

分类号_____密级_____

UDC^{注1} _____

学 位 论 文

灰色预测GM(1, 1)模型的几种拓广模型研究

(题名和副题名)

曾祥艳

(作者姓名)

指导教师 舒 兰 教授

电子科技大学 成都

(职务、职称、学位、单位名称及地址)

申请学位级别 博士 学科专业 应 用 数 学

提交论文日期 2016. 3. 15 论文答辩日期 2016. 5. 29

学位授予单位和日期 电子科技大学 2016年6月

答辩委员会主席_____

评阅人_____

注1：注明《国际十进分类法UDC》的类号。

Study on Several Kinds of Developed Models of GM(1,1)

A Doctoral Dissertation Submitted to
University of Electronic Science and Technology of China

Major: **Applied Mathematics**

Author: **Xiangyan Zeng**

Supervisor: **Prof. Lan Shu**

School: **Shool of Mathematical Siences**

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 据我所知, 除了文中特别加以标注和致谢的地方外, 论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果, 也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意.

签名: _____ 日期: ____年__月__日

关于论文使用授权的说明

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定, 有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘, 允许论文被查阅和借阅. 本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文.

(保密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签名: _____ 导师签名: _____

日期: ____年__月__日

摘 要

灰色模型适用于“少样本”、“贫信息”的不确定性系统，而基于统计理论或机器学习的许多经典预测模型：指数平滑模型、自回归移动平均(ARMA)模型、广义自回归条件异方差(GARCH)模型、人工神经网络(ANN)、支持向量机(SVM)等，则需要大样本才能准确确定模型参数，所以灰色模型在工程技术、经济管理等领域得到广泛应用。 $GM(1,1)$ 模型是灰模型的核心模型，本文首先将累积法引入此模型的参数估计，提高预测精度，又将模型的适用序列由精确数序列拓广到区间数序列，提出了几种拓广模型：累积法 $GM(1,1)$ 模型、累积法非等间距 $GM(1,1)$ 模型、基于序列转换的区间数序列 $GM(1,1)$ 模型、基于参数转换的区间数序列 $GM(1,1)$ 模型、基于马尔可夫与 $GM(1,1)$ 模型的波动型区间数序列预测模型，主要研究工作如下：

1. 改进 $GM(1,1)$ 模型的参数估计方法和预测公式。将累积法引入等间距与非等间距 $GM(1,1)$ 模型的参数估计中，并直接由模型的定义型方程推得模型的内涵型预测公式，取代传统的白化响应式，建立了累积法 $GM(1,1)$ 和累积法非等间距 $GM(1,1)$ 模型。进一步研究两个模型的性质，首先得出参数估计的矩阵表示式，可以反应参数估计与原始序列的直接关系，由此直接关系得出模型的相关性质。

2. 将区间数序列转换为含有等量信息的精确数序列，并保证其还原过程不会出现区间界点相对位置的错乱。对转换后的序列先建立灰色模型，再还原得区间数序列的预测。这样基于序列转换实现了 $GM(1,1)$ 模型对二元、三元区间数序列的预测。

3. 改进 $GM(1,1)$ 模型的定义型方程的参数取值形式。将发展系数取为区间数各界点序列的发展系数的加权均值，记为整体发展系数，将灰色作用量取为与原始序列同型的区间数。先确定整体发展系数后，再修正灰作用量。此方法不需要将区间数序列转换为精确数序列，在实质上将 $GM(1,1)$ 模型的适用序列拓广到二元及三元区间数序列，从而提出了二元、三元区间数 $GM(1,1)$ 模型(BIGM(1,1)与TIGM(1,1))。

4. 引入马尔可夫链预测方法，对 BIGM(1,1)的预测结果进行修正，并结合前面序列转换的方法，保证修正过程中区间数各界点的相对位置，实现了波动型二元区间数序列的预测，进一步拓广了灰模型的适用范围。

关键词: GM(1,1), 累积法, 区间数序列, 预测

ABSTRACT

Grey models are applicable to the uncertain system with less sample and poor information. However, many typical forecasting models based on statistical theory and machine learning, such as exponential smoothing, autoregressive moving average (ARMA), generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model (GARCH), artificial neural network model(ANN), and support vector machine (SVM), need large sample. Thus, grey models are widely applied in engineering technology and economic management. GM(1,1) is one of core models of grey models. In this paper, the accumulation method is introduced into the parameter estimation of the model. The prediction precision is enhanced. The applicable series of the model is extended to the interval series. Several kinds of developed models of GM(1,1) are proposed in this paper: accumulation method GM(1,1), accumulation method non-equidistant GM(1,1), interval sequence GM(1,1) based on sequence transformation, interval sequence GM(1,1) based on parameter transformation, and the prediction model applied to the fluctuant interval series based on Markov and GM(1,1) models. The main works are as follows:

1. The parameter estimation and the predictor formula of GM(1,1) are developed. Accumulation method is applied to the parameter estimation of GM(1,1) and non-equidistant GM(1,1). The connotation predictor formula is deduced from the definition equation of GM(1,1) directly and takes the place of the white response of GM(1,1). Thus, accumulation method GM(1,1) and accumulation method non-equidistant GM(1,1) are proposed. Then the characters of the two models are analyzed. Firstly, the matrix form of the parameter estimation based on accumulation method is deduced and can reflect the direct relation between the parameter estimation and the raw series. Then some characters of two models are proved from the relation.

2. Based on the sequence transformation, GM(1,1) can be applied to the forecasting of binary or ternary interval series. The interval series is transformed into several equivalent precise number series. The transformation process ensures the relative positions of the bounds of the interval number in the reduction process. GM(1,1) can be built on these transformed series firstly, and then the interval prediction values are restored.

3. The form of the parameters in GM(1,1) is developed. One of parameters of the

ABSTRACT

definition equation of $GM(1,1)$ - integral development coefficient, is taken as the weighted mean of the development coefficients of the several boundary series of the interval series. The other parameter - grey input, is taken as an interval number, which is amended after the integral development coefficient obtained. By this method, the applicable range of $GM(1,1)$ is extended to the binary or ternary interval number series essentially, while the interval series need not to be transformed into precise number series. Then, $BIGM(1,1)$ (Binary Interval $GM(1,1)$) and $TIGM(1,1)$ (Trinary Interval $GM(1,1)$) are proposed.

4. Markov forecasting method is used to amend the prediction values of $BIGM(1,1)$. In order to maintain the relative positions of the bounds of the interval number in the amendment, the above method of the sequence transformation is introduced. Thus, the applicable range of $GM(1,1)$ is extended to the forecasting of fluctuant interval series.

Keywords : $GM(1,1)$, Accumulation Method, Interval Series, Forecasting.

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究工作的背景与意义	1
1.2 GM(1,1)模型的研究现状	2
1.2.1 原始数据预处理的改进	2
1.2.2 参数估计方法的改进	3
1.2.3 背景值构造方法的改进	4
1.2.4 预测公式初始值的优化	5
1.2.5 与其他模型的结合	6
1.2.6 GM(1,1)模型的性质分析	7
1.3 区间预测的研究现状	8
1.3.1 基于精确数时间序列的区间预测	8
1.3.2 基于区间数时间序列的区间预测	8
1.4 本文的研究内容	9
第二章 GM(1,1)模型与累积法	11
2.1 GM(1,1)模型的建模机理	11
2.2 累积法	13
2.2.1 累积和的定义及计算通式	13
2.2.2 基于累积法的参数估计过程	14
2.2.3 累积法的性质分析	16
2.2.4 累积法的几何意义	16
2.3 本章小结	18
第三章 累积法GM(1,1)模型及其性质研究	19
3.1 引言	19
3.2 累积法GM(1,1)模型的参数估计	19
3.3 累积法 GM(1,1)模型的内涵型预测公式	21

3.4 累积法 GM(1,1)模型参数估计的矩阵表示式	23
3.5 累积法 GM(1,1)模型的性质研究	26
3.6 应用实例.....	31
3.7 本章小结.....	32
第四章 累积法非等间距GM(1,1)模型及其性质研究.....	34
4.1 引言	34
4.2 非等间距 GM(1,1)模型的定义型方程	34
4.3 基于累积法的参数估计	35
4.4 非等间距 GM(1,1)模型的内涵型预测公式.....	36
4.5 累积法非等间距 GM(1,1)模型的性质研究.....	38
4.6 实例分析.....	43
4.7 本章小结.....	44
第五章 基于序列转换的区间数序列GM(1,1)模型	46
5.1 引言	46
5.2 区间数的定义.....	46
5.3 区间数序列的转换	47
5.3.1 二元区间数序列的转换.....	47
5.3.2 三元区间数序列的转换.....	48
5.4 建模过程.....	48
5.5 实例分析.....	50
5.6 本章小结.....	56
第六章 基于参数转换的区间数序列GM(1,1)模型	57
6.1 引言	57
6.2 BIGM(1,1)建模过程.....	57
6.2.1 发展系数的确定.....	57
6.2.2 灰作用量的确定.....	59
6.2.3 预测公式.....	60
6.3 BIGM(1,1)模型的应用实例.....	62

6.4 TFGM(1,1)建模过程	63
6.4.1 发展系数的确定.....	63
6.4.2 灰作用量的确定.....	65
6.5 TIGM(1,1)模型的应用实例.....	66
6.6 本章小结.....	68
第七章 基于马尔可夫BIGM(1,1)模型的波动型区间数序列预测	69
7.1 引言	69
7.2 BIGM(1,1)的建模条件	69
7.3 基于马尔可夫预测的修正过程	70
7.4 马尔可夫BIGM(1,1)模型的应用实例	73
7.5 本章小结.....	78
第八章 总结与展望	80
8.1 全文总结.....	80
8.2 展望	81
致谢	82
参考文献	83
攻读博士学位期间的研究成果.....	95

主要符号对照表

N	自然数集
R	实数集
R^+	正实数集
Z^+	正整数集
R^n	n 维实空间
Σ	连加算子
$-\infty$	负无穷
$+\infty$	正无穷
$ A $	矩阵的行列式值
A^T	实数矩阵 A 的转置
A^{-1}	实数矩阵 A 的逆矩阵
I	具有合适维数的单位矩阵
$x^{(0)}(i)$	原始数据
$x^{(1)}(i)$	原始数据的一次累加生成
$z^{(1)}(i)$	一次累加生成序列的背景值生成
C_n^k	n 个元素中选 k 个的组合数
$\sum_{i=1}^n (r)$	r 阶累积和算子
$E[\cdot]$	数学期望算子
$cov(\alpha, \beta)$	向量 α 与 β 的协方差矩阵

第一章 绪论

1.1 研究工作的背景与意义

基于统计理论和机器学习的时间序列预测模型：指数平滑模型、自回归(AR)模型、移动平均(MA)模型、自回归移动平均(ARMA)模型、广义自回归条件异方差(GARCH)模型、线性与非线性回归模型、人工神经网络(ANN)、支持向量机(SVM)等，都需要大样本进行建模。若样本量不够，则影响模型参数的正确估计。

1965年，中国学者邓聚龙教授创立了灰色系统理论，其研究对象为“部分信息已知，部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”的不确定性系统，弥补了已有时间序列预测模型的不足^[1-5]。灰色模型(GM)是对已有数据经过累加生成，挖掘其规律性后，建立近似微分方程。GM(n,h)模型是由一个包含h个变量的n阶微分方程构成的模型。常用的灰色模型有GM(1,1)模型、GM(0,N)模型、GM(1,N)模型、GM(2,1)模型、灰色Verhulst模型等，其中应用最广泛的是GM(1,1)预测模型，只需要4个原始数据即可建模。

目前，以GM(1,1)模型为核心的灰色预测模型主要是对精确数序列进行建模，对区间数序列的预测研究则较缺乏。而在实际应用中，获得的决策信息在某时期通常是在某个数段波动或者在某数值的邻近波动，这些信息用二元或三元区间数来表征将更符合实际情况，研究这些区间数序列的预测将利于实际应用。

GM(1,1)模型的建模条件是原始序列经过累加生成后，需具有“准指数律”。当原始序列波动较大时，则不能满足此条件。所以，如何实现波动型序列的灰色预测是灰色模型的拓广研究之一。改进方法之一是与其它适用于波动预测的模型相结合，形成组合模型。马尔可夫链预测方法需要的建模样本量相对较少，并且能反映序列的波动规律，本文将GM(1,1)模型与其结合，进一步实现少样本的波动型区间数序列的预测。

累积法是由意大利数学家 P. Marchsi 创立，是一种直接基于样本数据寻找重心线的参数估计方法，没有对预测误差做假设。学者曹定爱所著的《累积法引论》得出了数据序列各阶累积和的计算通式，使其能推广应用^[6]。目前主要用于经济计量模型的结构参数的估算中，文献[7]将其引入GM(0,N)模型的参数估计中，具有计算简便，精度高等优点。本文作者在文献[8]中，已将其引入GM(1,1)模型的参数估计中，研究得其病态性小于最小二乘法。但是，这些都是基于等间距序列

建立的模型。本文将累积法引入基于非等间距序列建模的 GM(1,1)模型的参数估计中, 进一步拓广累积法的应用范围。

1.2 GM(1,1)模型的研究现状

经过五十年的发展, 灰色系统的理论框架已经形成, 包括灰色系统分析、灰色模型、灰色预测、灰色决策、灰色控制、灰色优化技术等几个基本部分^[9-13]。GM(1,1)模型是灰模型的核心模型, 主要用于序列预测, 其建模机理是对原始数据累加生成后, 用指数型曲线拟合, 其建模过程包括原始序列的累加生成、背景值的构造、定义型方程的参数估计, 以及借用一元一阶线性微分方程的解进行预测值计算。针对这种建模机理, 现有的研究一般从以下几个方面进行改进, 提高其预测精度。

1.2.1 原始数据预处理的改进

GM(1,1)模型是采用指数型曲线拟合, 邓聚龙提出: 当原始序列具有光滑性时, GM(1,1)模型的精度才会较高。所以, 对原始数据进行预处理, 即作数据变换, 来增加原始数据的光滑度, 是提高模型预测精度的一个重要方面。陈涛捷^[14]、罗桂荣^[15]等用实例指出对原始数据进行数据变换时, 所选择的变换函数的性质对提高数据的光滑度以及模型的精度十分重要。陈涛捷^[14]、于德江^[16]提出了对数变换 $\ln x$ 和幂函数变换 $x^{1/p}$ 。接着, 王建根^[17]等提出了对数—幂函数变换: $(\ln x)^{1/p}$, 指出它比对数变换和幂函数变换更能提高建模序列的光滑度; 何斌^[18]等则提出了能提高光滑度的变换函数的一般构造方法和获得此变换函数的途径, 接着依此提出了更多的变换函数。李翠凤^[19]等还提出了变换函数: $\cot x$, 黄福勇^[20]提出了变换函数: $a^{-x} (a > 1)$ 。然而, 1998年, 王子亮^[21]指出: 满足光滑性条件的序列未必有高的精度, 光滑性条件仅仅是可以保证建模精度高的一个部分充分条件, 并非充要条件, 并且提出了灰色压缩变换, 分析结果表明: 已有的对数变换、幂函数变换以及对数—幂函数变换都是压缩变换。此外, 数乘变换、平移变换、倒数变换也是应用广泛的数据变换方法, 而且它们使用简单, 运算方便。除了压缩算子, 刘思峰、党耀国、谢乃明、Guan等还提出了缓冲算子和强化算子等新的算子, 并作了一系列性质研究^[22-29]。这些变换的共同点就是只提高了原始序列的光滑度。穆勇^[30]、潘家英^[31]等指出单从数据变换一方面入手, 只能在一定范围内提高模型精度, 在有些情况下反而会增大模型还原误差。李福琴^[32]则从原始序列的级比和序列的整体凹凸趋势两方面同时入手对建模数据进行

了预处理，进一步提高了模型精度。

1.2.2 参数估计方法的改进

时间序列预测模型最常用的参数估计方法是最小二乘法，这也是 **GM(1,1)**模型最初提出时所用的参数估计方法，所做假设为：确定参数 a 、 b ，使拟合误差平方和 $\sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b]^2$ 最小。但是随着应用的发展，郑照宁^[33]等发现运用最小二乘法进行参数估计时，正规方程会出现病态性，从而使参数估计失效。特别是当建模数据较少且存在异常点时，模型更加缺乏稳健性，而这种情况对于应用于少样本预测的 **GM(1,1)**模型并不少见，所以，为了提高稳健性，对模型参数估计的改进方法层出不穷。主要方法如下：

1)全最小二乘准则、加权最小二乘准则：首先是对最小二乘法的改进。张洪钺^[34]等提出了全最小二乘法用于参数估计，所做假设为：确定参数 a 、 b ，使 $\min \sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b]^2 / \sqrt{1+a^2}$ ，相当于使 $n-1$ 个点： $(z^{(1)}(2), x^{(0)}(2)), (z^{(1)}(3), x^{(0)}(3)), \dots, (z^{(1)}(n), x^{(0)}(n))$ ，到直线 $x = -az + b$ 的距离平方和最小。何霞^[35]基于加权最小二乘法^[36]给出了 **GM(1,1)**模型的参数估计：确定参数 a 、 b ，使 $\min \sum_{k=2}^n \omega_k [x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b]^2$ 。普通最小二乘和全最小二乘均是加权最小二乘法的特例，加权可以使得异常数据的误差平方和得到削弱，从而可以减小参数估计的病态性，增强稳健性。

2)最小一乘准则、折扣最小一乘准则、全最小一乘准则：田林亚^[37]等提出基于最小一乘准则的**GM(1,1)**模型的参数估计方法：确定 a 、 b ，使 $\sum_{k=2}^n |x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b|$ 最小，即去掉了最小二乘法中的平方，直接使得绝对误差和达到最小，显然可以大大减小估计时正规方程的系数矩阵的条件数，降低病态性。陈希孺^[38]已经证明最小一乘优于最小二乘。刘威^[39]等依然基于最小一乘准则，不过是确定参数 A, a 使原始序列与拟合值序列的绝对误差和最小： $\min \sum_{t=1}^n |x^{(0)}(t) - A(1 - e^a)e^{-a(t-1)}|$ 。杨桂元^[40]、穆勇^[41]还提出了折扣最小一乘准则：确定 a 、 b ，使 $\min \sum_{k=2}^n \alpha^{n-k} |x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b|$ ，其中 $\alpha \in (0, 1)$ ，使得越远期的绝对误差折扣越大，以此区分从远及近的时间数据对预测模型的影响。何霞^[42]类似于全最小二乘，提出了全最小一乘准则：确定 a 、 b ，使 $\min \sum_{k=2}^n |x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - b| / \sqrt{1+a^2}$ ，相当于使 $n-1$ 个点 $(z^{(1)}(2), x^{(0)}(2)), (z^{(1)}(3), x^{(0)}(3)), \dots, (z^{(1)}(n), x^{(0)}(n))$ 到直线 $x = -az + b$ 的距离最小。

3)累积法：前面提到的最小二乘准则、最小一乘准则以及各种改进的最小二乘、最小一乘准则都是基于对拟合误差的假设，会出现模型的结构参数与估值间的偏离和不一致。1778年，意大利数学家 P.Marchsi提出一种新的参数估计方法：累积法，其机理是找到样本点的重心线，直接由样本值和建模方程进行参数估计，不用对拟合误差进行假设。但是由于高阶累积和计算繁杂，使其没有广泛应用。直到 1999年，曹定爱，张顺明^[6]推导出了各阶累积和的简单计算通式后，累积法开始在各种经济计量模型中广泛应用。对灰色模型，李锋^[7]将累积法引入 GM(0,N)模型，本文作者^[8]将累积法引入GM(1,1)模型，并分析得出累积法 GM(1,1)模型的病态性可以通过数乘变换解决，并且小于最小二乘法。本文将进一步分析累积法 GM(1,1)模型的性质，并将累积法引入非等间距 GM(1,1)模型的参数估计中。

除了以上三类方法，还出现了其他一些优化和机器学习方法，何文章^[43-45]等基于平均相对误差达到最小，或者最大相对误差达到最小准则，给出了参数估计的线性规划法。王义闹^[46]等基于平均相对误差最小，提出了一类指数型参数估计方法。陈露^[47]基于相对误差和偏差平方和误差，通过蚁群算法进行参数辨识。李祚泳^[48]运用遗传算法，Zhou^[49]运用最小二乘支持向量机(LS-SVM)，Hsu^[50]等运用贝叶斯分析，席慧玲^[51]、肖俊^[52]等运用粒子群算法，Li^[53]等运用网格计算技术，基于使绝对误差平方和最小化来优化参数估计。Wang^[54]等基于粒子群算法对建模的输入数据进行优化选择，从而优化了参数估计值。Liu^[55]等基于新乘代谢机制，利用粒子群优化算法优化背景值，从而优化参数估计值。这些参数估计方法都使 GM(1,1)模型的精度相对于最小二乘法GM(1,1)模型的精度有所提高。

1.2.3 背景值构造方法的改进

GM(1,1)模型的定义型方程——灰微分方程中的背景值 $z^{(1)}(k)$ 的构造方法是影响模型预测精度的重要因素之一，传统 GM(1,1)模型一般取为均值形式：

$$z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)).$$

谭冠军^[56-58]指出，由于不管原始序列是凸还是凹的单调增，其一次累加生成(1-AGO)序列 $X^{(1)}$ 总是凹的单调增，所以， $z^{(1)}(k)$ 取为均值形式会总是大于实际的背景值，因而模型会产生滞后误差，当原始序列是高增长序列时，则模型预测误差很大。基于此点，提出了优化公式：

$$z_m^{(1)}(k) = \frac{1}{2m}[(m+1)x^{(1)}(k-1) + (m-1)x^{(1)}(k)], m = 2, 3, \dots$$

此公式基于背景值的几何意义减小了其滞后误差，提高了模型精度。此公式可以进一步推广为

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha)x^{(1)}(k), \alpha \in (0, 1).$$

对于 α 的确定，向跃霖^[59]提出黄金分割法，谢开贵^[60]基于遗传算法优化，王义闹^[61]等深入分析了模型定义方程的发展系数与 α 的关系，并证明了其极限为 2。Chang^[62]等又提出：

$$z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1) + \alpha_k x^{(0)}(k), \alpha_k \in (0, 1), k = 2, 3, \dots, n,$$

并基于箱线图确定 α_k 。罗党^[63]等又运用齐次指数函数对 1-AGO 序列进行拟合，提出了新的优化公式：

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n.$$

此方法相当于对 GM(1,1) 模型的白化方程积分方法的改进，使模型具有较高的预测精度，并且也适用于高增长的时间序列预测。此外，Lin^[64]等基于残差傅立叶变换，Wang^[65]等基于离散指数函数优化了背景值的构造方法。

1.2.4 预测公式初始值的优化

传统 GM(1,1) 模型是以原始序列的第一个数据 $x^{(0)}(1)$ 作为初始条件，得到预测值公式：时间响应式。但是邓聚龙^[66]指出灰色系统理论的新信息优先原理，并证明模型方程的发展系数与 $x^{(0)}(1)$ 无关。所以，Dang^[67-69]、Wu^[70]等提出以建模序列的累加： $x^{(1)}(n)$ 或新息作为预测公式的初始值。Wang^[71]等提出联合 $x^{(0)}(1)$ 与 $x^{(0)}(n)$ 优化初始条件。张大海^[72]等指出灰预测公式存在理论缺陷，可以允许 $x^{(0)}(1)$ 以外的其他数据 $x^{(0)}(m), m = 2, 3, \dots, n$ ，作为初始条件。Zhai^[73]等则提出应联合 $x^{(0)}(1)$ 至 $x^{(0)}(n)$ 所有的数据给出初始条件，并基于最小二乘准则优化了预测公式中的常数取值，从而改进了初始条件。另外，何海和陈绵云^[74]基于预测绝对误差和为 0 准则： $\sum_{k=1}^n |\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)| = 0$ 与 $\sum_{k=1}^n |\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)| = 0$ ，刘斌^[75]等基于使一次累加生成序列 $x^{(1)}(k)$ 与其拟合值误差平方和最小： $\min \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2$ ，王正新^[76]等则基于使原始序列 $x^{(0)}(k)$ 与其拟合值误差平方和最小： $\min \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)]^2$ ，都直接对预测值

公式中的常数取值进行了优化,进而初始条件得到改进,从而提高了预测精度。

还有一些学者提出将初始条件修正为: $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) + h$, 张辉和胡适耕^[77, 78]提出基于 $\min \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2$ 或 $\min \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)]^2$ 确定 h 。刘卫峰^[79]等则基于最小一乘准则,即分别基于 $\min \sum_{k=1}^n |\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)|$ 与 $\min \sum_{k=1}^n |\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)|$ 确定 h 。

谢乃明和刘思峰^[80-82]提出了离散 GM(1,1) (DGM(1,1))模型并指出当发展系数较小时,是 GM(1,1)模型的另一种表达式,对 DGM(1,1),他们提出三种初值修正形式: $x^{(1)}(1) + \beta, x^{(1)}(m) + \beta, x^{(1)}(n) + \beta$, 通过优化 β , 得到了具有较高预测精度的模型。初值优化、背景值优化和参数估计改进,这三个方面可以两两结合或者同时进行来提高预测精度,所以也出现了很多相互结合改进的文献^[83, 84]。

1.2.5 与其他模型的结合

GM(1,1)模型是用指数型曲线拟合时间序列,时间序列需具有准指数律,若有较大的波动性,则不能用灰色模型预测。为了使 GM(1,1)模型适用于波动型时间序列预测,前面已经提到对数据进行预处理,增加光滑度,但是对于波动很大的序列,预处理也无效,所以,很多学者提出将灰色模型与其他适合于波动型时间序列预测的方法结合,比如:马尔可夫链预测方法、神经网络、支持向量机等。

1992年,何勇^[85]等提出灰色马尔可夫预测模型,结合了灰色模型与马尔可夫预测的优点:先运用 GM(1,1)模型预测时间序列的整体发展趋势,再运用马尔可夫模型修正残差,反映序列的波动性^[86, 87]。这种结合很好的提高了波动型时间序列的预测精度。接着,对灰色马尔可夫模型的改进和应用广泛发展,特别是在能源消耗与产出、电力负荷、灾害预测等领域^[88-99]。

人工神经网络(ANN)可以很好的拟合非线性函数,所以灰色模型与它结合,也可以提高对波动较大序列的预测精度^[100]。台湾国立工业大学Chyun-Shin Cheng等学者所撰写的《Grey Modeling Using Neural Network》和《Grey Neural Network》等是最早研究两者如何结合的文章^[101, 102]。现有的研究一般有以下几种结合方式:并联——分别对序列用两种模型预测,然后优化组合两个预测结果^[103, 104];串联——先用GM预测,然后对残差用ANN拟合预测,或者先用GM预测,再把此预测结果作为ANN的输入,继续预测^[105, 106];融合——先对原始序列进行累加生成,再用ANN预测,最后还原生成^[107]。这些结合方式广泛应用于各个领域,为波动型时间序列提供了较好的预测方法^[108-115]。

支持向量机(SVM)改变了传统的神经网络中经验风险最小化原则,而基于结构风险最小化原则,可以解决小样本预测,避免过学习、欠学习、高维数等问题,所以有了广泛的应用。目前,它与灰模型的结合主要有三种方式:1)先对原始序列进行累加生成,再建立SVM进行预测^[116, 117];2)分别用灰色模型和SVM进行预测后,再优化两者预测结果的权重,取加权平均为最终预测值^[118];3)先对影响预测序列的特征数据进行灰关联分析,再用关联度较大的特征作为SVM的输入得到预测值^[119]。

灰模型除了与以上三种预测方法结合,一些学者还将其与遗传算法^[120-122]、多元回归^[123]、模糊系统^[124, 125]等相互结合,不断地提高灰模型的预测精度和适用范围。

