代数与几何讨论课（三）（几何空间中的向量）答案

一、1．设 O 是点 A 和点 B 连线外的一点，证明：三点 A，B，C 共线的充分必要条件是

$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$。

证明:必要性:三点 A, B, C 共线,则存在 λ,μ 使得 $\begin{cases}\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\\ \mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\end{cases}$, 故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(\lambda+\mu)\overrightarrow{AB}$, $\lambda+\mu=1$。

则 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB})+\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}$。

充分性：$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$，则 $\lambda\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{CB}$。故 A，B，C 共线

2．下列命题是否成立？

（1）如果 $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\beta=\gamma$；（2）如果 $\alpha\times\beta=\alpha\times\gamma$ 且 $\alpha\neq 0$，则 $\beta=\gamma$。

答：都不成立。（1）中，只要 $\alpha\perp(\beta-\gamma)$，就有 $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$，不一定要 $\beta=\gamma$。（2）中，$\alpha//(\beta-\gamma)$，就有 $\alpha\times\beta=\alpha\times\gamma$，不一定要 $\beta=\gamma$。

3．已知 α,β 满足下列条件，讨论 α,β 之间的关系：

（1） $(\alpha\cdot\beta)^2=(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)$ ；（2） α 与 $\alpha\times\beta$ 共线 ；（3） α， β， $\alpha\times\beta$ 共面。

解：（1）由已知 $|\alpha|^2|\beta|^2(\cos\theta)^2=|\alpha|^2|\beta|^2$，则 $\alpha=0$，或 $\beta=0$，或 $\cos\theta=\pm1$。故 α,β 共线。

（2）由已知 α 与 $\alpha\times\beta$ 共线，但同时 α 与 $\alpha\times\beta$ 正交，所以 $\alpha=0$ 或者 $\alpha\times\beta=0$。故 α,β 共线。

（3）由已知 α， β， $\alpha\times\beta$ 共面，但同时 $\alpha\times\beta$ 与 α， β 正交，所以 $\alpha\times\beta=0$。故 α,β 共线。

二、1．给定仿射坐标系 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 满足：

$$e_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{2+\sqrt{2}}{2}j, e_2=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{2-\sqrt{2}}{2}j, e_3=k$$

（1） 求 数量积在 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 坐标系下的度量矩阵;

（2） 设向量 α,β 在 $\{0;e_1,e_2,e_3\}$ 坐标系下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$ 和 $\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}^T$，

试写出 α,β 的数量积与坐标和度量矩阵的关系式。

解：（1）$\begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & & \\ & 2-\sqrt{2} & \\ & & 1\end{pmatrix}$；（2）$\alpha\cdot\beta=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & & \\ & 2-\sqrt{2} & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

2．在仿射坐标系 $\{O:e_1,e_2\}$ 下，对任意向量 $\alpha=(x_1,x_2)$， $\beta=(y_1,y_2)$，定义

$$\alpha\cdot\beta= x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2,$$

（1） 试验证它满足数量积的4条性质；

（2） 写出它的度量矩阵；

（3） 证明 $(\alpha\cdot\beta)^2\le(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)$ 对任意向量 α， β 成立。

解：（1）容易验证对称性、线性性、分配律成立。对于正定性， $\alpha\cdot\alpha=$

$x_1{}^2-2x_2x_1+3x_2{}^2=(x_1-x_2)^2+2x_2{}^2\ge 0$，且 $\alpha\cdot\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。

（2）$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$；

（3） $(\alpha\cdot\beta)^2-(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)=(x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2)^2$

$-(x_1{}^2-2x_1x_2+3x_2{}^2)(y_1{}^2-2y_1y_2+3y_2{}^2)=-2(y_2(x_1-x_2)-x_2(y_1-y_2))^2\le 0$。

3．在仿射坐标系 $\{O:e_1,e_2,e_3\}$ 下，对任意向量 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$， $\beta=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$，

定义 $\alpha\cdot\beta=ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2+x_3y_3$， （其中 $a,b,c,d\in R$）

