第五章 线性空间

一、 一组基到另一组基的过渡矩阵

1. 直接表出法.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 分别为基，若 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}\varepsilon_j$，（$1\le i\le n$），则 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$，所以 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵。

2. 在 R^n 中求过渡矩阵.

令 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，则 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$。

例：求基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\9\end{pmatrix}$ 到基 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

解：设 C 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 e_1,e_2,e_3 的过渡矩阵，即 $(e_1,e_2,e_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$，所以 $C=$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&3\\5&3&9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&7/2&-2\\1/2&1/6&-1/6\\-1&-2&1\end{pmatrix}.$$

二、 向量组的极大无关组及秩的计算

1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为 V 中的向量组，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$，则 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的极大线性无关组当且仅当 $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\cdots,\gamma_{i_r}$ 为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 的极大线性无关组.

2. 已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的基，令 $\beta_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\alpha_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}k_{1j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}$，$1\le j\le t$，令 $\eta_j=\begin{pmatrix}k_{1j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}$，$1\le j\le t$，则由 1 $\eta_{i_1},\eta_{i_2},\cdots,\eta_{i_s}$ 为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 的极大线性无关组当且仅当 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的极大线性无关组.

例： 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$为 4 维线性空间$V$的一组基，求向量组$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=\varepsilon_1$，$\alpha_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$的极大线性无关组。

解：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$在$V$的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标分别为$\eta_1=(1,0,1,0)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$，$\eta_3=(1,0,0,0)^T$， $\eta_4=(1,1,1,1)^T$，可以求得$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的极大线性无关组为$\eta_1,\eta_2,\eta_3$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大线性无关组.

三、 **求坐标**

1. 直接表出。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为线性空间$V$的基，若$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，则$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$x=(k_1,\cdots,k_n)^T$.

2. 利用过渡阵。

设基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$C$，向量$\alpha$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标为$x$，则$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$y=C^{-1}x$.

3. 在 R^n 中求坐标. 设向量 α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 x， 即 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x$， 所以

   $x=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^1\alpha$

例： 求$\alpha=(2,4,2,0)^T$在基$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,1)^T$，$\alpha_4=(0,0,0,1)^T$下的坐标。

解：设α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$x$，于是有$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)x$，将$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$看成矩阵得到$x=(\alpha_1,\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

四、 求子空间的和与交的基

设V为F上的线性空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为$V$的一组基，$W_1$，$W_2$为$V$的两个子空间

1. 求W_1+W_2的基.

设$W_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$， $W_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，于是得到$W_1+W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$。

所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$的极大线性无关组为$W_1+W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$的基。设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标分别为$\gamma_1,\cdots,\gamma_s,\eta_1,\cdots,\eta_t$，可以求得$\gamma_1,\cdots,\gamma_s,\eta_1,\cdots,\eta_t$的极大线性无关组$\gamma_{i_1},\cdots,\gamma_{i_l},\eta_{j_1},\cdots,\eta_{j_r}$，所以$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_l},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}$为$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$的极大线性无关组，从而为$W_1+W_2$的基.

例：设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$为$V$的一组基，$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=\varepsilon_1$，$\alpha_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\alpha_3,\alpha_4)$，求$W_1+W_2$的基.

解：由已知，$W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$在$V$的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标分别为$\eta_1=(1,0,1,0)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$，$\eta_3=(1,0,0,0)^T$，$\eta_4=(1,1,1,1)^T$，$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的极大线性无关组为$\eta_1,\eta_2,\eta_3$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大线性无关组，从而为$W_1+W_2$的基.

2. 求$W_1\bigcap W_2$的基.

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为W_1的基，$\beta_1,\cdots,\beta_s$为W_2的基，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\cdots,\beta_s$在V的基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标分别为$\gamma_1,\cdots,\gamma_r$和$\eta_1,\cdots,\eta_s$。设$\zeta\in W_1\bigcap W_2$，则$\zeta=x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r=y_1\beta_1+\cdots+y_s\beta_s$（*），所以$x_1\gamma_1+\cdots+x_r\gamma_r=y_1\eta_1+\cdots+y_s\eta_s$，故

$$(\gamma_1,\cdots,\gamma_r,-\eta_1,\cdots,-\eta_s)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\\ y_1\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix}=0$$，求解方程组得到基础解系$\xi_1,\cdots,\xi_k$，分别将$\xi_1,\cdots,\xi_k$的前r个分量代入（*）式中得到$\zeta_1,\cdots,\zeta_k$，则$\zeta_1,\cdots,\zeta_k$为$W_1\bigcap W_2$的基.

