

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：

年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保障、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关学位论文管理部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权省级优秀学士论文评选机构将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于 1、保密口，在 年解密后适用本授权书

2、不保密口。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名： 年 月 日

导师签名： 年 月 日

摘 要

社会的发展使人们对于通信的需求日益迫切，对于通信的要求也越来越高，高效的信道编码技术在提高信息传输可靠性的同时尽可能多的降低业务开销，寻找能够达到信道容量且编译码复杂度较低的编码方式一直以来是信道编码技术研究的目标。由 E.Arikan 提出的极化码是实现这一目标的有效编码方式。它被证明在理论上可以达到香农极限，且编译码复杂度只有线性级，成为下一代 5G 通信信道编码技术强有力的候选者。本文主要对极化码的编码与译码算法进行研究，并采用 MATLAB 设计一个包含极化码的基带无线通信系统，对系统在 AWGN 信道下的误码率进行仿真。作者的主要研究工作概括如下：

1. 查阅相关资料，阐述了信道极化现象，详细地推导了信道结合与信道分裂的过程，证明了信道极化是极化码的编译码研究的理论基础，具有重要的作用。
2. 系统地阐述了极化码的编码与译码算法。在编码研究中，主要讨论了信道的可靠性估计，对于 BEC 信道，E.Arikan 提出可以直接计算其巴氏参数来估算错误概率，而对于一般的 B-DMC 信道与高斯白噪声信道，并没有明确的方案，本文提出了密度进化法与高斯近似法来实现对更一般的信道的可靠性估计。通过子信道的可靠性有效地选取信息位与冻结位，构成原始信息向量，推导了生成矩阵的构造方法以及由原始信息和生成矩阵如何构造极化码。在译码研究中，主要研究了 SC 译码算法，并针对其在中短码长下译码性能不佳的问题提出了基于 SC 算法的改进算法 SCL 译码算法，详细推导了其译码过程。
3. 基于 MATLAB 平台构造了包含极化码的基带无线通信系统，完成了极化码编码、译码等模块的程序编写，并对译码结果进行了误码率分析。分析了不同码长、不同码率下 SC 译码算法的性能，结果证明码长越长、码率越小，译码效果越好。由于实际操作中使用的一般为中短码长，无法达到码长趋于无限长的要求，故 SC 译码总体效果不是特别理想，所以又使用 SCL 译码算法进行程序编写，并分析了不同的搜索宽度的影响，仿真结果表明，SCL 算法相比于 SC 算法译码性能得到了提升。

关键词：信道极化；极化码；信道编码；SC 译码

Abstract

The development of society makes the demand for communication increasingly urgent, the requirements for communication is also getting higher and higher, Efficient channel coding technology to improve the reliability of information transmission at the same time as much as possible to reduce business costs, to find the channel capacity and coding complexity of the coding method has been low channel coding technology research objectives. The polarized code proposed by E.Arikan is an effective way to achieve this goal. It proved to be theoretically the Shannon limit, and the codec complexity was only linear and became a powerful candidate for the next generation 5G communication channel coding technique. In this paper, we mainly study the coding and decoding algorithms of polarized codes, and use MATLAB to design a baseband wireless communication system with polarization code to simulate the bit error rate of AWGN channel. The author's main research work is summarized as follows:

1. The information of channel polarization is expounded, and the process of channel combining and channel splitting is deduced in detail. It is proved that the importance of channel polarization in the coding and decoding of polarization code is the theory of polarization code construction basis.

2. The coding and decoding algorithms of the polarization code are systematically expounded. In the coding study, the reliability estimation of the channel is mainly discussed. For the BEC channel, E.Arikan proposed that the β parameter can be directly calculated to estimate the error probability, and for the general B-DMC channel and the Gaussian white noise channel, In this paper, we propose a density evolution method and a Gaussian approximation method to estimate the reliability of a more general channel. The information bits and the freezing bits are effectively selected by the reliability of the subchannels, the original information vectors are constructed, the construction method of the generating matrix is deduced, and how to construct the polarization codes from the original information and the generation matrix. In the decoding research, the SC decoding algorithm is mainly studied, and an improved algorithm based on SC algorithm is proposed to solve the problem of poor coding performance under the short coding length. The decoding process is deduced in detail.

3. Based on the MATLAB platform, the baseband wireless communication system with polarization code is constructed. The program of polarization code coding and decoding is completed, and the bit error rate is analyzed. The performance of SC decoding algorithm with different code length and different bit rate is analyzed. The result shows that the longer the code length, the smaller the code rate and the better the decoding effect. As the actual operation used in the general short code length, can not reach the code length tends to infinite long requirements,

so the overall effect of SC decoding is not particularly ideal, so the use of SCL decoding algorithm for programming, and analysis of the different The simulation results show that the performance of the SCL algorithm is improved compared with the SC algorithm.

Key words: channel polarization; polarization code; channel coding; SC decoding

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题研究背景.....	1
1.2 极化码的研究历史与现状.....	2
1.3 论文研究内容及结构安排.....	3
第 2 章 极化码的信道极化理论.....	4
2.1 变量介绍.....	4
2.2 信道极化现象.....	5
2.2.1 信道结合.....	5
2.2.2 信道分裂.....	7
2.2.3 信道极化.....	9
2.3 本章小结.....	9
第 3 章 极化码的编码与译码研究.....	10
3.1 极化码的编码.....	10
3.1.1 极化信道可靠性估计.....	10
3.1.2 比特混合.....	12
3.1.3 构造生成矩阵.....	12
3.1.4 构造极化码.....	14
3.2 极化码的译码算法.....	14
3.2.1 SC 译码算法.....	14
3.2.2 SCL 译码算法.....	18
3.3 本章小结.....	19
第 4 章 极化码译码仿真分析.....	21
4.1 仿真系统的构建.....	21
4.2 极化码编译码算法性能分析.....	21
4.2.1 编码长度对 SC 译码性能的影响.....	21
4.2.2 编码速率对 SC 译码性能的影响.....	22
4.2.3 搜索宽度对 SCL 译码性能的影响.....	23
4.3 本章小结.....	24
第 5 章 结论.....	25
致 谢.....	26
参考文献.....	27

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景

信息传输对于通信系统来说是最为核心的部分之一，保证信息传输的可靠性和有效性显得尤为重要。提高系统传输的可靠性通常有两种方法，一是减少信道所引起的自身误码率，二是采用信道编码技术，增加数字通信系统^[1]中的差错控制设备。由于在某些情况下，信道的改善不容易实现或者经济代价较大，信道编码成为提高系统传输可靠性的重要手段。

包含信道编码后的典型的数字通信系统模型^[2]如图 1.1 所示。

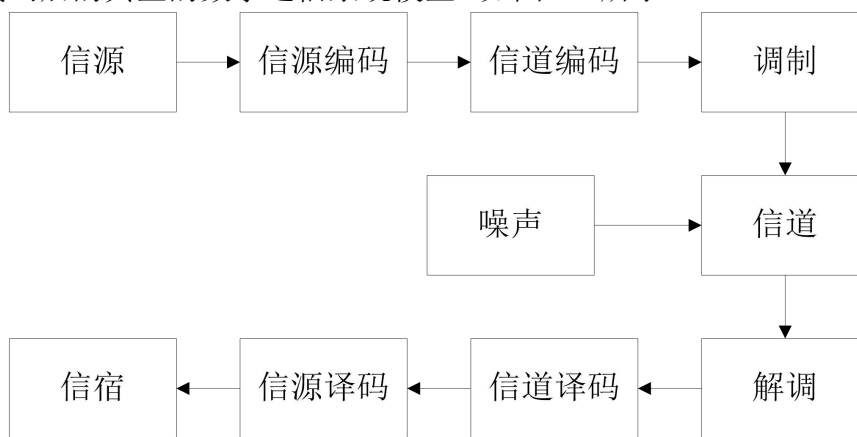


图 1.1 数字通信系统模型

对于数字信源，信源编码的目的是减少信源的冗余度，减少信息表达的比特数，提高信息传输的有效性。信道编码^[3]通过加入一些冗余比特，把几个比特上携带的信息扩散到更多的比特上来提高通信系统传输的可靠性，克服信道中的噪声和干扰。由于加入了冗余信息，会使得数据传输的有效性降低，这也说明了有效性和可靠性是一对互相矛盾的概念。

自从香农在 1948 年发表了“通信的数学理论^[4]”论文以来，人们进入了通信发展的新时代。在论文中，香农提出了著名的有噪信道编码定理。它指出任何通信信道的信道容量都有一个确定值 C ，如果通信系统的传输速率 $R < C$ ，就一定能找到一种信道编码方法，使得码长 N 足够大时，平均差错率任意接近于零。此定理为纠错编码理论奠定了基础。一直以来，人们都在致力于寻找信道容量能够达到香农极限的最佳编译码方式。20 世纪 50 到 80 年代，陆续出现了很多编译码方案。从 1950 年汉明提出的第一个实用的差错编码控制方案汉明码到 1955 年伊莱亚斯提出的卷积码，到 1957 年普兰斯提出的循环码，到 1959 年的纠正多个随机错误的 BCH 码，从 60 年代的级联码到 70 年代的 Goppa 码，到 80 年代的网格编码^[5]，人们将码长提高了很多，译码性能也得到了改善，但通信的有效性即译码复杂度同时也变得很高。1993 年出现的 Turbo^[6]码是一种特殊的并行级联码，其性能已逼近香农的信道编码理论的极限，但它的译码设备复杂，时延太大，无法用于实时通信。1962 年已被提出直至 1996 年才得到较快发展的 LDPC^[7]码相比于 Turbo 码译码简单且已逼近香农

的信道编码理论的极限，但总体来说编码码复杂度很高，时延很长。

随着这些编码方式的出现，人们在信道编码的道路上不断地发展前进，但是仍没有可以同时从理论上证明能够达到信道容量，解决诸多实用问题且编译码复杂度较低的编码方案出现。直至 2009 年，极化码^[8]的提出实现了这一目标。

极化码是目前可唯一理论证明达到香农极限的编码技术，它的编码和译码复杂度只有线性级，在 5G 通信技术研究中，极化码被华为等公司列为信道编码的关键技术，并且已经取得了重要的进展。在未来的发展中，极化码必然在数字通信领域具有很大的应用前景。

1.2 极化码的研究历史与现状

2008 年，土耳其毕尔肯大学教授 Erdal Arıkan 首次提出了极化码的思想。极化码是一种新型的编译码方式，可以达到对称二进制无记忆信道（B-DMC）的信道容量。它的原理是将 N 个互相独立的二进制输入信道通过信道的结合与分裂得到一些新的信道 $\{W_N^i: 1 \leq i \leq N\}$ 。这些新信道中一部分的信道容量 $I(W_N^{(i)})$ 趋近于“1”，比例为 $1 - I(W)$ ，另外 $I(W)$ 比例的信道容量 $I(W_N^{(i)})$ 趋近于“0”，成功地将 N 个独立信道的信道容量进行分离转移。极化码的提出在信道纠错编码领域具有很大的现实意义。首先，它是目前唯一理论上证明可达信道容量的编码方式，其次，极化码的编译码复杂度只有 $O(N \log_2 N)$ 的线性复杂度，对于码长很长的情况，依然可以实现，香农理论指出，长码往往具有较为良好的性能。

