



# Исследование операций

Рогоза Ярослав Э208, Никитин Артур Э208, Хомич Денис Э208

r.yaroslav1w@gmail.com

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова - Экономический факультет

## Аннотация

На основе статьи 2020 года: «Application of Linear Programming Approach for Determining Optimum Production Cost» [1], необходимо провести ее анализ и реализовать алгоритм, описанный в статье.

## 1 Актуальность темы

Тема "Применение подхода линейного программирования для определения оптимальных производственных затрат" имеет высокую актуальность в современном бизнесе. Линейное программирование является мощным инструментом, который позволяет решать широкий спектр проблем, связанных с оптимизацией ресурсов и принятием рациональных бизнес-решений.

В контексте данной области исследования основная теоретическая задача заключается в разработке и анализе математических моделей, алгоритмов и методов оптимизации с целью минимизации себестоимости продукции. Среди ключевых факторов, которые должны быть учтены в моделях, следует выделить стоимость сырья, производственные затраты, объемы производства, а также ограничения на производственные ресурсы.

Для решения этой задачи необходимо провести исследования в области линейного программирования, включая анализ и сравнение различных методов решения, таких как симплекс-метод и метод внутренней точки.

Прикладные задачи, которые связаны с использованием методов линейного программирования для минимизации себестоимости продукции, включают оптимизацию структуры производства, определение оптимальных объемов производства, эффективное распределение ресурсов, прогнозирование прибыли. Эти проблемы могут применяться в различных секторах, включая производство, логистику, снабжение и другие.

Прикладные задачи в этой области также включают максимизацию прибыли, минимизацию издержек, долгосрочное сохранение конкурентного положения на рынке, оптимизацию хранения товаров и продукции, удовлетворение текущих и будущих потребностей клиентов, а также адаптацию структуры трудовых ресурсов под изменяющиеся условия.

Применение подхода ЛП позволяет более эффективно управлять ресурсами и процессами производства, оптимизировать затраты и улучшать финансовые по-

казатели компании. Это может привести к снижению себестоимости продукции, повышению конкурентоспособности предприятия и увеличению прибыли.

## 2 Краткое описание аналогичных исследований

1. В исследовании Andawei, M. E. (2014) [2] основное внимание уделяется применению линейного программирования при выборе нескольких проектов для минимизации затрат и максимизации прибыли в строительстве и других смежных проектах. В статье предлагается оптимальная схема принятия решений с использованием модели линейного программирования, которая отвечает динамическим потребностям современного клиента.

2. Anieting, A. E., Ezugwu, V. O., and Ologun, S. (2013) [3] используют методы линейного программирования для определения оптимального объема производства для Usmer Water Company в городе Уйо. Благодаря использованию программного обеспечения TORA, в исследовании представлены значения переменных для принятия решений и проведен анализ чувствительности для оценки задачи.

3. Бейкер К. Р. (2011) [4] обсуждает решение реальных оптимизационных задач в книге "Optimization modeling with Spreadsheets". В книге рассматривается создание математических моделей и использование электронных таблиц для представления и анализа. Она знакомит с платформой Risk Solver Platform (RSP) для оптимизации и охватывает различные темы, включая целочисленное программирование, линейное и нелинейное программирование, сетевые модели, Data Envelopment Analysis (DEA) и стохастическое программирование.

4. Буреш-Оппенгейм, Дж., С. Дэвис и Р. Импальяццо (2011) [5] представляют модель алгоритмов динамического программирования под названием Prioritized Branching Programs (pBP). Эта концепция расширяет предыдущие модели и нацелена на охват широкого спектра алгоритмов, которые обычно характеризуются как жадные.

5. Veselovska (2014) [6] обратила внимание на растущую конкуренцию и проблемы цепочки поставок, с которыми сталкиваются производственные организации, подчеркнув необходимость оптимизации в процессах принятия решений.

6. Ibitoye и другие (2015) [7] изучили влияние линей-

ного программирования (ЛП) на максимизацию прибыли в организации быстрого питания, столкнувшейся с ростом цен на сырье. В ходе исследования было рекомендовано прекратить производство некоторых видов продукции и сосредоточиться на мясном пироге для повышения рентабельности.

7. Феликс и др. (2013) [8] разработали LP-модель для фермерской деятельности, чтобы оптимизировать доход, учитывая ограничения и другие цели, такие как продовольственная безопасность. Традиционные методы сравнивались с результатами на основе ЛП, что продемонстрировало эффективность подхода.

8. Buresh-Oppenheim (2011) и Baker (2011) [9] исследовали преимущества и ограничения ЛП, подчеркивая его полезность в долгосрочном производственном планировании и сравнительную точность.

