第三次习题课答案（欧氏空间和酉空间）

1、设$\alpha_1=(1,0,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,2,3)^T$，$\alpha_3=(i,0,i,1)^T$，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$。求$W$在$C^4$中的正交补。

解：法一：设$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in C^4$，$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in W^{\perp}$ 当且仅当α同时与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交，即$\alpha$满足

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ ix_1+ix_3+x_4=0 \end{cases}$$

可求得其基础解系为：$\eta=(1+2i,-3-2i,-1-i,1)^T$。故$W^{\perp}=L(\eta)$。

法二：可验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，可以添加一个向量$\alpha_4=(0,0,0,1)^T$ 扩充成C^4的基。用施米特正交化方法，将其化为两两正交的向量组。

正交化：

$\beta_1=\alpha_1$,

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$,

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$,

$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。（具体计算略）

由于$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故$W^{\perp}=L(\beta_4)$。

2、设σ为欧式空间V的一个线性变换。证明:

（1）σ为欧式空间V的一个全等变换（即保持向量的长度和向量间夹角的变换）当且仅当σ为V的正交变换。

（2）σ为欧式空间V的一个相似变换（即保持向量间夹角的变换）当且仅当σ满足$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$，其中$\lambda$为正的常数。

（3）σ为相似变换当且仅当σ为一非零的实数与一正交变换的乘积。

证明：（1）若σ保持向量的长度和向量间的夹角，则$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$，对于$\forall\alpha,\beta\in V$. 故$\sigma$为正交变换。反之若$\sigma$为正交变换，$\sigma$保持向量的长度和向量间的夹角。

（2）只证必要性。由已知σ为可逆变换。对V的维数归纳证明。若$\dim(V)=1$时显然成立。若$\dim(V)=2$时，取$\varepsilon_1,\varepsilon_2$为$V$的标准正交基。先设$(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_i)=\lambda_i(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=\lambda_i$，$i=1,2$，由已知很容易得到$\lambda_i\neq 0$. 由于$\sigma$ 保持ε_1和$\varepsilon_1+\varepsilon_2$的夹角，即：$\frac{(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}{(\|(\sigma(\varepsilon_1)\|)(\|\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|)}=\frac{(\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(\|\varepsilon_1\|)(\|\varepsilon_1+\varepsilon_2\|)}$，两边平方得：$\frac{(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2))^2}{(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_1))(\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}=\frac{1}{2}$。因为$\sigma$保持$\varepsilon_1,\varepsilon_2$的夹角，故$(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2)=0$，将$(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_i)=\lambda_i(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=\lambda_i$，$i=1,2$代入上式，并整理得到$\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2=0$，故$\lambda_1=\lambda_2$。综合上面得到$\lambda_1=\lambda_2=\lambda>0$。进一步可证明对于$\forall\alpha=a\varepsilon_1+b\varepsilon_2,\beta=c\varepsilon_1+d\varepsilon_2\in V$，$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$.

