ESTIA
Annales Transformées
Années 2011-2018

Table des matières

Chapitre 1

Sujets d'examen

1.1 Examen Transformées du 19 octobre 2011

Exercice 1 (2 points)

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+9k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 2 (3 points)

On considère $f = [3,2,1,0,0,1,2,3]$. Calculer la transformée de Walsh de f par l'algorithme rapide. Calculer la compression à 25% de f en suivant la méthode du cours.

Exercice 3 (3 points)

Soit y la fonction vérifiant $y"(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 4$ pour $x \geq 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

On note Y la transformée de Laplace de y. Calculer $Y(z)$. En déduire la valeur de $y(x)$.

Exercice 4 (3 points)

On s'intéresse à l'étude du filtre récursif causal donné pour $n \geq 0$ par la formule :

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - \frac{y[n-1]}{2}.$$

Calculer le signal de sortie $y = (y[n])_{n\geq 0}$ en fonction du signal d'entrée $x = (x[n])_{n\geq 0}$.

Expliciter le signal de sortie y lorsque le signal d'entrÃ̃ˆe x est tel que $x[n] = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 5 (3 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[1, 5, 9, 0]$ et $[2, 3, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $1 + 5x + 9x^2$ et $2 + 3x$, ainsi que le produit 951×32.

Exercice 6 (3 points)

On pose $f(t) = t^2e^{-t}$ pour $t \geq 0$, $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

1) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Dessiner le graphe de f. En utilisant la table des transformées de Laplace, montrer que l'on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{(1 + ix)^3}.$$

2) La formule de Parseval et la formule d'inversion de Fourier sont-elles applicables à f? Si oui, expliciter les formules obtenues.

Exercice 7 (3 points)

1) On pose $g(x) = x^3$ pour $x \geq 0$. En s'aidant de la table des transformées de Laplace, déterminer la transformée de Laplace de g.

2) On pose $h(x) = 2sin^2(x/2)$ pour $x \geq 0$. En utilisant un peu de trigonométrie et la table des transformées de Laplace, déterminer la transformée de Laplace de h.

3) On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = 2\int_0^x t^3 sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

Déterminer la transformée de Laplace de f.

4) On pose $R(z) = \frac{1}{z^5(z^2+1)}$. Décomposer la fraction rationnelle $R(z)$ en éléments simples.[1] En lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, en déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 8 (hors barême)[2]

Déterminer les images numérisées à 2^{20} pixels qui sont égales à leur compression à 1 millionième.

1. On pourra utiliser l'identité de Bezout $1 = (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1) - z^5 \times z$.
2. Bien entendu, des points supplémentaires seront attribués aux étudiant(e)s ayant résolu l'exercice 8.

1.2 Examen Transformées du 14 novembre 2012

Exercice 1 (2 points)

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(1+x)(1+2x)}$.

2) On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)(n+2k)}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 2 (3 points)

Soit y la fonction vérifiant $y"(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2e^{-3x}$ pour $x \geq 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = -2$.

On note Y la transformée de Laplace de y. Calculer $Y(z)$. En déduire la valeur de $y(x)$.

Exercice 3 (3 points)

On considère $f = [0, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 0]$. Calculer la transformée de Walsh de f par l'algorithme rapide. Calculer les compressions à 25% et 50% de f en suivant la méthode du cours.

Exercice 4 (3 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[1, 4, 0, 0]$ et $[1, 2, 3, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $1 + 4x$ et $1 + 2x + 3x^2$, ainsi que le produit 41×321.

Exercice 5 (3 points)

On considère le filtre récursif causal donné pour $n \geq 0$ par la formule

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - y[n-1],$$

avec la convention $x[-1] = y[-1] = 0$.

Calculer le signal de sortie $y = (y[n])_{n\geq 0}$ en fonction du signal d'entrée $x = (x[n])_{n\geq 0}$. Expliciter le signal de sortie y lorsque le signal d'entrée x est tel que $x[n] = (-1)^n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6 (6 points)

On pose $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $x > 1$, $f(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$.

1) Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(z)$ de f pour $z \neq 0$ et donner la valeur de $\mathcal{L}(f)(0)$.

En déduire que $\hat{f}(x) = \frac{1-e^{-ix}}{ix}$ pour x réel, $x \neq 0$ et que $\hat{f}(0) = 1$.

2) On pose $g = f * f$, $h = f * f * f$. Montrer qu'on a les formules suivantes

$$g(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou si } x > 2,\ g(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = 2 - x \text{ si } 1 \leq x \leq 2,\ h(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou si } x > 3,$$

$$h(x) = \frac{x^2}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq 1,\ h(x) = -\frac{3}{2} + x(3-x) \text{ si } 1 < x \leq 2,\ h(x) = \frac{(x-3)^2}{2} \text{ si } 2 < x \leq 3.$$

Représenter graphiquement f, g et h, et calculer les transformées de Laplace de g et h.

3) En appliquant la formule de Parseval à f et g, donner la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(x)}{x^4}dx$. Calculer de même $\int_0^{+\infty} \frac{sin^6(x)}{x^6}dx$, sachant qu'un calcul effectué sous Mupad donne
$\int_1^2 (-3/2 + x(3-x))^2 dx = 9/20$ (on précisera la commande utilisée pour obtenir ce résultat sous Mupad).

4) Montrer sans calculs que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

5) On pose $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n * f$ pour $n \geq 1$, de sorte que $f_2 = g$ et $f_3 = h$. Vérifier que $f_n(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, et montrer que l'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \ \ \forall n \geq 1$.

6) Montrer que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 0$$ [3]

1.3 Examen Transformées du 7 novembre 2013

Exercice 1 (2 points)

On pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} sin^2(\frac{k\pi}{n})$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 2 (2 points)

Soit y la fonction vérifiant $y"(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 1$ pour $x \geq 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 4, y'(0) = 7$.

On note Y la transformée de Laplace de y. Calculer $Y(z)$. En déduire la valeur de $y(x)$.

Exercice 3 (3 points)

On considère $f = [5, 3, 1, -1, -1, 1, 3, 5]$. Calculer la transformée de Walsh de f par l'algorithme rapide. Calculer la compression à 25% de f en suivant la méthode du cours.

Exercice 4 (3 points)

3. On pourra utiliser la formule d'inversion de Fourier et le théorème de convergence dominée.

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[1, 6, 0, 0]$ et $[1, 4, 5, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $1 + 6x$ et $1 + 4x + 5x^2$, ainsi que le produit 61×541.

Exercice 5 (2 points)

On pose $S := \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 | x^2+y^2+z^2+u^2+v^2 \leq 1\}$, et pour $x^2+y^2 \leq 1$ on pose $S_{(x,y)} = \{(z, u, v) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z, u, v) \in S\}$. Déterminer la nature géométrique de $S_{(x,y)}$. Calculer l'hypervolume $HV(S) := \int \ldots \int_S dxdydzdudv$ en utilisant le théorème de Fubini. [4]

Exercice 6 (8 points)

1) On pose $g(t) = t^2 e^{-2t}, h(t) = sin^2(3t)$ pour $t \geq 0$. En utilisant la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie, calculer les transformées de Laplace de g et h.

2) On pose, pour $t \geq 0$,

$$f(t) = \int_0^t s^2 e^{-2s} sin^2(3(t-s))ds.$$

Calculer la transformée de Laplace de f.

3) On effectue sous Mupad la commande

```
partfrac(36/(z*(z+2)^3*(z^2+36)),z);
```

et on obtient

$$\frac{\frac{13z}{4000} + \frac{27}{2000}}{z^2+36} - \frac{513}{4000(z+2)} - \frac{27}{100(z+2)^2} - \frac{9}{20(z+2)^3} + \frac{1}{8z}$$

Donner la signification mathématique de ce résultat et, en lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, calculer $f(t)$. Indiquer comment faire pour vérifier avec Mupad le résultat obtenu.

4) On considère maintenant g comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, en posant $g(t) = 0$ pour $t < 0$, $g(t) = t^2 e^{-2t}$ pour $t \geq 0$. En utilisant la table des transformées de Laplace, vérifier que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1/4, \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 dt = 3/128, \text{ et } \widehat{g}(x) = \frac{2}{(2+ix)^3}.$$

5) En appliquant la formule de Parseval à g, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$.

6) Vérifier que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, et donner les formules obtenues en appliquant la formule d'inversion de Fourier à $\widehat{g}$.

7) On pose $\phi(t) = 0$ pour $t < 0$, $\phi(t) = t^2 e^{-3t}$ pour $t \geq 0$. Existe t'il une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g * u = \phi$?

4. On rappelle que le volume V d'une sphère de rayon R est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1.4 Examen Transformées du 13 novembre 2014

Exercice 1 (4 points)

1) On pose $h(t) = sin^2(4t)$ pour $t \geq 0$. Calculer la transformée de Laplace de h (on pourra utiliser la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie).

2) On pose $f(t) = \int_0^t (t-s)^5 sin^2(4s) ds$ pour $t \geq 0$. Calculer la transformée de Laplace de f (on pourra faire apparaitre un produit de convolution).

3) On effectue le calcul suivant sous Mupad.

```
partfrac(3840/(z^7*(z^2+64)));
```

$$\frac{15\,z}{65536\,(z^2+64)} - \frac{15}{65536\,z} + \frac{15}{1024\,z^3} - \frac{15}{16\,z^5} + \frac{60}{z^7}$$

En déduire la valeur de $f(t)$.

Exercice 2 (3 points)

1) Soit $f = [1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

3) Calculer le signal obtenu en compressant à 50% le signal f.

Exercice 3 (3 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[3, 2, 3, 0]$ et $[1, 4, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $3x^2 + 2x + 3$ et $4x + 1$, ainsi que le produit 323×41.

Exercice 4 (3 points)

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
Résoudre cette équation en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 5 (3 points)

1) On pose $R(z) = \frac{z+1}{z(z-5)}$. Décomposer la fraction rationnelle $R(z)$ en éléments simples.

2) On considère le filtre récursif causal défini par la formule

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 5y[n-1] \text{ pour } n \geq 1,$$

avec les conventions $x[-1] = y[-1] = 0$.

a) Calculer $y[n]$ en fonctions des valeurs de $x[m], 0 \leq m \leq n$.

b) Expliciter la formule obtenue si si $x(n) = (-1)^n$ pour $n \geq 1$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 6 (4 points)

On a vu à la feuille de TD 1 que si on pose $H(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$, alors $\widehat{H}(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

1) En appliquant la formule de Parseval, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

2) Montrer que si on pose $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ alors $\hat{f}(x) = \pi e^{-|x|}$.

3) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{c^2}{c^2+n^2}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ (on pourra utiliser la formule sommatoire de Poisson).

4) Indiquer comment vérifier numériquement ce résultat sous Mupad dans le cas où $n = 1$ et $n = 2$.

1.5 Examen Transformées du 5 novembre 2015

Exercice 1 (2 points)

1) On pose $h(t) = cos^2(3t)$ pour $t \geq 0$. Calculer la transformée de Laplace de h (on pourra utiliser la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie).

2) On pose, pour $t \geq 0$,

$$f(t) = \int_0^t (t-s)^5 cos^2(3s) ds.$$

Calculer la transformée de Laplace de f (on pourra faire apparaitre un produit de convolution).

Exercice 2 (3 points)

1) Soit $f = [-3, -1, 1, 3, 3, 1, -1, -3]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Calculer le signal obtenu en compressant à 50% le signal f.

Exercice 3 (3 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[1, 7, 1, 0]$ et $[5, 3, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $x^2 + 7x + 1$ et $3x + 5$, ainsi que le produit 171×35.

Exercice 4 (2 points)

1) On pose $R(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+1)}$. Décomposer la fraction rationnelle $R(z)$ en éléments simples.
2) On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
Résoudre cette équation en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 5 (3 points)

Pour $n \geq 1$, on pose $V_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq (z-n)^2, n \leq z \leq n + 3.2^{-n}\}$, et on pose $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (z-2)^2, 2 \leq z \leq \frac{5}{2}\}$.
1) Préciser la nature géométrique de V_n et W, et calculer leur volume en utilisant le théorème de Fubini.
2) On pose $V := \cup_{n\geq 1} V_n$. Esquisser une figure représentant V, et calculer son volume.

Exercice 6 (3 points)

1) On pose $R(z) = \frac{z-4}{z(z-1)}$. Décomposer la fraction rationnelle $R(z)$ en éléments simples.
2) On considère le filtre récursif causal défini par la formule

$$y[n] = x[n] - 4x[n-1] + y[n-1] \text{ pour } n \geq 1,$$

avec les conventions $x[-1] = y[-1] = 0$.

a) Calculer $y[n]$ en fonctions des valeurs de $x[m], 0 \leq m \leq n$.

b) Expliciter la formule obtenue si si $x(n) = 4^n$ pour $n \geq 1$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 7 (4 points)

On pose $f(t) = sin(t)$ et $g(t) = e^{-t}sin(t)$ pour $t \geq 0$.

1) Vérifier que $\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(f)(z+1)$ pour $Re(z) > -1$, et en déduire que $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{(z+1)^2+1}$ en utilisant la table des transformées de Laplace.

2) On prolonge g à $\mathbb{R}$ en posant $g(t) = 0$ pour $t < 0$. Esquisser le graphe de g, vérifier que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, calculer $\widehat{g}(x)$ en utilisant la question 1 pour $x \in \mathbb{R}$ et vérifier que $\lim_{x\to\pm\infty} x^2\widehat{g}(x) = -1$. En déduire que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dx}{2-x^2+2ix}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) En utilisant la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-2t}sin^2(t)dt$. En utilisant une importante formule du cours, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2}$.

4) On rappelle que si on pose $H(t) = e^{-|t|}$, on a $\widehat{H}(x) = \frac{2}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Existe-t'il $y \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $H * y = g$?

5) (hors barême) En appliquant la formule sommatoire de Poisson à la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\pi)$, calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-1}{4n^2+1}$ (on justifiera l'utilisation de la formule sommatoire de Poisson).

1.6 Examen Transformées du 27 octobre 2016

Exercice 1 (2 points)

On pose $E_n = [n, n + \frac{10}{3^n}]$, $E = \cup_{n\geq 1} E_n$. Esquisser un dessin de E et calculer $m(E)$.

Exercice 2 (3 points)

1) Soit $f = [-4, -2, 0, 2, 2, 0, -2, -4]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Calculer le signal obtenu en compressant à 50% le signal f.

Exercice 3 (3 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[3, 8, 2, 0]$ et $[1, 6, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $2x^2 + 8x + 3$ et $6x + 1$, ainsi que le produit 283×61.

Exercice 4 (3 points)

1) On pose $R(z) = \frac{2z+14}{(z-1)(z-5)(z+1)}$. Décomposer la fraction rationnelle $R(z)$ en éléments simples.

2) On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 12e^{-x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

Résoudre cette équation en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 5 (3 points)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose, pour $x > 1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) cos\left(\frac{xt}{x^2 - 1}\right) dt.$$

1) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que F est continue sur $]1, +\infty[$.

2) On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Calculer F en fonction de $\hat{f}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

3) Déterminer les limites éventuelles de la fonction F quand $x \to 1^+$, ou quand $x \to +\infty$.

Exercice 6 (6 points)

On pose $f(t) = e^{-|t|} sin^2(t/2)$, $H(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et on pose $g(t) = sin^2(t/2)$ pour $t \geq 0$. On a vu en TD que $\widehat{H}(x) = \frac{2}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Esquisser le graphe de f, et montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2) Vérifier que l'on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \mathcal{L}(g)(1 + ix) + \mathcal{L}(g)(1 - ix).$$

3) En utilisant la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie, donner la transformée de Laplace de g, et montrer que $\widehat{f}(x) = \frac{2-3x^2}{(x^2+1)(x^4+4)}$.

4) Montrer que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-3x^2)e^{itx}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx$.

5) Montrer que l'on a $sin^4(t/2) = \frac{3}{8} - \frac{cos(t)}{2} + \frac{cos(2t)}{8}$.

En utilisant par exemple la table des transformées de Laplace, vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} sin^4(t/2)dt = \frac{3}{80}$. En utilisant une importante formule du cours, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-3x^2)^2}{(x^2+1)^2(x^4+4)^2}dx$.

6) Existe t'il $u \in L^1(R)$ telle que $f * u = H$?

7) En utilisant la formule sommatoire de Poisson, calculer $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-6n^2}{(4n^2+1)(4n^4+1)}$.

8) (hors barême) Soit ϕ une fonction mesurable bornée sur $[0, +\infty[$. On pose $\psi(t) = e^{-|t|}\phi(|t|)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\widehat{\psi}(x) = \mathcal{L}(\phi)(1 + ix) + \mathcal{L}(\phi)(1 - ix)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On effectue le calcul suivant avec Mupad.

```
a :=z->transform : :laplace(-cos(t)/4+sin(t)/2,t,z) ;
simplify(a(1+I*x)+a(1-I*x)) ;
```

$z \to transform :: laplace\left(-\frac{cos(t)}{4} + \frac{sin(t)}{2}, t, z\right)$;

$-\frac{3x^2-2}{2(x^4+4)}$

Montrer que l'équation de convolution $H * y = f$ admet une unique solution $y \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer cette solution.

1.7 Examen Transformées du 2 novembre 2017 (durée 2h)

Exercice 1 (4 points)

1) Soit $f = [-6, -4, -2, 0, 0, 2, 4, 6]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Calculer la compression à 50% de f.

Exercice 2 (4 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[2, 5, 6, 0]$ et $[4, 1, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $6x^2 + 5x + 2$ et $x + 4$, ainsi que le produit 652×14.

Exercice 3 (4 points)

1) On pose $f(t) = e^{-2t}$ pour $t \geq 0$. Déterminer la transformée de Laplace de f (on pourra effectuer un calcul direct ou utiliser la table des transformées de Laplace).

2) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z-1)(z+1)(z+2)}$.

3) On considère l'équation différentielle

$$y"(t) - y(t) = 3e^{-2t}.$$

avec les condition initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Résoudre cette équation en utilisant la transformation de Laplace.

4) Indiquer comment retrouver les résultats des questions 2 et 3 avec Mupad.

Exercice 4 (5 points)

On pose de nouveau $f(t) = e^{-2t}$ pour $t \geq 0$, et on pose $g = f * f$, c'est à dire que $g(t) = \int_0^t f(s)f(t-s)ds$ pour $t \geq 0$.

1) Montrer par un calcul direct que $g(t) = te^{-2t}$ pour $t \geq 0$. Retrouver ce résultat en utilisant la table des transformées de Laplace.

2) On prolonge f et g à $]-\infty, +\infty[$ en posant $f(t) = g(t) = 0$ pour $t < 0$. Esquisser un tracé des graphes de f et g. Montrer que $\hat{f}(x) = \frac{1}{(2+ix)}$ et $\hat{g}(x) = \frac{1}{(2+ix)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) Montrer sans calculs que $\hat{f}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

4) En utilisant par exemple la table des transformées de Laplace, calculer $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-4t}$. En utilisant la formule de Parseval, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$.

