微积分 A（2）第八次习题课参考答案（第十三周）

一、第二型曲面积分

1. 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$，其中$\Sigma$为曲面

$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$的上侧。

【解】（方法 1）直接计算，记曲面Σ在三个坐标面上的投影分别为D_{xy}，D_{yz}，D_{zx}

$$\iint\limits_{\Sigma} 3xydxdy=\iint\limits_{D_{xy}} 3xydxdy=0，$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xzdydz=2\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}}\ dydz=2\int_0^1 zdz\int_{-2\sqrt{1-z}}^{2\sqrt{1-z}}\sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}}\ dy$$

$$=\int_0^1 z\,[2(1-z)®]\,dz=\frac{®}{3}，$$

$$\iint\limits_{\Sigma} 2\,zy\,dzdx=4\iint\limits_{D_{zx}} z\sqrt{4(1-z-x^2)}\,dzdx=8\int_0^1 z\,dz\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\sqrt{1-z-x^2}dx=\frac{2}{3}®\ 。$$

所以：$I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=®$ 。

（方法 2）利用法向量，将第二类曲面积分变成第一类曲面积分计算。

$\sum: z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$，　$\vec{n}=2x\vec{i}+\dfrac{y}{2}\vec{j}+\vec{k}$，

$$\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{\sqrt{16x^2+y^2+4}}(4x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k})$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xz\vec{i}+2zy\vec{j}+3xy\vec{k}\cdot\overrightarrow{n_0}dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{4x^2z+2zy^2+6xy}{\sqrt{16x^2+y^2+4}}dS$$

其中$dS=\dfrac{\sqrt{16x^2+y^2+4}}{2}dxdy$，$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{6xy}{\sqrt{16x^2+y^2+4}}dS=0$

因此只需计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{4x^2z+2zy^2}{\sqrt{16x^2+y^2+4}}dS=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(4x^2z+2zy^2)dxdy$ 即可。

其中$D_{xy}: x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1$，$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}$，我们利用极坐标变换，则

$$I=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(4x^2z+2zy^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2®}d¯\int_0^1 8r^3(1-r^2)(1+\sin^2¯)dr$$

$$=4\int_0^{2®}(1+\sin^2¯)d¯\int_0^1 r^3(1-r^2)dr=®$$

注：我们采取的变换是 $x=r\cos¯, y=2r\sin¯$ ， $z=1-r^2$，因此变换的雅可比行列式的绝对值为 2r。即 $|J|=2r$

（方法 3）利用 Guass 公式.

加上辅助平面 $S_1^+:\begin{cases} z=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\end{cases}$，下侧为正，组成内则为正的封闭曲面，由 Guass 公式，

$$\iint_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy+\iint_{S_1^+}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=\iiint_{\Omega}3zdxdydz$$

$$=\int_0^1 3zdz\iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z}dxdy=\int_0^1 6®\, z(1-z)dz=®\text{ 。}$$

而 $\displaystyle\iint_{S_1^+}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=-\iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}3xydxdy=0$

故 $\displaystyle I=\iint_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=®$ 。

2. (1) 求 $\displaystyle I=\oiint_{S^+}\frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ， 其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解:

$$I=\frac{1}{R^3}\oiint_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=\frac{1}{R^3}\oiint_{S^+}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{R^3}\oiint_{S}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}^0dS$$

其中 $\mathbf{n}^0=\left(\dfrac{x}{R},\dfrac{y}{R},\dfrac{z}{R}\right)$ 为球面的单位外法向量. 故

$$I=\frac{1}{R^3}\oiint_{S}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}^0dS=\frac{1}{R^3}\oiint_{S}\frac{x^2+y^2+z^2}{R}dS=\frac{1}{R^2}\oiint_{S}dS=4®$$

或者用投影的方法， $\dfrac{x}{R}dS=dydz$， $\dfrac{y}{R}dS=dxdz$， $\dfrac{z}{R}dS=dxdy$ 也能算.

