ESTIA 2019 - Transformées
Corrigé du devoir maison du 21 Octobre 2019

Exercice 1

1) On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_0^{\pi} e^{-itx}dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-itx}dt = \left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1 + e^{-2i\pi x} - 2e^{-i\pi x}}{ix} = \frac{(1 - e^{-i\pi x})^2}{ix} = \frac{\left(e^{-\frac{i\pi x}{2}}\left(e^{\frac{i\pi x}{2}} - e^{-\frac{i\pi x}{2}}\right)\right)^2}{ix}$$

$$= e^{-i\pi x}\frac{\left(2isin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2}{ix} = 4ie^{-i\pi x}\frac{sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x} = 2i\pi e^{-i\pi x} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) sin_c\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

D'autre part on a $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\pi} dt - \int_{\pi}^{2\pi} dt = 0$, et la formule ci-dessus reste valable pour $x = 0$ puisque $sin(0) = 0$.

2) Si $\widehat{f}$ était intégrable sur $\mathbb{R}$ alors il résulterait de la formule d'inversion de Fourier que f serait égale presque partout à une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Mais ceci est impossible puisque f admet des limites à droite et à gauche distinctes en $0, \pi$ et 2π.

3) On a, d'après la formule de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(x)|^2 dx,$$

ce qui donne

$$2\pi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 16\frac{sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}dx = \frac{16}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Posons $s = \frac{\pi x}{2}$. On obtient $x = \frac{2}{\pi}s, dx = \frac{2}{\pi}ds$, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(s)}{s^2}ds,$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^4(s)}{s^2} ds = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifie le résultat avec Mupad.

```
int(sin^4(t)/t^2,t=0 . . infinity)
```

$\frac{\pi}{4}$

4) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(\widehat{f * g})(x) = f(x)g(x) = 2i\pi e^{-i\pi x} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) sin_c\left(\frac{\pi x}{2}\right) g(x).$$

Donc $\widehat{f * g}(2k\pi) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\widehat{H}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a $\widehat{f * g} \neq \widehat{H}$, $f * g \neq H$ et l'équation $f * g = H$ n'admet pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1) Calculons la transformée de Walsh de f par “Walsh rapide” :

p	0	1	2	3	4	5	6	7
$f[p]$	7	7	5	5	3	3	1	1
étape 1, 2 par 2	14	0	10	0	6	0	2	0
étape 2, 4 par 4	24	0	4	0	8	0	4	0
étape 3, 8 par 8, $\mathcal{W}_3(f)[p]$	32	0	8	0	16	0	0	0

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [32, 0, 8, 0, 16, 0, 0, 0].$$

2) On sait que compresser le signal à 25% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,25 \times 2^3 - 1 = 1$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 1$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 25% de f est alors de nouveau égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On a vu en cours qu'on a le tableau suivant

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$cs_3(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

On remplace donc $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $i = 1, 2, 3, 5, 6$ ou 7, et on conserve $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $i = 0$ ou 4.

On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,25} = [32, 0, 0, 0, 16, 0, 0, 0].$$

D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de $\mathcal{W}_3(f)_{0,5}$ revient à calculer sa transformée de Walsh et à diviser le résultat obtenu par $2^3 = 8$.

p	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(f)_{0,25}(p)$	32	0	0	0	16	0	0	0
étape 1, 2 par 2	32	32	0	0	16	16	0	0
étape 2, 4 par 4	32	32	32	32	16	16	16	16
étape 3, 8 par 8	48	48	48	48	16	16	16	16
division par 8, $f_{0,25}$	6	6	6	6	2	2	2	2

On obtient

$$f_{0,5} = [6, 6, 6, 6, 2, 2, 2, 2].$$

On sait que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$, $cs_3(i)$ désignant le nombre de changements de signes de la ligne d'indice i de la matrice de Walsh W_3 pour $0 \leq i \leq 7$. La compression à 50% de f est alors de nouveau égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh compressée."

On remplace donc $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $i = 1, 3, 5$ ou 7, et on conserve $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $i = 0, 2, 4$ ou 6.

On obtient

$$\mathcal{W}_3(f)_{0,5} = [32, 0, 8, 0, 16, 0, 0, 0] = \mathcal{W}_3(f).$$

Comme la transformée de Walsh est injective, on voit que $f_{0,5} = f = [7, 7, 5, 5, 3, 3, 1, 1]$ et la compression à 50% n'a rien changé à f.

