微积分 A（2）第七次习题课参考答案（第十二周）

一、第一型曲面积分

1. 求 $I=\iint\limits_S \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体的四个面.

解:

$$I=\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\left(\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}+\iint\limits_{S_4}\right)\frac{dS}{(1+x+y)^2}$$

在 S_1 上，$dS=dxdy$

$$\iint\limits_{S_1}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le 1}}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

在 S_2 上，$dS=dxdz$

$$\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\substack{x,z\ge 0\\ x+z\le 1}}\frac{dxdz}{(1+x)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}=1-\ln 2$$

在 S_3 上，$dS=dydz$，同理,

$$\iint\limits_{S_3}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=1-\ln 2$$

在 S_4 上，$dS=\sqrt{3}dxdy$,

$$\iint\limits_{S_4}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le 1}}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2}=\sqrt{\ }\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)$$

$$I=\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}=\left(\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}+\iint\limits_{S_4}\right)\frac{dS}{(1+x+y)^2}$$

2. 求球面 $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=a^2,(a>0)}$ 被平面 $\boldsymbol{z=\frac{a}{4},z=\frac{a}{2}}$ 所夹部分的面积。

解：球面 $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=a^2,(a>0)}$ 与平面 $\boldsymbol{z=\frac{a}{4},z=\frac{a}{2}}$ 的交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=\dfrac{a}{4}\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x^2+y^2=(\dfrac{\sqrt{15}}{4}a)^2\\ z=\dfrac{a}{4}\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x^2+y^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2\\ z=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

上半球面的方程为 $\boldsymbol{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad ,$$

$$\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

于是，$S = 4\iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = 4\iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sqrt{3}a/2}^{\sqrt{15}a/4} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 2\pi a[-\sqrt{a^2 - r^2}]\Big|_{\sqrt{3}a/2}^{\sqrt{15}a/4} = \frac{\pi a^2}{2}$$

3.(1)计算 $I = \iint_S (x + y + z)dS$，其中 S 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$。

解：由于 $\iint_S (x + y + z)dS = \iint_S [(x-a) + (y-b) + (z-c)dS + \iint_S (a+b+c)dS$，

且根据对称性可知第一个积分值为零, 所以

$I = \iint\limits_S (a+b+c)dS = 4\pi R^2 (a+b+c)$。

（2）计算 $\oiint\limits_S (x+y)dS$，其中 S 由 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z - 2 = 0$ 确定.

解：做平移 $X = x+2, Y = y+1, Z = z+3$，

原积分$= \oiint\limits_{S'} (X - 2 + Y - 1)dS = \oiint\limits_{S'} (-3)dS = -192\pi$ 。

（3）计算 $\oiint\limits_S (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4})ds$，其中 S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

解：$I = \frac{13}{36}\oiint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)ds = \frac{13}{36}a^2 \oiint\limits_S ds = \frac{13}{9}\pi a^4$

（4）设 $\vec{r} = (x, y, z)^T$，r 为 $\vec{r}$ 的模，设 $S_1 : r = 1$ 外侧为正，$S_2 : r = 4$ 外侧为正，$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 分别为 S_1, S_2 外侧法线矢量。若 $\oiint\limits_{S_1} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_1)}{r} dS = I$，则 $\oiint\limits_{S_2} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_2)}{r^{3/2}} dS =$ [　B　]

(A) I ；　　(B) $2I$ ；　　(C) $\frac{1}{2}I$；　　(D) $2\sqrt{2}I$.

【解】$\cos(\vec{r}, \vec{n}_1) = \cos(\vec{r}, \vec{n}_2) = 1$，所以

$$I = \oiint\limits_{S_1} \frac{1}{r} dS = \oiint\limits_{S_1} dS = 4\pi$$ ，而

$$\oiint_{S_2}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_2)}{r^{3/2}}dS=\oiint_{S_2}\frac{1}{r^{3/2}}dS=\frac{1}{8}\oiint_{S_2}dS=2I\text{ 。}$$

（5）求 $I=\iint_S(x+y+z)^2dS$，其中 S 为单位球面.

解：$I=\iint_S(x+y+z)^2dS=\iint_S(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$$=\iint_S(1+2xy+2yz+2zx)dS=4®+2\iint_S(xy+yz+zx)dS$$

其中 4® 是球的表面积. 由对称性可知，$\iint_S xydS=\iint_S yzdS=\iint_S zxdS=0$，故 $I=4$®

4. 计算 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$. 其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界.