(2) 求 $\displaystyle I=\iint_{S}\left(x^3+az^2\right)dy\wedge dz+\left(y^3+ax^2\right)dz\wedge dx+\left(z^3+ay^2\right)dx\wedge dy$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上半球面上侧。

解：用 Gauss 公式.　　　　（$\dfrac{29}{20}\circledR\, a^2$）

（3）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le x\le 1)$ 的下侧，则

$$\iint_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\underline{2\circledR}$$

解：补一个曲面 $\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$ 上侧，应用 Gauss 公式。

$$X=x,\quad Y=2y,\quad Z=3(z-1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=1+2+3=6$$

$$\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma^1}=\iiint_{\Omega}6dxdydz\quad(\Omega\text{为锥面}\Sigma\text{和平面}\Sigma_1\text{所为区域）}$$

$$=6V\quad(V\text{为上述圆锥体体积）}$$

$$=6\times\frac{\circledR}{3}=2\circledR$$

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$

（4）设 $f(u)$ 连续可微, 计算积分

$$\oiint_{S^+} x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]dx\wedge dy$$

其中 S^+ 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $y^2+z^2+x^2=1$，$y^2+z^2+x^2=4$ 围成的空间区域的边界面的外侧.

解：由 Gauss 公式

$$\oiint_{S^+} x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]dx\wedge dy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(3x^2+\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2\right)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(3x^3+3y^2+3z^2\right)dxdydz=\frac{93\sqrt{2}}{5}\circledR$$

3．计算 $\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S:x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$，外侧.

解法 1：$\vec{v}=x(y-z)\vec{i}+(x-y)\vec{k}$，$\vec{n}=x\vec{i}+y\vec{j}$，$\mathrm{d}S=\mathrm{d}\text{¯}\mathrm{d}z$（$0\le\text{¯}\le 2\circledR,0\le z\le 2$）.

$$\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_{\substack{0\le\text{¯}\le 2\circledR\\0\le z\le 2}}x^2(y-z)\mathrm{d}\text{¯}\mathrm{d}z=\int_0^{2\circledR}\cos^2\text{¯}\,\mathrm{d}\text{¯}\int_0^2(\sin\text{¯}-z)\mathrm{d}z=-2\circledR$$

解法 2：高斯公式.

$\Omega: x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 2$

$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}[(y-z)\mathrm{d}V=-\int_0^{2®}\mathrm{d}¯\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{d}z=-2®$

$\iint_{S}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=-2®-\iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S-\iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

其中 $S_1: x^2+y^2\le 1, z=0$ 下侧，$S_1: x^2+y^2\le 1, z=2$ 上侧。简单计算得到

$\iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0, \iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0$.

4．设 S 为平面 $x-2z=100$ 在柱面 $x^2+(y-10)^2=1$ 内的部分下侧, 则 $\iint_S \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$

【 】

A. ®　　*B.* $-$®　　*C.* 2®　　*D.* $-$2®

5．计算高斯积分：$\oint\!\!\oint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 S 为一个不经过原点的光滑闭合曲面. 其中 $\vec{n}$ 为 S 上点 (x, y, z) 处的单位外法线向量，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|$.

解：$\oint\!\!\oint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oint\!\!\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\oint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$. 当 $r\ne 0$ 时，$\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=0$. 利用高斯公式，当 S 不包含原点时，积分等于零；当 S 不包含原点时，将原积分转化为球面 $x^2+y^2+z^2=¢^2$（外侧）上的积分．答案 4® .

6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数且．又设对于空间 R^3 中的任意一张光滑的闭合曲面 S，都有 $\oint\!\!\oint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求 $f(x)$ 满足的微分方程和 $f(x)$ 的表达式.

解：由题意，在任意一个由光滑简单封闭曲面围成的区域 Ω 上，由高斯公式有

$$\begin{aligned}&\oint\!\!\oint_{\partial\Omega} f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}(f''(x)+f(x)-2e^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\ 4\text{ 分}$$

所以由 Ω 的任意性有

$$f''(x)+f(x)-2e^x\equiv 0\qquad\cdots\cdots\cdots\ 7\text{ 分}$$

即 $f(x)$ 满足常微分方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

齐次方程通解： $f=c_1\cos x+c_2\sin x$，非齐次方程特解 $y_*=e^x$．一般表达式

$f=c_1\cos x+c_2\sin x+e^x$．　　　　　　　　　　　　　　　　.... 10 分

7. 求 $\iint\limits_{S^+} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$，其中 S^+ 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解：S^+ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=b\sin\varphi\sin\theta \\ z=c\cos\varphi \end{cases}\qquad (\theta,\varphi)\in D_{\theta\varphi}=\{(\theta,\varphi)\mid 0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi\}$$

$$A=\begin{vmatrix} y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\theta & z'_\varphi\end{vmatrix}=-bc\sin^2\varphi\cos\theta,\qquad B=\begin{vmatrix} z'_\theta & z'_\varphi \\ x'_\theta & x'_\varphi\end{vmatrix}=-ca\sin^2\varphi\sin\theta,$$

