第 3 章　n 维向量

§3.2 向量组的线性相关性

1. 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即 $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 4$，　$\therefore\ \beta = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3$.

2. 当 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$，即 $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow\ 7x \neq 35 \ \Rightarrow\ x \neq 5$ 时，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

3. （1）$\because |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 14 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

（2）$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

4.（1）$\because\ (2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2 + 4\alpha_3, 5\alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，而 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \ \Rightarrow\ A$ 可逆，故向量组 $2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2 + 4\alpha_3, 5\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

（2）$\because\ (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

而$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow A$不可逆，故向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

5.（1） $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而 α_2,α_3线性无关， $\Rightarrow$ α_1可以由 α_2,α_3线性表示.

（2）若α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，又$\alpha_1$可以由 α_2,α_3线性表示，$\Rightarrow$ α_4可以由α_2,α_3线性表示，$\Rightarrow$ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，与题设矛盾，故$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

§3.3 向量组的最大无关组与向量组的秩

1. （1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ ，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，最大线性无关组就是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$本身.

（2） $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$（行简化阶梯形）， 故向量组的秩为 2， 该向量组线性相关，它的一个最大线性无关组：α_1,α_2 ，且有$\alpha_3=\dfrac{3}{2}\alpha_1-\dfrac{7}{2}\alpha_2$， $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$.

2. $(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，

$\Rightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3$ ， $\because$ $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示， $\Rightarrow$ $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3$，故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

3. $\because$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ $\Rightarrow$ α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示 $\Rightarrow$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 等价 $\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$

$=4$

4. $\because$ α_1,α_2 线性无关，而 $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2 \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

又 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 $\Rightarrow$ β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，即 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 线性相关，

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow b=5，再由 r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=15.$$

5. $\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，又 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，故两向量组等价，而等价向量组具有相同的秩，因此，由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的线性无关

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

§3.5 向量的内积与正交性

1. $\alpha+\beta=(1,2,1)^T$， $\alpha-\beta=(1,0,-1)^T$， 则有 $(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=0$，所以， $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

2.（1） $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1)^T \,//\,(1,-1,2)^T$，

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T \,//\, (-1,1,1)^T,$$

（2）单位化，得：

$$\varepsilon_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T; \quad \varepsilon_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T; \quad \varepsilon_3=(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

3. $\because$ A 是正交矩阵，则有 $AA^T=E$，即

$$\begin{pmatrix} a^2+\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) & b^2+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+\frac{1}{2}=1，b^2+\frac{1}{2}=1，a+b=0.$$

所以，$\begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

4. 证明：$\because$ A是正交矩阵 $\Rightarrow A^T=A^{-1}$，而 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^{-1}$， 又$A^*=|A|A^{-1}$，

$\therefore$ $(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=\dfrac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=(A^*)^{-1}$， （这里利用了

$|A|=\pm1=\dfrac{1}{|A|}$ ），故A^*也是正交矩阵.

第3章 总习题

一、判断题：

1. 向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$线性相关，但α_1不能由α_2,α_3线性表示.

2. 向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$线性相关，向量组$\beta_1=(0,0,0)^T$，$\beta_2=(0,1,0)^T$，$\beta_3=(0,0,1)^T$也线性相关， 但$\alpha_1+\beta_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2+\beta_2=(0,1,0)^T$，$\alpha_3+\beta_3=(0,0,2)^T$线性无关.

3. 向量组$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,0)^T$，$\alpha_4=(0,0,0,0)^T$，向量α_1,α_2线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性相关，但$\alpha_1,\alpha_2$不是该向量组的极大线性无关组，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是极大线性无关组.

4. 向量组$\alpha_1=(1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$与向量组$\beta_1=(1,1)^T$，$\beta_2=(0,-1)^T$，$\beta_3=(-1,0)^T$等价，但个数并不相等.

二、填空题：

1. $t=3$　　2. $r=2$　　3. $r(A)\ge r(B)$

三、单项选择题：

1.（B）　2.（B）　3. （C）　4.（A）

5.（B）　6.（D）

四、计算题：

1. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&-1&1&-2\\0&2&-2&4\\0&3&-3&6\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ α_1,α_2是一组极大线性无关组，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$；$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$.

五、证明题：

1.（3） $\because$ $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，又

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}=\begin{cases}2 & n=2k+1\\0 & n=2k\end{cases}$$

故当n为奇数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n$线性无关；

当n为偶数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n$线性相关.

此题的（1）和（2）可仿照这种方法进行.

2. $\because$ 向量组 β_1,β_2 可由 α_1,α_2 线性表示 $\Rightarrow$ $r(\beta_1,\beta_2)\le r(\alpha_1,\alpha_2)$，又 β_1,β_2 线性无关，

$\Rightarrow$ α_1,α_2 线性无关.

而 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$，且向量组 β_1,β_2 和向量组 α_1,α_2 均线性无关， $\Rightarrow$

矩阵$A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$可逆，$\Rightarrow$ $|A|\ne0$，即$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\ne0$.

3. （1）$\because H^T=(E-2\alpha\alpha^T)^T=E-2(\alpha\alpha^T)^T=E-2\alpha\alpha^T=H$，即$H$ 是对称矩阵.

（2）$\because\alpha$是n维单位列向量，有$\alpha^T\alpha=1$，因此，我们有

$$HH^T = HH = E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = E$$

即 H 是正交矩阵.

4. $(\Rightarrow)$ $\because AA^T = E \Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2) = (A\alpha_1)^T(A\alpha_2) = \alpha_1^T(A^TA)\alpha_2 = \alpha_1^T\alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$.

$(\Leftarrow)$ 若 $(A\alpha_1, A\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$，而 $(A\alpha_1, A\alpha_2) = (A\alpha_1)^T(A\alpha_2) = \alpha_1^T(A^TA)\alpha_2$，这样就有 $\alpha_1^T(A^TA)\alpha_2 = \alpha_1^T\alpha_2 \Rightarrow A^TA = E$，即 A 是正交矩阵.