第 6 章　矩阵的相似对角化

§6.1 特征值与特征向量

1.（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)\Rightarrow\lambda_1=2$；$\lambda_2=3$

由$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ -2x_1-2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$；属于$\lambda_1=2$的全体特征向量为$k_1\xi_1$，$(k_1\neq 0)$

由$\begin{cases}2x_1+x_2=0\\ -2x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$；属于$\lambda_2=3$的全体特征向量为$k_2\xi_2$，$(k_2\neq 0)$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda+1 & 0\\ -2 & -3 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)\Rightarrow\lambda_1=-1$；$\lambda_2=1$；$\lambda_2=2$

由$\begin{cases}-2x_1=0\\ -x_1=0\\ -2x_1-3x_2-3x_3=0\end{cases}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$；属于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为$k_1\xi_1$，$(k_1\neq 0)$

由$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\ -2x_1-3x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix}$；属于$\lambda_2=1$的全体特征向量为$k_2\xi_2$，$(k_2\neq 0)$

由$\begin{cases}x_1=0\\ -x_1+3x_2=0\\ -2x_1-3x_2=0\end{cases}\Rightarrow\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；属于$\lambda_3=2$的全体特征向量为$k_3\xi_3$，$(k_3\neq 0)$

2. 由$A\alpha=\lambda\alpha$，即$\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2=\lambda\\ 3=\lambda\\ 3=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=3\\ a=1\end{cases}$.

3.（1）A^3+A+2E的特征值为$\lambda^3+\lambda+2$，即$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=12$，其行列式$=0$；

（2）$2A^{-1}+E$的特征值为$\dfrac{2}{\lambda}+1$，即$\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=2$，其行列式$=-6$；

（3）A^*的特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda}$，即$\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$，其行列式$=4$，则

$$|A^{-1}+A^*|=\left|\frac{A^*}{|A|}+A^*\right|=\frac{1}{8}|A^*|=\frac{1}{2}.$$

4.（1） $\because$ $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A^T|$， $\therefore$ 矩阵 A 与 A^T 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

（2）设 X 是特征值 λ 对应的特征向量，即有 $AX = \lambda X \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX)$ $= \lambda^2 X$，……， $A^k X = A(A^{k-1}X) = A(\lambda^{k-1}X) = \lambda^{k-1}(AX) = \lambda^k X$，故 λ^k 是 A^k 的特征值.（ k 是正整数 ）

5. 设 λ 是 A 的任意一个特征值，对应特征向量为 X （$\neq 0$），即 $AX = \lambda X$，则
$(A^2 - 3A + 2E)X = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X$，$\because$ $A^2 - 3A + 2E = O$， $X \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$，即 A 的特征值只能是 1 或 2.

6. （1）$\because A\alpha = \lambda_0 \alpha$，$(\lambda_0 \neq 0)$ $\Rightarrow$ $A^{-1}\alpha = \dfrac{1}{\lambda_0}\alpha$ $\Rightarrow$ $|A| A^{-1}\alpha = \dfrac{|A|}{\lambda_0}\alpha$，即

$A^*\alpha = \dfrac{|A|}{\lambda_0}\alpha$，故有 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_0}$，对应特征向量仍为 α.

（2）$\because$ $(P^{-1}AP)P^{-1}\alpha = P^{-1}A\alpha = \lambda_0(P^{-1}\alpha)$ $\Rightarrow$ λ_0 是 $P^{-1}AP$ 的一个特征值，对应的特征向量是 $P^{-1}\alpha$.

§6.2 矩阵的相似对角化

1.（1）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$；$\lambda_2 = -3$

$\because$ A 有 2 个不同的特征值，$\Rightarrow$ A 可以相似对角化，求出 A 的两个特征向量：

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\Rightarrow$ 可逆矩阵 $P = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -3 \end{pmatrix}$.

（2）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$；$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$

对于二重特征值 $\lambda = 3$：$3E - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $r(3E - A) = 2$

$\because$ $n - r(3E - A) = 3 - 2 = 1 \neq 2$， $\therefore$ A 不能相似对角化.

2. $\because$ A 与 B 相似 $\Rightarrow$ $\begin{cases} trA = trB \\ |A| = |B| \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 5 + a = 3 + b \\ 6a = 2b \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值： $\lambda_1=1$；$\lambda_2=2$；$\lambda_3=3$． 求出相应的特征向量：$\xi_1=(1,1,0)^T$；

$\xi_2=(1,0,0)^T$；$\xi_3=(1,7,2)^T$，故所求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&7\\0&0&2\end{pmatrix}$.

