第四章 向量空间

一、 向量组相关性的判断

1. 向量方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解.（适用于抽象向量组）

2. 令A=$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，用初等行变换将$A$化成阶梯阵。若$r(A)<s$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关.（适用于具体向量组）

3. $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关当且仅当Ax=0有非零解，其中A=$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$.（适用于具体向量组）

例：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，判断$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_4$的线性相关性.

解：考查向量方程$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_4)+x_4(\alpha_1+\alpha_4)=0$，经过变形得到$(x_1+x_4)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3+(x_3+x_4)\alpha_4=0$. 因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，所以$\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$，有非零解$(1,-1,1,-1)^T$，所以$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_4$的线性相关.

二、 向量组的极大无关组及秩的计算

1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in F^n$，

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}c_{1i_1}&\cdots&c_{1i_2}&\cdots&c_{1i_r}&\cdots&c_{1s}\\&&c_{2i_2}&\cdots&c_{2i_r}&\cdots&c_{2s}\\&&&\ddots&\vdots&\cdots&\vdots\\&&&&c_{ri_r}&\cdots&c_{rs}\end{pmatrix}$$，则

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$为极大线性无关组. （适用于具体向量组）

2. 已知向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，假设$\beta_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\alpha_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}k_{1j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}$，$1\le j\le t$，

令$\eta_j=\begin{pmatrix}k_{1j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}$，$1\le j\le t$，则$\eta_{i_1},\eta_{i_2},\cdots,\eta_{i_s}$为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$的极大线性无关组当且仅当$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}$为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的极大线性无关组.

例 1：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，不妨设

$(\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)A$，证明 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩为 $r(A)$.

证明：对 A 按列向量组进行分块为 $A=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)$，则 $\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\eta_i$，$i=1,\cdots,t$.

因为 $\eta_{i_1},\eta_{i_2},\cdots,\eta_{i_s}$ 为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 的极大线性无关组当且仅当 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的极大线性无关组，所以 $r(\beta_1,\cdots,\beta_t)=r(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)=r(A)$.

例 2：已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，求 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+2\alpha_3$，$\alpha_2+2\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$ 的极大线性无关组.

解：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1+2\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，

$\alpha_2+2\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\eta_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&2&0&1\\1&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换化阶梯阵}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\&-1&1&0\\&&1&1\\&&&\end{pmatrix}$，于是 η_1,η_2,η_3 为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的极大线性无关组，因此 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+2\alpha_3$，$\alpha_2+2\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$ 的极大线性无关组为

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+2\alpha_3$，$\alpha_2+2\alpha_4$.

三、 矩阵秩的计算

1. 化阶梯阵，阶梯阵主元的个数即为矩阵的秩.
2. 利用矩阵秩的性质.

例 1：设 $A\in M_n$ （$n\geq 2$），证明：$r(A^*)=\begin{cases} n，若 \quad r(A)=n. \\ 1，若 r(A)=n-1 \\ n，若 r(A)\leq n-2 \end{cases}$ 。

例 2：设 $A\in M_n$ 满足 $A^2=I$ ，证明：$r(A+I)+r(A-I)=n$.

3. 利用齐次线性方程组基础解系中含向量的个数求系数矩阵的秩.

例 1：证明：$r(AB)=r(B)$ 当且仅当 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

证明："$\Rightarrow$"，因为 $r(AB)=r(B)$，所以 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 的基础解系中向量的个数一样多，显然 $Bx=0$ 的解都是 $ABx=0$ 的解，所以 $Bx=0$ 的基础解系也是 $ABx=0$ 的基础解系，故 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

"$\Leftarrow$"，$ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解，所以 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 的基础解系中向量的个数一样多，又 $ABx=0$ 的基础解系中向量的个数等于 $n-r(AB)$（其中 n 为方程组中未知元的个数），$Bx=0$ 的基础解系中向量的个数等于 $n-r(B)$，所以 $r(AB)=r(B)$.

例 2：设 A 列满秩，证明：$r(AB)=r(B)$.