1.2.6 GM(1,1)模型的性质分析

对GM(1,1)模型的性质分析一直是研究人员致力的一个重要方面,因为对模型内在性质的深入,可以找出模型的不足及理论原因,从而针对性地对模型的不足进行改进。2014年,刘思峰^[126-128]等在以往研究的基础上,再一次深入分析了灰模型的几种基本形式和每种形式的适用范围,为人们在建模过程中正确地选择模型提供参考和依据。

吉培荣^[129]、穆勇^[130]、王正新^[131]等分析了GM(1,1)模型不具有白指数律重合性,是有偏模型,随着发展系数绝对值的增大,模型精度会急剧下降,为了改进,提出了具有白指数律重合性的GM(1,1)模型。王义闹^[132-135]等则提出了优化灰导数的GM(1,1)直接建模法,并进行了深入研究,对其升、降、凹、凸特性进行了严格证明。宋中民^[136]等则提出了中心逼近式GM(1,1)模型。谢乃明和刘思峰^[80-82]指出GM(1,1)的建模过程中由离散到连续的跳跃是其缺陷所在,进而提出离散GM(1,1)模型(DGM(1,1)),并证明了其无偏性。

Wu^[137]、Kang^[138]等证明了对GM(1,1)模型,小样本的精度大于大样本。Wu^[139]等还证明了当原始序列是非负递增时,GM(1,1)模型的拟合序列是凸递增或者凹递减的。Yao^[140]等则证明了小样本的精度通常超过大样本,样本越多误差越大,存在建模的最佳样本数,初始值不影响GM(1,1)模型的发展系数等性质。这些进一步证实了GM(1,1)模型适合于小样本预测的优势。

郑照宁^[133]、Dang^[141]等分析得出,基于最小二乘准则的GM(1,1)模型的参数估计使得模型出现病态性问题。对于此问题,出现了很多对参数估计的改进方法,比如最小一乘准则、累积法、线性规划、粒子群等优化方法,这在前面已经介绍。

1.3 区间预测的研究现状

1976年, Montgomery和Johnson^[142]提出区间预测。区间预测表示未来可能结果的范围, 比如, 每日的气温变化、汇率的起伏、石油价格的高低等。传统时间序列预测都属于点预测, 对于随时波动的时间序列, 点预测已不能满足实际需要。Chatfield^[143]和Christoffersen^[144]指出区间预测比点预测更有利于决策, 更能全面评估未来的不确定性。

1.3.1 基于精确数时间序列的区间预测

目前, 已有很多基于精确数时间序列的区间预测方法, 一般建立在假设预测误差服从正态分布上, 如: Box-Jenkins预测方法^[145]、Holt-Winter预测方法^[146, 147]等。然而, 2001年, Chatfield^[148]指出, 正态分布的假设经常不符合实际情况。另外, De Gooijer^[149]等还指出, 传统的区间预测还忽略了样本的变化对模型参数估计的影响。因此, 人们普遍认为, 假设预测误差服从正态分布的区间预测太狭窄, 对未来的不确定性估计不足^[148, 150]。1993年, Efron与Tibshirani^[151]提出了自展法, 适用于非正态的情况, 也考虑了样本对参数估计的影响。显著的例子有Thombs^[152]等提出的基于自回归(AR)模型和Pascual^[153]等提出的基于自回归求和移动平均(ARIMA)模型。但是这些研究的蒙特卡洛(Monte Carlo)结果显示自展区间依然太狭窄。Chatfield^[148]也以Meade^[154]等给出的例子为例, 指出自展法并不是对所有的情况有效。接着, Clements^[155]、Kilian^[156]、Kim^[157, 158]对AR模型运用了偏修正自展法, 发现偏修正自展区间具有更加精确的覆盖范围, 也适用于当样本数较少时, 而这种少样本的情况在实际应用中经常遇到。还有一些学者基于损失函数、统计的置信区间、满意度、误差分析等讨论了回归模型的预测区间^[159-163]。指数平滑法也已取得进展, 可以应用于区间预测。较早的有Holt-Winters法^[146, 147], 同时, Taylor与Bunn^[164]基于Koenker与Bassett^[165]提出的分位回归法进行区间预测。Hyndman^[166]为指数平滑法提出了一种综合的统计框架建立空间立体模型, 从而实现区间预测。

1.3.2 基于区间数时间序列的区间预测

当前, 也出现了一些直接基于区间数时间序列的区间预测。Andre^[167, 168]等分别基于自回归(AR)模型、自回归求和移动平均(ARIMA)模型、人工神经网络(ANN)给出了三种预测方法。Santiago^[169]等则基于ARMA-GARCH模型实现区间预测。Xiong^[170]等基于FCRBFNNs (fully complex-valued radial basis function neural networks)实现了区间预测。徐惠莉^[171]、张进^[172]等通过估计预测结果的平

均区间误差、平均相对区间误差达到最小等原则实现区间预测。

灰模型适用于少样本，很多学者已经将其拓广到二元区间数序列预测。Yang与Liu^[173]提出了基于核和灰度的灰数运算法则。曾波^[174-181]提出了基于核和灰度的区间灰数序列的GM(1,1)，实现了GM(1,1)模型可对区间灰数序列进行预测的拓广，同时还提出了基于核和面积、基于灰数带及灰数层、基于区间灰数几何特征的离散灰数序列的GM(1,1)模型。袁潮清与刘思峰^[182]等又提出了基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测模型。孟伟^[183]、吴利丰^[184]等提出了区间灰数的标准化及预测模型的构建方法。2013年，刘解放与刘思峰^[185]等又提出了基于核与灰半径的连续区间灰数序列的GM(1,1)模型。

这些基于GM(1,1)模型实现的区间灰数序列的预测，有一个共同之处：将区间灰数序列转换成几个实数序列后，再运用GM(1,1)模型预测。所以，在实质上并没有改变GM(1,1)模型定义型方程只适用于实数序列。本文除了研究基于序列转换，实现GM(1,1)模型对二元、三元区间数序列的预测，还将研究直接改进GM(1,1)模型定义型方程中的参数取值形式和估计方法，使其定义型方程能直接适用于区间数序列，而不需要转换成实数序列，从而在实质上将模型的适用序列从精确数序列拓广到区间数序列。

1.4 本文的研究内容

本文主要研究了累积法GM(1,1)模型、累积法非等间距GM(1,1)模型、几种区间数时间序列GM(1,1)模型。论文组织结构与章节安排如下：

第一章首先提出本文的研究背景和意义，接着概述了灰色预测模型的研究现状，从几个方面介绍了改进建模方法、提高预测精度的现有方法，然后简述了区间预测的现有研究成果，最后给出本文的章节安排。

第二章介绍了GM(1,1)模型和累积法的基本理论，证明和分析了累积法的相关性质和几何意义。

第三章将累积法引入GM(1,1)模型，得到新的参数估计，并直接由模型的定义型方程推得模型的预测值计算公式，用来代替传统的白化响应式，建立了累积法GM(1,1)模型。接着，进一步研究模型性质。首先得出参数估计值与原始序列的直接关系，然后由此直接关系推出模型的一些重要性质。

第四章将累积法引入非等间距GM(1,1)模型，给出了其建模过程，接着基于矩阵分析给出模型参数估计与原始序列的直接关系，并由此证明了模型的几个重要性质，对模型的应用有一定的指导作用，最后进行了实例分析，验证模型有

效性。

第五章将累积法 $GM(1,1)$ 模型拓广到区间数时间序列的预测，从序列转换出发，分别将二元区间数和三元区间数序列转换成含有等量信息的精确数序列，再基于累积法 $GM(1,1)$ 模型建模预测，最后还原成区间数序列。实例分析验证了此方法的可行性。

第六章将 $GM(1,1)$ 模型的定义型方程的参数取值形式进行了改进，使其能直接对二元、三元区间数时间序列建模，不需要转换为精确数序列，从而提出了二元区间数 $GM(1,1)$ ($BIGM(1,1)$) 与三元区间数 $GM(1,1)$ ($TIGM(1,1)$) 模型。真正意义上将 $GM(1,1)$ 模型的适用范围拓广到区间数序列预测。

第七章在第六章的基础上进一步改进 $BIGM(1,1)$ 模型，使其能对波动型二元区间数时间序列预测。引入马尔可夫链预测方法，修正二元区间数 $GM(1,1)$ 模型的残差，在修正中，结合第五章的序列转换方法使修正结果不出现区间数界点位置的混乱。对我国桂林某地区电力负荷的区间预测验证了改进的预测方法能有效提高波动型二元区间数序列的预测精度。

第八章给出了本文工作的总结和今后工作的展望。

第二章 GM(1,1)模型与累积法

2.1 GM(1,1)模型的建模机理

GM(1,1)的含义是1阶1变量的灰模型，这里给出它的建模机理。设等间距非负序列为 $X = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ ，若 $x^{(0)}(t)$ 是 t 的连续函数，则可按下式构造其一次累加生成数据：

$$x^{(1)}(t) = \int_0^t x^{(0)}(k) dk. \quad (2-1)$$

对于离散数据，上式定积分的计算只能采用近似计算方法，下面采用矩形法得一次累加生成序列(AGO)为：

$$x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j). \quad (2-2)$$

累加生成是使灰色过程由灰变白的一种方法，通过累加可以得到灰量积累过程的发展态势，使离乱的原始数据中蕴含的积分特性充分显露出来，一般的非负准光滑序列经过累加生成后，都会减少随机性，呈现出近似的指数增长规律，原始序列越光滑，累加生成后指数规律越明显^[11]。据此，邓聚龙提出根据一次累加生成序列建立如下形式的微分方程，即 GM(1,1)模型的白化微分方程：

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b. \quad (2-3)$$

将其在区间 $[i, i+1]$ 上积分，则有

$$\int_i^{i+1} dx^{(1)}(t) + a \int_i^{i+1} x^{(1)}(t) dt = b \int_i^{i+1} dt, \quad (2-4)$$

其中

$$\int_i^{i+1} dx^{(1)}(t) = x^{(1)}(i+1) - x^{(1)}(i) = x^{(0)}(i+1). \quad (2-5)$$

令 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[i, i+1]$ 上的背景值为 $z^{(1)}(i+1)$ ，一般取均值形式，即

$$z^{(1)}(i+1) = 0.5(x^{(1)}(i) + x^{(1)}(i+1)), \quad (2-6)$$

则有

$$a \int_i^{i+1} x^{(1)}(t) dt = a \int_i^{i+1} z^{(1)}(i+1) dt = az^{(1)}(i+1). \quad (2-7)$$

将式(2-5)、(2-7)代入式(2-4)，则得到 GM(1,1) 模型的白化微分方程(2-3)式的离散化方程，并称为 GM(1,1)模型的定义型方程：

$$x^{(0)}(i+1) + az^{(1)}(i+1) = b, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2-8)$$

基于最小二乘法得到 GM(1,1)模型的参数估计为：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (2-9)$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} z^{(1)}(2) & -1 \\ z^{(1)}(3) & -1 \\ \dots & \dots \\ z^{(1)}(n) & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -x^{(0)}(2) \\ -x^{(0)}(3) \\ \dots \\ -x^{(0)}(n) \end{pmatrix}.$$

传统 GM(1,1)模型的预测值 $\hat{x}^{(0)}(i)$ 的计算公式，也称为白化响应式为：

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(i) &= [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a}, \\ \hat{x}^{(0)}(i) &= \hat{x}^{(1)}(i) - \hat{x}^{(1)}(i-1) = (1 - e^a)[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

此白化响应式是由 GM(1,1)模型的白化微分方程(2-3)： $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$ ，在初始条件 $x^{(0)}(1)$ 下的解。

定义型方程(2-8)中，参数 a 称为发展系数，它的大小及正负性可以反映原始序列的发展态势。参数 b 称为灰作用量，是具有对系统的灰信息覆盖的作用量。邓聚龙深入研究了 GM(1,1)模型参数的界区，有下列结论：

定理 2.1 ^[4] 对于 GM(1,1)的发展系数 a 有：

- 1) 禁区为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$;
- 2) 可容区为 $(-2, 2)$ 。

因为当 $a = 2$ 时，可推得所有预测值为0，当 $a = -2$ 时，可推得所有预测值趋于无穷，而当 $a > 2$ 与 $a < -2$ 时，预测值时正时负，模型失去意义。邓聚龙还进一步由原始序列的级比，判断 GM(1,1)模型的建模可行性。

定义 2.1 ^[4] 令原始序列为 $X = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ ，称 $\sigma^{(0)}(i)$ 为原始序列的级比：

$$\sigma^{(0)}(i) = \frac{x^{(0)}(i-1)}{x^{(0)}(i)}, \quad i \geq 3.$$

定理 2.2 ^[4] GM(1,1)模型的发展系数的界区为： $a \in (-\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n+1})$ ；原始序列级比的界区为： $\sigma^{(0)}(i) \in (e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$ ，其中 n 为原始建模数据的个数。

从 GM(1,1)模型的建模机理和预测公式可知模型预测曲线是指数型曲线，能反映序列的整体发展趋势，但是不能反映波动性。定理 2.2 是 GM(1,1)模型的建模条件，若不满足此定理，则序列波动性较大，不适合用 GM(1,1)建模。本文第三章至第六章的实例都满足此条件，第七章将对模型进行改进，使其适用于波动型区间数序列预测。

2.2 累积法

传统 GM(1,1)模型的参数估计方法是最小二乘法。随着应用的发展，郑照宁^[33]等发现运用最小二乘法进行参数估计时，正规方程会出现病态性，从而使参数估计失效。特别是当建模数据较少且存在异常点时，病态性更显著，而这种情况对于应用于少样本预测的 GM(1,1)模型并不少见。所以，为了提高模型的稳健性，出现了很多参数估计改进方法，包括：全最小二乘、加权最小二乘、普通最小一乘、折扣最小一乘、全最小一乘等，这些方法虽然提高了模型的稳健性，但都是基于拟合误差的假设，最小二乘法基于误差平方和最小，最小一乘法基于误差绝对值之和最小，具体文献和方法已经在第一章中做了详细介绍。这种对误差的假设会造成预测模型的结构参数与估值之间的偏离或不一致以及平均误差较大等问题。

累积法(AM)则不需对拟合误差进行假设，而是直接通过对样本数据的累加进行参数估计。但是由于累积和计算繁杂，所以没有得到广泛应用。1999年，曹定爱与张顺明^[6]推得累积和的计算通式，才使累积法在经济计量和工程技术模型结构参数的估算中得到广泛应用^[186]。

本文作者将累积法引入 GM(1,1)模型，分析得出累积法 GM(1,1)模型的病态性小于最小二乘法 GM(1,1)模型，并且可以通过对原始数据做数乘变换完全解决^[8]。下面先给出累积法的基本原理，再给出其性质和几何意义。

2.2.1 累积和的定义及计算通式

设原始序列为：

$$X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\},$$

原始序列的各阶累积和： $\sum_{i=1}^n {}^{(r)}x(i), r = 1, 2, \dots$ ，的定义和计算通式为：

一阶累积和:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n {}^{(1)}x(i) &= x(1) + x(2) + \cdots + x(n) = \sum_{i=1}^n x(i) \\ &= \sum_{i=1}^n C_{n-i+0}^0 x(i).\end{aligned}$$

二阶累积和:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n {}^{(2)}x(i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i {}^{(1)}x(j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i C_{i-j+0}^0 x(j) \\ &= x(1) + (x(1) + x(2)) + \cdots + (x(1) + x(2) + \cdots + x(n)) \\ &= nx(1) + (n-1)x(2) + \cdots + x(n) \\ &= \sum_{i=1}^n C_{n-i+1}^1 x(i).\end{aligned}$$

依此类推, r 阶累积和计算通式为:

$$\sum_{i=1}^n {}^{(r)}x(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i {}^{(r-1)}x(j) = \sum_{i=1}^n C_{n-i+r-1}^{r-1} x(i). \quad (2-11)$$

$\sum_{i=1}^n {}^{(r)}1$ 称为基本累积和, 并可简记为 $\sum_{i=1}^n {}^{(r)}$, 其计算通式为:

$$\sum_{i=1}^n {}^{(r)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i {}^{(r-1)} = \sum_{i=1}^n C_{n-i+r-1}^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots. \quad (2-12)$$

2.2.2 基于累积法的参数估计过程

设 n 组观察数据为 $\{(x_1(t_i), x_2(t_i), \cdots, x_m(t_i); y(t_i)) : i = 1, 2, \dots, n\}$, 设因变量与自变量的关系为下列线性方程:

$$y(t_i) = \beta_0 + \beta_1 x_1(t_i) + \beta_2 x_2(t_i) + \cdots + \beta_m x_m(t_i) + \varepsilon(t_i), \quad (2-13)$$

其中, $\varepsilon(t_i)$ 为均值为 0 的随机干扰项。要由 n 组观察数据估计方程的未知参数,

对方程两边作1至 r 阶累积和如下:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n {}^{(1)}y(t_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^n {}^{(1)} + \beta_1 \sum_{i=1}^n {}^{(1)}x_1(t_i) + \cdots + \beta_m \sum_{i=1}^n {}^{(1)}x_m(t_i) + \varepsilon_1, \\ \sum_{i=1}^n {}^{(2)}y(t_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^n {}^{(2)} + \beta_1 \sum_{i=1}^n {}^{(2)}x_1(t_i) + \cdots + \beta_m \sum_{i=1}^n {}^{(2)}x_m(t_i) + \varepsilon_2, \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n {}^{(r)}y(t_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^n {}^{(r)} + \beta_1 \sum_{i=1}^n {}^{(r)}x_1(t_i) + \cdots + \beta_m \sum_{i=1}^n {}^{(r)}x_m(t_i) + \varepsilon_r. \end{cases} \quad (2-14)$$

因为方程(2-13)有 $m+1$ 个待定参数, 所以, 最高阶累积和的阶数: $r \geq m+1$ 。

下面定义

$$X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n {}^{(1)} & \sum_{i=1}^n {}^{(1)}x_1(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n {}^{(1)}x_m(t_i) \\ \sum_{i=1}^n {}^{(2)} & \sum_{i=1}^n {}^{(2)}x_1(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n {}^{(2)}x_m(t_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n {}^{(r)} & \sum_{i=1}^n {}^{(r)}x_1(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n {}^{(r)}x_m(t_i) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n {}^{(1)}y(t_i) \\ \sum_{i=1}^n {}^{(2)}y(t_i) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n {}^{(r)}y(t_i) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \end{pmatrix}.$$

则式(2-14)的矩阵形式为:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad (2-15)$$

其中, ε 满足: $E(\varepsilon) = 0$, $cov(\varepsilon, \varepsilon) = \sigma^2 I$, 其中, σ^2 为未知参数。对参数的估计有两种情况:

1) 设存在 $r \geq m+1$, 使 $rank X = m+1$ 。则, 当 $r = m+1$ 时, X 是非奇异阵, 则对参数的估计为

$$\hat{\beta} = X^{-1}Y. \quad (2-16)$$

当 $r > m+1$ 时, $X^T X$ 是非奇异阵, 则参数估计为

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (2-17)$$

2) 若 $rank X < m+1$, 则参数估计不能确定。这种情况下, 合理的修正方法

是对观察数据稍作扰动, 使 $\text{rank} X = m + 1$ 。

在实际应用中, 通常取 $r = m + 1$ 。当 X 为奇异阵时, 对观察数据稍作扰动, 使 X^{-1} 存在, 则通常采用的参数估计式为式(2-16)。

2.2.3 累积法的性质分析

性质 2.1 $\hat{\beta}$ 是 β 的无偏估计。

证明 $E(\hat{\beta}) = E(X^{-1}Y) = X^{-1}E(Y) = X^{-1}X\beta = \beta$ 。 \square

性质 2.2 $\hat{\beta}$ 的协方差矩阵为: $\text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta}) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$ 。

证明 $\text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta}) = \text{cov}(X^{-1}Y, X^{-1}Y) = X^{-1}\text{cov}(Y, Y)(X^{-1})^T$
 $= X^{-1}\sigma^2 I(X^{-1})^T = \sigma^2(X^T X)^{-1}$ 。 \square

性质 2.3 $\hat{\beta}$ 是 β 的线性无偏最小方差估计。

证明 设 $\tilde{\beta}$ 是 β 的任一线性无偏估计, 则 $\tilde{\beta}$ 可以表示为: $\tilde{\beta} = CY$, 并满足

$$E(\tilde{\beta}) = E(CY) = CE(Y) = CX\beta = \beta.$$

则得: $CX = I$ 。又

$$\text{cov}(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}) = \text{cov}(CY, CY) = C\text{cov}(Y, Y)C^T = C\sigma^2 IC^T = \sigma^2 CC^T.$$

因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq [C - (X^T X)^{-1}X^T][C - (X^T X)^{-1}X^T]^T \\ &= CC^T + (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1}X^T C^T - CX(X^T X)^{-1} \\ &= CC^T + (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} \\ &= CC^T - (X^T X)^{-1}, \end{aligned}$$

则有 $CC^T \geq (X^T X)^{-1}$, 所以有 $\sigma^2 CC^T \geq \sigma^2(X^T X)^{-1}$ 。这样, 再由性质 2.2: $\text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta}) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$, 则得到 $\hat{\beta}$ 是 β 的线性无偏最小方差估计。 \square

2.2.4 累积法的几何意义

设序列 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 中的每个数据表示数轴上一点, 则由物理的重心理论有以下结论。

一个点的重心即该点本身: $x = x(1)$;

两个点的重心为: $x = \frac{x(1)+x(2)}{2}$;

三个点的重心即把两点的重心与第三点的连线段分为 1 : 2 的一点:

$$x = \frac{\frac{x(1)+x(2)}{2} \cdot 2 + x(3)}{3} = \frac{x(1) + x(2) + x(3)}{3}.$$

依此类推, 序列 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 中 n 个点的重心即为把其中 $(n - 1)$ 个点的重心与第 n 个点的连线段分为 1 : $(n - 1)$ 的一点, 即:

$$x = \frac{x(1) + x(2) + \dots + x(n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x(i)}{n}. \quad (2-18)$$

由前面累积和的定义: $\sum_{i=1}^n x(i) = \sum_{i=1}^n {}^{(1)}x(i)$, $n = \sum_{i=1}^n {}^{(1)}1$, 得式(2-18)为

$$\frac{\sum_{i=1}^n x(i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n {}^{(1)}x(i)}{\sum_{i=1}^n {}^{(1)}1}, \quad (2-19)$$

并称 $\frac{\sum_{i=1}^n {}^{(1)}x(i)}{\sum_{i=1}^n {}^{(1)}1}$ 为一阶重心算子。

一般地, $(m + n)$ 个数据的重心, 即为把其中 m 个数据的重心与其余 n 个数据的重心的连线段, 分成 $n : m$ 的一点, 由此可知下列数据组:

$$x(1), \frac{x(1) + x(2)}{2}, \frac{x(1) + x(2) + x(3)}{3}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^n x(i)}{n},$$

的重心坐标为

$$x = \frac{x(1) + (x(1) + x(2)) + \dots + \sum_{i=1}^n x(i)}{1 + 2 + \dots + n}. \quad (2-20)$$

同样, 由前面各阶累积和的定义得: 式(2-20)即为 $\frac{\sum_{i=1}^n {}^{(2)}x(i)}{\sum_{i=1}^n {}^{(2)}1}$, 并称其为二阶重心算

子。依此类推, 称 $\frac{\sum_{i=1}^n {}^{(r)}x(i)}{\sum_{i=1}^n {}^{(r)}1}$ 为 r 阶重心算子。

由以上分析, 累积法的正规方程(2-14), 即是对模型方程(2-13)两边分别施行 1, 2, \dots , r 阶重心算子所得。所以, 累积法的几何意义是找到基于样本点的一条重心线, 从而可以使拟合值的误差和趋于 0, 以及绝对误差和趋于最小。

2.3 本章小结

本章介绍了 GM(1,1)模型的建模机理,并给出了模型参数的相关理论。介绍了累积法的基本原理——直接基于样本数据估计参数,不同于最小二乘或一乘法是对拟合误差进行假设。累积法属于线性无偏最小方差估计,其几何意义是找到基于样本点的一条重心线,保证了拟合值的误差和趋于0以及绝对误差和趋于最小。而且对原始数据做累积和极大地平滑了数据,降低了个别异常点的影响,从而加强了预测模型的稳健性。在之后的各章节中,灰模型的参数估计都将采用累积法。

第三章 累积法GM(1,1)模型及其性质研究

3.1 引言

累积法(AM)极大地平滑了观察数据,减小了异常点的影响,增强了模型的稳健性,并且不对误差进行假设,计算简便,所以,在计量经济学和工程技术中已得到广泛应用。累积法也已引入灰色模型,李锋^[7]等将累积法引入GM(0,N)模型,本文作者在文献[8]、[187]中,分别给出了GM(1,1)、GM(2,1)及一般GM(n,h)模型的累积法参数估计过程,进一步分析了数乘变换对各种累积法灰色模型的病态性的影响,得出累积法GM(1,1)的病态性问题可以通过数乘变换完全解决。

本章将累积法引入GM(1,1)模型的参数估计后,又由模型的定义型方程推得内涵型预测公式,用来取代传统的白化响应式,进一步通过矩阵分析得出模型的几个重要性质。本章的结构为:第二节给出基于累积法的GM(1,1)模型的参数估计公式;第三节给出建模过程;第四节基于矩阵理论给出累积法参数估计与原始序列的直接关系;第五节对模型进行性质分析;第六节对模型进行了实例应用;第七节给出结论。

3.2 累积法GM(1,1)模型的参数估计

设非负序列为

$$X = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\},$$

其一次累加生成序列(1-AGO)为:

$$x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-1)$$

区间 $[i-1, i]$ 上的背景值取均值形式, 即

$$z^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i-1) + x^{(1)}(i)), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (3-2)$$

GM(1,1)模型的定义型方程为:

$$x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (3-3)$$

对式(3-3)两边施加累积算子, 由于模型参数有2个, 所以只需施加1、2阶累积和算

子:

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad (3-4)$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(2)}. \quad (3-5)$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) &= \sum_{i=2}^n z^{(1)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z^{(1)}(i), \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) &= \sum_{i=2}^n x^{(0)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x^{(0)}(i), \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)} &= C_n^1 - 1 = n - 1, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

如果记

$$\mathbf{a} = (a, b)^T, \quad X_r = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)} \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad Y_r = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) \end{pmatrix}.$$

那么式(3-4)、(3-5)可以写成矩阵形式: $X_r \mathbf{a} = Y_r$, 则得到在累积法准则下的参数估计公式:

$$\mathbf{a} = (a, b)^T = X_r^{-1} Y_r. \quad (3-6)$$

进一步计算得到两个参数估计式为:

$$a = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) - (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i)}{|X_r|}, \quad (3-7)$$

$$b = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) - \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i)}{|X_r|}, \quad (3-8)$$

其中

$$|X_r| = -\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) + (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i).$$

3.3 累积法 GM(1,1)模型的内涵型预测公式

传统 GM(1,1)模型的预测值 $\hat{x}^{(0)}(i)$ 的计算公式，也称为白化响应式为：

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(i) &= [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a}, \\ \hat{x}^{(0)}(i) &= \hat{x}^{(1)}(i) - \hat{x}^{(1)}(i-1) = (1 - e^a)[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)}.\end{aligned}\quad (3-9)$$

