微积分 A(1)第四次习题课参考答案（第七周）

一、闭区间连续函数性质

1．证明：若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $f(f(x))=x$, 则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明　（连续函数的零点存在定理）

法一：令　　$F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 连续，且

$$F(f(x))=f(f(x))-f(x)=x-f(x),$$

所以　　$F(x)F(f(x))\le 0$. 当等号成立时，取 $\xi=x$；当等号不成立时，由连续函数的零点存在定理，存在介于 x 与 $f(x)$ 之间的点 ξ，使得

$$F(\xi)=0\text{，即}\quad f(\xi)=\xi.$$

法二：反证法. 若 $f(x)\ne x$，不妨设 $\forall x, f(x)>x$，则

$$f(f(x))>f(x)>x,$$

这与条件矛盾，故存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 存在，若 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可取到正值，证明函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有正的最大值。

证明：由于 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可取到正值，则至少有一点 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f(x_1)>0$，又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则对 $\varepsilon=f(x_1)>0$，$\exists X>|x_1|\ge 0$，使当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|<f(x_1)$． 另一方面当 $x\in[-X, X]$，由于 $f(x)$ 连续，必有 $x_m\in[-X, X]$，使 $f(x_m)$ 为 $[-X, X]$ 上的最大值，且 $x_1\in[-X, X]$，所以 $f(x_m)\ge f(x_1)>0$。

3.(书上 P60,14)　$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，$\exists L\in(0,1),\forall x,y\in\mathbb{R}, \left|f(x)-f(y)\right|\le L\left|x-y\right|$，任取 $a_1\in\mathbb{R}, a_{n+1}=f(a_n)$，证明：

（1）$\{a_n\}$ 收敛

（2）设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，则 a 为 $f(x)$ 唯一的不动点（ $f(a)=a$ ）。

证明：（1）$\left|a_{n+1}-a_n\right|=\left|f(a_n)-f(a_{n-1})\right|\le L\left|a_n-a_{n-1}\right|\le L^2\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\le\cdots\le L^{n-1}\left|a_2-a_1\right|$

故

$$\left|a_{n+p}-a_n\right| \le \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|$$
$$\le \left(L^{n+p-2}+L^{n+p-3}+\cdots+L^{n-1}\right)\left|a_2-a_1\right| \le \frac{L^{n-1}}{1-L}\left|a_2-a_1\right|$$

因为 $L\in(0,1)$，$\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列，必收敛。

（2）　因为 $\exists L\in(0,1),\forall x,y\in\mathbb{R},\left|f(x)-f(y)\right|\le L\left|x-y\right|$，$f$ 为实轴上的连续函数。

$$a_{n+1}=f(a_n)$$

两边去极限，$a=f(a)$。故 a 为 $f(x)$ 的不动点。假设还有一个 $b\ne a$ 也为 $f(x)$ 的不动点，$b=f(b)$，$\left|f(b)-f(a)\right|=\left|b-a\right|\le L\left|b-a\right|$，矛盾。故不动点唯一。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x\in[a,b]$，总存在 $y\in[a,b]$ 使得 $\left|f(y)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x)\right|$. 求证：至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=0$.

证明：

反证法：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点，则函数 $\left|f(x)\right|$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点，所以 $\left|f(x)\right|>0$.

因为 $\left|f(x)\right|$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的性质，必存在最小值，即存在点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $|f(\xi)|=\min\limits_{a\le x\le b}\left\{|f(x)|\right\}>0$.

由题设条件知，在 $[a,b]$ 内存在 $y\in[a,b]$，使得 $\left|f(y)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(\xi)\right|<\left|f(\xi)\right|$. 这与 $\left|f(\xi)\right|$ 是最小值矛盾，所以函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个零点.

直接法：取 $x_0\in[a,b],\ f(x_0)\ne0$，根据题中条件，存在 $x_1\in[a,b]$，使得 $\left|f(x_1)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x_0)\right|$（假设 $f(x_1)\ne0$）；类似地，存在 $x_2\in[a,b]$，使得 $\left|f(x_2)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x_1)\right|$（假设 $f(x_2)\ne0$）. 依次下去，存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$，满足存 $\left|f(x_n)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x_{n-1})\right|\le\cdots\le\frac{1}{2^n}\left|f(x_0)\right|$（假设 $f(x_n)\ne0$），易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x_n)\right|=0$.

因为数列 $\{x_n\}$ 有界，所以存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记 $\eta=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$，则 $\eta\in[a,b]$. 因为函数 $f(x)$ 在 η 处连续，所以 $f(\eta)=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=0$.

5. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数， $f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$。证明

（1） $f(x)$ 是单调函数；

（2） $f(x)=x$

证明：（1）证明 f 单调不减.

