総研大 統計科学コース (5 年一貫制) 院試解答例

いざな (@u50124n4)

2024 年 7 月 16 日

過去問は公式サイトから入手可能です．以下，基本的に第 1 回は 8 月，第 2 回は 1 月に実施された試験を指します．

解答に不備がある場合，連絡して頂ければ修正する意思はあります．また，期待値などの表記に揺れがあるかもしれませんが，問題文に合わせたり合わせなかったりしているためです．読み取れない場合にも，連絡して頂ければ対応するつもりです．

目次

1　2023 年第 2 回

2　2023 年第 1 回

3　2021 年第 2 回

第 1 問　[問 1], [問 2] は計算問題．[問 3] は解けず．Lagrange の未定乗数法を用いることはわかったが，ベクトルによる表記ができず，進めなかった．

第 2 問　積分の計算問題．

第 3 問　確率の問題と思いきやほとんど行列の問題．対角化して n 乗するところが山場？

第 4 問　[問 1] は計算問題．[問 2] は関数方程式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たす $f(x)$ を求める問題．問 1 の結果を使えると楽 (初見ではその形に変形できなかったが，$y=0$ での微分係数を考えて同じ結論になった)．[問 3] は解けず．変数変換して密度関数求めようとしたが，積分範囲をミスった．特性関数の一致を示すのが楽．

問題 3.1: 第 1 問

[問 1]　ぬるぽ

[問 2]　ｶﾞｯ

[問 3]　$x \in \mathbb{R}^n$，$d \in \mathbb{R}^m$ についての等式制約 $Cx=d$ のもとで，$\|x\|^2$ を最小にする x を求めよ．ここで $m \times n$ 行列 C のランクは m とする $(m \leq n)$.

解答. [問 1,2] 計算．[問 3] Lagrange の未定乗数法を用いる．$f(x)=\|x\|^2-\lambda^\top(Cx-d)$ とする $(\lambda \in \mathbb{R}^m)$．極値条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i-\sum_j \lambda_j C_{ji}=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}C^\top\lambda$$
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}=\sum_j C_{ij}x_j-d_i=0 \quad \therefore Cx=d$$

で，最初の式を二番目の式に代入することで $CC^\top\lambda=2d$ を得る．ここで $CC^\top$ が正則であることを示す．$C^\top=[c_1,\cdots,c_m]$ としたとき，C のランクが m だから $c_1,\cdots,c_m$ は一次独立．ある $y \in \mathbb{R}^m$ について $CC^\top y=0$ が成り立つとき，$y^\top CC^\top y=\|C^\top y\|^2=0$ より $C^\top y=0$ である．ゆえに $y=0$ となって，$CC^\top$ は正則である．これより

$$\lambda=2(CC^\top)^{-1}d \quad \therefore x=C^\top(CC^\top)^{-1}d$$

最後にこの x が実際に最小値を与えることを確認する．$Cx'=d$ としたとき，

$$\|x'\|^2=\|(x'-x)+x\|^2=\|x'-x\|^2+\|x\|^2+2(x'-x)^\top x$$

ここで第三項は

$$(x'-x)^\top x=(x'-x)^\top C^\top(CC^\top)^{-1}d=(Cx'-Cx)^\top(CC^\top)^{-1}d=0$$

だから，$\|x'\|^2 \geq \|x\|^2$ がわかる．　□

[問 3] の別解：もし $d=0$ なら $x=0$ が求める解である．$d \neq 0$ を考える．$U=\{x \in \mathbb{R}^n | Cx=d\}$ とする．求める x は $x \in U \cap (\operatorname{Ker} C)^\perp$ である．なぜなら，このような x を取ったとき，任意の $x' \in U$ に対し $x'=x+y$ となるような $y \in \operatorname{Ker} C$ が存在し，$\|x'\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \geq \|x\|^2$ となるからである．$(\operatorname{Ker} C)^\perp=\operatorname{Im} C^\top$ だから，$x=C^\top z$ なる $z \in \mathbb{R}^m$ で $CC^\top z=d$ をみたすようなものが必要だが，これは $CC^\top$ が正則だから $z=(CC^\top)^{-1}d$ ととれる．ゆえに $x=C^\top(CC^\top)^{-1}d$.　□

問題 3.2: 第 2 問

次の重積分を考える．

$$I = \int\int_D e^{x+y} \sin^2(x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ただし積分領域は $D = \{(x,y)|\pi \le x-2y \le 3\pi, 0 \le x+y \le \pi\}$ とする．

[問 1] 以下の変数変換において，$dxdy = |J|dudv$ を満たすヤコビ行列式 J の絶対値 $|J|$ を求めよ．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

問 1 の変数変換において，xy 平面と uv 平面での積分領域を図示せよ．

問 1 と [問 2] の結果を用いて積分 I の値を求めよ．

解答. [問 1] $J_{(x,y)\to(u,v)} = 3$ なので，$3dxdy = dudv$．したがって求める値は $1/3$．[問 2] 略

[問 3] $\pi(e^\pi - 1)/3$ □

問題 3.3: 第 3 問

問題 3.4: 第 4 問

[問 1] 関数 $g(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = a(1-g(t))$$

の一般解を求めよ．ただし $a > 0$ は定数．

[問 2] 非負値をとる連続型確率変数 X を考える．$x, y \ge 0$ に対して

$$\Pr(X > x+y | X > x) = \Pr(X > y)$$

が成り立つならば，X が従う分布が正数 a をパラメタとする指数分布

$$f(x;a) = ae^{-ax}$$

となることを示せ．

[問 3] 確率変数 X_1, X_2, X_3 が互いに独立に同一の指数分布に従うとき，確率変数

$$U = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

と

$$V = \max\{X_1, X_2, X_3\}$$

が同じ分布に従うことを示せ．

解答. [問 1]

$$\frac{\mathrm{d}(1-g(t))}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = -a(1-g(t))$$

