

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2018 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 报名号

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 中国人民解放军陆军军医大学

参赛队员（打印并签名）：1. 唐凯

2. 王艺超

3. 李翔

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 宋丽娟

日期： 2017 年 9 月 11 日

（此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2018 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页，即电子版论文的第一页为标题、摘要和关键词页。）

平行束 CT 系统参数标定及成像

摘要

CT 作为一种重要的无损检测技术已广泛应用于国防, 医学影响和化工等领域。本文将对平行束 CT 系统参数标定及成像问题进行探索和研究。具体研究内容如下: 问题一, 通过分析探测器接收到的信息以及托盘内两个标定模版的位置信息, 可以得到 4 个探测器单元之间距离的近似值, 我们把这 4 个近似值取平均值 (0.2765mm) 作为探测器单元之间距离的最终值。然后, 通过分析射线平行于 X 轴和 Y 轴入射时探测器单元接收到的信息以及探测器正对于托盘中心旋转时, 和探测器正对于旋转中心旋转时的位置关系, 确定了旋转中心相对于托盘中心的偏移量, 进而求得了旋转中心的坐标 mm。最后, 我们在探测器接受到的数据中定位到了射线平行于 X 轴入射时 (0°), 以及射线平行于 Y 轴入射时 (90°) 的两列数据, 而这两列列数的差值为 90, 进而推算出 CT 每旋转一次的方向恰为 1° , 继而得到其余 180 个方向的角度范围为 -60° 到 120° 。问题二, 我们依据 CT 扫描原理建立了平行束二维 CT 系统成像标定模型, 该模型将 CT 扫描后得到的待标定图像 $f(x,y)$ 进行旋转、平移、还有大小调整转化为实际扫描时介质的图像 $G(x,y)$ 。然后通过将正方形托盘实际边长与像素点的换算, 以及托盘中心和旋转中心的相对位置, 进而在以旋转中心为原点, 平行和垂直于于托盘左边 X、Y 轴的平面直角坐标系中将托盘和介质都绘制出来, 继而可通过取点计算得到该介质上任何一点的坐标。最后, 我们将标定图像内 Radon 逆转换的 362×362 数据缩放为 256×256 的数据 (即射线吸收率数据) 并生成为 problem2.xls, 将附件 4 中 10 个点根据坐标一一对应与该数据表进而求得这十个点的射线吸收率。其中第 2、4、5、6、7 处位置的吸收率为 0.4878、1.1838、1.0331、1.4820、1.2729, 其余吸收率为 0.0000。问题三, 我们使用了 Radon 逆转换将附件数据还原为待标定图片。然后利用问题二所建立的模型将托盘和还原后的图片共同绘制在如问题二所述的平面直角坐标系中。最后, 同问题二将缩放后的 256×256 的数据 (即射线吸收率数据) 生成为 problem3.xls, 将附件 4 中 10 个点根据坐标一一对应与该数据表进而求得这十个点的射线吸收率。其中第 2、3、5、6、7、9 处位置的吸收率为 1.8413、5.2027、0.9190、2.2433、4.8737 和 5.6109, 其余吸收率为 0.0000。问题四, 基于问题一的计算过程, 我们分别将探测器单元距离, 旋转中心较托盘中心的坐标偏移量以及探测器每旋转一个方向时的角度可能的取值取出, 代入到问题二中未知介质的 CT 扫描情形下对其进行标定, 通过计算并比较各取值条件下圆盘中心点 (0,0) 的吸收率, 并计算吸收率方差, 得到我们模型标定的稳定性较高的结论。由于各个参数取值较多, 故标定精度相对较差。为了进一步提高标定时的精度和稳定度, 我们设计了一个较为锐利的等腰直角三角形图案, 再次利用上述方法求得圆盘中心点 (0,0) 的吸收率, 因其方差接近于 0 故稳定性较好。参数取值较之前问题有明显减少, 故精度提高。

综上所述，本文通过建立平行束二维 CT 系统图像标定模型，较好的实现了 CT 图像的标定和吸收率的求解，通过设计新的标定模板使得稳定性和精度均较之前有明显提高。

关键字： CT 平行束 吸收率 发射-接收系统

一、问题重述

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下,利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像,由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示,平行入射的 X 射线垂直于探测器平面,每个探测器单元看成一个接收点,且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变,整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向,在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量,并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。CT 系统安装时往往存在误差,从而影响成像质量,因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定,即借助于已知结构的样品(称为模板)标定 CT 系统的参数,并据此对未知结构的样品进行成像。请建立相应的数学模型和算法,解决以下问题:

(1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板,模板的几何信息如图 2 所示,相应的数据文件见附件 1,其中每一点的数值反映了该点的吸收强度,这里称为“吸收率”。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据这一模板及其接收信息,确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

(2) 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用 (1) 中得到的标定参数,确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外,请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率,相应的数据文件见附件 4。

(3) 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用 (1) 中得到的标定参数,给出该未知介质的相关信息。另外,请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

(4) 分析 (1) 中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型,以改进标定精度和稳定性,并说明理由。

二、模型假设

1. 二维 CT 系统每次转动时转动的角度相同。
2. 二维 CT 系统的发射器和探测器之间的距离大于正方形托盘对角线。
3. 二维 CT 系统工作时不受其产生的电磁场等其他因素的干扰。

三、符号说明

符号	定义
a_i	去 0 处理后的信息
n_i	a_i 对应信息的长度
d	相邻两单元之间的距离
$\Delta x, \Delta y$	X 轴、Y 轴方向的偏移量
$\Delta \bar{\theta}$	每转动一次转过的角度
φ	标定时的旋转角度
μ	吸收率

四、问题分析

CT (computed tomography) 作为一种重要的无损检测技术已广泛应用于国防, 医学影响和化工等领域。本文拟对平行束 CT 系统参数标定及成像问题进行建模和研究。

4.1 问题一

问题一要求我们根据标定模板在 CT 系统成像时的相关信息, 确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。我们首先确立了以椭圆中心为原点, 短轴所在延长线为 X 轴 (正方向为右), 长轴所在延长线为 Y 轴 (正方向为上) 的直角坐标系。通过分析探测器接收到的信息以及托盘内两个标定模版的位置信息, 我们计算得到了每个探测器单元之间的距离。然后, 通过分析射线平行于 X 轴和 Y 轴入射时探测器单元接收到的信息以及探测器正对于托盘中心旋转时, 和探测器正对于旋转中心旋转时的位置关系, 确定了旋转中心相对于托盘中心的偏移量, 进而求得了旋转中心的坐标。最后, 我们在探测器接收到的数据中确定了平行于 X 轴和 Y 轴时探测器所在的角度, 进而根据假设一推算出了探测器旋转时 180 个方向的角度。

4.2 问题二

问题二要求我们利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息, 以及问题一中得到的标定参数, 确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。还要求我们具体给出 10 个图中位置的吸收率。首先, 我们根据 CT 成像原理以及问题一求得的标定参数建立了平行束二维 CT 系统图像标定模型。该模型可将 CT 扫描后得

到的待标定图像进行旋转，平移，还有大小调整转化为实际扫描时介质的形态。然后将正方形托盘实际边长与像素点的换算，以及托盘中心和旋转中心的相对位置，进而在以旋转中心为原点，平行和垂直于于托盘左边 X、Y 轴的平面直角坐标系中将托盘和介质都绘制出来，继而可通过取点计算得到该介质上任何一点的坐标。最后，我们将待标定图像进行调整时 Radon 逆函数所求得的数值缩放为 256×256 的数据（即射线吸收率数据），将附件 4 中 10 个点根据坐标一一对应与该数据表进而求得这十个点的射线吸收率。

4.3 问题三

问题三要求我们利用另一个未知介质的 CT 接收信息以及之前所求得的标定参数，给出该未知介质的相关信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。首先，我们利用问题二中所建立的模型将图片还原为 CT 扫描时的实际形态。然后利用正方形托盘中心与旋转中心的相对位置，以及实际边长与像素点的换算关系，将托盘和还原后的图片共同绘制在如问题二所述的平面直角坐标系中。最后，同问题二，将 Radon 逆函数求得的数据缩放，进而可求得未知介质以及附件 4 中 10 个位置的吸收率。

