微积分 A(1)第六次习题课题目（第十三周）

一．关于定积分的证明题

1． 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

2． 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

3． （积分中值定理的应用）设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|\,dx。$$

4． 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

二、定积分的应用

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0,x=1,y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

⑴求函数 $f(x)$；⑵ a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

2. 将半圆形平板闸门垂直放入水中, 直径与水平面重合,水的密度为 1,求闸门受的压力.

3. 将一半径为 R 的圆球压入水中, 使球体刚好与水平面相切, 求克服水的浮力作的功(设水的密度为 1).

4. 一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

5. 使某个自由长度为 1m 的弹簧伸长 2.5cm 需费力 15N，现将它从 1.1m 拉至 1.2m，问要做多少功？

6. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度 h 随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高 h 时，出水速度 $v=0.6\times\sqrt{2gh}$ 。）

三、广义积分

1. 判断下列广义积分的敛散性.

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$　　（2）$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$

（3）$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$

2. 讨论 p 为何值时，广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛、条件收敛、发散。

3. 计算下列广义积分

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$ 。　　（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$ 。　　（4）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$