一、填空题：

1. $D_1=\begin{vmatrix}3a_{11} & 4a_{11} & -a_{13}\\ 3a_{21} & 4a_{21} & -a_{23}\\ 3a_{31} & 4a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ 3a_{21} & -a_{22} & -a_{23}\\ 3a_{31} & -a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}=0+3D=6$

2. $\because A=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(1,2,3\right)$，$\therefore \quad A^n=7^{n-1}A$

3. P 、Q 均为初等方阵，PA 相当于对 A 做初等行变换，AQ 相当于对 A 做初等列变换，

则 $P^{2008}AQ^{2009}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2007 & 2008 & 2009\end{pmatrix}Q^{2009}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2009 & 2008 & 2007\end{pmatrix}$

4. $k_1+k_2+\cdots k_r=1$，　　5. 秩为 3　　6. 坐标是 $(1,1,1)$　　7. $\sqrt{56}$

8. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$

9. A 有特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对于二重特征值 $\lambda=1$，

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，欲使 3-r(A-E)=2 \quad \Rightarrow a=0$$

10. $k>1$ 或 $k<-2$

二、计算下列各题：

1．解：$\because (A-B)X(A-B)=I$，又 $\left|A-B\right|=1\neq 0$，故 $A-B$ 可逆，$X=[(A-B)^{-1}]^2$，

$$(A-B\ \vdots\ I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

所以，$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. 解：$\because \begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$，

$\therefore$ （1）当 $\lambda=0$ 时，$r(\widetilde{A})=r(A)=1<3$，方程组有无穷多解，此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，且表示法不唯一；

（2） 当 $\lambda=-3$ 时，$r(\widetilde{A})\neq r(A)$，方程组无解；此时 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示.

3. 解：由于 $r(A)=3$，故对应齐次线性方程组基础解系只有一个解，

记 $\xi=2\eta_3-(\eta_1+\eta_2)=(5,4,-3,6)^T$，则 ξ 即为对应齐次线性方程组的基础解系，故所求通解是 $X=k\xi+\eta_3$，其中 k 为任意实数.

4. **解**：二次型对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\left|A-\lambda E\right|=(-\lambda-1)^2(-\lambda+2)$

$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$ 是 A 的三个特征值，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\xi_1=(1,1,1)^T$$

$$A+E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\xi_2=(-1,1,0)^T，\ \xi_3=(-1,0,1)^T，$$

将 ξ_2,ξ_3 正交化，单位化后，令 $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}Y$，

标准形为 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

三、解：设所求直线方程为 L：$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$，则

$$L\text{ 与 }L_1\text{ 相交 }\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\l&m&n\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow l-2m+n=0，$$

$$L\text{ 与 }L_2\text{ 相交 }\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&1\\l&m&n\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow m-n=0，$$

所以，$l:m:n=1:1:1$，L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

四、证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$　　（1）

两边左乘 A：$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$　　（2）

（2）$-\lambda_1(1)$：$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2=0$，　$\because\ \lambda_1\neq\lambda_2$，$\alpha_2\neq0\ \Rightarrow\ k_2=0$，

代入（1），$\because\ \alpha_1\neq0\ \Rightarrow\ k_1=0$，　$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.