此白化响应式是由 GM(1,1)模型的白化微分方程(2-3): $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$, 在初始条件 $x^{(0)}(1)$ 下的解, 并不是由 GM(1,1)模型的定义型方程(3-3)推导出来的——这一点邓聚龙教授所著的《灰理论基础》中已经指出: “实质上 GM(1,1)模型的白化模型及其白化响应式, 均不属于灰模型的范畴, 而是借用的”。而且, 当用白化响应式(3-9)进行预测时, 其中的参数: 发展系数与灰作用量(a 与 b), 却是由 GM(1,1)模型的定义型方程(3-3)估计得出。文献 [188]深入分析了 GM(1,1)模型的白化响应式(3-9)和定义型方程(3-3)中所含的参数(a 、 b)的关系, 得出这两种形式下的参数是有差异的, 所以先用定义型(3-3)估计参数(a 、 b), 再将其代入借用的预测公式——白化响应式(3-9), 进行拟合与预测值计算, 显然存在结构性误差。不仅如此, 文献 [188]还得出由 GM(1,1)模型的定义型方程(3-3)直接推得的内涵型预测公式才是 GM(1,1)模型的真实解。文献 [32]对 GM(1,1)模型的白化响应式和内涵型预测公式分别进行了泰勒级数展开和纯指数序列拟合, 得出白化响应式和内涵型的预测公式是有误差的, 而且其误差与发展系数 a 的取值有关。当 $|a|$ 很小时, 两者误差很小, 两个预测公式则可以相互取代; 当 $|a|$ 增大时, 两者间的误差也变大, 如果此时依然用白化响应式作为 GM(1,1)模型的预测公式, 预测精度会降低, 甚至会出现“指数关系的悖论”。并且经过纯指数序列的拟合检验, 得出白化响应式是有偏差的拟合公式, 而内涵型则是精确的。

下面, 将直接由 GM(1,1)模型的定义型方程推导得出模型的内涵型预测公式。

定理 3.1 GM(1,1)模型的定义型方程(3-3)等价于

$$x^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b - ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (3-10)$$

证明 因为 $z^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i) + x^{(1)}(i-1))$, 所以 GM(1,1)模型的定义型方程(3-3)成为

$$x^{(0)}(i) + \frac{a}{2}(x^{(1)}(i) + x^{(1)}(i-1)) = b.$$

再由 $x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j) = x^{(1)}(i-1) + x^{(0)}(i)$, 代入上式, 则得

$$x^{(0)}(i) + \frac{a}{2}(x^{(0)}(i) + 2x^{(1)}(i-1)) = b,$$

则推导得

$$\begin{aligned} x^{(0)}(i) &= \frac{b - ax^{(1)}(i-1)}{1 + 0.5a} = \frac{b - a(x^{(0)}(i-1) + x^{(1)}(i-2))}{1 + 0.5a} \\ &= \frac{b - ax^{(1)}(i-2)}{1 + 0.5a} - \frac{ax^{(0)}(i-1)}{1 + 0.5a} = x^{(0)}(i-1) - \frac{ax^{(0)}(i-1)}{1 + 0.5a} \\ &= \frac{2-a}{2+a}x^{(0)}(i-1) = \left(\frac{2-a}{2+a}\right)^{i-2}x^{(0)}(2) = \left(\frac{2-a}{2+a}\right)^{i-2}\frac{b - ax^{(0)}(1)}{1 + 0.5a} \\ &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b - ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

式(3-10)是一个递推式, 将 $x^{(0)}(1)$ 作为初始条件, 则此式即可作为预测公式来计算 $x^{(0)}(i)$ 的预测值 $\hat{x}^{(0)}(i)$, 即,

$$\hat{x}^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b - ax^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (3-11)$$

称此式为模型的内涵型预测公式。定理得证。 \square

下面给出累积法 GM(1,1) 模型的建模步骤:

第一步: 输入原始序列 $x^{(0)}(i)$, 由式(3-1)得原始序列的一次累加生成序列(1-AGO): $x^{(1)}(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 由式(3-2)计算背景值序列: $z^{(1)}(i)$, $i = 2, 3, \dots, n$;

第二步: 由式(3-6)得累积法参数估计值;

第三步: 将参数估计值代入内涵型预测公式(3-11), 并令: $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ 为初始条件, 得出预测值: $\hat{x}^{(0)}(i)$, $i = 2, 3, \dots$;

第四步: 计算各原始数据 $x^{(0)}(i)$ 与预测值 $\hat{x}^{(0)}(i)$ 的相对误差:

$$e_i = \left| \frac{x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)}{x^{(0)}(i)} \right| \times 100\%,$$

并计算其平均值 $\bar{e} = \sum_{i=2}^n e_i / (n-1)$ 。

3.4 累积法 GM(1,1)模型参数估计的矩阵表示式

下面将采用矩阵分析的方法研究累积法 GM(1,1)模型的性质。首先给出原始序列的一次累加生成序列和白化背景值序列的矩阵表示式。

定理 3.2 设原始序列构成的向量为: $X = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 则一次累加生成序列: $x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 构成的向量为:

$$\begin{aligned} & (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \\ &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \\ &= X A_1, \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 3.3 背景值序列: $z^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i-1) + x^{(1)}(i))$, $i = 2, 3, \dots, n$, 构成的向量为:

$$\begin{aligned} & (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)) \\ &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)} \\ &= X A_1 A_2 \\ &= X A, \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)},$$

$$A = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)}.$$

即得

$$\begin{aligned} (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)) &= X A_1 A_2 = X A \\ &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)}. \end{aligned} \quad (3-14)$$

并且设 A 的第一行为

$$e = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}. \quad (3-15)$$

定理 3.4 累积法 GM(1,1)模型参数估计的矩阵表示式为:

$$a = \frac{X\alpha}{X\beta}, \quad b = \frac{XB X^T}{X\beta}, \quad (3-16)$$

其中, α 、 β 、 B 与原始序列 X 无关:

$$\alpha = 0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1, \quad \beta = (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2), \quad B = A(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T),$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (0, 1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}^T, \quad \xi_2 = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}^T, \\ \eta_1 &= (0, n-1, n-2, \dots, 1)^T, \quad \eta_2 = (n-1, n-2, \dots, 1)^T.\end{aligned}$$

证明 首先,

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(i) &= x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) + \dots + x^{(0)}(n) \\ &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \times (0, 1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}^T \\ &= X(0, 1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}^T = X\xi_1,\end{aligned}$$

其中, 令 $\xi_1 = (0, 1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}^T$ 。由于式(3-14): $(z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)) = XA$, 有背景值序列的一阶累积和为:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) &= z^{(1)}(2) + z^{(1)}(3) + \dots + z^{(1)}(n) \\ &= (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)) \times (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}^T \\ &= XA(1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}^T = XA\xi_2,\end{aligned}$$

其中, 令 $\xi_2 = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}^T$ 。原始序列的二阶累积和为:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) &= (n-1)x^{(0)}(2) + (n-2)x^{(0)}(3) + \dots + x^{(0)}(n) \\ &= X(0, n-1, n-2, \dots, 1)^T = X\eta_1,\end{aligned}$$

其中, $\eta_1 = (0, n-1, n-2, \dots, 1)^T$ 。背景值序列的二阶累积和为:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) &= (n-1)z^{(1)}(2) + (n-2)z^{(1)}(3) + \dots + z^{(1)}(n) \\ &= XA(n-1, n-2, \dots, 1)^T = XA\eta_2,\end{aligned}$$

其中, $\eta_2 = (n-1, n-2, \dots, 1)^T$ 。则式(3-4)与式(3-5)变为:

$$X\xi_1 + aXA\xi_2 = (n-1)b, \quad X\eta_1 + aXA\eta_2 = 0.5n(n-1)b.$$

令

$$X_r = \begin{pmatrix} XA\xi_2 & 1-n \\ XA\eta_2 & 0.5n(1-n) \end{pmatrix}, \quad Y_r = \begin{pmatrix} -X\xi_1 \\ -X\eta_1 \end{pmatrix},$$

则 X_r 的行列式为:

$$|X_r| = 0.5n(1-n)XA\xi_2 - (1-n)XA\eta_2 = (n-1)XA(\eta_2 - 0.5n\xi_2) = X\beta,$$

其中, 令 $\beta = (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2)$ 。而

$$X_r^{-1} = \frac{X_r^*}{|X_r|} = \frac{1}{|X_r|} \begin{pmatrix} 0.5n(1-n) & n-1 \\ -XA\eta_2 & XA\xi_2 \end{pmatrix},$$

则模型参数估计式(3-6)为:

$$\begin{aligned} (a, b)^T &= X_r^{-1}Y_r \\ &= \frac{1}{|X_r|} \begin{pmatrix} X[0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1] \\ XA(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T)X^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{X\beta} \begin{pmatrix} X[0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1] \\ XA(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T)X^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即得发展系数与灰作用量的累积法估计的矩阵表示式为:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{X\beta} X[0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1], \\ b &= \frac{1}{X\beta} [XA(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T)X^T], \end{aligned}$$

其中, 令 $\alpha = 0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1$, $B = A(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T)$, 则得

$$a = \frac{X\alpha}{X\beta}, \quad b = \frac{XBX^T}{X\beta}.$$

上式中, α 、 β 、 B 与原始序列 X 无关, 所以, 此式显示出参数估计与原始序列的直接关系。定理得证。 \square

3.5 累积法 GM(1,1)模型的性质研究

定理 3.4 给出了累积法 GM(1,1)模型参数估计值与原始序列的直接关系, 则使性质分析更加容易。并且原始数据的数据变换对参数估计的影响, 由此关系可直接得出。

定理 3.5 在累积法 GM(1,1)模型的参数估计中, 发展系数 a 与初值 $x^{(0)}(1)$ 无关, 而灰作用量 b 是 $x^{(0)}(1)$ 的线性函数, 即 $b = cx^{(0)}(1) + d$, 其中 c , d 是与

$x^{(0)}(1)$ 无关的常数。

证明 由定理 3.4, $a = \frac{X\alpha}{X\beta}$, 其中

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1, \\ \beta &= (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2).\end{aligned}$$

将矩阵 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, A = A_1A_2$ 代入计算可得:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{n(n-1)}{2}\xi_1 - (n-1)\eta_1 \\ &= (n-1) \times (0, 1 - \frac{n}{2}, 2 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1)_{1 \times n}^T,\end{aligned}\tag{3-17}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (n-1)A_1A_2(\eta_2 - \frac{n}{2}\xi_2) \\ &= (n-1) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \begin{pmatrix} \frac{n-2}{4}, \frac{2n-6}{4}, \frac{2n-10}{4}, \frac{2n-14}{4}, \\ \dots, \frac{10-2n}{4}, \frac{6-2n}{4}, \frac{2-n}{4} \end{pmatrix}_{1 \times n}^T \\ &= (n-1)(0, \frac{2-n}{4}, \frac{8-3n}{4}, \frac{18-5n}{4}, \frac{32-7n}{4}, \\ &\quad \dots, \frac{18-5n}{4}, \frac{8-3n}{4}, \frac{2-n}{4})_{1 \times n}^T.\end{aligned}\tag{3-18}$$

由于 α, β 的第一个分量均为 0, 所以 $X\alpha, X\beta$ 均与 $x^{(0)}(1)$ 无关, 则 $a = \frac{X\alpha}{X\beta}$ 与 $x^{(0)}(1)$ 无关。

下面证明灰作用量 b 是 $x^{(0)}(1)$ 的线性函数, 由定理 3.4: $b = \frac{XBX^T}{X\beta}$, 其中

$$\begin{aligned}B &= A(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T), \\ \beta &= (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2).\end{aligned}$$

同样将 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 代入计算可得

$$\begin{aligned}B &= A(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T) = A \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & \dots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -(n-2) & -(n-3) & -(n-4) & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= A(0, S),\end{aligned}$$

其中 $(0, S)$ 表示前一步两矩阵乘积的第二个矩阵, 0 表示此矩阵的第一列。又设

式(3-14)中: $A = \begin{pmatrix} e \\ T \end{pmatrix}$, 其中 e 表示矩阵 A 的第一行, 则

$$B = \begin{pmatrix} e \\ T \end{pmatrix} (0, S) = \begin{pmatrix} 0 & eS \\ 0 & TS \end{pmatrix}.$$

又设 $X_* = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))$, 则原始序列为

$$\begin{aligned} X &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) = (x^{(0)}(1), X_*), \\ XBX^T &= (x^{(0)}(1), X_*) \begin{pmatrix} 0 & eS \\ 0 & TS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(0)}(1) \\ X_*^T \end{pmatrix} \\ &= x^{(0)}(1)eSX_*^T + X_*TSX_*^T. \end{aligned}$$

由式(3-18), 设 $\beta = (0, \varepsilon)^T$, 其中

$$\varepsilon = (n-1) \left(\frac{2-n}{4}, \frac{8-3n}{4}, \frac{18-5n}{4}, \dots, \frac{18-5n}{4}, \frac{8-3n}{4}, \frac{2-n}{4} \right)_{1 \times (n-1)}^T.$$

则

$$X\beta = (x^{(0)}(1), X_*) \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^T \end{pmatrix} = X_*\varepsilon^T,$$

所以

$$b = \frac{XBX^T}{X\beta} = \frac{x^{(0)}(1)eSX_*^T + X_*TSX_*^T}{X_*\varepsilon^T} = cx^{(0)}(1) + d,$$

其中, $c = \frac{eSX_*^T}{X_*\varepsilon^T}$, $d = \frac{X_*TSX_*^T}{X_*\varepsilon^T}$, 显然 c 、 d 均与 $x^{(0)}(1)$ 无关。定理得证。 \square

定理 3.6 设对原始序列 $X = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 进行数乘变换后的序列为 $Y = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$, 其中 $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。对 X 与 Y 分别建立累积法 GM(1,1) 模型, Y 对应模型的参数估计、预测值、相对误差分别记为: a_y 、 b_y 、 $\hat{y}^{(0)}(i)$ 、 e_{yi} 。则有下列结论:

(1) 发展系数的估计相同, 灰作用量的估计会出现相应的数乘变换, 即

$$a_y = a, \quad b_y = \rho b.$$

(2) 预测值会有相应的数乘变换, 即

$$\hat{y}^{(0)}(i) = \rho \hat{x}^{(0)}(i), \quad i = 1, 2, \dots.$$

(3)数乘变换不影响预测相对误差，即

$$e_{yi} = \frac{y^{(0)}(i) - \hat{y}^{(0)}(i)}{y^{(0)}(i)} = \frac{x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)}{x^{(0)}(i)} = e_{xi}, \quad i = 1, 2, \dots$$

证明 由定理 3.4，基于原始序列的累积法 GM(1,1)模型的参数估计为

$$a = \frac{X\alpha}{X\beta}, \quad b = \frac{XB X^T}{X\beta}.$$

而且 α, β, B 都为常数矩阵，与原始序列 X 无关，所以原始序列 X 的数乘变换不影响 α, β, B ，则参数估计变为：

$$a_y = \frac{\rho X\alpha}{\rho X\beta} = a, \quad b_y = \frac{\rho^2 XB X^T}{\rho X\beta} = \rho b.$$

由定理 3.1，数乘变换后，序列 Y 的累积法 GM(1,1)模型的预测值计算公式为：

$$\hat{y}^{(0)}(i) = \frac{2(2 - a_y)^{i-2}(b_y - a_y y^{(0)}(1))}{(2 + a_y)^{i-1}} = \frac{2(2 - a)^{i-2}(\rho b - a \rho x^{(0)}(1))}{(2 + a)^{i-1}} = \rho \hat{x}^{(0)}(i).$$

由 $\hat{y}^{(0)}(i) = \rho \hat{x}^{(0)}(i)$ ，显然有 $e_{yi} = e_{xi}$ ， $i = 1, 2, \dots$ 。定理得证。 \square

定理 3.6 说明如果对原始序列进行数据变换，由定理 3.4 的参数估计公式，可以直接得出数据变换对模型参数估计与预测值的影响。本文作者在文献 [8]中指出数乘变换可以解决累积法 GM(1,1)模型的病态性问题。在实际应用中，当观察数据较大时，可以对其作数乘变换，不仅使计算更加简便，而且可以降低模型的病态性。

邓聚龙教授指出 GM(1,1)模型的发展系数 a ：1)禁区为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ；2)可容区为 $(-2, 2)$ (参看第二章定理 2.1)。这里可以证明基于累积法的发展系数 a 的估计在可容区 $(-2, 2)$ 内。

定理 3.7 累积法 GM(1,1)模型的发展系数 a 的参数估计在可容区 $(-2, 2)$ 内。

证明 定理 3.5 的证明中，已计算得 α, β ，即式 (3-17)与式 (3-18)，由此得知，当 n 为奇数时，可以令

$$\alpha = -(n-1) \times (0, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1,(n-1)/2}, a_{1,(n+1)/2}, \dots, a_{1,(n+1)/2}, -a_{1,(n-1)/2}, \dots, -a_{12})_{1 \times n}^T, \quad (3-19)$$

$$\beta = -(n-1) \times (0, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1,(n-1)/2}, b_{1,(n+1)/2}, \dots, b_{1,(n+1)/2}, b_{1,(n-1)/2}, \dots, b_{12})_{1 \times n}^T. \quad (3-20)$$

当 n 为偶数时, 可以令

$$\alpha = -(n-1) \times (0, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1,(n-2)/2}, a_{1,n/2}, a_{1,(n+2)/2}, -a_{1,n/2}, -a_{1,(n-2)/2}, \dots, -a_{12})_{1 \times n}^T, \quad (3-21)$$

$$\beta = -(n-1) \times (0, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1,(n-2)/2}, b_{1,n/2}, b_{1,(n+2)/2}, b_{1,n/2}, b_{1,(n-2)/2}, \dots, b_{12})_{1 \times n}^T, \quad (3-22)$$

其中

$$a_{1j} > 0, b_{1j} > 0, j = 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} \text{ or } \frac{n+2}{2}.$$

由 $a_{12} = \frac{n}{2} - 1$, $b_{12} = \frac{n-2}{4}$, 得 $a_{12} > b_{12}$; 由 $a_{13} = \frac{n}{2} - 2$, $b_{13} = \frac{3n-8}{4}$, 得 $a_{13} < b_{13}$; 依次类推得

$$a_{1j} < b_{1j}, j = 3, 4, \dots, \frac{n+1}{2} \text{ or } \frac{n+2}{2}.$$

由定理 3.4: $a = \frac{X\alpha}{X\beta}$, 其中 $X = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始数列, 将式 (3-19)-(3-22) 代入计算得

$$a = \begin{cases} \frac{a_{12}x^{(0)}(2)+s_1-p_1}{b_{12}x^{(0)}(2)+t_1+q_1}, & n = 3, 5, \dots, \\ \frac{a_{12}x^{(0)}(2)+s_2-p_2}{b_{12}x^{(0)}(2)+t_2+q_2}, & n = 2, 4, \dots. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=3}^{(n+1)/2} a_{1j}x^{(0)}(j), & t_1 &= \sum_{j=3}^{(n+1)/2} b_{1j}x^{(0)}(j), \\ p_1 &= \sum_{j=2}^{(n+1)/2} a_{1j}x^{(0)}(n-(j-2)), & q_1 &= \sum_{j=2}^{(n+1)/2} b_{1j}x^{(0)}(n-(j-2)), \\ s_2 &= \sum_{j=3}^{(n+2)/2} a_{1j}x^{(0)}(j), & t_2 &= \sum_{j=3}^{(n+2)/2} b_{1j}x^{(0)}(j), \\ p_2 &= \sum_{j=2}^{n/2} a_{1j}x^{(0)}(n-(j-2)), & q_2 &= \sum_{j=2}^{n/2} b_{1j}x^{(0)}(n-(j-2)). \end{aligned}$$

先考虑当 n 为奇数时, 因为 $0 < a_{1j} < b_{1j}$, $j = 3, 4, \dots, \frac{n+1}{2}$, 所以有 $0 < s_1 < t_1$ 。

又 $a_{12} > b_{12} > 0$, 而且原始序列非负: $x^{(0)}(i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\frac{a_{12}x^{(0)}(2)}{b_{12}x^{(0)}(2)} > \frac{a_{12}x^{(0)}(2) + s_1}{b_{12}x^{(0)}(2) + t_1}.$$

又 $p_1 > 0, q_1 > 0$, 所以

$$\frac{a_{12}x^{(0)}(2)}{b_{12}x^{(0)}(2)} > \frac{a_{12}x^{(0)}(2) + s_1}{b_{12}x^{(0)}(2) + t_1} > \frac{a_{12}x^{(0)}(2) + s_1 - p_1}{b_{12}x^{(0)}(2) + t_1 + q_1}.$$

即得

$$a < \frac{a_{12}}{b_{12}}.$$

由对称性, 同理可证, $-a < \frac{a_{12}}{b_{12}}$, 即 $a > -\frac{a_{12}}{b_{12}}$ 。同样可证, 当 n 为偶数时, $-\frac{a_{12}}{b_{12}} < a < \frac{a_{12}}{b_{12}}$ 。再由 $a_{12} = \frac{n-2}{2}$, $b_{12} = \frac{n-2}{4}$, 即得 $-2 < a < 2$ 。□

3.6 应用实例

下面运用累积法 GM(1,1)模型预测我国城镇居民人均可支配收入。表 3-1 给出 2005 年至 2012 年我国城镇居民人均可支配收入的国家统计数据。我们以 2005 至 2010 年的 6 个数据作为原始序列建模, 预测 2011、2012 年的数据。为了比较模型的有效性, 还将建立最小二乘法 GM(1,1)模型。

由第三节的建模步骤, 首先由式 (3-1), 对原始序列进行一次累加生成(1-AGO), 得到一次累加生成序列($x^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j)$, $i = 1, 2, \dots, 6$): [10493, 22253, 36039, 51820, 68995, 88104]。再由式(3-2)得到背景值序列($z^{(1)}(i) = 0.5(x^{(1)}(i-1) + x^{(1)}(i))$, $i = 2, 3, \dots, 6$): [16373, 29146, 43930, 60408, 78550]。

表 3-1 2005-2012年度我国城镇居民人均可支配收入(元)

年	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
原始数据	10493	11760	13786	15781	17175	19109	21810	24565

背景值序列、原始序列的一阶、二阶累积和分别为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^6 {}^{(1)}z^{(1)}(i) &= \sum_{i=2}^6 z^{(1)}(i) = 228405, \\ \sum_{i=2}^6 {}^{(2)}z^{(1)}(i) &= \sum_{i=2}^6 C_{6-i+1}^1 z^{(1)}(i) = 529602, \\ \sum_{i=2}^6 {}^{(1)}x^{(0)}(i) &= \sum_{i=2}^6 x^{(0)}(i) = 77611, \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(i) &= \sum_{i=2}^6 C_{6-i+1}^1 x^{(0)}(i) = 214746. \end{aligned}$$

一阶、二阶基本累积和为：

$$\sum_{i=2}^6 (1) = C_6^1 - 1 = 5, \quad \sum_{i=2}^6 (2) = C_{6+2-1}^2 - 6 = 15.$$

则由式(3-6)得到基于累积法的模型参数估计为：

$$a = -0.1162, \quad b = 10212.7073.$$

由内涵型预测公式(3-11)得：

$$\hat{x}^{(0)}(i) = \frac{2(2 + 0.1162)^{i-2}(10212.7073 + 0.1162 \times 10493)}{(2 - 0.1162)^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots.$$

GM(1,1)模型适合于少样本建模，即使样本很少，预测精度也很高。表 3-2 给出了本文模型与最小二乘法 GM(1,1)(LSGM(1,1))模型预测结果，精度都达到98%以上。2011 与 2012 年的预测值，本文模型的相对误差更低，说明累积法的应用和预测公式的改进是有效的。

表 3-2 本文模型与传统模型的预测结果比较表

年	本文模型	相对误差(%)	LSGM(1, 1)	相对误差
2005	10493	0	10493	0
2006	12137.68	3.21	12148.71	3.31
2007	13635.48	1.09	13634.90	1.10
2008	15318.12	2.93	15302.90	3.03
2009	17208.39	0.19	17174.95	$2.81e^{-6}$
2010	19331.92	1.17	19276.02	0.87
2011	21717.49	0.42	21634.11	0.81
2012	24397.45	0.68	24280.67	1.16
平均误差		1.39		1.47

3.7 本章小结

1)本章将累积法引入 GM(1,1)模型的参数估计，并直接由模型的定义型方程推得模型的内涵型预测公式，用来取代传统的白化响应式，建立了累积法 GM(1,1)模型。

2)给出了一次累加生成序列和背景值生成序列的矩阵表示式，得出了这两个生成序列与原始序列的直接关系，并进一步得出基于累积法的参数估计与原始序列的直接关系，便于分析模型的性质；

3)基于参数估计与原始序列的直接关系，运用矩阵理论，得出累积法

GM(1,1)模型的几个相关性质：(1)模型参数——发展系数的估计值与初始条件无关，另一参数——灰作用量是初始值的线性函数；(2)对原始序列作数乘变换，不会影响发展系数的估计和预测值的相对误差，而灰作用量的估计会出现相应的数乘变换；(3)基于累积法的发展系数的估计值在可容区 $(-2, 2)$ 内。这些性质使我们更加深入了解模型的机理，并有助于实际应用，当原始数据较大时，可以对序列作数乘变换，便于计算和降低模型的病态性，而且这些变换不会影响模型的精度。

第四章 累积法非等间距GM(1,1)模型及其性质研究

4.1 引言

经典 GM(1,1)模型适用于等间距实数序列的预测,许多学者将其拓广到一些特殊序列,如,非等间距序列、灰数序列、区间数时间序列等。邓聚龙教授首先提出非等间距灰色模型,之后又进行了改进^[189]。1992年,傅立著^[190]运用线性插值将非等间距序列处理为等间距序列后建模。B.Z. Shi^[191]、王仲羨^[192]等对非等间距 GM(1,1)模型的建模方程进一步研究,提出了新的建模方法。谭冠军^[57]、戴文战^[193]、李翠凤^[194]、王叶梅^[195]等又对模型的背景值构造方法进行了改进,这些改进与第一章综述中对等间距 GM(1,1)的背景值的改进类似。H.B. Kuang^[196]等优化了非等间距 GM(1,1)的建模方程的灰导数取值形式。罗佑新^[197, 198]等将非等间距 GM(1,1)应用于钛合金疲劳强度的预测,之后又对模型的预测公式的初始条件提出了逐步优化法。刘明波^[199]等将非等间距 GM(1,1)模型应用于大堤沉降的预测,取得了很好的效果。本文作者在文献[200]中对非等间距 GM(1,1)的背景值和预测公式同时进行了改进,取得了更好的精度。

本章将累积法引入非等间距 GM(1,1)模型的参数估计中,并且与第三章类似,通过矩阵分析得出参数估计与原始序列的直接关系,然后证明得出模型的相关性质。本章的结构为:第二节给出非等间距 GM(1,1)的定义型方程;第三节将累积法引入非等间距 GM(1,1)的参数估计中,得到参数估计式;第四节直接由模型的定义型方程推导得模型的内涵型预测公式,并给出累积法非等间距 GM(1,1)的建模过程;第五节对模型做性质分析;第六节对模型进行实例应用分析;第七节给出结论。

4.2 非等间距 GM(1,1)模型的定义型方程

设一非等间距非负序列为 $X = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n))$, 其中, $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为各离散数据所对应的时间, 令初始时间间距: $\Delta t_1 = 1$, 间距 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \neq \text{const}, i = 2, 3, \dots, n$ 。一次累加生成序列(AGO)为:

$$x^{(1)}(t_i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(t_j)(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(t_j)\Delta t_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4-1)$$

当序列为等时距时, 可令 $\Delta t_j = 1$, 则式(4-1)就是灰色系统理论中所介绍的

一次累加生成。可见式(4-1)是更一般的一次累加生成。

据一次累加生成数据 $x^{(1)}(t)$ 建立如下形式的微分方程，即 GM(1,1)模型的白化微分方程：

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b. \quad (4-2)$$

将其在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上积分，则有

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dx^{(1)}(t) + a \int_{t_i}^{t_{i+1}} x^{(1)}(t) dt = b \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt. \quad (4-3)$$

