微积分 A1 第 4 次习题课答案　　函数极限与连续函数

1. f在$(0,+\infty)$上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1, a>0,$则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1.$

证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^n x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)}\cdot\dfrac{f(2^{n-1}x)}{f(2^{n-2}x)}\cdots\cdots\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1.$

若$a\ge 1,$则$\exists n\ge 0, s.t.\ 2^n\le a<2^{n+1},$从而对充分大的$x,$有

$$\frac{f(2^n x)}{f(x)}\le(\ge)\frac{f(ax)}{f(x)}\le(\ge)\frac{f(2^{n+1}x)}{f(x)}.$$

由夹挤原理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1.$

若$0<a<1,$则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{f(t/a)}=1.$□

2. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x/2)}{x}=0,$则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

证明： $\forall\varepsilon>0,$由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x/2)}{x}=0, \exists\delta>0, s.t.$

$$|f(x)-f(x/2)|<\varepsilon|x|,\ \ \forall 0<|x|<\delta.$$

于是

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})\right|+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon|x|}{2^{k-1}}+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|<2\varepsilon|x|+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|,\ \ \forall 0<|x|<\delta.$$

令$n\to+\infty,$由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$得

$$|f(x)|\le 2\varepsilon|x|,\quad \forall 0<|x|<\delta.$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0.$□

3. 讨论函数的连续点与间断点： $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

解： 若$x_0\in\mathbb{Z},$则

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|f(x)\right|\le\left|\sin\pi x\right|=\left|\sin(\pi x_0+\pi(x-x_0))\right|$$

$$=\left|\sin\pi(x-x_0)\right|\le\pi\left|x-x_0\right|.$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $f(x)$在点$x_0\in\mathbb{Z}$处连续.

若$x_0\notin\mathbb{Z}$,则对收敛到x_0的有理数点列$\{x_n\}$和无理数点列$\{y_n\}$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_0\ne 0.$$

故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在, $x_0\notin\mathbb{Z}$是$f(x)$ 的第二类间断点.□

4. $f,g\in C[a,b],M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$,则$M,m\in C[a,b]$.

解：$M(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{1}{2}\left|f(x)-g(x)\right|,m(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{1}{2}\left|f(x)-g(x)\right|$,

故$M,m\in C[a,b]$.□

5. $\forall x,y\in\mathbb{R}$,有$f(x+y)=f(x)+f(y)$.试证:

（1）若f在 $x_0=0$ 处连续, 则$f(x)=cx$.

（2）若$\exists a>0,s.t.f$在$(-a,a)$上有界, 则$f(x)=cx$.

证明：由$f(x+y)=f(x)+f(y)$可得

$$f(0)=f(0)+f(0),\qquad f(0)=0.$$

$$f(1)=f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{1}{n})=nf(\frac{1}{n}),\qquad f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}f(1),\forall n\in\mathbb{N}.$$

$$f(\frac{m}{n})=mf(\frac{1}{n})=\frac{m}{n}f(1),\qquad \forall n,m\in\mathbb{N}.$$

$$0=f(0)=f(\frac{m}{n})+f(-\frac{m}{n}),\qquad f(-\frac{m}{n})=-f(\frac{m}{n})=-\frac{m}{n}f(1),\forall n,m\in\mathbb{N}.$$

记$f(1)=c$，至此，我们证明了对任意有理数x,有$f(x)=cx$.

（1）$\forall x\in\mathbb{R},\exists$有理点列$\{x_n\}$收敛到$x$,于是

$$f(x)=f(x_n)+f(x-x_n)=cx_n+f(x-x_n),\qquad \forall n.$$

令$n\to\infty$, 由f 在 $x_0=0$ 处的连续性可得 $f(x)=cx+f(0)=cx.$

（2） f在$(-a,a)$上有界, $\exists \mathrm{M}>0$,s.t.

$$\left|f(x)\right|<\mathrm{M},\quad \forall x\in(-a,a).$$

于是, $\forall\varepsilon>0$, 令$N=\left[\dfrac{M}{N}\right]+1$, 则$\dfrac{\mathrm{M}}{N}<\varepsilon$. 令$\delta=\dfrac{a}{N}$, 则

$$\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f(x)\right|=\left|f(\frac{1}{N}Nx)\right|=\frac{1}{N}\left|f(Nx)\right|\le\frac{\mathrm{M}}{N}<\varepsilon,\qquad \forall\left|x\right|<\delta.$$