3. （1）$\because$ $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

（2）$\because$ $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有特征值1和2 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 相似于$\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$；

又$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda^2-3\lambda+2$，从而 $\boldsymbol{B}$ 也相似于$\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，由相似的传递性：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

（3）$\because$ $\boldsymbol{A}$ 有三重特征值 $\lambda=3$，但 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$ $\Rightarrow$ $n-r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1\neq3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

4. （1）由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}-1=\lambda\\2+a=\lambda\\1+b=-\lambda\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\a=-3\\b=0\end{cases}$

（2）$\because$ $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3$ $\Rightarrow$ $\lambda=-1$

是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值，但

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad n-r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1\neq3,$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

§6.3 向量空间的正交性

1. $\alpha+\beta=(1,2,1)^T$， $\alpha-\beta=(1,0,-1)^T$，则有 $(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=0$， $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，由题设：$x_1+x_2+x_3=0$，$x_1-2x_2+x_3=0$ $\Rightarrow$ $x_1=1, x_2=0,$

$x_3=-1,$ $\Rightarrow$ $\alpha_3=(1,0,-1)^T$，单位化得：$\varepsilon_1=\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T$，$\varepsilon_2=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)^T$，

$\varepsilon_3=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T$.

3. $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1)^T\ //\ (1,-1,2)^T$， $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-$

$\dfrac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})^T\ //\ (-1,1,1)^T$，单位化，得：

$\varepsilon_1=(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0)^T$； $\varepsilon_2=(\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{-1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6})^T$； $\varepsilon_3=(\dfrac{-1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3})^T$.

4. $\because A$ 是正交矩阵，故 A 的各列是相互正交的单位向量， $\Rightarrow$ $a=\dfrac{1}{\sqrt2},b=-\dfrac{1}{\sqrt2}$ 或

$a=-\dfrac{1}{\sqrt2},b=\dfrac{1}{\sqrt2}$.

5.（1）$\because$ $AA^T=E$ $\Rightarrow$ $(A\alpha_1,A\alpha_2)=(A\alpha_1)^T(A\alpha_2)=\alpha_1^T(A^TA)\alpha_2=\alpha_1^T\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2)$.

（2）$\because AA^T=A^TA=E$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})^TA^{-1}=(A^T)^{-1}A^{-1}=(AA^T)^{-1}=E$；$(A^T)^TA^T=AA^T=E$；

$(A^*)^TA^*=(A^T)^*A^*=(AA^T)^*=E$. 故 A^{-1},A^T,A^* 均为正交矩阵.

（3）$\because\ \alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $\Rightarrow$ $(A\alpha_i)^T(A\alpha_j)^T=\alpha_i^T(A^TA)\alpha_j=\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$，

故 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 也是一组标准正交基.

§6.4 实对称矩阵相似对角化

1. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda=0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm3$，

当 $\lambda=0$ 时，求出方程组 $-AX=O$ 的一组基础解系：$\xi_1=(2,-2,1)^T$；

当 $\lambda=3$ 时，求出方程组 $(3E-A)X=O$ 的一组基础解系：$\xi_2=(1,2,2)^T$；

当 $\lambda=-3$ 时，求出方程组 $(-3E-A)X=O$ 的一组基础解系：$\xi_3=(2,1,-2)^T$

取 $Q=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$，使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{pmatrix}$.

2. $\because \alpha_1^T\alpha_2=a-1=0$ $\Rightarrow$ $a=1$，设特征值 -1 对应的另外一个特征向量是 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，

由 $\because \alpha_3^T\alpha_2=0 \Rightarrow \quad \alpha_3=(0,-1,1)^T$，$\therefore \quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

3.（1）$\because AX=b$ 有解但不唯一 $\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow a=-2 \ or \ a=1$，

当 $a=1$ 时，$r(A)=1\neq r(\widetilde{A})=2$，方程组无解，故 $a=-2$.

（2）令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm 3$

当 $\lambda=0$ 时，求出方程组 $-AX=O$ 的一组基础解系：$\xi_1=(1,1,1)^T$；

当 $\lambda=3$ 时，求出方程组 $(3E-A)X=O$ 的一组基础解系：$\xi_2=(1,0,-1)^T$；

当 $\lambda=-3$ 时，求出方程组 $(-3E-A)X=O$ 的一组基础解系：$\xi_3=(1,-2,1)^T$

取 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

第 6 章　总习题

一、判断题：

1. ×　　2. √　　3. ×　　4. √　　5. ×

二、填空题：

1. $1,2,3$；　可逆；　$0,3,8$；　不可逆.　　2. $\lambda=0$；　可逆；　1.

