# 代数与几何讨论课（五）（线性方程组, 线性空间）

**一、判断下列结论是否正确, 并说明理由:**

(1) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, $Ax=0$ 是 $Ax=\beta$ 所对应的齐次线性方程组.若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=\beta$ 有无穷多个解.

(2) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, 若 $r(A)=n$, 则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解.

(3) 已知 $Q=\begin{pmatrix}3 & 12 & 6\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$, $P$ 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ=0$, 若 $a\neq 8$, 则必有 $r(P)=1$.

(4) 已知 $\eta_1,\eta_2$ 是 $Ax=\beta$ 的两个解, $\xi_1,\xi_2$ 是 $Ax=\beta$ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, $k_1,k_2$ 是两个任意常数, 则 $k_1\xi_1+k_2(\xi_2-\xi_1)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 是方程 $Ax=\beta$ 的通解.

(5) 已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 $m\times n$ 实矩阵,若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关, 则 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解.

(6) 已知 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则存在矩阵 $B$, 使得 $AB=0$ 且有 $r(A)+r(B)=n$.

(7) 所有满足 $A^2=A$ 的二阶方阵的全体是 $M_2(R)$ 的子空间.

(8) $R^3$ 中所有与向量 $(1,1,1)$ 平行的向量的全体，构成 $R^3$ 的一个子空间.

(9) 全体复数构成的集合 $C$ 是实数域上的 2 维线性空间, $1,i$ 是 $C$ 的一个基, 由基 $1,i$ 到基 $i,1$ 的过渡矩阵是 $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(10) 给定两个 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$， $r(A)=r(A,\quad B)$ 是矩阵方程 $AX=B$（其中 $X$ 是 $n$ 阶未定方阵）有解的充分必要条件。

**二、填空、选择**

1. 使齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3+4x_4=0\\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0\\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0\\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的基础解系中解向量个数最多的 $\lambda$=_________________.

2. 设 $A=\left(a_{ij}\right)$是 3 阶不可逆矩阵，已知 $A$ 的行列式中 $a_{22}$ 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$，则___________是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

3. 设 $A=\left(a_{ij}\right)$是 3 阶不可逆矩阵，已知 $A$ 的行列式中 $a_{22}$ 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$，则___________是齐次线性方程组 $A^{*}x=0$ 的一个基础解系，其中 $A^{*}$ 是 $A$ 的伴随矩阵.

4. 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，$b$ 是 $n$ 维列向量，已知 $Ax=b$ 有无穷多解，若 $A$ 的伴随矩阵 $A^{*}\neq 0$，
则导出租 $Ax=0$ 的基础解系为__________.
(A) 只有一个零向量；　　　　　（B）含有一个非零向量；
(B) 含有两个线性无关的向量；　（C）至少含有两个线性无关的向量.

5. 4 个平面 $a_i x+b_i y+c_i z=d_i$，（$i=1,2,3,4$）交于一条直线的充分必要条件是对应的联立线性方程组的系数矩阵 $A$ 和增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩满足_______________.

$(A)$ $r(A)=r(\overline{A})=1$　$(B)$ $r(A)=r(\overline{A})=2$

$(C)$ $r(A)=r(\overline{A})=3$　$(D)$ $r(A)=r(\overline{A})=4$

6. 下列集合关于向量的加法和数乘不构成 $R^3$ 的子空间的是___________.

(A) $V=\{(x_1,x_2,0)|x_1,x_2\in R\}$；　(B) $V=\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1+x_2-2x_3=0,x_1,x_2,x_3\in R\}$

(C) $V=\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1+x_2=1,x_1,x_2,x_3\in R\}$；　(D) $V=\{(0,0,x_3)|x_3\in R\}$

7. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是 3 维向量空间的两个基，已知 $\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，

$\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\eta_3=\varepsilon_3$，则由基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵是________.

8. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中未知量个数为 $n$，方程个数为 $m$，系数矩阵 $A$ 的秩为 $r$，则下面叙述正确的是_____________.

$(A)$ $r=m$ 时，方程组 $Ax=b$ 有解。$(B)$ $r=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有惟一解。

$(C)$ $m=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有惟一解。$(D)$ $r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解。

9. 下列 $W$ 能构成 $R^3$ 的子空间的是____________：

（A）$W=\left\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R,\ a\geq 0\right\}$；（B）$W=\left\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R,\ a+b+c=0\right\}$

（C）$W=\left\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R,\ a^2+b^2+c^2\leq 1\right\}$；

（D）$W=\left\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in Q,\ Q\text{为有理数域}\right\}$

10. 向量 $x=(6,9,14)^T$ 在基 $\varepsilon_1=(1,1,1)^T,\varepsilon_2=(1,1,2)^T,\varepsilon_3=(1,2,3)^T$ 下的坐标为______________.

答：$(1,2,3)^T$

**三、计算、证明**

1. 设 $A\in M_n$ ，$r(A)=r$，证明存在一个 $n$ 阶可逆阵 $P$，使得 $PAP^{-1}$ 的后 $n-r$ 行全为 0。

2. 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵，且 满足 $A^2=0$，$B^2=0$. 若 $A+B$ 可逆，证明 $r(A)=r(B)$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in R^m$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，又设 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$。记 $\eta=\left(k_1,k_2,\cdots,k_n\right)^T$ 为 $Ax=\beta$ 的任一解，则必有 $k_n=1$.

4. 设 $\alpha_1=(1,2,1,-2)^T$，$\alpha_2=(2,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,2,-3)^T$，$\beta_1=(1,1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,3,0,-4)^T$，令 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求 $W_1+W_2$ 和 $W_1\bigcap W_2$ 的基。

5. 设两个线性方程组：

（I）$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m \end{cases}$$

（II）$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1 \end{cases}$$

求证：I 有解 $\Leftrightarrow$ II 无解

6. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，记 $C(A)$ 是与 $A$ 乘法可交换的全体 $n$ 阶方阵.

（1）证明 $C(A)$ 是 $M_n$ 的一个子空间。

（2）当 $A=diag\left(1,\ 2,\cdots,n\right)$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数和基。

（4）当 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数的基。