解：设 S_1 和 S_2 为锥体的侧面和上底面，则

$$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

在 S_1 上，$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在 S_2 上，$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\int_0^{2®}\mathrm{d}¯\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r,$$

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\int_0^{2®}\mathrm{d}¯\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r.$$

5. 计算 $I=\iint_S xdS$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0,z=x+2$ 所围空间区域的表面。

解答：记 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$，

$S_2:z=x+2,(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，

S_3 为柱面 $x^2+y^2=1$ 介于 $z=0$ 与 $z=x+2$ 之间的部分，根据第一型曲面积分的计算公式，并利用二重积分的性质，得

$$\iint_{S_1}xdS=\iint_D x\sqrt{1+0+0}dxdy=0$$

$$\iint_{S_2}xdS=\iint_D x\sqrt{1+1+0}dxdy=0$$

对于 S_3，由于其方程为 $x^2+y^2=1$，所以不能写成 $z=z(x,y)$ 的形式，故只能考虑其在 xOz 或 yOz 坐标面上的投影，为了简单起见，考虑 S_3 在 xOz 平面上的投影域 $\overline{D}$，根据题目中条件，易知 $\overline{D}=\{(x,z)|-1\le x\le 1,0\le z\le x+2\}$ 且 S_3 可以分解成 S_{31} 与 S_{32} 两部分，其中

$S_{31}: y=\sqrt{1-x^2},(x,z)\in\overline{D}; S_{32}: y=-\sqrt{1-x^2},(x,z)\in\overline{D}$

因为 $\iint\limits_{S_{31}} xdS=\iint\limits_{D} x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+0}dxdz$

$$=\iint\limits_{D}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dxdz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x+2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2-1)+2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx-2\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1}+\arcsin x\Big|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{\circledR}{2}+\circledR=\frac{\circledR}{2}$$

$$\iint\limits_{S_{32}} xdS=\iint\limits_{D} x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+0}dxdz=\iint\limits_{D}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dxdz=\frac{\circledR}{2}$$

所以 $\iint\limits_{S} xdS=\iint\limits_{S_{31}} xdS+\iint\limits_{S2} xdS=\circledR$

从而 $I=\iint\limits_{S} xdS=\iint\limits_{S_1} xdS+\iint\limits_{S_2} xdS+\iint\limits_{S_3} xdS=\circledR$　　　　【解毕】

特别提示

（1）　计算曲面积分时，要注意柱面在直角坐标系中的处理方法；

（2）　当考虑 S_3 在 yOz 坐标面上的投影区域时，情况如何？请写出计算过程？

（3）　一般地，柱面上的曲面积分在柱坐标系中的计算会相对简单一些，对本题的情况，

由于 S_3: $\begin{cases} x=\cos\text{¯}, \\ y=\sin\text{¯}, 0\le\text{¯}\le 2\circledR, 0\le z\le 2+\cos\text{¯} \\ z=z \end{cases}$

所以 $\iint\limits_{S_3} xdS=\int_0^{2\circledR}d\text{¯}\int_0^{2+\cos\text{¯}}\cos\text{¯}dz=\circledR$

6.计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

解：对于该曲面上任意一点 (x,y,z) 出的面积微元 $\mathrm{d}S$，其质量等于 $b\mathrm{d}S$，关于 z 轴的转动惯量为 $b(x^2+y^2)\mathrm{d}S$．球面的面积微元 $\mathrm{d}S=\dfrac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$．于是整个曲面的转动惯量为 $\iint_S ba(x^2+y^2)\mathrm{d}S=ab\iint_S\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2ab\pi\left(r^2\sqrt{a^2-r^2}\Big|_a^0 + 2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi ba^4$$

7. 证明 $\oiint\limits_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt$，$S: x^2+y^2+z^2=1$，$f$ 连续。

证：设 $\vec{l}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$，S 上一点为 $M(x,y,z)$，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，则

$$ax+by+cz=\vec{l}\cdot\vec{r}=\|\vec{l}\|\cdot\|\vec{r}\|\cos\varphi,\quad \varphi=(\vec{l}\wedge\vec{r})$$

$$\|\vec{l}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ \|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$$

$$\oiint\limits_S f(ax+by+cz)dS=\oiint\limits_S f(\vec{l}\cdot\vec{r})dS=\oiint\limits_S f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)dS$$ 在 $\vec{l}$ 为 z 轴的坐标系里

$$\overset{\text{球面坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}-f(\sqrt{a^2+b^2+c^2})\cos\varphi)d\cos\varphi$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt$$

二、第一、二型曲线积分, 格林公式

8. （1）计算 $I=\oint\limits_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$，其中 L 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$。