9. Балогун и остальные авторы (2012) [10] применили метод ЛП для максимизации прибыли при производстве безалкогольных напитков в нигерийской компании по розливу. Используя ЛП и программное обеспечение на основе симплекс-метода, они добились оптимальных результатов в оптимизации деятельности компании.

10. Исследование авторов Shicov и других (2022) [11] направлено на оптимизацию распределения ресурсов в Санкт-Петербургском предприятии легкой промышленности. Они используют алгоритм линейного программирования - симплекс-метод для разработки оригинального подхода к оптимизации распределения ресурсов. Основное внимание уделяется анализу экономических показателей, оценке текущего состояния предприятий легкой промышленности и укреплению рыночных позиций за счет инноваций. В результате исследования делается вывод о том, что эффективное управление производством требует решения проблемы оптимизации распределения ресурсов.

### 3 Основной исследовательский вопрос авторов

Основной исследовательский вопрос касается оптимизации затрат. Авторы статьи стремятся найти наиболее подходящие способы удовлетворить потребность в конкретном продукте любой производственной компании с минимальными затратами.

Линейное программирование, согласно авторам, является одной из наиболее подходящих техник для планирования оптимальной стоимости производства. В данном исследовании авторы рассматривают производственный график компании, занимающейся производством велосипедов.

### 4 Формализация оптимизационной задачи

В качестве метода для нахождения оптимальных производственных затрат был выбран подход линейного программирования.

В общем виде он выглядит:

$$\begin{cases} z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Где  $n$  - кол-во выпускаемых продуктов,  $m$  - кол-во используемых производственных ресурсов,  $a_{ij}$  - объем затрат  $i$ -ого ресурса для выпуска единицы  $j$ -ого продукта,  $c_j$  - прибыль от реализации единицы  $j$ -ого продукта,  $b_i$  - кол-во имеющегося  $i$ -ого ресурса,  $x_j$  - объем выпуска  $j$ -ого продукта.

В курсе исследования операций данный подход был назван задачей о планировании производства. Поскольку мы ищем минимальные издержки, то целевую функцию мы будем минимизировать, а у неравенств помещается знак, за исключением  $x_j$ , так как они останутся неотрицательными.

После чего в эту задачу были подставлены данные компании по производству велосипедов и были проведены вычисления, о которых будет рассказано в следующем пункте.

### 5 Эмпирическая стратегия: описание данных, метод решения задачи, используемый программный пакет

В исследовании, проведенном авторами был использован пакет TORA, на основе его вычислений они делают финальный вывод. Для того, чтобы удостовериться в точности вычислений, проделанных в исследовании ниже приложен код в R, на основе которого были получены аналогичные выводы.

Авторы статьи сделали следующее в формализации задачи:

Основные обозначения:  $c$  – удельные затраты,  $a$  – количество потребляемых ресурсов,  $b$  – общая доступность  $i$ -го ресурса,  $z$  – целевая функция, представляющая собой общие затраты.

$x_1$  и  $x_3$  – количество мужской модели в первый и второй месяц,  $x_5$  и  $x_7$  – запас мужской модели в первый и второй месяц.

Аналогично с мужской моделью:  $x_2$  и  $x_4$  – количество в 1-м и 2-м месяце,  $x_6$  и  $x_8$  – запас в 1-м и 2-м месяце.

Целевая функция минимизируется, так как в ней заключены затраты на производство, а для максимизации прибыли надо минимизировать расходы. Также компания имеет два вида расходов:

1. Затраты на производство – 120 для мужского велосипеда и 90 для женского.

2. Издержки на инвентаризацию товара, которые составляют 2 единицы.

Теперь рассмотрим ограничения:

1) Для удовлетворения спроса - сначала рассматривается удовлетворение спроса на первом месяце по обоим видам товара. Вычитается из количества товара - его запас - то есть то, сколько надо произвести на первый месяц и в дальнейшем сохранить на следующий месяц. В правой части неравенства находится необходимое количество товара. Для первых месяцев написаны другие числа, в отличие от того, что написано в условии - так как у нас уже изначально имеется в запасе 20 для мужских товаров и 30 для женских. Поэтому надо будет произвести больше 130 для мужских и 95 для женских. Для второго же месяца мы наблюдаем аналогичную ситуацию, но главным отличием является то, что тут для каждого неравенства в правой части прибавляются отправленные в запас в прошлом месяце товары, тем самым во втором месяце можно меньше произвести, чтобы достичь необходимого количества, которое составляет более 200 для мужской модели и 150 для женской.

2) Необходимые запасы товара обоих видов для конца 2-го месяца должны составлять больше 25 единиц или быть равными этому значению.