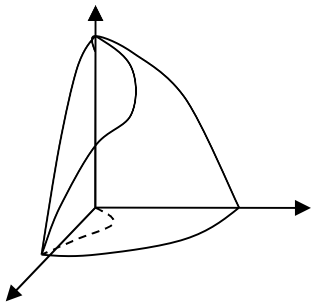
$$C=\begin{vmatrix} x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\theta & y'_\varphi\end{vmatrix}=-ab\sin\varphi\cos\varphi$$

$\mathbf{n}=\pm(-bc\sin^2\varphi\cos\theta,\ -ca\sin^2\varphi\sin\theta,-ab\sin\varphi\cos\varphi)$. 现在考虑正负号的选取. 在曲面上取一个点(为了方便, 我们取 $(a,0,0)$，此时 $\theta=0,\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. 在该点, 题目给的正法向量为 $(1,00)$. 取负号两个法向量同向. 因此

$$\iint\limits_{S^+} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=-\iint\limits_{D_{\theta\varphi}}(xA+yB+zC)d\theta\, d\varphi$$

$$=abc\iint\limits_{D_{\theta\varphi}}(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\theta)d\theta\, d\varphi=4\pi abc$$

当然, 此题也可以用直角坐标来解.



8. 设 D 是平面区域，∂D 为逐段光滑曲线，$\mathbf{n}$ 为 D 的单位外法向，$u,v\in C^2(D)$，证明：

（1）$\displaystyle\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dl=\iint_D\Delta u dxdy$；

（2）$\displaystyle\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dl=\iint_D v\Delta u dxdy-\iint_D\nabla u\cdot\nabla v dxdy$；

（3）$\displaystyle\oint_{\partial D}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dl=\iint_D\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy$.

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2},\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$.

9. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一空间区域，$\partial\Omega$ 为逐段光滑曲线，$\mathbf{n}$ 为 Ω 的单位外法向，$u,v\in C^2(\Omega)$，证明：

（1）$\displaystyle\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS=\iiint_\Omega\Delta u dxdydz$；（2）$\displaystyle\oiint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS=\iiint_\Omega v\Delta u dxdydz-\iiint_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dxdydz$；

（3）$\oiint\limits_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dS=\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz$. 其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2},\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

10. 用斯托克斯公式解下列问题

（1）求 $\oint\limits_C ydx+zdy+xdz$，$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$. 从正 z 轴方向看，$C$ 的正向为反时钟方向。

解：

$$\oint\limits_C ydx+zdy+xdz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\sim & \cos & \cos¥\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS=-\iint\limits_S(\cos\sim+\cos\quad+\cos¥)dS$$

$$=-(\cos\sim+\cos\quad+\cos¥)\iint\limits_S dS=-\sqrt{3}® a^2$$

（2）求 $\oint_{C^+} y^2dx+y^2dy+z^2dz$，其中 C^+ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$ $(z\ge 0,a>0)$，若从 x 轴正方向看去，C^+ 方向为逆时针方向.

（3）设 L 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分的边界，方向是 $A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$. 空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}.$$

求单位质点 P 在 L 上某点出发，绕 L 运动一周时，$\vec{F}$ 对于质点所做的功.

解：用斯托克斯公式.

