第二次习题课答案　　数列的极限(2)—收敛原理与重要极限

1.　设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$ 求证:

（1）$\{a_n\}$严格单调递增,$\{b_n\}$严格单调递减,且$a_n<e<b_n$.

（2）设$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$ 则$\{c_n\}$收敛（$c=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 称为 **Euler** 常数）。

（3）设$d_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}d_n$.

（4）设$e_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}e_n$.

证明：（1）归纳法可证 Bernoulli 不等式：

$$(1+x)^n\ge 1+nx,\quad \forall x\ge -1,\forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

由 Bernoulli 不等式，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\ge\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+1}{n^3}>1,$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\ge\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}=1+\frac{1}{n(n+2)^2}>1.$$

故$\{a_n\}$严格单调递增,$\{b_n\}$严格单调递减 。又

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e,$$

所以，$a_n<e<b_n$(可利用极限的保序性, 反证法).

（2）由（1）的结论，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 两边取对数，得

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n},\quad \text{即}\quad \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

于是，

$$\begin{aligned}c_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots\left(\ln(n+1)-\ln n\right)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0.$$

即$\{c_n\}$严格单调递减,有下界.由单调收敛原理,$\{c_n\}$收敛.

（3）$d_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2=c_{2n}-c_n+\ln 2.$

由（2）的结论知$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=c-c+\ln 2=\ln 2.$

（4）$d_n+\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<e_n<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}+d_n,$

令$n\to\infty$,由夹挤原理及（3）中结论，得$\lim\limits_{n\to\infty}e_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\ln 2.$ □

2. $a_1>a_2,a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：归纳可证

$$a_1>a_3>\cdots>a_{2n+1}>\cdots>a_{2n}>\cdots>a_4>a_2.$$

由单调收敛原理,$\{a_{2n+1}\},\{a_{2n}\}$均收敛.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=x,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=y.$对

$$2a_{2n+2}=a_{2n}+a_{2n+1}$$

两边取极限,得$2x=x+y,x=y.$因而$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=x.$ 又

$$\begin{aligned}2a_3&=a_1+a_2,\\2a_4&=a_2+a_3,\\&\vdots\\2a_{n+2}&=a_n+a_{n+1}.\end{aligned}$$

以上各式相加，得$a_{n+1}+2a_{n+2}=a_1+2a_2.$令$n\to\infty$,得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a_1+2a_2}{3}.$ □

3. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$

解：（1）由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)-n\ln n}{n}=-\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=-\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=-1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\exp\left\{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)\right\}=e^{-1}.$$

（2）记 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$,则

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)a_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}\to 1(n\to\infty).$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=2.$

4. $\{m_n\}$ 是严格递增的自然数子列，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_n}\right)=\mathrm{A}.$ 设

$$I_n=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_n}\right).$$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ 存在。

证明： $m_k>0,\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_n}\right\}$ 单调递增. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_n}\right)=\mathrm{A}$ 可得

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_n}<\mathrm{A}.$$

又 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$ 因此 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,\forall n\in\mathbb{N}.$ 于是

$$I_n=e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{m_k}\right)}=e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k}\ln\left(1+\frac{1}{m_k}\right)^{m_k}}\le e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k}}\le e^{\mathrm{A}}.$$

因此 $\{I_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ 存在。□

5. 对数列 $\{a_n\}$，记 $\mathrm{A}_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{A}_n=\mathrm{A}$，求证：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\mathrm{A}.$$

证明： $a_1=\mathrm{A}_1,a_2=2\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1,\cdots,a_n=n\mathrm{A}_n-(n-1)\mathrm{A}_{n-1}.$ 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_1+\frac{1}{3}\mathrm{A}_2+\cdots+\frac{1}{n}\mathrm{A}_{n-1}+\mathrm{A}_n.$$

于是 $$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}_1+\frac{1}{3}\mathrm{A}_2+\cdots+\frac{1}{n}\mathrm{A}_{n-1}}{\ln n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{A}_n}{\ln n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{A}_n=\mathrm{A}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{A}_n}{\ln n}=0$. 由 Stolz 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}_1+\frac{1}{3}\mathrm{A}_2+\cdots+\frac{1}{n}\mathrm{A}_{n-1}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\mathrm{A}_n}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}\mathrm{A}_n}{n\ln(1+\frac{1}{n})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{A}_n}{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})}=\mathrm{A}.$$

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\mathrm{A}$. □

6. 设 $0<a_1<1, a_{n+1}=a_n(1-a_n)>0,$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=1.$

证明： a_n单调下降, $0<a_n<a_1<1,$因而有极限. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x,$则$0\le x\le a_1<1.$

对$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$两边取极限得 $x=x(1-x)$. 因此 $x=0,$即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$ 进一步有

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-a_n}\to 1(n\to\infty).$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}})+\cdots+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1})+\frac{1}{a_1}\right]=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}})=1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$. 结合 Stolz 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}na_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{na_n}{1-a_n}}{n\ln(1+\frac{1}{n})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}na_n}{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1-a_n)}=1.\ \square$$