极化码由于其良好的特性在实际中有很大的研究前景。目前对于极化码的研究主要集中在编码、译码以及极化现象等方面^[9]。

编码构造一直以来是极化码研究的一个热点。最早的编码算法是由 Erdal Arıkan 提出来的蒙特卡洛算法。但是该算法计算复杂度很高，在实际应用中很难实现。Erdal Arıkan 还提出了在二进制删除（BEC）信道下通过计算信道的巴氏参数来进行编码的方案，虽然此方法相对于蒙特卡洛算法简单了不少，但是应用范围很窄，不适用于一般的二进制无记忆信道。随后，Mori 和 Tanaka 提出了一种新的密度进化（DE）构造方法，将 LDPC 码中的方法应用到了极化码中并取得了不错的效果，适用于一般的二进制信道。但是此方法计算复杂度较高，实际应用起来难度较大。极化码的编码构造还逐渐从离散信道向连续信道发展。此外，信道编码技术还应用于窃听信道、量子信道、多址接入信道等方面。

在极化码的译码研究方面，诸多学者在不懈地努力着。最早的译码算法为 Erdal Arıkan 提出的连续删除列表译码算法。由于实际应用中，码长很难做到无限长，在中短码长的情况下，SC 译码算法错误概率较大，译码性能不佳，于是，更优的译码方案在不断地研究中。许多学者将其他编码中表现出优异性能的译码方案应用到极化码中。例如：LDPC 码的 BP 译码算法应用于极化码。虽然这些算法都取得了性能增益，但在计算复杂度或应用范围等方面都存在着不足。现阶段对于译码的研究大多数都是基于 SC 译码算法的，例如基于 SC

算法的 SCL 列表译码算法，各种辅助 SCL 译码算法等，都有利地改善了译码性能，新的更优的译码算法等待着进一步的研究。

信道极化现象从被发现起到现在已经引起了不同领域学者的注意，越来越多的人认识到信道极化是数字信号处理中一个普遍的现象，并将此现象应用于很多实际操作中，例如：多址接入、并行通信等。

1.3 论文研究内容及结构安排

极化码是目前已知的唯一一种能够被严格证明“达到”信道容量的信道编码方法，成为下一代 5G 通信系统中信道编码方案的强有力候选者^[10]。本文主要研究极化码的编码与译码算法，极化码是基于信道极化现象产生的。首先，详细阐述了信道极化理论，推导了信道结合与信道分裂的过程，为极化码的介绍打下基础。接下来研究极化码的编码方法，主要包括各个子信道可靠性的估计，比特混合，如何构造生成矩阵以及如何构造极化码。之后，对极化码的译码算法展开研究，主要研究了 SC 译码算法以及基于 SC 算法的改进 SCL 译码算法。最后，基于 matlab2014b 设计了一个包含极化码的基带无线通信系统，并对系统在 AWGN 信道的误码率进行了仿真分析。

本文的结构安排如下：

第 1 章：绪论。在本章中，首先介绍了本课题的研究背景，包括数字通信系统模型以及信道编码理论。接下来介绍了极化码的研究历史与现状。最后简单介绍了本文的研究内容及结构安排。

第 2 章：极化码的信道极化理论。在本章中，首先对极化码进行了简单的概述，介绍了极化码的预备知识，如对称容量、巴氏参数以及所涉及到的数学符号的表示。然后重点介绍了信道极化现象。信道极化主要包括两个过程：信道结合与信道分裂^[11]，之后对信道极化现象进行分析。

第 3 章：极化码的编码与译码研究。在本章中，重点展开对极化码编码与译码算法的研究。首先阐述了极化码的编码过程：通过信道可靠性估计获得各个子信道的错误概率，根据可靠性估计结果选取信息位与冻结位，生成原始信息向量。构造生成矩阵，最后由原始信息与生成矩阵生成极化码。接下来详细推导了极化码的 SC 译码算法，并提出了在中短码长下性能有明显改善的基于 SC 译码算法的 SCL 译码算法。

第 4 章：极化码的仿真与分析。在本章中，利用 MATLAB 设计了一个包含极化码的基带无线通信系统，并对系统在 AWGN 信道的误码率进行仿真分析。译码模块分别采用了 SC 译码算法以及 SCL 译码算法。分析不同码长、不同码率下 SC 译码算法的性能以及搜索宽度 L 对 SCL 译码算法性能的影响。

第 5 章：结论。在本章中，对全文所研究的内容与成果进行总结，提出本文的不足之处以及可以进行进一步研究的问题。

第 2 章 极化码的信道极化理论

信道极化理论的产生对极化码的研究具体重大的意义。极化码是基于信道极化想象提出的，它理论上可证明达到信道容量。对于长度为 $N = 2^n$ （ n 为任意正整数）的极化码，它利用信道 W 的 N 个独立副本，进行信道结合和信道分裂，得到新的 N 个分裂之后的信道 $\{W_N^{(1)}, W_N^{(2)}, \dots, W_N^{(N)}\}$ 。随着码长 N 的增加，分裂之后的信道将趋向于两个极端：其中一部分信道会趋近于完美信道即信道容量趋近于 1 的信道；另一部分信道将趋近于完全噪声信道，即信道容量趋近于 0 的信道。假设原信道 W 的二进制输入对称容量为 $I(W)$ ，当码长 N 趋于无穷大时，信道容量趋近于 1 的完美信道所占的比例为 $K = N \times I(W)$ ，信道容量趋近于 0 的完全噪声信道所占比例为 $N \times (1 - I(W))$ 。对于信道容量为 1 的可靠信道，可直接传输消息比特而不采用任何形式的编码，即相当于编码速率 $R = 1$ ；而对于信道容量为 0 的不可靠信道，可用来传输发送端和接收端都已知的冻结位，即相当于编码速率 $R = 0$ 。当码长 N 趋近于无穷大时，编码速率为 $R = N \times I(W) / N = I(W)$ ，即可证明极化码是理论可达信道容量的。

2.1 变量介绍

一个二进制输入离散无记忆信道 (B-DMC) 可表示为 $W: X \rightarrow Y$ ， X 是输入符号的集合， Y 是输出符号的集合，转移概率表示为 $W(y|x)$ ， $x \in X, y \in Y$ ，因为信道是二进制输入，集合 $X = \{0, 1\}$ ， Y 和 $W(y|x)$ 是任意值。信道 W 的 N 次使用过后的信道可以表示为 W^N ，则信道 $W^N: X^N \rightarrow Y^N$ 的转移概率为 $W^N(Y^N | X^N) = \prod_{i=1}^N W(y_i | x_i)$ 。

对于一个 B-DMC 信道，有两个主要的信道参数：

对称容量 (Symmetric Capacity)：

$$I(W) \triangleq \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} \frac{1}{2} W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{\frac{1}{2} W(y|0) + \frac{1}{2} W(y|1)} \quad (2.1)$$

巴氏参数 (Bhattacharyya Parameter)：

$$Z(W) \triangleq \sum_{y \in Y} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} \quad (2.2)$$

$I(W)$ 是对信道速率的度量，是信道 W 在等概率输入情况下的可靠传输时的最大速率。 $Z(W)$ 是对信道可靠性的度量，是信道 W 每次只传输一个 0 或 1 时最大似然判决错误概率的上限。

由式(2-2)易得 $Z(W)$ 的取值范围为 $[0, 1]$ ，由于对数的底为 2， $I(W)$ 的取值范围也为 $[0, 1]$ ，码率和信道容量的单位都为比特。 $I(W)$ 与 $Z(W)$ 满足这样的关系：当且仅当 $Z(W) \approx 0$ 时， $I(W) \approx 1$ ；当且仅当 $Z(W) \approx 1$ 时， $I(W) \approx 0$ 。

当 W 为对称信道时， $I(W)$ 为香农容量。所谓对称性信道。即满足任意 $y \in Y$ ， $W(y|0) = W(-y|1)$ 。二进制对称信道（Binary Symmetric Channel, BSC）和二进制删除信道（Binary Erasure Channel, BEC）都是满足对称性的 B-DMC。二进制对称信道 BSC 即：对于 $Y = \{0,1\}$ ，满足 $W(0|0) = W(1|1)$ 且 $W(1|0) = W(0|1)$ 的 B-DMC，二进制删除信道 BEC 即：对于 $y \in Y$ ，满足 $W(y|0)W(y|1) = 0$ 或 $W(y|0) = W(y|1)$ 的 B-DMC。

这里简称行向量 (a_1, a_2, \dots, a_N) 为 a_1^N ，对于给定的向量 a_1^N ，它的子向量 (a_i, \dots, a_j) 表示为： $a_i^j, i \leq 1, j \leq N$ 且 $i \leq j$ 。给定 a_1^N 和 $A \subset \{1, \dots, N\}$ ，用 a_A 来表示子向量 $(a_i : i \in A)$ 。定义 $a_{1,o}^j$ 表示奇数索引的子向量 $(a_k : 1 \leq k \leq j; k \text{ odd})$ ；定义 $a_{1,e}^j$ 表示偶数索引的子向量 $(a_k : 1 \leq k \leq j; k \text{ even})$ 。例如，对于向量 $a_1^5 = (5, 4, 6, 2, 1)$ ，有 $a_2^4 = (4, 6, 2)$ ， $a_{1,e}^5 = (4, 2)$ ， $a_{1,o}^4 = (5, 6)$ 。全零向量则记为 0_1^N 。

在这里所讨论的向量、矩阵的运算均基于二元域，即 GF(2)。记 \oplus 为模 2 加，记 \otimes 为克罗内克积（Kronecker Power）。定义一个 $m \times n$ 的矩阵 $A = [A_{ij}]$ 和 $r \times s$ 的矩阵 $B = [B_{ij}]$ ，则矩阵 A 与 B 的克罗内克积为：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{1n}B \\ \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{mn}B \end{bmatrix}$$

记 $A^{\otimes n}$ 表示 A 的 n 次克罗内克积，有递归式 $A^{\otimes n} = A \times A^{\otimes(n-1)}$ ， $n \geq 1$ ，并定义 $A^{\otimes 0} = [1]$ 。用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数， 1_A 表示集合 A 的指示函数，若 $x \in A$ ，则 $1_{A(x)} = 1$ ；若 $x \notin A$ ，则 $1_{A(x)} = 0$ 。

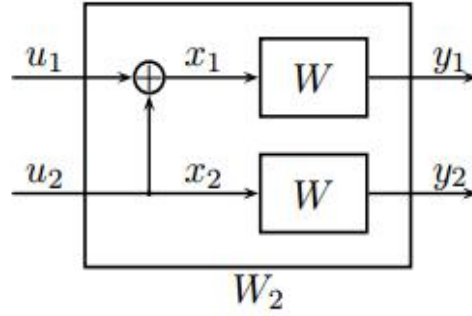
2.2 信道极化现象

2.2.1 信道结合

信道极化首先要经过信道结合。信道结合是指二进制离散信道 W 的 N 个独立副本，通过递归方式生成信道 $W_N: X^N \rightarrow Y^N$ ，其中 $N = 2^n, n \geq 0$ 。

递归从第 0 级（n=0）开始，此时只有一个 W，并定义 $W_1 = W$ 。递归的第一级（n=1）是结合 W 的两个独立副本 W_1 ，可获得信道： $X^2 \rightarrow Y^2$ ，如图 2.1 所示， W_2 的转移概率为：

$$W_2(y_1, y_2 | u_1, u_2) = W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2) \quad (2.3)$$

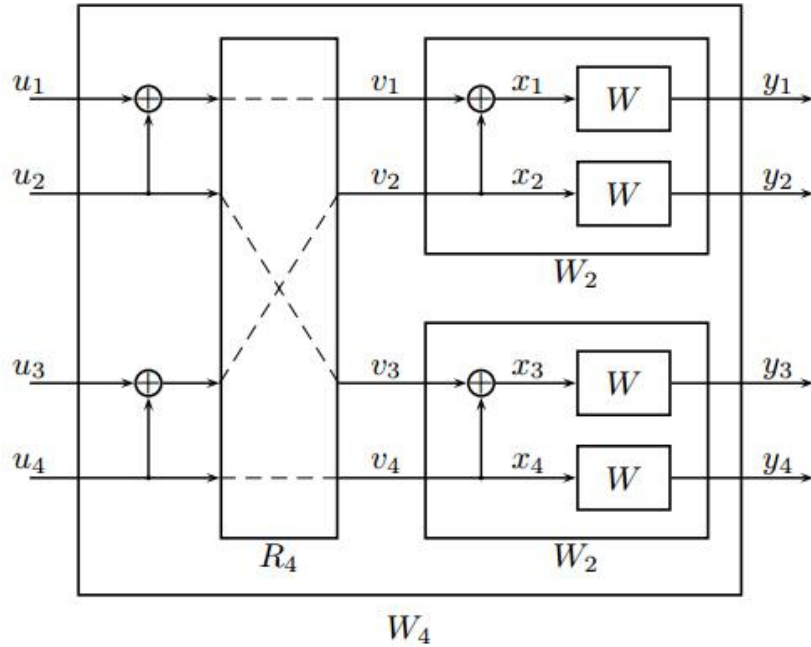
图 2.1 信道 W_2

第 2 级 ($n=2$) 递归如图 2.2 所示, 信道 W 的两个独立副本 W_2 相结合产生信道 W_4 : $X^4 \rightarrow Y^4$, W_4 的转移概率为:

$$W_4(y_1^4 | u_1^4) = W_2(y_1^2 | u_1 \oplus u_2, u_3 \oplus u_4) W_2(y_3^2 | u_2, u_4) \quad (2.4)$$

在图 2.2 中, R_4 完成从 (s_1, s_2, s_3, s_4) 到 $v_1^4 = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ 的置换操作 (排序)。从信道 W_4 的输入 W^4 的输入的映射 $u_1^4 \rightarrow x_1^4$ 可用公式表示为 $x_1^4 = u_1^4 G_4$ 。其中:

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。 W_4 \text{ 和 } W^4 \text{ 的转移概率之间的关系为: } W_4(y_1^4 | u_1^4) = W^4(y_1^4 | u_1^4 G_4)。$$

图 2.2 信道 W_4

递归结构的一般形式如图 2.3 所示。信道 W 的两个独立副本 $W_{N/2}$ 相结合产生信道 W_N 。

原始信息向量 u_1^N 进入信道 W_N ，首先被转换为 s_1^N ： $s_{2i-1} = u_{2i-1} \oplus u_{2i}$ ， $s_{2i} = u_{2i}$ ， $1 \leq i \leq N/2$ 。 R_N 表示比特反转排序操作，输入为 s_1^N ，输出为 $v_1^N = (s_1, s_3, \dots, s_{N-1}, s_2, s_4, \dots, s_N)$ 。 v_1^N 作为两个独立信道 $W_{N/2}$ 的输入。

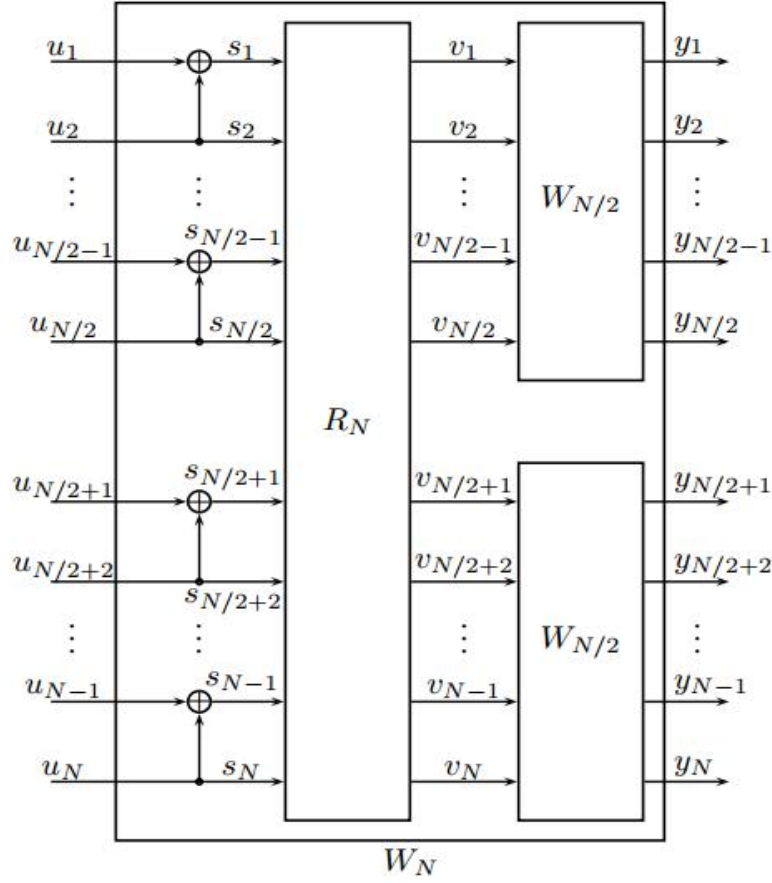


图 2.3 信道 W_N 的递归结构

通过观察可得映射 $u_1^N \rightarrow v_1^N$ 是二元域 $GF(2)$ 上的线性变换。通过归纳可得整体映射 $u_1^N \rightarrow x_1^N$ 是由合成信道 W_N 的输入到原始信道 W^N 的映射，其映射过程也是线性变换。故而有 $x_1^N = u_1^N G_N$ ，称 G_N 为大小为 N 的生成矩阵。信道 W_N 和 W^N 的转移概率之间关系如下：

$$W_N(y_1^N | u_1^N) = W^N(y_1^N | u_1^N G_N) \quad (2.5)$$

其中 $y_1^N \in Y^N$ ， $u_1^N \in X^N$ 。对于任何的 $N = 2^n$ ， $n \geq 0$ ， G_N 等效于 $B_N F^{\otimes n}$ ， B_N 是位反转的置换矩阵， $F \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

2.2.2 信道分裂

极化码的信道分裂是信道极化的第二阶段，它是指将合成信道 W_N 分裂为一组 N 个二进制输入的坐标信道（Coordinate Channels） $W_N^{(i)}: X \rightarrow Y^N \times X^{i-1}$ ， $1 \leq i \leq N$ ，用转移概率来描

述，即为：

$$W_N^i(y_1^N, u_1^{i-1} | u_i) = \sum_{u_{i+1}^N \in \mathcal{X}^{N-i}} \frac{1}{2^{N-1}} W_N(y_1^N | u_1^N) \quad (2.6)$$

式（2-6）中， u_i 表示 $W_N^{(i)}$ 的输入， (y_1^N, u_1^{i-1}) 表示 $W_N^{(i)}$ 的输出。

如图 2.4 所示，描述了信道 W_8 的分裂过程，信道分裂也是一个递归过程。首先，信道 W_8 分裂为两个独立的信道 W_4 ，然后信道 W_4 又分裂为两个独立的信道 W_2 ，最后信道 W_2 分裂为两个独立的信道 W 。最终有 8 个独立的信道从信道 W_8 中分裂出来，信道分裂过程到此结束。

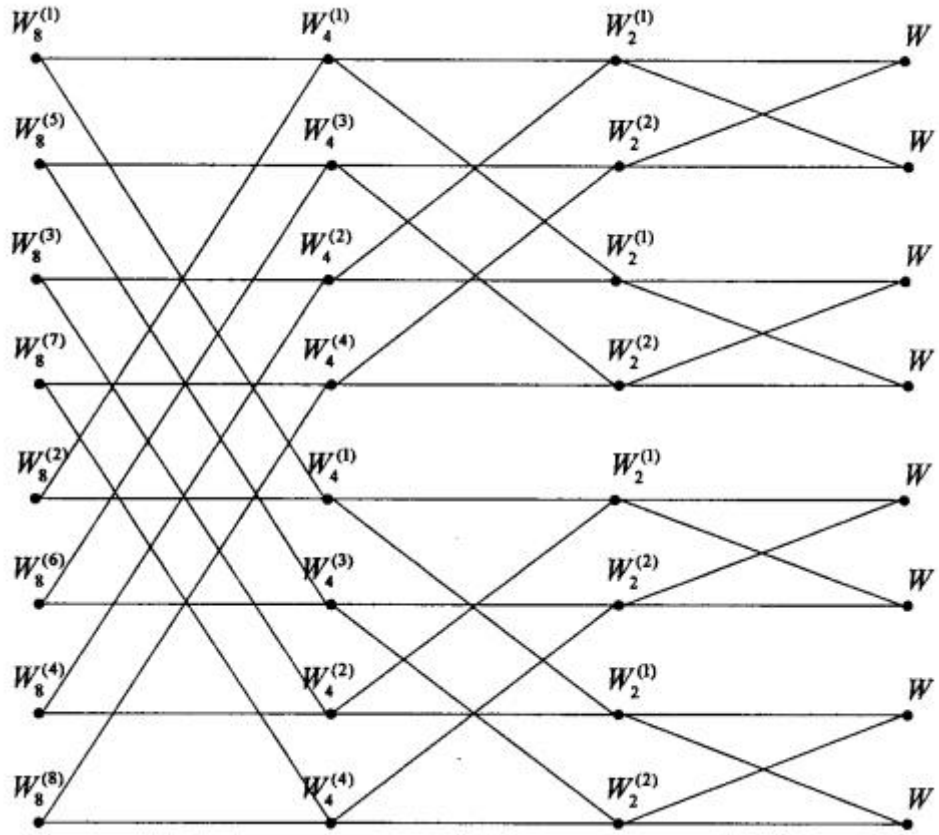


图 2.4 信道 W_8 的分裂

更一般的，奇序分裂子信道和偶序分裂子信道的转移概率由两个递归式得到。对于任何 $n \geq 0$ ， $N = 2^n$ ， $1 \leq n \leq N/2$ ，有：

$$\begin{aligned} & W_N^{(2i-1)}(y_1^N, u_1^{2i-2} | u_{2i-1}) \\ &= \sum_{u_{2i}} \frac{1}{2} W_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, u_{1,e}^{2i-2} \oplus u_{1,e}^{2i-2} | u_{2i-1} \oplus u_{2i}) \cdot W_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, u_{1,e}^{2i-2} | u_{2i}) \quad (2.7) \\ & W_N^{(2i)}(y_1^N, u_1^{2i-1} | u_{2i}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} W_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, u_{1,o}^{2i-2} \oplus u_{1,e}^{2i-2} | u_{2i-1} \oplus u_{2i}) \cdot W_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, u_{1,e}^{2i-2} | u_{2i}) \quad (2.8)$$

2.2.3 信道极化

随着信道的结合与分裂，会出现一些特殊的现象，一部分信道的信道容量 $I(W_N^{(i)})$ 趋近于“1”，而另外一部分信道的信道容量 $I(W_N^{(i)})$ 趋近于“0”，这种特殊的现象称为信道极化现象。

定理 2.1^[10]：对于任意 B-DMC 信道 W 与任意 $\delta \in (0,1)$ ，当 N 以 2 的幂次趋近于无穷大时，极化信道 $W_N^{(i)}$ 中，满足 $I(W_N^{(i)}) \in (1-\delta,1]$ 的信道数占总信道数 N 的比例趋近于 $I(W)$ ；满足 $I(W_N^{(i)}) \in [0,\delta)$ 的信道所占比例趋近于 $1-I(W)$ 。