11. 设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看去 L 正向为逆时针方向，求以下积分

(1) $\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$；　　(2) $\int\limits_{L^+}\dfrac{(x+1)dx+(y+1)dy+(z+1)dz}{x^2+y^2+z^2}$；

(3) $\int\limits_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

解：$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\sqrt{3}®$

$$\int\limits_{L^+}\frac{(x+1)dx+(y+1)dy+(z+1)dz}{x^2+y^2+z^2}=0$$

$$I=\int\limits_{L^+}\frac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\int\limits_{L^+}(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz$$

令 S 是平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，规定 S 的正法向向上，即正法向与 z 轴成锐角，则根据

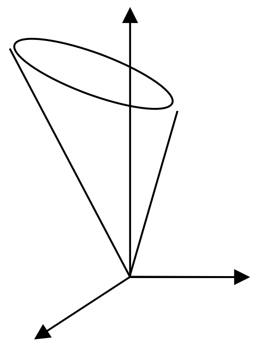
stokes 公式得 $$I=-\iint_{S^+} dydz+dzdx+dxdy$$

注意到 S 的单位正法向 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，有

$$I=-\iint_{S}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint_{S}dS=-\sqrt{3}®$$

12. 设有向光滑曲面 S^+ ，$\mathbf{n}^0$ 为其单位法向量，∂S^+ 为 S^+ 的边界，两者的方向成右手法则，$\boldsymbol{\alpha}$ 为一个常向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$ 。求证：$\int_{\partial S^+}\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l}=2\iint_{S^+}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{n}^0 dS.$

13. 设 Ω 为由光滑圆锥面 $S:F(x,y,z)=0$ 及平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体，不妨假设此圆锥体的顶点在原点.



（1）证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为 $V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界面，$\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}=(x,y,z)$.

（2）此圆锥体的体积 V 也可以表示为 $V=\frac{Ah}{3}$

其中 A 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高.

证明：（1）由 Guass 公式，

$$\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\iint_{\partial\Omega^+}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}3dxdydz=3V$$

故 $$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS$$

（2）$\partial\Omega$ 由两部分组成：S_1（锥面部分）与 S_2（底面部分）. 因为锥面的顶教在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故

$$\iint_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=0$$

$$\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\iint_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS$$

$$=\iint_{S_2}\left|\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS=\iint_{S_2}\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS$$

$$=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\iint_{S_2}dS=Ah$$

其中 $A=\iint_{S_2}dS$ 为圆锥的底面积，$h=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ 为原点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，也就是圆锥的高．故

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{1}{3}\left(\iint_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS+\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS\right)=\frac{1}{3}\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\frac{Ah}{3}$$

14.（1）以下哪些命题要求单连通域？(D)

$A.\ \oint_L Pdx+Qdy=\iint(Q'_x-P'_y)d\sigma$，$L$ 是 D 的正向边界。

B. $\oint_L Pdx+Qdy=0$，L 为 D 内任一闭曲线 $\Leftrightarrow$ 在 D 内 $\int_l Pdx+Qdy$ 与路径 l 无关。

C. $\int_l Pdx+Qdy$ 在 D 内与路径 l 无关 $\Leftrightarrow$ 在 D 内有 $Pdx+Qdy=du$，$u=u(x,y)$ 是某个二元函数。

D. $Pdx+Qdy=du$ 在 D 内成立 $\Leftrightarrow$ $Q'_x=P'_y$ 在 D 内成立。

（2）向量场 $\vec{F}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ 在域 D 内有连续的偏导数，C 是 D 中任意简单闭曲线，则下列论断中不正确的是（ C ）.

(A) 若 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$，则在 D 内必有 $\frac{\partial Y}{\partial x}\equiv\frac{\partial X}{\partial y}$；

(B) 若 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$，则在 D 内必有可微函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=X(x,y)dx+Y(x,y)dy$

(C) 若在 D 内处处有 $\frac{\partial Y}{\partial x}\equiv\frac{\partial X}{\partial y}$，则 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$；

(D) 若 L 是 D 中固定起点和终点的任意一条简单曲线，$\int_L\vec{F}\cdot d\vec{l}$ 之值与路径 L 无关，则 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$.

15.（1）设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$，则 $\mathrm{rot}\mathbf{F}=$____________，$\mathrm{div}\mathbf{F}=$____________.

【答案】（0，0，0），0

（2）设 $u=x^2+y^2+z^2$，则 $div(gradu)=$____________；$rot(gradu)=$________。

【答案】$(2x,2y,2z),\vec{0}$

（3）向量场 $\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+\cos z\mathbf{k}$ 是否是保守场 ________ （填是或否）.

【答案】否

16. 设 $Q(x,y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t, 有 $\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)}2xydx+Q(x,y)dy$. 求函数 $Q(x,y)$.

