微积分 A(1)第三次习题课题目（第六周）

一、闭区间连续函数性质

1．证明：若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$f(f(x))=x$，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 存在，若 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可取到正值，证明函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有正的最大值。

3.(书上 P60,14) $f(x)$ 在 R 上有定义，$\exists L\in(0,1),\forall x,y\in R,\ \left|f(x)-f(y)\right|\le L\left|x-y\right|$，任取 $a_1\in R, a_{n+1}=f(a_n)$，证明：

（1）$\{a_n\}$ 收敛

（2）设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，则 a 为 $f(x)$ 唯一的不动点（$f(a)=a$）。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x\in[a,b]$，总存在 $y\in[a,b]$ 使得 $\left|f(y)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x)\right|$. 求证：至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=0$.

5. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，$f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$。证明

（1）$f(x)$ 是单调函数；

（2）$f(x)=x$

6．证明：平面上，沿任一方向作平行直线，总存在一条直线，将给定的三角形分成面积相等的两部分.

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且存在反函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

二、导数定义与求导法

8. $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$

9. $f(x),g(x)$ 定义在 $(-1,1)$，在 $x=0$ 连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\ne 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，

⑴求：$g(0)$；　⑵证明 $g'(0)$ 存在并求值.

10. $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 x,h 有 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$

成立，且 $f(0)=g'(0)=0,\ g(0)=f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

11. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f''(0)$.

12.求下列函数的导函数

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$；　　(4) $y=e^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 确定，求 y'；

(6) 已知函数 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$；

(7) 设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $f'(x), f''(x)$ 存在且 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(y)$.

13.解答下列高阶导数的问题.

（1） $f(x)=(x+1)^2\ln(1-x)$，求 $f^{(n)}(-1)$

（2）求 $y=\dfrac{1}{x^2-a^2}$ 的 n 阶导数。

（3）求 $y=x^2\sin x$ 的 100 阶导数.

（4）设 $y=(\arcsin x)^2$，证明：$(1-x^2)y''-xy'=2$ 并求 $y^{(n)}(0)$。

14.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}$，其中 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$；