第 8 周(次)作业

补充题：

练习1. 计算下列矩阵所有特征值及其对应的特征子空间和根子空间*(*限制在实数域$\mathbb{R}$上，求出相应的一组基底即可*)*，并写出其*Jordan*标准形。

$$(1)\, A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix},\ (2)\, B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

练习2. 设$A\in M_4(\mathbb{R})$是幂零阵，试写出所有其所有可能的*Jordan*标准形*(*不计*Jordan*块次序*)*。

练习3. 设$\sigma\in L(V)$是$t\ (t\geq 1)$次幂零变换*,*证明存在$\alpha\in V$使得$\sigma^{t-1}\alpha\neq\theta$*,* 且向量组$\mathfrak{B}=\{\alpha,\sigma\alpha,\cdots,\ \sigma^{t-1}\alpha\}$线性无关*(*由此可见，幂零变换的幂零次数不大于底空间V的维数*),*并写出σ在此组向量下的阵表示。*(*此处σ也称作子空间$V_0=span(\mathfrak{B})$上一个循环变换*)*

练习4. 设$A\in M_n(F)$*,*证明：
(1) 若$r(A^k)=r(A^{k+1})$对某正整数k成立，则$r(A^l)=r(A^{l+1})$对所有正整数$l\geq k$成立*;*
(2) 置$m(A)=min\{k\in\mathbb{Z}^+:\ r(A^k)=r(A^{k+1})\}$*,*则$m(A)\leq n$*;*
(3) 若N是$t\ (t\geq 1)$次幂零阵*,*则$t=m(N)$*.*

练习5. 设W是数域F上c维线性空间*(*$dimW=c\geq 2$*)*, $\sigma\in L(W)$是$t\ (t\geq 2)$次幂零变换*.*令$m_k=dimH_k$*,*这里$H_k=\{X\in W:\ \sigma^kX=\theta\}$*,(*$k=0,1,\cdots,t$*),* 特别地，$H_0=\{\theta\}$, $H_1=ker\sigma$, $H_t=W$. 若令$p_k=m_k-m_{k-1}\ (k=1,2,\cdots,t)$及$n_j=p_j-p_{j+1}$ *(*$j=1,2,\cdots,t-1$*)*, $n_t=p_t$, 证明：
(1) 恒等式：

$$\sum_{j=1}^{t} jn_j=c.$$

**(2)* $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_t>0$, 即$n_j\geq 0\ (j=1,2,\cdots,t-1)$和$n_t>0$. **注：(2)*的证明较难，可选做*.* 另外我们以后会知道n_j 正好是σ对应矩阵的*Jordan*标准形中j级*Jordan*块的个数。