第 2 章　矩　阵

§2.1 矩阵的运算

1. 由 $X+A=2(B-X)\ \Rightarrow\ X=\frac{1}{3}(2B-A)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. （1） $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ ；

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\ ;$$

（2） $B^TC+A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 11 & -1 \\ 5 & 20 & 17 \end{pmatrix}$

3. （1） $AB=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$ ；　　$BA=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix}$ ；

（2） $(BA)^n=B\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1}A=a^{n-1}BA=a^{n-1}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix}$.

4. （1） $\boldsymbol{n=2}$时，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{n=3}$时，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} \cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta & -\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta \\ \cos 2\theta\sin\theta+\sin 2\theta\cos\theta & -\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

利用数学归纳法，可得$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

（2） $\because\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

而 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

由二项展开式：

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=[\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}]^n$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n+n\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-1}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$$

5. $f(A)=A^2-A-8E=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}^2&\\&1^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\3&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-8\end{pmatrix}$

6. （1） $\because B^T=(E+2\alpha\alpha^T)^T=E+2(\alpha^T)^T\alpha^T=E+2\alpha\alpha^T=B$，

故 B 是对称矩阵.

（2） $BC=(E+2\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$

$=E+\alpha\alpha^T-2\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E+\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T=E$

7. 设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则由 $AB=BA$，得 $\begin{pmatrix}a&b\\2c&2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2b\\c&2d\end{pmatrix}$， 即有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=0$，

故所求矩阵是 $B=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$，（其中 a， d 是任意实数）

§2.2 矩阵的行列式与逆

1. （1） $\because |A|=1$， $A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

（2）$\because |A|=2$，$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\because (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E$

$\therefore$ $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

3. （1）$|-2A|=(-2)^3|A|=-16$；

（2）$|(2A)^{-1}|=|2A|^{-1}=2^{-3}|A|^{-1}=\dfrac{1}{16}$；

（3）$|A^*|=|A|^{3-1}=4$；

（4）$|BA^{-1}|=\dfrac{|B|}{|A|}=-\dfrac{1}{8}$；

（5）$|(AB)^T|=|AB|=|A||B|=-\dfrac{1}{2}$；

（6）$|(P^{-1}AP)^k|=|P^{-1}||A^k||P|=|A|^k=2^k$；

（7）$|A^{-1}+2A^*|=|A^{-1}+2|A|A^{-1}|=|5A^{-1}|=5^3|A|^{-1}=\dfrac{125}{2}$.

4. $\because A^2-2A+4E=(A+E)(A-3E)+7E \quad \Rightarrow \quad (A+E)[-\dfrac{1}{7}(A-3E)]=E$，

$\therefore$ $(A+E)^{-1}=-\dfrac{1}{7}(A-3E)$，同样，有：$(A-3E)^{-1}=-\dfrac{1}{7}(A+E)$.

5. （1）$\because |A|\neq 0, |B|\neq 0 \quad \Rightarrow |AB|=|A||B|\neq 0$，即 AB 也可逆；

（2）$\because |AB|\neq 0 \quad \Rightarrow |A||B|\neq 0 \quad \Rightarrow |A|\neq 0, |B|\neq 0$，故矩阵 A，B 均可逆.

6. （1）$\because AB=AC$，A 可逆，则 $A^{-1}AB=A^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad B=C$；

（2）$\because AB=O$，A 可逆，则 $A^{-1}AB=A^{-1}O \quad \Rightarrow \quad B=O$.

§2.3 分块矩阵

1. 记 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，同样 $B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ C & B_2 \end{pmatrix}$，

其中，$B_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}$，$B_2=A_2$，则有 $AB=\begin{pmatrix}A_1B_1&O\\A_2C&A_2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&19&0&0&0\\18&70&0&0&0\\3&3&4&1&2\\6&9&14&11&10\\5&4&8&4&6\end{pmatrix}$

2. 记 $A_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\end{pmatrix}$，$C_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， 则 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$，

$C_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1&B_1\\&C_1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&-A_1^{-1}B_1C_1^{-1}\\&C_1^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3&5&14\\2&-1&-2&-5\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

3. $\because\ B,C$ 可逆 $\Rightarrow\ |B|\neq0,|C|\neq0\ \Rightarrow\ |A|=(-1)^{rs}|B||C|\neq0$，故 A 可逆，

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix}O&X_1\\X_2&O\end{pmatrix}$，则 $AA^{-1}=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&X_1\\X_2&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BX_2&O\\O&CX_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&\\&E_s\end{pmatrix}$

所以，$X_2=B^{-1}$，$X_1=C^{-1}$，即 $A^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$

4. 记 $A_1=\begin{pmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{pmatrix}$，$A_2=(a_4)$，由于 $a_i\neq0\,(i=1,2,3,4)$，因此 A_1，A_2 均可逆，故

$A=\begin{pmatrix}&A_1\\A_2&\end{pmatrix}$ 也可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&a_4^{-1}\\a_1^{-1}&0&0&0\\0&a_2^{-1}&0&0\\0&0&a_3^{-1}&0\end{pmatrix}$.

5. $\because\ \alpha^T\alpha=2x^2$，故有 $(E-\alpha\alpha^T)(E+x^{-1}\alpha\alpha^T)$

$$=E+x^{-1}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-x^{-1}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E+(x^{-1}-2x-1)\alpha\alpha^T$$

依题意，$x^{-1}-2x-1=0\ \ \Rightarrow\ x=-1$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$，　$\because x<0$，故 $x=-1$.

§2.4 矩阵的初等变换与矩阵的秩

1. （1）$A\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&0&0&4\end{pmatrix}=A_1\quad\Rightarrow\quad r(A)=3$

（2） $A_1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$

（3） $A_2 \xrightarrow{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3$

2. $\because \ B = AE(1,2)$， $C = BE(2(3),3)$， 则 $C = AE(1,2)E(2(3),3)$

其中 $E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， $E(2(3),3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\therefore \quad P = E(1,2)E(2(3),3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\because A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}r_3]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， $\therefore$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

又 $(A \vdots E) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \therefore \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4.（1） $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

（2） $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & -14 \\ 0 & 7 & -15 \end{pmatrix}$

5. $\because \ AB = A + 2B \ \Rightarrow \ (A-2E)B = A \ \Rightarrow \ B = (A-2E)^{-1}A$

由 $A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow (A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$

$\therefore\ B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$

6. $\because\ |A|=(1+2a)(a-1)^2$

$\therefore\ a\neq-\dfrac{1}{2}$ 且 $a\neq1$时，$|A|\neq0 \Rightarrow r(A)=3$；

$a=1$时，$r(A)=1$；　$a=-\dfrac{1}{2}$时，$r(A)=2$.

7. $\because\ A\to\begin{pmatrix}1&-2&1&a\\0&-3&3&2a-2\\0&3&-3&a^2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&a\\0&-3&3&2a-2\\0&0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}$

$\therefore$ 当$a^2+a-2=0$，即$a=1$或$a=-2$时，$r(A)=2$；

当$a\neq1$且$a\neq-2$时，$r(A)=3$.

§2.5 线性方程组的解

1. （1）$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&1&3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&6\\0&0&1&-2\\0&1&0&-1\end{array}\right) \Rightarrow$ 唯一解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

2. $\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\6&-3&8&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow$ 无穷多解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

其中$\boldsymbol{k}$是任意实数.

3. $\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{array}\right) \Rightarrow$ 方程组无解.

4. $\because\ |A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，　$\therefore$ 当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，有唯一解；　当$\lambda=-2$时，$r(\tilde{A})\neq r(A)$，无解；当$\lambda=1$时，$r(\tilde{A})=r(A)=1$，方程组有无穷多解，此时，同解方程组是$x_1+x_2+x_3=-2$，通解是$X=(-2,0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$，$k_i$是实数.