故 f在 $x_0=0$ 处连续. 由（1）知, $f(x)=cx,\forall x\in\mathbb{R}$.□

6. 设$f\in C[0,+\infty)$, $f\ge0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

证明：反证法。若结论不成立，则$\exists \mathrm{A}>0,\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n>n, s.t.$

$$0\le f(x_n)\le\mathrm{A}.$$

$f\in C[0,\mathrm{A}]$, 因此f在$[0,\mathrm{A}]$上有最大值M, 于是

$$f(f(x_n))\le\mathrm{M},\quad 且\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,$$

与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$矛盾. □

7. 设$f\in C[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $2\le n\in\mathbb{N}$, 则$\exists\xi\in(0,1), s.t. f(\xi+\dfrac{1}{n})=f(\xi)+\dfrac{1}{n}$.

证明：令 $g(x)=f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)-\dfrac{1}{n}$, 则 $g\in C[0,\dfrac{n-1}{n}]$, 且

$$\begin{aligned}
&g(0)=f(\frac{1}{n})-f(0)-\frac{1}{n},\\
&g(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})-\frac{1}{n},\\
&\cdots\\
&g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n})-\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

各式相加得, $$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)-1=0.$$

于是 $g(0),g(\dfrac{1}{n}),\cdots,g(\dfrac{n-1}{n})$全为0, 或有两项异号. 由介值定理，$\exists\xi\in(0,1), s.t.$

$$g(\xi)=0,\quad 即\quad f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)+\frac{1}{n}.\square$$

8. 设$f\in C(-\infty,+\infty)$, f 以T为周期. 求证: $\forall a\in\mathbb{R},\exists\xi\in[0,\mathrm{T}],s.t.f(a+\xi)=f(\xi)$.

证明： $f\in C[0,\mathrm{T}]$,由连续函数的最大最小值定理,$\exists x_1,x_2\in[0,\mathrm{T}],s.t.$

$$f(x_1)=\max_{0\le x\le \mathrm{T}}f(x),\quad f(x_2)=\min_{0\le x\le \mathrm{T}}f(x).$$

由f 的周期性, $$f(x_1)=\max_{x\in\mathbb{R}}f(x),\quad f(x_2)=\min_{x\in\mathbb{R}}f(x).$$

令$g(x)=f(a+x)-f(x)$,则

$$g(x_1)=f(a+x_1)-f(x_1)\le 0,\quad g(x_2)=f(a+x_2)-f(x_2)\ge 0.$$

由连续函数的介值定理，$\exists\xi\in[0,\mathrm{T}],s.t.g(\xi)=0$,即$f(a+\xi)=f(\xi)$.$\square$

9. 在$(-\infty,+\infty)$上, $f(x)$ 单调递减, $e^x f(x)$ 单调递增. 求证: $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

证明： 任意取定$x_0\in\mathbb{R}$, 只要证 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$在(x_0-a,x_0)上单调递减, 集合$\{f(x):x_0-a<x<x_0\}$有下界$f(x_0)$, 从而有下确界

$$\mathrm{A}=\inf\{f(x):x_0-a<x<x_0\}\ge f(x_0).$$

由下确界的定义，$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in(x_0-a,x_0),s.t.\ f(x_1)<\mathrm{A}+\varepsilon$. 再由 $f(x)$的单调性, 有

$$\mathrm{A}\le f(x)<f(x_1)<\mathrm{A}+\varepsilon,\qquad \forall x\in(x_1,x_0).$$

由极限的定义，有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\mathrm{A}=\inf\{f(x):x_0-a<x<x_0\}\ge f(x_0).$$

同理可证：对单调递增的函数 $g(x)=e^x f(x)$,

$$\lim_{x\to x_0^-}g(x)=\sup\{g(x):x_0-a<x<x_0\}\le g(x_0).$$

于是 $$e^{x_0}f(x_0)=g(x_0)\ge\lim_{x\to x_0^-}g(x)=\lim_{x\to x_0^-}e^x f(x)=e^{x_0}\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

$$f(x_0)\ge\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

综上，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.$\square$