代数与几何讨论课（五）（线性方程组, 线性空间）答案

一、判断下列结论是否正确,并说明理由:

(1) 设A是$m\times n$矩阵, $Ax=0$是 $Ax=\beta$ 所对应的齐次线性方程组. 若$Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=\beta$ 有无穷多个解.

答：不对。$Ax=\beta$可能无解。

(2) 设A是$m\times n$矩阵, 若$r(A)=n$, 则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$有唯一解.

答：不对。$Ax=\beta$可能无解。

(3) 已知 $Q=\begin{pmatrix}3&12&6\\1&4&2\\2&a&4\end{pmatrix}$, P为3阶非零矩阵, 且满足 $PQ=0$, 若 $a\neq 8$, 则必有 $r(P)=1$.

答：正确。因为$PQ=0$，所以$r(P)+r(Q)\le 3$，又由已知$r(Q)=2$，且$r(P)\ge 1$，所以$r(P)=1$。

(4) 已知 η_1,η_2是$Ax=\beta$ 的两个解, ξ_1,ξ_2是$Ax=\beta$ 对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系, k_1,k_2是两个任意常数, 则$k_1\xi_1+k_2(\xi_2-\xi_1)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$是方程 $Ax=\beta$ 的通解.

答：正确。因为ξ_1，$\xi_2-\xi_1$也为$Ax=0$一组基础解系，$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$为$Ax=\beta$一个解。

(5) 已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 $m\times n$实矩阵,若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关, 则 非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解.

答：不对。$Ax=\beta$有解当且仅当β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，已知条件不能保证$\beta$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出。如$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。

(6) 已知A是$m\times n$矩阵, 则存在矩阵B, 使得$AB=0$且有 $r(A)+r(B)=n$.

答：正确。取B由$Ax=0$的一组基础解系构成的矩阵，则$AB=0$且有 $r(A)+r(B)=n$。

(7) 所有满足 $A^2=A$ 的二阶方阵的全体是 $M_2(R)$ 的子空间.

答：不对。满足 $A^2=A$ 的二阶方阵的全体对$M_2(R)$中的加法和数乘都不封闭。

(8) R^3 中所有与向量 $(1,1,1)$ 平行的向量的全体，构成 R^3 的一个子空间.

答：正确。可以验证对 R^3 中的加法和数乘都封闭。

(9) 全体复数构成的集合 C 是实数域上的 2 维线性空间, $1,i$ 是 C 的一个基,由基 $1,i$ 到基 $i,1$ 的过渡矩阵是 $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

答：错。过渡矩阵为 $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$。

(10) 给定两个 n 阶矩阵 A 和 B，$r(A)=r(A,\quad B)$ 是矩阵方程 $AX=B$（其中 X 是 n 阶未定方阵）有解的充分必要条件。

答：对。$AX=B$ 有解的充分必要条件是 B 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出。

二、填空、选择

1. 使齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3+4x_4=0\\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0\\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0\\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的基础解系中解向量个数最多的 λ=________________.

答：0

2. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶不可逆矩阵，已知 A 的行列式中 a_{22} 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$，则__________是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

答：$(A_{21},\quad A_{22},\quad A_{23})^T$

3. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶不可逆矩阵，已知 A 的行列式中 a_{22} 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$，则_________是齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的一个基础解系，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

答：$(a_{11},\quad a_{21},\quad a_{31})^T$，$(a_{13},\quad a_{23},\quad a_{33})^T$

4. 设 A 是 n 阶矩阵，b 是 n 维列向量，已知 $Ax=b$ 有无穷多解，若 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，则导出租 $Ax=0$ 的基础解系为________________.

(A) 只有一个零向量；　　　（B）含有一个非零向量；

(B) 含有两个线性无关的向量；　（C）至少含有两个线性无关的向量.

答：B

5. 4 个平面 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i$，（$i=1,2,3,4$）交于一条直线的充分必要条件是对应的联立线性方程

组的系数矩阵 A 和增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩满足___________________.

$(A)\quad r(A)=r(\overline{A})=1\quad (B)\quad r(A)=r(\overline{A})=2$

$(C)\quad r(A)=r(\overline{A})=3\quad (D)\quad r(A)=r(\overline{A})=4$

答：B

6. 下列集合关于向量的加法和数乘不构成 R^3 的子空间的是___________.

(A) $V=\{(x_1,x_2,0)|x_1,x_2\in R\}$；　(B) $V=\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1+x_2-2x_3=0,x_1,x_2,x_3\in R\}$

(C) $V=\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1+x_2=1,x_1,x_2,x_3\in R\}$；　(D) $V=\{(0,0,x_3)|x_3\in R\}$

答：C

7. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，和 η_1,η_2,η_3 是 3 维向量空间的两个基，已知 $\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，

$\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\eta_3=\varepsilon_3$，则由基 η_1,η_2,η_3 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵是____________.

答：$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

8. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则下面叙述正确的是______________.