Exercice 3

On va calculer la transformée de Walsh de A en utilisant l'algorithme rapide, appliqué aux lignes et ensuite aux colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes, on obtient

$$\mathcal{W}_2(A) = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On procède maintenant à la compression. On a

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $n(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$n(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i, j) selon la règle $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $n(i_1) + n(j_1) < n(i_2) + n(j_2)$ ou si $n(i_1) + n(j_1) = n(i_2) + n(j_2)$ **et** $n(i_1) < n(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i,j)	$n(i)$	$n(j)$	$n(i)+n(j)$	$rang[(i,j)]$
$(0,0)$	0	0	0	1
$(0,1)$	0	3	3	7
$(0,2)$	0	1	1	2
$(0,3)$	0	2	2	4
$(1,0)$	3	0	3	10
$(1,1)$	3	3	6	16
$(1,2)$	3	1	4	13
$(1,3)$	3	2	5	15
$(2,0)$	1	0	1	3
$(2,1)$	1	3	4	11
$(2,2)$	1	1	2	5
$(2,3)$	1	2	3	8
$(3,0)$	2	0	2	6
$(3,1)$	2	3	5	14
$(3,2)$	2	1	3	9
$(3,3)$	2	2	4	12

Pour la compression à 25% de A, on conserve les coefficients d'indice $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$ et $(2,0)$ de la transformée de Walsh de A et on annule les autres. Ceci donne

$$\mathcal{W}_2(A)_{25\%} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On effectue la transformée de Walsh inverse en utilisant l'algorithme rapide
1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 32 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 32 & 32 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} 32 & 32 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 32 & 32 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 16, et on a

$$A_{50\%} = \mathcal{W}_3^{-1}(\mathcal{W}_3(A)_{50\%}) = \frac{1}{16} W_3 \mathcal{W}_3(A)_{50\%} W_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

On obtient une image d'un gris uniforme.

Exercice 4

a) On considère l'équation différentielle

$$y"(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 12e^t,$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

Notons Y la transformée de Laplace de y. On a $\mathcal{L}(y')(z) = zY(z) - y(0) = zY(z) - 1$ et $\mathcal{L}(y")(z) = z\mathcal{L}(y')(z) + 3 = z^2Y(z) - z + 3$.

D'après la table des transformées de Laplace, si on pose $f_a(t) = e^{ta}$, on a $\mathcal{L}(f_a)(z) = \frac{1}{z-a}$. On obtient

$$z^2Y(z) + 6zY(z) + 5Y(z) - z + 3 - 6 = \frac{12}{z-1}, \quad (z^2 + 6z + 5)Y(z) = \frac{12}{z-1} + z + 3$$

$$= \frac{z^2 + 2z + 9}{z-1}.$$

On a $z^2 + 6z + 5 = (z+1)(z+5)$, soit

$$Y(z) = \frac{z^2 + 2z + 9}{(z-1)(z+1)(z+5)}.$$

Comme le degré du dénominateur de la fraction ci-dessus est supérieur à celui du numérateur, on a une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{z^2 + 2z + 9}{(z-1)(z+1)(z+5)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{z+5}.$$

En multipliant par $z-1$ et en faisant $z = 1$, on obtient $a = 1$. En multipliant par $z+1$ et en faisant $z = -1$, on obtient $b = -1$, et en multipliant par $z+5$ et en faisant $z = -5$, on obtient $c = 1$, soit

$$\frac{z^2+2z+9}{(z-1)(z+1)(z+5)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+5}.$$

On obtient

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+5}.$$

En lisant de gauche à droite la table des transformées de Laplace, on a alors

$$y(t) = e^t - e^{-t} + e^{-5t}.$$

2) On resout l'équation différentielle et on trace le graphe de la solution sur l'intervalle $[0, 1]$ avec Mupad.

Exercice 4, question 2

```
a:=ode({y''(t)+6*y'(t)+5*y(t)=12*exp(t),y(0)=1,y'(0)=-3},{y(t)});
```

$\mathrm{ode}\left(\left\{y'(0) = -3,\ y(0) = 1,\ y''(t) + 6\, y'(t) + 5\, y(t) - 12\, e^{t}\right\},\ y(t)\right)$

```
solve(a);
```

$\left\{e^{-5\,t} - e^{-t} + e^{t}\right\}$

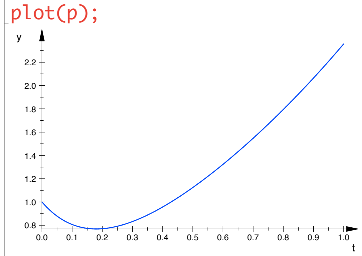
```
f:=t->op(solve(a));
```

$t \to \mathrm{op}(\mathrm{solve}(a))$

```
p:=plot::Function2d(f(t),t=0..1);
```

$\mathrm{plot::Function2d}\left(-e^{-t} + e^{-5\,t} + e^{t},\ t = 0..1\right)$

```
plot(p);
```



3) On effectue avec Matlab la commande

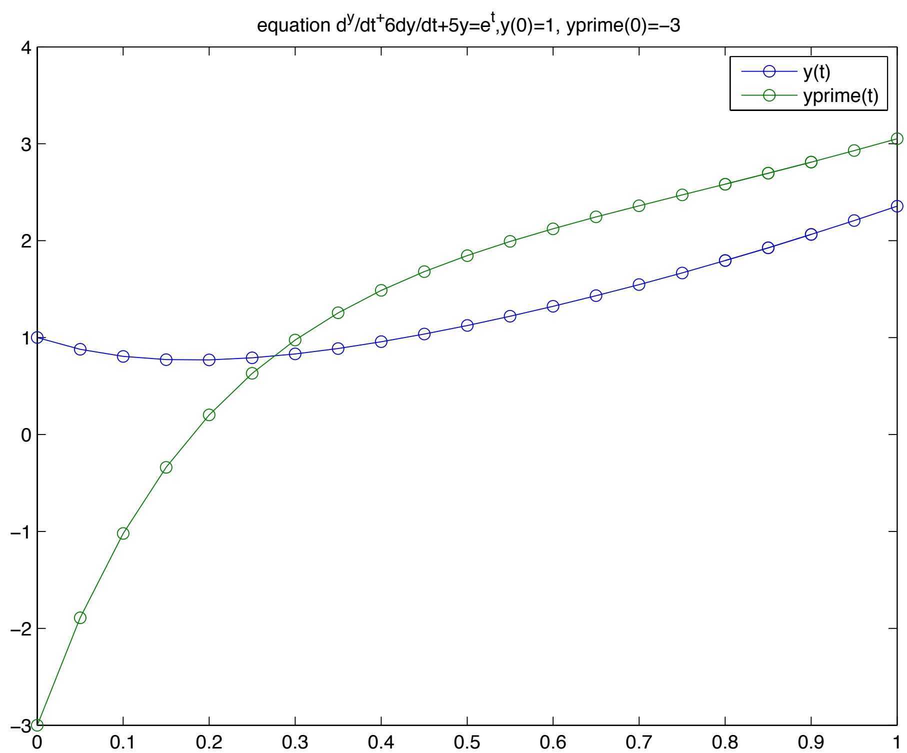
```
edit eqdif2019
```

Mupad répond en anglais que la M-file n'existe pas et propose de la créer. Après avoir repondu 'yes', on peut créer la M-file.

```
 function dy=eqdif2019(t,y)
dy=zeros(2,1)
dy(1)=y(2)
dy(2)=-5*y(1)-6*y(2)+12*exp(t);
```

Il ne reste plus qu'à demander à Matlab de tracer le graphe de la solution.

```
ode23(@eqdif2019,[0:0.05:1],[1,-3]);
legend('y(t)','yprime(t)');
title('Equation d^2y/dt^2+6dy/dt +5y=12e^t');
print -depsc eqdif2019
```



Exercice 5

1) 1) La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_4 = f \to \hat{f}$ sur $\mathbb{C}^4$ est définie pour $f = [f[0], f[1], f[2], f[3]] \in \mathbb{C}^4$ par la formule

$$\hat{f} = f \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

2) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère alors les signaux $f = [4, 1, 2, 0]$ et $g = [1, 8, 0, 0]$ de longueur 4 formés des coefficients de p et q, complétés par des zéros.