下面假设$\dim(V) > 2$。首先证明：V有一个一维或二维的不变子空间。若σ有一实的特征值，则σ在V上有特征向量α，α生成的一维子空间为σ不变的；若σ没有实的特征值，则σ的特征值都为虚数，且成对出现。令$a+bi$和$a-bi$为σ的一对虚数特征值，且令$(x-a-bi)(x-a+bi)=x^2+px+q$。显然$\sigma^2+p\sigma+q\varepsilon$不是$V$上的可逆变换，因为设$\sigma$在一组基下的矩阵为$A$，则$\sigma^2+p\sigma+q\varepsilon$在这组基下的矩阵为$A^2+pA+qI=(A-(a+bi)I)(A-(a-bi)I)$不可逆，因为$a+bi,\ a-bi$为$A$的特征值。取$0\neq\alpha\in\ker(\sigma^2+\mathrm{p}\sigma+\mathrm{q}\varepsilon)$，则$\alpha,\sigma\alpha$线性无关。否则$\alpha$为$\sigma$的特征向量，则$\sigma$有实特征值，矛盾。于是$L(\alpha,\sigma\alpha)$为$\sigma$的二维不变子空间，因为$\sigma^2\alpha=-p\sigma\alpha-q\alpha$。令$V=W\oplus W^{\perp}$，其中$W$为$\sigma$的一维或二维的不变子空间。由于$\sigma$保持向量间的夹角，可证$W^{\perp}$也为$\sigma$不变的。然后由归纳存在$\lambda_1>0$ 和$\lambda_2>0$使得对任意的$\alpha,\beta\in W$，有$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda_1(\alpha,\beta)$；对于任意的$\alpha,\beta\in W^{\perp}$有$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda_2(\alpha,\beta)$。下面证明$\lambda_1=\lambda_2$，分别取单位向量$\varepsilon\in W$ 和$\eta\in W^{\perp}$。由已知σ保持$\varepsilon+\eta$和$\varepsilon+2\eta$之间的夹角，以及$\varepsilon+\eta$和$2\varepsilon+\eta$之间的夹角，类似前面$\dim(V)=2$时的讨论，可证明$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，且可进一步得到对于任意的$\alpha,\beta\in V$，有$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$。得证。

（3）设σ为相似变换，故存在$\lambda_\sigma>0$使得$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda_\sigma(\alpha,\beta)$。令$a=\sqrt{\lambda_\sigma}$，则$\sigma=a\frac{\sigma}{a}$，且$(\frac{\sigma}{a}\alpha,\frac{\sigma}{a}\beta)=\frac{1}{a^2}(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$。故$\frac{\sigma}{a}$为一个正交变换。反过来，显然成立。

3、设$\{O:e_1,e_2\}$为平面π上的直角坐标系。

（1）设σ为以OT为轴的反射变换，设以e_1为始边，OT为终边的角为$\theta/2$，其中$0\leq\theta<2\pi$。证明σ在基e_1,e_2下的矩阵为$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$.

（2）设σ为π上逆时针旋转φ度角的旋转变换，其中$0\leq\varphi<2\pi$。证明σ在e_1,e_2下的矩阵为$\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$.

（3）证明平面π上任意一个正交变换要么是旋转要么是反射。

证明：（1），（2）略。

（3）从（1）（2）可以看出旋转和反射都为正交变换。假设σ为平面π上的一个正交变换，且设σ在标准正交基e_1,e_2下的矩阵为$P=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。于是$P$为正交矩阵，有$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，且$ac+bd=0$。可设$a=cos\theta,b=sin\theta,0\leq\theta<2\pi$；$c=cos\varphi,d=sin\varphi,0\leq\varphi<2\pi$，由$ac+bd=0$得到$cos(\theta-\varphi)=0$，所以$\theta-\varphi=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$。所以$P=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix},or\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$。

如果$P=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos(2\pi-\theta) & sin(2\pi-\theta) \\ -sin(2\pi-\theta) & cos(2\pi-\theta) \end{bmatrix}$，则$\sigma$为逆时针旋转$2\pi-\theta$度角的旋转变换。

如果$P=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$，则$\sigma$为反射变换。得证。

4、设$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix}$，求酉矩阵$U$使得$U^{-1}AU$为对角阵。

解：$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$，所以$A$的特征值为：$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$。对于特征值$\lambda_1 = 0$，可求得$(-A)x = 0$的基础解系$\eta_1 = (i,1,0)^T$，单位化得到$\varepsilon_1 = (i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$；对于特征值$\lambda_2 = 1$，可求得$(2I-A)x = 0$的基础解系$\eta_2 = (i,1,-2i)^T$，单位化得到$\varepsilon_2 = (i/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2i/\sqrt{6})$；对于特征值$\lambda_3 = -1$，可求得$(-I-A)x = 0$的基础解系$\eta_3 = (-1,-i,1)^T$，单位化得到$\varepsilon_3 = (-1/\sqrt{3}, -i/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$。由于$A$为艾尔米特矩阵，$A$的属于不同特征值的特征向量相互正交，令$U = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$，则$U$为酉矩阵，且$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(0,2,-1)$。

5、设σ为酉空间V上的艾尔米特变换，证明：

（1）对于任意的向量$\alpha \in V$，$(\sigma\alpha, \alpha)$为实数；

（2）若σ在V的一组标准正交基下的矩阵为正定的埃尔米特矩阵则对V中任何非零向量α有$(\sigma\alpha, \alpha) > 0$.

