第二次习题课（若当标准形）

1、设σ是实数域上的3维线性空间V的一个线性变换，它关于V的某个基的矩阵是$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

（1）求σ的极小多项式$m(x)$，并将$m(x)$在$R[x]$内分解为两个首项系数为1的不可约多项式的乘积：$m(x) = m_1(x)m_2(x)$；

（2）令$W_i = \{v \in V | m_i(\sigma)v = 0\}$，$i = 1, 2$，证明：$W_i$是$\sigma$的不变子空间，且$V = W_1 \oplus W_2$；

（3）在W_1和W_2中分别取基，凑成V的基，使得σ关于这个基下的矩阵只含3个非零元。

2、设σ是复数域上n维线性空间V的一个线性变换，证明存在可对角化的线形变换τ和幂零变换υ，使得$\sigma = \tau + \upsilon$, 且满足$\tau\upsilon = \upsilon\tau$. 如果已知$\sigma$在$V$的某个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

试求τ和υ.

3、设σ为三维线性空间V上的线性变换，σ 在V的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\sigma$的所有不变子空间。

4、设A、$B \in M_n(C)$满足$AB = BA$，且A可对角化。证明存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵，$P^{-1}BP$为若当标准型。

5、设6阶复方阵A的特征多项式为$f(x) = (x-2)^2(x+3)^4$，极小多项式为$m(x) = (x-2)(x+3)^3$，写出A的若当标准形。如果极小多项式为$m(x) = (x-2)(x+3)^2$，A的若当标准形有几种可能？

6、设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵P和若当标准形J使得$P^{-1}AP = J$。

7、设$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，求$A^n$.