On leur applique ensuite la FFT. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	4	1	2	0
$rev(f)[m]$	4	2	1	0
étape 1	6	2	1	1
étape 2, $\hat{f}(m)$	7	$2-i$	5	$2+i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	8	0	0
$rev(g)[m]$	1	0	8	0
étape 1	1	1	8	8
étape 2, $\hat{g}(m)$	9	$1-8i$	-7	$1+8i$

Comme $(2-i)(1-8i) = 2-i-16i-8 = -6-17i$, on a $(2+i)(1+8i) = -6+17i$, et on obtient

$$\hat{f}.\hat{g} = [63, -6-17i, -35, -6+17i].$$

On va appliquer la FFT inverse à $h = \hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b				
$a+b$	$a-b$				

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$h[m]$	63	$-6-17i$	-35	$-6+17i$
$rev(h)[m]$	63	-35	$-6-17i$	$-6+17i$
étape 1	28	98	-12	$-34i$
étape 2	16	132	40	64
$\mathcal{F}^{-1}(h)$	4	33	10	16

Ceci donne

$$pq = 4 + 33x + 10x^2 + 16x^3,$$

ce que confirme le cacul direct

$$(4+x+2x^2)(1+8x) = 4+x+2x^2+32x+8x^2+16x^3 = 4+33x+10x^2+16x^3.$$

On a alors

$$214 \times 81 = p(10)q(10) = pq(10) = 4 + 330 + 1000 + 16000 = 17334,$$

ce que confirme un calcul direct.

4) Comme le degré du produit de polynômes considéré est égal à 15, on va effectuer les calculs dans $\mathbb{C}^{16}$ et utiliser les commandes fft((.,16) et ifft(.,16) pour les calculs par FFT des transformées de Fourier discrètes et transformées de Fourier inverses discrètes dans $\mathbb{C}^{16}$. On utilise la commande "format long" pour obtenir des résultats précis.

```
>> format long
f=[4 1 2 0];g=[1 8 0 0];u=fft(f,16);v=fft(g,16);w=(u.^4).*(v.^(7));h=ifft(w)

h =

   1.0e+09 *

  Columns 1 through 7

   0.000000256000000   0.000014592000000   0.000359008000000   0.004966032000000
   0.042127713000000   0.224321024000000   0.740911512000000

  Columns 8 through 14
```

```
   1.491255648000000   2.000553232000000   2.371500928000000   1.881510912000000
   1.485201408000000   0.722665472000000   0.388497408000000

  Columns 15 through 16

   0.096468992000000   0.033554432000000
```

On obtient les coefficients rangés par ordre de degré croissant du polynôme cherché (multiplier par 10^9 les nombres affichés). On retrouve évidemment le même résultat par un calcul direct effectué avec Mupad.

```
p:=2*x^2+x+4;q:=8*x+1;expand(p^4*q^(7));
```

$$2x^2 + x + 4$$

$$8x + 1$$

$$33554432x^{15} + 96468992x^{14} + 388497408x^{13} + 722665472x^{12} + 1485201408x^{11} + 1881510912x^{10} + 2371500928x^9 + 2000553232x^8 + 1491255648x^7 + 740911512x^6 + 224321024x^5 + 42127713x^4 + 4966032x^3 + 359008x^2 + 14592x + 256$$

Exercice 6

1) On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)f(t-s)ds.$$

Si $t < 0$ alors comme $s + (t-s) = t$ l'un des nombres s ou $t-s$ est négatif donc la fonction $s \to f(s)f(t-s)$ est nulle et $g(t) = 0$. De même si $t > 4\pi$, $\max(s, t-s) > 2\pi$ pour tout s, la fonction $s \to f(s)f(t-s)$ est nulle et $g(t) = 0$. On a alors, pour $0 \leq t \leq 4\pi$, puisque $f(s)f(t-s) = 0$ pour $s < 0$ ou pour $s > t$

$$g(t) = \int_0^t f(s)f(t-s)ds.$$

Si $0 \leq t \leq \pi$ on a $0 \leq s \leq \pi$ et $0 \leq t-s \leq \pi$ pour $s \in [0, x]$ donc $g(t) = \int_0^t ds = t$.