在信道编译码的研究中，极化速率是一个很重要的参数，它一般用巴塔恰里亚参数来表示：

$$Z(W_N^{(i)}) = \sum_{y_1^N \in Y^N} \sum_{u_1^{i-1} \in X^{i-1}} \sqrt{W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | 0) W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | 1)} \quad (2.9)$$

定理 2.2：对于任意 B-DMC 信道 W ，且对任意 $R < I(W)$ ，存在一个序列集合 $A_N \subset \{1, \dots, N\}$ ， $N \in \{1, 2, \dots, 2^n, \dots\}$ ，对所有 $i \in A_N$ 有 $|A_N| \geq NR$ 且 $Z(W_N^{(i)}) \leq O(N^{-5/4})$ 。

2.3 本章小结

本章内容是研究极化码编译与译码技术的基础，主要介绍了一些预备知识，对于极化码的构造、编码算法和译码算法中可能用到的变量进行了说明。详细地分析了在码长 N 趋近于无穷大时出现的信道极化现象，包括信道结合与信道分裂两个过程，推导了这一过程的实现步骤，给出了关于信道极化的两个定理。极化码的构造是基于信道极化现象产生的，关于信道极化部分的理论为接下来极化码的编码与译码算法的研究打下基础。

第 3 章 极化码的编码与译码研究

3.1 极化码的编码

基于信道极化理论构造能够达到信道容量 $I(W)$ 的码字，称为极化码。极化码的编码思想是：构造一个编码系统，经过信道结合、信道分裂的过程，选出 $Z(W_N^{(i)})$ 等于 0 的那部分信道 $W_N^{(i)}$ 来传输消息比特，其余部分信道传输发送端和接收端都已知的比特。极化码是线性分组码，因此可以通过写出其生成矩阵来完成编码：

$$x_1^N = u_1^N G_N \quad (3.1)$$

其中 u_1^N 为原始比特序列， x_1^N 为经过编码后的比特序列， G_N 为生成矩阵。 $N = 2^n$ 。

可靠性在极化码的编码过程中是一个非常重要的因素，在实际应用中，我们所关心的也是在信息传输过程中是否能可靠的传输。已知极化码编码实质就是选取部分可靠信道来传输信息比特，另外部分不可靠信道传输收发都已知的比特。那么极化码的编码过程大致可以分为四步：首先通过极化信道的可靠性估计得到各个信道的可靠性；然后通过得到的可靠性数据选取 K 个可靠性较大的信道传输消息比特，其余 $N-K$ 个信道传输冻结比特。接着构造生成矩阵，最后生成极化码。

3.1.1 极化信道可靠性估计

对于 BEC 信道，Arikan 给出了通过计算巴氏参数的方法来进行信道的可靠性估计。

$$\begin{aligned} Z(W_N^{(i)}) &= \sum_{y_0^{N-1}, u_0^{(i-1)}} W_N^{(i)}(y_0^{N-1}, u_0^{i-1} | 1) \sqrt{L_N^{(i)}(y_0^{N-1}, u_0^{(i-1)})} \\ &= \sum_{y_0^{N-1}, u_0^{i-1}, u_{i+1}^{N-1}} \frac{1}{2^{N-1}} W_N^{(i)}(y_0^{N-1} | u_0^{i-1}, 1, u_{i+1}^{N-1}) \sqrt{L_N^{(i)}(y_0^{N-1}, u_0^{i-1})} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$Z(W_N^{(i)})$ 越小，则对称容量 $I(W_N^{(i)})$ 越大，信道的可靠性越大；相反， $Z(W_N^{(i)})$ 越大，对称容量 $I(W_N^{(i)})$ 越小，信道的可靠性越小。

然而巴氏参数的适用范围是 BEC 信道，对于非 BEC 信道，不能得到精确的巴氏参数，这时需要采用其他方法来进行信道的可靠性估计，主要有密度进化法或高斯近似法。

定义错误概率^[10]：对信道 W 的 N 个独立时隙上进行信道极化以后，得到极化信道 $W_N^{(i)}$ ，其中 $i=1,2,3\dots N$ 。令事件 A_i 表示序号为 i 的极化信道 $W_N^{(i)}$ 所承载的比特经过传输后接收发生错误，即：

$$A_i = \{u_1^N, y_1^N : W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | u_i) < W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | u_i \oplus 1)\} \quad (3.3)$$

则极化信道 $W_N^{(i)}$ 的错误概率为 $P(A_i)$ 。

(1) 密度进化 (DE) 方法

对于一般的 B-DMC 信道，无法计算得到精确的巴氏参数，一般采用密度进化 (DE)

法来计算各个信道的错误概率，从而进行信道可靠性估计。

定义对数似然比（LLR）为：

$$L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) = \ln \left(\frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 1)} \right) \quad (3.4)$$

将一个信息比特的对数似然比看做一个随机变量，用 $a(z)$ 来表示此随机变量的概率密度函数。假设发送的为全零序列，则该信息比特判决值错误的概率为：

$$P_e = \int_{-\infty}^0 a(z) dz \quad (3.5)$$

在对第 i 个子信道进行可靠性的计算时，用 a_w 表示信道 W 端的对数似然比的概率密度函数，用 $a_N^{(i)}$ 表示接收比特的对数似然比的概率密度函数。根据密度进化理论，假设发送的比特全为零，则第 i 个信道的对数似然比可以根据递归运算计算如下：

$$a_{2N}^{(2i-1)} = a_N^{(i)} \quad a_N^{(i)} \quad (3.6)$$

$$a_{2N}^{(i)} = a_N^{(i)} * a_N^{(i)} \quad (3.7)$$

$$a_1^{(1)} = a_w \quad (3.8)$$

由概率密度函数 $a_N^{(i)}$ 和式（3.5）可以计算得到各个极化子信道 $W_N^{(i)}$ 的错误概率 $P(A_i)$ ，错误概率越高则此信道的可靠性越低。

（2）高斯近似（GA）方法

通过密度进化法计算 $P(A_i)$ 来进行信道可靠性估计理论上适用于任何的 B-DMC 信道，但是，在实际执行算法时，此方法计算复杂度很高，实现起来较为困难。在实际的研究场景中，我们更常用的信道模型为高斯白噪声信道，在此信道下，用一组方差为均值 2 倍的高斯分布来近似表示密度进化方法中对数似然比的概率密度函数，可以将 DE 方法进行简化，大大降低了计算量，这种简化后的方法即为高斯近似（GA）法。

由高斯近似理论可知，若 $a_{N/2}^{(i)}$ 服从独立的高斯分布，则由式（3.7）的计算可知输出 $a_N^{(i)}$ 也服从高斯分布，由式（3.6）的计算可知输出 $a_{2N}^{(2i-1)}$ 也非常接近于高斯分布。高斯分布由其均值和方差来决定，但必须满足密度进化的对称条件^[12]。对于均值为 m ，方差为 σ^2 的高斯分布，该对称条件可以表示为： $\sigma^2 = 2ma$ 。因此，在高斯近似中，仅需要考虑均值 m 。用 $N(m_N^{(i)}, 2m_N^{(i)})$ 表示 $a_N^{(i)}$ ，则式（3.6）、（3.7）、（3.8）中的对数似然比的计算可以用高斯近似表示为：

$$m_{2N}^{(2i)} = \phi^{-1} \left(1 - \left[1 - \phi(m_N^{(i)})^2 \right] \right) \quad (3.9)$$

$$m_{2N}^{(2i)} = 2m_N^{(i)} \quad (3.10)$$

$$m_1^{(1)} = 2 / \sigma^2 \quad (3.11)$$

其中函数：

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh \frac{u}{2} \cdot \exp\left(-\frac{(u-x)^2}{4x}\right) du, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$\phi(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上单调递减, $\phi(0)=1, \phi(\infty)=0$, 用表示其反函数, 一般情况下, 函数 $\phi(x)$ 可以近似计算为:

$$\phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{x}} (1 - \frac{10}{7x} \exp(-\frac{x}{4})), & x \geq 10 \\ \exp(-0.4527x^{-0.86} + 0.0218), & 0 < x < 10 \end{cases} \quad (3.13)$$

计算得到 $m_N^{(i)}$, 各极化信道 $W_N^{(i)}$ 在发送全零序列时对应的接收信号的对数似然比函数服从分布 $N(m_N^{(i)}, 2m_N^{(i)})$, 于是错误概率可计算如下:

$$P(A_i) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\sqrt{\pi m_N^{(i)}}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - m_N^{(i)})^2}{4m_N^{(i)}}\right) dx \quad (3.14)$$

错误概率为信道可靠性的度量值。对于 BEC 信道, 可通过计算巴氏参数来评估各信道的错误概率, 对于一般的 B-DMC 信道通过密度进化法来计算错误概率, 对于更加实际的高斯白噪声信道, 一般用高斯近似法来计算错误概率从而进行各个信道可靠性的估计。

3.1.2 比特混合

通过信道的可靠性估计可以得到各个信道的可靠性, 根据所得结果, 选取可靠性较大的 K 个子信道做为信息位, 传输信息比特, 剩余的 $N-K$ 个子信道做为冻结位, 传输收发端都已知的冻结比特。其中巴氏参数 $Z(W)$ 越小, 信道容量 $I(W)$ 越大, 信道的可靠性越高。

3.1.3 构造生成矩阵

生成矩阵表示为:

$$G_N = B_N F^{\otimes n} \quad (3.15)$$

假设对于任意的 $n \geq 0$, 都有 $N = 2^n$, 用 I_K 表示 K ($K \geq 1$) 维单位矩阵。由图 2.4 可得, 对于 $N \geq 2$ 都有:

$$G_N = (I_{N/2} \otimes F) R_N (I_2 \otimes G_{N/2}) \quad (3.16)$$

其中 $G_1 = I_1$ 。由 $(I_{N/2} \otimes F) R_N = R_N (F \otimes I_{N/2})$, 式 (3.16) 可表示为 G_N 的另一种递归公式:

$$G_N = R_N (F \otimes I_{N/2}) (I_{N/2} \otimes F) = R_N (F \otimes G_{N/2}) \quad (3.17)$$

由式 (3.17) 可以更容易的看出递归关系, 将 $G_{N/2} = R_{N/2} (F \otimes G_{N/4})$ 代入式 (3.17) 可以得到:

$$G_N = R_N(F \otimes (R_{N/2}(F \otimes G_{N/4}))) = R_N(I_2 \otimes R_{N/2})(F^{\otimes 2} \otimes G_{N/4}) \quad (3.18)$$

因为 $(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$ ，令 $A = I_2$ ， $B = R_{N/2}$ ， $C = F$ ， $D = F \otimes G_{N/4}$ ，最终可以得出：

$$G_N = B_N F^{\otimes n} \quad (3.19)$$

其中 $F^{\otimes n}$ 表示对矩阵 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的 n 次克罗内克积，有递归式 $F^{\otimes n} = F \otimes F^{\otimes(n-1)}$ ， $F^{\otimes 1} = F$ 。 B_N 是一个排序矩阵，用于比特翻转运算。 B_N 的递归式定义为：

$$B_N = R_N(I_2 \otimes B_{N/2}) \quad (3.20)$$

其中 I_2 为二维单位阵， $B_2 = I_2$ ，矩阵 R_N 为置换矩阵，对输入序列完成奇序序列与偶序序列的重新排列，即先排奇序序列再排偶序序列。例如：

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_N) \times R_N = (u_1, u_3, u_5, \dots, u_{N-1}, u_2, u_4, u_6, \dots, u_N)$$

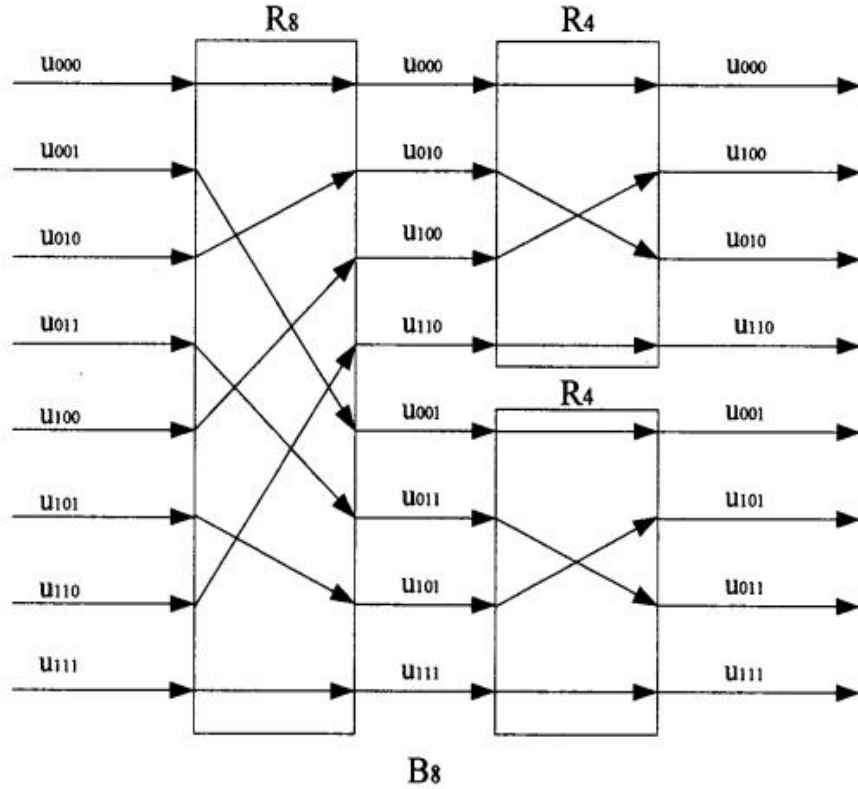


图 3.1 N=8 的比特翻转运算示意图

图 3.1 为 $N=8$ 时的比特翻转运算示意图。用 u_1^8 表示 $GF(2)$ 域的任意向量。根据比特翻转的思想，将 u_1^8 表示成二进制为 $(u_{000}, u_{001}, u_{010}, u_{011}, u_{100}, u_{101}, u_{110}, u_{111})$ ，因为 $u_1^8 B_8 = u_1^8 R_8 (I_2 \otimes B_4)$ ，首先对 u_1^8 进行 R_8 运算，结果为 $u_1^8 R_8 (u_{000}, u_{010}, u_{100}, u_{110}, u_{001}, u_{011}, u_{101}, u_{111})$ 。接着将 $u_1^8 R_8$ 分为两个向量，分别为： $c_1^4 = (u_{000}, u_{010}, u_{100}, u_{110})$ ， $d_1^4 = (u_{001}, u_{011}, u_{101}, u_{111})$ 。对 (c_1^4, d_1^4) 进行 $I_2 \otimes B_4$ 操作，最终运算结果为： $u_1^8 B_8 = (u_{000}, u_{100}, u_{010}, u_{110}, u_{001}, u_{101}, u_{011}, u_{111})$ ，将其再转化为十进制的表示方式，即完

成了比特翻转操作。

3.1.4 构造极化码

极化码是基于信道极化现象构造的，它的编码主要由生成矩阵 G_N 来决定，选择信道容量接近于“1”的信道作为信息位。

对于编码长度为 $N = 2^n$ ($n \geq 0$) 的任意极化码，都是以相同的方式进行编码，即：

$$x_1^N = u_1^N G_N \quad (3.21)$$

其中 G_N 为 N 阶生成矩阵。假设 A 是 $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ 的一个子集，则式 (3.21) 可以写成：

$$x_1^N = u_A G_N(A) \oplus u_{A^c} G_N(A^c) \quad (3.22)$$

$G_N(A)$ 为 G_N 的一个子集，大小为矩阵 A 的行数。

如果固定 A 和 u_{A^c} ，但是把 u_A 看做一个自由变量，那么我们可以得到从可用的信息集合 u_A 到分组码 x_1^N 的一种映射^[13]，这叫做线性陪集码，由 $G_N(A)$ 和 $u_{A^c} G_N(A^c)$ 决定的配给来构造。它的参数可以表示为 (N, K, A, u_{A^c}) 。其中， N 表示编码长度， $N = 2^n$, ($n \geq 0$)。 K 表示信息位长（即 A 的长度）， A 表示哪些位可以作为信息位， u_{A^c} 表示固定位的内容， K/N 定义为码率。

例如：对于 $(4, 2, \{2, 4\}, (1, 0))$ 极化码，它的编码形式为：

$$x_1^4 = u_1^4 G_4 = (u_2, u_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + (1, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假设信息位为 $(u_2, u_4) = (1, 1)$ ，则编码结果为： $x_1^4 = (1, 1, 0, 1)$ 。

3.2 极化码的译码算法

信道译码是信道编码的逆过程，是通信系统模型中必不可少的一部分，有重要的作用，影响了整个通信系统的性能。

极化码的译码算法最早是由 E.Arikan 提出来的，即串行抵消（Successive Cancellation, SC）译码算法^[15]，它是最基本的译码算法。由极化码的编码原理可得，极化码的构造实际上就是一个极化信道选择的问题，而极化信道的选择是基于最优化的 SC 译码算法性能。由极化信道转移概率的公式可知，各个信道并不是完全独立的，而是存在着一定的依赖关系，这种关系表现为：序号大的信道依赖于所有比其序号小的信道。基于这种关系，使用 SC 译码算法时，需要假设之前所有步骤得到的译码结果都是正确的。在这种译码算法下，信道可以被证明能够达到香农极限。因此，极化码的译码算法应该是基于 SC 译码算法的，只有在这种情况下，才能实现当码长无限长时，信道可以达到理论上信道容量的最大值。

3.2.1 SC 译码算法

对于形式为 (N, K, A, u_{A^c}) 的陪集码，信息向量 u_1^N 由信息位 u_A 和固定位 u_{A^c} 两部分组成。

信息向量 u_1^N 经过编码后生成码字 x_1^N ，生成的码字再经过信道 W^N 的传输最后输出向量为 y_1^N 。译码的主要任务就是生成信息向量 u_1^N 的一个估计值 \hat{u}_1^N 。其中 A, u_{A^c}, y_1^N 都是已知的。

在进行极化码的译码时，由 (3.22) 的转移概率可知，序号为 i 的信道 $W_N^{(i)}$ 的输出包括接收向量 y_1^N 和前 $i-1$ 个信息向量 u_1^{i-1} 两部分。

$$W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | u_i) \triangleq \sum_{u_{i+1}^N \in X^{N-i}} \frac{1}{2^{N-i}} W_N(y_1^N | u_1^N) \quad (3.23)$$

对于 $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 的信息向量 u_i 的估计值 \hat{u}_i ，可以根据 y_1^N 和 u_1^{i-1} 通过计算 $\hat{u}_i = 0$ 和 $\hat{u}_i = 1$ 时的转移概率进行逐个的判断，这种方法叫做 SC 译码算法。对于取值范围为 $1 \sim N$ 的信道，各个比特的估计值 \hat{u}_i 由以下公式得到：

$$\hat{u}_i = \begin{cases} h_i(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}), & \text{if } i \in A \\ u_i, & \text{if } i \in A^c \end{cases} \quad (3.24)$$

当 $i \in A^c$ 时，表明这部分比特为收发端都已知的冻结位，故可直接判断 $\hat{u}_i = u_i$ ；当 $i \in A$ 时，表明这部分比特为传输信息的信息位。判决函数为：

$$h_i(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) = \begin{cases} 0, & \text{if } L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) \geq 0 \\ 1, & \text{if } L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

定义对数似然比（Log-likelihood Ratio, LLR）^[14]为：

$$L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) = \ln \left(\frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 1)} \right) \quad (3.26)$$

LLR 的计算可通过递归来完成。定义函数 f 和 g 如下：

$$f(a, b) = \ln \left(\frac{1 + e^{a+b}}{e^a + e^b} \right) \quad (3.27)$$

$$g(a, b, u_s) = (-1)^{u_s} a + b \quad (3.28)$$

其中 $a, b \in R, u_s \in \{0, 1\}$ 。LLR 的递归算法可以借助函数 f 和 g 得到一个更直接的表达式：

$$L_N^{(2i-1)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-2}) = f(L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,o}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}), L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2})) \quad (3.29)$$

$$L_N^{(2i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-1}) = g(L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,o}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}), L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2}), \hat{u}_{2i-1}) \quad (3.30)$$

按照这种方法，一个长度为 N 的 LLR 计算就可以被分为两个长度为 $N/2$ 的计算，这个递归直到 $N=1$ 时结束，此时达到了信道 W 端。这时， $L_1^{(1)}(y_j) = \ln \frac{W(y_j | 0)}{W(y_j | 1)}$ 。可以根据信道的转移概率和接收到的值计算出结果。

为了更加形象的说明 SC 译码过程，现在以码长 $N=4$ ，信息位长 $K=3$ 为例，来详细地说明译码过程。如图 3.2 所示， u_1 表示冻结比特，假设为 0； u_2 、 u_3 、 u_4 均为消息比特，

同样假设全为 0。最右边的 $L_1^{(1)}(y_i)$ 表示接受来自信道的对数似然比，中间的一些符号表示中间的估计值以及译码结果。

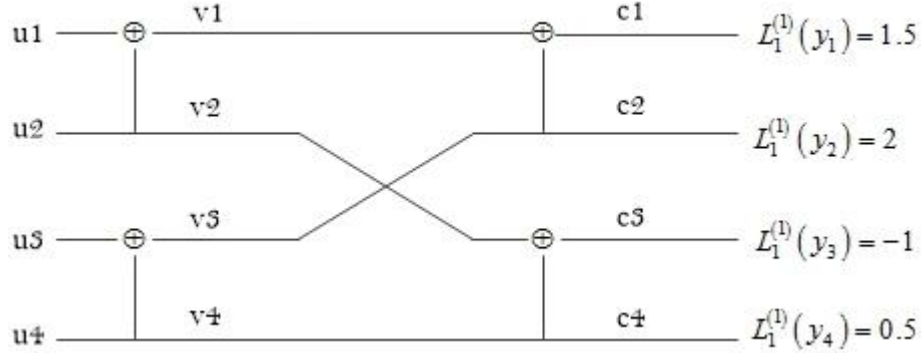


图 3.2 SC 译码的初始状态

我们知道在进行信道编码的时候，计算转移概率是在图中按照从左到右的顺序依次进行计算，但是在进行译码的时候，是按照从右向左的顺序来进行递归。

SC 译码算法首先计算 u_1 的似然比 $L_4^1(y_1^4)$ 。如图 3.3 所示，由式 (3.26) 和式 (3.28) 可将其分为两个似然比 $L_2^{(1)}(y_1^2)$ 和 $L_2^{(1)}(y_3^4)$ ，分别为：

$$L_2^{(1)}(y_1^2) = f(L_1^{(1)}(y_1), L_1^{(1)}(y_2)) = \ln \left(\frac{1 + e^{1.5+2}}{e^{1.5} + e^2} \right) = 1.06 \quad (3.31)$$

$$L_2^{(1)}(y_3^4) = f(L_1^{(1)}(y_3), L_1^{(1)}(y_4)) = \ln \left(\frac{1 + e^{-1+0.5}}{e^{-1} + e^{0.5}} \right) = -0.23 \quad (3.32)$$

