# 代数与几何讨论课（四）（向量组的线性相（无）关性）

## 一、选择和填空

1. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则下列命题正确的是（　　）

   $(A)$　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$线性无关

   $(B)$　$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

   $(C)$　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

   $(D)$　$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-2\alpha_1$线性无关

2. 已知$A\in M_{3,4}$，则下列结论正确的是（　　）

   $(A)$　$AA^T$一定可逆　$(B)$　$AA^T$一定不可逆，

   $(C)$　$A^TA$一定可逆　$(D)$　$A^TA$一定不可逆。

3. $m\times n$矩阵$A$的秩为$r$的充分必要条件是（　　）

   $(A)$　$A$中存在$r+1$阶子式不为零

   $(B)$　$A$中存在$r-1$阶子式不为零

   $(C)$　$A$的列向量组中存在$r$个线性无关的向量

   $(D)$　$A$的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数是$r$

4. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & b & b & b & b \\ b & 2 & b & b & b \\ b & b & 2 & b & b \\ b & b & b & 2 & b \\ b & b & b & b & 2 \end{pmatrix}$，已知$r(A)=4$，则$b=$_________.

5. 下列各陈述中，（　　）是对的

   $(A)$　若两组向量的秩相等，则两组向量可互相线性表出

   $(B)$　若一组向量可由另一组向量线性表出，且两向量组的秩相等，则两向量组等价

   $(C)$　若向量组（１）可由向量组（２）线性表出，则向量组（１）的秩一定小于向量组（２）的秩

   $(D)$　以上都不对

6. 设$A$为$n$阶可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$的秩为______.

7. 设$A,B$均为$n$阶方阵, 其中$r(A)=r$，$r(B)=s$为可逆矩阵. 则$r\begin{pmatrix} A & A \\ -B & B \end{pmatrix}=$_____.

8. 设 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关. 则$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$的秩为_____.

9. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$的伴随矩阵的秩为________。

10. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的秩为2， 则$a=$_________。

11. 设$A$为$n$阶方阵, $A$的伴随矩阵的秩为1. 则$A$的秩为_______.

12. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in R^n$线性无关. $A$为$n$阶可逆矩阵。则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$的秩为________.

13. 向量组$(a,\ 1,\ b,\ 0,\ 0)^T$，$(c,\ 0,\ d,\ -2,\ 1)^T$，$(e,\ 4,\ f,\ 5,\ -1)^T$的秩为_____。

14. 设$A$为$n$阶方阵满足$A^2-2I-3I=0$，则$r(A-3I)+r(A+I)=$_________。

15. 设$A$是$s\times n$阶矩阵，$B$是$n\times m$矩阵，满足$AB=0$，且$r(B)=m$，则$A=$____________。

## 二、判断正误，并说明道理。

1. 已知： $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关， 求证： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

试判断下面的证法是否正确？为什么？

证明：因 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，故 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$当且仅当$k_1=k_2=k_3=0$，因而$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3=0$。由于 $k_1+k_3=k_2+k_1=k_3+k_2=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

2. 设向量组 $\alpha,\beta,\gamma$ 线性无关， $\alpha,\beta,\delta$ 线性相关，下列说法是否正确？为什么？

（1） $\alpha$ 必可被 $\beta,\gamma,\delta$ 线性表出 .

（2） $\beta$ 必不可由 $\alpha,\gamma,\delta$ 线性表出 .

（3） $\delta$ 必可由 $\alpha,\beta,\gamma$ 线性表出 .

（4） $\delta$ 必不可由 $\alpha,\beta,\gamma$ 线性表出。

3. 设向量 $\beta$可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，但不能由向量组（I） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线

性表出，记向量组（II）为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则下列说法正确的是：

（1） $\alpha_m$ 不能由（I）线性表出，也不能由（II）线性表出。

（2） $\alpha_m$ 不能由（I）线性表出，但可由（II）线性表出。

（3） $\alpha_m$ 可由（I）线性表出，也可由（II）线性表出。

（4） $\alpha_m$ 可由（I）线性表出，但不可由（II）线性表出。

4. 若 $n$ 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $n$ 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价，则矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与 矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价( 相抵 ).

5. 若矩阵 $A,B,C$ 满足 $A=BC$,则 $A$ 的列向量组可由 $B$ 的列向量组线性表示.

6. 若 $|A|=0$, 则 $A$ 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $R^n$ 中 $n$ 个线性无关的列向量，$A$ 是 $n\times s$ 矩阵，$(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s)$ $=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)A$，则向量组 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 等于 $r(A)$ 。

## 三、证明和计算

1. 已知：$A\in M_{n\times m}, B\in M_{m\times n}$ 且 $n<m$，$AB=I$，求证: $B$ 的列向量组线性无关。

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 个线性无关的 $n$ 维向量，$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，且 $k_i$（$i=1,2,\cdots,n$）全不为零。求证：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中任意 $n$ 个 $n$ 维向量均线性无关。

3. 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,（1）. 求证： $|A^*|=|A|^{n-1}$；（2）求 $r(A^*)$；（3）求 $(A^*)^*$。