より，$1 - g(t) = Ce^{-at}$ $\therefore g(t) = 1 - Ce^{-at}$($C$ は積分定数)．

[問 2] X の分布関数を $F(x)$ と書くと，条件は

$$1 - F(x+y) = (1-F(x))(1-F(y))$$

と同値．$y=0$ での微分係数を考えると

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=f(0)(1-F(x))$$

となって，$a=f(0)$ とすると (1) より $F(x)=1-Ce^{-ax}$．$F(0)=0$ より $C=1$．したがって $f(x)=ae^{-ax}$．

[問 3] 特性関数が一致することを示す．従う指数分布を $\mathrm{Ex}(a)$ とする．U の特性関数は

$$\begin{aligned}E[e^{itU}]&=a^3\int_0^\infty e^{(it-a)x_1}\,\mathrm{d}x_1\int_0^\infty e^{(it/2-a)x_2}\,\mathrm{d}x_2\int_0^\infty e^{(it/3-a)x_3}\,\mathrm{d}x_3\\&=a^3\frac{1}{a-it}\frac{1}{a-it/2}\frac{1}{a-it/3}\end{aligned}$$

V について，分布関数は $F_V(x)=F(x)^3=(1-e^{-ax})^3$ より，$f_V(x)=3ae^{-ax}(1-e^{-ax})^2$．$V$ の特性関数は

$$\begin{aligned}E[e^{itV}]&=3a\int_0^\infty e^{(it-a)x}(1-e^{-ax})^2\,\mathrm{d}x\\&=3a\int_0^\infty e^{(it-a)x}-2e^{(it-2a)x}+e^{(it-3a)x}\,\mathrm{d}x\\&=3a\left(\frac{1}{a-it}-\frac{2}{2a-it}+\frac{1}{3a-it}\right)\\&=3a\frac{(2a-it)(3a-it)-2(a-it)(3a-it)+(a-it)(2a-it)}{(a-it)(2a-it)(3a-it)}\\&=a^3\frac{1}{a-it}\frac{1}{a-it/2}\frac{1}{a-it/3}\end{aligned}$$

となって一致している．　□

4　2021 年第 1 回

第 1 問　[問 1]，[問 2]，は計算問題．[問 3] は解けず．こういう問題は平面 (空間) の面積 (体積) を求める問題に変換する．途中の積分範囲に場合分けが必要なので注意．

第 2 問　簡単．

第 3 問　[問 1] さっぱりわからず．うまいこと変数変換して，Bx と $x^\top Ax$ が依存する変数に重なりがないことを言う．[問 2] は前問の結果を使えば良い (ので示せていなくても解けるのだが，計算をミスって解けず)．

第 4 問　[問 1] は帰納法による．[問 2] は前問が誘導であることに気づくとできるのだが，失敗．逆行列の計算でも沼った．

問題 4.1: 第 1 問

[問 1] ぬるぽ

[問 2] ｶﾞｯ

[問 3] 確率変数 a,b,c は閉区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．a,b,c はそれぞれ独立であるとき，方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

解答. [問 3] 実数解を持つ条件は，$a=0$ で $b\neq0$ または $c=0$，$a\neq0$ で $b^2-4ac\geq0$ である．前者の確率は 0 なので，後者を考える．

$$\begin{aligned}\Pr\bigl(b^2-4ac\geq0\bigr)&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\chi(b^2/4a\geq c)\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\&=\int_0^1\int_0^1\int_0^{\min\{1,b^2/4a\}}\mathrm{d}c\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^{b^2/4} \mathrm{d}a + \int_{b^2/4}^1 \frac{b^2}{4a} \mathrm{d}a \right) \mathrm{d}b \\
&= \frac{1}{12} - \int_0^1 \frac{b^2}{4} \log \frac{b^2}{4} \mathrm{d}b
\end{aligned}
$$

第二項の積分は $x = b/2$ と置換して

$$
\int_0^1 \frac{b^2}{4} \log \frac{b^2}{4} \mathrm{d}b = 2 \int_0^{1/2} x^2 \log x^2 \mathrm{d}x = 2 \left[\frac{x^3}{3} \log x^2 \right]_0^{1/2} - 4 \int_0^{1/2} \frac{x^3}{3} x \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{6} \log 2 - \frac{1}{18}
$$

したがって

$$
\Pr\left(b^2 - 4ac \geq 0\right) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} \log 2
$$

□

問題 4.2: 第 2 問

問題 4.3: 第 3 問

n 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うとする．n 個の確率変数を要素に持つベクトルを $x = (X_1, \cdots, X_n)^\top$ と表す．

[問 1] B を $m \times n$ の行列，A を n 次対称行列とする．$BA = O$ のとき，二つの確率変数 Bx と $x^\top Ax$ が独立になることを示せ．

[問 2] 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 S^2 が独立であることを示せ．

解答. [問 1] U は n 次対称行列だから，n 次直交行列 U を用いて $U^\top AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) = D$ と対角化できる．ここで r は A のランク．$y = U^\top x$ と定義すると，$x \sim \mathcal{N}(\mu 1_n, \sigma^2 I_n)$ だから $y \sim \mathcal{N}(\mu U^\top 1_n, \sigma^2 I_n)$ となって y の各成分はそれぞれ独立で，$x^\top Ax = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2$．$U = [u_1, \cdots, u_n]$ と書くと $BUD = [\lambda_1 Bu_1, \cdots, \lambda_r Bu_r, 0, \cdots, 0]$ となるが，$BA = O$ より $BUD = O$ だから，$Bu_1 = \cdots Bu_r = 0$ がわかる．したがって $Bx = BUy = y_1 Bu_1 + \cdots + y_n Bu_n = y_{r+1} Bu_{r+1} + \cdots y_n Bu_n$ となる．$x^\top Ax$ は $y_1, \cdots, y_r$ のみに，Bx は $y_{r+1}, \cdots, y_n$ のみに依存しているので，これらは独立である．

[問 2] $B = (1/n) 1_n^\top$ とすると $\bar{X} = Bx$．

$$
A = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

とすれば $S^2 = x^\top Ax$．$BA = O$ なので問 1 より $\bar{X}$ と S^2 は独立．　□

問題 4.4: 第 4 問

[問 1] I_d，O_d をそれぞれ d 次単位行列，零行列として，L を任意の d 次正方行列，R は $I_d - R$ の逆行列が存在するような任意の d 次正方行列とする．行列 M を

$$
M = \begin{bmatrix} I_d & O_d \\ L & R \end{bmatrix}
$$

で定義するとき，任意の自然数 n に対して

$$
M^n = \begin{bmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^n)(I_d - R)^{-1} L & R^n \end{bmatrix}
$$

が成り立つことを示せ.