因为 $x^{(1)}(t_i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(t_j) \Delta t_j$ ，所以

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dx^{(1)}(t) = x^{(1)}(t_{i+1}) - x^{(1)}(t_i) = x^{(0)}(t_{i+1}) \Delta t_{i+1}. \quad (4-4)$$

令 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的背景值为 $z^{(1)}(t_{i+1})$ ，一般取均值形式，即

$$z^{(1)}(t_{i+1}) = 0.5(x^{(1)}(t_i) + x^{(1)}(t_{i+1})), \quad (4-5)$$

则

$$a \int_{t_i}^{t_{i+1}} x^{(1)}(t) dt = a \int_{t_i}^{t_{i+1}} z^{(1)}(t_{i+1}) dt = az^{(1)}(t_{i+1}) \Delta t_{i+1}. \quad (4-6)$$

将式(4-4)、(4-6)代入式(4-3)，则得到非等间距 GM(1,1)模型的白化微分方程(4-2)的离散化方程，称为非等间距 GM(1,1)模型的定义型方程：

$$x^{(0)}(t_{i+1}) + az^{(1)}(t_{i+1}) = b, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4-7)$$

4.3 基于累积法的参数估计

下面引入累积法对非等间距 GM(1,1)的定义型方程(4-7)中的参数 $\mathbf{a} = (a, b)^T$ 进行估计。由于方程(4-7)含有2个参数，所以对方程两边施加一阶与二阶累积和算子：

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(t_i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(t_i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad (4-8)$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(t_i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(t_i) = b \sum_{i=2}^n {}^{(2)}. \quad (4-9)$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(t_i) &= \sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(t_i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z^{(1)}(t_i), \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(t_i) &= \sum_{i=2}^n x^{(0)}(t_i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(t_i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x^{(0)}(t_i), \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)} &= C_n^1 - 1 = n - 1, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

如果记

$$\mathbf{a} = (a, b)^T, \quad X_r = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(t_i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)} \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(t_i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad Y_r = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(t_i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(t_i) \end{pmatrix},$$

那么式(4-8)、(4-9)可以写成矩阵形式： $X_r \mathbf{a} = Y_r$ ，则得到在累积法准则下的参数估计式：

$$\mathbf{a} = X_r^{-1} Y_r. \quad (4-10)$$

进一步计算得模型的两个参数估计式为：

$$a = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(t_i) - (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(t_i)}{|X_r|}, \quad (4-11)$$

$$b = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(t_i) \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x^{(0)}(t_i) - \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(t_i) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x^{(0)}(t_i)}{|X_r|}, \quad (4-12)$$

其中， $|X_r| = -\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(t_i) + (n-1) \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(t_i)$ 。

4.4 非等间距 GM(1,1)模型的内涵型预测公式

类似于定理 4.1，直接由非等间距 GM(1,1)的定义型方程推得模型的内涵型预测公式。

定理 4.1 非等间距 GM(1,1)模型的定义型方程等价于

$$x^{(0)}(t_i) = \frac{2(b - a \sum_{j=1}^{i-1} x^{(0)}(t_j) \Delta t_j)}{2 + a \Delta t_i}. \quad (4-13)$$

当得到参数 a 、 b 的估计值后，可以直接作为预测值公式计算模型的预测值 $\hat{x}^{(0)}(t_i)$ ， $i = 1, 2, \dots$ ，并称其为内涵型预测公式。

证明 对非等间距 GM(1,1)模型的定义型方程：

$$x^{(0)}(t_i) + az^{(1)}(t_i) = b, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

因为 $z^{(1)}(t_i) = 0.5(x^{(1)}(t_{i-1}) + x^{(1)}(t_i))$ ，所以

$$x^{(0)}(t_i) + \frac{a}{2}(x^{(1)}(t_{i-1}) + x^{(1)}(t_i)) = b.$$

又因为 $x^{(1)}(t_i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(t_j)\Delta t_j = x^{(1)}(t_{i-1}) + x^{(0)}(t_i)\Delta t_i$ ，代入上式，则得

$$x^{(0)}(t_i) + \frac{a}{2}(2x^{(1)}(t_{i-1}) + x^{(0)}(t_i)\Delta t_i) = b.$$

所以推导可得

$$x^{(0)}(t_i) = \frac{2(b - ax^{(1)}(t_{i-1}))}{2 + a\Delta t_i} = \frac{2(b - a \sum_{j=1}^{i-1} x^{(0)}(t_j)\Delta t_j)}{2 + a\Delta t_i}.$$

由上述过程知式(4-13)是直接由非等间距 GM(1,1)的定义型方程推导得出，并是一个递推式，当令初始条件为： $\hat{x}^{(0)}(t_1) = x^{(0)}(t_1)$ 及 $\Delta t_1 = 1$ ，则此递推式(4-13)可以作为模型的预测公式来计算预测值 $\hat{x}^{(0)}(t_i)$ 。定理得证。□

下面给出累积法非等间距 GM(1,1)模型的建模步骤：

第一步：输入原始非等间距序列 $x^{(0)}(t_i)$ 与间距 Δt_i ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中令初始间距： $\Delta t_1 = 1$ ；

第二步：由式(4-1)计算原始序列的一次累加生成序列(1-AGO)： $x^{(1)}(t_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，由式(4-5)计算背景值序列： $z^{(1)}(t_i)$ ， $i = 2, 3, \dots, n$ ；

第三步：由式(4-10)计算参数估计值；

第四步：将参数估计值代入递推式(4-13)，并令： $\hat{x}^{(0)}(t_1) = x^{(0)}(t_1)$ 为初始条件，计算得预测值： $\hat{x}^{(0)}(t_i)$ ， $i = 2, 3, \dots$ ；

第五步：计算各原始数据 $x^{(0)}(t_i)$ 与其预测值 $\hat{x}^{(0)}(t_i)$ 的相对误差：

$$e_i = \left| \frac{x^{(0)}(t_i) - \hat{x}^{(0)}(t_i)}{x^{(0)}(t_i)} \right| \times 100\%,$$

并计算其平均值： $\bar{e} = \sum_{i=2}^n e_i / (n - 1)$ 。

4.5 累积法非等间距 GM(1,1)模型的性质研究

下面采用矩阵分析方法研究累积法非等间距 GM(1,1)的性质。首先，给出原始序列的一次累加生成序列和背景值序列的矩阵表示式。一次累加生成与背景值序列分别为： $x^{(1)}(t_i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(t_j)\Delta t_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $z^{(1)}(t_i) = 0.5(x^{(1)}(t_{i-1}) + x^{(1)}(t_i))$, $i = 2, 3, \dots, n$, 可得以下结论。

定理 4.2 令原始序列构成的向量为：

$$X = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n)),$$

则一次累加生成序列构成的向量为：

$$\begin{aligned} & (x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_n)) \\ &= (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n)) \times \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 \\ 0 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_n \end{pmatrix} \quad (4-14) \\ &= XA_1, \end{aligned}$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 \\ 0 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_n \end{pmatrix}.$$

定理 4.3 背景值序列构成的向量为：

$$\begin{aligned} & (z^{(1)}(t_2), z^{(1)}(t_3), \dots, z^{(1)}(t_n)) = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n)) \\ & \times \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 \\ 0 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)} \quad (4-15) \\ &= XA_1A_2 = XA, \end{aligned}$$

其中

$$A = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 & \Delta t_1 \\ 0.5\Delta t_2 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 & \Delta t_2 \\ 0 & 0.5\Delta t_3 & \cdots & \Delta t_3 & \Delta t_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.5\Delta t_{n-1} & \Delta t_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.5\Delta t_n \end{pmatrix}_{n \times (n-1)}. \quad (4-16)$$

并且设 A 的第一行向量为:

$$\gamma = (\Delta t_1, \Delta t_1, \cdots, \Delta t_1)_{1 \times (n-1)} = \Delta t_1 (1, 1, \cdots, 1)_{1 \times (n-1)}. \quad (4-17)$$

定理 4.4 累积法非等间距 GM(1,1)模型的参数估计的矩阵表示式为:

$$a = \frac{X\alpha}{X\beta}, \quad b = \frac{XBX^T}{X\beta}, \quad (4-18)$$

其中, α 、 β 、 B 与原始序列 X 无关:

$$\begin{aligned} B &= A(\eta_2 \xi_1^T - \xi_2 \eta_1^T), \\ \alpha &= 0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1, \quad \beta = (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2), \\ \xi_1 &= (0, 1, 1, \cdots, 1)_{1 \times n}^T, \quad \xi_2 = (1, 1, \cdots, 1)_{1 \times (n-1)}^T, \\ \eta_1 &= (0, n-1, n-2, \cdots, 1)^T, \quad \eta_2 = (n-1, n-2, \cdots, 1)^T. \end{aligned}$$

定理 4.4 的证明与定理 3.4 类似。不过需注意, 虽然式(4-18)与式(3-16)中都有 $\beta = (n-1)A(\eta_2 - 0.5n\xi_2)$, $B = A(\eta_2 \xi_1^T - \xi_2 \eta_1^T)$, 但其中矩阵 A 的取值是不一样的。

式(4-18)中, α 、 β 、 B 与原始序列 X 无关, 所以, 此式给出了参数估计与原始序列的直接关系。由此直接关系可以较容易的得到累积法非等间距 GM(1,1)模型的几个性质。

定理 4.5 累积法非等间距 GM(1,1)模型的参数估计中, 发展系数 a 与初始值 $x^{(0)}(t_1)$ 及初始间距 Δt_1 无关, 灰作用量 b 是 $x^{(0)}(t_1)\Delta t_1$ 的线性函数, 即, $b = cx^{(0)}(t_1)\Delta t_1 + d$, 其中, c 、 d 与 $x^{(0)}(t_1)$ 及 Δt_1 无关。

证明 由定理 4.4, 计算可得:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0.5n(n-1)\xi_1 - (n-1)\eta_1 \\
 &= (n-1) \times (0, 1 - \frac{n}{2}, 2 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1)_{1 \times n}^T, \\
 \beta &= (n-1)A_1A_2(\eta_2 - 0.5n\xi_2) = (n-1) \times \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 \\ 0 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_n \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \frac{1}{4}(n-2, 2n-6, 2n-10, \dots, 10-2n, 6-2n, 2-n)_{1 \times n}^T \\
 &= (0, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)^T.
 \end{aligned}$$

可以看出, α 和 β 的第一行都是 0, 其它行与 $x^{(0)}(t_1)$ 及 Δt_1 无关. 又 $X = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n))$, 所以, $X\alpha$ 和 $X\beta$ 都与初始值 $x^{(0)}(t_1)$ 及初始间距 Δt_1 无关, 则发展系数: $a = \frac{X\alpha}{X\beta}$ 与初始值 $x^{(0)}(t_1)$ 及初始间距 Δt_1 无关.

因为

$$B = A(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T) = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2-n & 3-n & 4-n & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A(0, S),$$

令 $A = (\gamma, T)^T$, 其中, γ 表示 A 的第一行, 见式(4-17), 得

$$\gamma = (\Delta t_1, \Delta t_1, \dots, \Delta t_1)_{1 \times (n-1)} = \Delta t_1(1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)} = \Delta t_1\varphi,$$

其中,

$$\varphi = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times (n-1)}.$$

则

$$B = \begin{pmatrix} \Delta t_1\varphi \\ T \end{pmatrix} (0, S) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta t_1\varphi S \\ 0 & TS \end{pmatrix}.$$

令 $X_* = (x^{(0)}(t_2), x^{(0)}(t_3), \dots, x^{(0)}(t_n))$, 则

$$X = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n)) = (x^{(0)}(t_1), X_*),$$

则

$$\begin{aligned} XBX^T &= (x^{(0)}(t_1), X_*) \begin{pmatrix} 0 & \Delta t_1 \varphi S \\ 0 & TS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(0)}(t_1) \\ X_*^T \end{pmatrix} \\ &= x^{(0)}(t_1) \Delta t_1 \varphi S X_*^T + X_* T S X_*^T. \end{aligned}$$

又令 $\beta = (0, \varepsilon)^T$, 则 $X\beta = (x^{(0)}(t_1), X_*) \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^T \end{pmatrix} = X_* \varepsilon^T$, 所以可得

$$b = \frac{XBX^T}{X\beta} = \frac{x^{(0)}(t_1) \Delta t_1 \varphi S X_*^T + X_* T S X_*^T}{X_* \varepsilon^T} = cx^{(0)}(t_1) \Delta t_1 + d,$$

其中, 令

$$c = \frac{\varphi S X_*^T}{X_* \varepsilon^T}, \quad d = \frac{X_* T S X_*^T}{X_* \varepsilon^T}.$$

由于 $X_* = (x^{(0)}(t_2), x^{(0)}(t_3), \dots, x^{(0)}(t_n))$, 则 c 、 d 与 $x^{(0)}(t_1)$ 及 Δt_1 无关, 所以灰作用量 b 是 $x^{(0)}(t_1) \Delta t_1$ 的线性函数。定理得证。 \square

定理 4.6 设对原始非等间距序列 $X = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n))$ 作数乘变换后的序列为: $Y = (y^{(0)}(t_1), y^{(0)}(t_2), \dots, y^{(0)}(t_n))$, 其中 $y^{(0)}(t_i) = \rho x^{(0)}(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。对 X 与 Y 分别建立累积法非等间距 GM(1,1) 模型, Y 对应模型参数估计、预测值、相对误差分别记为: a_y 、 b_y 、 $\hat{y}^{(0)}(t_i)$ 、 e_{yi} 。则有下列结论:

(1) 发展系数的参数估计不受数乘变换影响, 但是灰作用量的估计会出现相应的数乘变换, 即

$$a_y = a, \quad b_y = \rho b.$$

(2) 预测值做相应的数乘变换, 即

$$\hat{y}^{(0)}(t_i) = \rho \hat{x}^{(0)}(t_i), \quad i = 1, 2, \dots.$$

(3) 数乘变换不影响相对误差, 即

$$e_{yi} = \frac{y^{(0)}(t_i) - \hat{y}^{(0)}(t_i)}{y^{(0)}(t_i)} = \frac{x^{(0)}(t_i) - \hat{x}^{(0)}(t_i)}{x^{(0)}(t_i)} = e_{xi}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

证明 由定理 4.4 得, α 、 β 、 B 与原始序列 X 无关, 所以, 数乘变换 $y^{(0)}(t_i) = \rho x^{(0)}(t_i)$ 后, 参数估计变为:

$$a_y = \frac{\rho X \alpha}{\rho X \beta} = a, \quad b_y = \frac{\rho^2 X B X^T}{\rho X \beta} = \rho b.$$

由定理 4.1, 变换后序列的模型的预测公式为:

$$y^{(0)}(t_i) = \frac{2(b_y - a_y \sum_{j=1}^{i-1} y^{(0)}(t_j) \Delta t_j)}{2 + a_y \Delta t_i} = \frac{2(\rho b - a \sum_{j=1}^{i-1} \rho x^{(0)}(t_j) \Delta t_j)}{2 + a \Delta t_i} = \rho x^{(0)}(t_i),$$

即, $\hat{y}^{(0)}(t_i) = \rho \hat{x}^{(0)}(t_i)$ 。显然, $e_{yi} = e_{xi}$, $i = 1, 2, \dots$ 。定理得证。 \square

定理 4.7 如果对非等间距原始数据 $x^{(0)}(t_i)$ 的相应时刻 t_i 作数乘变换: $t'_i = \rho t_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, 对累积法非等间距 GM(1,1)模型的影响为:

- (1) $a' = a/\rho$, $b' = b$;
- (2) $\hat{x}'^{(0)}(t_i) = \hat{x}^{(0)}(t_i)$;
- (3) $e'_{xi} = e_{xi}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

证明 由定理 4.4, 模型的参数估计为:

$$a = \frac{X\alpha}{X\beta} = \frac{X\alpha}{X(n-1)A_1A_2(\eta_2 - \frac{n}{2}\xi_2)},$$

$$b = \frac{XBX^T}{X\beta} = \frac{XA_1A_2(\eta_2\xi_1^T - \xi_2\eta_1^T)X^T}{X(n-1)A_1A_2(\eta_2 - \frac{n}{2}\xi_2)},$$

其中, 除了

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Delta t_1 & \Delta t_1 & \cdots & \Delta t_1 \\ 0 & \Delta t_2 & \cdots & \Delta t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_n \end{pmatrix},$$

其它变量: X 、 A_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 η_1 、 η_2 、 α 都与 Δt_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 无关。而由变换 $t'_i = \rho t_i$ 可得: $\Delta t'_i = \rho \Delta t_i$, 所以此变换对参数 a 、 b 的影响是:

$$a' = a/\rho, \quad b' = b.$$

由定理 4.1, 变换后序列的预测值为:

$$x'^{(0)}(t_i) = \frac{2(b' - a' \sum_{j=1}^{i-1} x^{(0)}(t_j) \Delta t'_j)}{2 + a' \Delta t'_i} = \frac{2(b - \frac{a}{\rho} \sum_{j=1}^{i-1} x^{(0)}(t_j) \rho \Delta t_j)}{2 + \frac{a}{\rho} \rho \Delta t_i} = x^{(0)}(t_i).$$

所以, 时刻的数乘变换 $t'_i = \rho t_i$ 对模型的预测值与相对误差都没有影响。定理得证。 \square

由定理 4.6 与定理 4.7 得到原始数据 $x^{(0)}(t_i)$ 和对应时刻 t_i 的数乘变换对累积法

非等间距GM(1,1)的参数估计、预测值及相对误差的影响。在实际应用中，可以对原始数据 $x^{(0)}(t_i)$ 和对应时刻 t_i 作数乘变换使计算简便，并降低病态性，且不改变预测的相对误差。

4.6 实例分析

这一节，将累积法非等间距 GM(1,1)模型应用于两个实例，原始数据分别来自文献 [197] 与 [199]，文献中都是采用最小二乘法非等间距 GM(1,1)模型进行预测，即参数估计为最小二乘法，预测公式为白化响应式，本文将与其进行比较。

例 1 福雷斯研究了许多材料的长寿命对称循环下温度对疲劳强度的影响。表 4-1 是钛合金疲劳强度随温度变化的实验数据，是一个非等间距序列 [197]。

表 4-1 钛合金疲劳强度随温度变化关系

T/°C	100	1306	170	210	240	270	310	340	380
σ_{-1}	560	557.54	536.10	516.10	505.60	486.10	467.40	453.80	436.40

表 4-2 本文模型与LSGM(1,1)的结果比较表

本文模型		LSGM(1,1)	
拟合值	相对误差(%)	拟合值	相对误差(%)
560	0	560	0
557.3452	0.0349	536.60	3.75
538.4781	0.4436	554.33	3.4
517.6457	0.2995	527.60	2.24
500.0373	1.1002	481.00	4.86
485.4579	0.1321	470.23	3.27
469.0243	0.3475	479.34	2.55
453.0699	0.1609	450.35	0.76
437.4327	0.3054	456.49	4.7
平均误差	0.3530		3.19

首先为了便于计算，令 $t = T/100$ ，即对时刻 t_i 作数乘变换，则观察数据的对应时刻转换为 $t_i = \{1.0, 1.3, 1.7, 2.1, 2.4, 2.7, 3.1, 3.4, 3.8\}$ ，由定理 4.7，时刻的数乘变换不影响本文模型的相对误差。

首先，由累积法得到的参数估计为： $a = 0.0986$ ， $b = 620.8217$ 。由式(4-13)，预测公式为：

$$\hat{x}^{(0)}(t_i) = \frac{2(620.8217 - 0.0986 \sum_{j=1}^{i-1} x^{(0)}(t_j) \Delta t_j)}{2 + a \Delta t_i}, \quad i = 2, 3, \dots$$

本文模型的预测结果与文献 [197] 中的最小二乘法 GM(1,1)(LSGM(1,1))模型结

果比较见表 4-2。本文模型的精度达到99.647%，比LSGM(1,1)精度更高。

例 2 某防洪大堤，位于地质条件很差的软土地区，需要在大堤全部施工阶段进行沉降观测，并通过变形分析和预报调节施工安全。11号点的部分沉降观测数据见表 4-3^[199]。

以天为单位，则时间间距为： $\Delta k_i = \{1, 10, 12, 11, 14, 8, 8, 14, 11, 14\}$ 。选用前 5 组数据建立本文模型，并预测后 5 组数据。累积法得到的参数估计为： $a = -0.0032$ ， $b = 523.0425$ ，拟合与预测值结果见表 4-4，本文模型的拟合与预测精度都很高。

表 4-3 南堤11号点沉降监测数据

观测时间(年.月.日)	观测值(mm)	观测时间(年.月.日)	观测值(mm)
2001.09.16	472.9	2001.11.10	617.4
2001.09.26	530.8	2001.11.18	626.1
2001.10.08	561.4	2001.12.02	633.1
2001.10.19	562.0	2001.12.23	712.5
2001.11.02	601.0	2002.01.06	739.1

表 4-4 拟合与预测结果

观测时间	拟合值	相对误差(%)	观测时间	预测值	相对误差(%)
2001.09.16	472.9	0	2001.11.10	617.9215	0.0845
2001.09.26	533.1163	0.4364	2001.11.18	633.9951	1.2610
2001.10.08	552.3090	1.6193	2001.12.02	656.8944	3.7584
2001.10.19	573.0625	1.9684	2001.12.23	683.7242	4.0387
2001.11.02	596.5836	0.7348	2002.01.06	711.7873	3.6954
平均误差		1.1897			2.5676

4.7 本章小结

1)本章将累积法引入非等间距 GM(1,1)模型的参数估计中，并由模型的定义型方程推得内涵型预测公式，建立了累积法非等间距 GM(1,1)模型。

2)给出了一次累加生成和背景值生成序列的矩阵表示式，得出这两个生成序列与原始序列的直接关系，并进一步得出累积法的参数估计与原始序列的直接关系，便于模型的性质分析；

3)基于参数估计与原始序列的直接关系，运用矩阵理论，得出累积法非等间距 GM(1,1)的参数——发展系数的估计值与初始条件无关，而另一参数——灰作用量是初始值的线性函数。当对原始序列作数乘变换，不会影响发展系数的估计，而灰作用量的估计会出现相应的数乘变换。对数据的时刻作数乘变换，不会影响灰作用量的估计，但是发展系数的估计会出现相反的数乘变换。对原始数据

和时刻的数乘变换都不会影响预测值的相对误差。这些性质有利于深入了解参数与原始数据的关系，并有利于实际应用，当原始数据较大时，可以对序列或时刻作数乘变换，方便计算和降低病态性。

4)两个实例表明累积法非等间距 GM(1,1)模型的应用效果良好。

第五章 基于序列转换的区间数序列GM(1,1)模型

5.1 引言

很多经济变量具有较强的波动性，比如，电力负荷、石油价格、黄金价格、人民币汇率、股票价格等，这些变量在短短一周内的取值都不适合只表示为一个精确数。若只以一个时间段的平均值作为一个原始数据，显然丢失了很多实际信息，用精确数来预测某一时段的平均值，对这些波动型变量来说，对实际决策的作用有限。所以，为了更好的决策，可以改进为区间预测。在工程技术方面，风能、电负荷、矿坑渗水量等，这些工程变量也具有很强的波动性，采用区间预测也更符合实际需要^[201-203]。

对区间预测的研究，主要从两个方面进行研究，一方面是基于精确数序列建模，再利用统计理论，如置信区间、满意度、误差分析等得到预测区间；另一方面是直接基于区间序列建模，得到预测区间。刘思峰、袁潮清、曾波等基于GM(1,1)模型对区间灰数序列的预测作了大量工作，主要思想是将区间灰数转换为精确数序列后建模，提出的序列转换方法有多种，如核与灰度、核与面积、发展趋势和认知程度等^[174-182]。这些在第一章中已经做了详细地综述。区间灰数与二元区间数的表现形式类似，所以对实现二元区间数序列的预测有一定的指导作用。

与其它经典的预测模型一样，GM(1,1)是建立在精确数的基础上，由于区间数运算体系还不完善，若用传统灰色模型的建模过程来构建区间数预测模型，就需要对区间数进行累加、累减、矩阵乘法以及求逆运算等，显然目前还无法实现。本章将对二元区间数和三元区间数序列进行转换，使其能用GM(1,1)建模。

5.2 区间数的定义

对区间数的研究已有很长的历史，Young^[204]、Zadeh^[205]、Moore^[206, 207]、Lowen^[208]等从1931年即开始了研究。下面给出区间数的相关定义。

定义 5.1^[204]对任意的 $x_L, x_R \in R$ 且 $x_L \leq x_R$ ，记 $\tilde{x} = [x_L, x_R] = \{x | x_L \leq x \leq x_R\}$ ，称 \tilde{x} 是一个二元区间数。其中， x_L 与 x_R 分别称为下界与上界，也可称为左界与右界，若 $x_L = x_R$ ，则区间数就成为一个实数。

定义 5.2^[204]区间数： $\tilde{x} = [x_L, x_R] = \{x | x_L \leq x \leq x_R\}$ ，还可以记为： $\tilde{x} = (c, r)$ ，其中， $c = \frac{1}{2}(x_L + x_R)$ 称为 \tilde{x} 的中点， $r = \frac{1}{2}(x_R - x_L)$ 称为 \tilde{x} 的区间半径，而

$2r = x_R - x_L$ 可称为区间长度。

定义 5.3 ^[204]对任意的 $x_L, x_M, x_R \in R$ 且 $x_L \leq x_M \leq x_R$, 记 $\tilde{x} = [x_L, x_M, x_R]$, 称 \tilde{x} 是一个三元区间数。其中, x_L 、 x_M 、 x_R 分别称为下、中、上界或左、中、右界。

对三元区间数, 中界点 x_M 并不是指区间的中点, 而是表示在区间中取值可能性最大的数, 就是信息偏好量, 也称为大元或特元 ^[209]。

5.3 区间数序列的转换

将区间数序列转换为精确数序列进行建模, 首先会想到直接用区间数的各个界点序列分别建模预测, 但是, 这种方法完全破坏了区间数的整体性, 更重要的是当分开对各界点进行预测时, 很可能会出现区间数的各个界点的相对位置的错乱。所以, 对序列的转换要考虑区间数的完整性、等价性和保证各界点的相对位置等方面。下面给出本文的转换过程。

5.3.1 二元区间数序列的转换

设二元区间数序列为: $X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\}$, 其中, $\tilde{x}(i) = [x_L(i), x_R(i)]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_L(i)$ 和 $x_R(i)$ 分别是左、右界点值, 计算中点值和区间的长度分别为:

$$m(i) = \frac{x_L(i) + x_R(i)}{2}, \quad (5-1)$$

$$l(i) = x_R(i) - x_L(i). \quad (5-2)$$

定义 5.4 设二元区间数序列 X 的中点和区间长度序列分别为:

$$M = \{m(1), m(2), \dots, m(n)\}, \quad L = \{l(1), l(2), \dots, l(n)\}.$$

这样将二元区间数序列转换成两个精确数序列:

$$X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \{m(1), m(2), \dots, m(n)\}, \\ L = \{l(1), l(2), \dots, l(n)\}. \end{cases}$$

二元区间数的还原过程为:

$$x_L(i) = m(i) - \frac{l(i)}{2}, \quad x_R(i) = m(i) + \frac{l(i)}{2}. \quad (5-3)$$

显然, $x_L(i) \leq x_R(i)$, 使预测能保证二元区间数的左、右界点的相对位置。

5.3.2 三元区间数序列的转换

设三元区间数序列为： $X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\}$ ，其中， $\tilde{x}(i) = [x_L(i), x_M(i), x_R(i)]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ， $x_L(i)$ 、 $x_M(i)$ 、 $x_R(i)$ 分别为三元区间数的左、中、右界点。