5) On rappelle que si p est la "fonction porte" définie par la formule $p(t) = 1$ si $|t| \leq 1$ et $p(t) = 0$ si $|t| > 1$, alors $\hat{p}(x) = \frac{2sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\hat{p}(0) = 2$. Existe-t'il une fonction u intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $f * u = p$?

Exercice 5 (3 points)

On note E l'ensemble des images numérisées à 16 pixels qui sont égales à leur compression à 25%. Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 4, et donner une base de cet espace.

1.8 Examen Transformées du 9 novembre 2018 (durée 2h)

Exercice 1 (4 points)

1) Soit $f = [12, 10, 8, 6, 6, 8, 10, 12]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Calculer la compression à 50% de f.

Exercice 2 (4 points)

1) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^4$.

2) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $[3, 4, 1, 0]$ et $[4, 3, 0, 0]$ par FFT, décimation temporelle.

3) En déduire le produit des polynômes $x^2 + 4x + 3$ et $3x + 4$, ainsi que le produit 143×34.

Exercice 3 (4 points)

1) On pose $f(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$. Déterminer la transformée de Laplace de f (on pourra effectuer un calcul direct ou utiliser la table des transformées de Laplace).

2) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(z) = \frac{2-6z}{(z+1)(z-1)(z-3)}$.

3) On considère l'équation différentielle

$$y"(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 8e^{-t}.$$

avec les condition initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$.

Résoudre cette équation en utilisant la transformation de Laplace.

4) Indiquer comment étudier cette équation différentielle avec Matlab, Mupad ou Python (choisissez un seul de ces 3 logiciels).

Exercice 4 (5 points)

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire. On note f^+ la restriction de f à $[0, +\infty[$, c'est à dire que $f^+(t) = f(t)$ pour $t \geq 0$. Montrer que l'on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{L}(f^+)(ix) + \mathcal{L}(f^+)(-ix).$$

2) On pose $u(t) = e^{-t}cos(t)$ et $v(t) = u^2(t) = e^{-2t}cos^2(t)$ pour $t \geq 0$. En utilisant la table des transformées de Laplace et un peu de trigonométrie, calculer les transformées de Laplace de u et v. En déduire que $\int_0^{+\infty} u^2(t)dt = \frac{3}{8}$.

3) On pose $f(t) = e^{-|t|}cos(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et esquisser le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

4) Montrer que $\hat{f}(x) = \frac{2x^2+4}{x^4+4}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser les questions 1 et 2).

5) Montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4} e^{itx} dx$.

6) En utilisant la formule de Parseval, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+2)^2}{(x^4+4)^2} dx$.

7) On rappelle que si on pose $H(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{H}(x) = \frac{2}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$. L'équation de convolution $H * y = f$ possède-t'elle une solution $y \in L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 5 (3 points)

1) On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{n}{3^n}, n - \frac{4}{n} \leq z \leq n\}.$$

Déterminer la nature géométrique de V_n, et calculer son volume en utilisant le théorème de Fubini.

2) On pose $V = \cup_{n \geq 1} V_n$. Esquisser un dessin de V, et calculer son volume.

Chapitre 2

Corrigés

2.1 Corrigé de l'examen Transformées du 19 octobre 2011

Exercice 1

On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+9\frac{k^2}{n^2}} = \left[\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right]$, avec $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$.
On reconnait une somme de Riemann de la forme $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})$, avec $a=0$, $b=1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$. On sait alors que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$, c'est-à-dire vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+9x^2}$. Dans cette derniÃ‹re intÃˆgrale, on effectue le changement de variables $u=3x$. On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{3}\left[arctan(u)\right]_0^3$$

$$= \frac{arctan(3)}{3} - \frac{arctan(0)}{3} = \frac{arctan(3)}{3}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{arctan(3)}{3}$.

Exercice 2

On commence par calculer la transformée de Walsh de $f = [3, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 3]$ par l'algorithme rapide.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	3	2	1	0	0	1	2	3
1e étape	5	1	1	1	1	-1	5	-1
2e étape	6	2	4	0	6	-2	-4	0
$\mathcal{W}_3(f)[k]$	12	0	0	0	0	4	8	0

On écrit la matrice de Walsh W_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les lignes étant indexées par un entier k, $0 \leq k \leq 7$; on obtient alors le nombre $n(k)$ des changements de lignes de la ligne d'indice k, $0 \leq k \leq 7$,

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$n(k)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Pour la compression à 25%, on conserve les coefficients d'indice k de la transformée de Walsh pour lesquels $0 \leq n(k) \leq 1$, et on annulle les autres. La compression du signal donné s'obtiennent ensuite en calculant la transformée de Walsh inverse, ce qui consiste à calculer la transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

On obtient $\mathcal{W}_3(f)_{25\%} = [4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{25\%}[k]$	4	0	0	0	0	0	0	0
1e étape	12	12	0	0	0	0	0	0
2e étape	12	12	12	12	0	0	0	0
$8f_{25\%}[k]$	12	12	12	12	12	12	12	12
$f_{25\%}[k]$	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2

La compression de f à 25% est donc égale à $[3/2, 3/2, 3/2, 3/2, 3/2, 3/2, 3/2, 3/2]$.

Exercice 3

1) Soit y la fonction cherchée, et posons $Y = \mathcal{L}(y)$. D'après la table des transformées de Laplace, on a

$$\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) = zY(z),$$

$$\mathcal{L}(y'')(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) - 4.$$

Comme la transformée de Laplace de la fonction $x \to 1$ est égale à $\frac{1}{z}$, l'équation devient

$$z^2Y(z) - 4 + 5zY(z) + 4Y(z) = \frac{4}{z}.$$

On obtient

$$(z^2+4z+5)Y(z) = 4+\frac{4}{z}, \;\; Y(z) = \frac{4z+4}{z(z^2+5z+4)} = \frac{4z+4}{z(z+1)(z+4)} = \frac{1}{z(z+4)}.$$

D'après le Cours d'algèbre, on sait qu'il existe des réels a, b vérifiant

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1}.$$

En multipliant par z et en faisant $z = 0$, on obtient $a = 1$, en multipliant par $z + 1$ et en faisant $z = -4$, on obtient $b = -1$.

On a alors

$$Y(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+4}.$$

En lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on obtient

$$y(t) = 1 - e^{-4t}.$$

Exercice 4

Posons $X(z) = \mathcal{Z}(x)(z), Y(z) = \mathcal{Z}(y)(z), x_{(1)}[n] = x[n-1], y_{(1)}[n] = y[n-1]$ pour $n \geq 0$, avec les conventions $x[-1] = y[-1] = 0$.

En utilisant la table des transformées en z, on obtient

$$\mathcal{Z}(x_{(1)})(z) = z^{-1}X(z), \mathcal{Z}(y_{(1)})(z) = z^{-1}Y(z),$$

ce qui donne

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) - \frac{z^{-1}Y(z)}{2}.$$

En multipliant par z, on obtient

$$(z+1/2)Y(z) = (z-1)X(z), Y(z) = \frac{z-1}{z+1/2}X(z).$$

On va suivre la méthode du cours, en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{z-1}{z(z+1/2)}$. On a

$$\frac{z-1}{z(z+1/2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1/2}.$$

En multipliant par z et en faisant $z = 0$, on obtient $a = -2$, et en multipliant par $z + 1/2$ et en faisant $z = -1/2$, on obtient $b = 3$. Ceci donne

$$\frac{z-1}{z(z+1/2)} = -\frac{2}{z} + \frac{3}{z+1/2}, \ \frac{z-1}{z+1/2} = -2 + \frac{3z}{z+1/2},$$

et on a

$$Y(z) = -2X(z) + \frac{3z}{z+1/2}X(z).$$

On consulte la table des transformées en z.

$u[n]$	$\mathcal{Z}(u)(z)$
a^n	$\frac{z}{z-a}$

Donc si on pose $u[n] = \frac{(-1)^n}{2^n}$, on a

$$Y(z) = -2X(z)+3\mathcal{Z}(u)(z)X(z) = -2X(z)+3\mathcal{Z}(u*x)(z) = \mathcal{Z}(-2x+3u*x)(z).$$

On a alors $y = -2x + 3u * x$, et pour $n \geq 0$,

$$y[n] = -2x[n] + 3\sum_{p=0}^{n}(-1)^p 2^{-p} x[n-p].$$

Donc $y[0] = x[0]$, et on a, pour $n \geq 1$,

$$y[n] = x[n] + 3\sum_{p=1}^{n}(-1)^p 2^{-p} x[n-p].$$

Supposons maintenant que $x[n] = \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$. On obtient $y[0) = x[0] = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$y[n] = x[n] + 3\sum_{p=1}^{n}(-1)^p 2^{-p} 2^{-n+p} = 2^{-n} + 3 \times 2^{-n}\sum_{p=1}^{n}(-1)^p.$$

Comme $\sum\limits_{p=1}^{n}(-1)^p = 0$ pour n pair, et comme $\sum\limits_{p=1}^{n}(-1)^p = -1$ pour n impair, on obtient

$$\begin{cases} y[n] = x[n] = \frac{1}{2^n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ y[n] = -2x[n] = -\frac{1}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 5

1) 1) La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On applique la FFT aux deux signaux $f = [1, 5, 9, 0]$ et $g = [2, 3, 0, 0]$.

On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	1	5	9	0
$rev(f)[m]$	1	9	5	0
étape 1	10	-8	5	5
étape 2, $\hat{f}(m)$	15	$-8-5i$	5	$-8+5i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	2	3	0	0
$rev(g)[m]$	2	0	3	0
étape 1	2	2	3	3
étape 2, $\hat{g}(m)$	5	$2-3i$	-1	$2+3i$

de longueur 4 avec les coefficients de p et q, complétés par des zéros.

3) On a $f = \tilde{p}$, où $\tilde{p}$ est le signal formé par les coefficients de $p = 1 + 5x + 9x^2$, complétés à droite par un zéro pour obtenir un signal de longueur 4, et $g = \tilde{q}$, où $\tilde{q}$ est le signal formé par les coefficients de $q = 2 + 3x$, complétés à droite par deux zéros pour obtenir un signal de longueur 4. Comme $d^o(p) + d^o(q) = 3 < 4$, le signal formé des coefficients du produit pq est égal à la transformée de Fourier inverse de $\hat{\tilde{p}}\hat{\tilde{q}} = \hat{f}\hat{g}$.

On a

$$\hat{f}.\hat{g} = [75, -31 + 14i, -5, -31 - 14i].$$

On va donc appliquer la FFT inverse à $h = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$h[m]$	75	$-31+14i$	-5	$-31-14i$
$rev(h)[m]$	75	-5	$-31+14i$	$-31-14i$
étape 1	70	80	-62	$28i$
étape 1	8	52	132	108
$\mathcal{F}^{-1}(h)$	2	13	33	27

Ceci donne

$$pq = 3 + 13x + 33x^2 + 27x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(1+5x+9x^2)(2+3x) = 2+10x+18x^2+3x+15x^2+27x^3 = 2+13x+33x^2+27x^3.$$

On a alors

$$951 \times 32 = p(10)q(10) = pq(10) = 2 + 130 + 3300 + 27000 = 30432,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 6

1) On pose $f(t) = t^2e^{-t}$ pour $t \geq 0$, $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On a

$$\lim_{t\to+\infty} t^2|f(t)| = \lim_{t\to+\infty} t^4e^{-t} = 0,$$

puisque "l'exponentielle l'emporte sur la puissance." Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, il résulte alors du critère de Cauchy que $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$. Donc $f \in L^1(\mathbb{R})$, puisque $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

De même on a $\lim_{t\to+\infty} t^2|f(t)|^2 = \lim_{t\to+\infty} t^6e^{-2t} = 0$, et il résulte de nouveau du critère de Cauchy que $\int_0^{+\infty} |f(t)|^2dt < +\infty$. Donc $f \in L^2(\mathbb{R})$, puisque $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Le graphe de f reste à inclure.

On donne un extrait de la table des transformées de Laplace

$f(x)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
x^ne^{ax}	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$Re(z) > a$

En appliquant ce résultat quand $a = -1$, on voit que pour $Re(z) > -1$ on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} = \frac{2}{(z+1)^3}.$$

En particulier on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e{-}ixtdt = \frac{2}{(1+ix)^3}.$$

2) Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, la formule de Parseval est applicable à f, donc $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t} dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Notons que

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t} dt = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4},$$

puisque cette intégrale est la valeur en zéro de la transformée de Laplace de la fonction $t \to t^4 e^{-2t}$, qui d'après la table est égale à $\frac{4!}{(z+2)^5}$. On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{16},$$

ce qui peut se vérifier directement, par exemple en décomposant la fraction rationnelle $\frac{1}{(x^2+1)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et en faisant appel au logarithme complexe, voir le cours d'algèbre.

On a $|\hat{f}(x)| = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Comme $\int_{\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [arctg(x)]_{\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty$, on voit que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de Fourier est donc applicable à f, et on a

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dx}{(1+ix)^3} = 0 \text{ pour } x < 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dx}{(1+ix)^3} = t^2 e^{-t} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 7

On redonne un extrait de la table des transformées de Laplace

$f(x)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
1	$\frac{1}{z}$	$Re(z) > 0$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$Re(z) > a$
$cos(ax)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$Re(z) > 0$

1) Ici $g(x) = x^3$ pour $x \geq 0$, et on a d'après la table, pour $Re(z) > 0$,

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{3!}{z^4} = \frac{6}{z^4}.$$

2) On a $2sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$. D'après la table des transformées de Laplace on voit que si $f(x) = 1$ pour $x \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \frac{1}{z}$ pour $Re(z) > 0$, et que si $f(x) = \cos(x)$ pour $x \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ pour $Re(z) > 0$. Par linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{(z^2+1)} = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

pour $Re(z) > 0$.

3) La fonction f est définie pour $x \geq 0$ par la formule

$$f(x) = 2\int_0^x t^5 sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

Donc $f = g*h$, et $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z)$ sur l'intersection des domaines de définition de $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(h)$. La transformée de Laplace de f est donc définie pour $Re(z) > 0$, et on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z) = \frac{6}{z^5(z^2+1)}.$$

4) On a l'identité

$$(z^2+1)(z^4 - z^2 + 1) - z^6 = 1.$$

On obtient

$$\frac{1}{z^5(z^2+1)} = \frac{(z^2+1)(z^4-z^2+1)-z^6}{z^5(z^2+1)} = \frac{z^4-z^2+1}{z^5} - \frac{z}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} - \frac{z}{z^2+1},$$

$$\mathcal{L}(h)(z) = \frac{6}{z} - \frac{6}{z^3} + \frac{6}{z^5} - \frac{6z}{z^2+1}.$$

En lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on a alors

$$h(x) = 6 - 3x^2 + \frac{x^4}{4} - 6cos(x).$$

Exercice 8

On classe de 1 à 1048576 les 1 million quarante huit mille cinq cent soixante seize coefficients d'une matrice 1024×1024. Le coefficient le plus petit, qui donne le seul pixel survivant de la transformée de Walsh d'une image numérisée pour une compression â un milionnième, est le coefficient d'indice $(0,0)$. Donc une image numérisée A à 1 048 576 pixels est égale à sa compression 2-D à 1 millionnième si et seulement si sa transformée de Walsh $\mathcal{W}_{20}(A)$ a tous ses coefficients nuls sauf éventuellement celui d'indice $(0,0)$. Autrement dit A est égale à sa compression à 1 millionnième si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{W}_{20}(A) = \lambda B$, soit $A = \lambda \mathcal{W}^{-1}(B)$, où B est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(0,0)$ qui est égal à 1.

BW_{20} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première colonne qui sont égaux à 1, et $\mathcal{W}_{20}(B) = W_{20}BW_{20}$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donc $\mathcal{W}_{20}^{-1}(B)$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 2^{-20}.

Donc les images numérisées qui sont égales à leur compression à 1 millionnième sont **les images constantes, ce qui correspond à un gris uniforme**.

2.2 Corrigé de l'examen Transformées du 14 novembre 2012

Exercice 1

1) La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(1+x)(1+2x)}$ est de la forme

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1+2x},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En multipliant par $x+1$ et en faisant $x = -1$, on obtient $a = -1$, et en multipliant par $1+2x$ et en faisant $x = -1/2$, on obtient $b = 2$. Ceci donne

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} = -\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x}.$$

On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)(n+2k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\frac{1}{(1+k/n)(1+2k/n)}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n),$$

avec $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+2x)}$. On reconnait une somme de Riemann de la forme $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})$, avec $a = 0$, $b = 1$. On sait alors que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$, c'est-à-dire vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+2x)}$.On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+2x)} = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{2dx}{1+2x} = [-ln(1+x) + ln(1+2x)]_0^1$$

$$= -ln_2 + ln1 - +ln3 - ln1 = ln3 - ln2.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = ln3 - ln2$.

Exercice 2

1) Soit y la fonction cherchée, et posons $Y = \mathcal{L}(y)$. D'après la table des transformées de Laplace, on a

$$\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z) - 1,$$

$$\mathcal{L}(y'')(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) - z + 2.$$

De même on a d'après la table des transformées de Laplace

f(x)	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f)$
e^{ax}	$\frac{1}{z+a}$	Re(z) > -a

L'équation devient

$$z^2Y(z) + 3zY(z) + 2Y(z) - z + 2 - 3 = \frac{2}{z+3}.$$

On obtient

$$(z^2+3z+2)Y(z) = z+1+\frac{2}{z+3} = \frac{z^2+4z+5}{z+3}, \; Y(z) = \frac{z^2+4z+5}{(z+1)(z+2)(z+3)}.$$

On va maintenant décomposer la fraction rationnelle obtenue en éléments simples, c'est à dire déterminer trois réels a, b, c vérifiant

$$\frac{z^2+4z+5}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z+2} + .\frac{c}{z+3}.$$

En multipliant par $z+1$ et en faisant $z = -1$, on obtient $a = 1$, en multipliant par $z+2$ et en faisant $z = -2$, on obtient $b = -1$, et en multipliant par $z+3$ et en faisant $z = -3$, on obtient $c = 1$.

On a alors

$$Y(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3}.$$

En lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on obtient

$$y(x) = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x}.$$

Exercice 3

On commence par calculer la transformée de Walsh de $f = [0, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 0]$ par l'algorithme rapide.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	0	2	4	6	6	4	2	0
1e étape	2	-2	10	-2	10	2	2	2
2e étape	12	-4	-8	0	12	4	8	0
$\mathcal{W}_3(f)[k]$	24	0	0	0	0	-8	-16	0

On écrit la matrice de Walsh W_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les lignes étant indexées par un entier k, $0 \le k \le 7$; on obtient alors le nombre $n(k)$ des changements de lignes de la ligne d'indice k, $0 \le k \le 7$,

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$n(k)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Pour la compression à 25%, on conserve les coefficients d'indice k de la transformée de Walsh pour lesquels $0 \le n(k) \le 1$, et on annulle les autres. La compression du signal donné s'obtiennent ensuite en calculant la transformée de Walsh inverse, ce qui consiste à calculer la transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

On obtient $\mathcal{W}_3(f)_{25\%} = [24, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{25\%}[k]$	4	0	0	0	0	0	0	0
1e étape	24	24	0	0	0	0	0	0
2e étape	24	24	24	24	0	0	0	0
$8f_{25\%}[k]$	24	24	24	24	24	24	24	24
$f_{25\%}[k]$	3	3	3	3	3	3	3	3

La compression de f à 25% est donc égale à $[3,3,3,3,3,3,3,3]$.

