

微积分 A(1) 第五次习题课参考答案 (第十一周)

一、函数的可积性.

1. 定积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 是和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ 的极限, 这个定义为定积分的近似计算提供了依

据. 设定积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 两个和式: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{i-1}{n})$ 和

$\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{2i-1}{2n})$ 都趋向于 $\int_0^1 f(x)dx$. 不过收敛速度有所不同. 研究下面的问题:

假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证

$$(1) \quad \left| \int_0^1 f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{1}{2n} M; \quad (2) \quad \left| \int_0^1 f(x)dx - \Sigma_n \right| \leq \frac{1}{4n} M,$$

其中 $M = \max_{a \leq x \leq b} \{ |f'(x)| \}$.

二、定积分的性质

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 []

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

3. 求解下列变上限积分的问题.

(1) 求 $\int_{2x}^{\ln x} \ln(1+t) dt$ 的导数;

(2) 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 [].

(A). 低阶无穷小量;

(B). 高阶无穷小量;

(C). 等价无穷小量;

(D). 同阶但非等价无穷小量.

4. 设 $f, g \in C[0, +\infty)$, $f(x) > 0$, $g(x)$ 单调增加, 则 $\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ [].

(A). 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加;

(B). 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少;

(C). 在 $[0, +1)$ 上单调增加, 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少;

(D). 在 $[0, +1)$ 上单调减少, 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \int_0^x \cos t^2 dt \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(A) e ; (B) 1 ; (C) $e^{\frac{1}{2}}$; (D) $e^{-\frac{1}{2}}$.

6. 设 $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^8)dt$, 则 $F^{(17)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\frac{-17!}{2}$; (B) $\frac{17!}{2}$; (C) $\frac{-16!}{2}$; (D) $\frac{16!}{2}$;

7. 函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (t-1)e^{-t} dt$ 的极大值点为_____.

(A) $x = -1$; (B) $x = 1$; (C) $x = 0$; (D) $x = e$.

8. 设曲线 $y = f(x)$ 由 $x(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u} \sin \frac{u}{3} du$, $y(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u} \cos 2u du$ 确定, 则该曲线

$t = \frac{\pi}{2}$ 处的法线方程为_____.

三. 不定积分

9. $\int \sin^5 x dx =$ 10. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

11. $\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx =$ 12. $\int x^2(x+1)^n dx =$

13. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} \, dx$ 14. $\int \frac{x^{15}}{(x^4-1)^3} \, dx$

15. $\int x \ln(x-1) dx =$ 16. $\int x^2 \arctan x dx =$

17. $\int \cos(\ln x) dx =$ 18. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx =$