第 7 章　二 次 型

§7.1 二次型及其表示

1. $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-2&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\because r(A)=3 \Rightarrow$ 二次型的秩为3.

2. $f=x_1^2-3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

§7.2 二次型的标准形

1. 二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

$\because |\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-4)^2 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_{2,3}=4$，对应的特征向量分别是：

$\xi_1=(1,1,1)^T$；$\xi_2=(1,-1,0)^T$；$\xi_3=(1,0,-1)^T$，将 ξ_2,ξ_3 正交化：$\eta_2=\xi_2$，$\eta_3=$

$\xi_3-\dfrac{(\eta_2,\xi_3)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1)^T$，取 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，经过正交变换 $X=QY$，二次型可化为：$f=y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

2. $\because$ 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$

它的特征方程为：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$，因为 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=5$，将 $\lambda=1$ 代入特征方程, 可得 $a=2$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解 $(E-A)X=O$, 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^T$；当 $\lambda_2=2$ 时, 解 $(2E-A)X=O$, 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$；当 $\lambda_3=5$ 时, 解 $(5E-A)X=O$, 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$.

单位化特征向量后, 可得正交变换矩阵为 $Q=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&\sqrt2&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

§7.3 正定二次型

1. 二次型对应矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&-3&1\end{pmatrix}$， $\because |A|=-8<0$， $\therefore$ 二次型非正定.

2. 二次型对应矩阵是 $A=\begin{pmatrix}t&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&t&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&t\end{pmatrix}$，则 $t>0, t^2-\dfrac{1}{4}>0, (t+1)(t-\dfrac{1}{2})^2>0 \Rightarrow t>\dfrac{1}{2}$.

3. 二次型对应矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

（1）若 $f=1$ 表示椭球面，$\Rightarrow$ 二次型 f 正定，即 $k>0,\ k-1>0 \Rightarrow k>1$；

（2）若 $f=1$ 表示柱面，$\Rightarrow$ A 的特征值有且仅有一个为零，

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)[\lambda^2-(k+1)\lambda+k-1]$，故 $k=1$.

4. （1）$\because A$ 为 n 阶正定矩阵，$\Rightarrow A$ 的 n 个特征值 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，又 A 为实对称矩阵时，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，故 A^{-1} 也是实对称矩阵，且 A^{-1} 的特征值 $\lambda_i^{-1}>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故 A^{-1} 是正定矩阵.

同样可以证明 A^*、A^2 也是正定矩阵.

（2）$\because A, B$ 为 n 阶正定矩阵，$\Rightarrow$ $A^T=A, B^T=B$，且对 $\forall X\neq 0$，有 $X^TAX>0$，$X^TBX>0$，又 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，故 $A+B$ 是实对称矩阵，且对 $\forall X\neq 0$，$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$，所以，$A+B$ 也是正定矩阵.

（3）$\because A^T=-A$，$\Rightarrow$ $(E-A^2)^T=E^T-A^TA^T=E-(-A)(-A)=E-A^2$，

对 $\forall X\neq 0$， $X^T(E-A^2)X=X^TX-X^TA^2X=X^TX+X^TA^TAX$

$$=X^TX+(AX)^T(AX)\geq X^TX>0 \quad \text{（内积的非负性）}$$

故 $E-A^2$ 是正定矩阵，从而也是可逆矩阵.

第七章 总习题

一、填空题

1. $t=0$　　2. $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　　3. $a=2$　　4. $t>n$

二、选择题

1. （D）　2. （C）　3. （D）　4. （B）

5. （D）　6. （B）　7. （A）

三、计算与证明

1. **解**：（1）二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&a\\0&a&2\end{pmatrix}$，由条件知：$5=b+5 \Rightarrow b=0$.

则 $|A|=0 \Rightarrow a=-2$ （正值舍去）.

（2） A 的特征值分别为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

由 $(A-0E)X=O \Rightarrow \xi_1=(0,1,1)^T$；　　由 $(A-E)X=O \Rightarrow \xi_2=(1,0,0)^T$；

由 $(A-4E)X=O \Rightarrow \xi_3=(0,-1,1)^T$

故所用正交变换矩阵是 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

2. **解**：（1）二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，由条件知：$|A|=0 \Rightarrow a=0$

（2）当 $a=0$ 时，$|A-\lambda E|=\lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow$ 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

特征向量分别是 $\xi_1=(1,1,0)^T$，$\xi_2=(0,0,1)^T$，$\xi_3=(-1,1,0)^T$.

故正交变换矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ 0&1&0\end{pmatrix}$，经过变换 $X=QY$，标准形是 $f=2y_1^2+2y_2^2$.

（3）由于 $f=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_3=0\end{cases} \Rightarrow X=k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$k\in R$.