第 7 课次习题

练习1. 设$f(z)$在有界区域D上解析，在$\overline{D}$上连续，且处处不为0，证明：
若对$\forall z \in \partial D$有$|f(z)| \equiv M$(M为某个常数），则在$\overline{D}$上，$f(z) \equiv Me^{i\theta}$,对某个$\theta \in [0, 2\pi)$.

练习2. 设$P_n(z)$为$n(\geq 1)$次多项式，且最高项系数为1，求证：

$$\max_{|z|=1} |P_n(z)| \geq 1.$$

练习3. 设$f(z)$为整函数，且已知$f(0) = A$, $f'(0) = B$, 对给定的$r > 0$及正整数n，试求：

$$(1)\ I_1 = \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \cos^2 \tfrac{\theta}{2} d\theta, \quad (2)\ I_2 = \int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta}) \sin^2 \tfrac{\theta}{2} d\theta. \quad \textbf{(此处为}n\textbf{次方)}$$

练习4. 设$f(z)$在$|z| \leq 2$内解析，已知$f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = C$, 试求积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (2 - z) f(\bar{z}) dz.$$

练习5. 设$f(z)$在$|z| > 1$上解析且有界，给定z_0满足$|z_0| < 1$以及正整数n,求证：

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0.$$