试讨论 a,b,c,d 满足什么条件时， (α,β) 满足数量积的4条性质。

解：由对称性 $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$，有 $b=c$. 由正定性，对于任意不为0 的向量 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$，

有 $\alpha\cdot\alpha>0$，即 $ax_1{}^2+2bx_1x_2+dx_2{}^2+x_3{}^2>0$，故 a,d 不能同时为0。

若 $a\ne 0$，由 $ax_1{}^2+2bx_1x_2+dx_2{}^2+x_3{}^2=a(x_1+\frac{b}{a}x_2)^2+(d-\frac{b^2}{a^2})x_2{}^2+x_3{}^2>0$ 得到

$a>0$，$d-\frac{b^2}{a^2}>0$。

若 $d\ne 0$， $ax_1{}^2+2bx_1x_2+dx_2{}^2+x_3{}^2=d(x_2+\frac{b}{d}x_1)^2+(a-\frac{b^2}{d^2})x_1{}^2+x_3{}^2>0$ 得到

$d>0$，$a-\frac{b^2}{d^2}>0$。

综上 $b=c$， $a>0$，$d-\frac{b^2}{a^2}>0$，或 $b=c$， $d>0$，$a-\frac{b^2}{d^2}>0$ 时， (α,β) 满足数量积的4条性质。

4. 已知向量 α,β,γ 不共线，证明 $\alpha+\beta+\gamma=0$当且仅当 $\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$.

证明：必要性：假设 $\alpha+\beta+\gamma=0$，则 $\alpha\times\beta=(-\beta-\gamma)\times\beta=-\gamma\times\beta=\beta\times\gamma$，同理可证

$\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$。

充分性：由$\alpha\times\beta=\beta\times\gamma$，得到$\alpha\times\beta-\beta\times\gamma=(\alpha+\gamma)\times\beta=0$，所以$\alpha+\gamma,\beta$共线。若$\alpha+\gamma$=0，

则 $\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$=0，从而 α,β,γ 共线，矛盾。所以$\alpha+\gamma\neq 0$，设$\beta=k(\alpha+\gamma)$，由

$\alpha\times\beta=\gamma\times\alpha$ 可以推出$k=-1$，因此 $\alpha+\beta+\gamma=0$。

三、1．已给平面 $\begin{array}{l}\pi_1:\quad x-2y+2z+d=0\\ \pi_2:\quad -2x+4y+cz+1=0\end{array}$

（1） 求 c,d，使 $\pi_1 // \pi_2$ 且不重合，并问答案是否唯一？

（2） 求 c,d，使 $\pi_1 // \pi_2$，且它们之间的距离为 1；

（3） 求 d，使原点到 π_1 的距离为 1；

（4） 求 d，使点 $M(1,1,1)$ 到平面 π_1 的距离为 1。

解：（1)由两平面平行的充要条件：一次项系数成比例，而常数项不与这些系数成比例，得：$c=-4$，$d\neq -\dfrac{1}{2}$。答案不唯一。

(2) 由两平面平行得$c=-4$．在π_2上取一点$A(-\dfrac{1}{2},0,0)$，由已知A到π_1 的距离为1．故

$\dfrac{|-1/2+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$，从而$d=-2.5$或$3.5$。

(3) 代入点到平面距离公式直接计算得：$d=\pm 3$。
(4) 代入点到平面距离公式直接计算得：$d=-4$或$d=2$。

2．设有两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{n},\quad L_2:\begin{cases}x=-2-4t\\ y=2+mt\\ z=3+2t\end{cases}$

（1） 求 m,n，使 $L_1 // L_2$；

（2） 当 $m=n=1$时，求 L_1,L_2之间的最短距离；

（3） 当 $m=n=1$时，求 L_1与 L_2 的方程（ L 与 L_1,L_2 垂直且相交）;

（4） 求 m,n，使 $L_1 \perp L_2$，并问 m,n 是否唯一？

（5） 求 m,n，使 L_1 与 L_2 共面，并问这样的 m,n 是否唯一？

（6） 当 $m=-4, n=-1$ 时，求 L_1 与 L_2 的夹角。

解:（1）若 $L_1 // L_2$，则 $2:-2:n=-4:m:2 \neq (1-(-2)):(-1-2):(0-3)=1:1:1$，推出 $m=4$，$n=-1$.