4.4 问题四

问题四要求我们分析问题一中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。首先，基于问题一的计算过程，我们对于探测器单元距离，旋转中心较托盘中心的坐标偏移量以及探测器每旋转一个方向时的角度进行可能的取值分析。将各个变量的可能取值代入到问题二中未知介质的 CT 扫描情形下对其进行标定，通过计算并比较各取值条件下圆盘中心的吸收率进而探究问题一中参数标定的稳定性程度。对于参数标定的精度，我们主要通过各个参数可能的取值范围来讨论。然后，为了进一步提高标定时的提高精度和稳定度，我们设计了一个较为锐利的等腰直角三角形图案（边缘有缺损），利用问题一中的方法和问题二中所建立的二维 CT 系统图像标定模型再次计算相关参数。通过分析其求解过程中各参数可能的取值，以及各取值情况下圆盘中心的吸收率观察参数标定的稳定性以及精度。

4.5 思路总结

综上所述，对于平行束 CT 系统参数标定及成像问题问题可以通过下图所示流程图进行求解

4.6 模型的建立与求解

4.7 问题一：CT 系统参数的标定

平面直角坐标系的建立

以正方形托盘中心为原点，分别以椭圆短轴为 X 轴方向，长轴方向为 Y 轴方向建立如所示的坐标系。设椭圆和圆中心的坐标分别为，其坐标经计算分别为。

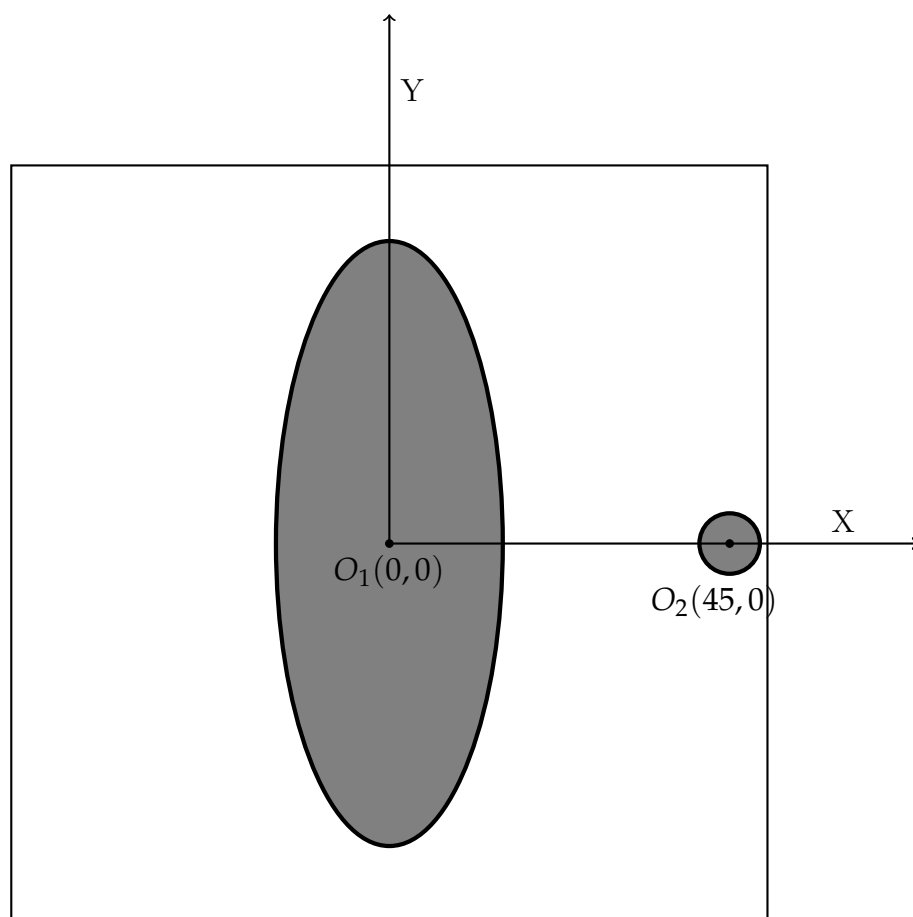


图 1 参数标定平面直角坐标系

4.8 二维 CT 照射分析

为便于分析理解，我们取射线方向平行于 X 轴方向与射线方向平行于 Y 轴方向时的情况进行分析。当射线方向平行于 X 轴方向照射时（如图2），射线此时穿过的椭圆截面是其环绕一圈中最大的，即此时位于图中 1 4 范围内的探测器均可以探测到标定物的吸收信息。在附件 2 的数据中（如图 3 所示），横向的 180 列代表的是 180 个方向，纵向的 512 行代表的是探测器单元。因此，若我们认为每个单元格是一个像素的情况下，射线平行 X 轴照射时对应于图 3 中的 n 4 （其所对应的数据列数为 61 列），即接此时是收到信息的探测器数量最多的情形。同理，当射线方向平行于 Y 轴方向照射时

