第三次习题课（欧氏空间和酉空间）

1、设$\alpha_1=(1,0,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,2,3)^T$，$\alpha_3=(i,0,i,1)^T$，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$。求$W$在$C^4$中的正交补。

2、设σ为欧式空间V的一个线性变换。证明:

（1）σ为欧式空间V的一个全等变换（即保持向量的长度和向量间夹角的变换）当且仅当σ为V的正交变换。

（2）σ为欧式空间V的一个相似变换（即保持向量间夹角的变换）当且仅当σ满足$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$，其中$\lambda$为正的常数。

（3）σ为相似变换当且仅当σ为一非零的实数与一正交变换的乘积。

3、设$\{O:e_1,e_2\}$为平面π上的直角坐标系。

（1）设σ为以OT为轴的反射变换，设以e_1为始边，OT为终边的角为$\theta/2$，其中$0\le\theta<2\pi$。证明σ在基e_1,e_2下的矩阵为$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$.

（2）设σ为π上逆时针旋转φ度角的旋转变换，其中$0\le\varphi<2\pi$。证明σ在e_1,e_2下的矩阵为$\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$.

（3）证明平面π上任意一个正交变换要么是旋转要么是反射。

4、设$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix}$，求酉矩阵$U$使得$U^{-1}AU$为对角阵。

5、设σ为酉空间V上的艾尔米特变换，证明：

（1）对于任意的向量$\alpha\in V$，$(\sigma\alpha,\alpha)$为实数;

（2）若σ在V的一组标准正交基下的矩阵为正定的埃尔米特矩阵则对V中任何非零向量α有$(\sigma\alpha,\alpha)>0$.

6、设A,B为正规矩阵，且$AB=BA$。证明存在酉矩阵U使得$U^{-1}AU$和$U^{-1}BU$同时为对角阵。

7、设σ为酉空间V的线性变换，σ^*为σ的共轭变换，W为V的子空间。证明W为σ不变的当且仅当$W^\perp$为σ^*不变的。特别地若σ为艾尔米特变换，W为σ不变的当且仅当$W^\perp$为σ不变的。

8、设$A=\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$，求酉矩阵$U$和上三角矩阵$R$使得$A=UR$. (上述分解称为复可逆阵的$U$、$R$分解，类似于实可逆阵的$Q$、$R$分解。)