代数与几何讨论课（一）（行列式、矩阵部分）答案

一、下列命题是否正确

(1)若 A,B 都是n阶方阵，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

答：不对。应为$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

(2) 若矩阵 A,B,C 满足$A\neq 0,\ AB=AC,$则$B=C$.

答：不对。反例为$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\neq C=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$满足$AB=AC$.

(3) 若矩阵 A 满足 $A^2=I,$则$A=\pm I$.

答：不对，反例为$A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$，或者$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

(4) 若 n阶方阵 A 的行列式$|A|=0$，则$A=0$.

答：不对，如$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$满足$|A|=0$，但 $A\neq 0$.

(5) 若可逆阵 A 经初等行变换可以化为方阵 B,则$A^{-1}=B^{-1}$.

答：不对，例如$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$可以经过初等变换化为$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，但$A^{-1}\neq B^{-1}$.

(6) 若n阶方阵 A,B,C 满足$ABC=I,$ 则

$BCA=I$， $A^{-1}C^{-1}B^{-1}=I$， $C^TB^TA^T=I$.

答：正确。由已知，$A^{-1}=BC$，则$BCA=A^{-1}A=I$，$A^{-1}C^{-1}B^{-1}=BCC^{-1}B^{-1}=I$，$C^TB^TA^T=(ABC)^T=I$.

(7) 若 A 为n阶方阵, k为任意常数，则$|kA|=k|A|$.

答：不对，应为$|kA|=k^n|A|$。

(8) 若 A 可逆，且 $|A+AB|=0,$则$|B+I|=0$.

答:正确。由已知 $|A+AB|=|A||B+I|=0$。又由于 A 可逆，$|A|\neq 0$。因此$|B+I|=0$.

(9) 若矩阵 A 满足 $A^2=A,$ $|A-I|\neq 0$，则$A=0$.

答：正确。由于$\left|A-I\right|\neq 0$，$A-I$可逆。由已知$A(A-I)=0$，所以$A=0$。

(10) 对方阵进行初等行变换，不改变该方阵的行列式.

答：不对，交换方阵两行的位置，行列式的值反号。用一个非零的数乘方阵的某一行，其行列式等于这个数乘原方阵的行列式。

二、填空、选择

(1) 已知$A\in M_4$，$\left|A\right|=4$，且$A^2+A+2I=0$，则$\left|A+I\right|=4$.

解：由已知$A^2+A+2I=A(A+I)+2I=0$，所以$|A||A+I|=|-2I|$，$|A+I|=(-2)^4/4=4$

（2） 设A为n阶对称矩阵，设B为n阶反对称矩阵，则（B）是反对称矩阵.

(A) $AB-BA$ (B) $AB+BA$ (C) $(AB)^2$ (D) BAB

解：$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=(-B)A-A(-B)=AB-BA$，

$(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=(-B)A+A(-B)=-(AB+BA)$，

$((AB)^2)^T=(ABAB)^T=B^TA^TB^TA^T=(BA)^2$；$(BAB)^T=B^TA^TB^T=BAB$

（3）设$A,B,C\in M_n$且$ABC=I$，则$B^{-1}=A^{-1}C^{-1}$.

解：由已知$ABC=I$，所以A,B,C都可逆，且$B^{-1}=A^{-1}C^{-1}$。

（4）对方阵A施行初等变换得到B，若$\left|A\right|\neq 0$，则(C) .

(A) 必有$\left|B\right|=\left|A\right|$， (B) 必有$\left|B\right|\neq\left|A\right|$

(C) 必有$\left|B\right|\neq 0$， (D) $\left|B\right|=0$或$\left|B\right|\neq 0$依赖于所作的初等变换

（5）设n阶矩阵A与B相抵，则必有（B）.

（A）当$|A|\geq 0$时，$|B|\geq 0$. （B） 当$|A|=0$时，$|B|=0$.

（C） B可由A经过一系列初等行变换得到. （D） 存在可逆阵P，使得$B=PA$.

（6）$A\in M_n$，$AA^T=I$且$\left|A\right|<0$，则$\left|A+I\right|=0$.

解：$|A+I|=|A+A^TA|=|A||I+A^T|=|A||(I+A)^T|=|A||A+I|$，由于$AA^T=I$且$\left|A\right|<0$，则$|A|=-1$。因此$\left|A+I\right|=0$.

