第 5 章　线性方程组

§5.1 齐次线性方程组的解

1.（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\ \boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=1\ \Rightarrow$

同解方程组为：$\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow$ 一组基础解系：$\boldsymbol{\eta}=(-2,1,0)^{T}$，通解是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{k}$ 是任意实数.

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=2$，同解方程组：$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow$ 一组基础解系：$\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,0,0)^{T}$，

$\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,0,1)^{T}$，通解是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 是任意实数.

2. $\because$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=3$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=1$，即基础解系含一个线性无关解，又 $\because$ $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$ $\Rightarrow$ $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，通解是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{k}$ 是任意实数.

3. $\because$ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的每一列是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解，而 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})\le 3-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=1$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不全为零，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})\ge 1$，从而有 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=2$，即基础解系包含两个线性无关解，由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一、三两列线性无关，即为所求基础解系：$\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3)^{T}$，

$\boldsymbol{\eta}_2=(2,5,-1)^{T}$，通解是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 是任意实数.

§5.2 非齐次线性方程组的解

1. $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\3&2&1&0&2\\0&1&2&3&1\\5&4&3&2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&-1\\0&1&2&3&1\\0&-1&-2&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow$ 同解方程组为：$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 通解：$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{k}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{k}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ 是任意实数.

2. 同解方程组为：$x_1 = 3 - 2x_3 + 3x_4$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{k}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{k}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{k}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$ 是任意实数.

3. 由题设，方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有两个不相等的解，故 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解且解不唯一，所以 $\boldsymbol{r(A)} = \boldsymbol{r(\widetilde{A})} < \boldsymbol{n} = 3$，又方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$，这样就有 $\boldsymbol{r(A)} \geq 2$，于是得 $\boldsymbol{r(A)} = 2$，故对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的基础解系中包含一个线性无关解，而 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = (3, -1, -2)^T$ 非零且为 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的解，从而的 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k\xi} + \boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{k}(3, -1, -2)^T + (0, 1, 0)^T$，（$\boldsymbol{k}$ 为任意常数）

4. 由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = \boldsymbol{A\eta}_2 + \boldsymbol{A\eta}_3 = 2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1) = 2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 - 2\boldsymbol{\eta}_1) = 0$，
故令 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 - 2\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$，则 $\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的一个线性无关解，又 $\boldsymbol{r(A)} = 3$，因此 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的基础解系中只含一个线性无关解，所以 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{kX}_1 + \boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{k}\,(1, 1, 1, 1)^T + (1, 2, 3, 4)^T \quad （\boldsymbol{k} \text{ 为任意常数}）$$

第 5 章　总习题

一、填空题

1. $\boldsymbol{n} - 1$　　2. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\,(1, 1, 1, 1)^T + (1, 2, 3, 4)^T$　　3. $\boldsymbol{r(A^*)} = 0$　　4. $\boldsymbol{r(A)} < \boldsymbol{n}$

5. $\boldsymbol{\lambda} \neq 1$　　6. 只有零解　　7. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$；　$\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$　　8. $\boldsymbol{a} = 3$　　9. $\boldsymbol{t} = 5$

二、单项选择题

1.（$\boldsymbol{C}$）　　2.（$\boldsymbol{B}$）　　3.（$\boldsymbol{C}$）

三、计算题

1. $A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$，$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)$

则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda+3)$，故

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{r(A)=r(\tilde{A})}=3$，方程组有唯一的解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 线性表示，且表示法唯一.

(2) 当 $\boldsymbol{\lambda}=-3$ 时，增广矩阵

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{r(A)=2,\ r(\tilde{A})=3,\ r(A)\neq r(\tilde{A}),}$ 方程组无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 线性表示.

(3) 当 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 时，增广矩阵

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(\tilde{A})=1$，方程组有无穷多解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 线性表示，但表示法不唯一.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 2\\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda\end{array}\right)$

则 $|\boldsymbol{A}|=2\lambda(1-\lambda)$，故

（1）当 $\boldsymbol{\lambda}\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\lambda}\neq 1$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{r(A)=r(\tilde{A})}=3$，方程组有唯一的解，即三平面交于一点.

当 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 时，增广矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{r(A)=2,\ r(\tilde{A})=3,\ r(A)\neq r(\tilde{A}),}$ 方程组无解，三平面没有公共交点.

当 $\boldsymbol{\lambda}=1$ 时，增广矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(\widetilde{A})=2$，方程组有无穷多解，平面π_2,π_3重合，与π_1交于一直线.

