逆矩阵 P 使得 P^TAP，P^TBP 同时为对角阵。

证明：由于 A 正定，则存在可逆矩阵 P_1 使得 $P_1^TAP_1=I$，又由于 $P_1^TBP_1$ 为实对称阵，则存在正交阵 Q 使得 $Q^TP_1^TBP_1Q$ 为对角阵。令 $P=P_1Q$，则 P^TAP，P^TBP 同时为对角阵。

练习题

1. 求参数 t 的取值范围使 $Q(\alpha)={x_1}^2+{x_2}^2+3{x_3}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 的规范形为 ${y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$。

2. 设实二次型 $f(\alpha)={x_1}^2+4{x_2}^2+{x_3}^2+2(1+a)x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 1，求正交替换化二次型 $f(\alpha)$ 为标准形。

3. 设 n 阶实对称阵 A 满足 $A^2=3A$，且 $r(A)=r\ (0<r<n)$，

（1）　证明 A 半正定；

（2）　求 $\det(I+A)$.

4. （1）设 A 半正定，证明存在对称阵 B 使得 $A=B^2$；

（2）设 n 阶实矩阵 A 可逆，证明存在正交阵 Q，正定阵 B 使得 $A=QB$.

5. 设 $A\in M_{m,n}(R)$，证明 AA^T 正定当且仅当 $r(A)=m$。

6. 已知实二次型 $Q(\alpha)=x^TAx$，设 λ 为 A 的特征值，证明存在 R^n 中的向量 $(a_1,\cdots,a_n)^T$ 使

得 $Q(a_1,\cdots,a_n)=\lambda$ 。

7. 设实对称阵 A 可逆，证明若 $A-I$ 正定，则 $I-A^{-1}$ 正定。