类似于物理概念，三元区间数的重心或均值为：

$$f(i) = \frac{x_L(i) + x_M(i) + x_R(i)}{3}. \quad (5-4)$$

三个界点之间的距离分别为：

$$p(i) = x_M(i) - x_L(i), \quad q(i) = x_R(i) - x_M(i). \quad (5-5)$$

定义 5.5 设三元区间数序列的重心序列和左、右区间长度序列分别为：

$$F = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}, \quad P = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}, \quad Q = \{q(1), q(2), \dots, q(n)\}.$$

将三元区间数序列转换为三个精确数序列：

$$X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\} \Leftrightarrow \begin{cases} F = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}, \\ P = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}, \\ Q = \{q(1), q(2), \dots, q(n)\}. \end{cases}$$

还原过程为：

$$\begin{aligned} x_L(i) &= f(i) - \frac{2p(i)}{3} - \frac{q(i)}{3}, & x_M(i) &= f(i) + \frac{p(i)}{3} - \frac{q(i)}{3}, \\ x_R(i) &= f(i) + \frac{p(i)}{3} + \frac{2q(i)}{3}. \end{aligned} \quad (5-6)$$

显然，还原过程保证了三元区间数的左、中、右界点的相对位置： $x_L(i) \leq x_M(i) \leq x_R(i)$ 。

从式(5-1)、(5-2)、(5-4)、(5-5)可以看出，转换后的序列实际上是区间数序列的各界点的加权平均，这样既能保持区间数的完整性，还能减弱界点的跳跃度，使转换后的序列更加平滑，从而提高预测精度。

5.4 建模过程

原始区间数序列转换成精确数序列后，分别对这些精确数序列建立累积积分 GM(1,1)(AMGM(1,1))模型，再根据还原公式，得出区间数序列的预测值。

这里只以中点序列 $M = \{m(1), m(2), \dots, m(n)\}$ 为例, 给出累积法 GM(1,1)模型(AMGM(1,1))的建模过程。

M 序列的累积法 GM(1,1)模型的定义型方程为:

$$m(i) + a_M z^{(1)}(i) = b_M, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5-7)$$

a_M 为发展系数, b_M 为灰作用量, 其中,

$$z^{(1)}(i) = 0.5(m^{(1)}(i) + m^{(1)}(i-1)), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (5-8)$$

$$m^{(1)}(i) = m(1) + m(2) + \dots + m(i) = \sum_{j=1}^i m(j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5-9)$$

下面, 运用累积法对模型(5-7)进行参数估计, 首先对定义型方程(5-7)两边作一阶、二阶累积和算子。

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}m(i) + a_M \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) &= b_M \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}m(i) + a_M \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) &= b_M \sum_{i=2}^n {}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5-10)$$

其中,

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n z^{(1)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 z^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z^{(1)}(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}m(i) = \sum_{i=2}^n m(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}m(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 m(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)m(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} = C_n^1 - 1 = n-1, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

令

$$X_r = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)} \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad Y_r = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}m(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}m(i) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (a_M, b_M)^T,$$

则式(5-10)的矩阵形式为:

$$X_r \mathbf{a} = Y_r. \quad (5-11)$$

所以，模型的参数估计为：

$$\mathbf{a} = (a_M, b_M)^T = X_r^{-1} Y_r. \quad (5-12)$$

定理 5.1 M 序列的累积法 $\mathbf{GM}(1,1)$ 模型的内涵型预测公式为：

$$\hat{m}(i) = \frac{2(2 - a_M)^{i-2}(b_M - a_M m(1))}{(2 + a_M)^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots. \quad (5-13)$$

定理 5.1 的证明类似于定理 3.1。对二元区间数序列： $X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\}$ ，其中 $\tilde{x}(i) = [x_L(i), x_R(i)]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。下面给出基于序列转换的二元区间数序列的预测过程如下：

1)由式 (5-1)、(5-2)，将区间序列 X 转换为中点序列 $M = \{m(1), m(2), \dots, m(n)\}$ 和区间长度序列 $L = \{l(1), l(2), \dots, l(n)\}$ ；

2)分别对 M 和 L 序列建立 $\mathbf{AMGM}(1,1)$ 模型，得到此两个精确数序列的预测值；

3)由还原公式(5-3)，得到区间数序列的左右界点的预测值。

对三元区间数序列： $X = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)\}$ ，其中， $\tilde{x}(i) = [x_L(i), x_M(i), x_R(i)]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，给出预测过程如下：

1)由式(5-4)、(5-5)，将三元区间数序列转换为重心序列和左、右区间长度序列： $F = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ ， $P = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ ， $Q = \{q(1), q(2), \dots, q(n)\}$ ；

2)分别对 F 、 P 、 Q 序列建立 $\mathbf{AMGM}(1,1)$ 模型，得到此三个精确数序列的预测值；

3)由还原公式(5-6)，得到三元区间数序列 X 的左、中、右界点的预测值。

5.5 实例分析

例 1 文献 [210]运用区间灰回归模型对台湾的LCD TV 需求进行了预测。现在运用本章提出的模型进行预测。原始数据见表 5-1。因为只有四年的数据，所以不能运用一般的统计预测模型，而 $\mathbf{GM}(1,1)$ 只需要四个数据即可建模。首先，原始区间数序列转换的中点和区间长度序列分别为：

$$M = \{81, 150, 393, 870\}, \quad L = \{16, 40, 80, 160\}.$$

基于两个精确数序列分别建立累积法 GM(1,1)模型(AMGM(1,1)), 由累积法得到的参数估计分别为:

$$\begin{aligned} M: \quad a_M &= -0.7973, \quad b_M = 34.4551. \\ L: \quad a_L &= -0.6667, \quad b_L = 16.0000. \end{aligned}$$

由式(5-13), 得到序列 M 和 L 的预测公式分别为:

$$\begin{aligned} \hat{m}(i) &= \frac{2(2 + 0.7973)^{i-2}(34.4551 + 0.7973 \times 81)}{(2 - 0.7973)^{i-1}}, \\ \hat{l}(i) &= \frac{2(2 + 0.6667)^{i-2}(16 + 0.6667 \times 16)}{(2 - 0.6667)^{i-1}}, \\ i &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

则序列 M 和 L 从 2001 至 2004 年的拟合值和 2005 年的预测值分别为:

$$\hat{M} = \{81, 164.7017, 383.0906, 891.0560, 2072.5668\}, \quad \hat{L} = \{16, 40, 80, 160, 320\}.$$

基于序列 M 和 L , 也建立最小二乘法 GM(1,1)模型, 由最小二乘法得到的参数估计分别为:

$$\begin{aligned} M: \quad a_M &= -0.7899, \quad b_M = 38.5140. \\ L: \quad a_L &= -0.6667, \quad b_L = 16.0000. \end{aligned}$$

由传统的预测公式——白化响应式, 得到序列 M 和 L 的白化响应式分别为:

$$\begin{aligned} \hat{m}(i) &= (81 + \frac{38.5140}{0.7899})(e^{0.7899i} - e^{0.7899(i-1)}), \\ \hat{l}(i) &= (16 + \frac{16}{0.6667})(e^{0.6667i} - e^{0.6667(i-1)}), \\ i &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

计算得序列 M 和 L 的从 2001 至 2004 年的拟合值和 2005 年的预测值为:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \{81, 156.1279, 343.9871, 757.8860, 1669.8044\}, \\ \hat{L} &= \{16, 37.9094, 73.8374, 143.8155, 280.1144\}. \end{aligned}$$

由二元区间数序列的还原过程(5-3), 分别得到 AMGM(1,1)和 GM(1,1)模型的区间数序列的拟合与预测结果, 见表 5-1。文献 [210]运用区间灰回归模型(IGRM)的预测结果也见表中。

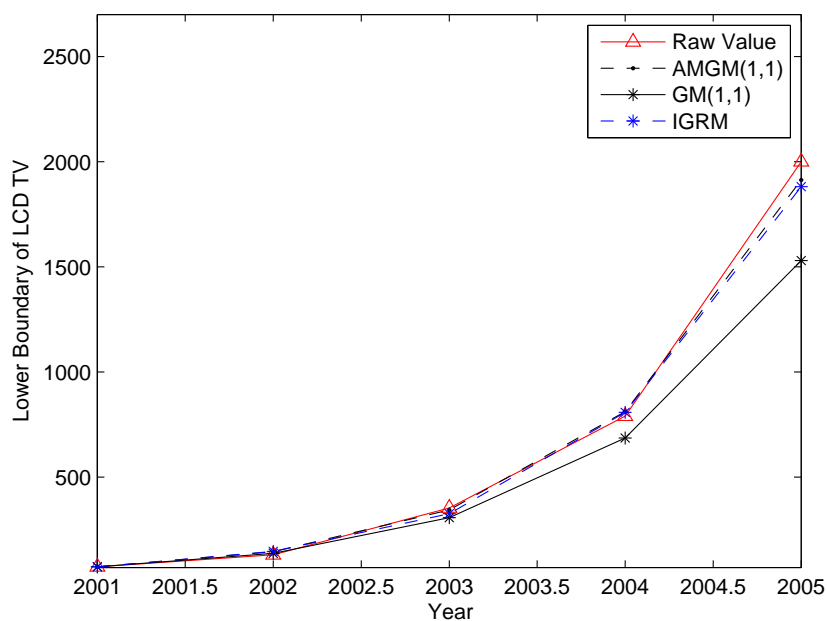


图 5-1 LCD TV的需求量下界预测曲线比较

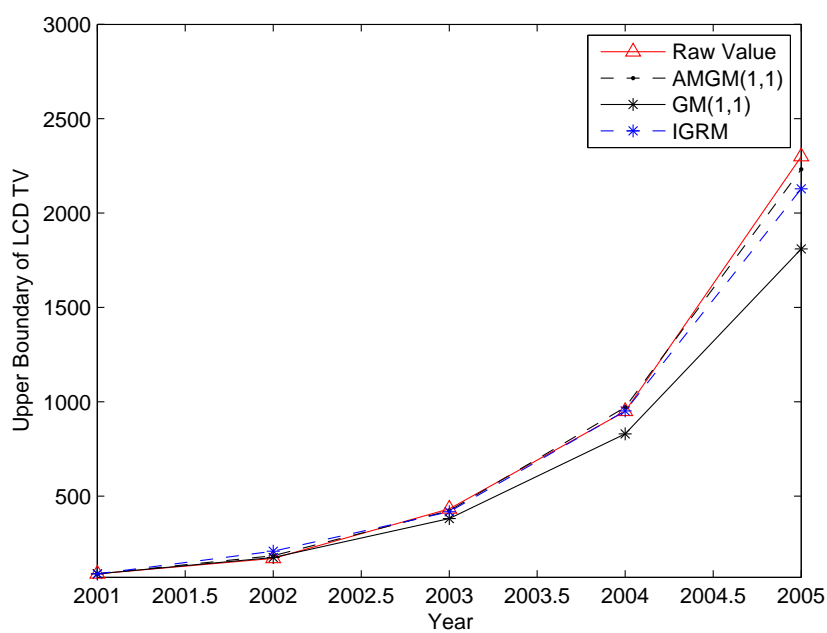


图 5-2 LCD TV的需求量上界预测曲线比较

表 5-1 LCD TV 需求的预测结果比较(单位: 万台)

年	2001	2002	2003
原始数据	[73,89]	[130,170]	[353,433]
AMGM(1,1)	[73,89]	[144.70, 184.70]	[343.09, 423.09]
相对误差(%)	0	11.31, 8.65	2.81, 2.29
GM(1,1)	[73,89]	[137.17, 175.08]	[307.07, 380.91]
相对误差(%)	0	5.52, 2.99	13.01, 12.03
IGRM	[73,89]	[146.68, 208.68]	[325.18, 417.70]
相对误差(%)	0	12.83, 22.44	7.88, 3.53
年	2004	2005	平均误差(%)
原始数据	[790,950]	>2000	
AMGM(1,1)	[811.06, 971.06]	[1912.57, 2232.57]	
相对误差(%)	2.67, 2.22		4.99
GM(1,1)	[685.98, 829.79]	[1529.75, 1809.86]	
相对误差(%)	13.17, 12.65		9.99
IGRM	[807.66, 951.92]	[1881.26, 2129.00]	
相对误差(%)	2.24, 1.28		8.37

由表 5-1, AMGM(1,1)、GM(1,1)和 IGRM 的拟合平均相对误差分别为: 4.99%、9.99%、8.37%。它们的拟合精度都很高。但是 AMGM(1,1)的精度最高。图 5-1 和图 5-2 分别给出了原始数据和 AMGM(1,1)、GM(1,1)和 IGRM 三个模型的预测值的左右界点曲线。可以看出三个模型都能反映原始序列的整体发展趋势, 而 AMGM(1,1)的拟合效果最好。文献 [210]指出LCD TV 的需求在 2005 年的第一、二季度已经达到 715 万, 以严格递增率计算预示 2005 年的需求将多于前两个季度的两倍。而且, 市场分析得 2005 年的需求会大于 2000 万。观察三个模型——AMGM(1,1)、GM(1,1)和 IGRM 在 2005 年的预测区间依次为: [1912.57, 2232.57]、[1529.75, 1809.86]、[1881.26, 2129.00](单位: 万)。显然, AMGM(1,1)的预测最符合实际。

例 2 中国国家统计局统计了每个月的居民消费价格指数(CPI)。以一年十二个月的统计值的最小值、平均值、最大值依次作为三元区间数的左、中、右界点, 形成三元区间数形式的原始序列, 比只用一年均值更有利于实际经济决策。我国 2002 年至 2006 年的 CPI 原始区间数序列为: [98.7, 99.2, 100], [100.2, 101.2, 103.2], [102.1, 103.9, 105.3], [100.9, 101.8, 103.9], [100.8, 101.5, 102.8]。

这里以 2002 至 2005 年的 4 个区间作为原始序列建立本章模型, 预测 2006 年的三元区间数。首先, 由式(5-4)、(5-5), 将 2002 至 2005 年的原始三元区间数序列, 转换为三个精确数序列为:

$$F = \{99.3, 101.5333, 103.7667, 102.2\}, P = \{0.5, 1.0, 1.8, 0.9\}, Q = \{0.8, 2.0, 1.4, 2.1\}.$$

基于上面三个序列分别建立 **AMGM(1,1)**模型，基于累积法的参数估计分别为：

$$F : a_F = -0.0032, b_F = 101.6803.$$

$$P : a_P = 0.0364, b_P = 1.3200.$$

$$Q : a_Q = -0.0290, b_Q = 1.7314.$$

三个序列的预测公式分别为：

$$\hat{f}(i) = \frac{2(2 + 0.0032)^{i-2}(101.6803 + 0.0032 \times 99.3)}{(2 - 0.0032)^{i-1}},$$

$$\hat{p}(i) = \frac{2(2 - 0.0364)^{i-2}(1.32 - 0.0364 \times 0.5)}{(2 + 0.0364)^{i-1}},$$

$$\hat{q}(i) = \frac{2(2 + 0.0290)^{i-2}(1.7314 + 0.0290 \times 0.8)}{(2 - 0.0290)^{i-1}}.$$

得到拟合和预测值为：

$$\hat{F} = \{99.3, 102.1679, 102.4996, 102.8325, 103.1664\},$$

$$\hat{P} = \{0.5, 1.2786, 1.2329, 1.1889, 1.1464\},$$

$$\hat{Q} = \{0.8, 1.7804, 1.8328, 1.8867, 1.9422\}.$$

与例 1 一样，也建立三个序列(F 、 P 、 Q)的基于最小二乘法的 **GM(1,1)**模型，最小二乘法得到的参数估计值分别为：

$$F : a_F = -0.0032, b_F = 101.6828.$$

$$P : a_P = 0.0326, b_P = 1.3111.$$

$$Q : a_Q = -0.0308, b_Q = 1.7250.$$

由三个序列的白化响应式得到 2002 至 2006 的拟合与预测值为：

$$\hat{F} = \{99.3, 102.1688, 102.4996, 102.8314, 103.1643\},$$

$$\hat{P} = \{0.5, 1.2739, 1.2330, 1.1934, 1.1551\},$$

$$\hat{Q} = \{0.8, 1.7769, 1.8325, 1.8898, 1.9489\}.$$

由三元区间数的界点还原过程(5-6)，得到CPI的预测结果见表 5-2。可以看出，**AMGM (1,1)**和 最小二乘法**GM (1,1)**模型有相同的高精度，平均相对误差均

只有0.98%。

分析可得，三个转换序列的发展系数 a 的绝对值较小，这代表序列的增长率较低，数据发展趋势较平缓，这就使得传统的白化响应式与本文的内涵型的预测公式可以相互替代，所以两个模型的精度相差不大。此情况在第三章第三节已经进行了论述。

表 5-2 CPI的预测结果

年	AMGM(1,1)	相对误差(%)
2002	[98.7, 99.2, 100]	0, 0, 0
2003	[100.7220, 102.0006, 103.7810]	0.52, 0.79, 0.56
2004	[101.0668, 102.2997, 104.1325]	1.01, 1.54, 1.11
2005	[101.4110, 102.5999, 104.4866]	0.51, 0.79, 0.56
2006	[101.7548, 102.9012, 104.8434]	0.95, 1.38, 1.99
平均误差		0.98
年	GM(1,1)	相对误差(%)
2002	[98.7, 99.2, 100]	0, 0, 0
2003	[100.7273, 102.0011, 103.7780]	0.53, 0.79, 0.56
2004	[101.0667, 102.2997, 104.1322]	1.01, 1.54, 1.11
2005	[101.4058, 102.5993, 104.4891]	0.5, 0.79, 0.57
2006	[101.7446, 102.8997, 104.8486]	0.94, 1.38, 1.99
平均误差		0.98

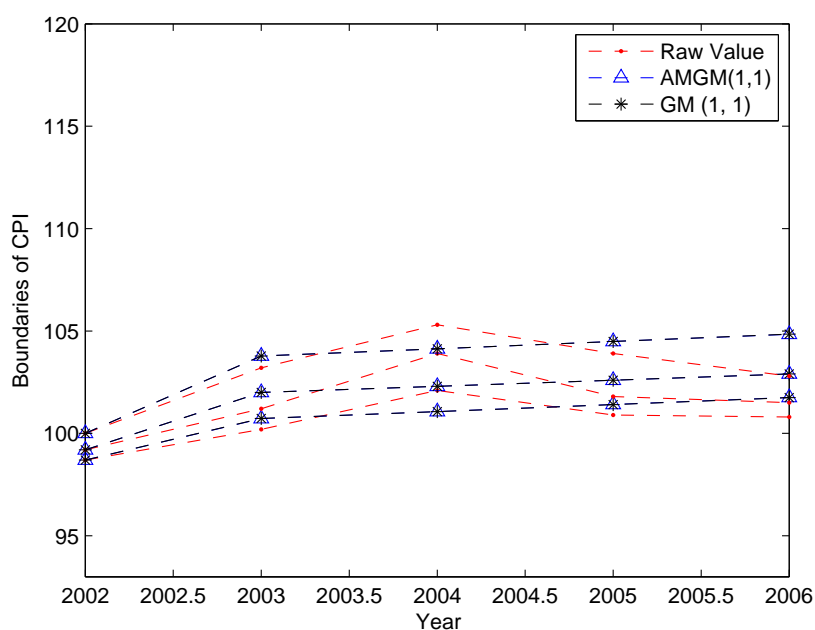


图 5-3 CPI区间预测曲线比较

图 5-3 同时给出了三元区间数三个界点在两种灰模型下的拟合情况，可以看出两个模型的拟合情况都只反映了序列的整体发展趋势，并没有反映序列的波动性，我们将在以后的章节进一步改进模型。

5.6 本章小结

本章提出基于序列转换的区间数序列的 $GM(1,1)$ 模型。将区间数序列转换成等价的精确数序列，转换序列实际上是区间数界点的加权均值，减弱了区间数界点的跳跃度，同时保持了区间数的整体性，其还原过程保证了区间数的各界点的相对位置。 $GM(1,1)$ 模型能至少对四个数据建模，两个实际应用的例子：LCD TV 的需求预测和 CPI 的预测，都只用了四个原始数据，预测结果精度较高。这是模型的优势所在。但是可以看出， $GM(1,1)$ 模型的拟合曲线能反映原始序列的整体发展趋势，却没有反映序列的波动规律，这是 $GM(1,1)$ 模型的缺点所在，在后面的章节将对其改进。

第六章 基于参数转换的区间数序列GM(1,1)模型

6.1 引言

第五章基于序列转换实现了 GM(1,1)模型对区间数序列的预测,这种转换方法并没有在实质上改变 GM(1,1)模型只适用于精确数序列的性质。本章将通过改进模型的参数取值形式,实现对二元及三元区间数序列的预测,不需将区间数序列转换成精确数序列。

GM(1,1)模型包含两个参数:发展系数和灰作用量。发展系数反映序列的发展趋势,本文将发展系数依然取为精确数,取值是区间数各个界点序列的发展系数的加权均值,能反映各界点序列的整体发展趋势,保持了区间数的整体性。灰作用量是对系统的灰信息覆盖,在这里取为与原始区间数相同类型的区间数,符合其作用内涵。经过此参数转换,GM(1,1)模型即可直接适用于区间数序列预测。

本章的结构为:第二节给出基于参数转换的二元区间数 GM(1,1)模型(BIFGM(1,1))的建模过程,包括发展系数的确定、灰作用量的确定及预测公式;第三节给出 BIGM(1,1)模型的实例分析;第四节给出基于参数转换的三元区间数 GM(1,1)模型(TIGM(1,1));第五节给出 TIGM(1,1)模型的实例分析;第六节给出结论。

6.2 BIGM(1,1)建模过程

6.2.1 发展系数的确定

设原始二元区间数序列为: $X^{(0)} = \{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), \dots, \tilde{x}^{(0)}(n)\}$, 其中

$$\tilde{x}^{(0)}(i) = [x_L^{(0)}(i), x_R^{(0)}(i)], i = 1, 2, \dots, n.$$

原始序列的一次累加生成序列为:

$$X^{(1)} = \{\tilde{x}^{(1)}(1), \tilde{x}^{(1)}(2), \dots, \tilde{x}^{(1)}(n)\},$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i \tilde{x}^{(0)}(k) &= \left[\sum_{k=1}^i x_L^{(0)}(k), \sum_{k=1}^i x_R^{(0)}(k) \right] = [x_L^{(1)}(i), x_R^{(1)}(i)], \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6-1)$$

一次累加生成序列的白化背景值序列为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}^{(1)}(i) &= 0.5(\tilde{x}^{(1)}(i-1) + \tilde{x}^{(1)}(i)) \\
 &= [0.5(x_L^{(1)}(i-1) + x_L^{(1)}(i)), 0.5(x_R^{(1)}(i-1) + x_R^{(1)}(i))] \\
 &= [0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_L^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_L^{(0)}(k)), 0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_R^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_R^{(0)}(k))] \\
 &= [z_L^{(1)}(i), z_R^{(1)}(i)], \quad i = 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{6-2}$$

下面基于累积法分别求出二元区间数左、右界点序列的 **GM(1,1)**模型的发展系数： a_L 、 a_R 。**GM(1,1)**的定义型方程为：

$$x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b, \quad i = 2, 3, \dots, n. \tag{6-3}$$

分别基于左、右界点序列，对定义型方程两边作一阶、二阶累积和，得到下列两个方程组：

$$\begin{aligned}
 \text{I:} \quad & \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) + a_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i) = b_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}(i), \\
 & \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_L^{(0)}(i) + a_L \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_L^{(1)}(i) = b_L \sum_{i=2}^n {}^{(2)}(i). \\
 \text{II:} \quad & \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) + a_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i) = b_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}(i), \\
 & \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_R^{(0)}(i) + a_R \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_R^{(1)}(i) = b_R \sum_{i=2}^n {}^{(2)}(i).
 \end{aligned}$$

得参数估计为

$$\begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} = X_L^{-1}Y_L, \quad \begin{pmatrix} a_R \\ b_R \end{pmatrix} = X_R^{-1}Y_R, \tag{6-4}$$

其中

$$\begin{aligned}
 X_L &= \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}(i) \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_L^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}(i) \end{pmatrix}, \quad Y_L = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_L^{(0)}(i) \end{pmatrix}, \\
 X_R &= \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}(i) \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_R^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}(i) \end{pmatrix}, \quad Y_R = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_R^{(0)}(i) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_L^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 z_L^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z_L^{(1)}(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_R^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 z_R^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z_R^{(1)}(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_L^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 x_L^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x_L^{(0)}(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n x_R^{(0)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_R^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 x_R^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x_R^{(0)}(i),$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} = C_n^1 - 1 = n - 1, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

现取二元区间数 GM(1,1)模型(BIGM(1,1))的整体发展系数 a 的估计值为 a_L 与 a_R 的加权均值, 即

$$a = (1 - \beta)a_L + \beta a_R, \quad (6-5)$$

其中, 若决策者偏好于区间数上限的发展态势, 则取 $1 > \beta > 0.5$; 若决策者偏好于区间数下限的发展态势, 则取 $0 < \beta < 0.5$ 。一般可取 $\beta = 0.5$ 。

注: BIGM(1,1)的整体发展系数 a 取为区间数左、右界点序列的发展系数的加权均值, 能够反映区间数序列的整体发展趋势。左、右界点序列的预测都将采用此整体发展系数, 而不采用各自的发展系数。因为当左、右界点序列的发展趋势相差较大时, 分别用各自的发展系数, 势必导致预测中左、右界点的错乱。

6.2.2 灰作用量的确定

下面基于累积法确定模型的另一参数——灰作用量。灰作用量是对系统的灰信息覆盖, 我们将由左、右界点序列和整体发展系数同时确定。

GM(1,1)模型的定义型方程为: $x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b$, $i = 2, 3, \dots, n$ 。当整体发展系数 a 确定后, 方程只余一个未知参数, 所以, 只需对方程两边作一阶累积和, 分别代入区间数的左、右界点序列后, 得到

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i) = b'_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad (6-6)$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i) = b'_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}. \quad (6-7)$$

由式(6-6)、(6-7)得到

$$b'_L = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i)}{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i)}{n-1}, \quad (6-8)$$

$$b'_R = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i)}{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=2}^n x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i)}{n-1}. \quad (6-9)$$

这样, BIGM(1,1)模型的灰作用量确定为: $\tilde{b} = [b'_L, b'_R]$ 。

注: 这里的 b'_L 、 b'_R 不同于式(6-4)中的 b_L 、 b_R , 而是基于整体发展系数 a 作的修正。

6.2.3 预测公式

下面给出 BIGM(1,1)模型的内涵型预测公式, 其推导过程参照定理 3.1。

定理 6.1 BIGM(1,1)模型的内涵型预测公式为:

$$\hat{x}_L^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_L - ax_L^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, \quad \hat{x}_R^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_R - ax_R^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}},$$

$$i = 2, 3, \dots. \quad (6-10)$$

定理 6.2 BIGM(1,1)模型的内涵型预测公式满足: $\hat{x}_L^{(0)}(i) \leq \hat{x}_R^{(0)}(i)$ 。

证明 因为 GM(1,1)模型的发展系数的界区为^[4]: $a \in (\frac{-2}{n+1}, \frac{2}{n+1})$, 其中 n 为原始建模数据的个数, 所以

$$\frac{2(2-a)^{i-2}}{(2+a)^{i-1}} > 0, \quad i = 2, 3, \dots.$$

现在比较 $b'_L - ax_L^{(0)}(1)$ 与 $b'_R - ax_R^{(0)}(1)$, 由式(6-8)、(6-9)可得:

$$b'_L - ax_L^{(0)}(1) = \frac{\sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i) - a(n-1)x_L^{(0)}(1)}{n-1}, \quad (6-11)$$

$$b'_R - ax_R^{(0)}(1) = \frac{\sum_{i=2}^n x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i) - a(n-1)x_R^{(0)}(1)}{n-1}. \quad (6-12)$$