(如图 2-2 所示), 11 和 12 范围内的探测器将可以分布探测到椭圆和圆两者的信息 (分别对应于图 3 中的 n_1 , n_2)。此外, 椭圆和圆的间距此时在探测器上的投影也是 CT 成像过程中最大的时候 (分别对应于图 3 中的 n_3 , 其所对应的数据列数为 151 列)。

不仅如此, 在两种状态下, 过椭圆中心的射线穿过的物体距离最长 (平行于 Y 轴的射线过椭圆终点被探测器接受到的数据位于图三中的 n_5 位置)。

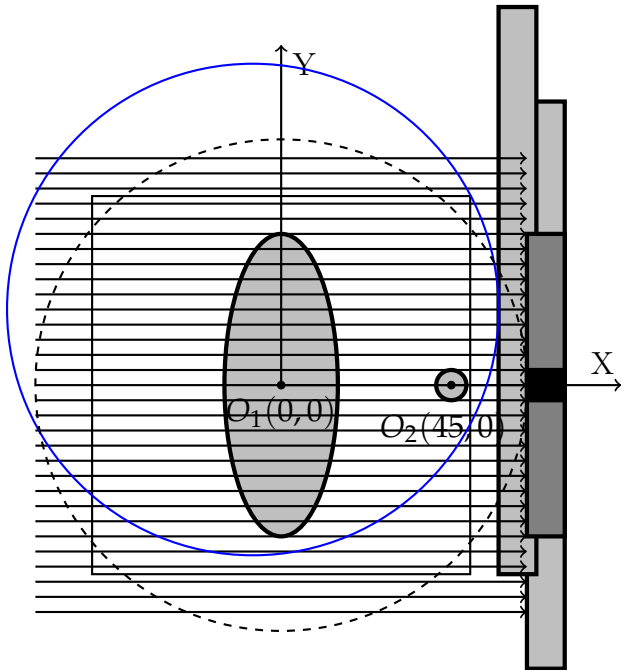


图 2 附件 2 中第 61 个方向示意

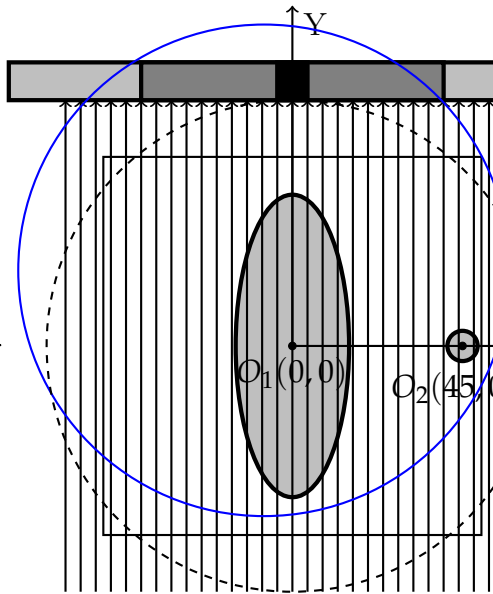
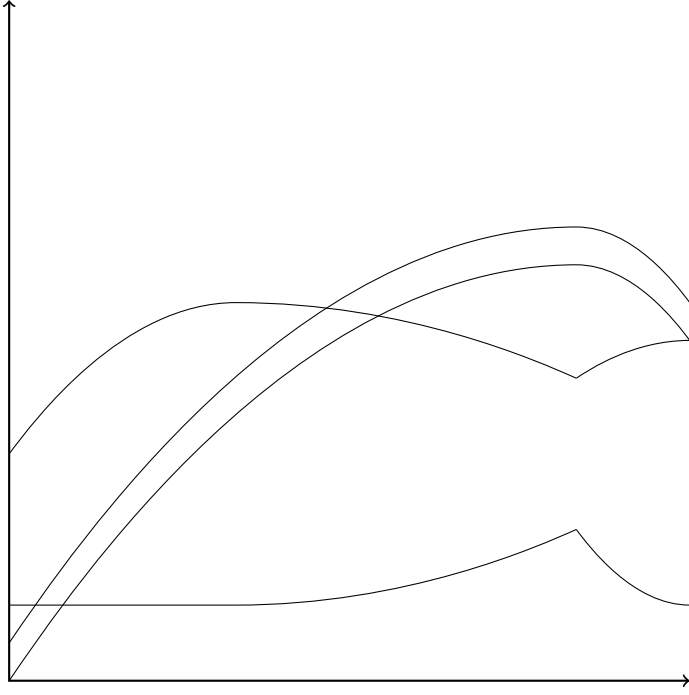


