微积分 A(1)第五次习题课参考答案（第十一周）

一、函数的可积性.

1. 定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 的极限，这个定义为定积分的近似计算提供了依据．设定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则当 $n\to\infty$ 时，两个和式：$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i-1}{n})$ 和 $\Sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{2i-1}{2n})$ 都趋向于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$．不过收敛速度有所不同．研究下面的问题：

假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证

（1）$|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-S_n|\le\frac{1}{2n}M$；　　（2）$|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\Sigma_n|\le\frac{1}{4n}M$，

其中 $M=\max\limits_{a\le x\le b}\{|f'(x)|\}$．

证明：（1）

$$|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-S_n|=|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k-1}{n})|\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{k-1}{n})|\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f'(\xi_k)(x-\frac{k-1}{n})|\,\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^n M\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{k-1}{n})\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}=\frac{M}{2n}.$$

（2）$$|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\Sigma_n|\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{2k-1}{2n})|\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f'(\xi_k)(x-\frac{2k-1}{2n})|\,\mathrm{d}x$$

$$\le M\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|x-\frac{2k-1}{2n}|\,\mathrm{d}x$$

$$=2M\sum_{k=1}^n\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}|x-\frac{2k-1}{2n}|\,\mathrm{d}x=2M\sum_{k=1}^n\frac{1}{8n^2}=\frac{M}{4n}.$$

二、定积分的性质

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于　[　　]

（A）$\int_1^2\ln^2 x dx$　　（B）$2\int_1^2\ln x dx$

作者：闫浩，章纪民　2012 年 9 月

（C）$2\int_1^2\ln(1+x)dx$　　（D）$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$

解：【B】类似的题：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sum_{i=1}^n\sin\frac{i}{n}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}n\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}}$，等等.

3. 求解下列变上限积分的问题.

（1）求 $\int_{2x}^{\ln x}\ln(1+t)dt$ 的导数;

解：$\frac{1}{x}\ln(1+\ln x)-2\ln(1+2x)$

4. 设 $f,g\in C[0,+\infty)$，$f(x)>0$，$g(x)$ 单调增加，则 $\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$　[　　　　].

(A).在 $[0,+\infty)$ 上单调增加；　　(B). 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少；

(C). 在 $[0,+1)$ 上单调增加，在 $[1,+\infty)$ 上单调减少；

(D). 在 $[0,+1)$ 上单调减少，在 $[1,+\infty)$ 上单调增加。

解：由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}>0,$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 答案：(A).

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\int_0^x\cos t^2dt\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____________________.

(A) e；　(B) 1；　(C) $e^{\frac{1}{2}}$；　(D) $e^{-\frac{1}{2}}$.

答案：(A)

6. 设 $F(x)=\int_0^x\ln\left(1+t^8\right)dt$，则 $F^{(17)}(0)=$________________.

(A) $\frac{-17!}{2}$；　(B) $\frac{17!}{2}$；　(C) $\frac{-16!}{2}$；　(D) $\frac{16!}{2}$；

答案：(C)

7. 函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点为______________.

(A) $x=-1;$　　(B) $x=1;$　　(C) $x=0;$　　(D) $x=e.$

答案：C

8. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$，$y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\cos 2u du$ 确定，则该曲线 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的法线方程为____________.

解：$x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du+\cos 2t.$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2,$ 法线为 $y=\frac{x}{2}.$

三. 不定积分

9. $\int\sin^5 x dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x dx=-\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d\cos x$

$$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

10. $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$

$$=\arctan^2\sqrt{x}+C$$

11. $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int\frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C$

12. $\int x^2(x+1)^n dx=\int[(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n]dx$

$$=\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}+C$$

13. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$

解： 令 $t=\sqrt[3]{1-x}$，则 $x=1-t^3, dx=-3t^2dt$，于是

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx=-3\int(1-t^3)^2t^3dt=-3\int(t^3-2t^6+t^9)dt$$

$$=-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}}+C$$

14. $\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx$

解：令 $t=x^4-1$，则

$$\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^{12}}{(x^4-1)^3}dx^4=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^3}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3})dt=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t|-\frac{3}{4t}-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}\ln|x^4-1|-\frac{3}{4(x^4-1)}-\frac{1}{8(x^4-1)^2}+C$$

15. $\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$

16. $\int x^2\arctan x dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{1+x^2}$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$$

17. $\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$$=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)dx,$$

所以

$$\int\cos(\ln x)dx=\frac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$$

18. $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$$