微积分 A(1)第二次习题课题目（第五周）

一、实数理论（单调有界，柯西收敛准则，Bolzano 定理）

1. 设 $b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$，其中 $|q| < 1$ 且数列 $\{a_k\}$ 有界，试证数列 $\{b_n\}$ 收敛.

2．已知 Kepler 方程为

$$x = y_0 + \varepsilon \sin x \ (0 < \varepsilon < 1),$$

设 $x_0 = y_0$，$x_n = y_0 + \varepsilon \sin x_{n-1} (n \in N)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛。

3. 下列哪些命题与柯西准则等价，证明你的结论或举出反例。

（1）对于任意的 $p \in N$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$。

（2）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - a_N| < \varepsilon$

（3）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon \in N$ 以及 $A_\varepsilon \in R$, 只要 $n > N_\varepsilon$, 就有 $|a_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$

二、函数极限

4. 用定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1}) = 0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1^-} \arctan\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{\pi}{2}$.

5.（1）讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 是否存在；　　（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

6.设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2) = f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = f(1)$，求证：

$f(x) = f(1), x \in (0,+\infty)$。

7．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$，求证：$\forall a > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$。

8.（书上 P.49,18）Riemann 函数的定义为 $R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = \dfrac{m}{n}, m, n\text{互质} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$，证明：Riemann 函数在任意点的极限均为 0.

9．设 $f_1(x)=\begin{cases} x, & 1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases} 1, & 1\le x\le n,\\ x^n, & n<x\le n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1,\end{cases}$

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）求 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$。

三、连续函数概念

10.讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有可去间断点，将函数修正为连续函数。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2x^2} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x<0\end{cases}$$

11. 考察函数 $y=e^{1-\cos\frac{1}{x}}$ 的连续性。

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\in C(-\infty,+\infty)$，求 a,b。

13．设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$.

证明：（1）$|f(x)|,\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

（2）$m(x)=\min\limits_{a\le\xi\le x} f(\xi), M(x)=\max\limits_{a\le\xi\le x} f(\xi)\in C[a,b]$

14.设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b) \qquad (*)$$

证明 $f\in C(a,b)$。