Si $\pi \leq t \leq 2\pi$, on a $g(t) = \int_0^\pi f(t-s)ds - \int_\pi^t f(t-s)ds$. Comme $t-s \in [0,\pi]$ pour $s \in [t-\pi], t$ et $t-s \in [\pi, 2\pi]$ pour $t \in [0, t-\pi]$, on obtient

$$g(t) = -\int_0^{t-\pi} ds + \int_{t-\pi}^{\pi} ds - \int_\pi^t ds = \pi - t + \pi - (t-\pi) - t + \pi = 4\pi - 3t.$$

Si $2\pi \leq t \leq 3\pi$, on a $g(t) = \int_0^{2\pi} f(s)f(t-s)ds$. Comme $t-s > 2\pi$ pour $s < t-2\pi$, on a

$$g(t) = \int_{t-2\pi}^{2\pi} f(s)f(t-s)ds = \int_{t-2\pi}^{\pi} f(t-s)ds - \int_\pi^{t-\pi} f(t-s)ds - \int_{t-\pi}^{2\pi} f(t-s)ds$$

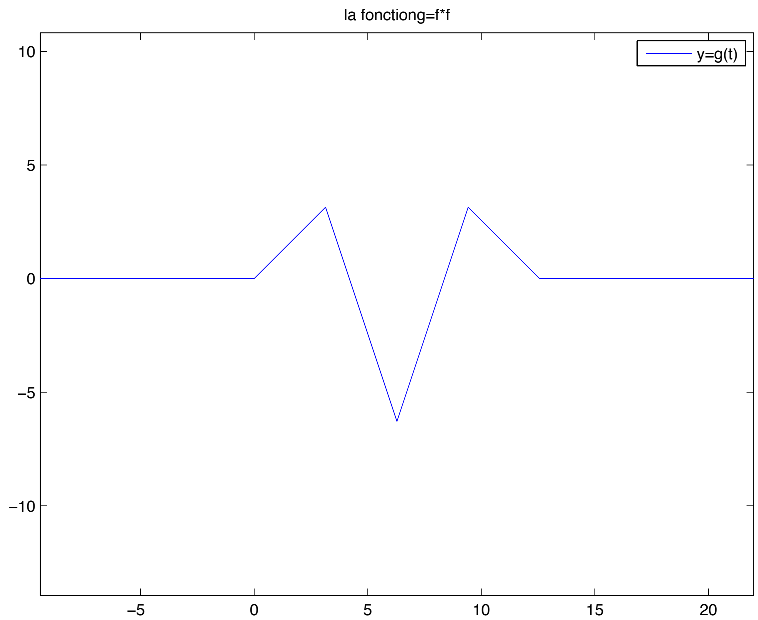
$$= -\int_{t-2\pi}^{\pi} ds + \int_\pi^{t-\pi} ds - \int_{t-\pi}^{2\pi} f(t-s)ds = -(3\pi - t) + t - 2\pi - (3\pi - t)$$

$$= -8\pi + 3t.$$

Si $3\pi \leq t \leq 4\pi$, on a $g(t) = \int_0^{2\pi} f(s)f(t-s)ds = \int_{t-2\pi}^{2\pi} f(s)f(t-s)ds$, puisque $t-s > 2\pi$ pour $s < t-2\pi$. Si $t - 2\pi \leq s \leq 2\pi$ alors $2\pi \geq s \geq 3\pi - 2\pi = \pi$ donc $f(s) = 1$ et $-2\pi \leq -s \leq 2\pi - t$, donc $2\pi \geq t - s \geq t - 2\pi \geq \pi$, et $f(t-s) = 1$. Finalement

$$g(t) = \int_{2\pi - t}^{2\pi} ds = 4\pi - t.$$

On obtient bien $g(t) = 0$ si $t \in]-\infty, 0[\cup]4\pi, +\infty[$, $g(t) = t$ si $t \in [0,\pi]$, $g(t) = 4\pi - 3t$ si $t \in [0, 2\pi]$, $g(t) = -8\pi + 3t$ si $t \in [2\pi, 3\pi]$ et $g(t) = 4\pi - t$ si $t \in [3\pi, 4\pi]$. Le tracé du graphe de g ne présente pas de difficulté.