证明:证明：（1）$(\sigma\alpha, \alpha) = (\alpha, \sigma\alpha) = \overline{(\sigma\alpha, \alpha)}$，所以$(\sigma\alpha, \alpha)$为实数。

（2）设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$为$V$的一组标准正交基，非零向量$\alpha$在这组基下的坐标为$x$. 故$(\sigma\alpha, \alpha) = (Ax)^T\bar{x} = x^T A^T \bar{x}$，由（1）$(\sigma\alpha, \alpha) = (Ax)^T\bar{x} = x^T A^T \bar{x} = \overline{(\sigma\alpha, \alpha)} = \overline{x^T A^T \bar{x}} = x^H A^H x = x^H A x$，由于$A$正定，故$(\sigma\alpha, \alpha) = x^H A x > 0$。

6、设A, B为正规矩阵，且$AB = BA$。证明存在酉矩阵U使得$U^{-1}AU$和$U^{-1}BU$同时为对角阵。

证明：A正规，故存在酉矩阵U_1使得$U_1^{-1}AU_1$为对角阵$\mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I_{n_1}}, ..., \lambda_s \mathrm{I_{n_s}})$，其中$\lambda_1, ..., \lambda_s$为$A$的所有不同的特征值。由于$U_1^{-1}AU_1U_1^{-1}BU_1 = U_1^{-1}BU_1U_1^{-1}AU_1$，故$U_1^{-1}BU_1 = \mathrm{diag}(\mathrm{B_1}, ..., \mathrm{B_s})$，其中$B_i$为阶数$n_i$的正规矩阵。分别存在酉矩阵$Q_i$使得$Q_i^{-1}B_iQ_i$为对角阵。令$U_2 = \mathrm{diag}(\mathrm{Q_1}, ..., \mathrm{Q_s})$，则$U_2$为酉矩阵。令$U = U_1U_2$，则$U$为酉矩阵，且$U^{-1}AU$和$U^{-1}BU$都为对角阵。

7、设σ为酉空间V的线性变换，σ^*为σ的共轭变换，W为V的子空间。证明W为σ不变的当且仅当$W^\perp$为σ^*不变的。特别地若σ为艾尔米特变换，W为σ不变的当且仅当$W^\perp$为σ不变的。

证明：设W为σ不变的，令$\alpha \in W^\perp$，对于$\forall\beta \in W$有$(\beta, \sigma^*\alpha) = (\sigma\beta, \alpha) = 0$，故$\sigma^*\alpha$与$W$正交，所以$\sigma^*\alpha \in W^\perp$。反之，证明同理。

8、设$A=\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$，求酉矩阵$U$和上三角矩阵$R$使得$A = UR$. (上述分解称为复可逆阵的$U$、$R$分解，类似于实可逆阵的$Q$、$R$分解。)

解：具体计算略。思路如下：令A的列向量分别为$\alpha_1 = (0,1,1)^T$，$\alpha_2 = (i,0,i)^T$，$\alpha_3 =$

$(0,1,0)^T$。下面用施米特正交化方法将其化为两两正交的单位向量组。

（1）正交化

$\beta_1=\alpha_1,$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1.$

（2）单位化

$\varepsilon_1=\beta_1/\|\beta_1\|,$

$\varepsilon_2=\beta_2/\|\beta_2\|,$

$\varepsilon_2=\beta_3/\|\beta_3\|.$

故$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)R_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathrm{diag}(\|\beta_1\|,\|\beta_2\|,\|\beta_3\|)\mathrm{R}_1$

令$U=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, $R=\mathrm{diag}(\|\beta_1\|,\|\beta_2\|,\|\beta_3\|)\mathrm{R}_1$，即得到$A$的$U$，$R$分解。