第 4 章　线性方程组

§4.1 线性方程组解的判定

1. （1）$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ 唯一解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

（2）$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 8 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ 无穷多解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

其中 k 是任意实数.

2. $\because\ |A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，　$\therefore$ 当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，有唯一解；

当 $\lambda=-2$ 时，$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$

$r(\tilde{A})=3\neq2=r(A)$，方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，$r(\tilde{A})=r(A)=1$，方程组有无穷多解，此时，同解方程组是 $x_1+x_2+x_3=-2$，

通解是 $X=(-2,0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$，$k_i$ 是实数.

3. 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，　记

$$\tilde{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\because r(\tilde{A})=r(A)=2<3$，方程组有无穷多解，即向量 β 可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，且表示法不唯一.

由同解方程组 $\begin{cases} x_1=4-2x_3 \\ x_2=-1+x_3 \end{cases}$，得 $\beta=(4-2k)\alpha_1+(-1+k)\alpha_2+k\alpha_3$，$(k\in R)$

4. 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，则

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right)$$

当 $a=-1$，$b\neq 0$ 时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

当 $a\neq -1$ 时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示，且 $\beta=-\dfrac{2b}{a+1}\alpha_1+\dfrac{a+1+b}{a+1}\alpha_2+\dfrac{b}{a+1}\alpha_3$

§4.2 齐次线性方程组的解

1.（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow n-r(A)=1\Rightarrow$

同解方程组为：$\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow$ 一组基础解系：$\eta=(-2,1,0)^T$，通解是 $X=k\eta$，k 是任意实数.

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$n-r(A)=2$，同解方程组：$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow$ 一组基础解系：$\eta_1=(-2,1,0,0)^T$，

$\eta_2=(1,0,0,1)^T$，通解是 $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 k_1,k_2 是任意实数.

2. $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\Rightarrow r(A)=3\Rightarrow n-r(A)=1$，即基础解系含一个线性无关解，利用 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\Rightarrow A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=O$，故所求方程组的通解是 $X=k\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 是任意实数.

§4.3 非齐次线性方程组的解

1. $\tilde{A}=(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\3&2&1&0&2\\0&1&2&3&1\\5&4&3&2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&-1\\0&1&2&3&1\\0&-1&-2&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow$ 同解方程组为：$\begin{cases}x_1=x_3+2x_4\\x_2=1-2x_3-3x_4\end{cases}$ $\Rightarrow$ 通解：$X=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 是任意实数.

（2） 同解方程组为：$x_1=3-2x_3+3x_4$ $\Rightarrow$ $X=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_3 是任意实数.

2. 由于 $A(\eta_2+\eta_3)=A\eta_2+A\eta_3=2b$，$A(\eta_1+\eta_2)=2b$，所以 $A(\eta_2+\eta_3-\eta_1-\eta_2)=0$，故令 $X_1=\eta_2+\eta_3-(\eta_1+\eta_2)=(0,-1,1,1)^T$，则 X_1 是 $AX=0$ 的一个线性无关解，又 $r(A)=3$，因此 $AX=0$ 的基础解系中只含一个线性无关解，所以 $AX=b$ 的通解为

$$X=kX_1+\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=k(0,-1,1,1)^T+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)^T \quad （k\text{ 为任意常数}）$$

第 4 章　总习题

一、填空题

1. $n-1$　　2. $r(A^*)=0$　　3. $t=5$　　4. $r(A)<n$　　5. $\lambda\neq1$

6. $X=k(1,1,1,1)^T+(1,2,3,4)^T$　　7. 只有零解　　8. $a=3$

二、单项选择题

1.（C）　　2. （B）　　3. （C）

三、计算题

1. $A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$，$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)$

则 $|A|=\lambda^2(\lambda+3)$，故

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$|A|\neq 0$，$r(A)=r(\tilde{A})=3$，方程组有唯一的解，即 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一.

(2) 当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$$

$r(A)=2$，$r(\tilde{A})=3$, $r(A)\neq r(\tilde{A})$，方程组无解，即 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(3) 当 $\lambda=0$ 时，增广矩阵

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(\tilde{A})=1$，方程组有无穷多解，即 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一.

2. $\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=O$ 的解 $\Rightarrow$ $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $AX=O$ 的解；

又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，

$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，故 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $AX=O$ 的基础解系.

3. 因为非零矩阵 B 的列是上面齐次方程组的解，则该齐次方程组有非零解，从而系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

得 $5\lambda-5=0$，即 $\lambda=1$.

又因矩阵 A 的秩为 2，则 $n-r(A)=3-2=1$，即基础解系只有一个解向量，因而 B 的

三个列向量必线性相关，从而有$|B|=0$.

