代数与几何讨论课 （特征值,特征向量）

一、判断下列结论是否正确,并说明理由：

(1) 设A是n阶方阵，若$A^m=0$，则A的特征值只能是零。

正确。因为矩阵多项式的特征值是矩阵的特征值的多项式。A^m的特征值是A的特征值的m次方。

(2) 设A是n阶实方阵，若$A^2=A$，则A的特征值只能是1或0。

正确。同上。

(3) 设X,Y是n阶方阵A的属于不同特征值的特征向量，则必有$X^TY=0$。

错误。特征向量不一定正交。

(4) 设A是n阶方阵，λ_0是A的一个特征值，X_1,X_2是$(\lambda_0I-A)X=0$的基础解系，则A的属于特征值λ_0的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$，其中k_1,k_2是两个任意常数。

错误。特征向量也就是满足此方程的所有非零解，故$k_1X_1+k_2X_2$不能为零。

(5) 设A是3阶方阵，A的特征值为$0,0,1$，X_1,X_2是$AX=0$的基础解系，X_3是$AX=X$的非零解，则A的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$，其中k_1,k_2,k_3是不全为零的任意常数。

错误，同上。

(6) 设X是n阶方阵A的特征向量，P是n阶可逆方阵，则$P^{-1}X$是$P^{-1}AP$的特征向量。

正确，特征向量的定义。

(7) 设X是n阶方阵A的特征向量，若A可逆，则$A^{-1}X$是A^{-1} 的特征向量。

正确。因为A可逆，设$AX=\lambda X$，且$\lambda\neq 0$。所以$A^{-1}A^{-1}X=A^{-1}A^{-1}AX/\lambda=A^{-1}X/\lambda$。

(8) 设A是n阶方阵，若A的特征值都是1，则A与I相似。

错误。必须有n个无关的特征向量，才能相似于对角方阵。

(9) 设A是n阶方阵，若$A^2+A+I=0$，则A没有实的特征值。

正确。不然假设$AX=\lambda X$，且$\lambda\in\mathbb{R}$，那么由$(A^2+A+I)X=(\lambda^2+\lambda+1)X=0$，必有$X=0$。矛盾。

(10) 设A是n阶方阵，若A可相似于对角阵，则A的n个特征值互异。

错误。A可相似于对角阵的充要条件为A有n个线性无关的特征向量，但同一特征值可对应几个线性无关的特征向量。

(11) 若n阶矩阵A, B的特征值相同，则$A \sim B$(相似)。

错误。如(1)中的A与0矩阵特征值相同，但不相似。

(12) 若A与B等价(相抵)，则$A \sim B$(相似)。

错误。两矩阵相似则必相抵，反之不对。

(13) 若$A \sim B$(相似)，则A与B等价(相抵)。

正确。同上。

(14) 若A与B有共同的特征值及都有n个线性无关的特征向量，则

(A) $A \sim B$；(B) $A = B$；(C) $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$；(D) $|A - B| = 0$。

答：（A），（C）。A与B有共同的特征值，则特征多项式必然相同，所以（C）对。又由题意知道A与B可以相似于同一个对角矩阵，所以（A）对。（B），（D）显然太绝对，不一定正确。

（15）若A, B的特征值分别为λ, μ，则：

（A）A^T与A有相同的特征值与特征向量；

（B）$A + A^T$及AA^T的特征值分别为2λ及λ^2；

（C）$A + B$及AB的特征值分别为$\lambda + \mu$及$\lambda\mu$；

（D）以上结论都不正确。

答：（D）。容易将前三个逐一排除。

二、下列矩阵可否相似对角阵，又矩阵可对角化的条件是什么？

1.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

答：如果每个$A_i, i = 1, 2, \cdots, s$都有与其阶数相同的线性无关的特征向量，那么就可以对角化。

2. $A \in M_n, r(A) = 2, A^2 + A = 0$

答：可以。

条件：矩阵A可以相似对角化当且仅当A有n个线性无关的特征向量。

三、设$A = (a_{ij})_{n \times n}$，且$A$可逆，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a \neq 0 (i = 1, \cdots, n)$，试证：$a^{-1}$为$A^{-1}$的一个特征值，并求对应的一个特征向量。

证明：知道$aI - A = \begin{pmatrix} a - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & a - a_{nn} \end{pmatrix}$。由$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a \neq 0 (i = 1, \cdots, n)$知道$aI - A$的列向量之和为0向量。所以$|aI - A| = 0$，故$a$为$A$的一个特征值。

所以存在X，使得$AX = aX$即$a^{-1}X = A^{-1}X$。a^{-1}为A^{-1}的一个特征值，证毕。

容易发现$X = (1, 1, \cdots, 1)^T$为一个特征向量。

四、设$A, B \in M_n$，且A有n个互异的特征值。

证明：$AB = BA \Longleftrightarrow A$的特征向量也是$B$的特征向量。

证明：

(1) 假设$AB = BA$。那么由于A有n个互异的特征值，必有n个线性无关的特征向量，以其为列向量构成一个矩阵$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$。则$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中，$\lambda_i$为A的特征值。

因为$AB = BA$，所以有$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$，所以，可知$P^{-1}BP = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$为对角阵。所以有$B\alpha_i = \mu_i\alpha_i$成立。所以，$A$的特征向量也是$B$的特征向量。

反之，假设A的特征向量也是B的特征向量。那么由于A有n个互异的特征值，必有n个线性无关的特征向量，以其为列向量构成一个矩阵$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$。则$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$P^{-1}BP = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$。

所以有$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$，所以，$AB = BA$。证毕。

五、设A为三阶实对称矩阵，$\lambda = 1, 2, -1$是其三个特征值，$\alpha_1 = (1, a+1, 2)^T$，$\alpha_2 = (a-1, -a, 1)^T$，分别为$A$的对应$\lambda = 1, 2$的特征向量，$A^*$的特征值为$\lambda_0$，且$A^*\beta_0 = \lambda_0\beta_0$，其中$\beta_0 = (2, -5a, 2a+1)^T$，求$a$及$\lambda_0$的值。

答：$a = -1, \lambda_0 = 2$。（提示：意识到$\alpha_1, \alpha_2, \beta_0$彼此正交，可求出$a$。先通过$A$的特征值求出$det(A)$，然后可以通过古典伴随方阵的定义求出$\lambda_0$）

六、设A, B为n阶矩阵，证明：AB与BA有相同的特征值。

证明：提示：可以证明AB与BA的各阶主子式之和是对应相等的，因此它们的特征多项式的各系数也是对应相等的。于是它们有相同的特征多项式，因此具有相同的特征值。