代数与几何讨论课（六）（线性变换，特征值与特征向量）

一、判断下列结论是否正确,并说明理由:

(1) 设σ是n维线性空间V上的线性变换，则σ在V的所有基下的矩阵刚好为一个相似等价类。

(2) 设A 是n阶方阵, 若 $A^2=A$, 则A 的特征值只能是 **1** 或 **0.**

⑶ 设X,Y是n阶方阵A的属于不同特征值的特征向量, 则必有 $X^TY=0$.

(4) 设A是n阶方阵, λ_0是A的一个特征值, X_1,X_2是$(\lambda_0 I-A)X=0$的基础解系, 则A的属于特征值λ_0的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$, 其中k_1,k_2是两个任意常数.

(5) 设A 是 **3** 阶方阵, A的特征值为 **0, 0, 1,** X_1,X_2是$AX=0$的基础解系, X_3是$AX=X$的非零解, 则A的属于特征值1的全部特征向量为 $k_1X_1+k_2X_2+X_3$, 其中 k_1,k_2是不全为零的任意常数.

(6) 设X是n阶方阵A的特征向量, P是n阶可逆方阵, 则 $P^{-1}X$是$P^{-1}AP$的特征向量.

(7) 设X是n阶方阵A的特征向量, 若A可逆, 则X是A^{-1}的特征向量.

(8) 设A是n阶方阵, 若A的特征值都是 **1**, 则 A与I 相似.

(9) 设σ是n维线性空间V上的线性变换，则$V=\mathrm{Im}(\sigma)\oplus\ker(\sigma)$.

(10) 设σ是n维线性空间V上的线性变换，W为σ的不变子空间，$\sigma|_W$的特征值不一定是σ的特征值。

（**11**）设σ是n维线性空间V上的线性变换，λ为σ的特征值，则$V_\lambda=Ker(\sigma-\lambda\varepsilon)$.

（**12**）若$A\sim B$ (相似)，则 A 与B 等价 (相抵)。

（**13**）若 A,B 的特征值分别为 λ,μ 则：

（**A**）A 与 A^T 有相同的特征值与特征向量 ；

（**B**）$A+A^T$及 AA^T 的特征值分别为 2λ及 λ^2；

（**C**）$A+B$及AB的特征值分别为 $\lambda+\mu$ 及 $\lambda\mu$ ；

(D) 以上结论都不正确.

二、设F为一个数域，在F^3上定义线性变换 $\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\-x_1-2x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$，分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$和$\ker(\sigma)$的基.

三、设 V为数域F上的3维线性空间，σ为V上的线性变换，σ在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

（1）求σ在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的矩阵.

（2）求σ的全部特征值和特征向量.

（3）设$\alpha\in V$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,1,1)^T$，求$\alpha$在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3$，

$\eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的坐标。

四、设V=$M_n(F)$，A为一固定的F上的n阶方阵，定义V的线性变换σ为$\sigma:X\mapsto AX$，证明σ和A有相同的特征值。

五、设 A,B为 n阶矩阵 ，证明：AB与BA有相同的特征值。

六、设A为五阶方阵，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5是R^5中的线性无关列向量组，且有

$$A(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

试判断，**(1)** $\{X_i\}$中哪一个是A的特征向量 ；

(2)不是A的特征向量的X_j与A的特征向量有什么关系?