于是可以计算出 $L_4^1(y_1^4)$ ：

$$L_4^1(y_1^4) = f(L_2^{(1)}(y_1^2), L_2^{(1)}(y_3^4)) = \ln \left(\frac{1 + e^{1.06-0.23}}{e^{1.06} + e^{-0.23}} \right) = -0.11 \quad (3.33)$$

尽管计算得到的 $L_4^1(y_1^4) < 0$ ，但由于 u_1 为冻结比特，我们仍然将其判决为 $\hat{u}_1 = 0$ 。

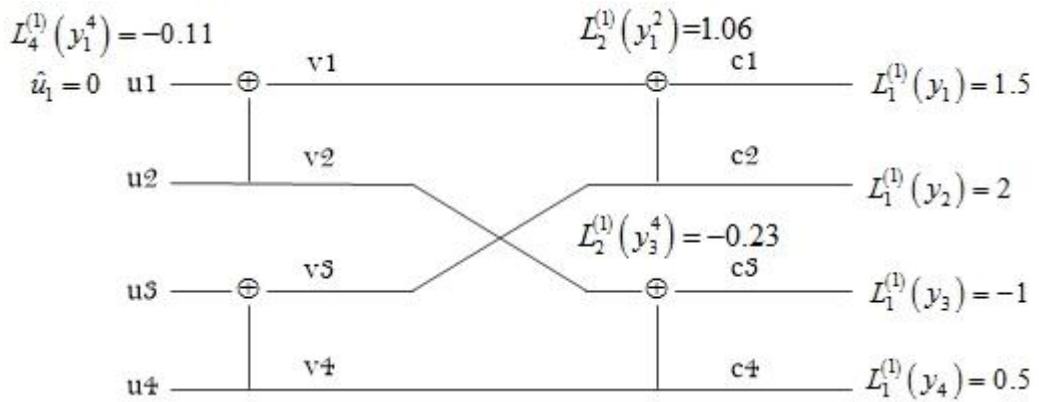


图 3.3 SC 译码算法对 u_1 译码

接下来对 u_2 进行译码，如图 3.4 所示，由式 (3.27) 和 (3.29) 可得：

$$L_4^{(2)}(y_1^4, \hat{u}_1) = (-1)^{\hat{u}_1} L_2^{(1)}(y_1^2) + L_2^{(1)}(y_3^4) = (-1)^0 \times 1.06 + ((-0.23) = 0.83 \quad (3.34)$$

因为 u_2 是消息比特且 $L_4^{(2)}(y_1^4, \hat{u}_1) > 0$ ，故 u_2 可判决为 $\hat{u}_2 = 0$ ，此处译码正确。

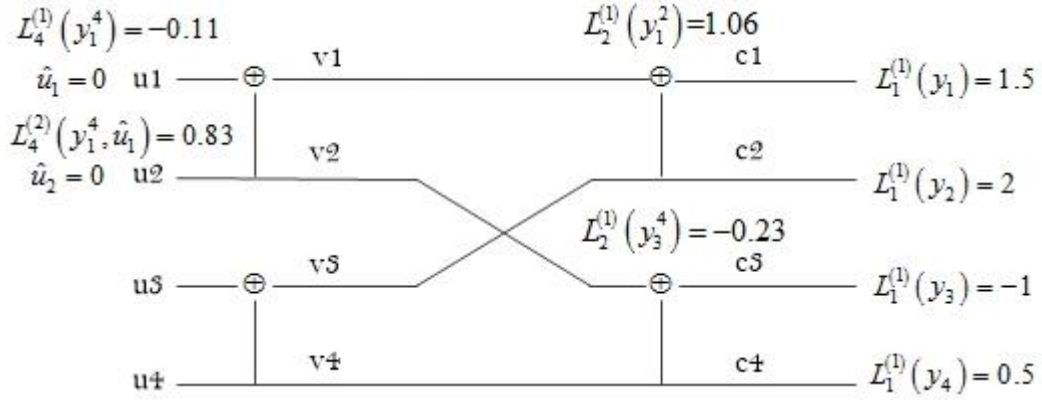


图 3.4 SC 译码算法对 u_2 译码

接下来对 u_3 进行译码，如图 3.5 所示，由式 (3.26) 和 (3.28) 可得：

$$L_4^{(3)}(y_1^4, \hat{u}_1^2) = f(L_2^{(2)}(y_1^2, \hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2), L_2^{(2)}(y_3^4, \hat{u}_2)) \quad (3.35)$$

需要先求得 $L_2^{(2)}(y_1^2, \hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2)$ ，由公式 (3.27) 和 (3.29) 可得：

$$L_2^{(2)}(y_1^2, \hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2) = (-1)^{\hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2} L_1^{(1)}(y_1) + L_1^{(1)}(y_2) = (-1)^0 \times 1.5 + 2 = 3.5 \quad (3.36)$$

再求 $L_2^{(2)}(y_3^4, \hat{u}_2)$ ，由公式 (3.27) 和 (3.29) 可得：

$$L_4^{(3)}(y_1^4, \hat{u}_1^2) = (-1)^{\hat{u}_2} L_1^{(1)}(y_3) + L_1^{(1)}(y_4) = (-1)^0 \times (-1) + 0.5 = -0.5 \quad (3.37)$$

将式 (3.35) 和 (3.36) 的结果代入式 (3.34) 可得：

$$L_4^{(3)}(y_1^4, \hat{u}_1^2) = f(3.5, -0.5) = \ln \left(\frac{1 + e^{3.5-0.5}}{e^{3.5} + e^{-0.5}} \right) = -0.47 \quad (3.38)$$

因为 u_3 是消息比特且 $L_4^{(3)}(y_1^4, \hat{u}_1^2) < 0$ ，故 u_3 判决为 $\hat{u}_3 = 1$ ，此处译码错误。

最后对 u_4 进行译码，如图 3.5 所示，由式 (3.27) 和 (3.29) 可得：

$$\begin{aligned} L_4^{(4)}(y_1^4, \hat{u}_1^3) &= (-1)^{\hat{u}_3} L_2^{(2)}(y_1^2, \hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2) + L_2^{(2)}(y_3^4, \hat{u}_2) \\ &= (-1)^1 \times 3.5 + (-0.5) \\ &= -4 \end{aligned} \quad (3.39)$$

因为 u_4 是消息比特且 $L_4^{(4)}(y_1^4, \hat{u}_1^3) < 0$ ，故 u_4 判决为 $\hat{u}_4 = 1$ ，此处译码错误。

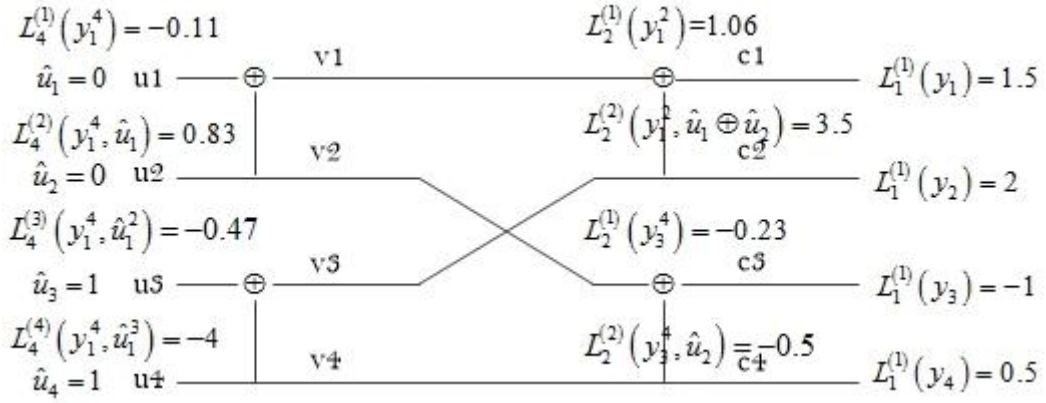


图 3.5 SC 译码算法对 u3 译码

从 SC 译码算法的实例中我们进一步了解了译码的算法。SC 译码算法以 LLR 为准则，对每一个比特进行判决，按照比特从小到大的顺序依次进行。SC 译码算法的计算复杂度较低，仅为 $O(N \log N)$ ，与码长近似呈线性关系。当码长 N 趋于无穷大的时候，信道基本可实现理想的极化（即部分信道容量趋近于 0，部分趋近于 1）。此时信道在传输信息时基本不受到干扰，可达到理论上的信道容量，且误码率很低。但是，在有限码长的情况下，信道没有完全极化，导致译码错误概率较大。由于 SC 译码算法每一个比特的译码要在前 $i-1$ 个译码结果上进行计算，当译码出现错误时，会导致之后的一系列译码都出现错误，因此，在较短码长的情况下，采用 SC 译码算法会使得错误概率较大，译码性能不理想。

3.2.2 SCL 译码算法

在码长有限的情况下，SC 译码算法不能达到理想的性能，故提出了 SCL 算法，对 SC 译码算法的性能有了进一步的改善。

如果将极化码的译码过程用一个满二叉树来表示，译码的过程实质上就是在二叉树上寻找合适的路径。

SCL 译码算法在 SC 译码算法的不足之上做到了改进。SC 译码算法是深度优先的，而 SCL 译码算法是广度优先的。它的主要思想是由仅允许选择一条最优路径进行下一步扩展变为尽可能多的选择路径进行下一步的扩展，即 $L \geq 1$ 。SCL 算法同 SC 算法一样，都是从根节点逐层向下进行递归计算，不同点在于，SCL 算法要求每一次选择路径之后应保留足够多的后继路径（每层保留的路径数小于等于 L ）。完成每一层的路径选择之后，选择路径度量值（Path Metrics, PM）最小的 L 条，将它们保存在一个列表中，以便进行下一层次的扩展。所以，这种算法被称作串行抵消列表（Successive Cancellation List, SCL）译码算法， L 称为搜索宽度。当 $L=1$ 时，SCL 算法变为 SC 算法。

如果将译码算法用二叉树的形式表示出来，树上每个节点上的 LLR 值表示与节点相连的两条支路的转移概率的比值。如果同 SC 译码算法一样，用转移概率来表示每条支路，左边为发送“0”比特，右边为发送“1”比特，随着码长的增加，转移概率会越来越小，甚至

会使译码器下溢，故使用转移概率并不是最优的方法，因此，还是应该使用转移概率的对数似然比来表示。

对于 SC 译码算法，它是 SCL 译码算法当 $L=1$ 时的特例。但是当 $L \geq 2$ 时，仅仅依靠 LLR 值无法在 $2L$ 条路径中选择最优的 L 条路径作为后继路径，此时，我们需要重新定义路径度量值（PM）。通过计算每条路径的度量值来选取 L 条后继路径。

在进行译码过程中，每一层都需要搜索 L 条路径，对于任一路径 $l \in \{1, 2, 3, \dots, L\}$ 和任一发送比特 $u_i (i \in \{1, 2, 3, \dots, N\})$ ，它们的路径度量值表示如下：

$$PM_l^{(i)} \triangleq \sum_{j=1}^i \ln(1 + \exp(-(1 - 2\hat{u}_j[l] \cdot L_N^{(j)}))) \quad (3.40)$$

$$\text{其中, } L_N^{(j)}[l] = \ln \frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l] | 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l] | 1)}。$$