反证法：假设存在 $x_1,x_2\in[0,1], x_1<x_2, f(x_2)<f(x_1)\le 1=f(1)$。因为 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，存在 $x_3\in[x_2,1]$ 使得 $f(x_3)=f(x_1)$，而 $x_1=f(f(x_1))=f(f(x_3))=x_3$，矛盾。

（2） $\forall x\in[0,1], x, f(x)\in[0,1]$。

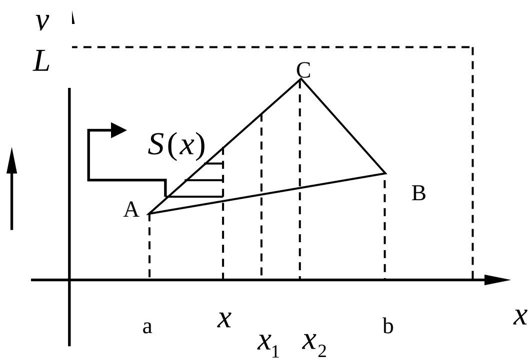
如果 $x\ge f(x)$，由 f 的单调性， $f(x)\ge f(f(x))=x$， $f(x)=x$；

如果 $x\le f(x)$，由 f 的单调性， $f(x)\le f(f(x))=x$， $f(x)=x$。

故 $f(x)=x$。

6．证明：平面上，沿任一方向作平行直线，总存在一条直线，将给定的三角形分成面积相等的两部分.

简证 建立如图所示的坐标系. $S(x)$ 表示阴影部分的面积，由于对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$，都有 $|S(x_1)-S(x_2)|<L|x_1-x_2|$，所以 $S(x)\in C[a,b]$，又因为 $S(a)=0, S(b)=s$，根据连续函数的介值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $S(\xi)=\frac{1}{2}s$.



7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且存在反函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

证：由 f 存在反函数, $\forall x,y\in[a,b],(x\ne y\Rightarrow f(x)\ne f(y))$.

首先证明在 $[a,b]$ 中任取 $c<x<d$, 如果 $f(c)<f(d), f(x)\in(f(c),f(d))$, 如果

$f(c) > f(d), f(x) \in (f(d), f(c))$.

只证明 $f(c) < f(d)$ 的情况，剩下的情况类似.若 $f(x) > f(d)$，由中值定理，存在 $\xi \in (c, x), f(\xi) = f(d)$，矛盾.若 $f(x) < f(\mathrm{c})$，由中值定理，存在 $\xi \in (x, d), f(\xi) = f(c)$，，矛盾.

若 $f(a) < f(b)$，则 $[a,b]$ 中任取在 $x < y$，若 $x = a \vee y = b$，由上面的结论有 $f(x) < f(y)$.若 $a < x < y < b$，对 a, y, b 由上面的结论有 $f(a) < f(y) < f(b)$，再对 a, x, y 由上面的结论有 $f(a) < f(\mathrm{x}) < f(y)$.故 f 严格单调上升.

类似可以证明若若 $f(a) > f(b)$，严格单调下降.

二、导数定义与求导法

8. $f(x)$ 在 $x = a$ 可导，$f(a) \neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$

解：$\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = \left[1 + \dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right) - f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}\cdot\left[x\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

9. $f(x), g(x)$ 定义在 $(-1,1)$，在 $x = 0$ 连续，若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$，

(1) 求: $g(0)$；　(2) 证明 $g'(0)$ 存在并求值.

解：由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ 有，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = 2$，

因此 $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\lim\limits_{x\to 0} x = 2\times 0 = 0$

因此 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=2$

10. $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 x,h 有 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$ 成立，且 $f(0)=g'(0)=0,\ g(0)=f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

解　（导数定义）

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(g(h)-g(0))+g(x)(f(h)-f(0))}{h}\\
&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)\\
&=g(x)\text{。}
\end{aligned}$$

11. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f''(0)$.

解　（高阶导数定义）

因为 $$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$$

所以 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}[4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}]=0.$$

12.求下列函数的导函数

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$；　　(4) $y=e^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 确定，求 y'；

(6) 已知函数 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$；

(7) 设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $f'(x),f''(x)$ 存在且 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(y)$.

