池田「テンソル代数と表現論」

2023 年 3 月 8 日

課題の解答例.

1 広義固有区間

1.1 $A^m = E$ より，$f(t) = t^m - 1$ は $f(A) = 0$ をみたす．

$$f(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t - e^{2\pi ik/m})$$

である．最小多項式は f を割り切るので，f の右辺のどの項も高々 1 回しか現れない，つまり重根を持たない．したがって定理 1.2.6 より A は対角化できる．

2 ジョルダン標準形

3 行列の指数関数とその応用

4 テンソル代数

4.1 ${}^t f$ の表現行列を B とする．

$$\langle {}^t f(\psi_i), v_j \rangle = \langle \sum_k b_{ki} \phi_k, v_j \rangle = \sum_k b_{ki} \delta_{jk} = b_{ji}$$

と

$$\langle {}^t f(\psi_i), v_j \rangle = \psi_i(f(v_j)) = \psi_i \left(\sum_k a_{kj} w_k \right) = \sum_k a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij}$$

より，$b_{ji} = a_{ij}$．したがって $B = {}^t A$.

4.2(1) $\psi \in W^*$ の定義域を V に拡張すれば V^* の元になる．それには $\psi(v_{r+1}), \cdots, \psi(v_n)$ を設定して，線型に拡張すればよい．したがって $\Phi : W^* \to V^*$ は全射.

4.2(2) $\bar{\Psi}$ を $\phi + W^\perp \mapsto \phi|_W$ と定義すれば well-defined な線型写像になる．

4.2(3) $\dim(V^*/W^\perp) = n - \dim W^\perp = n - (n-r) = r = \dim W^*$ より $\bar{\Psi}$ は全射．(2) より単射でもあるから，線型同型.