3) Распределение труда: 3,5 часа необходимо для полного производства мужского велосипеда, а для женского - 2,6. Первые два ограничения показывают, что общее время труда за первый месяц, затраченное на два товара, может находиться от 900 до 1100 часов. А остальные 2 ограничения тоже указывают на общее время труда, но тут показано, что время труда за второй месяц не может отличаться более чем на 100 часов от предыдущего месяца.

4) Наши товары, как произведённые, так и отправленные в запас, не могут быть отрицательными.

После чего была составлена задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} Z &= 120x_1 + 90x_2 + 120x_3 + 90x_4 + 2.4x_5 \\ &+ 1.8x_6 + 2.4x_7 + 1.8x_8 \\ x_1 - x_5 &\geq 130 \\ x_2 - x_6 &\geq 95 \\ x_3 + x_5 - x_7 &\geq 200 \\ x_4 + x_6 - x_8 &\geq 150 \\ x_7 &\geq 25 \\ x_8 &\geq 25 \\ 3.5x_1 + 2.6x_2 &\geq 900 \\ 3.5x_1 + 2.6x_2 &\leq 1100 \\ 3.5x_1 + 2.6x_2 - 3.5x_3 - 2.6x_4 &\leq 100 \\ -3.5x_1 - 2.6x_2 + 3.5x_3 + 2.6x_4 &\leq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0 \end{aligned}$$

В ней учитываются все выше перечисленные ограничения. Для того, чтобы привести задачу к стандартной форме авторы вычли из левой части 1-7 уравнений  $s_1, s_2, \dots, s_7$ , а к уравнениям 8-10 добавили переменные  $s_8, s_9, s_{10}$ . После чего приступили к решению.

## 6 Итоговые выводы и ограничения исследования, возможные недостатки статьи

В статье был подробно расписан алгоритм линейного программирования для составления расписания компании, занимающейся производством велосипедов. Итогом исследования стал вывод, что минимальные затраты производства на следующие два месяца составляют 67156.03 \$, а также то, что трудовая политика полученная в ходе линейного программирования хуже, чем уже существующая это скорее всего вызвано тем, что не было добавлено достаточное количество важных переменных.

В данных, использовавшихся для анализа, не хватало информации о количестве рабочих в компании, поскольку можно было бы вычислить оптимальное количество сотрудников, которые выполняли те же самые задачи, но за меньшее количество времени. Также нам кажется необходимым учесть фактор возможного отклонения от плана и различные издержки, связанные с рабочей силой по типу выхода в декрет, больничный, налоги на каждого сотрудника и другие. Был использован программный пакет TORA, который является устаревшим, поэтому лучше было бы выполнять вычисления в R или Python для удобства читателей. Построенная авторами модель не устойчива к шокам спроса из-за чего возможно перепроизводство велосипедов, а как следствие издержки за его хранение. В идеальной ситуации расчеты авторов верны, но необходимо добавить больше информации о самом процессе производства.

## 7 Возможные дальнейшие направления исследований в рамках тематики статьи

В рамках применения методов ЛП для определения оптимальных производственных затрат дальнейшие исследования возможны по следующим направлениям:

1. Расширение модели, а именно добавление дополнительных ограничений и факторов в модель, например, учет социальных аспектов, может позволить учитывать более широкий спектр требований и ограничений при определении оптимальных производственных затрат.
2. Применение методов ЛП в других типах производства
3. Сравнение методов ЛП с иными методами оптимизации производства, например, со стохастической оптимизацией.
4. Изучение влияния изменения экономических или производственных условий на оптимальные решения, полученные с помощью линейного программирования. Например, как изменение цен на сырье или производственные мощности влияет на

оптимальную структуру производства.

5. Разработка специализированного программного обеспечения для применения методов линейного программирования в производственных условиях.

## 8 Реализация алгоритма, представленного в тексте статьи на языке R

Анализ авторов из TORA был повторен на языке программирования R:

Листинг 1: Код в R

```
1 library(lpSolve)
2
3 f.obj <- c(120, 90, 120, 90, 2.4, 1.8, 2.4, 1.8, rep(0, 10)) # ←
      Including coefficients for s_i variables
4
5 f.A <- matrix(c(
6   1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
7   0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
8   0, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
9   0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
10  0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0,
11  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0,
12  3.5, 2.6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0,
13  3.5, 2.6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
14  3.5, 2.6, -3.5, -2.6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
15  -3.5, -2.6, 3.5, 2.6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1
16 ), nrow=10, byrow=TRUE)
17
18 f.rhs <- c(130, 95, 200, 150, 25, 25, 900, 1100, 100, 100)
19
20 f.dir <- rep("=", 10)
21
22 mod <- lp("min", f.obj, f.A, f.dir, f.rhs)
23
24 variable_info <- data.frame(
25   Variable = c("x1", "x2", "x3", "x4", "x5", "x6", "x7", "x8"),
26   Value = mod$solution[1:8],
27   Objective_Coefficient = obj[1:8],
28   Objective_Value_Contribution = solution$solution[1:8] * obj[1:8]
29 )
30
31 variable_info
```