解：根据条件得到 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$，因此 $Q(x,y)=x^2+f(y)$.

另外算出两个曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 2x\cdot 0dx+\int_0^t Q(1,y)dy$$

$$=\int_0^t[1+f(y)]dy=t+\int_0^t f(y)dy,$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1 Q(0,y)dy+\int_0^t 2x\cdot 1dx=\int_0^1 f(y)dy+t^2,$$

令两者相等得到 $t+\int_0^t f(y)dy=\int_0^1 f(y)dy+t^2$.

关于 t 求导数得到 $f(t)=2t-1$，于是 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

17. 已知积分 $\int_L(x+xy\sin x)dx+\frac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\frac{®}{2}\right)=0$，（1）求 $f(x)$；

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=(x+xy\sin x)dx+\frac{f(x)}{x}dy$；

(3)对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(®,1)$ 到 $B(2®,0)$ 的任意路径.

解:(1)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x+xy\sin x)$$

$$x\sin x=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2\sin x$$

这是一阶线性微分方程. 通解为 $f(x)=x(\sin x-x\cos x+C)$, 由初始条件得 $f\left(\frac{®}{2}\right)=0$, $C=-1$, 于是 $f(x)=x(\sin x-x\cos x-1)$.

(2)解法一: $(x+xy\sin x)dx+\frac{f(x)}{x}dy=(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy\sin x,\quad u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\cos x+\sin x+\varphi'(y)=\sin x-x\cos x-1$$

$$\varphi'(y)=-1,\quad \varphi(y)=-y+C$$

$$u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$

其中 C 为任意常数.

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy+C$$

解法二：$=\int_0^x xdx+\int_0^y(\sin x-x\cos x-1)dy+C$

$$=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$$

(3) 解法一：积分与路径无关, 由 A 到 B 取平行与坐标轴的两条路径,

$$I=\int_1^0(-\pi\cos\pi-1)dy+\int_{\pi}^{2\pi}xdx=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$$

解法二：$I=u(x,y)\big|_A^B=u(B)-u(A)=(1-\pi)+\dfrac{3\pi^2}{2}$。

18. 已知 $f(x)\in C^2$ 且 $f'(0)=0$，又 $[f(x)+y(e^x+x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 为全微分，求 $f(x)$，并使由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$。

【解】因为是全微分，有 $f''(x)+f(x)=x$

齐次方程通解 $\tilde{f}(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

方程 $f''(x)+f(x)=x$ 的特解为 $F_2(x)=x$

所以原方程的解为 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$，

$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1$，$f'(0)=c_2+1=0$，$c_2=-1$

$f(x)=c_1\cos x-\sin x+x$，$f'(x)=-c_1\sin x-\cos x+1$

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$$
$$=d[c_1\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x^2+y(-c_1\sin x-\cos x+1)]$$

由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 积分得

$$[c_1+\frac{®^2}{8}+®(-c_1+1)]-1=c_1(1-®)+\frac{®^2}{8}+®-1=\frac{®^2}{8}$$，得 $c_1=1$

$f(x)=\cos x-\sin x+x$。

19. 设 u 为开集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的调和函数（即 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$），证明：

（1）$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2®}\oint_{\partial D}(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dl$，其中 $(x_0,y_0)\in D$，$\mathbf{r}$ 为 (x_0,y_0) 到 ∂D 上点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$，$\mathbf{n}$ 为 D 的单位外法向量.

（2）$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2®R}\oint_L u(x,y)dl$，其中 L 是以 (x_0,y_0) 为中心，R 为半径位于 D 中的任意一个圆周.

20. 设 u 为有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上的调和函数（即 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$），证明：

（1）$u(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4®}\iint_{\partial\Omega}(u\frac{\cos<\mathbf{r},\mathbf{n}>}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dS$，其中 $\mathbf{r}_0$ 为 Ω 内任意一点，$\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{r}_0$ 到 $\partial\Omega$ 上点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$，$\mathbf{n}$ 为 Ω 的单位外法向；

（2）$\iint_{\partial\Omega}(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathbf{n}})dS=\iint_{\partial\Omega_0}(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathbf{n}})dS$，

其中 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Omega,\Omega_0=B(M,^\circ)\subset\Omega,r=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$，$r=\|\mathbf{r}\|$.