Pour la compression à 50%, on conserve les coefficients d'indice k de la transformée de Walsh pour lesquels $0 \leq n(k) \leq 3$, et on annulle les autres. La compression du signal donné s'obtiennent ensuite en calculant la transformée de Walsh inverse, ce qui consiste à calculer la transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

On obtient $\mathcal{W}_3(f)_{50\%} = [24,0,0,0,0,0,0,-16,0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{50\%}[k]$	24	0	0	0	0	0	-16	0
1e étape	24	24	0	0	0	0	-16	-16
2e étape	24	24	24	24	-16	-16	16	16
$8f_{50\%}[k]$	8	8	40	40	40	40	8	8
$f_{50\%}[k]$	1	1	5	5	5	5	1	1

La compression de f à 25% est donc égale à $[1,1,5,5,5,5,1,1]$.

On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0,1,2,3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère les deux signaux

$$f = [1,4,0,0] \text{ et } g = [1,2,3,0]$$

de longueur 4, qui sont en fait formés avec les coefficients de p et q, complétés par des zéros.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	1	4	0	0
$rev(f)[m]$	1	0	4	0
étape 1	1	1	4	4
étape 2, $\hat{f}(m)$	5	$1-4i$	-3	$1+4i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	2	3	0
$rev(g)[m]$	1	3	2	0
étape 1	4	-2	2	2
étape 2, $\hat{g}(m)$	6	$-2-2i$	2	$-2+2i$

On pose maintenant $p = 1+4x$ et $q = 1+2x+3x^2$. Les coefficients du produit pq s'obtiennent par convolution **acyclique** sur $\mathbb{Z}^+$ des suites $[1, 4, 4, 0, 0, 0...]$ et $[1, 2, 3, 0, 0, ...]$. Comme le degré du produit pq est égal à 3, les coefficients potentiellement non nuls de pq sont donnés par les termes $h[0], h[1], h[2], h[3]$ du produit de convolution **cyclique** $h := f \underset{4}{*} g$.

On a alors $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$, et h s'obtient comme la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}.\hat{g} = [30, -10-6i, -6, -10+6i]$.

On va donc appliquer la FFT inverse à $\hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$(\hat{f}.\hat{g})[m]$	30	$-10-6i$	-6	$-10+6i$
$rev(\hat{f}.\hat{g})[m]$	30	-6	$-10-6i$	$-10+6i$
étape 1	24	36	-20	$12i$
étape 2	4	24	44	48
h	1	6	11	12

Ceci donne

$$h = [1, 6, 11, 12], \ pq = 1 + 6x + 11x^2 + 12x^3,$$

ce que confirme le calcul direct

$$(1+4x)(1+2x+3x^2) = 1+2x+3x^2+4x+8x^2+12x^3 = 1+6x+11x^2+12x^3.$$

On a alors

$$41 \times 321 = p(10)q(10) = pq(10) = 1 + 60 + 1100 + 12000 = 13161,$$

ce que confirme bien sûr aussi un calcul direct.

Exercice 5

On s'intéresse à l'étude du filtre récursif causal donné pour $n \geq 0$ par la formule

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - y[n-1],$$

avec la convention $x[-1] = y[-1] = 0$.

On note X la transformée en z du signal $x = (x[n])_{n\geq 0}$ et on note Y la transformée en z du signal $y = (y[n])_{n\geq 0}$. On obtient

$$Y(z) = 2X(z)+3z^{-1}X(z)-z^{-1}Y(z), (1+z^{-1})Y(z) = (2+3z^{-1})X(z),$$

ce qui donne

$$Y(z) = \frac{2z+3}{z+1}X(z).$$

Posons $R(z) = \frac{2z+3}{z+1}$. On va décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{R(z)}{z}$. Cette décomposition est de la forme

$$\frac{2z+3}{z(z+1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1}.$$

En multipliant par z et en faisant $z = 0$ on obtient $a = 3$, et en multipliant par $z+1$ et en faisant $z = 2$ on obtient $b = -1$.

On a donc

$$\frac{2z+3}{z(z+1)} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z+1}, \quad \frac{2z+3}{(z+1} = 3 - \frac{z}{z+1},$$

$$Y(z) = 3X(z) - \frac{z}{z+1}X(z).$$

La table de la transformée en z unilatérale donne

$u[n]$	$\mathcal{Z}(u)(z)$	$Dom(\mathcal{Z}(u))$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > a$

Posons $u[n] = (-1)^n$ pour $n \geq 0$. Par linéarité on obtient

$$Y(z) = 3X(z) - \mathcal{Z}(u)(z)X(z) = 3\mathcal{Z}\left(x - u * x\right)(z).$$

Donc $\mathcal{Z}(y) = \mathcal{Z}(3x - u * x)$ et on a

$$y = 3x - u * x,$$

$$y[n] = 3x[n] - \sum_{p=0}^{n} x[p](-1)^{n-p} = 3x[n] + (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p x[p] = 2x[n] + (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p x[p]$$

Si $x[n] = (-1)^n$ pour tout $n \geq 0$, on obtient

$$y[n] = 2 = (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{2p} = 2 + n(-1)^{n+1}.$$

Exercice 6

1) On procède à un calcul direct. Pour $z \neq 0$, on a

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^1 e^{-zt}dt \left[-\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^1 = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

Pour $z = 0$ on a $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 dt = 1$.
On a alors, pour $x \neq 0$,

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{L}(f)(ix) = \frac{1 - e^{-ix}}{ix} = 2e^{-i\frac{x}{2}} \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = e^{-i\frac{x}{2}} sin_c\left(\frac{x}{2}\right),$$

formule qui reste valable pour $x = 0$ car $sin_c(0) = 1$.

2) Soit u une fonction nulle pour $x < 0$, continue par morceaux pour $x \geq 0$. Posons $\phi(x) = 0$ pour $x < 0$, $\phi(x) = 1$ pour $x \geq 0$, $\psi(x)(x) = \phi(x-1)$. On a $f = \phi - \psi$ donc $u * f = u * \phi - u * \psi$, ce qui donne $(u * f)(x) = 0$ pour $x < 0$. Pour $0 \leq x \leq 1$ on a

$$(u*f)(x) = (u*\phi)(x) - (u*\psi)(x) = \int_0^x u(t)\phi(x-t)dt - \int_0^x u(t)\phi(x-t-1)dt = \int_0^x u(t)dt.$$

Pour $x \geq 1$, on a

$$(u*f)(x) = (u*\phi)(x) - (u*\psi)(x) = \int_0^x u(t)\phi(x-t)dt - \int_0^x u(t)\phi(x-t-1)dt$$

$$= \int_0^x u(t)dt - \int_0^{x-1} u(t)dt.$$

Finalement, si on note U la primitive de u nulle pour $x \leq 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(u * f)(x) = U(x) - U(x-1).$$

Pour $u = f$, on obtient $U(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $U(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$, $U(x) = U(1) = 1$ pour $x \geq 1$. Ceci donne

$$\begin{cases} g(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \\ g(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) = 2 - x \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \\ g(x) = 0 \text{ pour } x > 2 \end{cases}$$

Pour $u = g = f * f$, on obtient $U(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $U(x) = \frac{x^2}{2}$ pour $0 \leq x \leq 1$.

Pour $1 \leq x \leq 2$, on a

$$U(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^x g(t)dt = U(1) + \int_1^t (2-t)dt$$

$$= \frac{1}{2} + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{1}{2} + 2x - 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

On a enfin $U(x) = U(2) = 1$ pour $x \geq 2$. Ceci donne

$$\begin{cases} h(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \\ h(x) = \frac{x^2}{2} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \\ h(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} = -\frac{3}{2} + x(3-x) \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \\ h(x) = 1 - (-1 + 2(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{(x-3)^2}{2} \text{ pour } 2 \leq x \leq 3 \\ h(x) = 0 \text{ pour } x \geq 3. \end{cases}$$

On a, pour $z \neq 0$,

$$\mathcal{L}(g)(z) = (\mathcal{L}(f)(z))^2 = \frac{(1-e^{-z})^2}{z^2}, \mathcal{L}(h)(z) = (\mathcal{L}(f)(z))^3 = \frac{(1-e^{-z})^3}{z^3},$$

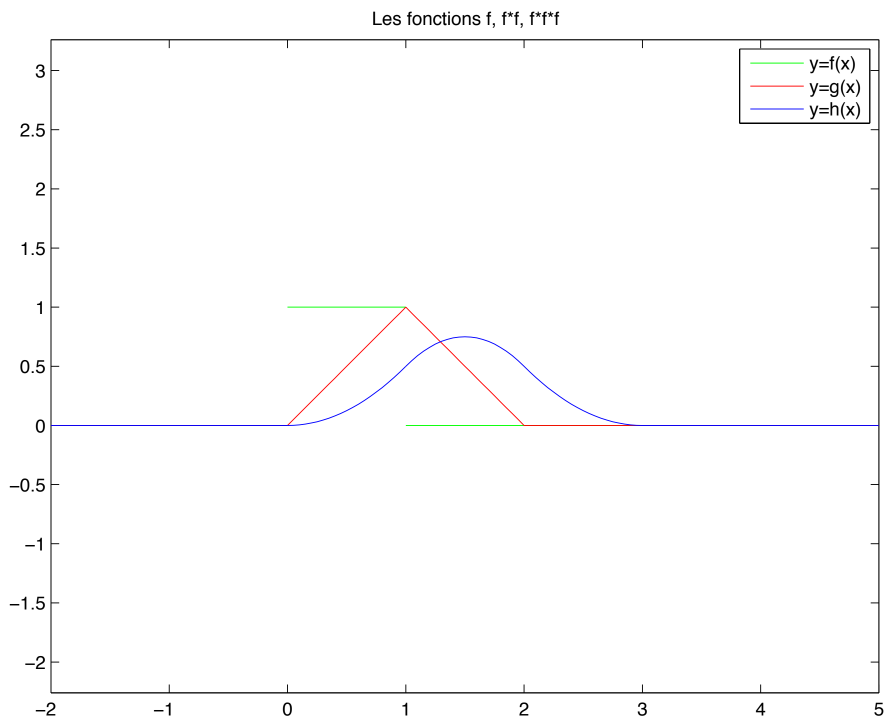
et $\mathcal{L}(g)(0) = \mathcal{L}(h)(0) = 1$.

On représente f, g et h sous Matlab

```
x0=[-2:0.05:0];
x1=[0:0.05:1];
x2=[1:0.05:2];
x3=[2:0.05:3];
x4=[3:0.05:5];
y0=polyval([0],x0);
y1=polyval([1],x1);
y2=polyval([0],x2);
y3=polyval([0],x3);
y4=polyval([0],x4);
z0=polyval([0],x0);
z1=x1; z2=polyval([2],x2)-x2;
z3=polyval([0],x3);
z4=polyval([0],x4);
u0=polyval([0],x0);
u1=x1.^2/2;
u2=polyval([-3/2],x2)+3*x2-x2.^2;
u3=(1/2)*(polyval([3],x3)-x3).^2;
u4=polyval([0],x4);
plot(x1,y1,'green');
hold on
plot(x1,z1,'red');
hold on
plot(x1,u1,'blue');
hold on
plot(x0,y0,'green');hold on;plot(x2,y2,'green');
hold on;plot(x3,y3,'green');hold on;plot(x4,y4,'green');
hold on
plot(x0,z0,'red');hold on;plot(x2,z2,'red');hold on;
plot(x3,z3,'red');hold on;plot(x4,z4,'red');
hold on;
plot(x0,u0,'blue');hold on;plot(x2,u2,'blue');
hold on; plot(x3,u3,'blue');hold on;plot(x4,u4,'blue');
```

```
axis equal
legend('y=f(x)', 'y=g(x)','y=h(x)');
title('Les fonctions f, f*f, f*f*f');

print -depsc trans12
```



3) On a

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} 4\frac{sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx.$$

Donc on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Le graphe de la fonction g est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$, donc on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

D'autre part

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(x)|^2 dx = \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^4(x/2)}{x^4}dx$$
$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^4(x)}{x^4}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(x)}{x^4}dx.$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(x)}{x^4}dx = \frac{\pi}{3}.$$

Le calcul de $\int_0^1 (-3/2 + x(3-x))^2 dx$ se fait avec la commande.

```
int((-3/2+x*(3-x))^2,x=1..2)
```

On obtient $9/20$. Ceci donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x)dx = \int_0^1 \frac{x^4}{4}dx + \int_1^2 (-3/2+x(3-x))^2 dx + \int_2^3 \frac{(x-3)^2}{4}dx$$
$$= 2\int_0^1 \frac{x^2}{4}dx + \int_2^3 \frac{(x-3)^2}{4}dx = \frac{9}{20} + \frac{2}{20} = \frac{11}{20}.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(x)|^2 dx = 32\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^6(x/2)}{x^6}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^6(x)}{x^6}dx = 4\int_0^{+\infty} \frac{sin^6(x)}{x^6}dx.$$

On déduit alors de la formule de Parseval que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^6(x)}{x^6}dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x)dx = \frac{11\pi}{40}.$$

Pour vérifier ce résultat sous Mupad, on utilise la commande

```
int(sin^6(x)/x^6,x=0..infinity);
```

et on retrouve la même valeur.

4) Si $u \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, on a, d'après la formule d'inversion de Fourier, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x)e^{ixt}dx = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{u}}(-t),$$

et u coincide presque partout sur $\mathbb{R}$ avec une fonction continue. En particulier si u admet une limite à droite et une limite à gauche en $x_0 \in \mathbb{R}$, c'est deux limites sont égales.

Donc $\hat{\hat{f}} \notin L^1(\mathbb{R})$, puisque $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$ et $\lim_{t\to 0^-} f(t) = 0$.

On a $f_1(x) = f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Comme $f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt$, une récurrence immédiate montre que $f_n(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}, n \geq 1$.

D'autre part on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_0^1 dx = 1$. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$. On a alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)dx\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1.$$

On voit donc par récurrence que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$ pour $n \geq 1$. On peut aussi remarquer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \hat{f}_n(0)$. Comme $f_{n+1} = f_n * f$, on a $\hat{f}_{n+1}(0) = \hat{f}_n(0)\hat{f}(0) = \hat{f}_n(0)$ pour $n \geq 1$, et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \hat{f}_n(0) = \hat{f}_1(0) = \hat{f}(0) = 1 \;\; \forall n \geq 1.$$

5) On a vu que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(x)|dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}dx = \pi < +\infty$. Pour $x \neq 0$, on a $|\hat{f}(x)| = |\frac{sinx}{x}| < 1$.

Donc $|\hat{f}_n(x)| = |f(x)|^n = |\hat{g}||f(x)|^n \leq |\hat{g}(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, et $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$. On obtient, d'après la formule d'inversion de Fourier, pour $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$,

$$|f_n(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\infty}^{+\infty} \hat{f}_n(x)e^{ixt}dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n(x)|dx.$$

Donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} f_n(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n(x)|dx$. D'autre part on a $|\hat{f}_n(x)| = \left|\frac{sin(x)}{x}\right|^n$ pour $x \neq 0$, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty}|\hat{f}_n(x)| = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

De plus on a, pour $n \geq 2$,

$$|\hat{f}_n(x)| \leq |g(x)|, \text{avec } g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il résulte alors du théorème de convergence dominée que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n(x)|dx = 0, \text{ et } \lim \sup_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t)| = 0.$$

2.3 Corrigé de l'examen Transformées du 7 novembre 2013

Exercice 1

On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right),$$

avec $f(x) = sin^2(x)$, $a = 0, b = 1$. On reconnait une somme de Riemann, et on sait alors que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$, c'est-à-dire vers $\int_0^1 sin^2(\pi x)dx$. On obtient :

$$\int_0^1 sin^2(\pi x)dx = \int_0^1 \frac{1-cos(2\pi x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1) Soit y la fonction cherchée, et posons $Y = \mathcal{L}(y)$. D'après la table des transformées de Laplace, on a

$$\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z) - 4,$$

$$\mathcal{L}(y'')(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - 7 = z^2Y(z) - 4z - 7.$$

De même on a d'après la table des transformées de Laplace

f(x)	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{z}$	Re(z) > 0

L'équation devient

$$z^2Y(z) - 3zY(z) + 2Y(z) - 4z + 12 - 7 = \frac{1}{z}.$$

On obtient

$$(z^2-3z+2)Y(z) = 4z-5+\frac{1}{z} = \frac{4z^2-5z+1}{z}, \ Y(z) = \frac{4z^2-5z+1}{z(z-1)(z-2)}.$$

L'équation $4z^2 - 5z + 1 = 0$ admet 1 pour racine évidente et le produit de ses racines est égal à $1/4$, donc $4z^2 - 5z + 1 = 4(z - 1)(z - 1/4) = (z-1)(4z-1)$. On obtient

$$Y(z) = \frac{4z-1}{z(z-2)}.$$

On procède à une décomposition en éléments simples.

$$\frac{4z-1}{z(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-2}.$$

En multipliant par z et en faisant $z = 0$, on obtient $a = \frac{1}{2}$, en multipliant par $z-2$ et en faisant $z = 2$, on obtient $b = \frac{7}{2}$.

On a alors

$$Y(z) = \frac{1}{2z} + \frac{7}{2(z-2)}.$$

En lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on obtient

$$y(x) = \frac{1+7e^x}{2}.$$

Exercice 3

On commence par calculer la transformée de Walsh de $f = [0, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 0]$ par l'algorithme rapide.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	5	3	1	-1	-1	1	3	5
1e étape	8	2	0	2	0	-2	8	- 2
2e étape	8	4	8	0	8	-4	-8	0
$\mathcal{W}_3(f)[k]$	16	0	0	0	0	-8	16	0

On écrit la matrice de Walsh W_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les lignes étant indexées par un entier k, $0 \leq k \leq 7$; on obtient alors le nombre $n(k)$ des changements de lignes de la ligne d'indice k, $0 \leq k \leq 7$,

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$n(k)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Pour la compression à 25%, on conserve les coefficients d'indice k de la transformée de Walsh pour lesquels $0 \leq n(k) \leq 1$, et on annulle les autres. La compression du signal donné s'obtiennent ensuite en calculant la transformée de Walsh inverse, ce qui consiste à calculer la transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

On obtient $\mathcal{W}_3(f)_{25\%} = [16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{25\%}[k]$	4	0	0	0	0	0	0	0
1e étape	16	16	0	0	0	0	0	0
2e étape	16	16	16	16	0	0	0	0
$8f_{25\%}[k]$	16	16	16	16	16	16	16	16
$f_{25\%}[k]$	2	2	2	2	2	2	2	2

La compression de f à 25% est donc égale à $[2,2,2,2,2,2,2,2]$.

