一、填空题：

1. 记 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&2&1\end{pmatrix}$，则 $|A|=D=-2$，而 $\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}=\left|(A^*)^T\right|=|A^*|=|A|^2=4$

2. 消去变量 $z$，得投影柱面 $x^2+2y^2=16$，所求投影曲线为 $\begin{cases}x^2+2y^2=16\\ z=0\end{cases}$

3. $\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\0&1&2&5\\0&0&3&6\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{array}\right)$，所求坐标是 $(-1,1,2)$

4. $n-r(A)=1$，又由题设知，$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=O$，故所求基础解系是 $\xi=(1,1,-1,-1)^T$

5. $\because B^{-1}-I$ 的特征值为：$\frac{1}{3}-1,\ \frac{1}{4}-1,\ \frac{1}{5}-1$，$\therefore |B^{-1}-I|=-\frac{2}{5}$

二、选择题：

1. $\because B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\5&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\therefore\ |B|=|A|\begin{vmatrix}0&1&0\\5&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=5$，选（$B$）

2. 选（$D$）　3. 选（$A$）　4. 选（$A$）　5. 选（$A$）

三、解：$\because (A+2E)X=B$，又 $|A+2E|=2\neq 0$，故 $A+2E$ 可逆，$X=(A+2E)^{-1}B$，

$$(A+2E\ \vdots\ B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&3\\2&2&1&5&2\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&3\\0&-2&-5&1&-4\\0&-2&-6&-2&-6\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&3\\0&-2&-5&1&-4\\0&0&-1&-3&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&-7&-3\\0&-2&0&16&6\\0&0&1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&9&3\\0&1&0&-8&-3\\0&0&1&3&2\end{array}\right)$$

所以，$X=\begin{pmatrix}9&3\\-8&-3\\3&2\end{pmatrix}$

四、解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$（最简阶梯形）

所以，$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)=3$，向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 线性相关， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其一个极大线性无关组，且有$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$；$\alpha_5=0\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

**五、解**：$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)$，

$\therefore$ （1） 当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，方程组有唯一解；

（2） 当$\lambda=-3$时，$r(\widetilde{A})\neq r(A)$，方程组无解；

（3） 当$\lambda=0$时，$r(\widetilde{A})=r(A)=1<3$，方程组有无穷多解，此时同解方程组为

$x_1+x_2+x_3=3$，故所求通解$X=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$k_1$，$k_2$为任意实数.

**六、解**：过直线$L$的平面束方程：$x+2y-z+1+\lambda(x-y+z-1)=0$，整理得：

$$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(-1+\lambda)z+1-\lambda=0$$

由题目假设，$(1+\lambda)\cdot 1+(2-\lambda)\cdot(-1)+(-1+\lambda)\cdot 1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\dfrac{2}{3}$

所求平面方程是：$5x+4y-z+1=0$.

**七、解**：二次型对应矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}5+b=4+a\\2a-2=4b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

$\therefore\ \lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=0$是$A$的三个特征值，

$A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程组为$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=-x_2\end{cases}\Rightarrow\xi_1=(-1,1,-1)^T$

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\xi_2=(1,2,1)^T$$

$$A-0E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\xi_3=(-1,0,1)^T$$

$\xi_1,\xi_2,\xi_3$属于不同特征值，故已经正交，单位化后，令$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&0\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$为所求.

**八、证明**：（$\Rightarrow$）$\because A$是正交矩阵，$\Rightarrow\quad A^TA=E$，

$$\therefore\ (A\alpha,A\beta)=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta)$$

（$\Leftarrow$）若$(A\alpha,A\beta)=\alpha^TA^TA\beta=(\alpha,\beta)$，则$A^TA=E$，即$A$为正交矩阵.