又因为 $z_L^{(1)}(i) = 0.5(x_L^{(1)}(i-1) + x_L^{(1)}(i)) = 0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_L^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_L^{(0)}(k))$, $i = 2, 3, \dots, n$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i) - (n-1)x_L^{(0)}(1) &= 0.5 \sum_{i=2}^n [(\sum_{k=2}^{i-1} x_L^{(0)}(k) + \sum_{k=2}^i x_L^{(0)}(k))] \\ &= 0.5 [\sum_{i=3}^n \sum_{k=2}^{i-1} x_L^{(0)}(k) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^i x_L^{(0)}(k)]. \end{aligned} \quad (6-13)$$

同样,

$$\sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i) - (n-1)x_R^{(0)}(1) = 0.5 [\sum_{i=3}^n \sum_{k=2}^{i-1} x_R^{(0)}(k) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^i x_R^{(0)}(k)]. \quad (6-14)$$

当 $0 \leq a < 2$ 时, 因为 $x_L^{(0)}(i) \leq x_R^{(0)}(i)$, 有 $\sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i) \leq \sum_{i=2}^n x_R^{(0)}(i)$, 并且由式(6-13)、(6-14)得:

$$\sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i) - (n-1)x_L^{(0)}(1) \leq \sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i) - (n-1)x_R^{(0)}(1).$$

所以, 由式(6-11)、(6-12)得:

$$\hat{x}_L^{(0)}(i) \leq \hat{x}_R^{(0)}(i).$$

当 $-2 < a < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{x}_R^{(0)}(i) - \hat{x}_L^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}}{(2+a)^{i-1}} [(b'_R - ax_R^{(0)}(1)) - (b'_L - ax_L^{(0)}(1))] \\ &= \frac{2(2-a)^{i-2}}{(2+a)^{i-1}} [(b'_R - b'_L) - a(x_R^{(0)}(1) - x_L^{(0)}(1))]. \end{aligned} \quad (6-15)$$

则 $\hat{x}_R^{(0)}(i) - \hat{x}_L^{(0)}(i) \geq 0$, 所以也有

$$\hat{x}_L^{(0)}(i) \leq \hat{x}_R^{(0)}(i).$$

所以得证 BIGM(1,1)模型的内涵型预测公式(6-10)保证了预测区间的左、右界点位置不会错乱。 □

最后给出 BIGM(1,1)模型的预测步骤:

- 1) 由式(6-1)计算序列的一次累加序列;
- 2) 由式(6-2)计算白化背景值序列;
- 3) 由式(6-4)、(6-5)得整体发展系数;
- 4) 由式(6-8)、(6-9)得灰作用量的估计值;

5)由式(6-10)得预测区间的左、右界点。

6.3 BIGM(1,1)模型的应用实例

例 1 从 1998 年至 2002 年，某地区的某种能源价格(千元 / 吨)变动序列为：[1.05, 1.09], [1.05, 1.10], [1.09, 1.15], [1.10, 1.20], [1.15, 1.25]。此数据来源于文献 [211]。现在运用本章提出的 BIGM(1,1)模型对该序列进行预测。预测步骤如下：

1)由式(6-1)，对原始数据做一次累加生成，得一次累加生成序列为：

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \{\tilde{x}^{(1)}(1), \tilde{x}^{(1)}(2), \dots, \tilde{x}^{(1)}(5)\} \\ &= \{[1.05, 1.09], [2.10, 2.19], [3.19, 3.34], [4.29, 4.54], [5.44, 5.79]\}. \end{aligned}$$

2)由式(6-2)，对一次累加生成序列做均值生成得白化背景值序列：

$$\{\tilde{z}^{(1)}(2), \tilde{z}^{(1)}(3), \dots, \tilde{z}^{(1)}(5)\} = \{[1.575, 1.64], [2.645, 2.765], [3.74, 3.94], [4.865, 5.165]\}.$$

3)由式(6-4)得左、右界点序列的参数估计分别为：

$$\begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0283 \\ 1.0069 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_R \\ b_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0426 \\ 1.0313 \end{pmatrix}.$$

则由式(6-5)： $a = (1 - \beta)a_L + \beta a_R$ ，其中，取 $\beta = 0.5$ ，得整体发展系数为：

$$a = -0.0354.$$

4)由式(6-8)、(6-9)得左、右界点序列的灰作用量估计为：

$$b'_L = 0.9840, \quad b'_R = 1.0554.$$

5)由预测公式(6-10)，得模型的拟合区间序列。

现将结果列入表 6-1，并将文献 [211]中的基于区间灰数列的 GM(1,1)模型(GMBIGN(1,1))的拟合结果也列入表 6-1。

本文的 BIGM(1,1)模型的平均相对误差为0.88%，小于文献 [211]中的 GM-BIGN(1,1)模型的平均误差：2.52%。另外，GMBIGN(1,1)模型是先将区间序列转换为精确数序列，没有在实质上改变 GM(1,1)模型的只适用于精确数数列的特性。

下面将此例采用第五章基于序列转换的方法进行预测。结果见表 6-2。

表 6-2 的结果中，第五章基于序列转换的方法比本章基于参数转换的方法预测精度略高。分析得，这是因为基于序列转换的预测结果同时与两个转换序列的发展系数有关，而基于参数转换的方法中，两个界点序列的预测公式共用相同的发展系数，这样虽然考虑了区间数序列的整体趋势，却弱化了两个界点序列各自的发展趋势。但是，基于参数转换的方法不需要先将区间数序列转换为精确数序列。为了进一步提高基于参数转换的 BIGM(1,1)模型的预测精度，我们将在第七章继续对其进行改进。

表 6-1 BIGM(1,1)拟合结果

BIGM(1,1)拟合值	相对误差	GMBIGN(1,1)拟合值	相对误差(%)
[1.05,1.09]	0	[1.05, 1.09]	0
[1.0628,1.0892]	1,1.25	[1.1025,1.1952]	4.45,4.66
[1.1011,1.1285]	1.19,0.34	[1.1034,1.2002]	0.85,0.9
[1.1408,1.1692]	1.44,0.38	[1.1043,1.2062]	0.58,0.64
[1.1819,1.2113]	0.53,0.92	[1.1052,1.2122]	3.87,4.21
平均相对误差	0.88		2.52

表 6-2 基于参数转换与序列转换的二元区间数序列GM(1,1)结果比较

BIGM(1,1)拟合值	相对误差	第五章模型拟合值	相对误差(%)
[1.05,1.09]	0	[1.05, 1.09]	0
[1.0628,1.0892]	1,1.25	[1.0502,1.1022]	0.0184,0.2
[1.1011,1.1285]	1.19,0.34	[1.0821,1.1485]	0.72,0.13
[1.1408,1.1692]	1.44,0.38	[1.1135,1.1981]	1.22,0.16
[1.1819,1.2113]	0.53,0.92	[1.1438,1.2517]	0.54,0.14
平均相对误差	0.88		0.39

6.4 TFGM(1,1)建模过程

6.4.1 发展系数的确定

设原始三元区间数序列为 $X^{(0)} = \{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), \dots, \tilde{x}^{(0)}(n)\}$ ，其中 $\tilde{x}^{(0)}(i) = [x_L^{(0)}(i), x_M^{(0)}(i), x_R^{(0)}(i)]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其一次累加生成序列和白化背景值序列分别为：

$$\tilde{x}^{(1)}(i) = [x_L^{(1)}(i), x_M^{(1)}(i), x_R^{(1)}(i)] = \left[\sum_{k=1}^i x_L^{(0)}(k), \sum_{k=1}^i x_M^{(0)}(k), \sum_{k=1}^i x_R^{(0)}(k) \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (6-16)$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}^{(1)}(i) &= [z_L^{(1)}(i), z_M^{(1)}(i), z_R^{(1)}(i)] = [0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_L^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_L^{(0)}(k)), \\ &0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_M^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_M^{(0)}(k)), 0.5(\sum_{k=1}^{i-1} x_R^{(0)}(k) + \sum_{k=1}^i x_R^{(0)}(k))], \\ &i = 2, 3, \dots, n.\end{aligned}\quad (6-17)$$

下面，基于累积法分别求出三元区间数左、中、右界点序列的发展系数： a_L 、 a_M 、 a_R 。 $\text{GM}(1,1)$ 模型的定义型方程为：

$$x^{(0)}(i) + az^{(1)}(i) = b, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (6-18)$$

分别基于左、中、右界点序列，对定义型方程两边作一阶、二阶累积和，得到下列三个方程组：

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) + a_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_L^{(1)}(i) = b_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_L^{(0)}(i) + a_L \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_L^{(1)}(i) = b_L \sum_{i=2}^n {}^{(2)},$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_M^{(0)}(i) + a_M \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_M^{(1)}(i) = b_M \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_M^{(0)}(i) + a_M \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_M^{(1)}(i) = b_M \sum_{i=2}^n {}^{(2)},$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_R^{(0)}(i) + a_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_R^{(1)}(i) = b_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_R^{(0)}(i) + a_R \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_R^{(1)}(i) = b_R \sum_{i=2}^n {}^{(2)}.$$

得参数估计为

$$\begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} = X_L^{-1} Y_L, \quad \begin{pmatrix} a_M \\ b_M \end{pmatrix} = X_M^{-1} Y_M, \quad \begin{pmatrix} a_R \\ b_R \end{pmatrix} = X_R^{-1} Y_R. \quad (6-19)$$

其中 X_L^{-1} 、 Y_L 、 X_R^{-1} 、 Y_R 的取值与式(6-4)一致，其他

$$\begin{aligned}X_M &= \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_M^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(1)} \\ \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_M^{(1)}(i) & -\sum_{i=2}^n {}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad Y_M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_M^{(0)}(i) \\ -\sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_M^{(0)}(i) \end{pmatrix}, \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)}z_M^{(1)}(i) &= \sum_{i=2}^n z_M^{(1)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}z_M^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 z_M^{(1)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)z_M^{(1)}(i), \\ \sum_{i=2}^n {}^{(1)}x_L^{(0)}(i) &= \sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i), \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)}x_L^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n C_{n-i+1}^1 x_L^{(0)}(i) = \sum_{i=2}^n (n-i+1)x_L^{(0)}(i),\end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} = C_n^1 - 1 = n - 1, \quad \sum_{i=2}^n {}^{(2)} = C_{n+2-1}^2 - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

取 TIGM(1,1)模型的整体发展系数 a 的估计值为 a_L , a_M 与 a_R 的加权均值, 即

$$a = \alpha a_L + \beta a_M + \gamma a_R, \quad (6-20)$$

其中, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。由于三元区间数的中界点, 也称为三元中的大元, 在三界点中起主导作用, 所以权重 β 的取值建议大于另两个权重。

6.4.2 灰作用量的确定

下面依然运用累积法, 确定模型的另一参数——灰作用量。对 GM(1,1)模型的定义型方程两边作一阶累积和, 分别代入区间数的左、中、右界点序列, 得到

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_L^{(1)}(i) = b'_L \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad (6-21)$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_M^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_M^{(1)}(i) = b'_M \sum_{i=2}^n {}^{(1)}, \quad (6-22)$$

$$\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_R^{(1)}(i) = b'_R \sum_{i=2}^n {}^{(1)}. \quad (6-23)$$

则得到

$$b'_L = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_L^{(1)}(i)}{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=2}^n x_L^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_L^{(1)}(i)}{n-1}, \quad (6-24)$$

$$b'_M = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_M^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_M^{(1)}(i)}{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=2}^n x_M^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_M^{(1)}(i)}{n-1}, \quad (6-25)$$

$$b'_R = \frac{\sum_{i=2}^n {}^{(1)} x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n {}^{(1)} z_R^{(1)}(i)}{\sum_{i=2}^n {}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=2}^n x_R^{(0)}(i) + a \sum_{i=2}^n z_R^{(1)}(i)}{n-1}. \quad (6-26)$$

这样, TIGM(1,1)模型的灰作用量确定为: $\tilde{b} = [b'_L, b'_M, b'_R]$ 。这里的

b'_L 、 b'_M 、 b'_R 不同于式(6-19)中的 b_L 、 b_M 、 b_R ，是根据整体发展系数 a 做的修正。

定理 6.3 TIGM(1,1)模型的内涵型预测公式为：

$$\begin{aligned}\hat{x}_L^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_L - ax_L^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, & \hat{x}_M^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_M - ax_M^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, \\ \hat{x}_R^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_R - ax_R^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}}, & i &= 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (6-27)$$

定理 6.3 的推导参照定理 3.1。

定理 6.4 TIGM(1,1)模型的内涵型预测公式满足： $\hat{x}_L^{(0)}(i) \leq \hat{x}_M^{(0)}(i) \leq \hat{x}_R^{(0)}(i)$ 。

定理 6.4 的证明与定理 6.2 类似，保证了 TIGM(1,1)模型的预测区间的左、中、右界点位置不会错乱。

TIGM(1,1)模型的预测步骤为：

- 1)由式(6-16)计算序列的一次累加序列；
- 2)由式(6-17)计算白化背景值序列；
- 3)由式(6-19)、(6-20)得整体发展系数；
- 4)由式(6-24)、(6-25)、(6-26)估计灰作用量；
- 5)由式(6-27)得预测区间的左、中、右界点。

6.5 TIGM(1,1)模型的应用实例

中国国家统计局统计了每个月的居民消费价格指数。以一年十二个月的最小值、平均值、最大值依次作为三元区间数的左、中、右界点，形成三元区间数形式的原始序列，三元区间数能同时反映一年中 CPI 的最小值、均值、最大值，比只用一年的均值来反映 CPI，对经济决策更有利。这里以 1997 至 2010 年的区间值作为原始区间数据建立本文的 TIGM(1,1)模型，预测 2011 与 2012 年的三元区间数。

首先，对 1997 至 2010 年三元区间数序列的三个界点序列： $x_L^{(0)}(i)$ 、 $x_M^{(0)}(i)$ 、 $x_R^{(0)}(i)$ ，由式(6-19)得参数估计值分别为：

$$a_L = -0.0022, \quad a_M = -0.0037, \quad a_R = -0.0048,$$

$$b_L = 98.4826, \quad b_M = 98.7580, \quad b_R = 99.4964.$$

由式(6-20)计算得三元区间数序列的整体发展系数为:

$$a = (a_L + 2a_M + a_R)/4 = -0.0036.$$

其中, 中界点(大元)序列的发展系数 a_M 的权重大于左、右界点序列的发展系数: a_L 、 a_R 。

由式(6-24)、(6-25)、(6-26)得左、中、右界点序列的灰作用量估计为:

$$b'_L = 97.4341, \quad b'_M = 98.8310, \quad b'_R = 100.4267.$$

则由式(6-27)得到TIGM(1,1)模型的预测区间的三界点为:

$$\begin{aligned}\hat{x}_L^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_L - ax_L^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}} = \frac{2(2+0.0036)^{i-2}(97.4341 + 0.0036 \times 100.4)}{(2-0.0036)^{i-1}}, \\ \hat{x}_M^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_M - ax_M^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}} = \frac{2(2+0.0036)^{i-2}(98.7580 + 0.0036 \times 102.8)}{(2-0.0036)^{i-1}}, \\ \hat{x}_R^{(0)}(i) &= \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_R - ax_R^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}} = \frac{2(2+0.0036)^{i-2}(100.4267 + 0.0036 \times 105.9)}{(2+0.0062)^{i-1}}, \\ i &= 2, 3, \dots\end{aligned}$$

表 6-3 原始序列与 TIGM (1,1)模型的拟合与预测结果

年	原始数据	预测值	相对误差(%)
1997	[100.4, 102.8, 105.9]	[100.4, 102.8, 105.9]	0, 0, 0
1998	[98.5, 99.2, 100.7]	[97.97, 99.37, 100.98]	0.54, 0.18, 0.28
1999	[97.8, 98.6, 99.4]	[98.31, 99.73, 101.34]	0.53, 1.14, 1.95
2000	[99.7, 100.4, 101.5]	[98.66, 100.08, 101.70]	1.04, 0.32, 0.20
2001	[99.4, 100.7, 101.7]	[99.02, 100.44, 102.06]	0.39, 0.26, 0.36
2002	[98.7, 99.2, 100]	[99.37, 100.80, 102.43]	0.68, 1.61, 2.43
2003	[100.2, 101.2, 103.2]	[99.72, 101.15, 102.79]	0.48, 0.05, 0.39
2004	[102.1, 103.9, 105.3]	[100.08, 101.51, 103.16]	1.98, 2.30, 2.03
2005	[100.9, 101.8, 103.9]	[100.43, 101.88, 103.53]	0.46, 0.07, 0.36
2006	[100.8, 101.5, 102.8]	[100.79, 102.24, 103.89]	0, 0.73, 1.06
2007	[102.2, 104.8, 106.9]	[101.15, 102.60, 104.26]	1.03, 2.10, 2.47
2008	[101.2, 105.9, 108.7]	[101.51, 102.97, 104.64]	0.31, 2.77, 3.74
2009	[98.2, 99.3, 101.9]	[101.87, 103.33, 105.01]	3.74, 4.06, 3.05
2010	[101.5, 103.3, 105.1]	[102.23, 103.70, 105.38]	0.72, 0.39, 0.27
2011	[104.1, 105.4, 106.5]	[102.60, 104.07, 105.76]	1.44, 1.26, 0.70
2012	[101.8, 102.6, 104.5]	[102.96, 104.44, 106.13]	1.14, 1.80, 1.56
平均相对误差		1997-2010: 1.19%; 2011-2012: 1.32%	

表 6-3 给出了 TIGM(1,1)模型的拟合与预测结果。从 1997 至 2010 年的拟合值

平均相对误差为 1.19%，2011 与 2012 年的预测值平均相对误差为 1.32%，精度都达到 98% 以上。所以 TIGM(1,1)模型的预测是有效的。

6.6 本章小结

本章通过转换 GM(1,1)模型的参数取值形式，直接由区间数序列确定了模型的参数，不需将区间数序列转换为精确数序列，提出了二元、三元区间数 GM(1,1)模型(BIGM(1,1)与 TIGM(1,1))，在实质上将 GM(1,1)模型的适用序列拓广到区间数序列。

第七章 基于马尔可夫BIGM(1,1)模型的波动型区间数序列预测

7.1 引言

由 GM(1,1)模型的预测公式可知, GM(1,1)模型是以指数型曲线拟合原始序列,能反映事物发展的整体趋势,但是没有考虑发展的波动规律,因此对波动性较大的序列预测精度较低。在 GM(1,1)模型的适用范围的大量研究中已经指出此点,第一章已有论述^[126-130]。并且,对于第六章提出的 BIGM(1,1)与 TIGM(1,1)模型,由于其整体发展系数是区间数几个界点序列的发展系数的加权均值,所以弱化了各个界点序列的波动性。为了使 BIGM(1,1)模型适用于波动型时间序列,本章将对 BIGM(1,1)模型进行改进。

对于精确数序列 GM(1,1)模型,如何实现波动性预测,现有的研究一般从两方面研究,一是对数据进行预处理,增加光滑度,但是对于波动很大的序列,预处理也失效。所以,很多学者提出另一种方法:与其他适合于波动型序列预测的方法相结合,比如:马尔可夫链预测方法、人工神经网络、支持向量机等。这些组合模型已经得到广泛应用。

因为 GM(1,1)模型是适合于“少样本、贫信息”建模,而基于统计方法的模型中,马尔可夫链预测方法所需样本相对较少,所以本章将采用串联的方式结合 GM(1,1)模型与马尔可夫链预测方法——先运用 BIGM(1,1)模型对二元区间数序列进行预测,再运用马尔可夫链预测方法修正 BIGM(1,1)模型的预测结果。在修正中,还将结合第五章的序列转换方法,保证修正后不出现区间数左、右界点的错乱。

7.2 BIGM(1,1)的建模条件

邓聚龙^[4]已经给出了 GM(1,1)模型的建模禁区、发展系数与原始序列级比的界区等(见第二章)。而刘思峰^[11]等进一步研究了模型的适用范围,指出 GM(1,1)的建模条件是一次累加生成序列满足“准指数律”,否则,序列的波动性较大,则 GM(1,1)模型的预测精度较低。下面给出其相关定义。

定义 7.1 ^[11] 设非负序列为: $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$, 令

$$\sigma(i) = \frac{x(i)}{x(i-1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (7-1)$$

(1) $\forall i$, 若 $\sigma(i) \in (0, 1]$, 则称序列具有负灰指数律;

(2) $\forall i$, 若 $\sigma(i) > 1$, 则称序列具有正灰指数律;

(3) $\forall i$, 若 $\sigma(i) \in [p, q]$, $q - p = \delta$, 则称序列具有绝对灰度为 δ 的灰指数律;

(4) 若 $\delta < 0.5$, 则称序列具有准指数律。

对于一般的非负序列, 通过累加生成(AGO), 准指数律就会出现。序列越光滑, 准指数律越明显, 即灰度 δ 越小, 灰模型的预测精度也越好。

当灰度 $\delta < 0.5$, 即原始序列的累加生成序列具有“准指数律”时, 原始序列可以用 **GM(1,1)**模型预测。当灰度 $\delta \geq 0.5$, 即原始序列累加后不具有“准指数律”, 则表明原始序列的波动性较大, 则 **GM(1,1)**模型的预测精度不高, 需要进行修正。

从以上分析知, **BIGM(1,1)**的建模条件是原始序列的左、右界点序列的累加生成序列: $\{x_L^{(1)}(1), x_L^{(1)}(2), \dots, x_L^{(1)}(n)\}$ 与 $\{x_R^{(1)}(1), x_R^{(1)}(2), \dots, x_R^{(1)}(n)\}$, 都满足准指数律, 即

$$\sigma(i) = \frac{x^{(1)}(i)}{x^{(1)}(i-1)} = \frac{\sum_{k=1}^i x^{(0)}(k)}{\sum_{k=1}^{i-1} x^{(0)}(k)} \in [p, q], \quad (7-2)$$

其中, $q - p = \delta < 0.5$ 。本章将采用“准指数律”检验序列的波动性。若 $\delta \geq 0.5$, 则需对 **BIGM(1,1)**进行修正。

7.3 基于马尔可夫预测的修正过程

马尔可夫预测也只适用于精确数序列预测, 而且不能对二元区间数的左、右界点分开单独修正, 否则, 可能会出现界点相对位置的错乱, 所以在修正中, 结合第五章的序列转换方法。

已知原始区间数序列为: $X^{(0)} = \{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), \dots, \tilde{x}^{(0)}(n)\}$, 其中, $\tilde{x}^{(0)}(i) = [x_L^{(0)}(i), x_R^{(0)}(i)]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。由 **BIGM(1,1)**模型得到的预测序列为: $\hat{X}^{(0)} = \{\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(n)\}$, 其中, $\hat{x}^{(0)}(i) = [\hat{x}_L^{(0)}(i), \hat{x}_R^{(0)}(i)]$, $i = 1, 2, \dots, n$, 包括左界点预测值($\hat{x}_L^{(0)}(i)$)和右界点预测值($\hat{x}_R^{(0)}(i)$)。

下面运用序列转换方法将原始区间数序列和 **BIGM(1,1)**的预测序列分别转换为精确数序列: 中点序列和区间长度序列, 设原始序列 $X^{(0)}$ 转换后的序列为 M 与 L , 即:

$$X^{(0)} = \{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), \dots, \tilde{x}^{(0)}(n)\} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \{m(1), m(2), \dots, m(n)\}, \\ L = \{l(1), l(2), \dots, l(n)\}. \end{cases}$$

其中

$$m(i) = \frac{x_L^{(0)}(i) + x_R^{(0)}(i)}{2}, \quad l(i) = x_R^{(0)}(i) - x_L^{(0)}(i). \quad (7-3)$$

而 BIGM(1,1)的预测序列 $\hat{X}^{(0)}$ 转换后的序列则记为: \hat{M} 与 \hat{L} , 其计算只需将上式的原始值相应换为预测值即可:

$$\hat{X}^{(0)} = \{\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(n)\} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M} = \{\hat{m}(1), \hat{m}(2), \dots, \hat{m}(n)\}, \\ \hat{L} = \{\hat{l}(1), \hat{l}(2), \dots, \hat{l}(n)\}. \end{cases}$$

其中

$$\hat{m}(i) = \frac{\hat{x}_L^{(0)}(i) + \hat{x}_R^{(0)}(i)}{2}, \quad \hat{l}(i) = \hat{x}_R^{(0)}(i) - \hat{x}_L^{(0)}(i). \quad (7-4)$$

对 BIGM(1,1)预测序列 $\hat{X}^{(0)}$ 的转换序列: $\hat{M} = \{\hat{m}(1), \hat{m}(2), \dots, \hat{m}(n)\}$ 与 $\hat{L} = \{\hat{l}(1), \hat{l}(2), \dots, \hat{l}(n)\}$, 进行马尔可夫修正后, 修正值记为: $\tilde{m}(i)$ 、 $\tilde{l}(i)$, 则得区间序列的左右界点修正值为:

$$\tilde{x}_L^{(0)}(i) = \tilde{m}(i) - \frac{\tilde{l}(i)}{2}, \quad \tilde{x}_R^{(0)}(i) = \tilde{m}(i) + \frac{\tilde{l}(i)}{2}. \quad (7-5)$$

显然, 此还原公式满足: $\tilde{x}_L^{(0)}(i) \leq \tilde{x}_R^{(0)}(i)$, 保证了修正后区间数的左、右界点的相对位置。

下面以中点序列 \hat{M} 为例, 给出马尔可夫修正过程, \hat{L} 的修正过程与此类似:

步骤 1 状态划分

计算序列 M 与 \hat{M} 的比值, 即 $m(i)/\hat{m}(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 将此比值的变化范围划分成 s 个区间: $[A_i, B_i]$, $i = 1, 2, \dots, s$, 称为 s 个状态, 并记为: E_i , 即

$$E_i : [A_i, B_i], \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

状态划分的个数根据实际情况。一般, 原始数据较少时, 状态划分宜少, 便于增多各状态间的转移次数, 从而更客观地反映各状态间的转移规律; 原始数据较多时, 状态划分可多一些, 便于从资料中挖掘更多的信息, 提高预测精度

步骤 2 建立状态转移概率矩阵

设 $N_{ij}(k)$ 为由状态 E_i 经过 k 步转移到状态 E_j 的原始数据样本数, N_j 为状态 E_j 出现的次数, 则由状态 E_i 经过 k 步转移到状态 E_j 的状态转移概率为

$$P_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (7-6)$$

则得 k 步状态转移概率矩阵

$$P(k) = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & \cdots & P_{1s}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & \cdots & P_{2s}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{s1}(k) & P_{s2}(k) & \cdots & P_{ss}(k) \end{pmatrix}. \quad (7-7)$$

步骤 3 一步修正值确定

设第 n 时刻, $m(n)/\hat{m}(n)$ 处于 E_k 状态, 则考察一步转移概率矩阵 $P(1)$ 中的第 k 行, 若第 k 行第 j 个元素(即转移概率 $P_{kj}(1)$)最大, 则说明 $m(n)/\hat{m}(n)$ 从 E_k 状态转移到 E_j 状态的概率最大, 所以, 在第 $n+1$ 时刻, $\hat{m}(n+1)$ 的修正值 $\tilde{m}(n+1)$ 为:

$$\tilde{m}(n+1) = \hat{m}(n+1) \times \frac{1}{2}(A_j + B_j). \quad (7-8)$$

若 $P(1)$ 中的第 k 行没有最大元素, 则在第 $n+1$ 时刻, $\hat{m}(n+1)$ 的修正值 $\tilde{m}(n+1)$ 取为各状态的期望:

$$\tilde{m}(n+1) = \hat{m}(n+1) \times \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^s P_{kj}(1) \times (A_j + B_j) \right]. \quad (7-9)$$