Pour la compression à 50%, on conserve les coefficients d'indice k de la transformée de Walsh pour lesquels $0 \leq n(k) \leq 3$, et on annulle les autres. La compression du signal donné s'obtiennent ensuite en calculant la transformée de Walsh inverse, ce qui consiste à calculer la transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

On obtient $\mathcal{W}_3(f)_{50\%} = [16,0,0,0,0,0,0,16,0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{50\%}[k]$	16	0	0	0	0	0	16	0
1e étape	16	16	0	0	0	0	16	16
2e étape	16	16	16	16	16	16	-16	-16
$8f_{50\%}[k]$	32	32	0	0	0	0	32	32
$f_{50\%}[k]$	4	4	0	0	0	0	4	4

La compression de f à 25% est donc égale à $[4,4,0,0,0,0,4,4]$.

Exercice 4

1) On a, avec les notations du cours, $\omega_4 = e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. Donc la matrice de Fourier A_4 est donnée par la formule

$$A_4 = \begin{pmatrix} i^0 & i^0 & i^0 & i^0 \\ i^0 & i^{-1} & i^{-2} & i^{-3} \\ i^0 & i^{-2} & i^{-4} & i^{-6} \\ i^0 & i^{-3} & i^{-6} & i^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

La transformée de Fourier discrète d'un signal $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ est alors donnée par la formule $\hat{f} = fA_4$, c'est à dire que l'on a

$$[\hat{f}[0], \hat{f}[1], \hat{f}[2], \hat{f}[3]] = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

2)

On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère les deux signaux

$$f = [1, 6, 0, 0] \text{ et } g = [1, 4, 5, 0]$$

de longueur 4, qui sont en fait formés avec les coefficients de p et q, complétés par des zéros.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	1	6	0	0
$rev(f)[m]$	1	0	6	0
étape 1	1	1	6	6
étape 2, $\hat{f}(m)$	7	$1-6i$	-5	$1+6i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	4	5	0
$rev(g)[m]$	1	5	4	0
étape 6	-4		4	4
étape 2, $\hat{g}(m)$	10	$-4-4i$	2	$-4+4i$

3) On considère maintenant $p = 1 + 6x$ et $q = 1 + 4x + 5x^2$. Les coefficients du produit pq s'obtiennent par convolution **acyclique** sur $\mathbb{Z}^+$ des suites $[1, 6, 0, 0, 0, 0...]$ et $[1, 4, 5, 0, 0, ...]$. Comme le degré du produit pq est égal à 3, les coefficients potentiellement non nuls de pq sont donnés par les termes $h[0], h[1], h[2], h[3]$ du produit de convolution **cyclique** $h := f \underset{4}{*} g$.

On a alors $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$, et h s'obtient comme la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}.\hat{g} = [70, -28+20i, -10, -28-20i]$.

On va donc appliquer la FFT inverse à $\hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$(\hat{f}.\hat{g})[m]$	70	$-28+20i$	-10	$-28-20i$
$rev(\hat{f}.\hat{g})[m]$	70	-10	$-28+20i$	$-28-20i$
étape 1	60	80	-56	$40i$
étape 2	4	40	116	120
h	1	10	29	30

Ceci donne

$$f \overset{(4)}{*} g = [1, 10, 29, 30], \ pq = 1 + 10x + 29x^2 + 30x^3,$$

ce que confirme le calcul direct

$$(1+6x)(1+4x+5x^2) = 1+4x+5x^2+6x+24x^2+30x^3 = 1+10x+29x^2+30x^3.$$

On a alors

$$61 \times 541 = p(10)q(10) = pq(10) = 1 + 100 + 2900 + 30000 = 33001,$$

ce que confirme bien sûr aussi un calcul direct.

Exercice 5

Pour $x^2 + y^2 < 1$, on a

$$S_{(x,y)} := \{(z, u, v \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z, u, v) \in S\} = \{(z, u, v \in \mathbb{R}^3 \mid z^2+u^2+v^2 \leq 1-x^2-y^2\}.$$

Il s'agit donc de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{1-x^2-y^2}$.

On a $S_{(x,y)} \neq \emptyset$ si et seulement si $x^2+y^2 \leq 1$. On obtient, d'après le théorème de Fubini

$$HV(S) = \int\int\int_S dxdydzdudv = \int\int_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int\int\int S_{(x,y)}dzdudv\right)dxdy$$
$$= \frac{4\pi}{3}\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy.$$

Pour calculer cette dernière intégrale on passe en coordonnées polaires en posant $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, ce qui donne $dxdy = rdrd\theta$. On obtient, en posant $s = r^2$,

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \int_0^2 \pi\left(\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}rdr\right)d\theta = 2\pi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}rdr$$
$$= \pi\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}ds = \left[-\frac{2}{5}(1-s)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Ceci donne

$$HV(S) = \frac{8\pi^2}{15}.$$

Exercice 6

1) On a $sin^2(t) = \frac{1-cos(2t)}{2}$. D'autre part on a, d'après la table des transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
1	$\frac{1}{z}$	$Re(z) > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$Re(z) > a$
$cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$Re(z) > 0$

.

On obtient

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{2}{(z+2)^3} \text{ pour } Re(z) > -2,$$

$$\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2(z^2+36)} = \frac{18}{z(z^2+36)} \text{ pour } Re(z) > 0.$$

2) On a, pour $t \geq 0$,

$$f(t) = \int_0^t s^2 e^{-2s} sin^2(3(t-s))ds = (g*h)(t).$$

On obtient

$$f = g*h,\ \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} - \frac{z}{(z+2)^3(z^2+36)}$$

$$= \frac{36}{z(z+2)^3(z^2+36)} \text{ pour } Re(z) > 0.$$

3) Le calcul effectué avec Mupad donne la décomposition en éléments simples réelle suivante

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{36}{z(z+2)^3(z^2+36)}$$

$$= \frac{\frac{13z}{4000} + \frac{27}{2000}}{z^2+36} - \frac{513}{4000(z+2)} - \frac{27}{100(z+2)^2} - \frac{9}{20(z+2)^3} + \frac{1}{8z}.$$

On complète l'extrait de la table des transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
$sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$Re(z) > 0$

.

On obtient

$$f(t) = \frac{13cos(6t)}{4000} + \frac{9sin(6t)}{4000} - e^{-2t}\left(\frac{513}{4000} + \frac{27t}{100} + \frac{9t^2}{40}\right) + \frac{1}{8}.$$

On vérifie ce résultat par un calcul d'intégrale avec Mupad.

```
int((s^2)*exp(-2*s)*(sin(3*(t-s)))^2, s=0..t);
```

$$\frac{13\cos(6\,t)}{4000}+\frac{9\sin(6\,t)}{4000}-\frac{e^{-2\,t}\,(900\,t^2+1080\,t+513)}{4000}+\frac{1}{8}$$

```
simplify(1080/4000)
```

$$\frac{27}{100}$$

4) Posons $u(t) = t^2, v(t) = t^4$. On a $\mathcal{L}(u)(z) = \frac{2}{z^3}$ et $\mathcal{L}(v)(z) = \frac{4!}{z^5}$ pour $Re(z) > 0$, et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \mathcal{L}(u)(2) = \frac{1}{4}, \int_{\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \mathcal{L}(v)(4) = \frac{24}{1024} = \frac{3}{128},$$

$$\widehat{g}(x) = \mathcal{L}(g)(ix) = \frac{2}{(2+ix)^3}.$$

5) La formule de Parseval donne ici

$$\frac{3}{128} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x)\|^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{3\pi}{256}.$$

6) On a

$$lim_{x\to++\infty} x^3|\widehat{g}(x)| = lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(\sqrt{4+x^2})^3} = lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{4/x^2+1})^3} = 1.$$

Donc d'après le critère de Cauchy on a $\int_0^{+\infty} |\widehat{g}(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^0 |\widehat{g}(x)|dx < +\infty$ puisque $|\widehat{g}(x)| = |\widehat{g}(-x)|$. Donc $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.

On obtient, d'après la formule d'inversion de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(2+ix)^3} dx = g(t) \begin{cases} = 0 \text{ si } t < 0 \\ = t^2 e^{-2t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

7) D'après la table des transformées de Laplace, on a $\widehat{\phi}(x) = \frac{2}{(3+ix)^3}$.

S'il existait $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g * u = \phi$, on aurait

$$lim_{|x|\to+\infty}\frac{\widehat{\phi}(x)}{\widehat{g}(x)} = lim_{|x|\to+\infty}\widehat{u}(x) = 0.$$

Mais ceci est absurde puisque $lim_{|x|\to+\infty}\frac{\widehat{\phi}(x)}{\widehat{g}(x)} = lim_{|x|\to+\infty}\frac{(2+ix)^3}{(3+ix)^3} = 1$. Donc l'équation de convolution $g * u = \phi$ n'admet pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

2.4 Corrigé de l'examen Transformées du 13 novembre 2014

Exercice 1

1) On a $\sin^2(4t) = \dfrac{1-\cos(8t)}{2}$. D'après la table des transformées de Laplace on voit que si $f(t) = 1$ pour $t \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \frac{1}{z}$ pour $\Re(z) > 0$, et que si $f(t) = \cos(8t)$ pour $t \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \dfrac{z}{z^2+64}$ pour $\Re(z) > 0$. Par linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2(z^2+64)} = \frac{32}{z(z^2+64)},$$

pour $\Re(z) > 0$.

2) La fonction f est définie pour $x \geq 0$ par la formule

$$f(t) = \int_0^t (t-s)^5 \sin^2(4(s))\, ds.$$

Si on pose $g(t) = t^5$ et $h(t) = \sin^2(4t)$ pour $t \geq 0$, on a pour $t \geq 0$

$$f(t) = \int_0^t g(t-s)h(s)ds = (g * h)(t).$$

Donc $f = g*h$ est le produit de convolution et $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z)$ sur l'intersection des domaines de définition de $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(h)$. D'après la table des transformées de Laplace, on a $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{5!}{z^6}$ pour $\Re(z) > 0$. La transformée de Laplace de f est donc définie pour $\Re(z) > 0$, et on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z) = \frac{120}{z^6}\left(\frac{32}{z(z^2+64)}\right) = \frac{3840}{z^7(z^2+64)}.$$

3) Le calcul ci-dessous donne la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}(f)(z)$.

```
partfrac(3840/(z^7*(z^2+64)));
```

$$\frac{15\,z}{65536\,(z^2+64)} - \frac{15}{65536\,z} + \frac{15}{1024\,z^3} - \frac{15}{16\,z^5} + \frac{60}{z^7}$$

On lit maintenant de droite à gauche la table des transformées de Laplace.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
1	$\frac{1}{z}$	$Re(z) > 0$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$Re(z) > 0$
$cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$Re(z) > 0$

On obtient, puisque $2! = 2$, $4! = 24$ et $6! = 720$

$$f(t) = \frac{15}{65536}cos(8t) - \frac{15}{65536} + \frac{15}{2048}t^2 - \frac{15}{128}t^4 + \frac{t^6}{12}$$

$$= -\frac{15}{32768}sin^2(4t) + \frac{15}{2048}t^2 - \frac{15}{128}t^4 + \frac{t^6}{12}.$$

Un calcul d'intégrale direct sous Mupad confirme ce résultat.

```
int((t-s)^5*(sin(4*s))^2,s=0..t);
```

$$\frac{t^6}{12} - \frac{5\,t^4}{128} + \frac{15\,t^2}{2048} - \frac{15\,\sin(4\,t)^2}{32768}$$

Exercice 2

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	1	3	1	3	3	1	3	1
étape 1, 2 par 2	4	-2	4	-2	4	2	4	2
étape 2, 4 par 4	8	-4	0	0	8	4	0	0
étape 3, $\mathcal{W}_3(f)[k]$	16	0	0	0	0	-8	0	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [16, 0, 0, 0, 0, -8, 0, 0].$$

2) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de laligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Donc ici on garde les coefficients associés aux indices $0, 2, 4, 6$ et on annulle les autres. On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$	16	0	0	0	0	0	0	0
étape 1, 2 par 2	16	16	0	0	0	0	0	0
étape 2, 4 par 4	16	16	16	16	0	0	0	0
étape 3, 8 par 8,	16	16	16	16	16	16	16	16
division par 8, $f_{0,5}$	2	2	2	2	2	2	2	2

On obtient

$$f_{0,5} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2].$$

Exercice 3

1) Comme $e^{\frac{2i\pi}{4}} = i$, la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [3, 2, 3, 0]$ et $g = [1, 4, 0, 0]$ de longueur 4.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a + b$	$a - b$

a	b	c	d
$a + c$	$b + i^{-1}d = b - id$	$a - c$	$b - i^{-1}d = b + id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	3	2	3	0
$rev(f)[m]$	3	3	2	0
étape1	6	0	2	2
étape 2, $\hat{f}(m)$	8	$-2i$	4	$2i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	4	0	0
$rev(g)[m]$	1	0	4	0
étape 1	1	1	4	4
étape 2, $\hat{g}(m)$	5	$1 - 4i$	-3	$1 + 4i$

On obtient

$$\hat{f}.\hat{g} = [40, -8 - 2i, -12, -8 + 2i].$$

Les signaux f et g sont constitués par les coefficients des polynômes p et q complétés par des zéros, ce qui fait que les coefficients de la convolution cyclique de f et g coincident avec les coefficients du polynôme pq, puisque $d^o(p) + d^o(q) < 4$. On obtient donc les coefficients du produit pq en appliquant la FFT inverse à $h = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$h[m]$	40	$-8-2i$	-12	$-8+2i$
$rev(h)[m]$	40	-12	$-8-2i$	$-8+2i$
étape 1	28	52	-16	$-4i$
étape 2	12	56	44	48
$\mathcal{F}^{-1}(h)$	3	14	11	12

Ceci donne

$$pq = 3 + 14x + 11x^2 + 12x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(3+2x+3x^2)(1+4x) = 3+2x+3x^2+12x+8x^2+12x^3 = 3+14x+11x^2+12x^3.$$

On a alors

$$323 \times 41 = p(10)q(10) = pq(10) = 3 + 140 + 1100 + 12000 = 13243,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4$, avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 2$. Notons Y la transformée de Laplace de y. On a $\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$ et $\mathcal{L}(y")(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) - 2$.

On obtient

$$z^2Y(z)-2+4zY(z)+4Y(z) = \frac{4}{z}, \ (z^2+4z+4)Y(z) = \frac{4}{z}+2 = \frac{2z+4}{z},$$

$$Y(z) = \frac{2z+4}{z(z+2)^2} = \frac{2}{z(z+2)}.$$

On a une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{2}{z(z+2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+2}.$$

En multipliant par z et en faisant $z = 0$, on obtient $a = 1$. En multipliant par $z+2$ e en faisant $z = -2$, on obtient $b = -1$.

Ceci donne

$$Y(z) = \frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}.$$

En lisant de gauche à droite la table des transformées de Laplace, on a alors

$$y(t) = 1 - e^{-2t}.$$

Exercice 5

1) La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{z+1}{z(z-5)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-5},$$

On obtient a en multipliant par z, et en faisant $z = 0$, ce qui donne $a = -\frac{1}{5}$, et on obtient b en multipliant par $z-5$, et en faisant $z = 5$, ce qui donne $b = \frac{6}{5}$.

On a donc

$$Y(z) = -\frac{X(z)}{5} + \frac{6z}{5(z-5)}X(z).$$

2) On va calculer le signal de sortie y en fonction du signal d'entrée x. En appliquant la transformée unilatérale en z, on obtient :

$Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + 5z^{-1}Y(z)$.

Ceci donne
$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-5z^{-1}} X(z) = \frac{z+1}{z-5} X(z)$.

On va procéder comme dans le cours. On cherche à décomposer $\frac{z+1}{z-5}$ sous la forme

$$\frac{z+1}{z-5} = a + \frac{bz}{z-5}.$$

Ceci est équivalent à la décomposition en éléments simples

$$\frac{z+1}{z(z-5)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-5},$$

déjà obtenue à la question 1, où on a trouvé $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{6}{5}$.

On a donc

$$Y(z) = -\frac{X(z)}{5} + \frac{6}{5}\frac{z}{z-5} X(z).$$

On sait d'après la table que si on pose $u[n] = 5^n$ pour $n \geq 0$, $u = (u[n])_{n \geq 0}$, alors $\mathcal{Z}(u)(z) = \frac{z}{z-2}$, et on a

$$Y(z) = -\frac{X(z)}{5} + \frac{6}{5}\mathcal{Z}(u)(z)X(z),$$

$$y = -\frac{x}{5} + \frac{6}{5}(u * x),$$

ce qui donne, pour $n \geq 1$,

$$y[n] = -\frac{x[n]}{5} + \frac{6}{5}\sum_{p=0}^{n} 5^{n-p} x[p] = -\frac{x[n]}{5} + 6.5^{n-1}\sum_{p=0} n 5^{-p} x[p].$$

Si $x[n] = (-1)^n$ pour tout entier naturel n, on a

$$y[n] = -\frac{(-1)^n}{5} + 6.5^{n-1}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p 5^{-p} = -\frac{(-1)^n}{5} + 6.5^{n-1}\frac{1-(-1)^{n+1}5^{-n-1}}{1+1/5}$$

ce qui donne

$$y[n] = -\frac{(-1)^n}{5} + 5^n(1-(-5)^{-n-1}) = 5^n.$$

Notons qu'on aurait pu obtenir la formule ci-dessus par des méthodes plus élémentaires, car si $x[n] = (-1)^n$ pour $n \geq 0$ on a $y[n+1] = 5y[n]$ pour $n \geq 0$, et la suite $(y[n])_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 5. On a donc

$$y[n] = 5^n y[0] = 5^n.$$

Exercice 6

1) Cette question a été déjà été vue en TD. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)^2 dx,$$

$$2\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{x^2+1)^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+1)^2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{\pi}{2} lim_{L \to +\infty} \left[\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^L = \frac{\pi}{4}.$$

2) On a $\int_0^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2} = lim_{L \to +\infty} arctan(L) - arctan(0) = \pi$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2} = 2\pi < +\infty$, et $\hat{H} \in L^1(\mathbb{R})$.

D'après la formule d'inversion de Fourier, on a presque partout.

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{H}(x) e^{ixt} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+x^2} dx.$$

Par continuité des deux membres cette égalité est valable pour tout t.

En passant au conjugué on obtient

$$e^{-|t|} = \overline{e^{-|t|}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{1+x^2} dx.$$

En échangeant les noms des variables x et t on obtient

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2} = \pi e^{-|x|}.$$

2) Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^2}{c^2+n^2}$. On a

$$2S + 1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c^2}{c^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{c}\right).$$

Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 < +\infty$, et comme f est continue, on a, d'après la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{c}\right) = c\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi nc) = c\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi c|n|} = 2c\pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi cn} - c\pi.$$

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi cn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-2\pi c}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-2\pi c}}.$$

On obtient

$$2S + 1 = c\pi\left(\frac{2}{1-e^{-2\pi c}} - 1\right) = c\pi \frac{1+e^{-2\pi c}}{1-e^{-2\pi c}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^2}{c^2+n^2} = \frac{c\pi(1+e^{-2\pi c})}{2(1-e^{-2\pi c})} - \frac{1}{2}.$$

3) On calcule les deux sommes proposées pour $c = 1$ et $c = 2$, et Mupad donne un résultat faisant intervenir une "fonction spéciale" ψ. La commande 'float" donne une approximation décimale du résultat obtenu, qui coïncide dans les deux cas avec l'approximation décimale des valeurs trouvées pour la somme de ces séries.

```
sum(1/(1+n^2),n=1..infinity);
```

$$\frac{\psi(1-\mathrm{i})\,\mathrm{i}}{2}-\frac{\psi(1+\mathrm{i})\,\mathrm{i}}{2}$$

```
float(%)
```

1.076674047

```
u:=-1/2+ PI*(1+exp(-2*PI))*1/(2*(1-exp(-2*PI)));
```

$$-\frac{\pi\left(e^{-2\pi}+1\right)}{2\,e^{-2\pi}-2}-\frac{1}{2}$$

```
float(%);
```

1.076674047

```
sum(4/(4+n^2),n=1..infinity);
```

$$\psi(1-2\,\mathrm{i})\,\mathrm{i}-\psi(1+2\,\mathrm{i})\,\mathrm{i}$$

```
float(%)
```

2.641614565

```
v:=-1/2+ 2*PI*(1+exp(-4*PI))*(1/(2*(1-exp(-4*PI))));
```

$$-\frac{2\,\pi\left(e^{-4\pi}+1\right)}{2\,e^{-4\pi}-2}-\frac{1}{2}$$

```
float(v);
```

2.641614565

2.5 Corrigé de l'examen Transformées du 5 novembre 2015

Exercice 1

1) On a $\cos^2(3t) = \dfrac{1+\cos(6t)}{2}$. D'après la table des transformées de Laplace on voit que si $f(t) = 1$ pour $t \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \frac{1}{z}$ pour $\Re(z) > 0$, et que si $f(t) = \cos(6t)$ pour $t \geq 0$ alors $\mathcal{L}(z) = \dfrac{z}{z^2+36}$ pour $\Re(z) > 0$. Par linéarité de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}(h)(z) = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2(z^2+36)} = \frac{z^2+18}{z(z^2+36)},$$

pour $\Re(z) > 0$.

2) La fonction f est définie pour $x \geq 0$ par la formule

$$f(t) = \int_0^t (t-s)^5 \cos^2(3s)\, ds.$$

Si on pose $g(t) = t^5$ et $h(t) = \cos^2(3t)$ pour $t \geq 0$, on a pour $t \geq 0$

$$f(t) = \int_0^t g(t-s)h(s)ds = (g * h)(t).$$

Donc $f = g * h$ est le produit de convolution de g et h et $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z)$ sur l'intersection des domaines de définition de $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(h)$. D'après la table des transformées de Laplace, on a $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{5!}{z^6}$ pour $\Re(z) > 0$. La transformée de Laplace de f est donc définie pour $\Re(z) > 0$, et on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(h)(z) = \frac{120}{z^6}\left(\frac{z^2+18}{z(z^2+36)}\right) = \frac{120(z^2+18)}{z^7(z^2+36)}.$$

Exercice 2

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	-3	-1	1	3	3	1	-1	-3
étape 1, 2 par 2	-4	-2	4	-2	4	2	-4	2
étape 2, 4 par 4	0	-4	-8	0	0	4	8	0
étape 3, $\mathcal{W}_3(f)[k]$	0	0	0	0	0	-8	-16	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [0, 0, 0, 0, 0, -8, -16, 0].$$

2) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Donc ici on garde les coefficients associés aux indices $0, 2, 4, 6$ et on annulle les autres. On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, -16, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$	0	0	0	0	0	0	-16	0
étape 1, 2 par 2	0	0	0	0	0	0	-16	-16
étape 2, 4 par 4	0	0	0	0	-16	-16	16	16
étape 3, 8 par 8,	-16	-16	16	16	16	16	-16	-16
division par 8, $f_{0,5}$	-2	-2	2	2	2	2	- 2	-2

On obtient

$$f_{0,5} = [-2, -2, 2, 2, 2, 2, -2, -2].$$

Exercice 3

1) Comme $e^{\frac{2i\pi}{4}} = i$, la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
$revbits$	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [3, 2, 3, 0]$ et $g = [1, 4, 0, 0]$ de longueur 4.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	1	7	1	0
$rev(f)[m]$	1	1	7	0
étape1	2	0	7	7
étape 2, $\hat{f}(m)$	9	$-7i$	-5	$7i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	5	3	0	0
$rev(g)[m]$	5	0	3	0
étape 1	5	5	3	3
étape 2, $\hat{g}(m)$	8	$5-3i$	2	$5+3i$

On obtient

$$\hat{f}.\hat{g} = [72, -21 - 35i, -10, -21 + 35i].$$

Les signaux f et g sont constitués par les coefficients des polynômes p et q complétés par des zéros, ce qui fait que les coefficients de la convolution cyclique de f et g coincident avec les coefficients du polynôme pq, puisque $d^o(p) + d^o(q) < 4$. On obtient donc les coefficients du produit pq en appliquant la FFT inverse à $h = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$h[m]$	72	$-21-35i$	-10	$-21+35i$
$rev(h)[m]$	72	-10	$-21-35i$	$-21+35i$
étape 1	62	82	-42	$-70i$
étape 2	20	152	104	12
$\mathcal{F}^{-1}(h)$	5	38	26	3

Ceci donne

$$pq = 5 + 38x + 26x^2 + 3x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(1+7x+x^2)(5+3x) = 5+35x+5x^2+3x+21x^2+3x^3 = 5+38x+26x^2+3x^3.$$

On a alors

$$171 \times 35 = p(10)q(10) = pq(10) = 5 + 380 + 2600 + 3000 = 5985,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 4

1) Posons $R(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+1)}$. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$R(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1},$$

avec a, b réels.

En multipliant par $z-1$, et en posant $z = 1$, on obtient $a = 1$, et en multipliant par $z+1$, et en posant $z = -1$, on obtient $b = 1$. Ceci donne

$$\frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}.$$

2) On considère l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4e^x$, avec les conditions initiales $y(0) = 2, y'(0) = 0$. Notons Y la transformée de Laplace de y. On a $\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z) - 2$ et $\mathcal{L}(y")(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) - 2z$.

D'autre part la table des transformées de Laplace donne

$f(x)$	$\mathcal{L}(f)(z)$
e^{ax}	$\frac{1}{z-a}$

On obtient, avec $a = -1$,

$$z^2Y(z) - 2z + 2zY(z) - 4 + Y(z) = \frac{4}{z-1}, \quad (z^2+2z+1)Y(z) = \frac{4}{z-1} + 2z + 4$$

$$= \frac{2z^2+2z}{z-1},$$

$$Y(z) = \frac{2z^2+2z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{2z}{(z-1)(z+1)}.$$

Ceci donne, d'après la question 1,

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}.$$

En lisant de gauche à droite la table des transformées de Laplace, on a alors

$$y(x) = e^x + e^{-x}.$$

Exercice 5

1) Le solide V_n est délimité par un cône de révolution de sommet $(0,0,n)$ et le plan d'équation $z = n + 3.2^{-n}$. De même le solide W est délimité par le même cône de révolution de sommet $(0,0,2)$ que V_2 et le plan d'équation $z = \frac{5}{2}$.

On pose $V_n^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y,z) \in V_n\}$ et $\pi(V_n) = \{z \in \mathbb{R} \mid V_n^z \neq \emptyset\}$.

On voit que $\pi(V_n) = [n, n+3.2^{-n}]$ et que V_n^z est le disque horizontal de rayon $z-n$ centré en $(n,0)$ pour $n \leq z \leq n+3.2^{-n}$. Par conséquent l'aire $A_n(z)$ de V_n^z est égale à $\pi(z-n)^2$ pour $n \leq z \leq z+3.2^{-n}$ et on a, d'après le théorème de Fubini

$$\mathrm{Vol}(V_n) = \int\int\int_{V_n} dxdydz = \int_{\pi(V_n)} \left[\int\int_{V_n^z} dxdy\right] dz = \int_n^{n+3.2^{-n}} A_n(z)dz$$

$$= \int_n^{n+3.2^{-n}} \pi \frac{(z-n)^2}{n} dz = \pi \left[\frac{(z-n)^3}{3}\right]_n^{n+3.2^{-n}}$$

$$= 9.8^{-n}\pi.$$

On définit de même W^z et $\pi(W) = [2, \frac{5}{2}]$, et on a

$$\mathrm{Vol}(W) = \int\int\int_{W} dxdydz = \int_{\pi(W)} \left[\int\int_{W^z} dxdy\right] dz =$$

$$= \int_2^{\frac{5}{2}} \pi \frac{(z-2)^2}{n} dz = \pi \left[\frac{(z-2)^3}{3}\right]_2^{\frac{5}{2}} = \frac{\pi}{24}.$$

2) On représente géométriquement V avec Mupad.

```
V:=t->plot::Cone(3*2^(-t),[0,0,t+3*2^(-t)],[0,0,t]);
```

$t \to \text{plot::Cone}\left(3\,\frac{1}{2^t}, \left[0, 0, t+3\,\frac{1}{2^t}\right], [0, 0, t]\right)$

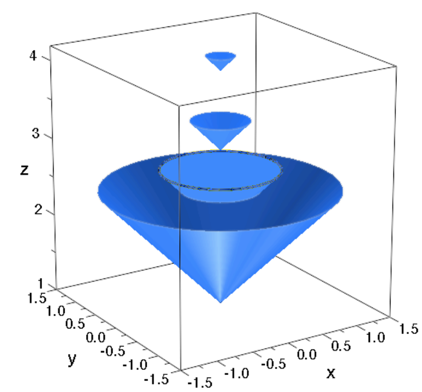
```
V2prime:=plot::Cone(3/4,[0,0,11/4],1/2,[0,0,5/2]);
```

$\text{plot::Cone}\left(\frac{3}{4}, \left[0, 0, \frac{11}{4}\right], \frac{1}{2}, \left[0, 0, \frac{5}{2}\right]\right)$

```
C2:=plot::Circle3d(3/4,[0,0,11/4],Filled=TRUE);
```

$\text{plot::Circle3d}\left(\frac{3}{4}, \left[0, 0, \frac{11}{4}\right], [0, 0, 1]\right)$

```
plot(V(1),V2prime,C2,V(3),V(4));
```



On a $V_1 \cap V_2 = W$, et $V_n \cap V_m = \emptyset$ pour $n \geq 3, m \neq n$. On a donc

$$Vol(V) = Vol(V_1 \cup V_2) + \sum_{n=3}^{+\infty} Vol(V_n)$$

$$= Vol(V_1) + Vol(V(2) - Vol(W) + \sum_{n=3}^{+\infty} Vol(V_n) = 9\pi \sum_{n=1}^{+\infty} 8^{-n} - \frac{\pi}{24}$$

$$= \frac{9\pi}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{\pi}{24} = \frac{5\pi}{42}.$$

Exercice 6

1) La décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{z-4}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1},$$

On obtient a en multipliant par z, et en posant $z = 0$, ce qui donne $a = 4$, et on obtient b en multipliant par $z - 1$, et en posant $z = 5$, ce qui donne $b = -3$. On obtient

$$\frac{z-4}{z(z-1)} = \frac{4}{z} - \frac{3}{z-1},$$

2) On va calculer le signal de sortie y en fonction du signal d'entrée x. Posons $x^{(1)}[n] = x[n-1]$ et $y^{(1)}[n] = y[n-1]$ pour $n \geq 1$, avec les conventions $x^{(1)}[0] = y^{(1)}[0] = 0$. Soient $X = \mathcal{Z}(x)$ et $Y = \mathcal{Z}(y)$ les transformées en z unilatérales de x et y. D'après la table des transformées en z, on a $\mathcal{Z}(x^{(1)})(z) = z^{-1}\mathcal{Z}(x) = z^{-1}X(z)$ et $\mathcal{Z}(y^{(1)})(z) = z^{-1}\mathcal{Z}(y) = z^{-1}Y(z)$. Par linéarité de la transformée en z, on obtient

$Y(z) = X(z) - 4z^{-1}X(z) + z^{-1}Y(z)$.

Ceci donne

$Y(z) = \frac{1-4z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z-4}{z-1}X(z)$.

On va procéder comme dans le cours. On cherche à décomposer la "fonction de transfert" $\frac{z-4}{z-1}$ sous la forme

$$\frac{z-4}{z-1} = a + \frac{bz}{z-1}.$$

Ceci est équivalent à la décomposition en éléments simples

$$\frac{z-4}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1},$$

déjà obtenue à la question 1, où on a trouvé $a = 4, b = -3$.
On a donc

$$Y(z) = 4X(z) - 3\frac{z}{z-1}X(z).$$

On sait d'après la table que si on pose $u[n] = 1^n = 1$ pour $n \geq 0$, $u = (u[n])_{n\geq 0}$, alors $\mathcal{Z}(u)(z) = \frac{z}{z-1}$, et on a

$$Y(z) = 4X(z) - 3\mathcal{Z}(u)(z)X(z) = 4X(z) - 3\mathcal{Z}(u * x)(z),$$

$$y = 4x - 3(u * x),$$

ce qui donne, pour $n \geq 1$,

$$y[n] = 4x[n] - 3\sum_{p=0}^{n} x[p] = x[n] + \sum_{p=0}^{n-1} x[p],$$

avec $y[0] = x[0]$.

Si $x[n] = 4^n$ pour tout entier naturel n, on a

$$y[n] = 4^n - 3\sum_{p=0}^{n-1} 4^p = 4^n - 3\frac{1-4^n}{1-4}$$

ce qui donne

$$y[n] = 4^n + (1 - 4^n) = 1.$$

Notons que ce dernier résultat était évident à priori. Si $x[n] = 4^n$ pour $n \geq 0$, alors $y[0] = x[0] = 1$, $x[n] = 4x[n-1]$ et $y[n] = y[n-1]$ pour $n \geq 1$, ce qui donne $y[n] = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 7

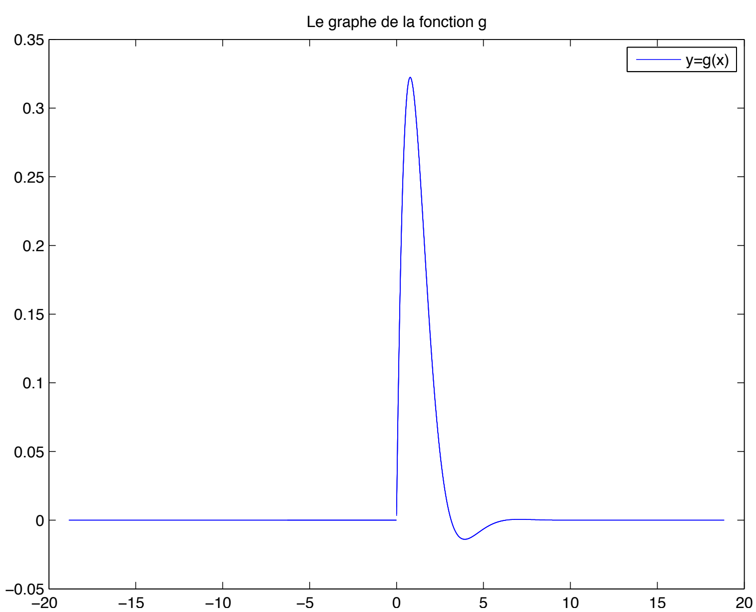
1) On a $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} sin(t)e^{-t}e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(z+1)t}dt$. Donc $z \in Dom(\mathcal{L}(g))$ si et seulement si $z + 1 \in Dom(\mathcal{L}(f)) = \{z \in$

$\mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$, $Dom(\mathcal{L}(g)) = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > -1\}$, et on a, pour $Re(z) > -1$, d'après la table des transformées de Laplace

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{(z+1)^2 + 1}.$$

2) Le tracé du graphe de g peut se faire sans difficulté avec Matlab. On notera que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf en 0, mais admet des dérivées à droite et à gauche distinctes en 0.

```
x1=[-6*pi:0.005:0];y1=polyval([0],x1);
x2=-x1;y2=exp(-x2).*sin(x2);
plot(x1,y1);hold on;plot(x2,y2);
legend('y=g(x)');
title('Le graphe de la fonction g');
print -depsc exam2015
```



On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \int_0^{+\infty} |sin(t)|e^{-t}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |sin(t)|^2 e^{-2t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^{+\infty} = 1/2 < +\infty,$$

donc $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt = \mathcal{L}(g)(ix) = \frac{1}{(ix+1)^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{2 - x^2 + 2ix}.$$

Donc

$$lim_{x \to \pm\infty} x^2 \widehat{g}(x) = lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2 - x^2 + 2ix} = lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{2}{x^2} - 1 + \frac{2i}{x}} = -1.$$

Il résulte alors du critère de Riemann (proposition 4.1.3 page 46 du support de cours) que $\int_0^{+\infty} |\widehat{g}(-x)| dx < +\infty$ et $\int_0^{+\infty} |\widehat{g}(x)| dx < +\infty$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x)| dx < +\infty$, et $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.

Comme g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et comme $\widehat{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il résulte de la formule d'inversion de Fourier que l'on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x) e^{itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dx}{2 - x^2 + 2ix}.$$

On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dx}{2 - x^2 + 2ix} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \\ 2\pi e^{-t} sin(t) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

3) On a $sin^2(t) = \frac{1 - cos(2t)}{2}$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2t} cos(2t) dt.$$

Posons $u(t) = 1$ et $v(t) = cos(2t)$ pour $t \geq 0$. D'après la table des transformées de Laplace, on a $\mathcal{L}(u)(z) = \frac{1}{z}$ et $\mathcal{L}(v)(z) = \frac{z}{z^2+4}$ pour $Re(z) \geq 0$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} sin^2(t)dt = \frac{\mathcal{L}(u)(2)}{2} - \frac{\mathcal{L}(v)(2)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

D'autre part on a

$$|\widehat{g}(x)|^2 = \frac{1}{(2 - x^2 + 2ix)(2 - x^2 - 2ix)} = \frac{1}{(2 - x^2)^2 + 4x^2} = \frac{1}{x^4 + 4}.$$

On déduit alors de la formule de Parseval que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 4)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2t} sin^2(t)dt$$
$$= \frac{\pi}{4}.$$

On vérifie sans difficulté ces résultats avec Mupad.

```
int(exp(-2*t)*(sin(t))^2,t=0..infinity);
int(1/(x^4+4),x=-infinity..infinity);
```

$\frac{1}{8}$

$\frac{\pi}{4}$

4) Supposons qu'il existe $y \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $H * y = g$. On aurait $\widehat{H}(x)\widehat{y}(x) = \widehat{g}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. De plus $lim_{x\to\pm\infty}\widehat{y}(x) = 0$, et $lim_{x\to\pm\infty}x^2 H(x) = lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$, d'où, d'après la question 2,

$$-1 = lim_{x\pm\infty}x^2\widehat{g}(x) = lim_{x\to\pm\infty}x^2\widehat{H}(x)lim_{x\to\pm\infty}\widehat{y}(x) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc l'équation de convolution $H * y = g$ n'admet aucune solution $y \in L^1(\mathbb{R})$.

5) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, et $lim_{t\to+\infty}(1 + t^2)|g(t)| \leq lim_{t\to+\infty}x^2 e^{-t} = 0$, ce qui permet d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à g (théorème 9.3.1 du support de cours). D'autre

part $|\widehat{g}\left(\frac{2n\pi}{c}\right)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{16n^4\pi^4}{c^4}+4}} \sim \frac{c^2}{4n^2\pi^2}$, donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{g}(-\frac{2\pi n}{c})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(\frac{2\pi n}{c})$ sont absolument convergentes, et la formule sommatoire de Poisson donne, pour $c > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nc) = \frac{1}{c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

Appliquons cette formule pour $c = \pi$. Comme $sin(n\pi) = 0$ pour $n \geq 0$, et comme $g(n\pi) = 0$ pour $n < 0$, on obtient

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(2n).$$

On obtient

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} (\widehat{g}(-2n) + \widehat{g}(2n)) = \widehat{g}(0) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part on a

$$\widehat{g}(-2n)+\widehat{g}(2n) = \frac{1}{(-2in+1)^2+1}+\frac{1}{(2in+1)^2+1} = \frac{(-2in+1)^2+1+(2in+1)^2+1}{|\widehat{g}(2n)|^2}$$

$$= \frac{4-8n^2}{16n^4+4} = \frac{1-2n^2}{4n^4+1}.$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-1}{4n^4+1} = \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier ce résultat avec Mupad.

```
sum((2*n^2-1)/(4*n^4+1),n=1..infinity);
```

$\frac{1}{2}$

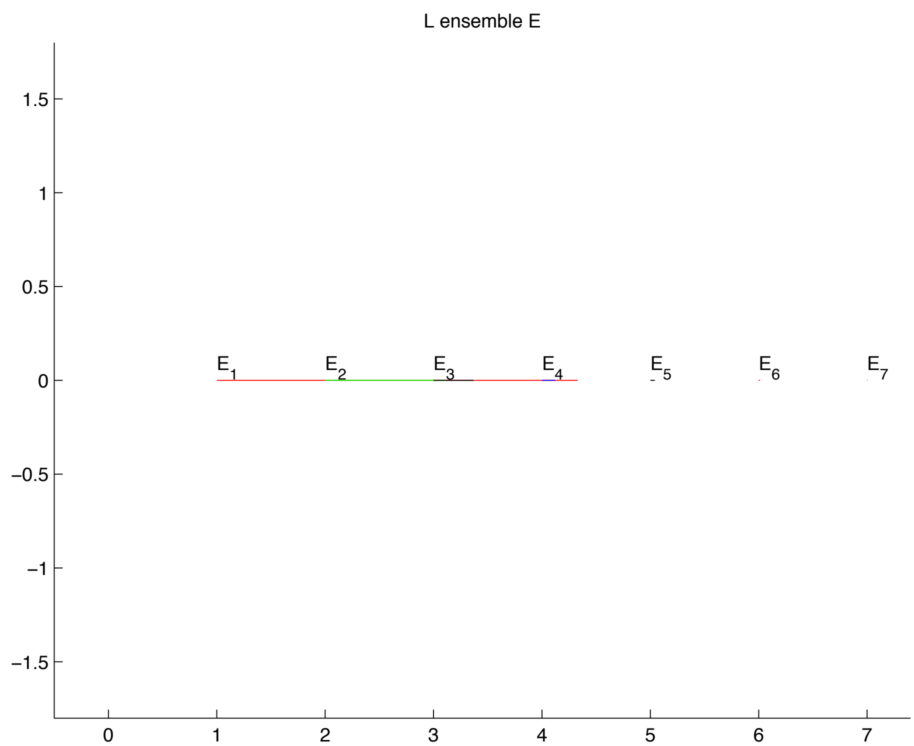
2.6 Corrigé de l'examen Transformées du 27 octobre 2016

Exercice 1

On esquisse l'ensemble E avec Matlab :

```
>>  xlim([-0.5 7.4]);
hold on;
ylim([-1.8 1.8]);
hold on
 p=[0];
x1=[1:0.01:1+10/3];
y1=polyval(p,x1);
plot(x1,y1,'red');
hold on;
x2=[2:0.01: 2+10/9];
y2=polyval(p,x2);
plot(x2,y2,'green');
hold on;
x3=[3:0.001:3+10/27];
y3=polyval(p,x3);
plot(x3,y3,'black')
hold on
x4=[4:0.001:4+10/81];
y4=polyval(p,x4);
plot(x4,y4,'blue');
hold on
x5=[5:0.001:5+10/3^5];
y5=polyval(p,x5);
plot(x5,y5,'black');
hold on
x6=[6:0.001:6+10/3^6];
y6=polyval(p,x6);
plot(x6,y6,'red');hold on
x7=[7:0.001:7+10/3^7];
y7=polyval(p,x7);
plot(x7,y7,'red');hold on
```

```
text(1,0.05, 'E_1');
text(2,0.05,'E_2');
text(3,0.05,'E_3');
text(4,0.05,'E_4');
text(5,0.05,'E_5');
text(6,0.05,'E_6');
text(7,0.05,'E_7');
hold on
title('L ensemble E');
print -depsc 'E12016'
```



On a $E_1 = [1, 1 + \frac{10}{3}] = [1, 4 + \frac{1}{3}]$, $E_2 = [2, 2 + \frac{10}{9}] \subset E_1, E_3 = [3, 3 + \frac{10}{27}] \subset E_1, E_4 = [4, 4 + \frac{10}{81}] \subset E_1$. D'autre part pour $n \geq 5$ on a $E_n \subset [n, n + \frac{10}{243}]$, donc E_n est disjoint de E_m pour $m \neq n$.

On obtient

$$m(E) = m(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) + m(\cup_{n\geq 5} E_n) = m(E_1) + \sum_{n=5}^{+\infty} m(E_n)$$

$$= \frac{10}{3} + \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{10}{3^n} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3^5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3^5} \frac{1}{1-1/3} = \frac{10}{3} + \frac{5}{3^4} = \frac{275}{81} \approx 3.39.$$

Exercice 2

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	-4	-2	0	2	2	0	-2	-4
étape 1, 2 par 2	-6	-2	2	-2	2	2	-6	2
étape 2, 4 par 4	-4	-4	-8	0	-4	4	8	0
étape 3, $\mathcal{W}_3(f)[k]$	-8	0	0	0	0	-8	-16	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [-8, 0, 0, 0, 0, -8, -16, 0].$$

2) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Donc ici on garde les coefficients associés aux indices $0, 2, 4$ et 6, et on annulle les autres. On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [-8, 0, 0, 0, 0, 0, -16, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$	-8	0	0	0	0	0	-16	0
étape 1, 2 par 2	-8	-8	0	0	0	0	-16	-16
étape 2, 4 par 4	-8	-8	-8	-8	-16	-16	16	16
étape 3, 8 par 8,	-24	-24	8	8	8	8	-24	-24
division par 8, $f_{0,5}$	-3	-3	1	1	1	1	- 3	-3

On obtient

$$f_{0,5} = [-3, -3, 1, 1, 1, 1, -3, -3].$$

Exercice 3

1) Comme $e^{\frac{2i\pi}{4}} = i$, la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
$revbits$	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [3, 8, 2, 0]$ et $g = [1, 6, 0, 0]$ de longueur 4.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	3	8	2	0
$rev(f)[m]$	3	2	8	0
étape1	5	1	8	8
étape 2, $\hat{f}(m)$	13	$1-8i$	-3	$1+8i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	6	0	0
$rev(g)[m]$	1	0	6	0
étape 1	1	1	6	6
étape 2, $\hat{g}(m)$	7	$1-6i$	-5	$1+6i$

Comme $(1-8i)(1-6i) = -47-14i$, on obtient

$$\hat{f}.\hat{g} = [91, -47-14i, 15, -47+14i].$$

Les signaux f et g sont constitués par les coefficients des polynômes p et q complétés par des zéros, ce qui fait que les coefficients de la convolution cyclique de f et g coincident avec les coefficients du polynôme pq, puisque $d^o(p) + d^o(q) < 4$. On obtient donc les coefficients du produit pq en appliquant la FFT inverse à $h = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$h[m]$	91	$-47-14i$	15	$-47+14i$
$rev(h)[m]$	91	15	$-47-14i$	$-47+14i$
étape 1	106	76	-94	$-28i$
étape 2	12	104	200	48
$\mathcal{F}^{-1}(h)$	3	26	50	12

Ceci donne

$$pq = 3 + 26x + 50x^2 + 12x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(3+8x+2x^2)(1+6x) = 3+8x+2x^2+18x+48x^2+12x^3 = 3+26x+50x^2+12x^3.$$

On a alors

$$283 \times 61 = p(10)q(10) = pq(10) = 3 + 260 + 5000 + 12000 = 17263,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 4

1) Posons $R(z) = \frac{2z+14}{(z-1)(z-5)(z+1)}$. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$R(z) = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-5},$$

avec a, b, c réels.

En multipliant par $z+1$, et en posant $z = -1$, on obtient $a = 1$, en multipliant par $z-1$, et en posant $z = 1$, on obtient $b = -2$, et en multipliant par $z-5$, et en posant $z = 5$, on obtient $c = 1$. Ceci donne

$$\frac{2z+14}{(z-1)(z-5)(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-5}.$$

2) On considère l'équation différentielle $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 12e^{-x}$, avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 2$. Notons Y la transformée de Laplace de y. On a $\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$ et $\mathcal{L}(y")(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) - 2$.

D'autre part la table des transformées de Laplace donne

$f(x)$	$\mathcal{L}(f)(z)$
e^{ax}	$\frac{1}{z-a}$

On obtient, avec $a = -1$,

$$z^2Y(z) - 2 - 6zY(z) + 5Y(z) = \frac{12}{z+1}, \quad (z^2 - 6z + 5)Y(z) = \frac{12}{z+1} + 2$$

$$= \frac{2z+14}{z+1},$$

$$Y(z) = \frac{2z+14}{(z-1)(z-5)(z+1)}.$$

Ceci donne, d'après la question 1,

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-5}.$$

En lisant de gauche à droite la table des transformées de Laplace, on a alors

$$y(x) = e^{-x} - 2e^{x} + e^{5x}.$$

Exercice 5

1) Montrer que F est continue sur $]1, +\infty[$ revient à montrer que $F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$ pour tout $x > 1$ et pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels > 1 telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Supposons donc que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, avec $x > 1$ et $x_n > 1$ pour $n \geq 1$, et posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$,

$$g_n(t) = f(t) cos\left(\frac{tx_n}{x_n^2 - 1}\right), \quad g(t) = f(t) cos\left(\frac{tx}{x^2-1}\right).$$

Pour t fixé, la fonction $u \to f(t) cos(\frac{tu}{u^2-1})$ est continue comme composée de fonctions continues. On obtient :

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

D'autre part on a :

$$|g_n(t)| = |f(t)| \left| cos\left(\frac{tx_n}{x_n^2-1}\right)\right| \leq |f(t)| \;\; \forall t \in \mathbb{R},\; \forall n \geq 1. \tag{2.2}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, et les deux hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. On obtient alors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} F(x_n),$$

ce qui prouve que F est continue sur $[1, +\infty[$.

2) On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos\left(\frac{tx}{x^2-1}\right) ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\frac{itx}{x^2-1}}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\frac{-itx}{x^2-1}}\,dt \\ &= \frac{\widehat{f}(-\frac{x}{x^2-1}) + \widehat{f}(\frac{x}{x^2-1})}{2}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $u \longmapsto \hat{f}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et comme la fonction $v \longmapsto \frac{v}{v^2-1}$ est continue sur $]1,+\infty[$, on voit que F est continue sur $]1,+\infty[$ comme somme de composées de fonctions continues.

3) On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} -\dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$. Comme $\lim\limits_{|u|\to\infty} \widehat{f}(u) = 0$, on voit que :

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = 0.$$

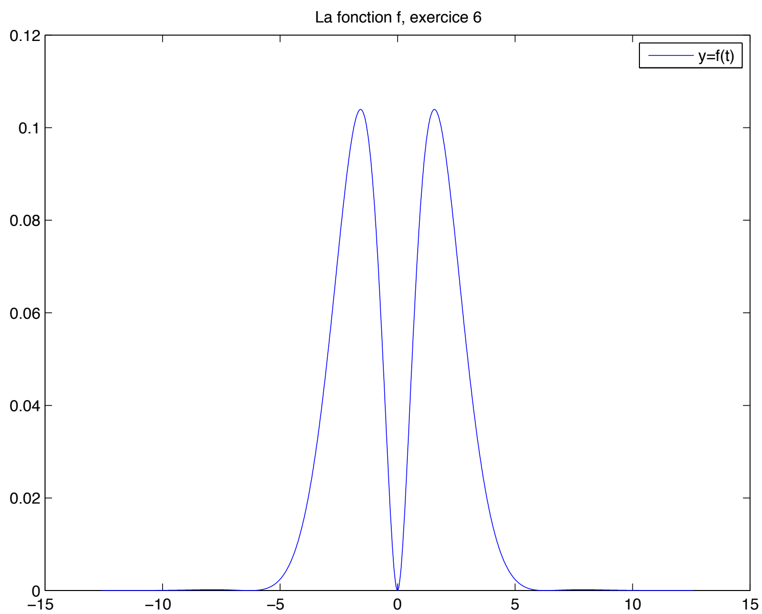
D'autre part $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{x}{x^2-1} = 0$. Comme $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$lim_{x\to+\infty} F(x) = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

Exercice 6

1) Le tracé du graphe de f peut se faire sans difficulté avec Matlab. On notera que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

```
t=[-4*pi:pi/100:4*pi];
y=exp(-abs(t)).*(sin(t/2).^2);
plot(t,y);legend('y=f(t)');
title('La fonction f, exercice 6');
print -depsc exo62016
```



On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 2\lim_{L\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^L = 2 < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}dt \leq 2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 2 < +\infty,$$

donc $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2) On a, en effectuant le changement de variables $t = -s$ dans la première intégrale

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-itx} sin^2(t/2)dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-itx}sin^2(t/2)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(1-ix)}sin^2(s/2)ds + \int_0^{+\infty} e^{-t(1+ix)}sin^2(t/2)dt = \mathcal{L}(g)(1-ix)+\mathcal{L}(g)(1+ix).$$

3) D'après la table des transformées de Laplace, on a $sin^2(t/2) = \frac{1-cos(t)}{2}$, donc $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2(1+z^2)} = \frac{1}{2z(1+z^2)}$ pour $Re(z) > 0$. Ceci donne, puisque $(1+(1-ix)^2)(1+(1+ix)^2) = (2-x^2-2ix)(2-x^2+2ix) = (2-x^2)^2+4x^2 = x^4+4$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \mathcal{L}(g)(1-ix) + \mathcal{L}(g)(1+ix) \\
&= \frac{1}{2(1-ix)(1-ix)^2+1)} + \frac{1}{2(1+ix)(1+ix)^2+1)} \\
&= \frac{(1-ix)((1-ix)^2+1) + (1+ix)((1+ix)^2+1)}{2(x^2+1)(x^4+4)} \\
&= \frac{Re\,((1-ix)(1-x^2-2ix))}{(x^2+1)(x^4+4)} = \frac{2-3x^2}{(x^2+1)(x^4+4)}.
\end{aligned}$$

On a,

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4|\widehat{f}(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^6-2x^4}{(x^2+1)(x^4+4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{4}{x^4})} = 3 < +\infty.$$

Il résulte alors du critère de Riemann (proposition 4.1.3 page 46 du support de cours) que $\int_0^{+\infty}|\widehat{f}(-x)|dx < +\infty$ et $\int_0^{+\infty}|\widehat{f}(x)|dx < +\infty$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(x)|dx < +\infty$, et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Comme f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et comme $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il résulte de la formule d'inversion de Fourier que l'on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)e^{itx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-3x^2)e^{itx}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx.$$

On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-3x^2)e^{itx}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx = 2\pi f(t) = 2\pi e^{-|t|}sin^2(t/2).$$

4) On a

$$sin^2(t/2) = \frac{1-cos(t)}{2},$$

$$\begin{aligned}
sin^4(t/2) &= \frac{1}{4} - \frac{cos(t)}{2} + \frac{cos(t)^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{cos(t)}{2} + \frac{1+cos(2t)}{8} \\
&= \frac{3}{8} - \frac{cos(t)}{2} + \frac{cos(2t)}{8}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} sin^4(t/2)dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t} sin^4(t/2)dt$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-2t}cos(t)dt + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2t}cos(2t)dt.$$

Posons $u(t) = 1$, $v(t) = cos(t)$ et $w(t) = cos(2t)$ pour $t \geq 0$. D'après la table des transformées de Laplace, on a $\mathcal{L}(u)(z) = \frac{1}{z}$, $\mathcal{L}(v)(z) = \frac{z}{z^2+1}$ et $\mathcal{L}(w)(z) = \frac{z}{z^2+4}$ pour $Re(z) \geq 0$. On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} sin^2(t)dt = \frac{3}{4}\mathcal{L}(u)(2) - \mathcal{L}(v)(2) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(w)(2) = \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{3}{80}.$$

D'autre part on a

$$|\widehat{f}(x)|^2 = \frac{(2-3x^2)^2}{(x^2+1)^2(x^4+4)^2}.$$

On déduit alors de la formule de Parseval que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-3x^2)^2 dx}{(x^2+1)^2(x^4+4)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{3\pi}{40}.$$

On peut vérifier ces résultats avec Mupad.

```
int(exp(-2*t)*(sin(t/2))^4,t=-infinity..infinity);
int((2-3*x^2)^2/((x^2+1)^2*(x^4+4)^2),x=-infinity..infinity);
```

$\frac{3}{80}$
$\frac{3\pi}{40}$

5) Supposons qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f * u = H$. On aurait $\widehat{f}(x)\widehat{u}(x) = \widehat{H}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. De plus $lim_{x\to\pm\infty}\widehat{u}(x) = 0$, et on aurait

$$0 = \lim_{x+\infty} |\widehat{u}(x)| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\widehat{H}(x)}{|\widehat{f}(x)|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+8}{3x^2-2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{2+\frac{8}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}} = +\infty,$$

ce qui est absurde. Donc l'équation de convolution $f * u = H$ n'admet aucune solution $u \in L^1(\mathbb{R})$.

6) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et $lim_{t\to\pm\infty}(1+t^2)|f(t)| \leq lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-|t|} = 0$, ce qui permet d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à f (théorème 9.3.1 du support de cours). D'autre part $|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{c}\right)| \sim \frac{3(\frac{2\pi n}{c})^2}{(\frac{2\pi n}{c})^6} \sim \frac{3c^4}{16\pi^4 n^4}$, donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-\frac{2\pi n}{c})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(\frac{2\pi n}{c})$ sont absolument convergentes, et la formule sommatoire de Poisson donne, pour $c > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nc) = \frac{1}{c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

Appliquons cette formule pour $c = \pi$. On a $\frac{2\pi n}{c} = 2n$, ce qui donne

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(2n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\pi).$$

On obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2-12n^2}{(4n^2+1)(16n^4+4)} = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n\pi} sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-6n^2}{(4n^2+1)(4n^4+1)} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n\pi} sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Si n est pair, on a $sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, et si n est impair on a $sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pm 1$. Donc on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n\pi} sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-(2p+1)\pi} = e^{-\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p\pi} = \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

On a donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-6n^2}{(4n^2+1)(4n^4+1)} = \frac{4\pi e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

On peut vérifier ce résultat avec Mupad.

```
a:=float(sum((1-6*n^2)/(4*n^2+1)*(4*n^4+1),n=-100..100));
```

0.5440583562

```
b:=float(4*PI*exp(-PI)/(1-exp(-2*PI))
```

0.54405811

8) Soit $M > 0$ tel que $|\phi(t)| \leq M$ pour $t \geq 0$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|dt \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2M < +\infty$, donc ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\phi(|t|)e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\phi(|t|)e^{-itx}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \phi(-t)e^{t}e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{-t}e^{-itx}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} \phi(s)e^{-s+isx}ds + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{-t}e^{-itx}dt \\
&= \mathcal{L}(\phi)(1-ix) + \mathcal{L}(\phi)(1+ix).
\end{aligned}$$

Posons $\phi(t) = -\frac{cos(t)}{4} + \frac{sin(t)}{2}$. Avec les notations précédentes, on a $\psi(t) = e^{-|t|}\phi(|t|) = e^{-|t|}\left(-\frac{cos(t)}{4} + \frac{|sin(t)|}{2}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$, d'après le calcul effectué avec Mupad,

$$\widehat{\psi}(x) = \mathcal{L}(\phi)(1-ix) + \mathcal{L}(\phi)(1+ix) = \frac{2-3x^2}{2(x^4+4)}.$$

Soit $y \in L^1(R)$. d'après l'injectivité de la transformation de Fourier, on a

$$H * y = f \Longleftrightarrow \widehat{H * y} = \widehat{f} \Longleftrightarrow \widehat{H}(x)\widehat{y}(x) = \widehat{f}(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{y}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{\widehat{H}(x)} = \frac{2-3x^2}{2(x^4+4)} = \widehat{\psi}(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = \psi.$$

Donc la fonction $\psi : t \to e^{-|t|}\left(-\frac{cos(t)}{4} + \frac{|sin(t)|}{2}\right)$ est l'unique solution dans $L^1(\mathbb{R})$ de l'équation de convolution $H * y = f$.

2.7 Corrigé de l'examen Transformées du 2 novembre 2017

Exercice 1

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	-6	-4	-2	0	0	2	4	6
étape 1, 2 par 2	-10	-2	-2	-2	2	-2	10	-2
étape 2, 4 par 4	-12	-4	-8	0	12	-4	-8	0
étape 3, $\mathcal{W}_3(f)[k]$	0	-8	-16	0	-24	0	0	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [0, -8, 0, -16, 0, -24, 0, 0].$$

2) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Donc ici on garde les coefficients associés aux indices $0, 2, 4$ et 6, et on annulle les autres. On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [0, 0, -16, 0, -24, 0, 0, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$	0	0	-16	0	-24	0	0	0
étape 1, 2 par 2	0	0	-16	-16	-24	-24	0	0
étape 2, 4 par 4	-16	-16	16	16	-24	-24	-24	-24
étape 3, 8 par 8,	-40	-40	-8	-8	8	8	40	40
division par 8, $f_{0,5}$	-5	-5	-1	-1	1	1	5	5

On obtient

$$f_{0,5} = [-5, -5, -1, -1, 1, 1, 5, 5].$$

Exercice 2

1) 1) La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
bits	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [2, 5, 6, 0]$ et $g = [4, 1, 0, 0]$ de longueur 4.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d=b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d=b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	2	5	6	0
$rev(f)[m]$	2	6	5	0
étape1	8	-4	5	5
étape 2, $\hat{f}(m)$	13	$-4-5i$	3	$-4+5i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	4	1	0	0
$rev(g)[m]$	4	0	1	0
étape 1	4	4	1	1
étape 2, $\hat{g}(m)$	5	$4-i$	3	$4+i$

3) Les signaux f et g sont formés des coefficients de p et q. Comme $d^op+d^oq\leq 3$, le signal h formé des coefficients de pq est donné par les 4 premiers termes de la convolution acyclique de f et g, qui coincident ici avec les coeffeicients de la convolution cyclique $f\overset{(4)}{*}g$ de f et g. On a donc $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}$

Comme $(-4-5i)(4-i)=-21-16i$, on a $(-4+5i)(4+i)=-21+16i$, et on obtient

$$\hat{f}.\hat{g}=[65,-21-16i,9,-21+16i].$$

On va appliquer la FFT inverse à $\hat{h}=\hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$\hat{h}[m]$	65	$-21-16i$	9	$-21+16i$
$rev(h)[m]$	65	9	$-21-16i$	$-21+16i$
étape 1	74	56	-42	$-32i$
étape 2	32	88	116	24
$h[m]$	8	22	29	6

Ceci donne

$$pq = 8 + 22x + 29x^2 + 6x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(2+5x+6x^2)(4+x) = 8+20x+24x^2+2x+5x^2+6x^3 = 8+22x+29x^2+6x^3.$$

On a alors

$$652 \times 14 = p(10)q(10) = pq(10) = 8 + 200 + 2900 + 6000 = 9128,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 3

1) On va faire un calcul direct. On a

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z+2)t}dt.$$

On a $|e^{-(z+2)t}| = e^{-(Re(z)+2)t}$, et $\int_0^{+\infty} |e^{-(z+2)t}|$ est convergente si $Re(z) > -2$. On a alors

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z+2)t}dt = \lim_{L\to+\infty} \int_0^{L} e^{-(z+2)t}dt$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(z+2)t}}{z+2}\right]_0^L = \lim_{L\to+\infty} \left(\frac{1}{z+2} - \frac{e^{-(z+2)L}}{z+2}\right) = \frac{1}{z+2}.$$

2) On va décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z-1)(z+1)(z+2)}$. Comme le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur, la décomposition est de la forme

$$\frac{z^2+2z+3}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{z+2}, \text{ avec } a, b, c \text{ réels.}$$

En multipliant par $z-1$, et en faisant $z=1$, on obtient $a=1$; en multipliant par $z+1$, et en faisant $z=-1$, on obtient $b=-1$; en multipliant par $z+2$, et en faisant $z=-2$, on obtient $c=1$, ce qui donne

$$\frac{z^2+2z+3}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}.$$

3) On considère maintenant l'équation différentielle $y''(t)-y(t) = 3e^{-2t}$, avec les conditions initiales $y(0)=1, y'(0)=0$. Posons $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$. D'après la table des transformées de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z) - 1,$$

$$\mathcal{L}(y'')(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z\mathcal{L}(y')(z) = z^2Y(z) - z.$$

On obtient, d'après la question 1,

$$z^2Y(z) - Y(z) - z = \frac{3}{z+2}, (z^2-1)Y(z) = \frac{3}{z+2} + z = \frac{z^2+2z+3}{z+2},$$

$$Y(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z-1)(z+1)(z+2)}.$$

D'après la question 2, et en lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on obtient

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}, y(t) = e^t - e^{-t} + e^{-2t}.$$

4) On retrouve les résultats des questions 2 et 3 avec Mupad, en traçant aussi le graphe de la solution, ce qui n'était pas demandé.

```
partfrac((z^2+2*z+3)/((z-1)*(z+1)*(z+2)));
```

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$$

```
a:=ode({y''(t)-y(t)=3*exp(-2*t),y(0)=1,y'(0)=0},{y(t)});
```

$$\mathrm{ode}\left(\left\{y'(0) = 0,\ y(0) = 1,\ y''(t) - y(t) - 3\,e^{-2\,t}\right\},\ y(t)\right)$$

```
u:=solve(a);
```

$$\left\{e^{-2\,t} - e^{-t} + e^{t}\right\}$$

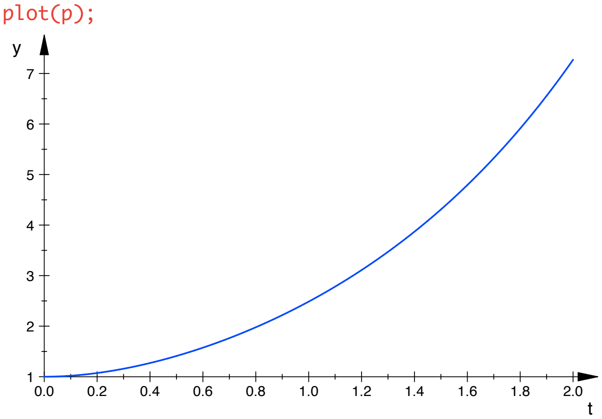
```
f:=t->op(u);
```

$$t \to \mathrm{op}(u)$$

```
p:=plot::Function2d(f(t),t=0..2);
```

$$\mathrm{plot::Function2d}\left(-e^{-t} + e^{-2\,t} + e^{t},\ t = 0..2\right)$$

```
plot(p);
```



Exercice 4

1) On a

$$g(t) = \int_0^t f(s)f(t-s)ds = \int_0^t e^{-2s}e^{-2(t-s)}ds = e^{-2t}\int_0^t ds = te^{-2t}.$$

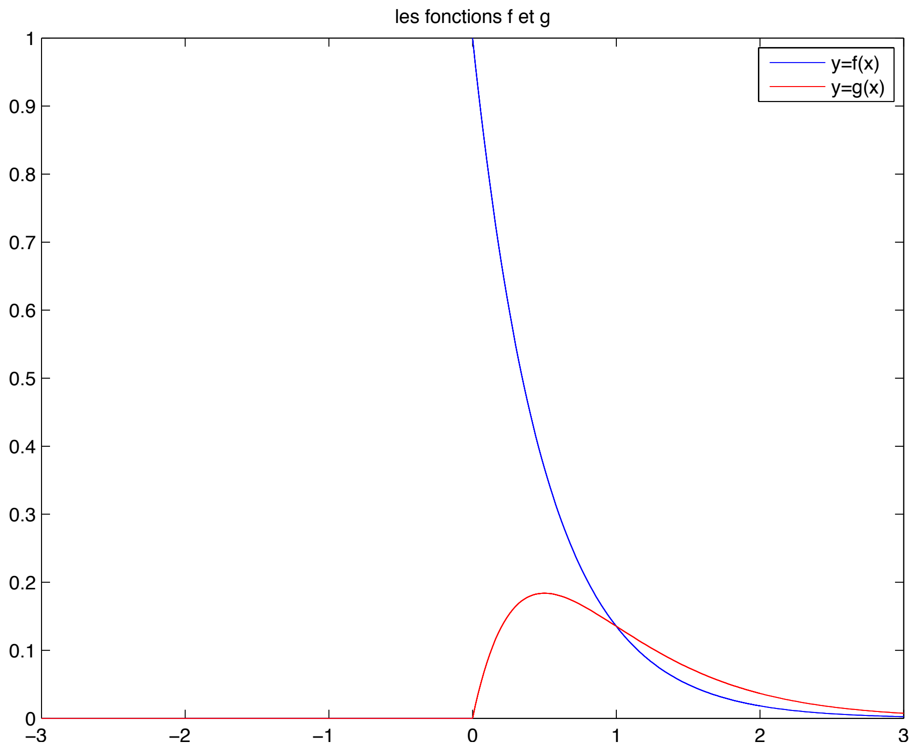
La table des transformées de Laplace donne

$g(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$

Donc $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{0!}{z+2} = \frac{1}{z+2}$ for $Re(z) > -2$, et $\mathcal{L}(g)(z) = \left(\mathcal{L}(f)(z)\right)^2 = \frac{1}{(z+2)^2}$ pour $Re(z) > -2$. En lisant de gauche à droite la table des transformées de Laplace, on voit que $g(t) = te^{-2t}$ pour $t \geq 0$.

2) On esquisse les graphes de f et g avec Matlab.

```
=[0:0.02:3];y=exp(-2*x);
z=x.*y;
plot(x,y,'blue');hold on
plot(x,z,'red');
hold on;u=polyval([0],-x];
plot(-x,u,'blue');hold on;
plot(-x,u,'red');
legend('y=f(x)','y=g(x)');
title('les fonctions f et g');
print -depsc fonctions2017
```



On a $\hat{f}(x) = \mathcal{L}(f)(ix) = \frac{1}{2+ix}, \hat{g}(x) = \mathcal{L}(g)(ix) = \frac{1}{(2+ix^2}$.

Si $\hat{f}$ était intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, on aurait pour presque tout t réel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{itx}dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-t)$$

et $2\pi f(-t)$ serait égale presque partout à la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, donc égale presque partout à une fonction continue. C'est impossible puisque f admet des limites à droite et à gauche distinctes en 0.

3) Posons $h(t) = t^2$. La table des transformées de Laplace montre que $\mathcal{L}(h)(z) = \frac{2}{z^3}$ pour $Re(z) > 0$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-4t}dt = \mathcal{L}(h)(4) = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}.$$

On a, d'après la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(x)|^2 dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} t^2 e^{-4t} dt = \frac{\pi}{16}.$$

4) Posons $sin_c(x) = \frac{sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$, $sin_c(0) = 1$, de sorte que $\hat{H}(x) = 2sinc(x)$ pour x réel. Si une fonction u intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiait l'équation de convolution $f * u = p$, on aurait, pour x réel,

$$\hat{f}(x)\hat{u}(x) = \hat{p}(x) = 2sin_c(x), \hat{u}(x) = 2sin_c(x)(ix+2),$$

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \hat{u}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{i\pi + 4ni\pi + 2}{\frac{i\pi}{2} + 2n\pi} = 2i,$$

et cette contradiction montre que l'équation de convolution proposée ne possède aucune solution intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Pour comprimer une image numérisée à 16 pixels à 25%, on classe les pixels (i,j) en fonction du nombre de changements de signes $cs(i)$ et $cs(j)$ des lignes d'indices i et j de la matrice de Walsh $W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, les indices i et j variant entre 0 et 3.

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $cs(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$cs(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i,j) selon la règle $(i_1,j_1) \prec (i_2,j_2)$ si $cs(i_1)+cs(j_1) < cs(i_2)+cs(j_2)$ ou si $cs(i_1)+cs(j_1) = cs(i_2)+cs(j_2)$ **et** $cs(i_1) < cs(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i,j)	$cs(i)$	$cs(j)$	$cs(i)+cs(j)$	$rang[(i,j)]$
$(0,0)$	0	0	0	1
$(0,1)$	0	3	3	7
$(0,2)$	0	1	1	2
$(0,3)$	0	2	2	4
$(1,0)$	3	0	3	10
$(1,1)$	3	3	6	16
$(1,2)$	3	1	4	13
$(1,3)$	3	2	5	15
$(2,0)$	1	0	1	3
$(2,1)$	1	3	4	11
$(2,2)$	1	1	2	5
$(2,3)$	1	2	3	8
$(3,0)$	2	0	2	6
$(3,1)$	2	3	5	14
$(3,2)$	2	1	3	9
$(3,3)$	2	2	4	12

Si $A=[a_{i,j}]_{\substack{0\le i\le 3\\ 0\le j\le 3}}$ est une image numérisée à 16 pixels, la compression à 25% de A s'obtient en annulant les pixels de rang ≥ 5 de la transformée de Walsh $\mathcal{W}_2(A)=[b_{i,j}]_{\substack{0\le i\le 3\\ 0\le j\le 3}}$ et en conservant les autres, puis en calculant la transformée de Walsh inverse du résultat obtenu. D'après le tableau, les seuls pixels conservés sont $(0,0),(0,2),(0,3)$ et $(2,0)$. Donc $A=A_{0,25}$ si et seulement si on a

$$\mathcal{W}_2(A)=\begin{bmatrix} a & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

où a,b,c,d sont des réels quelconques.

Comme la transformée de Walsh est bijective, ceci est vérifié si et seulement si on a $A=\mathcal{W}_2^{-1}(M(a,b,c,d))$, avec $M(a,b,c,d)=\begin{bmatrix} a & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

On calcule la transformée de Walsh inverse de $M(a,b,c,d)$ en effectuant la transformée de Walsh rapide sur les lignes, puis sur les colones de $M(a,b,c,d)$, puis en divisant le résultat obtenu par 16. On obtient

1e étape, lignes

$$\begin{bmatrix} a & a & b+c & b-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

2e étape, lignes

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+b-c & a-b-c & a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & d & d & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

1e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+b-c & a-b-c & a-b+c \\ a+b+c & a+b-c & a-b-c & a-b+c \\ d & d & d & d \\ d & d & d & d \end{bmatrix},$$

2e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} a+b+c+d & a+b-c+d & a-b-c+d & a-b+c+d \\ a+b+c+d & a+b-c+d & a-b-c+d & a-b+c+d \\ a+b+c-d & a+b-c-d & a-b-c-d & a-b+c-d \\ a+b+c-d & a+b-c-d & a-b-c-d & a-b+c-d \end{bmatrix}.$$

Après division par 16, on obtient

$$A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} a+b+c+d & a+b-c+d & a-b-c+d & a-b+c+d \\ a+b+c+d & a+b-c+d & a-b-c+d & a-b+c+d \\ a+b+c-d & a+b-c-d & a-b-c-d & a-b+c-d \\ a+b+c-d & a+b-c-d & a-b-c-d & a-b+c-d \end{bmatrix},$$

où a,b,c,d sont des réels quelconques.