注：若$\dim(W_1\bigcap W_2)=1$时，只要求一个非零的向量$\zeta\in W_1\bigcap W_2$即可。

例：设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$为$V$的一组基，$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=\varepsilon_1$，$\alpha_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\alpha_3,\alpha_4)$，求$W_1\bigcap W_2$的基.

解：由维数公式得到$\dim(W_1\cap W_2)=1$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标分别为$\eta_1=(1,0,1,0)^T$，$\eta_2=(0,1,0,1)^T$，$\eta_3=(1,0,0,0)^T$，$\eta_4=(1,1,1,1)^T$，由于$\eta_1+\eta_2=\eta_4$，所以$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_4$为为$W_1\cap W_2$的基.

例： 设$\alpha_1=(1,2,1,-2)^T$，$\alpha_2=(2,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,2,-3)^T$，$\beta_1=(1,1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,3,0,-4)^T$，令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求$W_1+W_2$和$W_1\cap W_2$的基。

解：$W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$的极大无关组为$W_1+W_2$的基，将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$排成一个矩阵，用初等行变换将其化成阶梯阵，主元所对应的列为1,2,3,5，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$的极大无关组，从而为$W_1+W_2$的基。

下面求$W_1\cap W_2$的基，假设$\alpha\in W_1\cap W_2$，则$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathrm{y}_1\beta_1+\mathrm{y}_2\beta_2+\mathrm{y}_3\beta_3$。于是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-\mathrm{y}_1\beta_1-\mathrm{y}_2\beta_2-\mathrm{y}_3\beta_3=0$，或$Az=0$，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,-\beta_1,-\beta_2,-\beta_3)$，$z=(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)^T$。求解方程组$Az=0$，得到基础解系$\eta_1=(2,-1,-1,-1,0,0)^T$，$\eta_2=(-5,1,2,0,0,-1)^T$。将$\eta_1,\eta_2$分别带入$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-\mathrm{y}_1\beta_1-\mathrm{y}_2\beta_2-\mathrm{y}_3\beta_3=0$中得到，$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-\beta_1$，$-5\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=-\beta_3$，因此$W_1\cap W_2$的基为$\beta_1$，$\beta_3$。

五、 $V=W_1\oplus W_2$的证明

设V为F上的线性空间，W_1，W_2为V的两个子空间。

$$V=W_1\oplus W_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} V=W_1+W_2 \\ W_1\cap W_2=\{\theta\}\end{cases}，\text{或者}\begin{cases} W_1\cap W_2=\{\theta\} \\ \dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(V)\end{cases}，\text{或者}$$

$$\begin{cases} V=W_1+W_2 \\ \dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(V)\end{cases}$$

例 1：设$A\in M_{m\times n}(R)$，证明$R^m=R(A)\oplus N(A^T)$.

证明： 设$\xi_0=Ax_0\in R(A)\cap N(A^T)$，所以$A^T\xi_0=A^TAx_0=0$，由于$A^TAx=0$和$Ax=0$同解，所以$\xi_0=Ax_0=0$。因此$R(A)\cap N(A^T)=\{0\}$，又$\dim(R(A))+\dim(N(A^T))=m$，所以$R^m=R(A)\oplus N(A^T)$.

例 2：设 $A\in M_n(F)$ 满足 $A^2=A$，证明：$F^m=R(A)\oplus R(A-I)$.

证明：任意的 $x\in F^n$，$x=Ax-(A-I)x\in R(A)+R(A-I)$，所以 $F^n=R(A)+R(A-I)$.

又 $\dim(R(A))=r(A)$，$\dim(R(A-I))=r(A-I)$。由 $A(A-I)=0$，得到 $r(A)+r(A-I)$ $\le n$。又由于 $I=A-(A-I)$，可以得到 $r(A)+r(A-I)\ge n$，故 $r(A)+r(A-I)=n$。所以 $\dim(R(A))+\dim(R(A-I))=r(A)+r(A-I)=n$。因此 $F^m=R(A)\oplus R(A-I)$。

六、　求正交补

设 V 为欧氏空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，W 为 V 的子空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 W 的基，求 $W^\perp$ 的基。

1. 将 W 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 扩充成 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，用施密特正交化方法将其化成标准正交基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$，由于 $W=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)$，故 $W^\perp=L(\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n)$.