（2）$L1$ 和 $L2$ 为异面直线，它们之间的最短距离为 $d=\frac{27\sqrt{5}}{25}$

（3）L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $v_1=(2,-2,1)$ 和 $v_2=(-4,1,2)$。公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ & v_1\times v_2 & \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-3 \\ -4 & 1 & 2 \\ & v_1\times v_2 & \end{vmatrix}=0 \end{cases}，即 \begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ -5 & -8 & -6 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -5 & -8 & -6 \end{vmatrix}=0 \end{cases}。$$

（4）不唯一。只要 $v_1\cdot v_2=-8-2m+2n=0$，即 $n-m=4$。

（5）L_1 和 L_2 共面当且仅当 $\begin{vmatrix} -2-1 & 2-(-1) & 3-0 \\ 2 & -2 & n \\ -4 & m & 2 \end{vmatrix}=0$，即 $(m-4)(n+2)=0$，所以 $m=4$，或 $n=-2$。

（6）L_1 和 L_2 的夹角即它们方向向量 v_1,v_2 的夹角，设 v_1,v_2 的夹角 θ，则

$$\cos\theta=\frac{2\times(-4)-2\times(-4)-1\times 2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(2)^2}}=-\frac{1}{9}，所以 \theta=\arccos(-\frac{1}{9})=\pi-\arccos(\frac{1}{9})。$$

3．已知平面 π：$x-2y-2z+4=0$，直线 L：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{n}$

（1） 求 n，使 $L\perp\pi$；

（2） 求 n，使 $L//\pi$；

（3） 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 之间的交点，并求 L 在 π 上的投影线方程；

（4） 当 $n=-2$ 时，求直线 L_1，使 L_1 与 L 关于平面 π 对称；

（5） 求原点关于平面 π 的对称点的坐标。

解：（1）设平面π的法向量为$\tau=(1,-2,-2)$，直线L的方向向量为$v=(-1,2,n)$。由已知$\tau//v$，所以$\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{-2}{n}$，故$n=2$。

（2）由已知$\tau\perp v$，所以$\tau\cdot v=-1-4-2n=0$，故$n=-\frac{5}{2}$。

（3）将L写出参数方程$\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-2-2t \end{cases}$，并带入平面$\pi$的方程，可以解得$t=9$。所以交点坐标为$(-8,18,-20)$。设投影线方程的方向向量为$v'=(a,b,c)$，则$v'\perp\tau$，且$v,v',\tau$共面。故$\begin{cases} v'\cdot\tau=a-2b-2c=0 \\ (v,v',\tau)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ a & b & c \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$，所以$a:b:c=2:-4:5$。所以投影线方程为$L':\frac{x+8}{2}=\frac{y-18}{-4}=\frac{z+20}{5}$.

（4）由（3）知L_1与平面π的交点为$(-8,18,-20)$。在直线L上取定$P=(1,0,-2)$，则过P点垂直于π的直线为$L':\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=-2-2t \end{cases}$，带人平面$\pi$的方程求得$L'$在$\pi$上的投影点坐标$Q=(0,2,0)$。设$P$关于平面$\pi$的对称点为$R$，则$\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PQ}$，求得$R=(-1,4,2)$。显然$R$在直线$L_1$上。于是$L_1$的方程为$L_1:\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{14}=\frac{z-2}{22}$.

（5）过原点且垂直于平面π的直线为$L':\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-2}$，原点在平面$\pi$的投影点即直线$L'$与平面$\pi$的交点$Q=(-\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{8}{9})$。设$R$为原点关于平面 π 的对称点，则$\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PQ}$，求得$R=(-\frac{8}{9},\frac{16}{9},\frac{16}{9})$。