微积分 A(1)第四次习题课参考答案（第九周）

一、中值定理

1. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1$，$f(x)$可微，且$f'(x)\neq 1$.

证明:在$(0,1)$存在唯一的ξ使$f(\xi)=\xi$。

2．设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数切存在相等的最大值，

且$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得　$f''(\xi)=g''(\xi)$。

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

4. 已知$e<a<b$，求证：$a^b>b^a$。

二、L’Hospital 法则

5. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

6. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$。

7. 设$f(x)$在$x=0$某邻域内可导，且$f(0)=1, f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

三、导数应用

8. 证明：当$x\in(0,1)$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

9. 求函数$f(x)=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$的极值及单调区间。

10. 证明对任意$x\in(0,2)$，成立不等式$4x\ln x\geq x^2+2x-3$

11. 证明：方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在$(0,1)$内必有唯一实根x_n，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

四、泰勒公式

12. 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\leq 2$，求证：$|f'(x)|\leq 1, x\in[0,1]$。

13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

14. 设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，且 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，求证：

$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geq 8$.

15.（1）$y=x^2\sin x$ 的 100 阶导数，（2）$f(x)=\ln(2-3x)$ 的 10 阶导数

16. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$。