第一次习题课讨论题解答

1．Bernoulli 不等式。 对任意正整数n和任意实数$a>-1$，我们有

$$(1+a)^n \geq 1+na,$$

当且仅当$n=1$或$a=0$时等号成立.

证：对情形$n=1$，结论显然成立（等号成立）。假设结论对一般n成立，即$(1+a)^n \geq 1+na$，且等号成立当且仅当$n=1$或$a=0$。考虑情形$n+1$。

$$(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)\geq(1+na)(1+a)=1+(n+1)a+na^2\geq 1+(n+1)a,$$

且等号成立当且仅当$n=1$或$a=0$。即结论对$n+1$成立。证毕。

2. (1)设$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 证明：$a_n$ 严格单调递增，b_n严格单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=e.$

(2) 证明：$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$存在.

证：(1) 由 Bernoulli 不等式，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}>\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

故a_n 严格单调递增，b_n严格单调递减。而

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

（2）由（1），$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$。取对数得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

（3）记 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，由（2）中结论得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0,$$

$$\begin{aligned}x_n&>\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n\\&=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0.\end{aligned}$$

$\{x_n\}$单调递减,有下界 0，故$\{x_n\}$收敛 。

注 1：一个实数称作代数数，如果它是某个整数系数多项式方程的根。非代数数的实数称作超越数。显然，代数数包括所有有理数，以及许多无理数，例如$\sqrt{2}$ 。因为$\sqrt{2}$是方程 $x^2-2=0$的根。与代数数相比较而言，我们对于超越数有较少的理解和掌控。自然对数的底e是无理数。进一步，我们还可以证明， 数e是超越数。这是法国数学家 Charles Hermite 于 1873 年完成的一项了不起的工作。圆周率π也是超越数（德国数学家 Carl Lindemann 于 1882 年证明）。这里向同学们推荐一本书，作者 William Dunham（美），英文书名：The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.中译本译名《微积分的历程》，人民邮电出版社出版，2010。书中有一章专门介绍代数数和超越数。这本书是学习微积分课程不可多得的补充读物。值得拥有。

注 2：了另一个由极限式定义的常数

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0.577\text{。}$$

数γ通常称作 Euler-Mascheroni 常数。这是另一个重要的数学常数，出现在数学的许多地方。相比较数e和数π而言，我们对常数γ的了解更少。例如，迄今为止，我们还不知道γ是否为无理数，虽然许多数学家相信，γ是个超越数。一般来说，证明某个数是超越数比证明它是无理数要困难的多。

3：证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$。

解：记$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$。

则 $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2+k}-n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\sqrt{n^2+k}}$。由此可知

$\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+n})} \le a_n \le \frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+1})}$。求出分子的和就得到

$\frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+n})} \le a_n \le \frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+1})}$。根据两边夹法则知 $a_n \to 1/4$。证毕。

4. 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \in (0,1)$，且 $(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$，$\forall n \ge 1$。求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$。

证明：利用算术平均与几何平均不等式得 $\frac{1}{2} < \sqrt{(1-x_n)x_{n+1}} \le \frac{1-x_n+x_{n+1}}{2}$.

由此得 $x_{n+1}-x_n > 0$，即序列 $\{x_n\}$ 严格单调上升且有上界。因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，记作 x^*。

由于 $x_n \in (0,1)$，故有 $x^* \in [0,1]$。于不等式 $(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$ 中，令 $n \to +\infty$ 得

$(1-x^*)x^* \ge \frac{1}{4}$。 另一方面，二次函数 $(1-x)x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$，且仅在

点 $x=\frac{1}{2}$ 处达到。因此 $x^*=\frac{1}{2}$。这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$。证毕。

5. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在。

证明：反证法。假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = A$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n+2) = A$，

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin(n+2)-\sin n\right) = 0 = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sin 1\cos(n+1)$，

$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin 2n = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\cos n = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$，

与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = A$ 相比较可知 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$。另一方面，

$1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2 n + \lim\limits_{n\to+\infty}\cos^2 n = 0$，矛盾。

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在。

6. 假设序列$\{x_n\}$由如下递推关系生成，证明它们收敛，并求它们的极限。

（1）$x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$，$\forall n \ge 2$，$x_1$，$x_2$ 给定实数；

（2）$x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$， $\forall n \ge 2$，x_1，x_2为给定正数。

证明：（1）由递推关系式$x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$我们得到

$x_{n+1} - x_n = -\dfrac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - x_1)$。进一步我们有

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1} - x_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1-(-1/2)^n}{1+1/2}(x_2 - x_1) \to \frac{2}{3}(x_2 - x_1)。$$

因此$x_n \to \dfrac{2}{3}(x_2 - x_1) + x_1 = \dfrac{2x_2 + x_1}{3}$。

证（2）记$y_n = \ln x_n$，则序列满足关系

$y_{n+1} = \dfrac{y_n + y_{n-1}}{2}$。根据（1）的结论，我们得到$y_n \to \dfrac{2y_2 + y_1}{3}$。于是

$x_n \to \left(x_1 x_2^2\right)^{1/3}$。证毕。

7. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n - x_{n+p}\right| = 0, \forall p \in \mathbb{N}$. $\{x_n\}$是否必为Cauchy列?

(2) $\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n}, \forall p, n \in \mathbb{N}$. $\{x_n\}$是否必为Cauchy列?

(3) $\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n^2}, \forall p, n \in \mathbb{N}$. $\{x_n\}$是否必为Cauchy列?

证：（**1**）否。反例$\{\sqrt{n}\}, \{\ln n\}, \left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right\}$。

（**2**）否。反例$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right\}$.

（**3**）是。$\left|x_n - x_{n+p}\right| \le \dfrac{p}{n^2}, \forall p, n \in \mathbb{N}$。特别地，取 $p = 1$, 有 $\left|x_n - x_{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall n$. 于是，

$$
\begin{aligned}
\left|x_n - x_{n+p}\right| &\le \left|x_n - x_{n+1}\right| + \left|x_{n+1} - x_{n+2}\right| + \cdots + \left|x_{n+p-1} - x_{n+p}\right| \\
&\le \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2} \le \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1},\ \forall p, \forall n > 1.
\end{aligned}
$$

证毕。