**一、填空题：**

1. 0　　2. 线性无关　　3. 2　　4. $\dfrac{\pi}{4}$　　5. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

**二、选择题：**

1.选（$C$）　2. 选（$B$）　3. 选（$D$）　4. 选（$A$）　5. 选（$B$）

**三、解：** 按第一列（行）展开，可得 $D=7^4-9^4$

**四、解：** $\because X=A^{-1}BA$，

$$(A \,\vdots\, E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

所以，$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**五、解：** 类似试卷一第四题

**六、解：** 类似试卷一第五题，

**七、解：** $\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-4i-3j-k$， 所求直线为 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

**八、解：** 二次型对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2+a=5 \Rightarrow a=3$

$\because \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=4$ 是 $A$ 的三个特征值，

$$A-0E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \xi_3=(-1,0,1)^T$$

$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=-x_2 \end{cases} \Rightarrow \xi_1=(-1,1,-1)^T$

$$A-4E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \xi_2=(1,2,1)^T$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 属于不同特征值，故已经正交，单位化后，令 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 为所求，

$f=4$ 表示椭圆柱面.

**九、解：** $\because B$ 非零，$\Rightarrow$ 方程组有非零解 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & t \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

又 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad n - r(A) = 1$

故矩阵 $B$ 至多有 $1$ 列线性无关.