微积分 A1 第 7 次习题课答案　极值与 Taylor 公式

1. 求函数的 Maclaurin 展式：

（1）$f(x)=\ln\dfrac{3+x}{2-x}$　　（2）$f(x)=\dfrac{x^2}{1+\sin x}$（6 阶）

（3）隐函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+y^3+xy=1$ 确定（3 阶）

解：（1） $x\to 0$ 时，

$$\ln\frac{3+x}{2-x}=\ln\frac{3}{2}+\ln(1+\frac{x}{3})-\ln(1-\frac{x}{2})$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(\frac{x}{3})^k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(-\frac{x}{2})^k+o(x^n)$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^{k+1}}{3^k}\right)x^k+o(x^n)$$

（2） $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^4)\quad(x\to 0)$

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\sin^3 x=x^3+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\sin^4 x=x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

$$\frac{x^2}{1+\sin x}=x^2\left(1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\sin^4 x+o(\sin^4 x)\right)$$

$$=x^2\left(1-x+\frac{x^3}{3!}+x^2-\frac{1}{3}x^4-x^3+x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+o(x^6)\quad(x\to 0)$$

（3） 由 $x^3+y^3+xy=1$ 得 $y(0)=1$，两边求导得

$$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0,\qquad y'(0)=-\frac{1}{3}.$$

再求导得　$6x+6y(y')^2+3y^2y''+2y'+xy''=0,\qquad y''(0)=0.$

再求导得　$6+6(y')^3+18yy'y''+3y^2y'''+3y''+xy'''=0,\qquad y'''(0)=-\dfrac{52}{27}.$

因此，　$y(x)=1-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{26}{84}x^3+o(x^3)\qquad(x\to 0)$

2. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\dfrac{1}{e}-\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\right]$ （4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)(\alpha\beta\neq 0)$

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{e}{2}x+x^2\left((1+\dfrac{1}{x})^x-e\right)\right]$ （6）$\lim\limits_{n\to +\infty} n\cdot\sin(2\pi e n!)$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$

解：（1） $x\to 0$ 时，

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\text{，}$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\text{，}$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arcsin x-\sin x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2\tan x}&=1+\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{2}\tan^3 x+o(\tan^3 x)\\&=1+\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)\\&=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2=\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=2.$$

（2） $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x\left[1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{x\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{x\left(-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\left(1-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-e^{-x\ln(1+\frac{1}{x})}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-e^{-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-e^{-1+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}\right]=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left[1-e^{\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}\right]=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\left(-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\right)=-\frac{1}{2e}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\beta}{(1+t)^\beta-1}-\frac{\alpha}{(1+t)^\alpha-1}\right)$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\beta\left((1+t)^\alpha-1\right)-\alpha\left((1+t)^\alpha-1\right)}{\left((1+t)^\alpha-1\right)\left((1+t)^\beta-1\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\beta\left(\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o(t^2)\right)-\alpha\left(\beta t+\frac{\beta(\beta-1)}{2}t^2+o(t^2)\right)}{\left(\alpha t+o(t)\right)\left(\beta t+o(t)\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2}t^2+o(t^2)}{\alpha\beta t^2+o(t^2)}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

（5）$(1+\frac{1}{x})^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})}$

$$=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}\right)^2+o(\frac{1}{x^2})\right)$$

$$=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\quad(x\to0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left((1+\frac{1}{x})^x-e\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{2}x+ex^2\left(-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\right]=\frac{11}{24}.$$

（6）$e=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^{\theta_n}}{(n+2)!},\quad\theta_n\in(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{e^{\theta_n}2\pi}{(n+1)(n+2)}+o(\frac{1}{n+1})\right]=2\pi.$$

（7）由带 Lagrange 余项的 1 阶 Taylor 公式，$\forall x>0,\exists\xi_x\in(0,x),s.t.$，

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)(1+\xi_x)^{\alpha-2}}{2!}x^2.$$

于是，对任意正整数 n 及 $k\le n$，存在 $0<\xi_{k,n}<\frac{k}{n^2}$，使得

$$\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{k}{3n^2}-\frac{1}{9(1+\xi_{k,n})^{5/3}}\frac{k^2}{n^4}.$$

而 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\xi_{k,n})^{5/3}}\frac{k^2}{n^4}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\le\frac{1}{n},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\xi_{k,n})^{5/3}}\frac{k^2}{n^4}=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}-\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\xi_{k,n})^{5/3}}\frac{k^2}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}.\ \square$$

3. 证明不等式：

（1）$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})>1$

（2）$x^x(1-x)^{1-x}>\frac{1}{2}\ (0<x<1,x\ne\frac{1}{2})$

（3）$x^y+y^x>1\ (0<x,y<1)$

（4）$t^2e^{-t}/n^2\le e^{-t}-(1-t/n)^n\ (n\ge 2,0\le t\le n)$

（5）$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ (p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,a>0,b>0)$

证明：（1） $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3(1+\xi_x)^3}x^3,\quad x\in(0,1),\xi_x\in(0,x).$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3(1+\eta_x)^3}x^3,\quad x\in(0,1),\eta_x\in(0,x).$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{1}{3(1+\xi_x)^3}x^3+\frac{1}{3(1+\eta_x)^3}x^3>2x,\quad\forall x\in(0,1).$$

令 $x=\frac{1}{2n+1}$，得

$$\ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1/2}, \qquad (n+1/2)\ln(1+\frac{1}{n}) > 1.$$

（2）令 $f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$，则 $f'(x) = \ln\frac{x}{1-x}$ 。