若 $P(1)$ 中的第 k 行有几个最大元素, 则在第 $n+1$ 时刻, $\hat{m}(n+1)$ 的修正值 $\tilde{m}(n+1)$ 取为这几个最大值对应状态的均值。

步骤 4 多步修正

设第 n 时刻, $m(n)/\hat{m}(n)$ 处于 E_k 状态, 则考察两步转移概率矩阵 $P(2)$ 中的第 k 行, 若第 k 行第 j 个元素(即转移概率 $P_{kj}(2)$)最大, 则说明 $m(n)/\hat{m}(n)$ 从 E_k 状态经两步转移到 E_j 状态的概率最大, 所以, 在第 $n+2$ 时刻, $\hat{m}(n+2)$ 的修正值 $\tilde{m}(n+2)$ 为:

$$\tilde{m}(n+2) = \hat{m}(n+2) \times \frac{1}{2}(A_j + B_j). \quad (7-10)$$

若 $P(2)$ 中的第 k 行没有最大元素, 则在第 $n+2$ 时刻, $\hat{m}(n+2)$ 的修正值 $\tilde{m}(n+2)$ 取为各状态的期望:

$$\tilde{m}(n+2) = \hat{m}(n+2) \times \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^s P_{kj}(2) \times (A_j + B_j) \right]. \quad (7-11)$$

即得到第 $n+2$ 时刻的修正预测值 $\tilde{m}(n+2)$ 。多步则依此类推。

7.4 马尔可夫BIGM(1,1)模型的应用实例

电力是基础能源之一。电力负荷的短期预测对电力系统的调度管理非常重要，所以它是电力公司的一个研究重点。因为电力负荷时刻变化着，并且具有波动性，所以它的预测不适于用精确数表示。目前，电力负荷的区间预测方法，如文献 [201]与 [202]，是基于精确数序列建模，得到的预测结果为区间数，其中运用了置信度或覆盖率的理论知识。但是少有直接采用区间数序列对电力负荷进行区间预测的。

本节以2014年9月1日至9月5日，中国广西壮族自治区桂林市某地区的电力负荷数据建立本文提出的马尔可夫BIGM(1,1)模型。首先，将一天分为四个时间段：0:00-6:00，6:00-12:00，12:00-18:00与18:00-24:00。这四个时间段代表了一天中人类生活的四个不同阶段。以一个时间段6个小时中的最小负荷作为区间数的左界点，以最大负荷作为区间数的右界点。表7-1 列出了9月1日至9月5日观察的原始区间数据。

首先，进行“准指数律”检验。由式(7-1)，得原始左、右界点序列的一次累加生成序列的级比所在范围分别为：

$$\sigma_L(i) \in [1.0542, 1.7167], \sigma_R(i) \in [1.0533, 1.7157], i \geq 3.$$

则灰指数律的绝对灰度分别为：

$$\delta_L = 0.6625, \quad \delta_R = 0.6624.$$

因为绝对灰度 δ_L 、 $\delta_R > 0.5$ ，所以左右界点的一次累加生成序列都不满足准指数律，即波动性都很大。

下面用9月1日至9月4日的数据建立 BIGM(1,1)模型，预测9月5日的4个时间段的数据。首先，由第六章的式(6-4)，得到 BIGM(1,1)模型的参数估计为：

$$a_L = 0.0015, \quad a_R = 0.0108, \quad b_L = 4.6164, \quad b_R = 7.0445.$$

则整体发展系数取为

$$a = (a_L + a_R)/2 = 0.0062.$$

由式(6-8)、(6-9)得的左、右界点序列的灰作用量为：

$$b'_L = 4.7894, \quad b'_R = 6.7932.$$

代入预测公式(6-10)得:

$$\hat{x}_L^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_L - ax_L^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}} = \frac{2(2-0.0062)^{i-2}(4.7894 - 0.0062 \times 2.9)}{(2+0.0062)^{i-1}},$$

$$\hat{x}_R^{(0)}(i) = \frac{2(2-a)^{i-2}(b'_R - ax_R^{(0)}(1))}{(2+a)^{i-1}} = \frac{2(2-0.0062)^{i-2}(6.7932 - 0.0062 \times 4.3)}{(2+0.0062)^{i-1}},$$

$$i = 2, 3, \dots$$

表 7-1 列出了 **BIGM(1,1)**模型的预测结果, 从9月1日至9月4日的拟合平均相对误差为 18.01%, 9月5日的预测平均误差达到 22.29%, 即预测精度不到 80%, 其中两个点的误差还达到 50%以上, 此结果说明对于波动较大的序列, **BIGM(1,1)**模型的预测效果不好。而且, 从预测曲线图 7-1 可以明显看出 **BIGM(1,1)**模型的拟合与预测曲线只能反映原始序列的整体发展趋势, 而没有反映出原始序列的波动规律, 这与灰模型的建模机理和建模条件是相符合的。接着, 基于马尔可夫链预测方法对 **BIGM(1,1)**模型的预测结果进行修正。

表 7-1 **BIGM(1,1)**对电力负荷的预测结果(单位: MW)

序号	时间	原始序列	BIGM(1,1) 预测值	相对误差(%)
1	9-1: 00:00-06:00	[2.9, 4.3]	[2.9, 4.3]	0, 0
2	9-1: 06:00-12:00	[3.1, 5.9]	[4.7569, 6.7459]	53.45, 14.34
3	9-1: 12:00-18:00	[4.3, 7.3]	[4.7277, 6.7045]	9.95, 8.16
4	9-1: 18:00-24:00	[6.1, 7.9]	[4.6986, 6.6633]	22.97, 15.65
5	9-2: 00:00-06:00	[3.7, 4.8]	[4.6698, 6.6223]	26.21, 37.97
6	9-2: 06:00-12:00	[3.7, 6.0]	[4.6411, 6.5817]	25.43, 9.69
7	9-2: 12:00-18:00	[5.4, 8.3]	[4.6126, 6.5412]	14.58, 21.19
8	9-2: 18:00-24:00	[7.2, 8.8]	[4.5842, 6.5010]	36.33, 26.12
9	9-3: 00:00-06:00	[4.6, 6.2]	[4.5561, 6.4611]	0.95, 4.21
10	9-3: 06:00-12:00	[4.7, 5.3]	[4.5281, 6.4214]	3.66, 21.16
11	9-3: 12:00-18:00	[4.9, 6.6]	[4.5003, 6.3820]	8.16, 3.30
12	9-3: 18:00-24:00	[4.8, 7.4]	[4.4726, 6.3428]	6.82, 14.29
13	9-4: 00:00-06:00	[3.0, 4.2]	[4.4452, 6.3038]	48.17, 50.09
14	9-4: 06:00-12:00	[3.5, 5.6]	[4.4178, 6.2651]	26.22, 11.88
15	9-4: 12:00-18:00	[4.3, 6.3]	[4.3907, 6.2266]	2.11, 1.17
16	9-4: 18:00-24:00	[5.1, 6.3]	[4.3637, 6.1883]	14.44, 1.77
17	9-5: 00:00-06:00	[3.2, 4.2]	[4.3369, 6.1503]	35.53, 46.44
18	9-5: 06:00-12:00	[3.3, 5.0]	[4.3103, 6.1125]	30.61, 22.25
19	9-5: 12:00-18:00	[4.1, 5.5]	[4.2838, 6.0750]	4.48, 10.45
20	9-5: 18:00-24:00	[4.8, 7.3]	[4.2575, 6.0377]	11.30, 17.29
平均误差		拟合值(1-16): 18.01%, 预测值(17-20): 22.29%		

步骤 1 状态划分

表 7-2 给出了原始区间数序列 $X^{(0)}$ 和 **BIGM(1,1)**模型的预测序列 $\hat{X}^{(0)}$ 转换后的

中点序列和区间长度序列： M 、 L 与 \hat{M} 、 \hat{L} ，以及它们的比值： M/\hat{M} 、 L/\hat{L} ，由这些比值，首先做修正过程的第一步：状态划分。表 7-2 中，9月1日至9月4日，即序号 2 至序号 16， M/\hat{M} 的变化区间为：

$$[66.98\%, 144.34\%],$$

L/\hat{L} 的变化区间为：

$$[31.69\%, 151.76\%].$$

基于此变化区间，均分给出 M/\hat{M} 与 L/\hat{L} 的状态划分，见表 7-3。

表 7-2 原始与BIGM(1,1)预测序列转换后的序列及比值

序号	时间	原始序列		BIGM(1,1)		比值(%)	
		M	L	\hat{M}	\hat{L}	M/\hat{M}	L/\hat{L}
2	9-1: 06:00-12:00	4.5	2.8	5.7514	1.9890	78.24	140.77
3	9-1: 12:00-18:00	5.8	3	5.7161	1.9768	101.47	151.76
4	9-1: 18:00-24:00	7	1.8	5.6810	1.9647	123.22	91.62
5	9-2: 00:00-06:00	4.25	1.1	5.6461	1.9525	75.27	56.34
6	9-2: 06:00-12:00	4.85	2.3	5.6114	1.9406	86.43	118.52
7	9-2: 12:00-18:00	6.85	2.9	5.5769	1.9286	122.83	150.37
8	9-2: 18:00-24:00	8	1.6	5.5426	1.9168	144.34	83.47
9	9-3: 00:00-06:00	5.4	1.6	5.5086	1.9050	98.03	83.99
10	9-3: 06:00-12:00	5	0.6	5.4748	1.8933	91.33	31.69
11	9-3: 12:00-18:00	5.75	1.7	5.4412	1.8817	105.68	90.34
12	9-3: 18:00-24:00	6.1	2.6	5.4077	1.8702	112.80	139.02
13	9-4: 00:00-06:00	3.6	1.2	5.3745	1.8586	66.98	64.56
14	9-4: 06:00-12:00	4.55	2.1	5.3415	1.8473	85.18	113.68
15	9-4: 12:00-18:00	5.3	2	5.3087	1.8359	99.84	108.94
16	9-4: 18:00-24:00	5.7	1.2	5.2760	1.8246	108.04	65.77
17	9-5: 00:00-06:00			5.2436	1.8134		
18	9-5: 06:00-12:00			5.2114	1.8022		
19	9-5: 12:00-18:00			5.1794	1.7912		
20	9-5: 18:00-24:00			5.1476	1.7802		

表 7-3 状态划分

M/\hat{M}		L/\hat{L}	
状态	范围	状态	范围
ME1	66%-85%	LE1	31%-61%
ME2	85%-105%	LE2	61%-91%
ME3	105%-125%	LE3	91%-121%
ME4	125%-145%	LE4	121%-152%

步骤 2 建立状态转移概率矩阵

由表 7-2 的比值与表 7-3 的状态划分，得 M/\hat{M} 与 L/\hat{L} 的一步转移概率矩阵

分别为

$$P_M(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

步骤3 确定一步修正值

下面修正表 7-2 中 **BIGM(1,1)**对应的 $\hat{m}(17) = 5.2436$, 因为序号 16 的比值:

$$m(16)/\hat{m}(16) = 108.04\%,$$

所以处于状态 3(ME3: 105%-125%), 则观察 M/\hat{M} 的一步转移概率矩阵 $P_M(1)$ 的第 3 行得转移到状态 1(ME1: 66%-85%)的概率最大, 所以 $\hat{m}(17)$ 的修正值 $\tilde{m}(17)$ 为:

$$\tilde{m}(17) = \hat{m}(17) \times \frac{1}{2} \times (66\% + 85\%) = 5.2436 \times \frac{1}{2} \times (66\% + 85\%) = 3.9589.$$

因为

$$l(16)/\hat{l}(16) = 65.77\%,$$

所以处于状态 2(LE2: 61%-91%), 观察 L/\hat{L} 的一步转移概率矩阵 $P_L(1)$ 的第 2 行, 没有最大值, 所以 $\hat{l}(17)$ 的修正值 $\tilde{l}(17)$ 取为各状态的期望:

$$\begin{aligned} \tilde{l}(17) &= \hat{l}(17) \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{4} \times (31\% + 61\%) + \frac{1}{4} \times (61\% + 91\%) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \times (91\% + 121\%) + \frac{1}{4} \times (121\% + 152\%) \right] \\ &= 1.8134 \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{4} \times (31\% + 61\%) + \frac{1}{4} \times (61\% + 91\%) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \times (91\% + 121\%) + \frac{1}{4} \times (121\% + 152\%) \right] \\ &= 1.6525. \end{aligned}$$

最后由还原公式(7-5), 得到 **BIGM(1,1)**的预测值 $\hat{x}_L^{(0)}(17)$ 、 $\hat{x}_R^{(0)}(17)$ 的马尔可夫修正值为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_L^{(0)}(17) &= 3.9589 - \frac{1.6525}{2} = 3.1327, \\ \hat{x}_R^{(0)}(17) &= 3.9589 + \frac{1.6525}{2} = 4.7851. \end{aligned}$$

步骤4 多步修正值

M/\hat{M} 与 L/\hat{L} 的二步、三步、四步转移概率矩阵分别为

$$P_M(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 3/5 & 1/5 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_M(3) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_M(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

由 $m(16)/\hat{m}(16) = 108.04\%$, 知其处于状态 3(ME3: 105%-125%), 则观察 M/\hat{M} 的两步转移概率矩阵 $P_M(2)$ 的第 3 行得转移到状态 2(ME2: 85%-105%)的概率最大, 所以 $\hat{m}(18)$ 的修正值 $\tilde{m}(18)$ 为:

$$\tilde{m}(18) = \hat{m}(18) \times \frac{1}{2} \times (85\% + 105\%) = 5.2114 \times \frac{1}{2} \times (85\% + 105\%) = 4.9508.$$

由 $l(16)/\hat{l}(16) = 65.77\%$, 知其处于状态 2(LE2: 61%-91%), 则观察 L/\hat{L} 的两步转移概率矩阵 $P_L(2)$ 的第 2 行, 得转移到状态 2(LE2: 61%-91%)的概率最大, 所以 $\hat{l}(18)$ 的修正值 $\tilde{l}(18)$ 为:

$$\tilde{l}(18) = \hat{l}(18) \times \frac{1}{2} \times (61\% + 91\%) = 1.8022 \times \frac{1}{2} \times (61\% + 91\%) = 1.3697.$$

最后由还原公式(7-5), 得到 BIGM(1,1)的预测值 $\hat{x}_L^{(0)}(18)$ 、 $\hat{x}_R^{(0)}(18)$ 的修正值为:

$$\tilde{x}_L^{(0)}(18) = 4.9508 - \frac{1.3697}{2} = 4.2660.$$

$$\tilde{x}_R^{(0)}(18) = 4.9508 + \frac{1.3697}{2} = 5.6357.$$

依此类推, 可得三步、四步修正值如下:

$$\tilde{m}(19) = 4.9204, \tilde{l}(19) = 1.3613, \tilde{m}(20) = 5.9197, \tilde{l}(20) = 1.8900,$$

$$\tilde{x}_L^{(0)}(19) = 4.2398, \tilde{x}_R^{(0)}(19) = 5.6011, \tilde{x}_L^{(0)}(20) = 4.9748, \tilde{x}_R^{(0)}(20) = 6.8647.$$

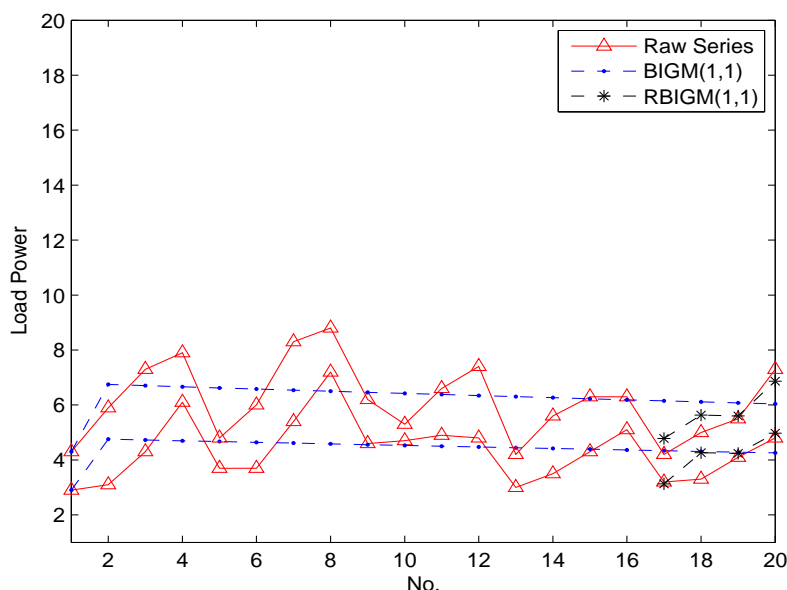


图 7-1 BIGM(1,1)与马尔可夫BIGM(1,1)模型对电力负荷的预测曲线

下面将修正后的预测值以及相对误差列入表 7-4。图 7-1 也给出了 BIGM(1,1)与马尔可夫BIGM(1,1)模型(RBIGM(1,1))的拟合与预测曲线。修正后，预测误差从 22.29%降为 9.11%，精度达到 90% 以上，所以修正是有效的。从图 7-1 可以看出，BIGM(1,1)模型的预测曲线反映了原始区间序列的整体发展趋势，曲线较平滑，而马尔可夫修正后，序列的波动规律体现出来。

表 7-4 马尔可夫BIGM (1, 1)的预测结果(单位: MW)

序号	马尔可夫BIGM(1,1)	相对误差(%)	BIGM(1,1)	相对误差(%)
17	[3.1327, 4.7851]	2.10, 13.93	[4.3369, 6.1503]	35.53, 46.44
18	[4.2660, 5.6357]	29.27, 12.71	[4.3103, 6.1125]	30.61, 22.25
19	[4.2398, 5.6011]	3.41, 1.84	[4.2838, 6.0750]	4.48, 10.45
20	[4.9748, 6.8647]	3.64, 5.96	[4.2575, 6.0377]	11.30, 17.29
平均误差		9.11%		22.29%

7.5 本章小结

灰模型的建模条件是累加生成后序列要具有“准指数律”，不适用于波动性较大的序列预测。马尔可夫链预测方法则可以确定序列状态的转移规律，反映序列的波动规律。本章结合马尔可夫与 BIGM(1,1)模型的优点实现了波动型区间数

序列的预测，并运用了序列转换的方法，以保证马尔可夫修正中，区间预测值左、右界点的相对位置不会错乱。在对波动性较大的电力负荷区间序列的预测中，BIGM(1,1)模型不能反映其波动性，预测精度较低，而马尔可夫修正后，序列的波动规律得到体现，在较大程度上提高了预测精度。

第八章 总结与展望

8.1 全文总结

本文提出了 GM(1,1)模型的几种拓广模型：累积法 GM(1,1)模型、累积法非等间距 GM(1,1)模型、基于序列转换的区间数序列 GM(1,1)模型、基于参数转换的区间数序列 GM(1,1)模型、基于马尔可夫 GM(1,1)模型的波动型区间数序列预测模型，拓广了 GM(1,1)模型的适用范围。主要结果如下：

1)将累积法引入 等间距与非等间距 GM(1,1)模型的参数估计中，再由模型的定义型方程得到模型的内涵型预测公式，取代传统的白化响应式，建立了累积法 GM(1,1)和累积法非等间距 GM(1,1)模型。基于矩阵分析，得出累积法参数估计的矩阵表示式，能够反应参数估计与原始序列的直接关系，由此直接关系得出模型的相关性质。

累积法 GM(1,1)模型的性质有：(1)模型参数——发展系数的累积法估计值与初始值无关，灰作用量是初始值的线性函数；(2)原始序列作数乘变换后，不会影响发展系数的估计和预测值的相对误差，而灰作用量的估计会出现相同的数乘变换；(3)发展系数的累积法估计值在可容区 $(-2,2)$ 内。

累积法非等间距 GM(1,1)模型的性质有：(1)发展系数的累积法估计值与初始值无关，灰作用量的估计值是初始值的线性函数；(2)对原始序列作数乘变换不会影响发展系数的参数估计和预测值的相对误差，而灰作用量的估计会出现相同的数乘变换；(3)原始数据对应的时间间距作数乘变换，不会影响灰作用量的估计，但是发展系数的估计会出现相反的数乘变换，而且数乘变换不会影响模型的预测值和相对误差。

这些性质有利于深入了解模型的机理，并且利于实际应用，当数据较大时，可以对原始数据或时间间距作数乘变换，便于计算和避免病态性，。

2)将区间数序列转换为含有等量信息的精确数序列，并保证其还原过程不会出现区间界点相对位置的错乱。对转换后的精确数序列建立灰色模型，最后还原得区间数序列的预测值。

3)从改进 GM(1,1)定义型方程的参数取值形式出发，直接使 GM(1,1)模型的适用于二元、三元区间数序列预测，而不需要将区间数序列转换为精确数序列。将定义型方程中的参数——发展系数取为区间数各界点序列的发展系数的加权均值，记为整体发展系数。灰色作用量则取为区间数，先确定了整体发展系数后，

再根据整体发展系数修正灰作用量。

4)引入马尔可夫链预测方法对 $BIGM(1,1)$ 的预测结果进行修正,并结合序列转换的方法,保证了修正过程中区间数各界点的相对位置,从而实现了波动型二元区间数序列的预测,进一步拓广了灰模型的适用范围。

8.2 展望

除了以上对 $GM(1,1)$ 模型的拓广研究,还有很多方面需要进一步研究。

1)进一步研究累积法的性质,与其它参数估计方法作更深入的比较。除了普通累积法,还有多阶累积法与各阶最小二乘法的比较。

2)进一步研究在本文模型的基础上,进一步改进模型的初始条件、背景值构造方法、预测公式等,进一步提高预测精度。

3) $GM(1,1)$ 模型只是灰色基本模型之一,对于其它灰模型,如 $GM(2,1)$ 、 $GM(0,N)$ 、 $GM(1,N)$ 等,这些模型同样应用广泛,如何使它们适用于区间数序列,值得继续研究。

致 谢

光阴似箭，博士研究生的学习过程即将结束，回想这五年多的时光，感慨良多，自己学到的东西远超出知识层面，自己的各方面都有了一个升华，做研究的坚持不懈和不断深入的精神将一直影响我今后的人生，在此向那些教诲和指导过我的老师、帮助和支持过我的同学及朋友们表示衷心的感谢！

首先感谢我最尊敬的导师舒兰教授，感谢她对我读博士学位期间学习上不遗余力的指导和生活中的诸多帮助。舒老师治学严谨的态度、务实的工作作风和平易近人的性格都令我钦佩不已，也给予我莫大的启迪，使我初学之时的浮躁之心慢慢沉静下来，带我走上科研之路。

感谢电子科技大学数学科学学院的黄廷祝教授、黄晋教授、钟守明教授、朱培勇教授和朱嘉琳老师、刘小琴老师、刘燕老师、邓建华老师、张娇老师、叶谱英老师、费铭岗老师、李厚彪老师、张勇老师。感谢他们在我研究和生活中的帮助！

感谢我的各位师兄师姐。感谢同窗好友章志华、王进伟、石艳超、王辉、罗卫华、张景明、蒋敏、杨柳、侯丽媛、王温琴、田保单、陈冲等，感谢他们在我学习、科研和生活中给予关心和帮助！

感谢所有给过我关心、鼓励和启迪的老师、同学和朋友们，感谢他们多年以来的默默关心和帮助，使我在学习和生活上不畏困难，披荆斩棘、一往无前！

感谢我的家人，感谢他们在我求学期间对我的关心和支持，使我得以完成学业！我将以更加努力的学习、勤奋的工作来回报他们！

最后，衷心感谢不辞辛劳给予本论文极大帮助的专家学者们！

曾祥艳

2016年2月 成都

参考文献

- [1] J.L. Deng. Control problems of grey system[J]. System Control Letter, 1982, 1: 288-294
- [2] 邓聚龙. 灰色系统理论的GM模型[J]. 模糊数学, 1985, (2): 23-32
- [3] J.L. Deng. Introduction to grey system theory[J]. Journal of Grey System, 1989, 1: 1-24
- [4] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002
- [5] 邓聚龙. 灰预测与灰决策(修订版)[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002
- [6] 曹定爱, 张顺明. 累积法引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999, 55-102
- [7] 李峰, 王仲东. GM(0,N)模型参数估计的新方法[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2002, 5(26): 625-627
- [8] X.Y. Zeng, X.P. Xiao. A research on morbidity problem in accumulating method GM(1,1) model[C]. In: IEEE ICMLC2005, 2005, 2650-2655
- [9] J.L. Deng. Application of grey system theory in China [C]. In: Proceedings First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis, USA, 1990: 285-291.
- [10] S.F. Liu, J. Forrest. The role and position of grey system theory in science development [J]. Journal of Grey System, 1997, 9(4): 351-356
- [11] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004
- [12] S.F. Liu, M.L. Hu, J. Forrest, et al. Progress of grey system models [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 29 (2): 103-111
- [13] S.F. Liu, J. Forrest, Y. Yang. Advances in grey systems research[J]. Journal of Grey System, 2013, 25(2): 1-18
- [14] 陈涛捷. 灰色预测模型的一种推广[J]. 系统工程, 1990, 8(4): 52-55
- [15] 罗桂荣, 陈炜. 灰色系统模型的一点改进及应用[J]. 系统工程理论与实践, 1988, 8(2): 46-52
- [16] 于德江. 灰色系统建模方法的探讨[J]. 系统工程, 1991, 9(5): 9-12
- [17] 王建根, 李春生. 灰色预测模型的一个注记[J]. 系统工程, 1996, 14(4): 14-15
- [18] 何斌, 蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 9(9): 137-140
- [19] 李翠凤, 戴文战. 基于函数变换的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114
- [20] 黄福勇. 灰色系统建模的变换方法[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 6: 35-38
- [21] 王子亮. 灰色建模技术理论[D]. 武汉: 华中理工大学, 1998, 50-59
- [22] S.F. Liu. The three axioms of buffer operator and their application [J]. Journal of Grey System, 1991, 3(1): 39-48
- [23] S.F. Liu. Buffer operator and its application[J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50
- [24] S.F. Liu. The trap in the prediction of a shock disturbed system and the buffer operator[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 25(1): 25-27

