# 第五周习题课题目

一、微分学的几何应用

1. 求解下列问题

（1）证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

（2）通过曲面 $S: e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（　　）

（$A$）通过 $y$ 轴；　　　　（$B$）平行于 $y$ 轴；

（$C$）垂直于 $y$ 轴；　　　　（$D$）$A$，$B$，$C$ 都不对.

（3）求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

（4）过直线 $10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程.

（5）求过直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$ 相切的平面的方程.

2. 已知 $f$ 可微，证明曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

4. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

5. 解答下列与切线有关的问题

（1）求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

（2）求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$，在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

（3）设曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

二、泰勒公式

4.解答下列各题

（1)函数 $x^y$ 在 $x=1, y=0$ 点的二阶 Taylor 多项式为________________________ 。

（2）函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式为

________________________________________________________。

（3）二元函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式为 。

（4）$x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.