$x > \frac{1}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 严格单调递增； $x < \frac{1}{2}$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 严格单调递减； $x = \frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的严格极小值点， $f(\frac{1}{2}) = -\ln 2$ 。故

$$x\ln x + (1-x)\ln(1-x) > -\ln 2, \quad (0 < x < 1, x \neq \frac{1}{2}).$$

两边取指数，得

$$x^x(1-x)^{1-x} > \frac{1}{2} \ (0 < x < 1, x \neq \frac{1}{2}).$$

（3） $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)\begin{cases} > 0, & 1/e < x < 1 \\ < 0 & 0 < x < 1/e \end{cases}$， x^x 在 $x_0 = 1/e$ 取严格极小值 $e^{-1/e}$ 。

不妨设 $0 < y \le x < 1,$ 令 $y = tx,$ 则 $0 < t \le 1,$ $t^x \ge t,$ 且

$$x^y + y^x = (x^x)^t + x^x t^x \ge (e^{-1/e})^t + e^{-1/e}t^x \ge (e^{-1/e})^t + e^{-1/e}t.$$

令 $g(t) = (e^{-1/e})^t + e^{-1/e}t$，则

$$g'(t) = -\frac{1}{e}(e^{-1/e})^t + e^{-1/e} > -e^{-1} + e^{-1/e} > 0, \quad \forall t \in (0,1].$$

因此 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递增， $g(t) > g(0) = 1, \forall t \in (0,1].$ 故

$$x^y + y^x > 1 \ (0 < x, y < 1).$$

（4）只要证 $f(t) = t^2/n^2 + e^t(1-t/n)^n \le 1, \forall n \ge 2, 0 \le t \le n$ 。为此，只要证 $f(t)$ 在 $[0,n]$ 上的最大值为 1。 $f(0) = f(n) = 1,$ 由 Rolled 定理，存在 $t_0 \in (0,n),$ 使得

$$f'(t_0) = \frac{2t_0}{n^2} - \frac{t_0 e^{t_0}}{n}(1-t_0/n)^{n-1} = 0.$$

于是 $e^{t_0}(1-t_0/n)^{n-1} = 2/n.$ 此时，

$$f(t_0) = \frac{t_0^2}{n^2} + e^{t_0}(1-t_0/n)^n = \frac{t_0^2}{n^2} + \frac{2}{n}(1-\frac{t_0}{n})$$

$$= \frac{t_0^2 - 2t_0 + 2n - n^2}{n^2} + 1 = 1 - \frac{(n-t_0)(n+t_0-2)}{n^2} < 1.$$

故 $f(t)$ 在 $[0,n]$ 上的最大值为 1，在端点上取得。

（5）令 $f(x)=\frac{a^p}{p}+\frac{x^q}{q}-ax,$ 则

$$f'(x)=x^{q-1}-a\begin{cases}>0, & x>a^{1/(q-1)}\\ <0, & x<a^{1/(q-1)}\end{cases}.$$

即 $f(x)$ 在 $(0,a^{1/(q-1)})$ 上严格单调递增，在 $(a^{1/(q-1)},+\infty)$ 上严格单调递减， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有最大值，在 $x_0=a^{1/(q-1)}$ 取得。注意到 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{q}{q-1}=p,$

$$f(x_0)=\frac{a^p}{p}+\frac{a^{q/(q-1)}}{q}-a^{q/(q-1)}=\frac{a^p}{p}+\frac{a^p}{q}-a^p=0.$$

于是 $f(b)\le f(x_0)=0,$ 即 $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$

4. $f''(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=3$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$。

解：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$ 得

$$\lim_{x\to0}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,\quad \lim_{x\to0}f(x)=0.$$

于是 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$ $f''(0)$ 存在，因此

$$f(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),\ \ x\to0.$$

由又 $e^3=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{x^2+f(x)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x^2+f(x)}{x^2}}$ 得

$$3=\lim_{x\to0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=1+\frac{1}{2}f''(0),\qquad f''(0)=4.$$

综上， $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=4.$

5. $f(x)=\left(e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2\right)^{1/3}$，求 $f'(0)$。

解： $f(0)=0,f(x)=\left(\frac{e^{\theta_x}}{3!}x^3\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\frac{e^{\theta_x}}{6}}x,\theta_x\in(0,x).$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{e^{\theta_x}}{6}}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}.$$

6. $f(x)=e^x-(1+ax)/(1+bx)$ 在 $x\to 0$ 与 x^3 是同阶无穷小量，求 a,b。

解： $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-(1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3))$

$$=(1-a+b)x+(\frac{1}{2}+ab-b^2)x^2+(\frac{1}{6}-ab^2+b^3)x^3+o(x^3),x\to 0.$$

$1-a+b=0,\quad \frac{1}{2}+ab-b^2=0,\quad \frac{1}{6}-ab^2+b^3\neq 0.$ $f(x)$ 在 $x\to 0$ 与 x^3 是同阶无穷小量，因此

$$1-a+b=0,\quad \frac{1}{2}+ab-b^2=0,\quad \frac{1}{6}-ab^2+b^3\neq 0.$$

解得 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$. 此时，

$$\frac{1}{6}-ab^2+b^3=-\frac{1}{12},\qquad f(x)\sim-\frac{1}{12}x^3\ x\to\ ($$

7. f 在 $[-1,1]$ 上三次可导，$f(-1)=f(0)=f'(0)=0,f(1)=1$。证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)\geq 3$。

证明： 存在 $\xi_1\in(-1,0),\xi_2\in(0,1)$, 使得

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_1)}{3!},$$
$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}.$$

$f(-1)=f(0)=f'(0)=0,f(1)=1$，则

$$0=\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_1)}{3!},\quad 1=\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}.$$

两式相减，得 $\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1$，因此 $f'''(\xi_1)\geq 3$ 或 $f'''(\xi_2)\geq 3$。得证。