微积分 A(1)第二次习题课参考答案（第五周）

一、实数理论（单调有界，柯西收敛准则，Bolzano 定理）

1. 设 $b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$，其中 $|q| < 1$ 且数列 $\{a_k\}$ 有界，试证数列 $\{b_n\}$ 收敛.

证明：Cauchy 收敛准则．设 $|a_k| \le M$，则

$$|b_{n+m} - b_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+m}q^{n+m}| \le M\,|q^{n+1}|\frac{1-|q^m|}{1-|q|} < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}.$$

由此易证数列 $\{b_n\}$ 是一 Cauchy 列，所以收敛.

2．已知 Kepler 方程为

$$x = y_0 + \varepsilon \sin x \ (0 < \varepsilon < 1),$$

设 $x_0 = y_0$，$x_n = y_0 + \varepsilon \sin x_{n-1} (n \in N)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛。

证明：因为 $|\sin x| \le |x|$，所以 $|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \le 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$

$$|x_{n+1} - x_n| = |y_0 + \varepsilon \sin x_n - y_0 - \varepsilon \sin x_{n-1}| = \varepsilon|\sin x_n - \sin x_{n-1}| \le \varepsilon|x_n - x_{n-1}|$$

所以 $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|$

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &\le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(\varepsilon^{n+p-1} + \varepsilon^{n+p-2} + \varepsilon^n\right)|x_1 - x_0| \le \frac{|x_1 - x_0|}{1-\varepsilon}\varepsilon^n\end{aligned}$$

因为 $0 < \varepsilon < 1$，$\{x_n\}$ 满足 Cauchy 准则，收敛。

3. 下列哪些命题与柯西准则等价，证明你的结论或举出反例。

（1）对于任意的 $p \in N$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$。

（2）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - a_N| < \varepsilon$

（3）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ 以及 $A_\varepsilon \in \mathbb{R}$, 只要 $n > N_\varepsilon$, 就有 $|a_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$

解：（1）不等价，反例 $a_n = \ln n$。事实上，（1）等价于

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{只要 } n > N, \text{就有 } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon。$$

（2）等价。（2）推出柯西准则：由（2）$\forall \varepsilon > 0$, 对 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$　$\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n > N$, 就有

$|a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此 $n,m > N$ 时 $|a_n - a_m| \le |a_n - a_N| + |a_m - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$。

柯西准则推出（2）：由柯西准则，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n,m > N$，就有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$。

$\exists N_1 = N+1$, $n > N_1$ 时，$|a_n - a_{N_1}| < \varepsilon$.

(3)等价。（3）推出柯西准则的方法类似于（2）

柯西准则推出（3）：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 只要 $n,m > N$，就有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$。

令 $A_\varepsilon = a_{N+1}$ 即可。

二、函数极限

4. 用定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1}) = 0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}$.

证明：（1）$\left|\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1}\right| = \left|2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right|$

$$< \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{|x|}.$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$，则对于 $\forall x > N$，有 $\left|\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1}\right| < \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ 成立，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1}\right) = 0$.

（2）$\forall \varepsilon > 0 (0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2})$, 要使不等式

$$\left|\arctan\frac{1}{1-x} - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{1-x} < \varepsilon \qquad (x < 1)$$

成立，解得 $1 - x < \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)}$. 取 $\delta = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)}$，于是

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)} > 0, \forall x \in (1-\delta, 1)$, 有 $\left|\arctan\frac{1}{1-x} - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$,

即 $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}$.

5．（1）讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 是否存在；

解：左右极限不等，极限不存在。

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=2-1=1$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$。

6.设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=f(1)$，求证：

$f(x)=f(1), x\in(0,+\infty)$。

证明:，$f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n}),\quad n\in\aleph$

$x\in(0,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2^n}=0$，故 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(1)$。

$x\in(1,+\infty)$ 时，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2^n}=+\infty$，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，

故 $f(x)=f(1), x\in(0,+\infty)$。

7．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，求证：$\forall a>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

证明:（1）$1\le a\le 2$ 时，由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增性，

$$1=\frac{f(x)}{f(x)}\le\frac{f(ax)}{f(x)}\le\frac{f(2x)}{f(x)}\to 1(x\to+\infty)$$

由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

（2）$2<a\le 4$时，$\dfrac{f(2x)}{f(x)}\le\dfrac{f(ax)}{f(x)}=\dfrac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}\cdot\dfrac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}=1\text{（由（1）证得）}$$

故由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

同理可证$\forall a>2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

(3) $0<a<1$时，$a^{-1}>1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{f(x)}{f(ax)}}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(ax)}\right)^{-1}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(a^{-1}x)}{f(x)}\right)^{-1}=1$$

8.（书上 P.49,18）Riemann 函数的定义为$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n},m,n\text{互质}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1 & x=0\end{cases}$，证明：Riemann 函数在任意点的极限均为 0.

证明：$\forall x_0\in\mathbb{R}$，考虑 Riemann 函数在x_0点的极限。

$\forall\varepsilon>0$，取q_0为正整数，使得$\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$。在$(x_0-1,x_0+1)$中，有理数$\dfrac{p}{q}$满足$0\le q\le q_0$的只有有限个。取$\delta$足够小，使得$B_\delta(x_0)$中不包含那些满足$0\le q\le q_0$的有理数$\dfrac{p}{q}$，

$$0\le R(x)\le\frac{1}{q}<\varepsilon$$

故 Riemann 函数在任意点的极限均为 0.

