微积分 A(1)第七次习题课参考答案（第十四周）

一、一阶微分方程

1. 已知 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足条件：$\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$，试研究该函数的单调性，凹凸性，奇偶性及无穷远处的性质。

解：$y'\ge 0$，且当 $x\ne 0$ 时 $y'>0$，故 $y=y(x)$ 严格单调增.

$$y''=2x+2yy'=2x+2y(x^2+y^2),$$

$$x>0, y''>0，y=y(x)\text{ 下凸；}$$

$$x<0, y''<0，y=y(x)\text{ 上凸.}$$

$x=0$ 是拐点.

令 $f(x)=-y(-x)$，则

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(-y(-x)\right)=y'(-x)=x^2+\left(f(x)\right)^2.$$

由 $f(0)=y(0)=0$ 可知 $y=f(x)$ 也是初值问题 $\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的解．由初值问题解的存在唯一性定理可得 $y(x)=f(x)=-y(-x)$，$y(x)$ 是奇函数.

当 $x\ge 0$ 时，$y'\ge x^2$，$y(x)=\int_0^x y'(x)dx\ge \frac{x^3}{3}\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时．通理，当 $x\to-\infty$ 时，$y(x)\to-\infty$.

2．解下列方程

（1）$xy'=y(\ln y-\ln x)$.

解（2）法 1：原式 $\Rightarrow y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\xrightarrow{y=xu(x)} u+xu=u\ln u$

$$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln\left|\ln u-1\right|=\ln Cx\Rightarrow y=xe^{1+Cx}$$

法 2：原式 $\Rightarrow \frac{dy}{y}=\left(\ln y-\ln x\right)\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow d(\ln y)=\left(\ln y-\ln x\right)d\ln x\xrightarrow{u=\ln y, v=\ln x}\frac{du}{dt}=u-t$$

$\Rightarrow y'=f\left(ax+by\right)$ *or* $y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)$ 型方程

（2）$y'=1+x+y^2+xy^2$

解（4）方程为可分离变量微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$

上式两端积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan y=\int(1+x)\mathrm{d}x=x+\frac{x^2}{2}+c$

即 $\arctan y = x + \dfrac{x^2}{2} + c$，其中 c 为任意常数.

（3）$(x+2xy-y^2)y' + y^2 = 0$

解（6）对 x 为线性方程，$\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1+2y}{y^2}x = 1$，解得 $x = -y^2 + c\,y^2 e^{-\frac{1}{y}}$.

（4）$xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

解（8）：当 $x>0$ 时，原方程可化为：　$y' = \sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}$，

令 $y=ux$ 整理得：　$\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{x}$，

积分得：　$\arcsin u = \ln|Cx|$，

将 $y=ux$ 代入，原方程的通解为：　$y = x\sin(\ln|Cx|)$.

当 $x<0$ 时，原方程可化为：　$y' = -\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}$，（后略）

3. 设 $f(x)$ 满足 $f(x)\int_0^x f(t)dt = 1$，求 $f(x)$ 的表达式。

解：$\int_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{f(x)}$，对 x 求导，记 $f(x)=y$，$\left(\dfrac{1}{y}\right)' = y$，$-\dfrac{1}{y^3}dy = dx$，

$$y^2 = \frac{1}{2x+C}，\quad y = f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2x+C}}$$

4.设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1) = \dfrac{5}{2}$，且对所有的 $x, t \in (0,+\infty)$，满足条件

$\int_1^{xt} f(u)du = t\int_1^x f(u)du + x\int_0^t f(u)du$，求 $f(x)$。

解：将 t 看成常数，对 x 求导，$f(xt)t = tf(x) + \int_0^t f(u)du$。

令 $x=1$，$tf(t) = \dfrac{5}{2}t + \int_0^t f(u)du$，再对 t 求导，$tf'(t) + f(t) = \dfrac{5}{2} + f(t)$，　$f(1) = \dfrac{5}{2}$，

解得 $f(t) = \dfrac{5}{2}\ln t + \dfrac{5}{2}$

二、物理应用

5. 将质量为 m 的物体，以初速 v_0 垂直向上射出，设空气阻力与运动速度的平方成正比，比例系数 $k>0$。求物体到达的高度，到这最高处的时间，落到原地时的速度及下落时间？
解：取向上为高度正方向的坐标系，则有**方程及条件**：

上升方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$；

下落方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg + kv^2 \\ v(t^*) = 0 \end{cases}$，

解：上升方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - k^2v^2 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$；

$$\frac{kg}{\sqrt{mg}}t = \arctan\frac{k}{\sqrt{mg}}v_0 - \arctan\frac{k}{\sqrt{mg}}v$$

上升到顶点的时间为 $v = 0$ 对应的时间。

$$t^* = \frac{\sqrt{mg}}{kg}\arctan\frac{k}{\sqrt{mg}}v_0$$

上升的最高度 $H = \int_0^{t^*}\frac{\sqrt{mg}}{k}\tan\left[\arctan\frac{k}{\sqrt{mg}}v_0 - \frac{kg}{\sqrt{mg}}t\right]dt$

下落方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg + k^2v^2 \\ v(t^*) = 0 \end{cases}$。

6. 某湖泊水量为V，每年入湖含污物 A 的污水，入湖污水量$\dfrac{V}{6}$，入湖不含 A 的水量为$\dfrac{V}{6}$，流出量$\dfrac{V}{3}$。已知 1999 年底湖中有污物$5m_0$，超过国家标准。为治污从 2000 年初开始，限定入湖污水含 A 浓度不超过$\dfrac{m_0}{V}$，问多少年后湖中含污物的量降至m_0。

