微积分 A(2)第一次习题课题目（第三周）

一、n 维空间的点集

1. $A, B \subseteq R^n$，证明下列结论：

（1）$A^\circ \bigcup B^\circ \subseteq (A \bigcup B)^\circ$　（2）$\partial(A \bigcup B) \subseteq \partial A \bigcup \partial B$　（3）$A^\circ = A \setminus \partial A$

2. $f: R^n \to R^m$ 是一个连续映射，求证：$\forall R^m$ 中的开集 G，它的原像集

$f^{-1}(G) = \{x \in R^n \mid f(x) \in G\}$ 是 R^n 中的开集。

二、多元函数的极限与连续

3. 下列极限是否存在？若存在，求出极限值；若不存在，说明理由。

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$；　（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

4. 讨论下列函数的累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y), \lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 与二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} f(x,y)$

（1）$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y \neq 0 \\ 0, & x\cdot y = 0 \end{cases}$；（2）$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

（3）$f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

5. 若 $z = f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$，证明：$f$ 在 R^2 上有最小值。

三、偏导数与可微

6. 证明下列各题

(1) 证明：若 $f(x,y)$ 的偏导数在点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ 的某邻域内存在且有界，则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

（2）设 $f(x,y) = (x+y)¨(x,y)$，其中 ¨ $\boldsymbol{(x,y)}$ 在点（0, 0）处连续，，证明 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在（0, 0）点处可微，并写出全微分 $\boldsymbol{df(x,y)}$　。

7. 设 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在，$f'_y(x\ \ y)$ 在点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ 处连续，证明 $f(x,y)$ 在点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ 处可微.

8. 求解下列有关偏导数的题目.

（1）设 $z=\arcsin\frac{x}{y}$，求 dz；

（2）　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$；

（3）若函数 $f(u)$ 有二阶导数，设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（4）设函数 $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（5）　设函数 $z=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$，证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（6）　设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$,$\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$.

如果 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec{v}}=-2,\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec{u}}=1$，求 $df(x_0,y_0)$；

（7）设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 且在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分 $\frac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1$,

$\frac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$. 则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　　　　　）

A. $\vec{i}$　　　　*B.* $\vec{j}$　　　　*C.* $\vec{i}+\vec{j}$　　　　*D.* $\vec{i}-\vec{j}$

（8）$\boldsymbol{z}$ Z $\sqrt{|\boldsymbol{xy}|}$，　求 $\frac{\hat{0}\boldsymbol{z}}{\hat{0}\boldsymbol{x}}$

9. 求解下列各题，并体会多元函数可微、连续、偏导数存在性与连续性之间的关系。

（1）下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（　　　）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

（2）设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点（　　　）

(A) 连续, 但偏导数不存在；　　(B) 偏导数存在, 但不可微；

(C) 可微；　　　　　　　　　　(D) 偏导数存在且连续.

（3）若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在，则（　　　）

（*A*）$f(x,y)$ 在 P_0 点连续；

（*B*）一元函数 $z=f(x,y_0)$ 和 $z=f(x_0,y)$ 分别在 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 连续；

（C）$f(x,y)$ 在 P_0 点的微分为 $dz=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}dy$；

（D）$f(x,y)$ 在 P_0 点的梯度为 $grad\ f(P_0)=\left.(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\right|_{P_0}$.

（4）如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（　　）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\bar{v}$ 的方向导数不存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数都存在且连续；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

10. 分别考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-e^{-xy}) & x\neq 0\\ y & x=0\end{cases}$ 在全平面上连续性与可微性，并证明.

11. 设 $u(x,y)\in C^2, u\neq 0$, 证明 $u(x,y)=f(x)\ddot{}(y)$ 的充要条件是 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.