课后作业习题答案与提示–Part I

若有错误，请指出

练习1. 考察函数$w = f(z) = \sqrt{|x||y|^\beta}$在$z = 0$处可导性，其中$\beta \geq 1$为常数。

提示. 在$z = 0$处，令$\Delta z = re^{i\theta}$，观察到$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\sqrt{r^{1+\beta}|\cos\theta||\sin\theta|^\beta}}{re^{i\theta}}$，因为$\Delta z \to 0 \Leftrightarrow r \to 0$，所以当$\beta = 1$时,不可导,其余情况均可导。

练习2. 试构造函数$w = f(z)$,使得它在$\mathbb{C}$上连续，在$z = 0$可导，但在0点的任何空心邻域内均有$f(z)$的解析点与奇点。

答案. 例子：

$$w = f(z) = \begin{cases} z^2, & Imz \geq 0, \\ \bar{z}^2, & Imz < 0. \end{cases}$$

练习3. 设$n \geq 2$为固定正整数，考察函数

$$w = f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^n}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

在$z = 0$处连续性及可导性。

提示. 同第一道练习中方法可得在$z = 0$处：$n > 2$ 时可导，$n = 2$时连续不可导(注：$n = 1$时不连续)。

练习4. 书上P67: 10 (4)(5)

Proof. (4). $\arg f(z) \equiv \theta \in (-\pi, \pi] \Rightarrow e^{-i\theta} f(z)$恒取实值，应用10(1)证明过的结论得出，$e^{-i\theta} f(z) \equiv const$, 从而$f(z) \equiv const$.

(5). a, b, c不全为0$\Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} au + bv = c &\Rightarrow au_x + bv_x \equiv 0, au_y + bv_y \equiv 0 \Rightarrow (au_x + bv_x)^2 + (au_y + bv_y)^2 \equiv 0 \\ &\Rightarrow (a^2 + b^2)(u_x^2 + u_y^2) = (a^2 + b^2)(v_x^2 + v_y^2) \equiv 0 \\ &\Rightarrow u_x^2 + u_y^2 \equiv 0, v_x^2 + v_y^2 \equiv 0 \Rightarrow u_x = v_y \equiv 0,\ u_y = -v_x \equiv 0 \\ &\Rightarrow u \equiv const, v \equiv const. \end{aligned}$$

□

练习5. 对任意给定的$z \in \mathbb{C}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{z}{n}) = z.$$

提示. $n\ln(1+\frac{z}{n}) = n\ln\sqrt{(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2} + in\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \to x+iy,\ n\to\infty.$

练习6. 设Jordan闭曲线C围成的区域面积为S,试求下列积分的值:

$$\oint_C \bar{z}dz.$$

答案：$2iS$.

练习7. 书上第三章习题: 21.

提示.： 注意到

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C [\frac{f(z)}{z-z_0}]'dz = 0,$$

因为$\frac{f(z)}{z-z_0}$作为$[\frac{f(z)}{z-z_0}]'$在D上的原函数，根据积分路径无关性的三个充要条件即知。

练习8. 设$\rho > 0, a \in \mathbb{C},\ |a| \neq \rho$，求证:

$$I = \oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \begin{cases} \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}, & |a| < \rho, \\ \frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}, & |a| > \rho. \end{cases}$$

Proof. 令$z = re^{i\theta}$,在C_ρ：$|z| = \rho$, 上, $|z|^2 = z\bar{z} = \rho^2$. $|dz| = ds = \rho d\theta = -i\rho\frac{dz}{z}$. 于是

$$I = \oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \oint_{C_\rho} \frac{-i\rho dz}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})z} = -i\rho\oint_{C_\rho} \frac{dz}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}$$

Case 1. $|a| < \rho$.

$$I = -i\rho\oint_{C_\rho} \frac{\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}}{z-a}dz = -i\rho\cdot 2\pi i\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}|_{z=a} = \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2};$$