解：$m(t), P(t), Q(t)$分别表示第t年湖内污物 A 总量，排入速度，排出速度。

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{V}\frac{V}{6} - \frac{m}{V}\frac{V}{3}$$

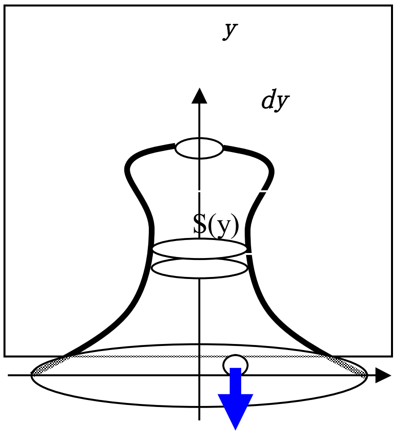
$$m = \frac{m_0}{2} - ce^{-\frac{t}{3}}$$

$m(0) = 5m_0$，

$$m = \frac{m_0}{2} + \frac{9}{2}m_0e^{-\frac{t}{3}}$$

$m = m_0, t = 6\ln 3$.

7. 一容器总高为H，在高度为h处的断面面积为$S = S(h)$，在底部有一面积为s_0的小孔，若水流出速度v是水深h的函数，$v = \mu\sqrt{2gh}$，若在容器装满水后，将底部小孔打开，问多久水将流尽？



解：设 y 轴方向为水深

- 列方程：微元平衡分析，t到$t+dt$的时段内：

水深变化dy引起的水量变化= dt时间内流出的水量

即：$\begin{cases} -S(y)dy = \mu\sqrt{2gy}\,dt \\ y(0) = h \end{cases}$

- 解方程：这里未知函数是$y = y(t)$，$S(y)$是已知函数

$$\frac{-S(y)dy}{\sqrt{y}} = \mu\sqrt{2g}\,dt, \qquad \int_h^y \frac{-S(y)}{\sqrt{y}}dy = \int_0^t \mu\sqrt{2g}\,dt$$

$$t = \frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\int_y^h \frac{S(y)}{\sqrt{y}}dy$$

8. 一个 1000㎥ 的大厅中的空气内含有 a%的废气，现以 $1m^3/min$ 注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求t时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间。

解　设在时刻t空气内含有的废气浓度为$y(t)$，则

$$dy = -\frac{1}{1000}y(t)dt, \quad y(0) = \frac{a}{100},$$

解此方程，即得到

$$y(t) = \frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}。$$

当$y(t) = \dfrac{a}{200}$时，有 $e^{\frac{t}{1000}} = 2$，从而得到 $t = 1000\ln 2$（min），即废气浓度减少一半所需的时间为 $1000\ln 2$（min）。

9. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度h随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高h时，出水速度$v = 0.6\times\sqrt{2gh}$。）

解　设t时刻水面的高度为h，过了dt时间后水面的高度降低了dh，则

$$\pi 1^2 dh = -\pi(0.01)^2 v dt = -\pi(0.01)^2 \times 0.6\sqrt{2gh}dt,$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -6\times 10^{-5}\sqrt{2g}dt。$$

对上式两边积分，注意$t=0$时，$h=2$，得到

$$h=2(1-3\times10^{-5}\sqrt{gt})^2,$$

以$h=0$代入，解得

$$t=\frac{10^5}{3\sqrt{g}}=1.06\times10^4 \text{（s）。}$$

补充:

广义积分的收敛性

（1）$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$　　（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$　　（5）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$

解:（1）$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，

第一个积分显然收敛，对第二个积分令$x-\pi=t, dx=dt$，

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，收敛.

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^{1}\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

对第一个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$与$\frac{1}{x^{p-1}}$等价（$x\to0$），

$p-1<1,\quad \Rightarrow p<2$收敛.

对第二个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$与$\frac{1}{x^q}$进行比阶，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p-q}}=\begin{cases}0 & p>q\\ \frac{\pi}{2} & p=q\end{cases}$$

因此，当$p\ge q>1$时第二个积分收敛。

综合上述分析，$1<p<2$时积分收敛。

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$

$x \to 0$，$\dfrac{1}{\sin^p x \cos^q x} \backsim \dfrac{1}{x^p}$，当 $p<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 收敛；

$x \to \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{\sin^p x \cos^q x} \backsim \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^q}$，当 $q<1$ 时，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 收敛。

故当 $p<1$，$q<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 收敛。

（4）$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx$

$x \to 0$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p} \backsim \dfrac{1}{x^{p-1}}$，当 $p<2$ 时，$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛；

$x \to +\infty$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^p} \backsim \dfrac{\ln x}{x^p}$，当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛。

故当 $1<p<2$ 时 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛。

（5）$x^2 = t$，$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{x^p} dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt = \int_0^1 \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt + \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt$，

$t \to 0^+$，$\dfrac{\sin t}{t^{(p+1)/2}} \sim \dfrac{1}{t^{(p-1)/2}}$，故 $\dfrac{p-1}{2} < 1$ 时 $\int_0^1 \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt$ 收敛；

$\dfrac{p+1}{2} > 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt$ 绝对收敛，

$0 < \dfrac{p+1}{2} \le 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}} dt$ 条件收敛。

总之，$-1 < p \le 1$ 时，$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{x^p} dx$ 条件收敛；$1 < p \le 3$ 时，$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{x^p} dx$ 绝对收敛。