

一、填空题 (每空 3 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 0.$ X

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{4x - 3} \sin \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-2\sqrt{n}}] = 3.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\sqrt{x}) - 2x}{x^2} = 2.$ X

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^2$

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right)}{e^x - 1} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[3]{3}}{2} \right)^n = \sqrt[3]{3}.$

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \frac{1}{2}$

9. 曲线 $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{1/x} - 1}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在原点 $(0, 0)$ 的左侧部分的切线方程以及右侧部分的切线方程

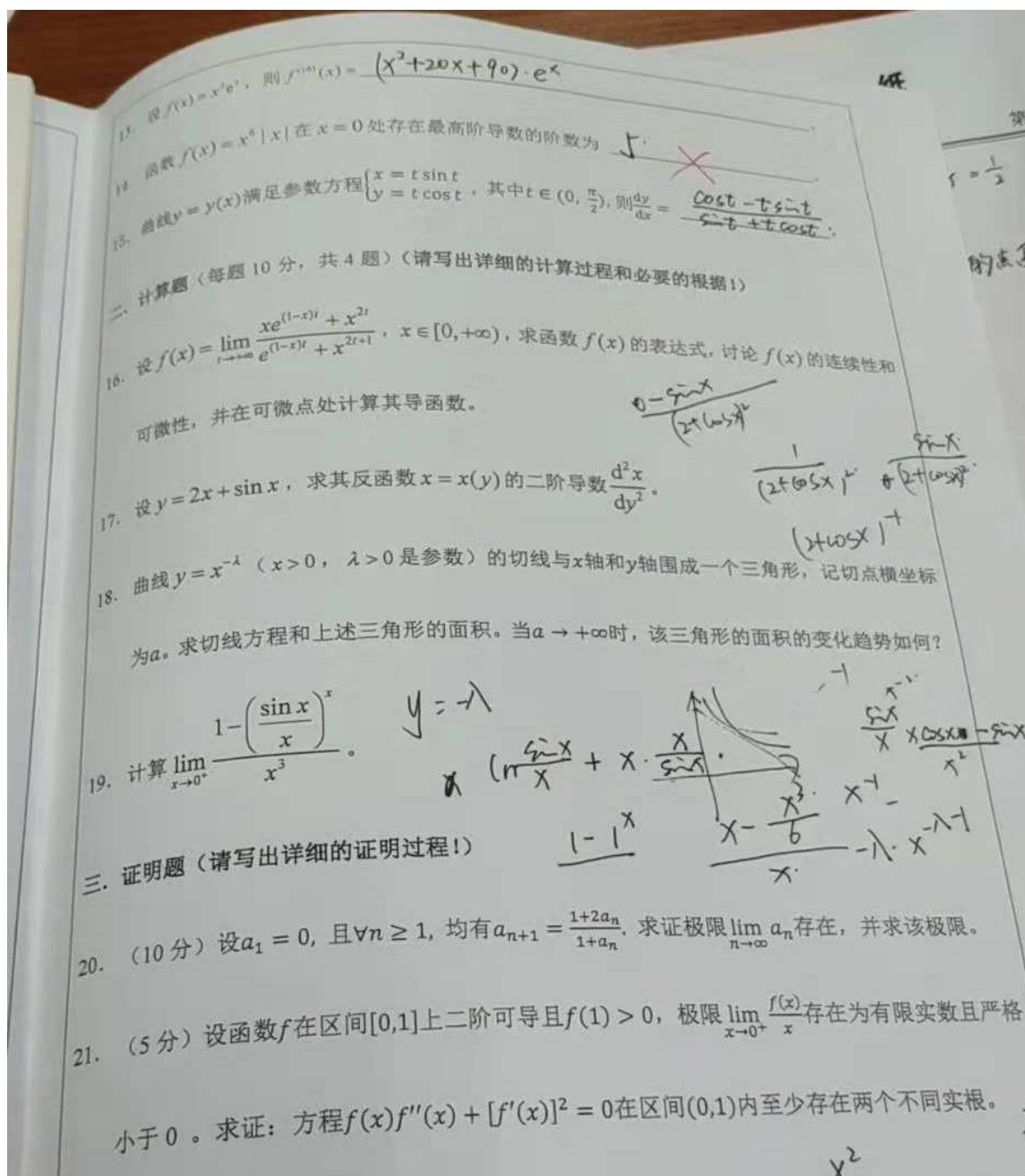
分别为 左侧: $y = -x$ 右侧: $x = 0$

10. 设 $f(x) = x^{\sin x}$, 则 $f'(\pi) = -\ln 7$

11. 设 $y = e^{-3x} \sin(2x)$, 则 $dy = e^{-3x} (2\cos 2x - 3\sin 2x) dx.$

2. 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x_0 = 0$ 点处的带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为

$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \dots + 2x^n + o(x^{n+1}).$ X



部分看不清的见下页

13. 设 $f(x) = x^2 e^x$, 则 $f^{(10)}(x) = (x^2 + 20x + 90) \cdot e^x$

14. 函数 $f(x) = x^6 |x|$ 在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数为 5 X

15. 曲线 $y = y(x)$ 满足参数方程 $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$, 其中 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t \sin t}{\sin t + t \cos t}$

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

16. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x e^{(1-x)t} + x^{2t}}{e^{(1-x)t} + x^{2t+1}}$, $x \in [0, +\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的表达式, 讨论 $f(x)$ 的连续性和

一. 填空题 (每空 5 分, 共 15 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 0$ X

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x - 3} \sin \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-2\sqrt{n}}] = 3$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x - 3} \sin \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-2\sqrt{n}}] = 3$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(2\sqrt{x}) - 2x}{x^2} = 2$ X

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = 0 \cdot e^2$

10. 设 $f(x) = x^{\ln x}$, 则 $f'(\pi) = -\ln \pi$

11. 设 $y = e^{-3x} \sin(2x)$, 则 $dy = e^{-3x} (2\cos 2x - 3\sin 2x) dx$

12. 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x_0 = 0$ 点处的带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式为

$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n + o(x^{n+1})$ X