常数项级数

1. 设常数$\lambda \neq 0$，$a_n > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$ [　　　　].

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与λ有关。　　　　[A]

2. （正常数项级数收敛的判定与其项趋于零阶的估计问题）

设$a_n > 0$, $p > 0$, $\lim_{n\to\infty}\left[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n\right]=1$, 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则$p$的取值范围是____________________.

解: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=1$, $p>2$

3. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的收敛性.

（收敛）$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

4. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$的收敛性.

解: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|a|}{e}$,　　$|a|<e$, 绝对收敛; $|a|>e$, 发散;

$|a|=e$, $|u_{n+1}|>|u_n|$　　（因为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升趋于 e）　　发散.

5. 设$a_n > 0$，单调减且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛？证明结论。

[收敛]

6. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$的收敛性.

解: 这是交错项级数, 通项趋于零, 但不单调. 不能用 Lebnize 定理.
两项合并,

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}+a_{2n}\right)$收敛. 又$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 原级数收敛. 但不绝对收敛. 故条件收敛.

7. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性（$p>0$）.

解：记 $a_n=\frac{(-1)^n}{n^p}$， $b_n=\ln(1+a_n)$， $c_n=a_n-b_n$

则 $c_n\sim\frac{1}{2n^{2p}}$ 当$n\to\infty$时.

（1） $p>1$， $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

（2） $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

（3）$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛.

（不能用 Leibnize 方法）

8. 常数项级数和积分的估值

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 的收敛性.

解：令$\tan x=t$， $0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$，

$$0<\frac{a_n}{n^p}<\frac{1}{n^{p+1}}.$$

$p>0$时，原级数收敛.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq-n$）

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x\neq-n$）当$n$充分大（即$n+x>0$）时是交错级数，且$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$单调减少趋于零，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x\neq-n$）收敛；又由于$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right|\sim\frac{1}{n}$ $(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x\neq-n$）条件收敛。

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

解：当$x=0$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设$x\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$当$n$充分大（即$n>\frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且$\left|\sin\frac{x}{n}\right|$单调减少趋于零，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$收敛；又由于$\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$条件收敛。

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$不存在，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$发散。

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$

解：设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$的部分和数列为$\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{3n-1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n}}$都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以$\lim_{n\to\infty}S_{6n}$存在且有限。容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$收敛。

由于$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$条件收敛。

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

解：当 $x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$ 时，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，

$0\le 4\sin^2 x<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$ 绝对收敛。

当 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin^2 x=\frac{1}{4}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下，由于 $\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$4\sin^2 x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$

解：当 $x=\frac{k\pi}{2}$ 时，级数的一般项都为零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x\neq\frac{k\pi}{2}$。当 $p>1$ 时，由于 $\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\le\frac{1}{n^p}$，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p\le 0$ 时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ （$a>0$）.

解：设 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$。

当 $a>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{1}{a}<1$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛；

当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当 $0<a<1$ 时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛，$\left\{\frac{a}{1+a^n}\right\}$ 单调有界，由 Abel 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ 收敛，但由于 $|x_n|\sim\frac{a}{n}$ $(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$ 发散，所以级数条件收敛。

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述级数发散：

(1) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$；

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$。

证 （1） 设级数的一般项为 x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

（2） 设级数的一般项为 x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}>\frac{n}{6n}=\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

17. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是否收敛?

（注意：对正项级数成立的结论一般而言对任意项级数就不成立了）

解 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散。

18. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$发散。问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$是否收敛？并说明理由。

解 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

因为正项数列$\{x_n\}$单调减少，所以必定收敛。如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$，于是当$n$充分大时，

$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right)^n$，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

19. 若{nx_n}收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

证 令$a_n=x_n, b_n=1$，则$B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i=k$。利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=nx_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(x_{k+1}-x_k)\text{。}$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{n+1}]\text{，}$$

因为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)$收敛。再由数列{$nx_n$}的收敛性，即可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

20. 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

证 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$可知$f(0)=0$，$f'(0)=0$，于是

$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$（$n\to\infty$），所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

21. 已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 也发散。

证 采用反证法。令 $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，因为$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$ 收敛，与条件矛盾，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 发散。