图 3 附件 2 中第 151 个方向示意



4.9 探测器单元之间的距离求解

经过上述分析，我们可通过求可探测到信息的探测器范围的总长度除以探测器单元的数量，进而得到探测器之间的距离，如下式所示：

$$d_i = \left(\frac{t_i}{n_i} \right), i = 1, 2, 3, 4$$

4.10 公式 1

$$\begin{pmatrix} *20ca_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{Opposite}{Hypotenuse} \cos^{-1} \theta \arcsin \theta$$

4.11 公式 2

$$p_j = \begin{cases} 0, & \text{if } j \text{ is odd} \\ r! (-1)^{j/2}, & \text{if } j \text{ is even} \end{cases}$$

4.12 公式 3

$$\arcsin \theta = \bigoplus_{\varphi} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{r! (n-r)!} \quad (1)$$

五、表格

C1	C2
A	中文测试
B	中文测试
C	中文测试

六、图片

6.1 eps

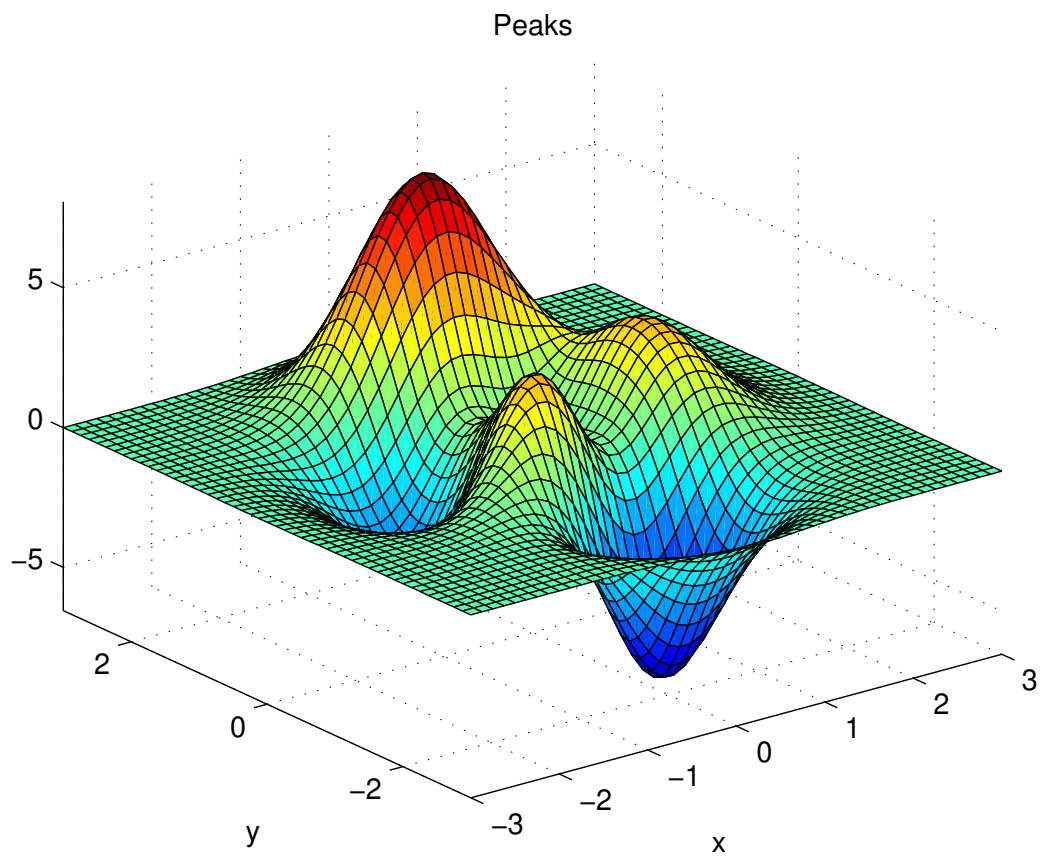


图 4 eps

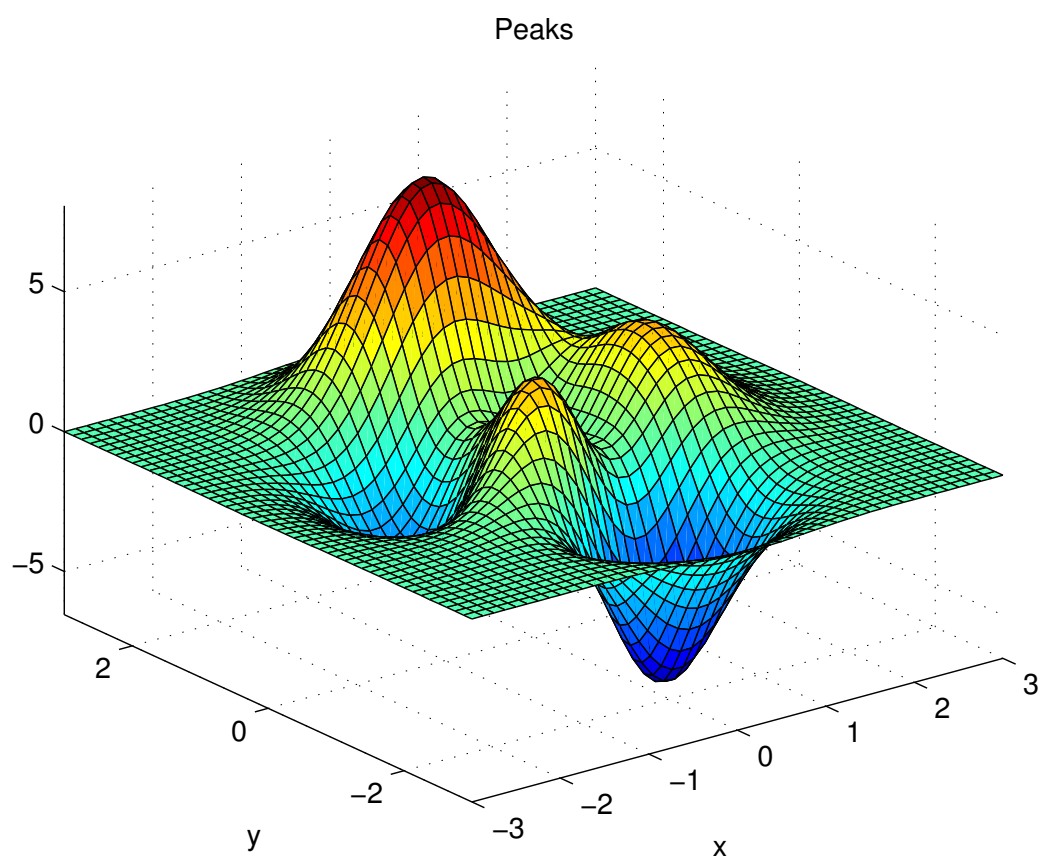


图 5 pdf

6.3 jpg

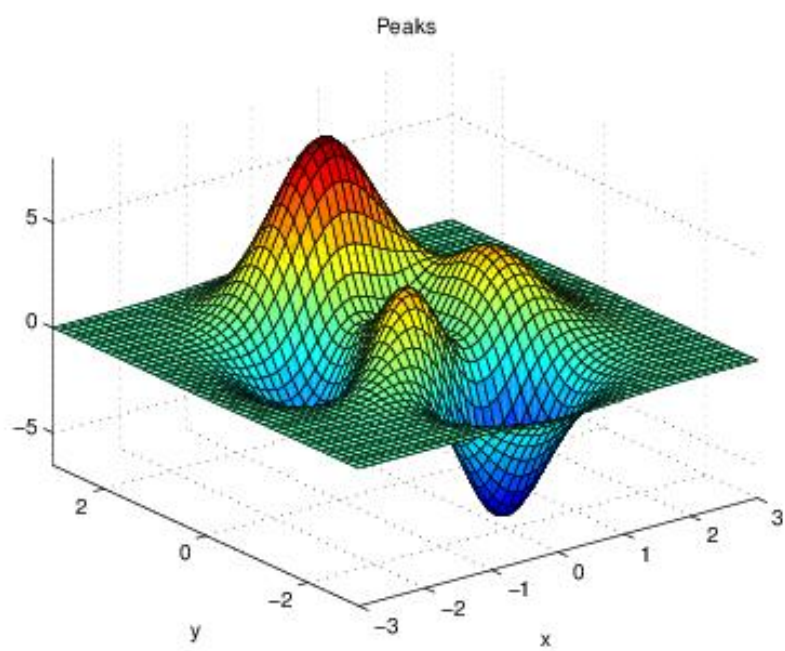


图 6 aa

七、参考文献

- [1] A. Agrawal and R. Raskar. Resolving objects at higher resolution from a single motion-blurred image. In Computer Vision and Pattern Recognition, 2007. CVPR'07. IEEE Conference on, pages 1–8. IEEE, 2007.
- [2] J. Bezos. The titlesec and titletoc Packages. University of SomeName, Cityname, 2nd edition, March 2002.
- [3] T_EXGuru. L^AT_EX2 ϵ 用户手册. 某某大学出版社, 天津, 1999.
- [4] K. Reckdahl 原著, 王磊 译. Using Import graphics in L^AT_EX2 ϵ , L^AT_EX2 ϵ 插图指南. 某某大学出版社, 天津, 2000.
