# 第二次习题课答案（若当标准形）

1、设$\sigma$是实数域上的3维线性空间$V$的一个线性变换，它关于$V$的某个基的矩阵是$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

（1）求$\sigma$的极小多项式$m(x)$，并将$m(x)$在$R[x]$内分解为两个首项系数为1的不可约多项式的乘积：$m(x)=m_1(x)m_2(x)$；

（2）令$W_i=\{v\in V|m_i(\sigma)v=0\}$，$i=1,2$，证明：$W_i$是$\sigma$的不变子空间，且$V=W_1\oplus W_2$；

（3）在$W_1$和$W_2$中分别取基，凑成$V$的基，使得$\sigma$关于这个基下的矩阵只含3个非零元。

解：（1）$f_\sigma(x)=(x-2)(x^2+1)$，从而极小多项式为:$m(x)=(x-2)(x^2+1)$，令$m_1(x)=x-2$，$m_2(x)=x^2+1$。

（2）$\forall v\in W_1, m_1(\sigma)\sigma v=\sigma m_1(\sigma)v=0$，即$\sigma v\in W_1$，所有$W_1$ 为$\sigma$不变的。同理$W_2$为$\sigma$不变的。

由于$m_1(x)$与$m_2(x)$互素，存在$u(x),v(x)\in R[x]$使得$u(x)m_1(x)+v(x)m_2(x)=1$. 故$u(\sigma)m_1(\sigma)+v(\sigma)m_2(\sigma)=\varepsilon$. $\forall\alpha\in V$，上式两边同时对$\alpha$作用，得到：$\alpha=u(\sigma)m_1(\sigma)\alpha+v(\sigma)m_2(\sigma)\alpha$，又有$m_2(\sigma)u(\sigma)m_1(\sigma)\alpha=0$，$m_1(\sigma)v(\sigma)m_2(\sigma)\alpha=0$, 所以$\alpha\in W_1+W_2$，即$W_1+W_2=V$. $\forall\beta\in W_1\cap W_2$，$\beta=\varepsilon(\beta)=u(\sigma)m_1(\sigma)\beta+v(\sigma)m_2(\sigma)\beta=0$ 故$W_1\cap W_2=\{0\}$，从而$V=W_1\oplus W_2$。

（3）首先$\dim(W_1)=1$，故$\dim(W_2)=2$。$W_2$中存在向量$v\neq 0$使得$v,\sigma v$线性无关，否则$W_2$为特征子空间，从而在$W_2$中取基并$W_1$的基，$\sigma$在上述基下的矩阵为对角阵，从而$A$在$R$上可以对角化，矛盾。再在$W_1$中取基$\eta$，于是$\sigma$在$V$的基$\eta,v,\sigma v$ 下的矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，因为$v\in W_2$，$\sigma^2v=-v$。

2、设$\sigma$是复数域上$n$维线性空间$V$的一个线性变换，证明存在可对角化的线形变换$\tau$和幂零变换$\upsilon$，使得$\sigma=\tau+\upsilon$, 且满足$\tau\upsilon=\upsilon\tau$. 如果已知$\sigma$在$V$的某个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

试求$\tau$和$\upsilon$.

证明：设$\sigma$在$V$的基$\alpha_1,...,\alpha_n$下的矩阵为$A$，特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_n)^{n_s}$，则存在可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\mathrm{A}_{11},\cdots,\mathrm{A}_{1\mathrm{t}_1},\cdots,\mathrm{A}_{\mathrm{s}1},...,\mathrm{A}_{\mathrm{st}_\mathrm{s}})$，$A_{ij}$为对应于特征值$\lambda_i$的若当块。令$D=P\mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{11},\cdots,\lambda_1\mathrm{I}_{1\mathrm{t}_1},\cdots,\lambda_\mathrm{s}\mathrm{I}_{\mathrm{s}1},...,\lambda_\mathrm{s}\mathrm{I}_{\mathrm{st}_\mathrm{s}})\mathrm{P}^{-1}$，

$N = P\mathrm{diag}(\mathrm{A_{11}} - \lambda_1 \mathrm{I_{11}}, \cdots, \mathrm{A_{1t_1}} - \lambda_1 \mathrm{I_{1t_1}}, \cdots, \mathrm{A_{s1}} - \lambda_\mathrm{s} \mathrm{I_{s1}}, ..., \mathrm{A_{st_s}} - \lambda_\mathrm{s} \mathrm{I_{st_s}})\mathrm{P}^{-1}$，并设$D$，$N$所对应的线性变换分别为$\tau$ 和$\upsilon$，即$\tau$ 和$\upsilon$在$V$的基$\alpha_1, ..., \alpha_n$下的矩阵为$D$和$N$。显然$N$为幂零矩阵，即$\upsilon$为幂零变换。由定义有$\sigma = \tau + \upsilon$，且$\tau\upsilon = \upsilon\tau$。