解：根据对称性及曲线积分的概念，得

$$I=\oint\limits_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl=\oint\limits_L[\sqrt{y}\sqrt{2y}+2y]dl$$

$$=(2+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)d\theta=2\pi(2+\sqrt{2})\text{。}$$

注：也可以根据重心公式求曲线积分 $\oint\limits_L ydl$，因为 $\bar{y}=\dfrac{\oint\limits_L ydl}{2\pi}=1$，所以 $\oint\limits_L ydl=2\pi$ 。

（2）设 C 为正向闭曲线：$|x|+|y|=2,\quad \oint_C\dfrac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$ [A]

（A） $4(a+b)$；（B） $8(a+b)$；（C） $4(a-b)$；（D） $8(a-b)$.

解：由 $|x|+|y|=2$ 得到 $\oint_C\dfrac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\dfrac{1}{2}\oint_C axdy-bydx=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_C}(a+b)d\sigma_{xy}$

$$=\frac{1}{2}(a+b)S_{D_C}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2(a+b)=4(a+b).$$

（3）设闭曲线C的方程为$|x|+|2y|=1$，则$\oint_C\frac{1}{|x|+|2y|+2}dl=\underline{\frac{2}{3}\sqrt{5}}$

9. 求$\oint_L xydl$，其中L是正方形$|x|+|y|=a,\quad (a>0)$.

解:设$A(0,-a),B(a,0),C(0,a),D(-a,0)$，

$$\oint_L xydl=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)xydl$$

$$=\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx+\int_0^a x(x-a)\sqrt{2}dx$$

$$+\int_{-a}^0 x(x+a)\sqrt{2}dx+\int_{-a}^0 -x(x+a)\sqrt{2}dx=0$$

10.(1) L为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线，　求$\oint_L x^2dl$.

解：由对称性，$\oint_L x^2dl=\oint_L y^2dl=\oint_L z^2dl$，故

$$\oint_L x^2dl=\frac{1}{3}\oint_L\left(x^2+y^2+z^2\right)dl=\frac{2}{3}\text{®}R^3$$

（2）设有曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ z=1\end{cases}$，则$I_c=\oint_C(z+2)dl=$______ 。

【解】$I_c=3\oint_C dl=3\cdot 2\text{®}\sqrt{2}=6\sqrt{2}\text{®}$ 。

（3）设L为椭圆$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$，其周长为$a$，求$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

解:（解法一）由L的方程，$3x^2+4y^2=12$，

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L(12+2xy)dl=12a+\oint_L 2xydl$$

由对称性，$\oint_L 2xydl=0$，故$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a$.

（解法二）L：$\begin{cases}x=2\cos^-\\ y=\sqrt{3}\sin^-,\end{cases}\qquad {}^-\in[0,2\text{®}]$

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a+2\oint_L xydl$$

$$\oint_L xydl=\int_0^{2\text{®}}\left[2\cos^-\sqrt{3}\sin^-\right]\sqrt{4\sin^{2\,-}+3\cos^{2\,-}}\,d^-=0.$$

11.　计算质量均匀的曲线$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\text{®})$关于z轴的转动惯量（p是曲线的质量线密度）.

解：$\int_L(x^2+y^2)p\mathrm{d}l=\int_0^{2\text{®}}a^2p\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$.

12. 求$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$L^+$为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x\tan\theta \quad \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从 x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

解：先求参数方程: $$y = x\tan\theta$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} + z^2 = a^2$$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos t \\ y = a\sin\theta\cos t \quad t: 0 \to 2\pi \\ z = a\sin t \end{cases}$$

$$I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a\sin\theta\cos t - a\sin t)(-a\cos\theta\sin t) + (a\sin t - a\cos\theta\cos t)(-a\sin\theta\sin t)$$

$$+ (a\cos\theta\cos t - a\sin\theta\cos t)(a\cos t)]dt = 2\pi a^2(\cos\theta - \sin\theta)$$

13. 求 $I = \oint_{L^+} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，其中 L^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界线，其方向为 $A \to B \to C \to A$，其中 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

解：

$$I = \oint_{L^+} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= \left[\int_{L(A)}^{(B)} + \int_{L(B)}^{(C)} + \int_{L(C)}^{(A)}\right](y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$L_{AB}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t: 0 \to \dfrac{\pi}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\int_{L(A)}^{(B)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t(\cos t)]dt = -\frac{4}{3}$$

同理，

$$\int_{L(B)}^{(C)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \int_{L(C)}^{(A)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = -\frac{4}{3},$$

故

$$I = \oint_{L^+} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = -4.$$

14. L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向，求积分 $I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy$.