如果所有的比特在 $\{0, 1\}$ 上呈现均匀分布，那么对于任意两条路径 $l_1, l_2 \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ ，当且仅当 $PM_{l_1}^{(i)} > PM_{l_2}^{(i)}$ 成立时，有如下关系式：

$$W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l_1] | \hat{u}_i[l_1]) < W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l_2] | \hat{u}_i[l_2]) \quad (3.41)$$

由以上的公式可得，转移概率与路径度量值之间成反比关系。因此可以使用对数似然比在 $2L$ 条路径上挑选最优的 L 条路径，式（3.25）可以表示为：

$$PM_l^{(i)} \approx \begin{cases} PM_l^{(i-1)}, & \text{if } \hat{u}_i[l] = \delta(L_N^{(i)}[l]) \\ PM_l^{(i-1)} + |L_N^{(i)}[l]|, & \text{if } \hat{u}_i[l] \neq \delta(L_N^{(i)}[l]) \end{cases} \quad (3.42)$$

因为译码过程中信息向量包括信息比特和冻结比特，故式（3.27）可改写为：

$$PM_l^{(i)} = \begin{cases} PM_l^{(i-1)}, & \text{if } u_i \text{ is information or frozen bit and } \hat{u}_i[l] = \delta(L_N^{(i)}[l]) \\ PM_l^{(i-1)} + |L_N^{(i)}[l]|, & \text{if } u_i \text{ is information or frozen bit and } \hat{u}_i[l] \neq \delta(L_N^{(i)}[l]) \\ +\infty, & \text{if } u_i \text{ is frozen bit and incorrect value} \end{cases} \quad (3.43)$$

其中 $\delta(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(x))$, $PM_l^{(0)} = 0$ 。对信息比特，判决可以为：

$$\hat{u}_i = \delta(L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1})) \quad (3.44)$$

根据每层计算得到的路径度量值（PM）在 $2L$ 条路径中选取 PM 最小的 L 条后继路径进行下一层递归运算。直至最后一层，选取 PM 最小的路径做为唯一路径，即为译码输出结果。

3.3 本章小结

本章主要研究了极化码的编码与译码算法。由前面几章的内容，我们已经知道极化码的实现是基于信道极化现象的。在编码过程中，着重研究了信道可靠性估计，比特混合，如何构造生成矩阵以及如何构造极化码五部分内容，详细地叙述了极化码的编码过程。在译码部分，主要分析了 SC 译码算法，详细推导并用实例阐述了这一算法的过程。由于 SC 译码算法在码长有限的情况下译码性能并不是很理想，故又进一步研究了 SC 译码算法的改进算法 SCL 算法，推导了此译码方法的实现过程，为下一章节译码性能的分析打下基础。

第 4 章 极化码译码仿真分析

在通信系统中，误码率是一个很重要的概念，它是衡量在规定时间内数据传输的精确度的指标。误码率定义为：

误码率=错误码元数/总码元数

在本次设计中，我们所要构造的系统为数字无线基带传输系统，故误码率可表示为误比特率，二者在意义上是等效的。误比特率（BER）^[16]定义为：

误比特率=错误比特数/总比特数

在接下来的分析中我们主要研究误码率这项指标。

4.1 仿真系统的构建

基于 MATLAB 平台构造一个包含极化码的基带无线通信系统，大致需要包含信源的产生、信道的构造与加噪、信道编码译码等模块，并对译码结果进行误码率分析。仿真框图如下所示：

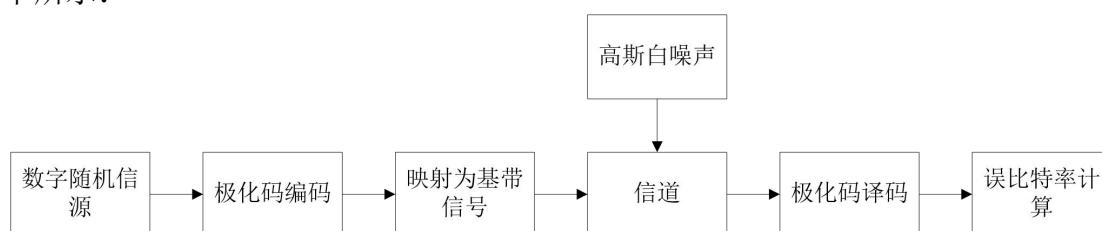


图 4.1 极化码仿真系统框图

数字信源的产生在 MATLAB 中使用 `randint(1,R*N)` 产生 K 个信息位，`zeros(1,N)` 产生冻结位。经过编码后，将 0,1 序列映射为 -1,1 序列。本次设计要求在 AWGN 信道传输，编码并映射后的信息经过信道传输并加入高斯白噪声。接下来对经过高斯信道传输的码元序列进行译码，计算并分析其误比特率。

4.2 极化码编译码算法性能分析

本次设计中所采用的译码算法为 SC 译码算法以及 SC 的改进 SCL 译码算法，搭建一个包含极化码的基带无线通信系统，对码长、码率以及搜索宽度三个参数进行误码率的分析。

4.2.1 编码长度对 SC 译码性能的影响

我们已知，当码长 N 趋于无穷大时，信道可达到理论上的信道容量。现设置极化码的参数如下：码率 R 为 0.5，帧长度为 100，采用 BPSK 方式进行调制，通过 BAWGN 信道传输，采用 SC 译码算法。选取码长 N 分别为 32，64 和 128，画出三种码长下信噪比与误码率的关系图如图 4.2 所示。

在图中，我们可以看到，当信噪比低于 1.7dB 时，码长越短，误码率越小，译码性能越好。这是因为当信噪比较低时有可能产生负的编码增益，虽然信道编码使得系统的可靠性增高，但是增加的部分冗余比特会消耗大量的能量，反而导致总的误码率增大。随着误码率不断增大，码长越长，误码率变得越小，译码效果越理想。这是因为随着码长的增加，信道极化程度越来越理想，信道对消息比特传输的干扰越来越小，总的误码率随之下降。例如：当信噪比为 3dB 时，32、64、128 码长下的误码率由大向小逐渐变化；在码长 $N=128$ 时，达到误码率为 10^{-2} 所需的信噪比为 2.3，分别比相同误码率的情况下 $N=32$ 和 $N=64$ 时所需信噪比低了 0.3 和 0.2，节省了信噪比。因此，随着码长 N 的增加，误码率逐渐降低，译码效果越来越好，信道容量越来越接近香农极限。

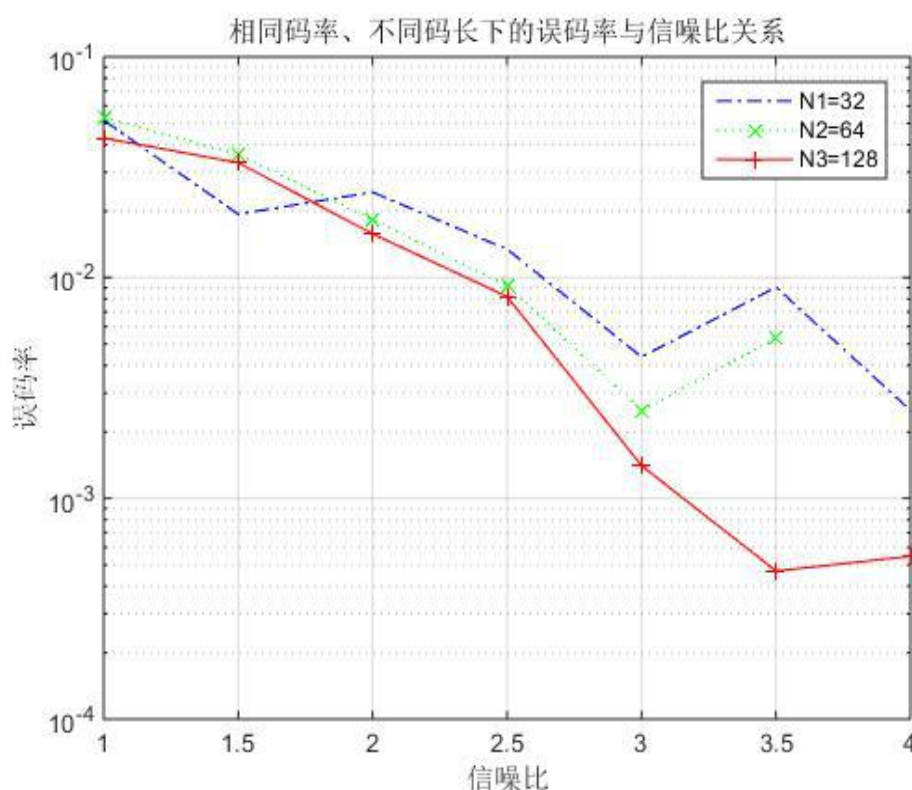


图 4.2 AWGN 信道下，不同码长的误码率

4.2.2 编码速率对 SC 译码性能的影响

编码速率为信息比特与总比特的比值。设置极化码的参数如下：码长 $N=128$ ，帧长度为 100，采用 BPSK 方式进行调制，通过 BAWGN 信道进行传输，采用 SC 译码算法。设置编码速率 R 分别为 0.25、0.5 和 0.75，画出相同码长，不同码率下信噪比与误码率的关系图如图 4.3 所示。

在图中，我们可以看到，编码速率 R 越小，误码率越低，译码性能越理想。例如：当码率 $R=0.25$ ，在信噪比为 1.7dB 时，误码率为 10^{-2} ，而要达到相同的误码率，码率 $R=0.5$ 时所需信噪比为 2.1dB，码率 $R=0.75$ 时所需信噪比为 3.2dB。可见码率直接影响了编码的

性能。这是因为极化码经过信道极化以后，利用“无噪”信道来发送信息位，信息位对应着编码速率，当编码速率越来越大时，即信息位数量越来越多，需要发送的信息越来越多，可能会超出信道容量为“1”的信道，此时会占用信道容量相对较小也就是噪声干扰比较大的信道来发送消息，故使得误码率增加，码字性能变差。由此可得，编码速率越小，误码率越小，译码性能越好。

