ESTIA 2021 -Transformées-Devoir Maison (texte complet)
A remettre à l'accueil avant 17h le 21/10/2019

Exercice 1

On pose $f(t) = 0$ pour $t < 0$, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq \pi$, $f(t) = -1$ pour $\pi < t \leq 2\pi$ et $f(t) = 0$ pour $t > 2\pi$.

1) Vérifier que $\widehat{f}(x) = 2i\pi e^{-i\pi x} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) sin_c\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ [1]

2) Montrer sans calculs que $\hat{f}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) En appliquant à f la formule de Parseval et en effectuant un changement de variables, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(s)}{s^2} ds$. vérifier ce résultat en utilisant Mupad ou Python.

4) On a vu en TD que si on pose $H(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$, alors on a $\widehat{H}(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Existe t'il une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = H$?

Exercice 2

1) Soit $f = [7, 7, 5, 5, 3, 3, 1, 1]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Calculer le signal obtenu en compressant à 25% et à 50% le signal f. Que remarquez vous ?

Exercice 3

On considère l'image numérisée $A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1) En utilisant l'algorithme rapide sur les lignes et les colonnes de A, calculer la transformée de Walsh de A.

2) Calculer la compression à 25% de A.

Exercice 4

a) On considère l'équation différentielle

$$y"(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 12e^t,$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

Résoudre cette équation en utilisant la transformation de Laplace.

b) Retrouver ce résultat en utilisant Mupad ou Python, et tracer le graphe de la solution obtenue sur l'intervalle $[0, 1]$.

c) Tracer le graphe de la solution sur l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant Matlab (on créera une M-file pour l'équation).

Exercice 5

1. On rappelle que le sinus cardinal est défini par les formules $sin_c(t) = \frac{sin(t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $sin_c(0) = 1$.

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[4, 1, 2, 0]$ et $[1, 8, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $2x^2 + x + 4$ et $8x + 1$, ainsi que le produit 214×81.

4)[2] Utiliser les commandes fft(u,n) et ifft(u,n) de Matlab permettant de calculer par FFT la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier inverse discrète dans $\mathbb{C}^n$ d'un signal u pour calculer $(2x^2 + x + 4)^4(8x + 1)^7$, après avoir choisi un entier $n = 2^k$ qui convient pour ce calcul. Imprimer la fiche de calcul sans afficher les résultats intermédiaires, et comparer le résultat obtenu avec un calcul direct effectué avec Mupad ou Python.

Exercice 6

On considère de nouveau la fonction f de l'exercice 1, définie par les formules $f(t) = 0$ pour $t < 0$, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq \pi$, $f(t) = -1$ pour $\pi < t \leq 2\pi$ et $f(t) = 0$ pour $t > 2\pi$. On pose $g = f * f$.

1) Montrer que $g(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t > 4\pi$, et que $g(t) = \int_0^t f(s)f(t-s)ds$ pour $t \in [0, 4\pi]$. Vérifier plus précisément que $g(t) = t$ pour $0 \leq t \leq \pi$, $g(t) = 4\pi - 3t$ pour $\pi \leq t \leq 2\pi$, $g(t) = 3t - 8\pi$ pour $2\pi \leq t \leq 3\pi$ et $g(t) = 4\pi - t$ pour $3\pi \leq t \leq 4\pi$, et esquisser le graphe de g.

2) Calculer $\hat{g}$ (on pourra utiliser la question 1 de l'exercice 1).

3) En appliquant à g la formule sommatoire de Poisson[3] avec $c = 2\pi$, montrer que $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 7

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère pour n entier, $n \geq 0$, le solide V_n défini par le système d'inéquations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z - n^2 \\ n^2 \leq z \leq n^2 + \frac{2}{2n+1} \end{cases}$$

1) Déterminer la nature géométrique de V_n, et calculer son volume en utilisant le théorème de Fubini.

2) On pose $V = \cup_{n \geq 0} V_n$. Esquisser un dessin de V, et calculer le volume de V.

2. voir le calcul effectué p. 102 dans la dernière version du support de cours
3. voir le théorème 9.3.1 p. 130 de la dernière version du support de cours