（2）当$\lambda=1$时，$\bar{l}=\left\{\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\right\}=\{-1,1,0\}$，直线上一点$P(3,0,-1)$，

故所求直线的对称式：$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$.

3. 设所求方程组为$AX=O$，记$B=(\xi_1,\xi_2)$，则$AB=O\Rightarrow(AB)^T=O\Rightarrow B^TA^T=O$，由此可得，以所给的基础解系作为系数矩阵的行向量作一个齐次方程组，解此方程组，它的基础解系即可作为所求方程组系数矩阵的行向量.

设方程组 $\begin{cases}y_1+2y_3+3y_4=0\\y_2-y_3+y_4=0\end{cases}$ 系数矩阵$B=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$

它的基础解系为$\eta_1=(-2,1,1,0)^T$，$\eta_2=(-3,-1,0,1)^T$，故所求方程组是

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\-3x_1-x_2+x_4=0\end{cases}$$

4. $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$AX=O$的基础解系 $\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，即$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&4\\0&1&2\\-2&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&6\\0&1&2\\0&0&a-2\end{pmatrix}\Rightarrow a\neq2$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价，由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&-5\\2&3&4&2\\0&1&2&b\\-2&0&a&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b-4\end{array}\right)\Rightarrow b=4$$

四、证明题

1.（1）（反证法）假设γ_1与γ_2线性相关，即有$\gamma_2=k\gamma_1$，$k\neq0,1$是实数，则$A\gamma_2=kb\neq b$，与题设γ_2是$AX=b$的解矛盾，所以，γ_1与γ_2线性无关.

（2）$\because$ $r(A)=n-1$ $\Rightarrow$ $n-r(A)=1$，又$\gamma_2-\gamma_1$也是$AX=O$的解 $\Rightarrow$ ξ，$\gamma_2-\gamma_1$

线性相关，即存在不为零的数$\boldsymbol{k}$，使得$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{k}(\gamma_2-\gamma_1)$，也就是$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k}\gamma_1-\boldsymbol{k}\gamma_2=0$，所以，$\boldsymbol{\xi},\gamma_1,\gamma_2$线性相关.

2.（1）$\boldsymbol{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t}$是$\boldsymbol{AX=B}$的解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=b}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(k_1+k_2+\cdots+k_t)b=b}$ $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{t}\boldsymbol{k_i}=1$.

（2）$\boldsymbol{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t}$是$\boldsymbol{AX=O}$的解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=O}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(k_1+k_2+\cdots+k_t)b=O}$，$\boldsymbol{b}\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{t}\boldsymbol{k_i}=0$.

3. $\because$ $\boldsymbol{AB=O}$，则矩阵$\boldsymbol{B}$的每一列都是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的解，又设$\boldsymbol{r(A)=r}$，则$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系中包含$\boldsymbol{n-r}$个线性无关解，这样就有矩阵$\boldsymbol{B}$的列秩小于等于$\boldsymbol{n-r}$，即$\boldsymbol{r(B)\le n-r}$，所以$\boldsymbol{r(A)+r(B)\le n}$.

4. 当$\boldsymbol{r(A)=n}$时，由于$\left|\boldsymbol{A^*}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}\neq 0$，所以$\boldsymbol{A^*}$可逆，即$\boldsymbol{r(A^*)=n}$ ；

当$\boldsymbol{r(A)=n}-1$时，由于$\boldsymbol{AA^*}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{I=O}$，从而有$\boldsymbol{r(A)+r(A^*)\le n}$，即$\boldsymbol{r(A^*)}\le 1$，又$\boldsymbol{A}$至少有一个$\boldsymbol{n}-1$阶子式不等于零，故$\boldsymbol{r(A^*)}\ge 1$，所以$\boldsymbol{r(A^*)}=1$；

当$\boldsymbol{r(A)<n}-1$时，A的所有$\boldsymbol{n}-1$阶子式全等于零，$\boldsymbol{A^*}$为零矩阵，所以$\boldsymbol{r(A^*)}=0$.

5. 提示：只要证明方程组$Ax=0$与$A^TAx=0$同解，从而可得$r(A)=r(A^TA)$.

6. 构造齐次线性方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{AX=O}\\ \boldsymbol{BX=O}\end{cases}$ ， $\because$ $\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\le \boldsymbol{r(A)+r(B)<n}$ $\Rightarrow$ 方程组$\begin{cases}\boldsymbol{AX=O}\\ \boldsymbol{BX=O}\end{cases}$有非零解，从而齐次线性方程组$\boldsymbol{AX=O}$与$\boldsymbol{BX=O}$有非零公共解.