7. 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+1\Big/\sum_{k=1}^{n}a_k$. 求证：$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

证明：易知 $a_{n+1}>a_n\geq 1, \sum_{k=1}^{n}a_k\geq n.$ 于是

$$a_{n+1}^2>a_n^2+\frac{2a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=a_n^2+\frac{2}{\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_n}{a_n}}>a_n^2+\frac{2}{n},$$

$$a_{2n}^2-a_n^2>\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-2}+\cdots+\frac{2}{n}>\frac{2n}{2n-1}>1.$$

因此单增数列 $\left\{a_n^2\right\}$ 不是 Cauchy 列，从而有 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=+\infty, \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty.$

8. 给定 $y\in\mathbb{R}$ 及 $0<a<1.$ 证明: 方程 $x-a\sin x=y$ 有唯一解.

证明: 存在性. 令 $x_0=y,\ x_1=y+a\sin x_0, x_{n+1}=y+a\sin x_n,$ 则

$$\begin{aligned}\left|x_{n+p}-x_n\right|&=a\left|\sin x_{n+p-1}-\sin x_{n-1}\right|=a\left|2\sin\frac{x_{n+p-1}-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_{n+p-1}+x_{n-1}}{2}\right|\\&\leq a\left|x_{n+p-1}-x_{n-1}\right|\leq a^2\left|x_{n+p-2}-x_{n-2}\right|\leq\cdots\leq a^n\left|x_p-x_0\right|=a^n\left|\sin x_{p-1}\right|\leq a^n.\end{aligned}$$

因为 $0<a<1, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N},$ 当 $n>N$ 时, $a^n<\varepsilon,$ 于是

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|\leq a^n<\varepsilon,\quad \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}.$$

即 $\left\{x_n\right\}$ 为Cauchy列, 从而收敛. 记 $\lambda=\lim_{n\to\infty}x_n$. 在 $x_{n+1}=y+a\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$, 得

$$\lambda=y+a\sin\lambda.$$

唯一性. 设方程另有一解 $x=\mu$, 即 $\mu=y+a\sin\mu.$ 则

$$\left|\lambda-\mu\right|=a\left|\sin\lambda-\sin\mu\right|\leq a\left|\lambda-\mu\right|.$$

由 $0<a<1$ 知 $\lambda=\mu.$ □

9. 设 $\left\{x_n\right\}$ 为有界列,令

$$\alpha_n=\sup\left\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\right\},\quad \beta_n=\inf\left\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\right\}.$$

证明: （1）$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ 与 $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ 都存在, 且 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\geq\lim_{n\to\infty}\beta_n.$

（$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$分别称为$\{x_n\}$的**上极限**与**下极限**，分别记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$。这个结论说明有界列的上、下极限一定存在。）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在 $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n.$

（3）$\forall\varepsilon>0,$在区间 $(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n-\varepsilon,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\varepsilon)$ 之外最多有数列$\{x_n\}$的有限项.

证明：（1）由$\{x_n\}$的有界性及α_n,β_n 的定义知,$\{\alpha_n\}$为单调递减有界列，$\{\beta_n\}$为单调递增有界列。由单调收敛原理，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$都存在。又$\alpha_n\ge\beta_n$，由极限的保序性有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\ge\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n.$

（2）若存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{A}$，则$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},s.t.$

$$\mathrm{A}-\varepsilon<x_n<\mathrm{A}+\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

$\forall n>N,$集合$\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}$有上界$\mathrm{A}+\varepsilon$有下界$\mathrm{A}-\varepsilon$，由上下确界的定义知

$$\mathrm{A}-\varepsilon\le\beta_n\le\alpha_n\le\mathrm{A}+\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

由数列极限的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\mathrm{A},$ 即$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\mathrm{A}.$

反之，若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\mathrm{A}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\mathrm{A}$，则$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2\in\mathbb{N},s.t.$

$$\mathrm{A}-\varepsilon<\alpha_n<\mathrm{A}+\varepsilon,\quad\forall n>N_1;$$

$$\mathrm{A}-\varepsilon<\beta_n<\mathrm{A}+\varepsilon,\quad\forall n>N_2.$$

令$N=N_1+N_2$，则

$$\mathrm{A}-\varepsilon<\beta_n\le x_n\le\alpha_n<\mathrm{A}+\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

由数列极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{A}$。

（3）记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=a,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=b$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=b$，则$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2\in\mathbb{N},s.t.$

$$a-\varepsilon<\alpha_n<a+\varepsilon,\quad\forall n>N_1;$$

$$b-\varepsilon<\beta_n<b+\varepsilon,\quad\forall n>N_2.$$

令$N=N_1+N_2$，则

$$b-\varepsilon<\beta_n\le x_n\le\alpha_n<a+\varepsilon,\quad\forall n>N,$$

也即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon < \beta_n \le x_n \le \alpha_n < \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

因此数列$\{x_n\}$最多有有限项在 在区间 $(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon)$ 之外. □