3. $\dfrac{1}{\lambda}$；　$\dfrac{|A|}{\lambda}$；　$1-\dfrac{1}{\lambda}$.　　4. $n,\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n-1}$　　5. $|A|=0$

6. $-1,3,\dfrac{1}{3}$；　$|A|=-1$；　$\begin{pmatrix}-1&&\\&3&\\&&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$　　7. 充分必要　　8. 充分

9. $\begin{pmatrix}6&1\\1&6\end{pmatrix}$　　10. $\dfrac{2}{a}+3$　　11. 2　　12. $(-2,2,-4)^T$

二、单项选择题

1.（C）　　2.（B）　　3.（A）　　4.（C）　　5.（B）

6.（A）　　7.（B）　　8.（D）　　9.（D）

三、计算与证明：

1. $2E-A$的特征值是$2-\lambda_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$；　$\left|2E-A\right|=\prod_{i=1}^{n}(2-\lambda_i)$；

$E-P^{-1}AP$的特征值是$1-\lambda_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$；　$\left|E-P^{-1}AP\right|=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)$.

2. $\because AA^T=2E \Rightarrow \left|A\right|^2=2^4$，又$\left|A\right|<0 \Rightarrow \left|A\right|=-4$，

$\because \left|3E+A\right|=0 \Rightarrow A$有特征值$\lambda=-3$，$\Rightarrow A^*$的一个特征值为$\dfrac{\left|A\right|}{\lambda}=\dfrac{4}{3}$.

3. $\because \left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$.

当$\lambda=0$时，求出方程组$-AX=O$的一组基础解系：$\xi_1=(1,1,1)^T$；

当$\lambda=-1$时，求出方程组$(-E-A)X=O$的一组基础解系：$\xi_2=(1,0,1)^T$；

当$\lambda=1$时，求出方程组$(E-A)X=O$的一组基础解系：$\xi_3=(1,4,3)^T$；

取$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&4\\1&1&3\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix} \Rightarrow A=P\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$

故 $A^{11}=\left[P\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}\right]^{11}=P\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^{11}P^{-1}=P\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=A$.

4. $\because \lambda=2$是二重特征值，且对应两个线性无关的特征向量，故$3-r(2E-A)=2$，

即$r(2E-A)=1$，$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$\therefore \quad x=2,y=-2$.

利用$trA=\sum\lambda_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=2,\ \lambda_3=6$

当$\lambda=2$时，求出方程组$(2E-A)X=O$的一组基础解系：$\xi_1=(-1,1,0)^T$；$\xi_2=(1,0,1)^T$；

当$\lambda=6$时，求出方程组$(6E-A)X=O$的一组基础解系：$\xi_3=(1,-2,3)^T$.

取 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$， $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$.

5.（1） $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

（2）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Rightarrow$ A与B相似 $\Rightarrow$ A与B有相同的特征值，

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)\quad\Rightarrow\quad\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=4.$$

（3）当$\lambda=1$时，求出方程组$(E-A)X=O$的基础解系：$\xi_1=(-1,1,0)^T$；$\xi_2=(-2,0,1)^T$

当$\lambda=4$时，求出方程组$(4E-A)X=O$的一组基础解系：$\xi_3=(0,1,1)^T$

令 $Q=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Q=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$，

P即为所求矩阵.

6. 已知 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是A

的n个线性无关的特征向量，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也是B的特征向量，故B可以相似对角化，

即 $B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix}$，记矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=Q$，

$\Lambda_1=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\Lambda_2=diag(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，则$Q$可逆，$\Lambda_1$与$\Lambda_2$乘积可交换，从

而有 $AB=(Q\Lambda_1Q^{-1})(Q\Lambda_2Q^{-1})=Q\Lambda_1\Lambda_2Q^{-1}=Q\Lambda_2\Lambda_1Q^{-1}=Q\Lambda_2Q^{-1}\cdot Q\Lambda_1Q^{-1}=BA$.

7.（1）$\because \dim(V)=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，从而有

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad a=6$$

又$\beta\in V$，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示$\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta)$，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & b \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b=-2 .$$

（2）$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故α_1,α_2是V的一组基，β在α_1,α_2下的坐标为$(3,-1)$.

（3）$\beta_1=\alpha_1$，　$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},2)^T$，一组标准正交基为：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0)^T；\ \varepsilon_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,0,1,4)^T.$$