- [25] Y.G. Dang, S.F. Liu, B. Liu, et al. Study on the weakening buffer operators and re-searches[J]. China Journal of Management Science, 2004, 12(2): 108-111
- [26] N.M. Xie, S.F. Liu. The character of strengthening buffer operator and building of some operators[J]. Statistical Control, 2006, 211(4): 9-10
- [27] Y.Q. Guan, S.F. Liu. Study on the weakening buffer operator sequence[J]. China Journal of Management Science, 2007, 15(4): 89-92
- [28] Z.P. Wu, S.F. Liu, C. Mi. Some new results on the weakening buffer operator [C]. In: 2009 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, 2009, 316-319
- [29] Z.P. Wu, Y. Qi, Q. Li, et al. Study on the weakening buffer operator based on the interpolatory function[C]. In: 2010 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2010, 10, 4096-4100
- [30] 穆勇. 灰色预测模型的精确解法[J]. 济南大学学报, 2003, 17(1): 49-50
- [31] 潘家英, 闵祥云. 原始数据函数变换对 GM(1,1)模型精度的影响[J]. 疾病控制杂志, 1999, 3(2): 110-111
- [32] 李福琴. 灰色模型的稳定性和建模精度研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2006
- [33] 郑照宁, 武玉英. GM模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 38-44
- [34] 张洪钺, 黄劲东, 范文雷. 全最小二乘及其在参数估计中的应用[J]. 自动化学报, 1995, 21(1): 21-24
- [35] 何霞. 灰色GM(1,1)模型参数估计的加权最小二乘方法[J]. 运筹与管理, 2012, 21 (6): 23-27
- [36] 内特.沃塞曼.库特纳. 应用线性回归模型[M]. 张勇, 王国明, 赵秀珍译, 北京: 中国统计出版社, 1990, 176-182
- [37] 田林亚, 赵小飞, 何习平. 灰色模型GM(1,1)的稳健算法及其应用[J]. 吉首大学学报(自然科学版). 2006, 27(4): 37-41
- [38] 陈希孺. 最小一乘线性回归(上)[J]. 数理统计与管理, 1989,8(5): 141-148
- [39] 刘威, 崔高峰. 估计 GM(1,1)模型参数的一种新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 471-474
- [40] 杨桂元, 唐小我. 预测模型中参数估计的最优化方法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 8(8): 24-29
- [41] 穆勇. 灰色预测模型参数估计的优化方法[J]. 青岛大学学报, 2003, 16(3): 95-98
- [42] 何霞, 刘卫峰. 基于全最小一乘准则的灰色 GM(1,1)模型参数估计[J]. 统计与决策, 2012, 7: 29-33
- [43] 何文章, 宋国乡, 吴爱弟. 估计 GM(1,1)模型中参数的线性规划方法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(12): 1826-1828
- [44] 何文章, 宋国乡, 吴爱弟. 估计 GM(1,1)模型中参数的一族算法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, (1): 69-75
- [45] 何文章, 宋国乡. 基于遗传算法估计灰色模型中的参数[J]. 系统工程学报, 2005, 4(20): 432-436

- [46] 王义闹, 吴利丰. 基于平均相对误差绝对值最小的 GM(1,1)建模[J]. 华中科技大学学报 (自然科学版), 2009, 37(10): 29-31
- [47] 陈露. 基于蚁群算法的 GM(1,1)模型参数估计[J]. 西安石油大学学报 (自然科学版), 2011, 26(3): 107-110
- [48] 李祚泳, 张明, 邓新民. 基于遗传算法优化的 GM(1, 1)模型及检验效果[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(8): 631-931
- [49] D. Zhou. Estimation of GM(1,1) model parameters based on LS-SVM algorithm and application in load forecasting [C]. In: 2011 International Conference on Engineering and Business Management, 2011, 8: 3538-3540
- [50] L. Hsu, C. Wang. Forecasting the output of integrated circuit industry using a greymodel improved by the Bayesian analysis[J]. Technological Forecasting Social Change, 2007, 74: 843-853
- [51] 席慧玲, 禹思敏. 混沌粒子群算法对GM(1,1)模型参数的优化[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2010, 33(2): 141-145
- [52] 肖俊. 基于粒子群算法的GM(1,1)模型及其应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2004
- [53] M.L. Li, Y. Wei, Y. Dong. A new method to estimate parameter of grey model [C]. In: Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, 2007, 9: 18-20
- [54] J. Wang, S. Zhu, W. Zhao, et al. Optimal parameters estimation and input subset for grey model based on chaotic particle swarm optimization algorithm [J]. Expert System Application, 2011, 38: 8151-8158
- [55] L. Liu, Q. Wang, J. Wang, et al. A rolling grey model optimized by particle swarm optimization in economic prediction [J]. Computational Intelligence, 2014, 10(6): 1-29
- [56] 谭冠军. GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(1)[J]. 系统工程理论与实践. 2000, 20(4): 98-103
- [57] 谭冠军. GM(1, 1)模型的背景值构造方法和应用(2)[J]. 系统工程理论与实践. 2000, 20(5): 125-128
- [58] 谭冠军. GM(1, 1)模型的背景值构造方法和应用(3)[J]. 系统工程理论与实践. 2000, 20(6): 70-75
- [59] 向跃霖. 废气排放量灰色建模新法初探[J]. 环境科学研究, 1995, 8(6):45-48
- [60] 谢开贵, 李春燕, 周家启. 基于遗传算法的GM(1,1, λ)模型[J]. 系统工程学报, 2000, 15(2):168-172
- [61] 王义闹, 刘光珍, 刘开第. GM(1, 1)模型的一种逐步优化直接建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(9): 99-104
- [62] C. Chang, D. Li, Y. Huang, C. Chen. A novel gray forecasting model based on the box plot for small manufacturing datasets [J]. Applied Mathematical Computation, 2015, 265: 400-408
- [63] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国管理科学, 2003, 5(8): 50-53

- [64] Y.H. Lin, P.C. Lee. Novel highprecision grey forecasting model [J]. Automation in Construction, 2007, (16): 771-777
- [65] Z. Wang, Y. Dang, S. Liu. Optimization of Background Value in GM(1,1) Model[J]. System Engineering Theory and Practice, 2008, 28(3): 61-67
- [66] 邓聚龙. 累加生成灰指数律: 灰色控制系统的优化信息处理问题[J]. 华中工学院学报, 1987, 15(5): 7-12
- [67] Y.G. Dang, S.F. Liu, B. Liu. Improvement on GM models[J]. Journal of System Engineering Electronics, 2004, 15(3): 295-298
- [68] Y.G. Dang, S.F. Liu, K. Chen. The GM models that $x^{(1)}(n)$ be taken as initial value [J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-254
- [69] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的GM 模型[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 132-135
- [70] L. Wu, S.F. Liu. Modeling GM(1,1) based new information principle[J]. In: Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, 2011, 320-325
- [71] Y. Wang, Y. Dang, Y. Li, et al. An approach to increase prediction precision of GM(1,1) model based on optimization of the initial condition[J]. Expert System Application, 2010, 37: 5640-5644
- [72] 张大海, 江世芳, 史开泉. 灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(8): 140-142
- [73] Z. Zhai, S. Liu, B. Liu, et al. Study on the optimum prediction model for GM [J]. In: Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, 2007, 419-422
- [74] 何海, 陈绵云. GM(1,1)模型预测公式的缺陷及改进[J]. 武汉理工大学学报, 2004, 26(7): 81-83
- [75] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 54-56
- [76] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,1)模型时间相应函数的一种优化方法[C]. 灰色系统理论及其应用学术会议论文集, 北京: 中国高等科学技术中心, 2007, 344-349
- [77] 张辉, 胡适耕. GM(1,1)模型的边值分析[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(4): 110-111
- [78] 张辉, 胡适耕. GM(1,1)模型的精确解法[J]. 系统工程理论方法应用, 2001, 10(1): 72-74
- [79] 刘卫锋, 何霞. 基于最小一乘准则的GM(1,1)模型边值分析[J]. 统计与决策, 2011, (20): 167-168
- [80] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99
- [81] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的拓展及其最优化求解[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(6): 108-112

- [82] 谢乃明, 刘思峰. 一类离散灰色模型及其预测效果研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(5): 520-523
- [83] 董奋义, 田军. 背景值和初始条件同时优化的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程与电子技术, 2007, (3): 464-466
- [84] X. Liu, H. Peng, Y. Bai, et al. Tourism flows prediction based on an improved grey GM(1,1) model [J]. Procediasocial and Behavioral Sciences, 2014, 138: 767-775
- [85] 何勇, 鲍一丹. 灰色马尔柯夫预测模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1992, 4: 59-63
- [86] H. James. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. Econometrica, 1989, 57(2): 357-384,
- [87] S.P. Meyn, R.L. Tweedie. Markov chains and stochastic stability [M]. London: Springer-Verlag, 1993, 37-58
- [88] 贺福利, 胡勇, 陈淳. 用灰色马尔柯夫链预测模型对我国粮食产量的预测[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(12): 45-47
- [89] 刘耀林, 刘艳芳, 张玉梅. 基于灰色马尔可夫预测模型的耕地需求量预测研究[J]. 武汉大学学报, 2004, 07: 576-579
- [90] 李祥, 王心源, 李玉龙等. 基于灰色马尔科夫预测模型的巢湖流域洪涝灾害预测研究[J]. 水文, 2006, 26(4): 43-54
- [91] M. Huang, Y. He, H. Cen. Predictive analysis on electric power supply and demand in China [J]. Renew Energy 2007, 32: 1165-1174
- [92] Y.T. Hsu, M.C. Liu, J. Yeh, et al. Forecasting the turning time of stock market based on MarkovFourier grey model [J]. Expert System Application, 2009, 36: 8597-8603
- [93] 李大伟, 徐浩军, 刘东亮等. 改进的灰色马尔科夫模型在飞行事故率预测中的应用[J]. 中国安全科学学报, 2009, 19(9): 53-57
- [94] 姜翔程, 陈森发. 加权马尔可夫SCGM(1,1)c模型在农作物干旱受灾面积预测中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(9): 179-185
- [95] U. Kumar, V.K. Jain. Time series models (grey markov, grey model with rolling mechanism andsingular spectrum analysis) to forecast energy consumption in India [J]. Energy, 2010, 35: 1709-1716
- [96] Z. Mao, J. Sun. Application of Grey markov model in forecasting fire accidents [J]. Procedia Engineering, 2011, 11: 314-318
- [97] B. Zhang, J. Ma. Prediction of coal output in wuhai using Grey markvo model improved by nonlinear regression [J]. Procedia Engineering, 2011, 15: 5020-5024
- [98] 赵有益, 林慧龙, 张定海等. 基于灰色马尔科夫残差预测模型的甘南草地载畜量预测[J]. 农业工程学报, 2012, 28(15): 199-204
- [99] 杨锦伟, 孙宝磊. 基于灰色马尔科夫模型的平顶山市空气污染物浓度预测[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(2): 64-70
- [100] 钟络, 饶文碧. 人工神经网络及其融合技术[M]. 北京: 科学出版社, 2007

- [101] C.S. Cheng, Y.T. Hsu, C.C. Wu. Grey modeling using neural network [J]. Journal of Grey System, 1997, 3: 219-232
- [102] C.S. Cheng, Y.T. Hsu, C.C. Wu. Grey neural network [J]. IEICE Transaction on Fundamentals of Electronics, Communication Computer Science, 1997, 81(11): 2433-2422
- [103] Y. Liu, J. Cao. Network traffic prediction based on grey neural network integrated model [C]. In: 2008 International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2008, 209-213
- [104] X.D. Niu, Z.Y. Chen, M. Xing, et al. Combined optimum grey neural network model of the seasonal power load forecasting with the double trends [J]. In: Proceedings of the Chinese society for electrical Engineering, 2002, 22(1): 29-32
- [105] C.B. Lin, S.F. Su, Y.T. Hsu. High precision prediction using grey models [J]. International Journal of System Science, 2001: 32(5): 609-619
- [106] N. Tang, D.J. Zhang. Application of a load forecasting model based on improved grey neural network in the smart grid [J]. Energy Procedia, 2011, 12: 180-184
- [107] D. Zhang, Z. Ren, Y. Bi, et al. Power load forecasting based on grey neural network[C]. In: IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2008, 1885-1889
- [108] S. Alvisi, M. Franchini. Grey neural networks for river stage forecasting with uncertainty [J]. Physical Chemistry Earth, 2012, 8: 42-44
- [109] J. Yuan, I. Zhong, J. qiong. A Study on Grey RBF Prediction Model [C]. In: Proceedings of IEEE ICMLC2005, 4140-4143
- [110] B.R. Chang, H.F. Tsai. Forecast approach using neural network adaptation to support vector regression grey model and generalized autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. Expert System Application, 2008, 34: 925-934
- [111] Y. Wu, W. Teng, Y. Li. Application of greyneural network model to landslide deformation prediction [J]. Rock Mechanics Engineering, 2007, 26(3): 632-636
- [112] M. Xing. Research on combined grey neural network model of seasonal forecast [J]. System Engineering Theory Practice, 2001, 21(1): 31-35
- [113] S. Su, S. Li. Neural network based fusion of global and local information in predicting time series [C]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2003, 5: 4445-4450
- [114] S. Chi, H. Chen, C. Cheng. A forecasting approach for stock index future using grey theory and neural networks [C]. In: Proceedings of 1999 International Joint Conference on Neural Networks, 1999, 6: 3850-3855
- [115] X. Liu. A grey neural network and inputoutput combined forecasting model and its application in primary energy related CO2 emissions estimation by sector in China [J]. Energy Procedia, 2013, 36: 815-824
- [116] W. Tang. New forecasting model based on grey support vector machine [J]. Journal of System Engineering, 2006, 21 (4): 410-413

- [117] F. Zhang, W. Chen. Application of grey LSSVM in mid and long term power load forecasting [C]. In: Proceedings of International Conference on Management and Service Science, 2009
- [118] 宋晓华, 祖丕娥, 伊静等. 基于改进 GM(1,1)和 SVM的长期电量优化组合预测模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2012, 43(5): 1803-1807
- [119] Y. Yin, H. Cui, M. Hong, et al. Prediction of the vertical vibration of ship hull based on grey relational analysis and SVM method [J]. Journal of Marine Science Technology, 2014, 9: 10-21
- [120] 谢开贵, 李春燕, 周家启. 基于遗传算法的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程学报, 2000, 15(2): 168-172
- [121] 张曙红, 陈绵云, 宋业新. 基于遗传算法的 SCGM(1,1)优化模型[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(6): 31-33
- [122] 李祚泳, 张明, 邓新民. 基于遗传算法优化的 GM(1,1)模型及效果检验[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(8): 136-139
- [123] Q. Wang, F. Xia, X. Wang. Integration of grey model and multiple regression model to predict energy consumption [C]. In: 2009 International Conference on Energy and Environment Technology, 2009, 1: 194-197
- [124] R. Tsaur. Forecasting analysis by fuzzy grey model GM(1,1) [J]. Journal of Institute Industrial Engineers, 2006, 23(5): 415-422
- [125] S. Wu, S. Liu, M. Li. Study of integrate models of rough sets and grey systems [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2006, 8: 1313-1323
- [126] S. Liu, B. Zeng, J. Liu, et al. Several basic models of GM(1,1) and their applicable bound [J]. System Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508
- [127] S. Liu, J. Deng. The range suitable for GM(1,1)[J]. Journal of Grey System, 1999, 11(1): 131-138
- [128] 刘思峰, 邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 121-124
- [129] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 灰色预测模型特性的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2001, (9): 105-108
- [130] 穆勇. 具有白指数律重合性的 GM(1,1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(1): 15-19
- [131] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67
- [132] 王义闹, 李应川, 陈智洁. 逐步优化灰导数白化值的 GM(1,1)直接建模法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2001, 29(3): 54-57
- [133] 王义闹, 李万庆, 王本玉等. 一种逐步优化灰导数白化值的 GM (1,1)建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(9): 128-131
- [134] 王义闹. GM(1,1)逐步优化直接建模方法的推广[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(2): 120-124

- [135] Y.N. Wang, Z. Chen, Z. Gao, et al. A generalization of the GM(1,1) direct modeling method with a step by step optimizing grey derivative's whiten values and its applications [J]. Kybernetes, 2004 , 33(2): 382-389
- [136] 宋中民, 同小军, 肖新平. 中心逼近式灰色GM (1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2001, (5): 110-113
- [137] L. Wu, S.F. Liu, L. Yao, et al. The effect of sample size on the grey system model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37: 6577-6583
- [138] X. Kang, T. Yao, S.F. Liu. A study on the characteristics of GM (1,1) model[C]. In: Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2008, 25-29
- [139] L. Wu, S.F. Liu, Z.G. Fang, et al. Properties of the GM(1,1) with fractional order accumulation[J]. Applied Mathematical Computation, 2015, 252: 287-293
- [140] T. Yao, S.F. Liu, N.M. Xie. On the properties of small sample of GM(1,1) model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33: 1894-1903
- [141] Y.G. Dang, S.F. Liu, Z.X. Wang. The preliminary study of the illness problem of Grey model[J]. Academic meeting collection of essays of Grey System Theory and application 2006, 377-384
- [142] D.C. Montgomery, L.A. Johnson. Forecasting Time Series Analysis [M]. New York: McGraw Hill, 1976
- [143] C. Chatfield. Calculating interval forecasts [J]. Journal of Business Economic Statistics, 1993, 11(2): 121-135
- [144] P.F. Christoffersen. Evaluating interval forecasts [J]. International Economic Review, 1998, 39: 841-862
- [145] G.E.P. Box, G.M. Jenkins, C. Reinsel. Time series analysis: forecasting and control [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994
- [146] M. Yar, C. Chatfield. Prediction intervals for the HoltWinters forecasting procedure [J]. International Journal of Forecasting, 1990, 6: 127-137
- [147] C. Chatfield, M. Yar. Prediction intervals for multiplicative HoltWinters [J]. International Journal of Forecasting, 1991, 7: 31-37
- [148] C. Chatfield. Prediction intervals for time series forecasting [J]. Principles of forecasting: a handbook for researcher and practitioners, 2001, 475-494
- [149] J. De Gooijer, R.J. Hyndman. 25 years of time series forecasting [J]. International Journal of Forecasting, 2006, 22: 443-473
- [150] S. Makridakis, S.C. Wheelwright, R.J. Hyndman. Forecasting: methods and applications [M]. New York: John Wiley Sons, 1998
- [151] B. Efron, R.J. Tibshirani. An introduction to the bootstrap [M]. New York: Chapman Hall, 1993
- [152] L.A. Thombs, W.R. Schucany. Bootstrap prediction intervals for autoregression [J]. Journal of American Statistical Association, 1990, 85: 486-492

- [153] L. Pascual, J. Romo, E. Ruiz. Bootstrap predictive inference for ARMA process [J]. Journal of Time Series Analysis, 2004, 25: 449-465
- [154] N. Meade, T. Islam. Prediction intervals for growth curve forecasts [J]. International Journal of Forecasting, 1995, 14: 413-430
- [155] M.P. Clements, N. Taylor. Bootstrapping prediction intervals for autoregressive models [J]. International Journal of Forecasting, 2001, 17: 247-267
- [156] L. Kilian. Small sample confidence intervals for impulse response functions [J]. The Review of Economics and Statistics, 1998, 80: 218-230
- [157] J.H. Kim. Bootstrap prediction intervals for autoregression using asymptotically mean-unbiased estimators [J]. International Journal of Forecasting, 2004, 20: 85-97
- [158] J.H. Kim, I.A. Moosa. Forecasting international tourist flows to Australia: a comparison between the direct and indirect methods [J]. Tourism Management, 2005, 26: 69-78
- [159] D.J. Olive. Prediction intervals for regression models [J]. Computational Statistics Data Analysis, 2007, 51: 3115-3122
- [160] M. Demetrescu. Optimal forecast intervals under asymmetric loss [J]. International Journal of Forecasting, 2007, 26: 227-238
- [161] Z. Xu, C. Wan. The key technology for grid integration of wind power: direct probabilistic interval forecasts of wind power [J]. Southern Power System Technology, 2013, 7(5): 1-8
- [162] Z. Li, J. Ding, D. Wu, et al. An ensemble model of the extreme learning machine for load interval prediction [J]. Journal of North China Electric Power University, 2014, 41 (2): 78-87
- [163] T. Xiong. A combination method for interval forecasting of agricultural commodity futures prices [J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 77: 92-102
- [164] J.W. Taylor, D.W. Bunn. A quantile regression approach to generating prediction intervals [J]. Management Science, 1999, 45(2): 225-237
- [165] R.W. Koenker, G.W. Bassett. Regression quantiles [J]. Econometrica, 1978, 46: 3350
- [166] R.J. Hyndman, A.B. Koehler, J.K. Ord, et al. Forecasting with exponential smoothing: the state space approach [M]. Berlin: SpringerVerlag, 2008
- [167] L.S.M. Andre, A.T. Franciscu, B.L. Teresa. Forecasting models for intervalvalued time series [J]. Neurocomputing, 2008, 71: 3344-3352
- [168] L.S.M. Andre, A.T. Franciscu. Holt's exponential smoothing and neural network models for forecasting intervalvalued time series [J]. International Journal of Forecasting, 2011, 27: 740-759
- [169] P. Santiago, R. Esther, E. Antoni. Prediction intervals in conditionally heteroscedastic time series with stochastic components [J]. International Journal of Forecasting, 2011, 27: 308-319
- [170] T. Xiong, Y. Bao, Z. Hu, et al. Forecasting interval time series using a fully complexvalued RBF neural network with DPSO and PSO algorithms [J]. Information Sciences, 2015, 305, 77-92

- [171] 徐惠莉, 吴柏林, 江韶珊. 区间时间序列预测准确度探讨[J]. 数量经济技术经济研究, 2008, 1: 133-140
- [172] 张进, 苗强, 陈华友等. 最大误差绝对值达到最小的区间组合预测模型[J]. 合肥学院学报, 2009, 19(4): 31-34
- [173] Y. Yang, S.F. Liu. Kernels of grey numbers and their operations [C]. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2008, 826-831
- [174] B. Zeng, S.F. Liu. Calculation for kernel of interval grey number based on barycenter approach [J]. Transaction of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 30(2): 216-220
- [175] B. Zeng, C. Li, X. Long, Y. Xiong, A novel interval grey number prediction model given kernel and grey number band [J]. Journal of Grey System, 2014, 26(3): 87-101
- [176] B. Zeng, S. F. Liu, N. M. Xie, Prediction model of interval grey number based on DGM(1,1) [J]. Journal of System Engineering and Electronics, 2010, 21(4): 598-603
- [177] 曾波, 刘思峰. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588
- [178] 曾波, 刘思峰, 孟伟. 基于核和面积的离散灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1421-1424
- [179] 曾波, 刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 174-180
- [180] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1820
- [181] 曾波. 基于核和灰度的区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 821-824
- [182] 袁潮清, 刘思峰, 张可. 基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 313-319
- [183] 孟伟, 刘思峰, 曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776
- [184] 吴利丰, 刘思峰, 闫书丽. 区间灰数序列的灰色预测模型构建方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1912-1914
- [185] 刘解放, 刘思峰, 方志耕. 基于核与灰半径的连续区间灰数预测模型[J]. 系统工程, 2013, 31(2): 61-64
- [186] 石照耀, 谢华锬, 费业泰. 累积法的基本原理及其在测量数据处理中的应用[J]. 光学精密工程, 2000, 8(1): 87-90。
- [187] 曾祥艳, 肖新平. 累积法 GM(2,1)模型及其病态性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 30(4): 542-545
- [188] X. Zhang, X.P. Xiao. Study on the connotation of parameters in GM(1,1) model [J]. Journal of Grey System, 2006, 18(3): 206-213

- [189] J.L Deng. A novel GM(1,1) model for nonequigap series [J]. Journal of Grey System, 1997, 9(2): 111-116
- [190] 傅立著. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科技文献出版社, 1992
- [191] B.Z. Shi. Modeling of the nonequigap GM(1,1) modeling [J]. Journal of Grey System, 1993, 5(2): 105-114
- [192] 王钟羨, 吴春笃, 史雪荣. 非等间距序列的灰色模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(10): 16-20
- [193] 戴文战, 李俊峰. 非等间距 GM(1,1)模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(9): 89-93
- [194] 李翠凤, 戴文战. 非等间距GM(1,1)模型背景值构造方法及应用[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2007, 47(2):1729-1732
- [195] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162
- [196] H.B. Kuang, S.F. Liu, Z.G. Fang. Improvements on grey models for nonequidistant sequence [C]. In: Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, 2009, 101-110
- [197] 罗佑新, 周继荣. 非等间距 GM (1,1) 模型及其在疲劳试验数据处理和疲劳试验在线监测中的应用[J]. 机械强度, 1996, 18(3) :60-63
- [198] 罗佑新. 非等间距新息 GM(1,1)的逐步优化模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(12): 2254-2258
- [199] 刘明波, 田林亚, 孙和平. 非等步长 GM(1,1)模型及其在大堤沉降监测的应用[J]. 测绘工程, 2006, 15(3): 58-60
- [200] 曾祥艳, 曾玲. 非等间距 GM(1,1)模型的改进与应用[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(2): 90-95
- [201] 许昭, 万灿. 风电并网关键技术: 风电的直接概率预测[J]. 南方电网技术, 2013, 7(5): 1-8
- [202] 李知艺, 丁剑鹰, 吴迪等. 电力负荷区间预测的集成极限学习机方法[J]. 华北电力大学学报, 2014, 41(2): 78-87
- [203] 张齐元, 郭增辉, 沈致和. 基于时间序列分析对矿坑涌水量的区间预测[J]. 价值工程, 2011, 16(6): 33-35
- [204] R.C. Young. The algebra of many 2valued quantities [J]. Annals of Mathematics, 1931, 31: 260-290
- [205] L.A. Zadeh. Fuzzy sets [J]. Information Control, 1965, 8(3): 338-353
- [206] R.E. Moore. Method and application of interval analysis [M]. London: Prentice Hall, 1979
- [207] R.E. Moore. Interval analysis and fuzzy set theory [J]. Fuzzy Sets System, 2003, 135: 5-9
- [208] R. Lowen. Mathematics and fuzziness [J]. Fuzzy Sets System, 1988, 27(1): 1-3
- [209] 茆诗松, 程依明. 概率论与数量统计教程[M]. 北京: 高等教育出版, 2004

- [210] R.C. Tsaur. The development of an interval grey regression model for limited time series forecasting [J]. Expert System Application, 2010, 37: 1200-1206
- [211] 方志耕, 刘思峰. 基于区间灰数列的 GM(1,1)模型(GMBIGN(1,1))研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12: 130-134

攻读博士学位期间的研究成果

已发表的论文:

- [1] Xiangyan Zeng, Lan Shu, Guiming Huang, Jing Jiang. Triangular fuzzy series forecasting based on grey model and neural network [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40: 1717-1727 (SCI, 1区)
- [2] Xiangyan Zeng, Lan Shu, Guiming Huang. Fluctuating interval number series forecasting based on GM (1, 1) and SVM [J]. The Journal of Grey system, 已录用(SCI, 3区)
- [3] Xiangyan Zeng, Lan Shu. Non-equidistant GM (1,1) based on accumulated method and its properties [J]. Journal of Grey System, 2012, 15(3): 139-144 (Scopus)
- [4] Xiangyan Zeng, Lan Shu. The accumulating method based on non-equidistant sequence and its applications [C]. 2013 IEEE Conference Anthology, 2013, 8 (EI)
- [5] Xiangyan Zeng, Lan Shu. Study on interval fuzzy series forecasting based on GM(1,1) model [C]. Proceedings of the 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting, 2013,6: 1451-1454 (EI)
- [6] Xiangyan Zeng, Lan Shu. A revised grey model for fluctuating interval fuzzy series [C]. Advances in Intelligent Systems and Computing, 2014, 4:243-254 (EI)
- [7] 曾祥艳, 舒兰, 蒋贵荣. 基于三角模糊数序列的灰色预测模型[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(19):107-112
- [8] 曾祥艳, 舒兰. 基于灰模型的区间模糊数时间序列预测[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(5): 55-63

主持与参与的科研项目:

- [1] 基于灰色模型的区间模糊数时间序列的预测研究与应用. 广西壮族自治区高等学校科学研究项目(KY2015YB113), 2015-2017, 主持

- [2] 生物分子系统中电扩散连续模型的有限元计算. 国家自然科学基金(11001062), 2011-2013, 参与
- [3] 时滞脉冲非光滑系统的分岔混沌理论以及应用. 国家自然科学基金(11162004), 2012-2015, 参与
- [4] 随机互补的模型和算法研究. 广西区自然科学基金(2014GXNSFAA118003), 2014-2017, 参与
- [5] 不确定双矩阵对策的理论与求解方法研究. 广西区自然科学基金(2014GXNSFAA118010), 2014-2017, 参与