解：　$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，$y'=\dfrac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\dfrac{1}{|x|}\dfrac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{|x|}\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$，　　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}$

$$=\frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)}\frac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)^2}$$

$y=e^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$，　　$y'=2xe^{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+e^{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\dfrac{-1}{(x+1)^2}$

(5)（隐函数求导，幂指型函数求导）在 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 两端关于 x 求导得

$$e^{y^2\ln x}(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})+(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})=0,$$

所以
$$2yy'\ln x+\frac{y^2}{x}=0,$$

故
$$y'=-\frac{y}{2x\ln x}.$$

(6)（复合函数求导）$\dfrac{dy}{dx}=f'(\dfrac{x+1}{x-1})\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'=\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\bullet\dfrac{-2}{(x-1)^2}$，

所以
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}=-2\arctan\sqrt{3}=-\frac{2}{3}\pi.$$

(7)（反函数求导）因为 $f(g(y))=y$，

所以
$$f'(g(y))g'(y)=1,$$

$$f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)=0,$$

即
$$f'(x)g'(y)=1,$$

$$f''(x)(g'(y))^2+f'(x)g''(y)=0,$$

所以
$$g''(y)=-\frac{f''(x)(g'(y))^2}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

13.解答下列高阶导数的问题.

（1） $f(x)=(x+1)^2\ln(1-x)$，求 $f^{(n)}(-1)$

解：先计算出 $f^{(0)}(-1)=0,\quad f'(-1)=0,\quad f''(-1)=2\ln 2$

记　$u(x)=(x+1)^2,\quad v(x)=\ln(1-x)$，当 $n\ge 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x) \\
&= C_n^{n-2} u^{(2)}(-1) v^{(n-2)}(-1) + C_n^{n-1} u'(-1) v^{(n-1)}(-1) + C_n^{n} u(-1) v^{(n)}(-1) \\
&= 2C_n^{n-2} v^{(n-2)}(-1)
\end{aligned}
$$

而 $v'(x)=\dfrac{-1}{1-x}, v''(x)=\dfrac{-1}{(1-x)^2}, v^{(3)}(x)=\dfrac{-2}{(1-x)^3}, v^{(4)}(x)=\dfrac{-6}{(1-x)^4},\cdots$ 容易证明

$v^{(n)}(x)=\dfrac{-(n-1)!}{(1-x)^n}, n\geq 1$

$$f^{(n)}(-1)=\frac{-n(n-1)(n-3)!}{2^{n-2}}, n\geq 3$$

（2）求 $y=\dfrac{1}{x^2-a^2}$ 的 n 阶导数。

解：

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= \left[\frac{1}{x^2-a^2}\right]^{(n)} = \left[\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^n \frac{n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]。
\end{aligned}
$$

（3）求 $y=x^2\sin x$ 的 100 阶导数.

解：由莱布尼茨公式，注意到 x^2 的 $n\geq 3$ 阶导数均为零，则有

$$
\begin{aligned}
y^{(100)} &= x^2(\sin x)^{(100)} + 100(x^2)'(\sin x)^{(99)} \\
&\quad + \frac{100\times 99}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(98)} \\
&= x^2\sin\left(x+\frac{100\pi}{2}\right) + 200x\sin\left(x+\frac{99\pi}{2}\right) \\
&\quad + 100\times 99\sin\left(x+\frac{98\pi}{2}\right) \\
&= x^2\sin x - 200x\cos x - 9900\sin x
\end{aligned}
$$

（4）设 $y=(\arcsin x)^2$，证明：$(1-x^2)y''-xy'=2$ 并求 $y^{(n)}(0)$。

解： $y(0)=0, y'(0)=0, y''\left(0\right)=2$.

（a）

$$y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)\left(y'\right)^2=4y$$

两边对 x 求导，

$$(1-x^2)\cdot 2yy'-2x\left(y'\right)^2=4y'$$

若 $y'(x)\neq 0$, $(1-x^2)y''-xy'=2$.

否则 $x=0$, 由 $y''\left(0\right)=2$, 不等式也成立.

（b） $(1-x^2)y''-xy'=2$ 的两边对 x 导得

$$-2xy^{(2)}+(1-x^2)y^{(3)}-y^{(1)}-xy^{(2)}=0$$

故 $y^{(3)}(0)=y^{(1)}(0)=0$.

$(1-x^2)y''-xy'=2$ 的两边对 x 求 n 阶导, $n\geq 2$

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0, n\geq 2$$

令 $x=0$ ，

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)\ , n\geq 2$$

$y^{(3)}(0)=0\Rightarrow y^{(2n+1)}(0)=0, n\geq 2$, 故 $y^{(2n+1)}(0)=0, n\geq 0$.

$y''(0)=2\Rightarrow y^{(2n)}(0)=2\left[(2n-1)!!\right]^2$

14.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}$ ，其中 $f'(0)$ 存在， $f(0)=0$ ；

解 （导数定义，无穷小比较）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan(5x^2)}=\frac{1}{10}f'(0).$$

注意：此题不可以用洛必达法则。