- [5] Donald E. Knuth. Computer Modern Typefaces, volume E of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1986.
- [6] Donald E. Knuth. The T_EXbook, volume A of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1986.
- [7] Leslie Lamport. L^AT_EX — A Document Preparation System: User's Guide and Reference Manual. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd edition, 1985.
- [8] J. R. McDonnell and D. Wagen. Evolving recurrent perceptions for time-Series modeling. IEEE Trans. on Neural Networks, 5(1):24–38, 1994.
- [9] P. Oostrum, ifuleyou@bbs.ctex.org 译. L^AT_EX 下的页面布局. 某某大学出版社, 天津, August 2001.
- [10] Michael Shell. How to use the IEEEtran L^AT_EX class. Journal of L^AT_EX Class Files, 1(11):10–20, November 2002.
- [11] S.Niwa, M. Suzuki, and K. Kimura. Electrical shock absorber for docking system space. In IEEE International Workshop on Intelligent Motion Control, pages 825–830, Istenbul, 1990. Bogazici University.
- [12] X. Yao. Evolutionary artifitial neural networks. J. Of Neural Systems, (4):203–222, 1993.
- [13] J. Zhang, X. Li, J. Chen, and Z. Qian. A tree parent storage based on hashtable for xml construction. In Communication Systems, Networks and Applications (ICC-SNA), 2010 Second International Conference on, volume 1, pages 325–328. IEEE, 2010.