(A)　$r=m$ 时，方程组 $Ax=b$ 有解。(B)　$r=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有惟一解。

(C)　$m=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有惟一解。(D)　$r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解。

答：A

9. 下列 W 能构成 R^3 的子空间的是________：

（A）$W=\{(a,b,c)|\,a,b,c\in R,\ a\ge 0\}$；（B）$W=\{(a,b,c)|\,a,b,c\in R,\ a+b+c=0\}$

（C）$W=\{(a,b,c)|\,a,b,c\in R,\ a^2+b^2+c^2\le 1\}$；

（D）$W=\{(a,b,c)|\,a,b,c\in Q,\ Q\text{为有理数域}\}$

答： B

10. 向量 $x=(6,9,14)^T$ 在基 $\varepsilon_1=(1,1,1)^T,\varepsilon_2=(1,1,2)^T,\varepsilon_3=(1,2,3)^T$ 下的坐标为__________.

答：$(1,2,3)^T$

三、计算、证明

1. 设 $A\in M_n$，$r(A)=r$，证明存在一个 n 阶可逆阵 P，使得 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为 0。

证明：因为$r(A)=r$，所以存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。于是$PAP^{-1}=PAQQ^{-1}P^{-1}=\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$，其中$Q^{-1}P^{-1}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$.

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，且 满足$A^2=0$，$B^2=0$.若$A+B$可逆，证明$r(A)=r(B)$.

证明：由 $A^2=0$得到$2r(A)-n\le 0$，即$r(A)\le\dfrac{n}{2}$，同理$r(B)\le\dfrac{n}{2}$。又 $A+B$ 可逆，故 $r(A)+r(B)\ge r(A+B)=n$。所以$r(A)=r(B)=\dfrac{n}{2}$。

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in R^m$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，又设$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。记$\eta=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$为$Ax=\beta$的任一解，则必有$k_n=1$.

证明：反证法。假设$\eta=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$为$Ax=\beta$的任一解，但$k_n\ne 1$。令$\gamma=(1,1,\cdots,1)^T$，显然$\gamma$为$Ax=\beta$的一个解。故$\eta-\gamma$为$Ax=0$的一个解，且$\eta-\gamma$的第$n$个分量不等于 0，所以$\alpha_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出。于是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$的秩小于等于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$的秩，小于等于$n-2$（因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关）。另一方面$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$的秩大于等于$n-1$，矛盾。

4. 设$\alpha_1=(1,2,1,-2)^T$，$\alpha_2=(2,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,2,-3)^T$，$\beta_1=(1,1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,3,0,-4)^T$，令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求$W_1+W_2$和$W_1\cap W_2$的基。

解：$W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$的极大无关组为$W_1+W_2$的基，将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$排成一个矩阵，用初等行变换将其化成阶梯阵，主元所对应的列为 1,2,3,5，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$的极大无关组，从而为$W_1+W_2$的基。

下面求$W_1\cap W_2$的基，假设$\alpha\in W_1\cap W_2$，则$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$。于是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-y_1\beta_1-y_2\beta_2-y_3\beta_3=0$，或$Az=0$，期中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,-\beta_1,-\beta_2,-\beta_3)$，$z=(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)^T$。求解方程组$Az=0$，得到基础解系$\eta_1=(2,-1,-1,-1,0,0)^T$，$\eta_2=(-5,1,2,0,0,-1)^T$。将$\eta_1,\eta_2$分别带入$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-y_1\beta_1-y_2\beta_2-y_3\beta_3=0$中得到，$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-\beta_1$，$-5\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=-\beta_3$，因此$W_1+W_2$的基为$\beta_1$，$\beta_3$。

5. 设两个线性方程组：

$$
\text{（I）}\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m \end{cases}
$$

（II）$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1 \end{cases}$

求证：I 有解 $\Leftrightarrow$ II 无解

证明：令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$，$\tilde{A} = (A, \beta)$，则（I）和（II）分别为 $Ay = \beta$

和 $\tilde{A}^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。令 $B = \begin{pmatrix} A^T & \overline{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 为 $\tilde{A}^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的增广矩阵，显然 $r(B) = r(A^T) + 1$。

（I）有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) \Leftrightarrow r(\tilde{A}^T) = r(A^T) \Leftrightarrow r(\tilde{A}^T) < r(B) \Leftrightarrow$（II）无解。

6. 设 A 为 n 阶方阵，记 $C(A)$ 是与 A 乘法可交换的全体 n 阶方阵.

（1）证明 $C(A)$ 是 M_n 的一个子空间。

（2）当 $A = diag\left(1,\ 2, \cdots, n\right)$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数和基。

（3）当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求 $C(A)$ 及它的维数和基。

解：（1）略。

（2）可以验证与 $A = diag\left(1,\ 2, \cdots, n\right)$ 交换的矩阵为对角阵，所以 $C(A)$ 的维数为 n，基为 (i,i) 为 1 其余元素为 0 的 n 阶矩阵的集合，$i = 1, 2, \cdots, n$。

（3）设 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，则 $AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} + 2b_{31} & b_{22} + 2b_{32} & b_{23} + 2b_{33} \end{pmatrix}$，

$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + b_{13} & 2b_{13} \\ b_{21} & b_{22} + b_{23} & 2b_{23} \\ b_{31} & b_{32} + b_{33} & 2b_{33} \end{pmatrix}$。若 $AB = BA$，则 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ -b_{21} & b_{32} & b_{22} + b_{32} \end{pmatrix}$。所以 $C(A)$ 的基为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，维数为 5.