[問 2] 図の三角柱の頂点を移動する一匹の蟻を考える．頂点 D, E, F のいずれかから等確率でスタートして，三角柱の頂点を移動し，頂点 A, B, C のいずれかに達したら，そこから他の頂点には移動しないものとする．蟻が頂点 D にいるときに，次の時刻に頂点 A, B, C, D, E, F に移動する確率はそれぞれ $(2/5, 0, 0, 2/5, 0, 1/5)$，頂点 E にいるときには $(0, 2/5, 0, 0, 2/5, 1/5)$，頂点 F にいるときには $(0, 0, 3/5, 1/5, 1/5, 0)$ であるとする．

移動開始からの経過時刻を n として，$n \to \infty$ の極限において，頂点 A にいる蟻が頂点 D からスタートした確率を求めよ．必要ならば，次のゲルシュゴリンの定理を用いよ．

(**実対称行列に対するゲルシュゴリンの定理**)：n 次実対称行列 M の i 行目の対角要素 M_{ii} 以外の絶対値の和を M_i とする．

$$M_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |M_{ik}|$$

また，領域

$$D_i = \{z \in \mathbb{R} | |z - M_{ii}| \leq M_i\}$$

を用意する．このとき，M の任意の固有値は D_i のいずれかの内部に存在する．

解答. [問 1] 数学的帰納法を用いる． [問 2] 遷移行列は

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，

$$L = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

によって

$$M = \begin{bmatrix} I_3 & L \\ O_3 & R \end{bmatrix}$$

と書ける．L, R は実対称行列で，$I_3 - R$ は正則なので，$M^\top$ は問 1 の条件を満たす．R についてゲルシュゴリンの定理を用いると，R の任意の固有値が $(-2/5, 3/5)$ に含まれることがわかるので，$\lim_{n\to\infty} R^n = O_3$．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{bmatrix} I_d & ((I_3 - R)^{-1} L)^\top \\ O_3 & O_3 \end{bmatrix}$$

ここで

$$(I_3 - R)^{-1} = \frac{5}{39} \begin{bmatrix} 14 & 1 & 3 \\ 1 & 14 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \therefore (I_3 - R)^{-1} L = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} 28 & 2 & 2 \\ 2 & 28 & 2 \\ 6 & 6 & 27 \end{bmatrix}$$

したがって初期分布を $(0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3)$ として，頂点 A にいる蟻が頂点 D からスタートした確率は

$$\frac{28}{28 + 2 + 6} = \frac{7}{9}$$

□

5　2020 年第 2 回

難しい (涙).

第 1 問　[問 1] はマルコフの不等式．[問 2] はうまい確率密度関数を構成するものだと思い込んで解けず．一様分布を一回噛ませると考えやすい．

第 2 問　計算問題.

第 3 問　腕力.

第 4 問　さっぱりわからず．[問 1] はとりあえず中身の確率密度関数を求めたら気付けるか．[問 2],[問 3] は単体で解ける問題だが，問 1 がわからず思考停止してしまっていた．[問 4] はここまでの問題ができていたら解ける.

問題 5.1: 第 1 問

[問 1] 次の行列の逆行列を求めよ.

[問 2] 以下の問に答えよ.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} E(X_n^2) = 0$ を満たすならば，任意の正の定数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n| > \epsilon) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の正の定数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n| > \epsilon) = 0$ であっても $\lim_{n\to\infty} E(Y_n^2) = 0$ とならないような確率変数列 $\{Y_n\}$ の例を挙げよ.

解答. [問 1]

[問 2] (1) $E(X_n^2) = E(X_n^2(I_{[|X_n|>\epsilon]} + I_{[|X_n|<\epsilon]})) \geq E(X_n^2 I_{[|X_n|>\epsilon]}) \geq \epsilon^2 \Pr(|X_n| > \epsilon)$ より (マルコフの不等式の証明そのもの).

(2) $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数を U として，$Y_n = \sqrt{n} I_{[0\leq U\leq 1/n]}$ で定義する．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\Pr(|Y_n| > \epsilon) = \begin{cases} 0 & (\sqrt{n} \leq \epsilon) \\ \frac{1}{n} & (\sqrt{n} > \epsilon) \end{cases}$$

だから $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n| > \epsilon) = 0$ だが，$\lim_{n\to\infty} E(Y_n^2) = 1$ である.　□

問題 5.2: 第 2 問

解答. [問 1] $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.　[問 3] $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3}$.　□

問題 5.3: 第 3 問

問題 5.4: 第 4 問

狭義単調かつ連続な確率分布関数 $F(x)$ をもつ三つの独立な確率変数 X_1, X_2, X_3 を小さい順に並べたものを $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$，標準指数分布 (Ex(1)) にしたがう三つの独立な確率変数 E_1, E_2, E_3 を小さい順に並べたものを $E_{(1)}, E_{(2)}, E_{(3)}$ とする.

[問 1] $(F^{-1}(e^{-E_{(1)}}), F^{-1}(e^{-E_{(3)}}), F^{-1}(e^{-E_{(3)}}))$ の分布は $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$ の分布に一致することを示せ.