第 2 章　总习题

一、判断题

1. ×　　2. ×　　3. ×　　4. ×　　5. √　　6. ×

二、填空题

1. -500　　2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　　3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　4. 40　　5. 2　　6. 3

说明： 5. $\because$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，

$\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$　$\Rightarrow$　$B=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$　（这种表示法要掌握！）

故　$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2$　　（利用范德蒙行列式）

6. $\alpha^T\alpha$ 是 $\alpha\alpha^T$ 对角线元素的和.

三、单项选择题

1. （C）　　2. （C）　　3. （D）　　4. （A）

四、计算与证明

2. $\because$ $|A|=4$，由 $A^*B=A^{-1}+2B$ $\Rightarrow$ $|A|A^{-1}B=A^{-1}+2B$，

$$\therefore\ B=(4A^{-1}-2E)^{-1}A^{-1}=(4E-2A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

3. $\because$ $\lambda E-A$ 不可逆，$\therefore$ $|\lambda E-A|=0$，即 $\begin{vmatrix}\lambda-5&-1&-1\\-1&\lambda-5&-1\\-1&-1&\lambda-5\end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow$

$(\lambda-7)(\lambda-4)^2=0$　$\Rightarrow$　$\lambda=4$ 或 $\lambda=7$.

4. $\because$ $|A|=24$，$\therefore$ A 可逆，由 $A^*=|A|A^{-1}$，有

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&0\\0&5&6\end{pmatrix}$$

5. （1）$P_1^{2016}AP_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}P_3=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$；

（2）$P_2AP_1^{2017}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}P_1^{2017}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&2&2\end{pmatrix}$.

6. $\because$ A是 3 阶非零实矩阵，不妨设$a_{11}\neq 0$，又 $a_{ij}=A_{ij}$ $\Rightarrow$ $|A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$, 且

$A^*=A^T$ $\Rightarrow$ $|A|=|A^T|=|A^*|=|A|^2$ $\Rightarrow$ $|A|=1$.

7. $\because$ A的各行元素之和为b，故将$|A|$的各列加到第 1 列，并提出b，再按第 1 列展开，

得 $a=b\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k1}$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k1}=\dfrac{b}{a}$.

8. $\because$ $|A+E|=|A+A^TA|=|(E+A^T)A|=|(E+A)^TA|=|E+A||A|$，又$|A|<0$，故有

$|A+E|=0$.

9.（1） $\because$ $AB=A+B$ $\Rightarrow$ $AB-A-B+E=E$ $\Rightarrow$ $(A-E)(B-E)=E$

$\therefore$ $A-E$与$B-E$均可逆.

（2） $\because$ $A-E$与$B-E$均可逆 $\Rightarrow$ $(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

$\Rightarrow$ $AB-A-B+E=BA-B-A+E$ $\Rightarrow$ $AB=BA$.

10. $\because$ $B=(E+A)^{-1}(E-A)$ $\Rightarrow$ $E+B=E+(E+A)^{-1}(E-A)$ $\Rightarrow$

$E+B=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)=(E+A)^{-1}\cdot 2E=2(E+A)^{-1}$

$$\therefore\ (E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$$

11. $\because$ $G=E-(A+E)^{-1}$ $\Rightarrow$ $G=(A+E)^{-1}(A+E)-(A+E)^{-1}=(A+E)^{-1}A$

又 A，$A+E$ 可逆，$\Rightarrow$ $(A+E)^{-1}$ 可逆，从而 $G=(A+E)^{-1}A$ 也可逆，且有 $G^{-1}=$

$[(A+E)^{-1}A]^{-1}=A^{-1}(A+E)=E+A^{-1}$.

12. $\because$ $r(A)=1$ $\Rightarrow$ $\exists$ 3 阶可逆矩阵 P、Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\left(1,0,0\right)Q=[P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}]\cdot[\left(1,0,0\right)Q],$$

令 $\alpha=P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\left(1,0,0\right)Q$，则由 P、Q 均为可逆阵，知 α,β 为三维非零列向量，

可记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，则 $A=\alpha\beta^T$，且 $A^{100}=\alpha\overbrace{(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}^{99个}\beta^T=(\sum_{k=1}^{3}a_kb_k)^{99}A$.