On obtient un espace vectoriel réel de dimension 4, dont une base est donnée par la famille

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

2.8 Corrigé de l'examen Transformées du 9 novembre 2018

Exercice 1

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[k]$	12	10	8	6	6	8	10	12
étape 1, 2 par 2	22	2	14	2	14	-2	22	-2
étape 2, 4 par 4	36	4	8	0	36	-4	-8	0
étape 3, $\mathcal{W}_3(f)[k]$	72	0	0	0	0	8	16	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [72, 0, 0, 0, 0, 8, 16, 0].$$

2) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Donc ici on garde les coefficients associés aux indices $0, 2, 4$ et 6, et on annulle les autres. On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [72, 0, 0, 0, 0, 0, 16, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$	72	0	0	0	0	0	16	0
étape 1, 2 par 2	72	72	0	0	0	0	16	16
étape 2, 4 par 4	72	72	72	72	-16	-16	-16	-16
étape 3, 8 par 8,	88	88	56	56	56	56	88	88
division par 8, $f_{0,5}$	11	11	7	7	7	7	11	11

On obtient

$$f_{0,5} = [11, 11, 7, 7, 7, 7, 7, 11, 11].$$

Exercice 2

1) 1) La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [3, 4, 1, 0]$ et $g = [4, 3, 0, 0]$ de longueur 4.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	3	4	1	0
$rev(f)[m]$	3	1	4	0
étape1	4	2	4	4
étape 2, $\hat{f}(m)$	8	$2-4i$	0	$2+4i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	4	3	0	0
$rev(g)[m]$	4	0	3	0
étape 1	4	4	3	3
étape 2, $\hat{g}(m)$	7	$4-3i$	1	$4+3i$

3) Les signaux f et g sont formés des coefficients de p et q. Comme $d^op + d^oq \leq 3$, le signal h formé des coefficients de pq est donné par les 4 premiers termes de la convolution acyclique de f et g, qui coincident ici avec les coeffeicients de la convolution cyclique $f \overset{(4)}{*} g$ de f et g. On a donc $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$

Comme $(2-4i)(4-3i) = 8-6i-16i-12 = -4-22i$, on a $(2+4i)(4+3i) = -4+22i$, et on obtient

$$\hat{f}.\hat{g} = [56, -4-22i, 0, -4+22i].$$

On va appliquer la FFT inverse à $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$\hat{h}[m]$	56	$-4-22i$	0	$-4+22i$
$rev(h)[m]$	56	0	$-4-22i$	$-4+22i$
étape 1	56	56	-8	$-44i$
étape 2	48	100	64	12
$h[m]$	12	25	16	3

Ceci donne

$$pq = 3 + 25x + 16x^2 + 3x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(3+4x+x^2)(4+3x) = 12+16x+4x^2+9x+12x^2+3x^3 = 12+25x+16x^2+3x^3.$$

On a alors

$$143 \times 34 = p(10)q(10) = pq(10) = 12 + 2500 + 1600 + 3000 = 4862,$$

ce que confirme un calcul direct.

Exercice 3

1) On va faire un calcul direct. On a

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z+1)t}dt.$$

On a $|e^{-(z+1)t}| = e^{-(Re(z)+1)t}$, et $\int_0^{+\infty} |e^{-(z+1)t}|dt$ est convergente si $Re(z) > -1$. On a alors

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z+1)t}dt = \lim_{L\to+\infty} \int_0^{L} e^{-(z+1)t}dt$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(z+1)t}}{z+1}\right]_0^L = \lim_{L\to+\infty} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{e^{-(z+1)L}}{z+1}\right) = \frac{1}{z+1}.$$

Donc $Dom(\mathcal{L}(f)) = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > -1\}$, et $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z+1}$ pour $Re(z) > -1$.

2) On va décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(z) = \frac{2-6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$. Comme le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur, la décomposition est de la forme

$$\frac{2-6z}{(z+1)(z-1)(z-3)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-3}, \text{ avec } a, b, c \text{ réels.}$$

En multipliant par $z+1$, et en faisant $z = 1$, on obtient $a = 1$; en multipliant par $z-1$, et en faisant $z = 1$, on obtient $b = 1$; en multipliant par $z-3$, et en faisant $z=3$, on obtient $c=-2$, ce qui donne

$$\frac{2-6z}{(z+1)(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-3}.$$

3) On considère maintenant l'équation différentielle $y''(t)-4y(t) = 8e^{-t}$, avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = -6$. Posons $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$. D'après la table des transformées de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z),$$

$$\mathcal{L}(y'')(z) = z\mathcal{L}(y')(z) - y'(0) = z^2Y(z) + 6.$$

On obtient, d'après la question 1,

$$z^2Y(z)-4zY(z)+3Y(z)+6 = \frac{8}{z+1}, (z^2-4z+3)Y(z) = \frac{8}{z+1}-6 = \frac{2-6z}{z+1},$$

$$Y(z) = \frac{2-6z}{(z+1)(z-1)(z-3)}.$$

D'après la question 2, et en lisant de droite à gauche la table des transformées de Laplace, on obtient

$$Y(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-3}, y(t) = e^{-t} + e^t - 2e^{3t}.$$

4) a) On retrouve les résultats de la question 3 avec Mupad, en traçant aussi le graphe de la solution, ce qui n'était pas demandé.

```
a:=ode({y''(x)-4*y'(x)+3*y(x)=8*exp(-x),y(0)=0,y'(0)=-6},{y(x)});
```

$\mathrm{ode}\left(\left\{y'(0) = -6,\ y(0) = 0,\ y''(x) - 4\ y'(x) + 3\ y(x) - 8\ e^{-x}\right\},\ y(x)\right)$

```
b:=solve(a);
```

$\left\{e^{-x} - 2\ e^{3\ x} + e^{x}\right\}$

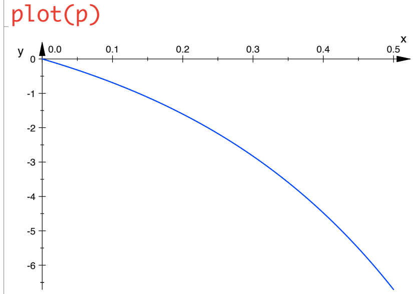
```
f:=x->op(b);
```

$x \to \mathrm{op}(b)$

```
p:=plot::Function2d(f(x),x=0..1/2);
```

$\mathrm{plot::Function2d}\left(e^{-x} - 2\ e^{3\ x} + e^{x},\ x = 0..\frac{1}{2}\right)$

```
plot(p)
```

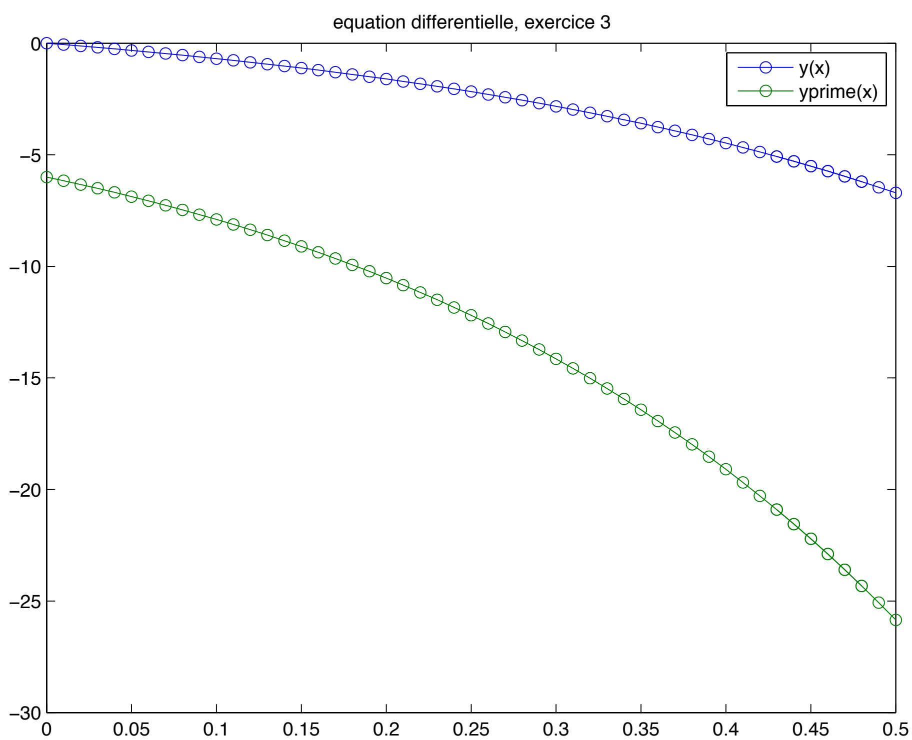


b) Avec Matlab on crée une M-file. Avec la commande 'edit eqexam' Matlab propose en anglais de créer une M-file. Après avotr répondu 'yes' on crée la M-file en question.

function dy=eqexam(x,y) dy=zeros(2,1) dy(1)=y(2) dy(2)=4*y(2)-3*y(1)+8*exp(-x)

Ceci permet ensuite de tracer le graphe de la solution (et celui de sa dérivée), ce qui n'était pas demandé.

```
ode23(@eqexam,[0:0.01:0.5],[0,-6]);
legend('y(x)','yprime(x)');
title('equation differentielle, exercice 3');
print -depsc eqexam
```



Exercice 4

1) Notons que $\int_0^{+\infty}|f^+(t)||e^{-zt}|dt = \int_0^{+\infty}|f^+(t)|e^{-Re(z)t}dt \leq \int_0^{+\infty}|f(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt < +\infty$ pour $Re(z) \geq 0$, donc $z \in Dom(\mathcal{L}(f^+)$ pour $Re(z) \geq 0$. On a pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $t = -s$ pout $t \leq 0$,

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(s)e^{isx}ds + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \mathcal{L}(f^+)(-ix) + \mathcal{L}(f^+)(ix).$$

2) Posons $u_0(t) = cos(t)$ et $v_0(t) = cos^2(t) = \frac{1+cos(2t)}{2}$ pour $t \geq 0$. La table des transformées de Laplace donne

$g(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	$Dom(\mathcal{L}(f))$
1	$\frac{1}{z}$	$Re(z) > 0$
$cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$Re(z) > 0$

Donc $\mathcal{L}(u_0)(z) = \frac{z}{z^2+1}$ et $\mathcal{L}(v_0)(z) = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2(z^2+4)} = \frac{z^2+2}{z(z^2+4)}$ pour $Re(z) \geq 0$, et on obtient, pour $Re(z) > -1$,

$$\mathcal{L}(u)(z) = \mathcal{L}(u_0)(z+1) = \frac{z+1}{(z+1)^2+1},$$

$$\mathcal{L}(v)(z) = \mathcal{L}(v_0)(z+2) = \frac{(z+2)^2+2}{(z+2)((z+2)^2+4)}.$$

On a alors

$$\int_{0}^{+\infty} |u^2|dt = \int_{0}^{+\infty} v(t)dt = \mathcal{L}(v)(0) = \frac{3}{8}.$$

3) Comme $|f(t)| \leq 1$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a

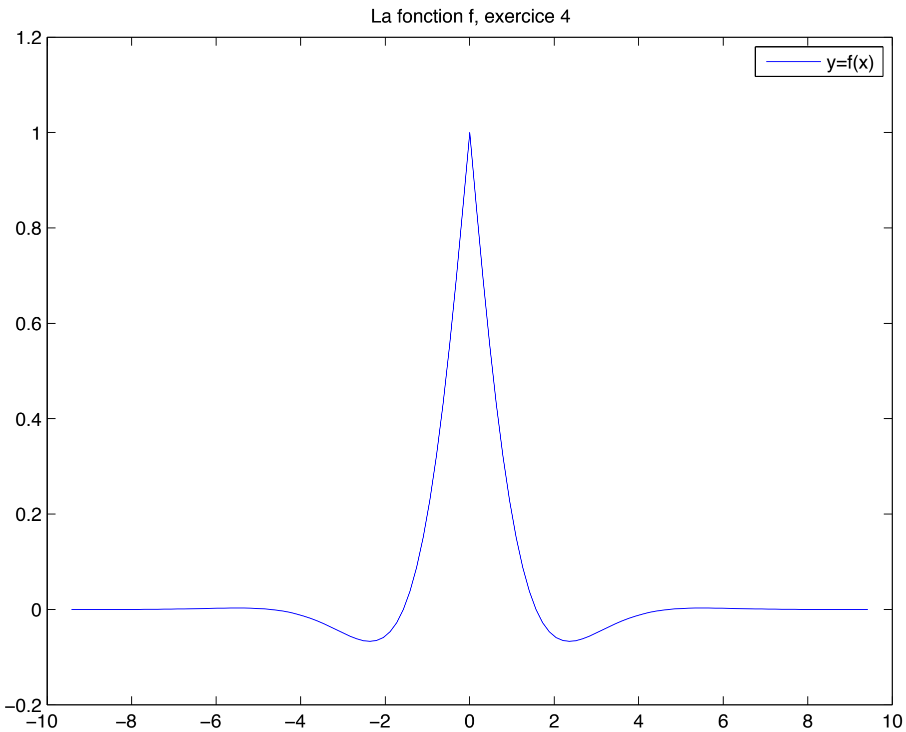
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t}|cos(t)|dt \leq 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt$$

$$= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 < +\infty.$$

Dond $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

On représente le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ avec Matlab.

```
t=[-3*pi:pi/20:3*pi];
y=exp(-abs(t)).*cos(t);
plot(t,y);hold on;
 axis equal;legend('y=f(x)');
 title('La fonction f, exercice 4');
 print -depsc fexo4
```



4) Puisque f est paire, on a, d'après les questions 1 et 2, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{L}(u)(ix) + \mathcal{L}(u)(-ix) = \frac{ix+1}{(ix+1)^2+1} + \frac{-ix+1}{(-ix+1)^2+1}.$$

Posons $z = 1 + ix$. On a $Re(z) = 1, |z| = \sqrt{1+x^2}$, $z^2 = 1 - x^2 + 2ix$, et on obtient

$$\widehat{f}(x) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1} = \frac{z\overline{z}^2 + \overline{z}z^2 + z + \overline{z}}{z^2\overline{z}^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1}$$

$$= \frac{2Re(z)(|z|^2+1)}{|z|^4 + 2Re(z^2) + 1} = \frac{2x^2+4}{((x^2+1)^2 + 2(1-x^2)+1} = \frac{2x^2+4}{x^4+4}.$$

5) On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\hat{f}(x) = \lim_{x\to+\Delta infty} \frac{2x^4+4x^2}{x^4+4} = 2 < +\infty.$$

Il résulte alors du critère de Riemann (proposition 4.1.3 du support de cours) que $\int_0^{+\infty} |\hat{f}(t)| < +\infty$. Comme $\hat{f}$ est paire, on a $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et il résulte de la formule d'inversion de Fourier que l'on a, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4} e^{itx} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{itx} dx = \frac{1}{2} 2\pi f(t) = \pi e^{-|t|} cos(t),$$

et comme $f$est continue sur $\mathbb{R}$, cette formule est en fait valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6) Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, et comme d'après la question 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t} cos^2(t) dt = \frac{3\pi}{4}$, il résulte de la formule de Parseval que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+2)^2}{(x^4+4)^2} dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt = \frac{3\pi^2}{8}.$$

7) Pour que $y \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $H * y = f$, il faut et il suffit que $\widehat{H}\widehat{y} = \widehat{g}$, ce qui donne

$$\widehat{y}(x) = \frac{\widehat{g}(x)}{\widehat{H}(x)} = \frac{(x^2+2)(x^2+1)}{x^4+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2+2)(x^2+1)}{x^4+1} = 1$, and $\lim_{x\to\pm\infty} \widehat{y}(x) = 0$ pour tout $y \in L^1(\mathbb{R})$. Donc l'équation de convolution proposée n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1) Le solide V_n est un morceau de cylindre plein de révolution d'axe Oz, délimité par les plans horizontaux d'équations $z = n - \frac{4}{n}$ et $z = n$, et par le cylindre vertical d'équation $x^2 + y^2 = \frac{n}{3^n}$.

La base du cylindre est un disque de rayon $\sqrt{n}.3^{-n/2}$, d'aire S_n et de hauteur $h_n = \frac{4}{n}$. Le volume est égal à $h_n S_n = 4.3^{-n}$. On retrouve ce résultat par le théorème de Fubini. Ici $V_n^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x^2+y^2 \leq n3^{-n}\}$ pour $n - \frac{4}{n} \leq z \leq n$, $V_n^z = \emptyset$ pour $z < n - \frac{4}{n}$ et pour $z > n$, donc si on note $\pi_2 : (x,y,z) \to z$ la projection orthogonale sur l'axe $0z$ on a $\pi_2(V_n) = [n - \frac{4}{n}, n]$ et on obtient

$$vol(V_n) = \int_{V_n} dxdydz = \int_{\pi_2(V_n)} \left[\int_{V_n^z} dxdy\right] dz = \int_{n-4/n}^{n} Aire(V_n^z) dz$$

$$= \int_{n-4/n}^{n} \pi n 3^{-n} dz = \pi n 3^{-n} \int_{n-4/n}^{n} dz = 4.3^{-n}\pi.$$

2) On a $n - \frac{4}{n} < 1$ pour $n \geq 5$, Donv $V_n \cap V_m = \emptyset$ pour $n \geq 5, m \neq m$, et on a

$$Vol(V) = Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3 + \cup V_4) + Vol(\cup_{n\geq 5} V_n)$$

$$= Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) + \sum_{n=4}^{+\infty} Vol(V_n).$$

On a $Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3) + Vol(V_4) - Vol((V_1 \cup V_2 \cup V_3) \cap V_4)$. Mais $(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \cap V_4 = V_3 \cap V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3, x^2 + y^2 \leq \frac{4}{16} = \frac{1}{4}\}$ est un disque de volume nul, Donc $Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3) + Vol(V_4)$. Posons $V_2' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{2}{9}, 1 \leq z \leq 2\}, V'3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{2}{9}, 2 \leq z \leq 3\}$. Alors les solides V_1, V_2', V_3' sont empilés, et on a

$$Vol(V_1 \cup V_2 \cup V_3) = Vol(V_1 \cup V_2' \cup V_3') = Vol(V_1) + Vol(V_2') + Vol(V_3')$$

$$= \frac{4\pi}{3} + Aire(V_2^z) + Aire(V_3^z) = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{3}.$$

On a

$$\sum_{n=4}^{+\infty} Vol(V_n) = 4\pi 3^{-4} \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{4\pi 3^{-4}}{1 - 1/3} = \frac{2\pi}{27}.$$

On obtient

$$Vol(V) = \frac{5\pi}{3} + \frac{2\pi}{27} = \frac{47\pi}{27}.$$

On fait une figure en utilisant Mupad.

```
plot(plot::Cylinder(1/3, [0, 0, -3], [0, 0, 1],
                    Color = RGB::Blue),
     plot::Cylinder(2/9, [0, 0, 0], [0, 0, 2],
                    Color = RGB::Green),
     plot::Cylinder(1/9, [0, 0, 5/3], [0, 0, 3],
                    Color = RGB::Red) ,plot::Cylinder(4/81, [0, 0,3 ], [0, 0, 4],
                    Color = RGB::Brown),plot::Cylinder(5/243, [0, 0, 5-4/5], [0, 0, 5],
                    Color = RGB::Blue)):
```