解答. [問 1] $Y = e^{-E_i}(i = 1, 2, 3)$ とおく．$\log Y = -E_i$ だから，一対一に対応している．Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = e^{-\log y}\left|-\frac{1}{y}\right| = 1$$

より，Y は $(0, 1)$ 上の一様分布に従う．$F^{-1}(Y)$ の分布を求めると

$$\Pr\bigl(F^{-1}(Y) < z\bigr) = \Pr(Y < F(z)) = F(z)$$

だから，$X_j(j = 1, 2, 3)$ の分布に等しい．$e^{-E_{(1)}} \geq e^{-E_{(2)}} \geq e^{-E_{(3)}}$ で，F^{-1} は順序を保つので，$(F^{-1}(e^{-E_{(1)}}), F^{-1}(e^{-E_{(3)}}), F^{-1}(e^{-E_{(3)}}))$ の分布は $(X_{(3)}, X_{(2)}, X_{(1)})$ の分布に一致する．

[問 2] [問 3] [問 4] □

6　2019 年第 2 回

簡単な回.

第 1 問　計算問題.

第 2 問　誘導に乗ればできる．最後は Λ と $(I + \Lambda^2)^{-1}$ が可換であることに気付ければわかる.

第 3 問　[問 1] は †King Property† と呼ばれるテクニックだが知っていなくても解ける.

第 4 問　計算問題.

問題 6.1: 第 1 問

解答. [問 1] $625A$.　[問 2] $f(x) = \log 3 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 + O(x^3)$.　[問 3](1) $2 - \sqrt{3}$.　(2) $\frac{\pi}{6}$.　[問 4] $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$. □

問題 6.2: 第 2 問

問題 6.3: 第 3 問

解答. [問 1](1) 1.　(2) $\frac{\pi}{4}$.

[問 2](1) $\frac{1}{x}\log(1 + x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + O(x^3)$.　(2) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ が条件．このときの極限値は $\frac{11e}{24}$. □

問題 6.4: 第 4 問

7　2019 年第 1 回

第 1 問　基本的な問題．[問 3] は e^λ の微分を考えたが，簡単な方法がありそう.

第 2 問　[問 1](2) は，固有値ならば満たすべき条件を書くだけでは不十分．それが実際に存在することを示さなければいけない．[問 2] は解けず．$x = Bx + (I_d - B)x$ の分解に気づけばいけそう.

第 3 問　誘導に乗って計算するだけ.

第 4 問　(X, Y) から (X, Z) への変換をするだけ.

問題 7.1: 第 1 問

問題 7.2: 第 2 問

以下の問では d を 3 以上の整数，I_d を d 次単位行列とする．

[問 1] 行列 A を

$$A = I_d - a_1 a_1^\top - a_2 a_2^\top$$

と定義する．ただし，$a_1, a_2 \in \mathbb{R}^d$ は互いに直交する単位列ベクトルである．このとき次の問に答えよ．

(1) $A^2 = A$ となることを示せ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

[問 2] B を d 次正方行列とする．このとき，B の階数と $I_d - B$ の階数の和が d であるならば，$B^2 = B$ となることを証明せよ．

解答. [問 1](1) $a_1^\top a_2 = a_2^\top a_1 = 0$ に注意して計算すればわかる． (2) 固有値 λ と対応する固有ベクトル v について $A^2 v = Av$ より，$\lambda^2 = \lambda$．したがって $\lambda = 0, 1$．実際 a_1, a_2 は固有値 0 の固有ベクトルになっている．また，$\mathbb{R}^d$ の次元は $d \geq 3$ だから a_1, a_2 に直交するベクトルが存在して，それを a_3 とすると $Aa_3 = a_3$ より固有値 1 の固有ベクトルになっている．

[問 2] $B(I_d - B) = (I_d - B)B = O$ を示す．一般に $x = Bx + (I_d - B)x$ と分解できるので，$\mathrm{Ker}\,(I_d - B) \subset \mathrm{Im}\,B$，$\mathrm{Ker}\,B \subset \mathrm{Im}\,(I_d - B)$ が成り立つ．仮定より，$\dim \mathrm{Im}\,B = r$ とすると $\dim \mathrm{Im}\,(I_d - B) = d - r$．次元定理より $\dim \mathrm{Ker}\,B = d - r$，$\dim \mathrm{Ker}\,(I_d - B) = r$．したがって $\mathrm{Ker}\,(I_d - B) = \mathrm{Im}\,B$，$\mathrm{Ker}\,B = \mathrm{Im}\,(I_d - B)$ がわかる． □

ちなみに，[問 2] の設定の下では $\mathbb{R}^d = \mathrm{Im}\,B \oplus \mathrm{Im}\,(I_d - B) = \mathrm{Ker}\,(I_d - B) \oplus \mathrm{Ker}\,B$ が成り立っている．

問題 7.3: 第 3 問

解答. [問 1] $w_1 = w_2 = 1/2$． [問 2] [問 3] □

問題 7.4: 第 4 問

8　2018 年第 2 回

ボコボコにされました．

第 1 問　計算問題だけど，ちょっと大変．

第 2 問　[問 3] できず．重根持たない多項式作って，最小多項式はそれを割り切るから勿論重根持たない，という流れ．思いつきたかった．

第 3 問　時間かけすぎた．[問 4] は規則性見つけられず，無駄に長いことやった．書き出してみるのは大事．

第 4 問　なんだこれ！マンハッタン距離で分類できると思ったが，嘘だった (涙)．[問 1] はサービスかと思いきやミスしやすい．[問 2]〜[問 4] で一般的なことがわかってから計算しても良いかもしれない．

問題 8.1: 第 1 問

解答. [問 1] [問 2] 0.　[問 3](1) $-\frac{1}{5}\log 6$.　(2) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(2)$.　[問 4] $\frac{1}{6}$. □

問題 8.2: 第 2 問

解答. [問 1] $f(A)=O$ をみたす任意の多項式 $f(x)$ は $f(x)=q(x)\varphi_A(x)+r(x)$, $(\deg r(x)<\deg\varphi_A(x))$ と表せる．ただし $\deg 0=-\infty$ とする．$f(A)=r(A)=0$ だが，$\deg r(x)<\deg\varphi_A(x)$ より $r=0$ である．ゆえに $f(x)$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れる．一意性は，もし $\psi_A(x)$ が $\psi_A(A)=O$ をみたし，$\varphi_A(x)$ と次数が等しく，最高次の係数が 1 ならば $\psi_A(x)=q\varphi_A(x)$ と書けるはず．最高次係数を比較して $q=1$ より，$\psi_A(x)=\varphi_A(x)$.