9．设 $f_1(x)=\begin{cases}x, & 1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $\quad f_n(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le n,\\ x^n, & n<x\le n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1,\end{cases}$

（1）对任意固定的n，求$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$；

（2）求$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式；

（3）求$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$。

解　（1）对任意固定的n，$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

（2）（求$F(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式，也就是求$F(x)$在任意点的值）

对任意的$x\in[1,+\infty)$，

当$x\in[1,2]$时，$f_1(x)=x,\ f_2(x)=1,\ f_3(x)=1,\cdots$，这时

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x；$$

当$x\in(2,+\infty)$时，总存在正整数n_0使得$n_0+1<x\le n_0+2$，这时

$f_1(x)=\dfrac{1}{x},\ f_2(x)=\dfrac{1}{x},\cdots,\ f_{n_0}(x)=\dfrac{1}{x}$，$f_{n_0+1}(x)=x^{n_0+1},\ f_{n_0+2}(x)=f_{n_0+3}(x)=\cdots=1$，

所以$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x$。

综上便知$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式为$F(x)=x$。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$。

三、连续函数概念

10.讨论函数$f(x)$的连续性，若有可去间断点，将函数修正为连续函数。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2x^2} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x<0\end{cases}$$

解：这一分段函数各段表达式在给定的区间内均为初等函数，$f(x)$有唯一的间断点$x=0$，

并且　$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{x\to0^{--}} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}，$$

因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，若改变 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的定义为 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续。

11. 考察函数 $y=e^{1-\cos\frac{1}{x}}$ 的连续性。

解：这是一个复合函数，$y=e^u$ 处处连续，而 $u=1-\cos\dfrac{1}{x}$ 有第二类间断点 $x=0$，于是函数 $y=e^{1-\cos\frac{1}{x}}$ 除去点 $x=0$ 外处处连续（$x=0$ 为第二类间断点，属于振荡形间断点。）

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\in C(-\infty,+\infty)$，求 a,b。

解：根据 x 的不同范围，$f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x>1\\ \dfrac{1+a+b}{2},x=1\\ ax^2+bx,-1<x<1\\ \dfrac{-1+a-b}{2},x=-1\\ \dfrac{1}{x},x<-1\end{cases}$$

在 $x=1$ 点函数连续，$a+b=1$；
在 $x=-1$ 点函数连续，$a-b=-1$；

故 $a=0,b=1$。

13．设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$.

证明：（1）$|f(x)|,\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

（2）$m(x)=\min\limits_{a\le\xi\le x}f(\xi),M(x)=\max\limits_{a\le\xi\le x}f(\xi)\in C[a,b]$

证明：(1) $\forall x_0\in[a,b]$, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 以及

$0\le||f(x)|-|f(x_0)||\le|f(x)-f(x_0)|$，可以得到 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$. 因此 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续.（当 $x_0=a$ 或者 $x_0=b$ 时上述的极限和连续均表示单侧极限与单侧连续）注意到

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$
$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

知 $\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

(2) 只证明 $m(x)$ 连续，$M(x)$ 的证明类似

注意到 $\min X\cup Y=\min(\min X,\min Y)$, 如果 $\min(X),\min(Y)$ 存在。

容易看到, $m(x)\le f(x)$, $m(x)$ 不增.

考虑 $\forall x_0\in(a,b)$.

如果 $f(x_0)>m(x_0)$，由 f 连续，$\exists\epsilon,\delta>0,\forall x\in B(x_0,\delta), f(\mathrm{x})>f(\mathrm{x}_0)-\epsilon>m(x_0)$. 任意 $x_0-\delta<x<x_0$, 若 $m(x)>m(x_0)$, 则 $m(x_0)=\min\{m(x),\min_{x\le t\le x_0} f(t)\}>m(x_0)$, 所以 $m(x)=m(x_0)$. 任意 $x_0<x<x_0+\delta$，$m(x)=\min\{m(x_0),\min_{x_0\le t\le x} f(t)\}=m(\mathrm{x}_0)$ 。所以 $m(x)=m(x_0),\forall x\in B(x_0,\delta)$，$m(x)$ 在 x_0 连续。

如果 $f(x_0)=m(x_0)$, 由 f 连续，$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0, s.t.\forall x\in B(x_0,\delta),\left|f(x)-m(x_0)\right|<\epsilon$. 任意 $x_0-\delta<x<x_0$, 有 $m(x)\ge m(x_0)$, 且 $m(x)\le f(x)<m(x_0)+\epsilon$. 任意 $x_0<x<x_0+\delta$, 有 $m(x)\le m(x_0)$, 且 $m(x)=\min\{m(x_0),\min_{x_0\le t\le x} f(t)\}>m(\mathrm{x}_0)-\epsilon$. 所以 $m(x)$ 在 x_0 连续。

$x=a\vee x=b$ 时证明只需要考虑上面的一类情况.

14.设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad\forall x,y\in(a,b)\qquad(*)$$

证明 $f\in C(a,b)$。

证明：$\forall x_0\in(a,b)$，因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点, 假设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$。要证 $A=B=f(x_0)$。

在（*）式，取 $y=x_0$，$f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(x_0)}{2}$,

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \le \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)+f(x_0)}{2},$$

$$B \le f(x_0)$$

同理可证，$A \le f(x_0)$。

另外，在（*）式，取 $x = x_0 - h, y = x_0 + h$，

$$f\left(\frac{x_0 - h + x_0 + h}{2}\right) = f(x_0) \le \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h)}{2},$$

$$f(x_0) \le \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h)}{2} = \frac{A+B}{2},$$

故 $A = B = f(x_0)$。