4. $\because AB=O$，则矩阵B的每一列都是齐次线性方程组$Ax=0$的解，又设$r(A)=r$，则$Ax=0$的基础解系中包含$n-r$个线性无关解，这样就有矩阵B的列秩小于等于$n-r$，即$r(B)\le n-r$，所以$r(A)+r(B)\le n$.

5. 当$r(A)=n$时，由于$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以A^*可逆，即$r(A^*)=n$ ；

当$r(A)=n-1$时，由于$AA^*=|A|I=O$，从而有$r(A)+r(A^*)\le n$，即$r(A^*)\le 1$，又A至少有一个$n-1$阶子式不等于零，故$r(A^*)\ge 1$，所以$r(A^*)=1$；

当$r(A)<n-1$时，A的所有$\boldsymbol{n-1}$阶子式全等于零，A^*为零矩阵，所以$r(A^*)=0$.

6. $\because$ $AB=O$ $\Rightarrow$ B的每一列是$AX=O$的解，而$r(B)=2$ $\Rightarrow$ $r(A)\le 3-r(B)=1$，又a,b,c不全为零，$\Rightarrow$ $r(A)\ge 1$，从而有$r(A)=1$ $\Rightarrow$ $n-r(A)=2$，即基础解系包含两个线性无关解，由于矩阵B的第一、三两列线性无关，即为所求基础解系：$\eta_1=(1,2,3)^T$，$\eta_2=(2,5,-1)^T$，通解是$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中$\boldsymbol{k_1,k_2}$是任意实数.

7.（1）$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$是$AX=B$的解 $\Leftrightarrow$ $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=b$ $\Leftrightarrow$ $(k_1+k_2+\cdots+k_t)b=b$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{t}k_i=1$.

（2）$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$是$AX=O$的解 $\Leftrightarrow$ $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=O$ $\Leftrightarrow$ $(k_1+k_2+\cdots+k_t)b=O$，$b\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{t}k_i=0$.

8. $\because$ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ $\Rightarrow$ $r(A)=3$ $\Rightarrow$ $n-r(A)=1$，即对应齐次线性方程组的基础解系含一个线性无关解，利用$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，可得$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=O$，再由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$，可得 $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\beta$，故所求方程组的通解为$X=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k\in R$）.

9. 由题设，方程组$AX=b$有两个不相等的解，故$AX=b$有解且解不唯一，所以

$r(A)=r(\widetilde{A})<n=3$，又方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$，这样就有 $r(A)\geq 2$，于是得 $r(A)=2$，故对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中包含一个线性无关解，而 $\xi=\eta_1-\eta_2=(3,-1,-2)^T$ 非零且为 $AX=0$ 的解，从而的 $AX=b$ 的通解为

$X=k\xi+\eta_1=k(3,-1,-2)^T+(0,1,0)^T$，（$k$ 为任意常数）

10. 设 $k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha=0$，由题设 $A^3\alpha=0$，用矩阵 A 左乘 $k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha=0$ 两边，得 $k_1A\alpha+k_2A^2\alpha=0$；重复一次，得 $k_1A^2\alpha=0$，$\because A^2\alpha\neq 0 \Rightarrow k_1=0$，代入等式 $k_1A\alpha+k_2A^2\alpha=0$，得 $k_2A^2\alpha=0 \Rightarrow k_2=0$，代入等式 $k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha=0$，得 $k_3=0$，从而，有 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关.

11.（1）由题设知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，而 η^* 是 $AX=b$ 的解，故 η^* 不能由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$ 线性表示，所以，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$ 线性无关.

（2）$\because (\eta^*,\xi_1+\eta^*,\xi_2+\eta^*,\cdots,\xi_{n-r}+\eta^*)=(\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

$$=(\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})A$$

而 $|A|=1\neq 0$，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$ 线性无关，从而 $\eta^*,\xi_1+\eta^*,\xi_2+\eta^*,\cdots,\xi_{n-r}+\eta^*$ 线性无关.

12.（1） 若 α 是 $AX=O$ 的的任一解, 即 $A\alpha=O$. 显然有 $A^TA\alpha=O$, 即 α 也是 $A^TAX=O$ 的解.

反之, 若 α 是 $A^TAX=O$ 的任一解, 即 $A^TA\alpha=O$, 则有 $\alpha^TA^TA\alpha=O \Rightarrow (A\alpha)^T(A\alpha)=O$，利用内积的性质，有 $A\alpha=O$，故 α 是 $AX=O$ 的解. 综上所述, 方程组 $A^TAX=O$ 与 $AX=O$ 同解.

（2）$\because$ $A^TAX=O$ 与 $AX=O \Rightarrow n-r(A^TA)=n-r(A)$，故有 $r(A^TA)=r(A)$.