2) Comme $g = f * f$, on a $\hat{g} = \hat{f}^2$, ce qui donne, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}(x) = \left[\widehat{f}(x)\right]^2 = \left[2i\pi e^{-i\pi x} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) sin_c\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2 = -4\pi^2 e^{-2i\pi x} sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) sin_c^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

3) Comme g est continue et comme $\sup_{t\in\mathbb{R}} t^2 g(t)$ est fini, on peut appliquer à g la formule sommatoire de Poisson, voir le théorème 9.3.1 du support de cours. Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|\widehat{g}(x)|^2 \leq 16/\pi^2 < +\infty$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}\left(\frac{2\pi n}{c}\right)|$ converge pour tout $c \in \mathbb{R}$, et on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(cn) = \frac{1}{c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

Pour $c = 2\pi$, ceci donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}\,(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(2\pi n).$$

Il résulte de la question 1 que $g(n) = 0$ pour $n \neq 1$ et que $g(1) = -2\pi$. D'autre part $\widehat{g}(n) = -4sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) sin_c^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Donc $\widehat{g}(n) = 0$ si n est pair, et $\widehat{g}(2m+1) = -\frac{-4\pi^2 sin^4\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)}{\pi^2(2m+1)^2/4} = \frac{16}{(2m+1)^2}$ si $n = 2m+1$ est impair. Finalement

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\ impair} \widehat{g}(n) = -2\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{16}{(2m+1)^2} = -\frac{32}{\pi^2}.$$

Comme $2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) = -4\pi^2$, on obtient bien

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 7

1) Le solide V_n est la portion du solide W_n comprise entre lles plans horizontaux d'équations $z = n^2$ et $z = n^2 + \frac{2}{2n+1}$, où W_n est le solide défini par l'inéquation $x^2 + y^2 \leq z - n^2$. Donc W_n est un solide de révolution d'axe $0z$. L'intersection avec le plan déquation $y = 0$ donne $x^2 \leq z - n^2$, qui est l'équation de l'intérieur d'une parabole. Donc V_n est le solide délimité par un paraboloide de révolution de sommet $(0, 0, n^2)$ et d'axe Oz, et par les plans horizontaux d'équations $z = n^2$ et $z = n^2 + \frac{2}{2n+2}$.

Pour calculer le volume de V_n on pose $V_n^z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in V_n\}$, et $\pi_2(V_n) = \{z \in \mathbb{R} \mid V_n \neq \emptyset\}$. On a $\pi_2(V_n) = [n^2, n^2 + \frac{2}{2n+1}]$, et V_n^z est le disque fermé de rayon $\sqrt{z - n^2}$ centré en $(0, 0)$ pour $z \in \pi_2(V_n)$, de sorte que $\int\int_{V_n^z} dxdy = Aire(V_n^z) = \pi(z - n^2)$. Il résulte alors du théorème de Fubini que l'on a

$$Vol(V_n) = \int\int\int_{V_n} dxdydz = \int_{\pi_2(V_n)} \left[\int\int_{V_n^z} dxdy\right] dz = \int_{n^2}^{n^2+\frac{2}{2n+1}} \pi(z-n^2)dz$$

$$= \pi \left[\frac{(z-n^2)^2}{2}\right]_{n^2}^{n^2+\frac{2}{2n+1}} = \frac{2\pi}{(2n+1)^2}$$

