微积分 A（2）第十一次习题课题目（第十六周）

1. 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n}$；　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n$　　$a,b>0$.

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}x^{n^2}$　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}x^n$

2. 解答下列选择题

（1）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$在$x=2$收敛，则实参数$a$的取值范围是____________。

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$　[　　]

（A）　绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不能确定

（3）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为**1**，记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为r，则［　　］.

(A)　$r=1$.　　(B)　$r\le 1$.　　(C)　$r\ge 1$.　　(D)　r不能确定.

（4）已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为**[−8，8]**，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为[　　].

（A）$R>8$.（B）$R<8$.　（C）$R=8$.（D）不能确定.

（5）设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$在点$x_1=-2$条件收敛, 则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$

在点$x_1=\dfrac{1}{2}$的收敛情况是［　　］

(A)绝对收敛.(B)条件收敛.　(C)发散.　(D)不能确定.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$收敛半径, 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 $r\in(0,+\infty)$.

4. 写出下列函数在指定点的幂级数

（1）$f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$在$x=1$处；　　（2）$f(x)=xe^x$在$x=1$处；

（3）$f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$在$x=0$处；　　（4）$f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$　　$x_0=0$；

（5）$\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$，　$x_0=-1$；　　（6）$f(x)=\sin^3 x, x_0=0$；

（7）$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$，　$g(x)=\dfrac{xf(x)}{1+x}$，求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$，求 $f^{(100)}(0)$.

解：$f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$

$f^{(3n+1)}(0)=(-1)^n(3n+1)!$

$n=33$，

$f^{(100)}(0)=-100\,!$

6. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

7. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

8. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

9. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2n}{(n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数。

10（自己练习）.（1）设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和。

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

（3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为[　　　]

(A) $2e^{-1}$。 (B) 0。 (C) e^{-1}　(D) $e^{-1}-1$。

11. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-R,R)$，那么当 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛时，不论 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 是否收敛，均有 $\int_0^R S(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

二、傅立叶级数

1．傅立叶展开

(1) 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 展开 $f(x)=x\cos x$ 为 fourier 级数；

（2）将 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和

(3) 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 展开为余弦级数、正弦级数。

2. 将 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展开为 Fourier 级数.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,且 $f(x)=e^x$, $x\in[0,2)$.若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数,试求 $S(0),S(2),S(3)$.

4. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在区间 $[-\pi,\pi]$ 可积，a_n $(n=0,1,\cdots)$，b_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求函数 $f(x+c)$（c 是常数）的 Fourier 系数。

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数

（1）如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

（2）如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么 $a_{2n}=b_{2n}=0$.

6. 设 $f(x)$ 周期为 2π， $f(x)\in R[-\pi,\pi]$，其 Fourier 系数为 a_n,b_n

求证：（1）.若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内递增（减），则 $b_n\le 0(\ge 0)$

（2）若 $\exists L>0,\forall x,y\in\mathbb{R},|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$，则 $|a_n|\le\frac{2L}{n},|b_n|\le\frac{2L}{n},n\ge 1$.

7. 设 $f(x)\in C(0,\frac{\pi}{2})$,若使 $f(x)$ 展开成的 Fourier 级数的形式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

应对 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内作什么样的延拓.

8. 求函数 $f(x)=x,g(x)=x^2,h(x)=x^3$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数。

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，a_n,b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 的 Fourier 系数 A_n,B_n . 并证明 Paseval 等式 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.(假设积分可交换顺序).