2. 设 $\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n\in W^\perp$，则 $\alpha\perp\alpha_1$，$\alpha\perp\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha\perp\alpha_r$，即 $\begin{cases}(\alpha_1,\alpha)=0\\ \quad\vdots\\ (\alpha_r,\alpha)=0\end{cases}$，求解该方程组得基础解系 $\eta_1,\cdots,\eta_t$，故 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\eta_1$，$\cdots$，$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\eta_t$ 为 $W^\perp$ 的基.

例 1：设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为欧氏空间 V 的一组标准正交基，令 $W=L(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3)$，求 $W^\perp$.

方法一：将 W 的基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 的基扩充成 V 的基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_4$。用施密特正交化方法将基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_4$ 化成标准正交基：

正交化：$\beta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\beta_2=-\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\beta_3=\frac{1}{3}\varepsilon_1-\frac{1}{3}\varepsilon_2+\frac{1}{3}\varepsilon_3$，$\beta_4=\varepsilon_4$，单位化得到 γ_1，γ_2，$\gamma_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3$，$\gamma_4=\varepsilon_4$。所以 $W^\perp$ 的基为 $\gamma_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3$，$\gamma_4=\varepsilon_4$.

方法二：设 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4\in W^\perp$，则 $\begin{cases}(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \alpha)=0\\(\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \alpha)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，求得该方程组的基础解系为：$\eta_1=(1,-1,1,0)$，$\eta_2=(0,0,0,1)$，所以 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\varepsilon_4$ 为 $W^\perp$ 的基，用施密特正交化方法化为标准正交基

$\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3$， ε_4.

例 2：设 $A\in M_{m\times n}(R)$，证明 $R^m=R(A)\oplus N(A^T)$，且 $R(A)^{\perp}=N(A^T)$.（**这个例子很重要，以后会用到。**）

证明：由五的**例 1**，得到 $R^m=R(A)\oplus N(A^T)$。故 $\dim N(A^T)=m-\dim R(A)=\dim R(A)^{\perp}$，所以只要证明 $R(A)\perp N(A^T)$ 即可。任意取 $\alpha=Ax\in R(A)$， $\beta\in N(A^T)$，则 $\alpha^T\cdot\beta=(Ax)^T\cdot\beta=\ x^T(A^T\beta)=0$。故 $\alpha\perp\beta$，从而 $R(A)\perp N(A^T)$。得证。

练习题

1. 已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为 V 的基，又 $\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$，$\xi_2=\varepsilon_2$，$\xi_3=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3$；$\eta_1=\varepsilon_1$，$\eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$。

   （1） 证明 ξ_1，ξ_2，ξ_3 和 η_1，η_2，η_3 为 V 的基；

   （2） 求 ξ_1，ξ_2，ξ_3 到 η_1，η_2，η_3 的过渡矩阵。

2. 证明下面三条中的任意两条成立，第三条也成立。

   （1） 实方阵 A 对称；（2）实方阵 A 正交；（3） $A^2=I$.

3. 已知（I）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+x_4=0\end{cases}$， （II）$\begin{cases}-2x_1+x_2+6x_3-x_4=0\\-x_1+2x_2+5x_3-x_4=0\end{cases}$

   （1） 求（I）和（II）的解空间 N_1 和 N_2 的一组基；

   （2） 求 N_1+N_2， $N_1\cap N_2$ 的基。

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为欧氏空间 V 的一组标准正交基，$W=L(\alpha_1,\ \alpha_2)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_4$，求 $W^{\perp}$ 的标准正交基。

5. 设 W_1 和 W_2 分别为方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 和 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2-x_3=0\\\vdots\\x_{n-1}-x_n=0\end{cases}$ 的解空间，证明：$F^n=W_1\oplus W_2$.

6. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为欧氏空间 V 的 n 个向量，证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关当且仅当 $\left((\alpha_i,\alpha_j\right)_{s\times s}$

可逆。

7. 已知α_1=$(1,1,0,0)^T$，α_2=$(0,1,1,0)^T$，求$W = L(\alpha_1, \alpha_2)$在$R^4$中的正交补$W^{\perp}$。

8. 设$A \in M_{m,n}(R)$，证明：$R(A)^{\perp} = N(A^T)$，$R(A^T)^{\perp} = N(A)$.