[問 2] $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ としたとき，$f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$ より $f(P^{-1}AP)=O$ と $f(A)=O$ は同値.

[問 3] $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)$ と定めると，$f(P^{-1}AP)=O=f(A)$．A の最小多項式はこれを割り切るから重根はない.

[問 4] 固有多項式は $f_A(x)=(x-1)^3$．最小多項式はこれを割り切るが，$A-I\neq O$ より重根をもつ．したがって [問 3] の命題の対偶より A は対角化不可能. □

問題 8.3: 第 3 問

解答. [問 1] 0.　[問 2]

$$g_i(x;x_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_i)^2}{|x_0-a_i|}+|x_0-a_i|\right).$$

[問 3] 微分係数が 0 になるところ.

$$x=\frac{2|x_0|}{2|x_0-2|+|x_0|}$$

[問 4] $x_1=\frac{6}{5},x_2=\frac{6}{7},x_3=\frac{6}{11},\cdots$ のように，$x_n=\frac{6}{3+2^n}$ と予想できる．実際そうなっていることが帰納法で示せる．ゆえに $x_n\to 0$. □

[問 4] の別解(法則性が見出せなかった場合): まず，$0<x_n<2$，$x_n\geq 2$ のどちらの場合でも $x_{n+1}\leq x_n$ がわかる．明らかに $0<x_n$．$n\geq 2$ で $x_n\leq x_2=\frac{6}{7}<1$ から $\frac{3}{4}x_n\geq x_{n+1}$ が言えて，0 に収束することがわかる. □

ちなみに，[問 1] は「マンハッタン距離の和を最小にするのは中央値」という競プロでよく使う事実.

問題 8.4: 第 4 問

解答. [問 1] 25/64.

[問 2] $t\geq 1$ で

$$u_t=\sum_{i=1}^{t}f_iu_{t-i}$$

と書けるので,

$$U(s)=u_0+\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{t}f_iu_{t-i}s^t=\sum_{i=1}^{\infty}f_is^i\sum_{t=i}^{\infty}=1+\sum_{i=1}^{\infty}f_is^i\sum_{t=i}^{\infty}u_{t-i}s^{t-i}=1+F(s)U(s)$$

より，$U(s)=1/(1-F(s))$ がわかる.

[問 3]

$$P(T_i=t)=\sum_{t_1+\cdots+t_i=t}f_{t_1}\cdots f_{t_i}$$

で，右辺は $F(s)^i$ の s^t の係数．$F(s)^i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij}s^j$ と書くと，

$$P(T_i \leq t) = \sum_{j=i}^{t} \sum_{t_1+\cdots+t_i=j} f_{t_1}\cdots f_{t_i} = \sum_{j=i}^{t} a_{ij}$$

したがって

$$G_i(s) = \sum_{t=i}^{\infty}\sum_{j=i}^{t} a_{ij}s^t = \sum_{j=i}^{\infty}\sum_{t=j}^{\infty} a_{ij}s^t = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij}s^j \sum_{t=j}^{\infty} s^{t-j} = F(s)^i \sum_{t=0}^{\infty} s^t$$

[問 4] $P(N_t \geq i) = P(T_i \leq t)$ に注意する (「t までに原点に i 回以上戻って来る」ことは「原点に t までに少なくとも i 回戻って来る」ことと等しい).

$$E(N_t) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(N_t = i) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P(N_t = i, N_t \geq j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(N_t \geq j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(T_i \leq t)$$

ここで $P(T_i \leq t)$ は $G_i(s)$ の s^t の係数で，問 3 よりこれは $F(s)^i$ の $s^i, \cdots, s^t$ の係数の和 $\sum_{j=i}^{t} a_{ij}$ である．したがって

$$E(N_t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{t} a_{ij} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} a_{ij} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

ここで [問 2] より，$|F(s)| < 1$ の範囲で $U(s) = 1 + F(s) + F(s)^2 + \cdots$ と展開できて，

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} u_j s^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{1j} + \cdots + a_{jj})s^j$$

より，$u_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$ がわかる．よって

$$E(N_t) = \sum_{j=1}^{t} u_j$$

□

ささやかな Tips：和の順序の入れ替えは，平面に和をとる点を打ってみて，どの順番で足すかを考えてみると良いかもしれない．

9　2018 年第 1 回

第 1 問　計算問題．[問 3] は少し迷った．[問 4] は Schmidt の直交化法を使うだけだが，計算が大変．

第 2 問　基本的な行列の問題．

第 3 問　[問 2] は解けず．X_1^2 の確率密度関数が求まっているので，素直に特性関数の一致を示せばよかった．

第 4 問　[問 1] は難しくて解けず．とりあえず極値条件を考えて，行列っぽいところとベクトルっぽいところを分けて考えると解答に辿り着けそう．[問 2] はやるだけ．[問 3] は問 2 の結果を使うだけ．

問題 9.1: 第 1 問

[問 1]　ぬるぽ

[問 2]　ｶﾞｯ

[問 3]　次の関数を $|x| < 1$ において $x = 0$ の周りに x の 2 次までマクローリン展開せよ．

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

[問 4]　ｵﾏｴﾓﾅｰ

解答. [問 1] [問 2]

[問 3] $f(x)=(1+x)^{1/x}$ とおく．両辺対数を取ると $\log f=\log(1+x)/x$．右辺が $|x|<1$ で

$$\frac{\log(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)$$

で表される ($|x|<1$ で項別微分できる) ことを用いて計算を進めると楽.

$$f(x)=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2+O(x^3)$$

[問 4] □

問題 9.2: 第 2 問

問題 9.3: 第 3 問

[問 1] 実数軸 $\mathbb{R}$ に点 P があり，その一は平均 0，分散 1 の正規分布に従うとする．P の原点からの距離の 2 乗が x より小さい確率を求めて，P の原点からの距離の 2 乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2},\quad x>0$$

であることを示せ.