После выполнения код выводит таблицу, аналогичную авторской:

```
> variable_info
  Variable  Value Objective_Coefficient Objective_Value_Contribution
1      x1 192.92857             120.0             23151.4286
2      x2  95.00000              90.0              8550.0000
3      x3 162.07143             120.0             19448.5714
4      x4 175.00000              90.0             15750.0000
5      x5  62.92857               2.4              151.0286
6      x6   0.00000               1.8               0.0000
7      x7  25.00000               2.4              60.0000
8      x8  25.00000               1.8              45.0000
```

Описание кода:

Для того чтобы решить задачу линейного программирования необходимо импортировать библиотеку lpSolve. Затем в переменной f.obj сохраняем коэффициенты целевой функции, в матрицу f.A записываем ограничения, в переменной f.rhs сохраняем вектор правой части, а в f.dir задаем направление ограничений.

Далее, используя функцию lp(), выполняем решение линейной программы с минимизацией (первый аргумент "min"). Передаем в функцию коэффициенты целевой функции (f.obj), матрицу ограничений (f.A), на-

правление ограничений (f.dir) и вектор правой части (f.rhs). Результат сохраняем в переменной mod.

Для создания таблицы с информацией о переменных используем функцию data.frame(). Задаем столбцы "Variable" для названий переменных, "Value" для значений переменных (из mod\$solution), "Objective\_Coefficient" для коэффициентов целевой функции и "Objective\_Value\_Contribution" для вклада каждой переменной в целевую функцию.

Наконец, выводим таблицу variable\_info, содержащую информацию о переменных, аналогичную той, которая представлена на изображении.

К данному коду можно добавить:

Листинг 2: Код в R продолжение

```
1 mod$objval
```

Данная команда покажет оптимальную сумму издержек в долларах. Получаем: 67156.03 \$

## Список литературы

- [1] S. Kumar Bala, N. Bala, H. Biswas и S. Mondal, "Application of Linear Programming Approach for Determining Optimum Production Cost," Asian Business Review, т. 10, с. 87–90, янв. 2020. DOI: [10.18034/abr.v10i2.466](https://doi.org/10.18034/abr.v10i2.466).
- [2] M. Andawei, "Application of linear programming in multi-design selection," The International Journal of Engineering and Science (IJES), т. 3, № 1, с. 52–55, 2014.
- [3] A. Anieting, V. Ezugwu и S. Ologun, "Application of linear programming technique in the determination of optimum production capacity," Constraints, т. 1, № 1, с. 2, 2013.
- [4] K. Baker, Optimization modeling with spreadsheets: Wiley Online Library, 2011.
- [5] J. Buresh-Oppenheim, S. Davis и R. Impagliazzo, "A stronger model of dynamic programming algorithms," Algorithmica, т. 60, № 4, с. 938–968, 2011.
- [6] L. Veselovska, "A linear programming model of integrating flexibility measures into production processes with cost minimization," JDBED, т. 2, № 1, с. 67–82, 2014.
- [7] I. Olayinka, A. K. Olusegun, G. Kellikume и K. Kayode, "Entrepreneur decision making process and application of linear programming technique," EJB, т. 3, № 5, с. 231–238, 2015.
- [8] M. Felix, M. Judith, M. Jonathan и S. Munashe, "Modeling a small farm livelihood system using linear programming in Bindura, Zimbabwe," Research Journal of Management Sciences, т. 2319, с. 1171, 2013.
- [9] S. K. Bala, N. R. Bala, H. R. Biswas и S. K. Mondal, "Application of Linear Programming Approach for Determining Optimum Production Cost," ABR, т. 10, № 2, с. 87–90, 2020.
- [10] O. Balogun, E. Jolayemi, T. Akingbade и H. Muazu, "Use of linear programming for optimal production in a production line in Coca-Cola bottling company, Ilorin," IJE Research and Applications, т. 2, № 5, с. 2004–2007, 2012.
- [11] P. Shikov, A. Tsegelnik и N. Kokorina, "Resource distribution optimization using a network graph by the method of linear programming," CST, № 5 (71), с. 18, 2022.