- [14] 宋乐. 异源图像融合及其评价方法的研究. 博士学位论文, 天津大学, 天津, 2008.
- [15] 胡伟. $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$ 完全学习手册. 清华大学出版社, 书号: 978-7-302-24159-1, 北京, 2011.
- [16] 邓建松, 彭冉冉, 陈长松. $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$ 科技排版指南. 科学出版社, 书号: 7-03-009239-2/TP.1516, 北京, 2001.

附录 A Matlab 程序

matlab.m:

```
function [t,seat,aisle]=OI6Sim(n,target,seated)
pab=rand(1,n);
for i=1:n
    if pab(i)<0.4
        aisleTime(i)=0;
    else
        aisleTime(i)=trirnd(3.2,7.1,38.7);
    end
end
end
```

附录 B C++ 程序

cpp.cpp:

```
//=====
// Name      : Sudoku.cpp
// Author     : wzlf11
// Version    : a.0
// Copyright  : Your copyright notice
// Description : Sudoku in C++.
//=====
```

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
```

```
using namespace std;
```

```
int table[9][9];
```

```
int main() {
```

```
    for(int i = 0; i < 9; i++){
```



```

        table[0][i] = i + 1;
    }

    srand((unsigned int)time(NULL));

    shuffle((int *)&table[0], 9);

    while(!put_line(1))
    {
        shuffle((int *)&table[0], 9);
    }

    for(int x = 0; x < 9; x++){
        for(int y = 0; y < 9; y++){
            cout << table[x][y] << "□";
        }

        cout << endl;
    }

    return 0;
}

```