[問 2] n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に点 Q がありその位置 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ は平均ベクトル 0，分散共分散行列を単位行列とする n 変量正規分布に従うとする．Q の原点からの距離の 2 乗の確率密度関数が

$$\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}x^{n/2-1}e^{-x/2},\quad x>0$$

であることを示せ.

[問 3] 問 2 の分布を自由度 n のカイ二乗分布という．独立な確率変数 X と Y があり，X が自由度 n のカイ二乗分布に従い，Y が自由度 m のカイ二乗分布に従うとき，確率変数

$$X+Y,\quad \frac{X}{X+Y}$$

が独立で，それぞれ自由度 $n+m$ のカイ二乗分布と母数 $(n/2,m/2)$ のベータ分布に従うことを示せ.

解答. [問 1]P の座標を X，確率分布関数を $F(x)$ として $\Pr\bigl(X^2<x\bigr)=\Pr(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x})=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})$ より，確率密度関数は $f_{X^2}(x)=f_X(\sqrt{x})/\sqrt{x}$

[問 2]$X_1,\cdots,X_n$ はそれぞれ独立だから，確率変数 $X_1^2+\cdots+X_n^2$ の特性関数は

$$\phi(t)=\prod_{i=1}^{n}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi x_i}}e^{(it-1/2)x_i}\,\mathrm{d}x_i=(1-2it)^{-n/2}$$

である．一方与えられた確率密度関数に従う確率変数 X の特性関数は

$$\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}\int x^{n/2-1}e^{(it-1/2)x}\,\mathrm{d}x=(1-2it)^{-n/2}$$

となり，一致している.

[問 3]$U=X+Y$，$V=X/(X+Y)$ とすると，(X,Y) と (U,V) は一対一対応する．実際に U,V の確率密度関数を求め，それが u に依存する部分と v に依存する部分に分離できることから，それぞれが従う分布と，独立であることがわかる. □

ちなみに，カイ二乗分布の特性関数の計算の途中で，積分経路が実軸上ではなくなる．この経路を含み，扇形のようにして実軸上を通って戻って来る周回積分を考えると，弧の部分で積分が 0 であることからコーシーの積分定理を用いて実軸上での積分と等しいことが言える．が，これを答案に含む必要があるかは怪しい．

問題 9.4: 第 4 問

次の $x \in \mathbb{R}^p$ についての最大化を考察する．

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} g(x, a_i, b_i)$$

ここで $a_i \in \mathbb{R}$ は定数，$b_i \in \mathbb{R}^p$ は定数ベクトルとし，

$$g(x, a, b) = \exp\{(-(a - b^\top x)^2)\}$$

とする．また，$m \geq p$ と仮定して，行列 $[b_1, \cdots, b_m]$ の階数は p とする．このとき，関数

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{m} g(y, a_i, b_i)(a_i - b_i^\top x)^2$$

を定義し，ベクトル列 $\{x_t | t \geq 1\}$ を，x_t が与えられたとき，$F(x, x_t)$ を最小とする x を x_{t+1} とすることで，順次定める．ここで，x_1 は $\mathbb{R}^p$ の任意に固定された点とする．

[問 1] x_{t+1} を x_t の関数として表せ．

[問 2] 任意のスカラー A と A_0 に対して

$$e^A - e^{A_0} \geq (A - A_0)e^{A_0}$$

が成立することを示せ．

[問 3] 任意の x と y に対して

$$f(x) - f(y) \geq F(y, y) - F(x, y)$$

を示し，任意の $t \geq 1$ に対して $f(x_{t+1}) \geq f(x_t)$ を示せ．

解答. [問 1] $F(x, x_t)$ がある x で最小となる必要条件は

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = -2\sum_i g(x_t, a_i, b_i)(a_i - b_i^\top x_{t+1})(b_i)_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

で，$a = [a_1, \cdots, a_p]^\top$，$B = [b_1, \cdots, b_p]$，$G = \mathrm{diag}(g(x_t, a_1, b_1), \cdots, g(x_t, a_p, b_p))$ とおいたとき

$$BG(a - B^\top x) = 0$$

と表せる．

ここで $BGB^\top$ が正則であることを示す．$BGB^\top y = 0$ とすると，$y^\top BGB^\top y = (B^\top y)^\top G(B^\top y) = 0$ だが，G は正定値だから $B^\top y = 0$．$B^\top$ の階数は p だから，解は $y = 0$ のみ．ゆえに $BGB^\top$ は正則である．

これより $x = (BGB^\top)^{-1}BGa$ が x_{t+1} の候補．$F(x, x_t)$ のヘッセ行列 H を求めると

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = 2\sum_{i=1}^{m} g(x_t, a_i, b_i)(b_i)_j(b_i)_k$$

で，任意の $y \in \mathbb{R}^p$ に対し

$$y^\top Hy = 2\sum_{i=1}^{m} g(x_t, a_i, b_i)(b_i^\top y)^2 > 0$$

より，H は任意の点で正定値だから先の x で F は極小値をとる．したがって $x_{t+1} = (BGB^\top)^{-1}BGa$.