给定方阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，计算得$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$，且对应于特征值1和2的若当块分别为一个块。

$\lambda = 1$对应的特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$。$\lambda = 2$对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，解方程$(A-2I)x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，得到广义特征向量$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。于是$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

令$\tau$和$\upsilon$为$P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$和$P\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$对应的线性变换即可。

3、设$\sigma$为三维线性空间$V$上的线性变换，$\sigma$ 在$V$的基$\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ 下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\sigma$的所有不变子空间。

解：可求得$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda - 2)$，故$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，可求得$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$和$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$使得$P^{-1}AP = J$。令$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$，则$\sigma$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的矩阵为$J$。显然$U_0 = L(\beta_1, \beta_2)$，$U_2 = L(\beta_3)$。$U_0$的$\sigma$不变的子空间为$\{0\}, L(\beta_1), L(\beta_1, \beta_2)$，$U_2$的$\sigma$不变的子空间为$\{0\}$，$L(\beta_3)$。于是$\sigma$的所有不变子空间为$\{0\}, L(\beta_1), L(\beta_1, \beta_2)$，$L(\beta_3)$，$L(\beta_1, \beta_3)$，$L(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = V$。

4、设$N_1$和$N_2$都是3阶的幂零矩阵。证明$N_1$与$N_2$相似当且仅当它们有相同的极小多项式。如果$N_1$和$N_2$都是4阶幂零矩阵，上述结论是否成立？为什么？举例说明之。

证明：只要证明充分性。首先$N_1$和$N_2$的极小多项式只有三种情况，分别为$x$, $x^2$, $x^3$，可以确定这三种情况下$N_1$和$N_2$的若当标准型一样，故相似。

如果$N_1$和$N_2$都是4阶幂零矩阵，上述结论不成立。例如令$N_1 = \mathrm{diag}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$，$N_2 = \mathrm{diag}(\mathrm{N}, 0, 0)$，其中$N$为特征值0的阶数为2的若当块。则$N_1$, $N_2$不相似，但有相同的极小多项式。

5、设6阶复方阵$A$的特征多项式为$f(x) = (x-2)^2(x+3)^4$，极小多项式为$m(x) =$

$(x-2)(x+3)^3$，写出$A$的若当标准形。如果极小多项式为$m(x)=(x-2)(x+3)^2$，$A$的若当标准形有几种可能？

解：特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1；特征值为$-3$的若当块为两块，阶数分别为3, 1.

若不考虑若当块的排列次序，若当标准型可能为：特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1，特征值为$-3$的若当块为两块，阶数分别为2, 2；或者特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1，特征值为$-3$的若当块为三块，阶数分别为2, 1，1。

6、设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵$P$和若当标准形$J$使得$P^{-1}AP=J$。

解：只求解第一个矩阵。

$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^3$，故$\lambda_1=-1, n_1=3$；$\lambda_2=2, n_2=1$.

对于$\lambda_1=-1$，可求得$t_1=2$，于是可以写出$U_{-1}$的基表为

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & \end{matrix}$$

可求得$(A+I)x=0$的基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\eta_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 不妨设$x_1^{(1)}=a\eta_1+b\eta_2$，为了能求出$x_1^{(2)}$，必须要求$(A+I)x=x_1^{(1)}$的系数矩阵跟增广矩阵的秩相等，取$a=0, b=1$, 即$x_1^{(1)}=\eta_2$时有解，可求得$x_1^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。再令$x_1^{(2)}=\eta_1$，就得到了$U_{-1}$的基表。

对于$\lambda_2=2$，可求得$U_2$的基表$x_1^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

令$P=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)})$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$。

7、设$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，求$A^n$.

解：先求可逆阵$P$和若当标准型$J$使得$P^{-1}AP=J$. 省略过程。得$J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

于是$A=PJP^{-1}$，$A^n=PJ^nP^{-1}$. 这里$J^n=\begin{bmatrix} (-1)^n & n & \\ & (-1)^n & \\ & & (-1)^n \end{bmatrix}$.