证明：只要证明 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解，显然 $Bx=0$ 的解都是 $ABx=0$ 的解. 取 η 为 $ABx=0$ 的解，即 $AB\eta=A(B\eta)=0$。由于 A 列满秩，由 $A(B\eta)=0$ 可得到 $B\eta=0$，即 η 为 $Bx=0$ 的解。所以 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

4. 打"洞"法求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩，只要 A,B,C,D 中有一块可逆，就可以求出其秩. 例如 C 可逆，则第二行左乘 $-AC^{-1}$ 加到第一行得到 $\begin{pmatrix} 0 & B-AC^{-1}D \\ C & D \end{pmatrix}$，再用第一列右乘 $-C^{-1}D$ 加到第二列得到 $\begin{pmatrix} 0 & B-AC^{-1}D \\ C & 0 \end{pmatrix}$，故 $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r(B-AC^{-1}D)+r(C)$。

例 1：设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵，其中 A 可逆，证明（1）$r(A^T-BA^{-1}C)=r(A-C(A^T)^{-1}B)$；（2）$r(A-BA^{-1}C)=r(A-CA^{-1}B)$；（3）$r(A^{-1}-BA^{-1}C)=r(A-CA\ B)$。

证明：构造 $2n$ 阶行列式，分别通过第一块和第四块"打洞"求行列式，得到所要的等式。

（1）$\begin{pmatrix} A & C \\ B & A^T \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} A & C \\ B & A \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} A & C \\ B & A^{-1} \end{pmatrix}$

例 2：设 $A\in M_{m\times n}$，$B\in M_{n\times m}$，证明：$n+r(I_m-AB)=m+r(I_n-BA)$.

证明：构造矩阵$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$，由于$I_m$可逆可以做初等变换“打洞”

$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$，所以$r\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = m + r(I_n - BA)$.

又由于I_n可逆可以做初等变换“打洞”$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$，所以

$r\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + r(I_m - AB)$. 故$n + r(I_m - AB) = m + r(I_n - BA)$.

四、 线性方程组的求解

1. $Ax = b$求解. 讨论带参数的方程组的求解问题.

例： 已知$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$有无穷多解，求$a$并求解方程组.

解：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$，由于方程组有无穷多解，所以$a = 1$。求得特解$\xi_0 = (-1, 2, 0)^T$，求得导出组的基础解系为：$\eta = (-3, 2, 1)^T$，故通解为$\xi_0 + c\eta$。

2. $AX = B$求解.

设$A \in M_{m\times s}$，$X \in M_{s\times n}$，$B \in M_{m\times n}$，对X和B分别按列向量分块为$X = (x_1, \cdots, x_n)$和$B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，故求$X$化为分别求解$Ax_i = \beta_i$，$i = 1, \cdots, n$. 如果对每个方程组$Ax_i = \beta_i$（$i = 1, \cdots, n$）分别做高斯消元化阶梯阵会有很多重复的工作，所以可以采用下面的格式一次将它们同时化为阶梯形.

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1s} & d_{1s+1} & \cdots & d_{1s+n} \\ & & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{1s} & d_{2s+1} & \cdots & d_{2s+n} \\ & & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & c_{ri_r} & \cdots & c_{rs} & d_{rs+1} & \cdots & d_{rs+n} \end{pmatrix},$$

（这里讨论的是有解的情况. 对于一般的情况若有某个$d_{r+1,j}$不等于零，则无解.），所以

$$(A\vdots\beta_i)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1s} & d_{1s+i} & \\ & & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{1s} & d_{2s+i} & \\ & & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & c_{ri_r} & \cdots & c_{rs} & d_{rs+i} & \end{pmatrix}$$，解得 $Ax_i=\beta_i$ 的

通解η_i。故 $X=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，即为所求。

练习题

1. （1）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，求$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的极大线性无关性；

   （2）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，求$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$的极大线性无关性。

2. （1）设$A\in M_n$，若存在$k\in N$使得$r(A^k)=r(A^{k+1})$，证明$r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots$

   （2）设$A\in M_n$，证明$r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$

3. 已知线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ ax_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$，讨论方程组何时有解并求解。

4. 设$A\in M_{m,n}$，$B\in M_{n,m}$满足$AB=I_m$，证明：$r(A)=r(B)=m$。

5. 设$Ax=b\ (b\neq 0)$有解，证明$Ax=b$的解集中极大无关组含的向量个数为$n-r(A)+1$。

6. 设$A\in M_n$ （$n\geq 2$），证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

7. 证明：$r(AB-I)\leq r(A-I)+r(B-I)$。

8. 通过平面的方程讨论三个平面的位置关系。

9. 求使齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0 \\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系中解向量个数最多的λ的值，并求出通解。

10. 设A是n阶方阵，满足$A^2=I$，且$A\neq I$，证明$(A+I)x=0$有非零解。