[問 2] 平均値の定理による． [問 3] [問 2] の結果を利用. □

10　2017 年第 1 回

第 1 問　計算問題.

第 2 問　T_n をぐっと睨むと解ける.

第 3 問　[問 1](3) の計算で沼った．[問 2] は解き忘れ．どちらも対角化しようしたが，二階の微分方程式にしたほうが随分楽.

第 4 問　[問 2] は領域の面積問題に置き換えて解く．[問 3] は帰納的にやれば [問 2] の考え方がそのまま使える.

問題 10.1: 第 1 問

[問 1] 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[問 2] k を 0 でない実数，E_n を n 次単位行列とするとき，$AB - BA = kE_n$ を満たす n 次実正方行列 A, B は存在しないことを示せ.

[問 3] 次の関数を 3 次の項までマクローリン展開せよ.

(1) $f(x) = \log(1 + x) + \cos x$

(2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

[問 4] 次の定積分を求めよ

(1)

$$\int_1^2 x \log x \,\mathrm{d}x$$

(2)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \,\mathrm{d}x$$

解答. [問 1] 0

[問 2] 存在するとして，両辺のトレースを取る．左辺は $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$，右辺は $\mathrm{Tr}(kE_n) = nk \neq 0$ より，矛盾.

[問 3] (1)

$$f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

(2)

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$$

[問 4](1) $2\log 2 - 3/4$ (2) $\pi/6$ □

問題 10.2: 第 2 問

$n \times n$ 実正方行列 T_n が次のような形を持つと仮定する．

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

$e^{(n,i)}$ により第 i 成分のみ 1 で残りが 0 の n 次元ベクトルを表す．このとき

$$T_n a^{(n)} = e^{(n,1)}$$

という線形方程式に関して以下の問に答えよ．

[問 1] $n = 2$ のとき $a^{(2)}$ を求めよ．ただし $t_0^2 \neq t_1^2$.

[問 2] $n = 2$ のとき，T_2 が非負定値行列であるための必要十分条件を t_0, t_1 を用いて表せ.

[問 3] $n - 1$ の場合の解 $a^{(n-1)}$ に対し，成分の順序を逆にした $n - 1$ 次元ベクトルを $\bar{a}^{(n-1)}$ とする．このとき

$$T_n \begin{bmatrix} a^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_n \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

を $e^{(n-1,1)}$，$e^{(n-1,n-1)}$，$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(n-1)} t_{n-k}$ を用いて表せ.

[問 4] $a^{(n)}$ を $a^{(n-1)}$，$\bar{a}^{(n-1)}$，および s_n を用いて表せ．ただし $|s_n| \neq 1$ を仮定してよい.

解答. [問 1]

$$T_2^{-1} = \frac{1}{t_0^2 - t_1^2} \begin{bmatrix} t_0 & -t_1 \\ -t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

より

$$a^{(2)} = T_2^{-1} e^{(2,1)} = \frac{1}{t_0^2 - t_1^2} \begin{bmatrix} t_0 \\ -t_1 \end{bmatrix}$$

[問 2] T_2 が非負定値行列であることは T_2 の固有値が全て 0 以上であることと同値．T_2 の固有方程式は

$$\lambda^2 - 2t_0 + (t_0^2 - t_1^2) = 0$$

より $\lambda = t_0 \pm t_1$．したがって $t_0 \geq |t_1|$.

[問 3] $b = [t_1, \cdots, t_{n-1}]^\top$ として，$\bar{b}$ を b の成分の順序を逆にした $n - 1$ 次元ベクトルとする．T_n はこれらを用いて

$$T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} & \bar{b} \\ \bar{b}^\top & t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 & b^\top \\ b & T_{n-1} \end{bmatrix}$$

と書けて，

$$T_n \begin{bmatrix} a^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{n-1} a^{(n-1)} \\ \bar{b}^\top a^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad T_n \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^\top a^{(n-1)} \\ T_{n-1} \bar{a}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

と表せる．$\bar{b}^\top a^{(n-1)} = b^\top a^{(n-1)} = s_n$ である．また，$T_{n-1} = [u_1, \cdots, u_{n-1}] (u_i \in \mathbb{R}^{n-1})$ と表したとき，$\bar{u}_i = u_{n-i}$ が成り立つため，

$$T_{n-1} a^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(n-1)} u_i = e^{(n-1,1)}$$

の両辺のベクトル成分の順序を逆にして

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(n-1)} \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(n-1)} u_{n-i} = T_{n-1} \bar{a}^{(n-1)} = e^{(n-1,n-1)}$$

を得る．したがって

$$T_n\begin{bmatrix} a^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(n-1,1)} \\ s_n \end{bmatrix}, \quad T_n\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_n \\ e^{(n-1,n-1)} \end{bmatrix}$$

[問 4]

$$c_1\begin{bmatrix} e^{(n-1,1)} \\ s_n \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} s_n \\ e^{(n-1,n-1)} \end{bmatrix} = e^{(n,1)}$$

を満たす c_1, c_2 を求めると

$$c_1 = \frac{1}{1-s_n^2}, \quad c_2 = -\frac{s_n}{1-s_n^2}$$

これより

$$a^{(n)} = \frac{1}{1-s_n^2}\begin{bmatrix} a^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{s_n}{1-s_n^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

□

問題 10.3: 第 3 問

次の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

および初期条件

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

からなる初期値問題を考える．ただし A は 2×2 実正方行列とする．

[問 1] A が以下の場合にそれぞれ上の問題を解け．

(1) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

[問 2] A が以下の場合に上の問題を解け．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

解答. [問 1] (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{at} \\ y_0 e^{bt} \end{bmatrix}$$

(2) $x = x_0 e^{at}$ はすぐわかる．$y = C(t)e^{at}$ の形を仮定すると $C = x_0 t + y_0$ とわかる (定数変化法).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{at} \\ (x_0 t + y_0)e^{at} \end{bmatrix}$$