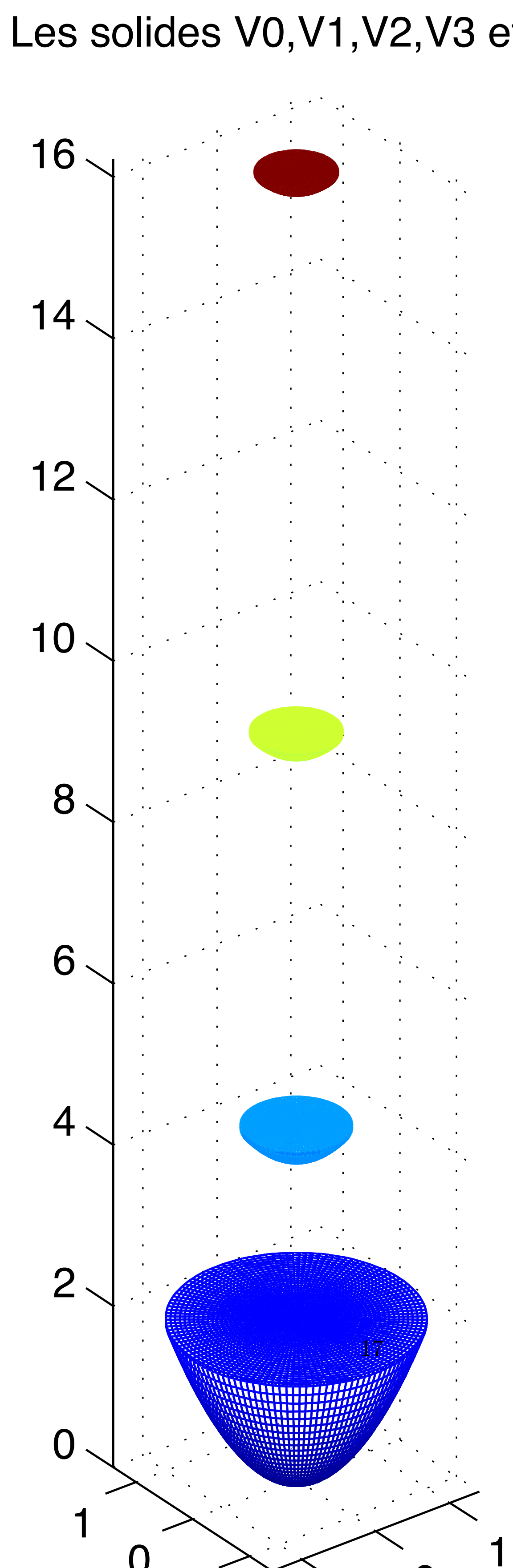
2) On constate que V_0 est défini par les inéquations $x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 2$, et que V_1 est défini par les inéquations $x^2 + y^2 \leq z - 1, 1 \leq z \leq 5/3$. Donc $V_1 \subset V_0$. Par contre les solides $V_n, n \geq 2$ sont disjoints deux à deux et disjoints de $V_0 \cup V_1 = V_0$. On a donc

$$vol(V) = Vol(V_0 \cup V_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} vol(V_n) = Vol(V_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} vol(V_n) = -Vol(V_1) + \sum_{n=0}^{+\infty} vol(V_n)$$

$$= -\frac{2\pi}{9} + 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1)^2} = \frac{\pi^3}{4} - \frac{2\pi}{9}.$$

On dessine V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 avec Matlab (V_1 n'apparait pas car il est inclus dans V_0). Une esquisse manuelle était tout à fait recevable.

```
    [theta,r0]=meshgrid([0:pi/60:2*pi],[0:1/20:sqrt(2)]);
x0=r0.*cos(theta);
y0=r0.*sin(theta);
z0=x0.^2+y0.^2 ;axis equal
mesh(x0,y0,z0);
hold on
z01=2*ones(size(x0));
mesh(x0,y0,z01); hold on;
[theta,r1]=meshgrid([0:pi/60:2*pi],[0:1/20:sqrt(2/3)]);
x1=r1.*cos(theta);
y1=r1.*sin(theta);
z1=x1.^2+y1.^2 ;z10=z1+ones(size(z1));
mesh(x1,y1,z10);
hold on
z11=(5/3)*ones(size(x1));
mesh(x1,y1,z11); hold on;
[theta,r2]=meshgrid([0:pi/60:2*pi],[0:1/20:sqrt(2/5)]);
 x2=r2.*cos(theta);
 y2=r2.*sin(theta);
 z2=x2.^2+y2.^2 ;z20= z2+4*ones(size(z2));
mesh(x2,y2,z20);
 hold on
z21=(22/5)*ones(size(x2));
mesh(x2,y2,z21); hold on;
[theta,r3]=meshgrid([0:pi/60:2*pi],[0:1/20:sqrt(2/7)]);
 x3=r3.*cos(theta);
 y3=r3.*sin(theta);
 z3=x3.^2+y3.^2 ;z30= z3+9*ones(size(z3));
mesh(x3,y3,z30);
 hold on
z31=(65/7)*ones(size(x3));
mesh(x3,y3,z31); hold on;
[theta,r4]=meshgrid([0:pi/60:2*pi],[0:1/20:sqrt(2/9)]);
x4=r4.*cos(theta);
y4=r4.*sin(theta);
z4=(x4.^2+y4.^2) ; z40=z4+16*ones(size(z4));
mesh(x4,y4,z40);
hold on
z41=(146/9)*ones(size(x4));
mesh(x4,y4,z41); hold on;axis equal
 hold on; axis equal
title('Les solides V0,V1,V2,V3 et V4');
print -depsc DM2019b
```


Les solides V0,V1,V2,V3 et V4
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
0
1