Case 2. $|a| > \rho$. 类似可得。 □

练习9. 设$f(z)$在圆盘$D: |z-z_0| < R$上解析，在$\overline{D}$上连续，证明面积平均值公式：

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D f(z)dxdy.$$

提示.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^R f(z_0)rdr = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})rd\theta dr \Rightarrow$$
$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D f(z)dxdy.$$

练习10. 设$f(z)$在有界区域D上解析，在$\overline{D}$上连续，且处处不为0，证明：
若对$\forall z \in \partial D$有$|f(z)| \equiv M$(M为某个常数）, 则在$\overline{D}$上，$f(z) \equiv Me^{i\theta}$,对某个$\theta \in [0, 2\pi)$.

提示. 对$f(z)$ 及$\frac{1}{f(z)}$分别应用最大模原理,则不难看到$|f(z)|$的最大与最小模均在边界上取得，因而$|f(z)| \equiv M$, 从而$f(z) \equiv const$。

练习11. 设$P_n(z)$为$n(\geq 1)$次多项式，且最高项系数为1，求证：

$$M = \max_{|z|=1} |P_n(z)| \geq 1.$$

Proof. 证法1.利用Cauchy不等式,注意到$n! = |P^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{1^n}$,即得。
证法2. 令$w = \frac{1}{z}$, 则$\frac{P_n(z)}{z^n} = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^n} = 1 + a_1 w^1 + \cdots + a_n w^n = Q(w)$, 注意到

$$M = \max_{|z|=1} |P_n(z)| = \max_{|w|=1} |Q(w)|.$$

因而有$M \geq |Q(0)| = 1$.

□

练习12. 设$f(z)$为整函数，且已知$f(0) = A$, $f'(0) = B$, 对给定的$r > 0$及正整数n，试求：

(1) $I_1 = \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta$, (2) $I_2 = \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta$. **(此处为$n$次方)**

提示. $z = re^{i\theta}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = (1 + \frac{z+\bar{z}}{2r})/2 = \frac{2rz+z^2+r^2}{4rz}$, $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = (1 - \frac{z+\bar{z}}{2r})/2 = \frac{2rz-z^2-r^2}{4rz}$,这样，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \oint_{|z|=r} f^n(z) \frac{2rz + z^2 + r^2}{4rz} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=r} f^n(z) \frac{2rz + r^2}{4riz^2} dz \\ &= 2\pi i [\frac{f^n(0)}{2i} + \frac{r}{4i} [f^n(z)]'_{z=0}] = 2\pi i [\frac{A^n}{2i} + \frac{rnA^{n-1}B}{4i}] = \pi [A^n + \frac{rnA^{n-1}B}{2}]. \end{aligned}$$

类似可得：

$$I_2 = \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \pi [A^n - \frac{rnA^{n-1}B}{2}].$$

练习13. 设$f(z)$在$|z| \leq 2$内解析，已知$f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = C$, 试求积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (2 - z) f(\bar{z}) dz.$$

提示. 先化成参数积分，$z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$，然后再转成$Cauchy$积分公式或高阶导数公式计算, 可求得

$$\oint_{|z|=1} f(\bar{z}) dz = 2\pi i B, \ \oint_{|z|=1} z f(\bar{z}) dz = \pi i C.$$

练习14. 设$f(z)$在$|z| > 1$上解析且有界，给定z_0满足$|z_0| < 1$以及正整数n,求证：

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0.$$

Proof. 在$|z| > 1$上, $|f(z)| < M$.对所有充分大的r,由复合闭路定理有

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

$$
\begin{aligned}
|\oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}| = |\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}| &\le \oint_{|z-z_0|=r}\frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}} \\
&\le \oint_{|z-z_0|=r}\frac{Mds}{r^{n+1}} = \frac{2\pi M}{r^n}.
\end{aligned}
$$

令$r \to +\infty$,则得到我们需要的结论。

□