(3) $b = 0$ の場合は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{at} \\ y_0 e^{at} \end{bmatrix}$$

以降は $b \neq 0$ を考える．A を対角化する．固有方程式は

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2) = 0$$

より $\lambda = a+bi, a-bi$．それぞれに対応する固有ベクトルとして

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

がとれる．$P = [v_1, v_2]$ とすれば $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a+bi, a-bi)$ となる．$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 e^{(a+ib)t} \\ v_0 e^{(a-ib)t} \end{bmatrix}$$

がわかる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(u-v) \\ u+v \end{bmatrix}$$

だから，初期値を考えて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}(x_0\cos(bt) - y_0\sin(bt)) \\ e^{at}(x_0\sin(bt) + y_0\cos(bt)) \end{bmatrix}$$

[問 2]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + (x_0+y_0)t \\ y_0 - (x_0+y_0)t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

□

問題 10.4: 第 4 問

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立な確率変数であり，以下の確率密度関数を持つ確率分布に従うものとする．

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x>0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ただし λ は正の定数とする．以下の問に答えよ．

[問 1] X_1 の累積分布関数を求めよ．
[問 2] $Z = X_1 + X_2$ とする．Z の累積分布関数を求めよ．
[問 3] $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする．Y の累積分布関数が次式で与えられることを示せ．

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}\left(1 + \frac{\lambda y}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\right) & (y>0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$$

11　2016 年第 1 回

異常に簡単な回．

第 1 問　計算．

第 2 問　計算だが，[問 2]，[問 3] は多少工夫の余地がある．私はパワーで解きました (懺悔)．

第 3 問　密度関数の対称性を使う．

第 4 問　ルジャンドル多項式．最後の伏線回収がアツい．

問題 11.1: 第 1 問

問題 11.2: 第 2 問

解答. [問 1] 2.　[問 2] [問 3] (1 列目)=(3 列目)+(1/2)(2 列目).　[問 4] 30.7.　$\mathrm{Tr}\bigl(B^\top AB\bigr) = 36$ を用いれば楽.　□

問題 11.3: 第 3 問

問題 11.4: 第 4 問

12　2015 年第 2 回

第 4 問を除き，2016 年〜の問題と傾向がだいぶ違った．それなりに簡単だった．

第 1 問　計算問題.

第 2 問　高校数学？

第 3 問　[問 4] は実際に作らなくてもランクについて言えば良い.

第 4 問　多変数正規分布の変数変換公式を覚えていればできる (覚えていないときついかも).

問題 12.1: 第 1 問

問題 12.2: 第 2 問

問題 12.3: 第 3 問

解答. [問 1] $\mathcal{N}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2, \sigma^2)$ に従う.

[問 2]

[問 3] $X^\top(y - Xw) = 0$.

[問 4]

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 10 & 60 & 30 \\ 5 & 30 & 15 \end{bmatrix}, \quad X^\top y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

で，$X^\top Xw = X^\top y$ の拡大係数行列

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 & 7 \\ 10 & 60 & 30 & 8 \\ 5 & 30 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

のランクは 2 だから，w は一意に定まらない.　□

問題 12.4: 第 4 問

解答. [問 1] $E[|X_1 \cdots X_p|] = E[|X_1|] \cdots E[|X_p|]$ で,

$$E[|X_i|] = \mu_i(2\Phi(\mu_i) - 1) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\mu_i^2/2}$$

より

$$E[|X_1 \cdots X_p|] = \prod_{i=1}^{p} \left(\mu_i(2\Phi(\mu_i) - 1) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\mu_i^2/2} \right)$$

[問 2] $X_1, \cdots, X_p$ が独立だから, $\beta^\top X$ は $\mathcal{N}(\beta^\top \mu, \|\beta\|^2)$ に従う．確率密度関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\|\beta\|} \exp\left(-\frac{(y - \beta^\top \mu)^2}{2\|\beta\|^2} \right)$$

[問 3]

$$P(Y > \alpha) = 1 - P(Y \le \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \beta^\top \mu}{\|\beta\|} \right)$$

[問 4] $P(\beta^\top X > \alpha) = 1 - \Phi(\alpha - \beta^\top \mu)$ より, $\|\beta\| = 1$ の条件のもとで $\beta^\top \mu$ が最大になる β を求める．Lagrange の未定乗数法を用いて,

$$f(\beta) = \beta^\top \mu - \lambda(1 - \beta^\top \beta)$$

として $f(\beta)$ を最大化する β を求める．極値条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \mu + 2\lambda\beta = 0 \quad \therefore \beta = -\frac{1}{2\lambda}\mu$$
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \beta^\top \beta - 1 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm\frac{\|\mu\|}{2}$$

より, $\beta = \mu / \|\mu\|$. □

13　2015 年第 1 回

簡単な回.

第 1 問　計算問題.

第 2 問　線形代数.

第 3 問　誘導に気付ければ.

第 4 問　条件付き確率ミスるな！

問題 13.1: 第 1 問

問題 13.2: 第 2 問

問題 13.3: 第 3 問

問題 13.4: 第 4 問

解答. [問 1] λ.　[問 2](1) $\frac{9}{10}+3\times\frac{1}{10}=1.2$.　(2) 単位時間あたりの不良品の数を N で表す．$\Pr(N=3|A)=\frac{1}{6e}$, $\Pr(N=3)=\frac{1}{6e}\frac{9}{10}+\frac{9}{2e^3}\frac{1}{10}$．ゆえに

$$\Pr(A|N=3)=\frac{\frac{1}{6e}\frac{9}{10}}{\frac{1}{6e}\frac{9}{10}+\frac{9}{2e^3}\frac{1}{10}}=\frac{e^2}{e^2+3}$$

(3)

$$\frac{1}{e}\sum_{y=3}^{\infty}\frac{1}{y!}=\frac{1}{e}\left(e-1-1-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{5}{2e}$$

□