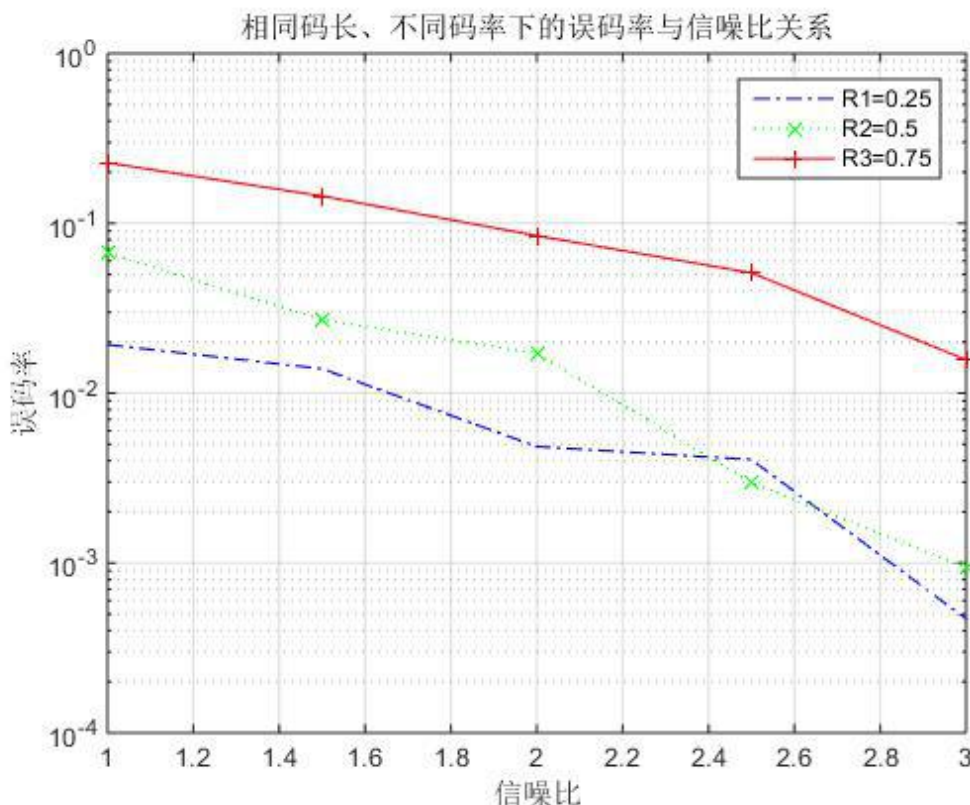


图 4.3 AWGN 信道下，不同码率的误码率

4.2.3 搜索宽度对 SCL 译码性能的影响

采用 SC 译码算法进行译码，当码长为中短码长时，由于信道极化并不完全，导致译码性能并不良好，从图 4.2 和图 4.3 中也可以看出这一现象。为了对中短码长下极化码译码性能进行改善，本次实验设计又采用了 SCL 译码算法，分析搜索宽度 L 对译码性能的影响。

我们已知当搜索宽度 L 为 1 时，SCL 译码算法即为 SC 译码算法。设置极化码的参数如下：码长 $N=1024$ ，码率 $R=0.5$ ，帧长度为 100，采用 BPSK 方式进行调制，通过 BAWGN 信道进行传输，采用 SCL 译码算法。设置搜索宽度 L 分别为 1、2 和 8，画出相同码长码率、不同搜索宽度 L 下 SCL 译码算法的信噪比与误码率关系图如图 4.4 所示。

在图中，我们可以看到，随着搜索宽度的不断增加，误码率逐渐减小，译码性能越来越好，其中当 $L=1$ 时，即为 SC 译码算法，由此可知，SCL 译码算法相比于 SC 译码算法

译码性能有了很大的提升，且搜索宽度会直接影响译码结果。例如：当误码率为 10^{-1} 时，搜索宽度为 8 时所需的信噪比为 1.07dB，比搜索宽度为 1 和 2 时分别节省了 0.21dB 和 0.58dB。由此可见。SCL 译码算法在 SC 的基础上译码性能得到了很大的改善。

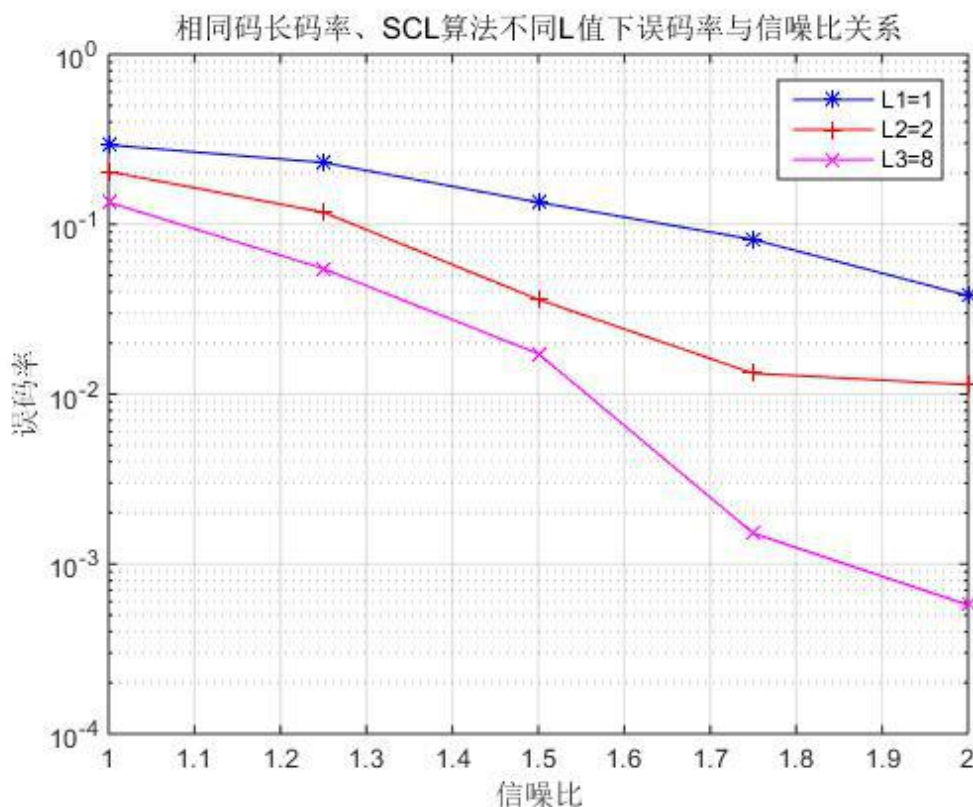


图 4.4 AWGN 信道下，不同搜索宽度的误码率

4.3 本章小结

本章主要基于 MATLAB2014b 搭建了包含极化码的基带无线通信系统，并实现了其在 AWGN 信道下的仿真。仿真模块主要包含随机信源的产生，极化码编码，基带信道映射，信道加噪，极化码译码等模块。并分析了 SC 译码方案下不同码长、不同码率对译码性能的影响。基于中短码长下，SC 译码方案误码率较高的问题，还完成了 SCL 译码方案的模块设计，对比了两种算法的译码性能并分析了搜索宽度对 SCL 译码性能的影响。

第 5 章 结论

随着 5G 通信技术的发展，无线通信领域对于极化码的研究越来越重视。极化码是目前唯一可以达到信道容量，并且具有可实现的线性复杂度的一种信道编码方式，性能好，复杂度低，具有很大的应用前景。本文重点研究了极化码的编码与译码技术，并通过 MATLAB 仿真对极化码的性能进行了进一步的分析，主要完成了以下几个方面的工作：

1. 介绍了数字通信系统、信道编译码、信道模型等基本理论，阐述了极化码的研究历史与现状。极化码是基于信道极化现象构造的，重点研究了信道的极化理论，详细推导了信道结合与信道分裂的过程。

2. 详细地介绍了极化码的编码与译码算法。在编码时，首先研究信道的可靠性估计，E.Arika 指出 BEC 信道可以直接通过计算巴氏参数来获得可靠性的估计值，而对于一般的 B-DMC 信道无法获得准确的巴氏参数值，故一般利用密度进化（DE）方法。而对于更加实用的 BAWGN 信道，可以用高斯近似对 DE 算法进行简化。根据信道可靠性的估计值，选取可靠性大的信道传输信息比特，可靠性小的传输冻结比特，通过比特混合生成原始信息向量。接下来介绍了生成矩阵的构造方法以及如何生成极化码。在译码时，详细地推导并举例说明了 SC 译码算法的过程，其复杂度只有线性级。但是对于中短码长的极化码，由于信道极化并不完全，SC 译码方法会导致较高的误码率，译码性能不理想，因此，又着重研究了 SC 译码方案的改进算法。串行抵消列表（SCL）译码算法在每一层搜索后尽可能多的保留后续路径，在一定程度上对 SC 算法性能进行了改善。

3. 基于 MATLAB2014b 搭建了包含极化码的基带无线通信系统，完成了编码、译码等模块程序的编写，并对其在 AWGN 信道下的误码率进行了仿真分析。分析了不同码长、不同码率下 SC 译码方案的性能。针对中短码长下 SC 译码性能不佳的问题，仿真实现了 SCL 译码方案，分析了不同搜索宽度对误码率的影响，证明了 SCL 算法相比于 SC 算法性能得到了提升。

由于时间和能力有限，本文还有很多不足之处值得进一步改正与研究，主要有以下几个方面：

1. 利用 MATLAB 完成极化码的编码与译码仿真时，由于计算时间与复杂度的原因，设置了中短码长，验证了不同参数对于译码性能的影响，但是由于码长较短时译码性能不佳，故仿真结果不是特别精确，但总体与理论相符合。

2. 极化码的译码算法众多，很多学者不断地研究出有效的译码方案，如 BP 译码算法、LP 译码算法，其他辅助 SC 或 SCL 译码算法等。本文没有一一地去介绍、仿真与验证，着重介绍了最基本的 SC 译码方案以及基于 SC 的改进 SCL 译码方案。目前新的译码算法大多都是以 SC 算法为基础，更有效的算法仍待进一步探索。

致 谢

毕业论文即将完成，我的大学生活也要告一段落。借此机会，我要对四年来帮助过我的人表示深深的感谢。

首先，感谢我的毕业设计指导老师 xxx 教授。很荣幸能够在 xxx 的帮助下完成本次毕业设计，从选题到设计再到论文的编写，xxx 给了我耐心的指导。xxx 精于工作，在移动通信领域很有建树，为人和蔼可亲，不厌其烦地帮我解答疑惑，在本次的毕业设计中给了我很大的帮助，让我在汲取知识的道路上不断前进。

衷心感谢班主任 xxx，四年的学习生活相处下来，从 xxx 身上学到了很多，对于工作的热情，对于生活的热爱以及对于学术的钻研精神，都使我受益匪浅。

感谢同组的小伙伴们在毕业设计当中对我的帮助与指导，在相互的讨论与督促中大家共同进步。

最后衷心感谢我的父母家人，感谢他们一直以来对我的支持，不断给我前进的动力，鼓励我去追求更高的目标，探索更深的知识。

参考文献

- [1] J. G Proakis. Digital Communications[J]. IEEE Trans. Inf. Theory, v01. 22, PP. 780-785, Sep 1984.
- [2] 王育民, 梁传甲. 信息与编码理论. 西北电讯工程学院出版社, 1986.
- [3] 韩凝. LDPC 码译码算法的研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2008.
- [4] Shannon C E. A mathematical theory of communication[J]. ACM SIGMOBILE. Mobil Computing and Communications Review, 2001, 5(1): 3-55.
- [5] Ungerboeck G. Channel coding with multilevel phase signals[M]. IEEE Press, 1982.
- [6] Berrou C. Glavieux A. Near Shannon limit error correcting coding and decoding: Turbo-codes[J]. 1996, 2: 1064-1070 vol.2.
- [7] Gallager R. Low-density parity-check codes [M]. Lowdensity parity-check codes. Мир, 1960: 3-26.
- [8] Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes [C]. IEEE International Symposium on Information Theory. 2008: 1173-1177.
- [9] 杨武周, 刘彤. 极化码研究现状分析与展望[J]. 信息通信, 2016(4):218-219.
- [10] 陈凯. 极化编码理论与实用方案研究[D]. 北京邮电大学, 2014.
- [11] 陈国莹. 极化码的编码与译码[D]. 南京理工大学, 2014.
- [12] 许拔. 准循环 LDPC 码的构造及其理论研究[D]. 国防科学技术大学, 2010.
- [13] 王继伟. 极化码编码与译码算法研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2013.
- [14] 王丹飞. 动态频谱共享系统中无线传输链路的 DSP 接口设计与实现[D]. 电子科技大学, 2011.
- [15] Arikan E. Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[M]. IEEE Press, 2009.
- [16] 陈怿. 基于 EDGE/GSM 的手机射频系统方案研究[D]. 复旦大学, 2011.