微积分 A(2)第二次习题课题目（第四周）

一、复合函数的微分, 隐函数微分法

1. 求解下列各题：

（1）. 设 $z = x^3 f\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

（2）. 已知 $y = (\dfrac{1}{x})^{-\frac{1}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 已知 $\dfrac{(x + ay)dx + ydy}{(x + y)^2}$ 为某个二元函数的全微分, 则 $a =$ ________

2. 求解下列各题

（1）. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $ax + by = f\left(x^2 + y^2\right), a, b$ 是常数，求导函数。

（2）. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由参数方程: $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = uv \end{cases}$, 给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（3）. 设 $z = z(x, y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

若令 $\begin{cases} u = x + \sim y \\ v = x + \quad y \end{cases}$, 试确定~, 　为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

3. 求解下列各题

（1）. $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 决定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

（2）设函数 $z = f(x, y)$ 是由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 确定的, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 的微分 $dz =$ __________

（3）. 设函数 $x = x(z),\ y = y(z)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}$.

(4) 设方程 $\begin{cases} F(y - x, y - z) = 0 \\ G(xy, \dfrac{z}{y}) = 0 \end{cases}$ 可以确定隐函数 $x = x(y), z = z(y)$，求 $\dfrac{dx}{dy}, \dfrac{dz}{dy}$.

（本题不用解出最终答案，会解题过程就可以.）

4. 求解下列二阶偏导数问题

（1）. 设 $z = f(xy, \dfrac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

（2）. 设 $g(x) = f\left(x, \text{¨}\left(x^2, x^2\right)\right)$，其中函数 f 于 ¨ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{d^2 g(x)}{dx^2}$

（3）设 $\boldsymbol{z}$ Z $\boldsymbol{f(x, y)}$ 在点 $\boldsymbol{(a,a)}$ 可微， $\boldsymbol{f(a,a)}$ Z $\boldsymbol{a}, \dfrac{\text{ô}\boldsymbol{f}}{\text{ô}\boldsymbol{x}}\Big|_{(a,a)}$ Z $\boldsymbol{b}, \dfrac{\text{ô}\boldsymbol{f}}{\text{ô}\boldsymbol{y}}\Big|_{(a,a)}$ Z $\boldsymbol{b}$.

令 ¨ $\boldsymbol{(x)}$ Z $\boldsymbol{f(x, f(x, f(x, x)))}$，求 $\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$ ¨ $^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{(x)}\Big|_{x\text{Z}a}$

（4）. 设 $u(x, y) \in C^2$， 又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$u(x, 2x) = x$， $u'_x(x, 2x) = x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，

$u''_{xy}(x,2x)$　$u''_{yy}(x,2x)$

5. 设向量值函数 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足：存在 $L: 0 < L < 1$，对任意的 $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 有 $\|\mathbf{f}(X) - \mathbf{f}(Y)\| \le L\|X - Y\|$. 证明：$\exists! X^* \in \mathbb{R}^n, \mathbf{f}(X^*) = X^*$.

6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^n$，定义 $\text{°}(X, \Omega) = \inf\limits_{Y \in \Omega} \|X - Y\|_n$. 证明：

（1） $\text{°}(X, \Omega)$ 为 X 的连续函数；

（2） Ω 为有界闭集时，存在 $X_0 \in \Omega$，使得 $\text{°}(X, \Omega) = \|X - X_0\|_n$

（3） $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$，定义 $\text{°}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\limits_{X \in \Omega_1, Y \in \Omega_2} \|X - Y\|_n$，证明：当 Ω_1, Ω_2 为有界闭集时，存在 $X_0 \in \Omega_1, Y_0 \in \Omega_2$，使得 $\text{°}(\Omega_1, \Omega_2) = \|X_0 - Y_0\|_n$.

7. 设 $f(x, y, z)$ 可微，$\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中互相垂直的三个单位向量，求证：

$$(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2})^2 + (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_3})^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2.$$

8. 已知偏微分方程（输运方程）$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ z(x, y, 0) = z_0(x, y) \end{cases}$，证明它的解为 $z = z_0(x + at, y + bt)$.

9. 求解下列问题.

（1）若 $f(x, y, z)$ 可微，则 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数（即 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z), \forall t \ne 0$）的充要条件为 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = kf(x, y, z)$.

（2）设函数 $u(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，若 u 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，证明：

$u=\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+b$（$a,b$ 为常数）.