微积分 A（2）第七次习题课题目（第十二周）

一、第一型曲面积分

1. 求 $I=\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体的四个面.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,(a>0)$ 被平面 $z=\frac{a}{4},z=\frac{a}{2}$ 所夹部分的面积。

3. (1) 计算 $I=\iint_S (x+y+z)dS$，其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$。

（2）计算 $\oiint\limits_S (x+y)dS$，其中 S 由 $x^2+y^2+z^2+4x+2y+6z-2=0$ 确定.

（3）计算 $\oiint\limits_S (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})ds$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$

（4）设 $\vec{r}=(x,y,z)^T$，r 为 $\vec{r}$ 的模，设 $S_1:r=1$ 外侧为正，$S_2:r=4$ 外侧为正，$\vec{n}_1,\vec{n}_2$ 分别为 S_1, S_2 外侧法线矢量。若 $\oiint\limits_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_1)}{r}dS=I$，则 $\oiint\limits_{S_2}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_2)}{r^{3/2}}dS=$［　　］

(A) I；　(B) $2I$；　(C) $\frac{1}{2}I$；　(D) $2\sqrt{2}I$.

（5）求 $I=\iint\limits_S (x+y+z)^2 dS$，其中 S 为单位球面.

4. 计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界.

5. 计算 $I=\iint\limits_S xdS$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0,z=x+2$ 所围空间区域的表面。

6.计算均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

7. 证明 $\oiint\limits_s f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt$，$S: x^2+y^2+z^2=1$，$f$ 连续。

二、第一、二型曲线积分，格林公式

8. （1）计算 $I=\oint\limits_L [(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$，其中 L 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$。

（2）设 C 为正向闭曲线：$|x|+|y|=2$, $\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$［　　］

(A) $4(a+b)$；(B) $8(a+b)$；(C) $4(a-b)$；(D) $8(a-b)$.

（3）设闭曲线 C 的方程为 $|x|+|2y|=1$，则 $\oint\limits_C \frac{1}{|x|+|2y|+2}dl=$______

9. 求$\oint_L xydl$，其中L是正方形$|x|+|y|=a,\ \ (a>0)$.

10. (1) L为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线，　求$\oint_L x^2dl$.

(2) 设有曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ z=1\end{cases}$，则$I_c=\oint_C(z+2)dl=$______ 。

（3）设L为椭圆$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$，其周长为$a$，求$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$

11. 计算质量均匀的曲线$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\text{®})$ 关于 z 轴的转动惯量（p是曲线的质量线密度）.

12. 求$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$L^+$为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\tan\sim\quad\left(0<\sim<\frac{\text{®}}{2}\right)\end{cases}$$

从 x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

13. 求$I=\oint_{L^+}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限部分的边界线，其方向为$A\to B\to C\to A$，其中$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$.

14. L为$x^2+y^2=9$正向，求积分 $I=\oint_L\left(2xy-2y+x^2\right)dx+\left(x^2-4x-y^2\right)dy$.

15. 求$\int_L(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy$，其中$L$为沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的上半周由$A(a,0)$到$B(-a,0)$.

16.（1）计算 $\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{(x-a)\mathrm{d}y+(y-b)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(y-b)^2}$，逆时针方向.（$a^2+b^2\ne R^2$）.

（2）计算$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$为$|x|+|y|=1$逆时针方向。

17. 计算$\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针方向. (2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针方向.

(3) 设L为从$A(2,0)$到$B(4,4)$的有向线段.

18. 设$D_t=\{(x,y)\in R^2\,|\,x^2+y^2\le t^2,t>0\}$，$f(x,y)$在$D_t$上连续，在$D_t$内存在连续偏导数. $f(0,0)=1$. 若$f(x,y)$在D_t上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$. $\vec{n}$为有向曲

线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=$（ ® ）.

19. 设 $D\subseteq R^2$ 为有界区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线，$\vec{n}^0$ 是 ∂D 的外单位法向量，设函数 $f(x,y)\in C^1(D\cup\partial D)$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数。求证：

1^0. $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=0$；　　2^0. $\oint\limits_{\partial D}f\dfrac{\partial f}{\partial n}dl=\iint\limits_{D}\left|\nabla f\right|^2dxdy$；

3^0.若在 ∂D 上 $f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0\quad\forall(x,y)\in D$