解:我们用 Green 公式来求值.

$$I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4x - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 2y + x^2)\right]dxdy$$

其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$。

$$I=\iint_D(2x-4-2x+2)dxdy=-2\times 9® =-18®$$

15. 求 $\int_L(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy$ ，其中 L 为沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周由 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$.

解：添加辅助直线 BA，由 Green 公式

$$\int_{L+BA}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy=\iint_D(1+e^x-e^x)dxdy=\frac{®}{2}ab.$$

而
$$\int_{BA}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy=2a$$

故
$$\int_L(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy=\frac{®}{2}ab-2a$$

若曲线本身不封闭，可以通过添加辅助线的方法使其封闭，然后再用 Green 公式简化计算

16.（1）计算 $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{(x-a)\mathrm{d}y+(y-b)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(y-b)^2}$，逆时针方向.（$a^2+b^2\neq R^2$）.

解：当 $a^2+b^2>R^2$ 时，利用格林公式得到积分等于零.

当 $a^2+b^2<R^2$ 时，利用格林公式将积分转化为以 (a,b) 为中心的小圆周上的积分. $2®$.

（2）计算 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为 $|x|+|y|=1$ 逆时针方向。

【解】由于 $\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ 中 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)=\frac{4x^2+y^2-x\cdot 8x}{4x^2+y^2}=\frac{y^2-4x^2}{4x^2+y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)=\frac{-(4x^2+y^2)+y\cdot 2y}{4x^2+y^2}=\frac{y^2-4x^2}{4x^2+y^2}\qquad R^2\setminus(0,0)$$

所以 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint\limits_{L_£}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ 其中 $L_£:4x^2+y^2=£^2$

$$=\frac{1}{£^2}\oint\limits_{L_£}2dxdy=\frac{2}{£^2}®\frac{£}{2}£=®$$

17. 计算 $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针方向.(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针方向.

(3) 设 L 为从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段.

解：(1) 令 $X=\frac{x-y}{x^2+y^2},Y=\frac{x+y}{x^2+y^2}$. 则 $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$.

$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$．所以有格林公式得到

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=-\iint\limits_{(x-2)^2+4(y-1)^2\le 1}(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\ .$$

(2) 以 $M(2,1)$ 为中心、充分小的正数 ¢ 为半径作圆周 $L_{¢}: x^2+y^2=¢^2$，逆时针方向．使得该圆周被包含在 L 之内．

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2®}\frac{¢(\cos¯+\sin¯)¢\cos¯+¢(\cos¯-\sin¯)¢(-\sin¯)}{¢^2}\mathrm{d}¯=2®$$

用格林公式将 $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 转化为积分 $-\oint_{L_{¢}}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-2®$ ．

(3) 求出 $\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 的原函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}$．利用积分与路径无关条件得到 $\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=f(4,4)-f(2,0)$．

18. 设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \,|\, x^2+y^2\le t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数． $f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$． $\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$（ ® ）．

解： $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．利用格林公式第二种形式得到

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D_t}(f'_x\vec{i}+f'_y\vec{j})\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint_{D_t}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2®}\mathrm{d}¯\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r=®\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=®\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f\cdot r\mathrm{d}r}{1-\cos t}=®$$ ．（洛必达法则）

19. 设 $D\subseteq R^2$ 为有界区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线， $\vec{n}^0$ 是 ∂D 的外单位法向量，设函数 $f(x,y)\in C^1(D\cup\partial D)$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数。求证：

1^0. $\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial n}dl=0$；　　　　2^0. $\oint\limits_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial n}dl=\iint\limits_{D}|\nabla f|^2dxdy$；

3^0.若在 ∂D 上 $f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0\quad \forall (x,y)\in D$

【解】(1). 由于 $\Delta f=0$，$\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial n}dl=\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx=\iint\limits_{D}\Delta f\,dxdy=0$；

(2). 由 $\oint\limits_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial n}dl=\oint\limits_{\partial D} f(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx)$

$$=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]dxdy=\iint\limits_{D}\left|\nabla f\right|^2dxdy$$

(3). 由（2），若 $f(x,y)\equiv 0\quad \forall (x,y)\in\partial D$，则 $\nabla f\equiv 0\quad \forall (x,y)\in D$，

即 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0\quad \forall (x,y)\in D$，所以 $f(x,y)\equiv const$　而 $f(x,y)\equiv 0$

$\forall (x,y)\in\partial D$，于是有 $f(x,y)\equiv 0$