（7）设M_{ij}和A_{ij}分别是n阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$的余子式和代数余子式，且

$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a$，则$\begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix} = a.$

解：由于 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，从行列式$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$中的第 i 行提出$(-1)^i$（$i = 1, 2, \cdots, n$），第 j 列提出$(-1)^j$（$j = 1, 2, \cdots, n$），则

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(-1)^i \prod_{j=1}^{n}(-1)^j \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

（8）设α_1，α_2和α_3均为 3 维列向量或3行 1 列的矩阵，记矩阵$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$.如果$|A| = 1$，那么$|B| = 2$.

解：

$|B| = |[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]| = |[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_2 + 8\alpha_3]|$

$= |[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3]| = 2|[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3]| = 2|[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]| = 2$。

（9）设n阶可逆矩阵A中每行元素之和均为常数a，则A^{-1}的每行元素之和均为$\dfrac{1}{a}$.

解：设$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，令$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，则$A\beta = a\beta$。由于$A$可逆，$\beta \neq 0$，则$A\beta = a\beta \neq 0$。因此$a \neq 0$，且$A^{-1}\beta = \dfrac{1}{a}\beta$。

（10）设A是n阶方阵，满足$A^m = I$其中m是正整数，又$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，其中$A_{ij}$是$|A|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，则$B^m = I$.

解：$B = (A^*)^T$，$A^T B = (A^* A)^T = |A| I$，则$(A^T B)^m = (A^T)^m B^m = B^m = (|A| I)^m = I$（$A^T$和$B = (A^*)^T = (A^T)^*$可以交换），所以$B^m = I$。

三、已知n阶矩阵 A 满足方程：$A^2 + 3A - 4I = 0$ 其中 I 为n阶单位矩阵。

1. 求 $(A+3I)^{-1}$ 2. 求 $(A+5I)^{-1}$

3. 问当 m 满足什么条件时，$(A+mI)$ 必可逆。

解：1. 由 $A^2+3A-4I=0$，得到 $A(A+3I)=4I$，即 $\frac{1}{4}A(A+3I)=I$。故

$(A+3I)^{-1}=\frac{1}{4}A.$

2. 由 $A^2+3A-4I=0$，得到 $(A-2I)(A+5I)=-6I$，即 $-\frac{1}{6}(A-2I)(A+5I)=I$，

所以 $(A+5I)^{-1}=-\frac{1}{6}(A-2I)$。

3. 由 $A^2+3A-4I=0$，得到 $(A+(3-m)I)(A+mI)=(4-m)(m+1)I$，故只要

$(4-m)(m+1)\neq 0$，即 $m\neq 4$ 或 $m\neq -1$，则 $(A+mI)$ 必可逆。由于 $A^2+3A-4I=0$，

则 $(A+4I)(A-I)=0$。所以 $A+4I$ 可逆当且仅当 $A=I$，$A-I$ 可逆当且仅当 $A=-4I$。

四、已知列矩阵 $C=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ **，行矩阵** $D=\begin{pmatrix}2, & 0, & 1\end{pmatrix}$

1、 试计算 $A=CD$ 及 $B=DC$ ；

2、 求 A^{100} ， 通过此题的计算你能归纳出什么样的结论？

解：1. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\-2 & 0 & -1\\4 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=4$（**说明：**$1\times 1$ **的矩阵** $A=(a)$ **通常记为** $A=a$）

2. $A^{100}=(CD)^{100}=C(DC)^{99}D=CB^{99}D=4^{99}A.$

由于矩阵乘法有结合律，所以多个矩阵作乘时合理地使用结合律可以简化计算。

五、设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$ 都是 n 阶方阵，

试计算 $AJ, JA, J^2, J^3, \cdots, J^n$。

解：$J^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$，$J^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$，$\cdots$，$J^{n-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$，

$J^n=0$。

$$AJ=\begin{pmatrix}0 & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}\end{pmatrix},\quad AJ^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n-2} \\ 0 & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn-2}\end{pmatrix},\quad \cdots。$$

$$JA=\begin{pmatrix}a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad J^2A=\begin{pmatrix}a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \cdots。$$

六、设 A^* 是 n 阶可逆矩阵 A 的伴随矩阵（$n\geq 2$）。

求：1、$(A^*)^{-1}$　　2、$(A^{-1})^*$

3、$(kA)^*,(k\neq 0)$　　4、$(A^*)^*$

解：1. 由于 $AA^*=|A|I$，所以 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A.$

2. $(A^{-1})^*=|A^{-1}|A=|A|^{-1}A.$

3. $(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|k^{-1}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*.$

4. $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=||A|A^{-1}||A|^{-1}A=|A|^n|A^{-1}||A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$。