

嫦娥三号软着陆轨道建模分析和落点避障

2019年9月6日

摘要

针对嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略问题,在合理假设的前提下,建立动力学模型,求解得到了嫦娥三号着陆准备轨道近月点和远月点的速度。针对软着陆过程的6个阶段,利用离散化的思想,通过受力分析,对嫦娥三号的软着陆过程进行建模分析,将连续轨道离散化,根据每个阶段的状态去确定各个离散点的状态,进而实现了对飞行器软着陆的控制。

关键词: 嫦娥三号 离散化 轨道设计 软着陆

1 问题重述

嫦娥三号于2013年12月2日1时30分成功发射,12月6日抵达月球轨道,在实施软着陆之前,嫦娥三号还将在这条轨道上稳定飞行姿态,对着陆敏感器、着陆数据等再次确认,并对软着陆的起始高度、速度、时间点做最后准备。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为2.4t,其安装在下部的主减速发动机能产生1500N到7500N的可调节推力,其比冲为2940m/s,可满足调整速度的控制要求;其四周安装有姿态调整发动机,在给定主减速发动机的推力方向后,能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为19.51W、44.12N,海拔为-2641m。

本文首先求出了嫦娥三号在近月点、远月点的速度;其次,采用离散化的思想,对嫦娥三号的软着陆过程进行建模分析,将连续轨道离散化,根据每个阶段的状态去确定阶段中各个离散点的状态,进而实现对飞行器软着陆轨道的控制。经仿真验证,发现本模型能较准确地模拟出嫦娥三号的软着陆轨道;最后,对模型进行了误差分析。

2 模型假设

1. 只考虑月球对嫦娥三号的引力影响;
2. 视月心非惯性坐标系为近似惯性坐标系;
3. 着陆准备轨道和落月轨道在同一个平面上;

3 符号说明

- G 万有引力常数
- M 月球质量

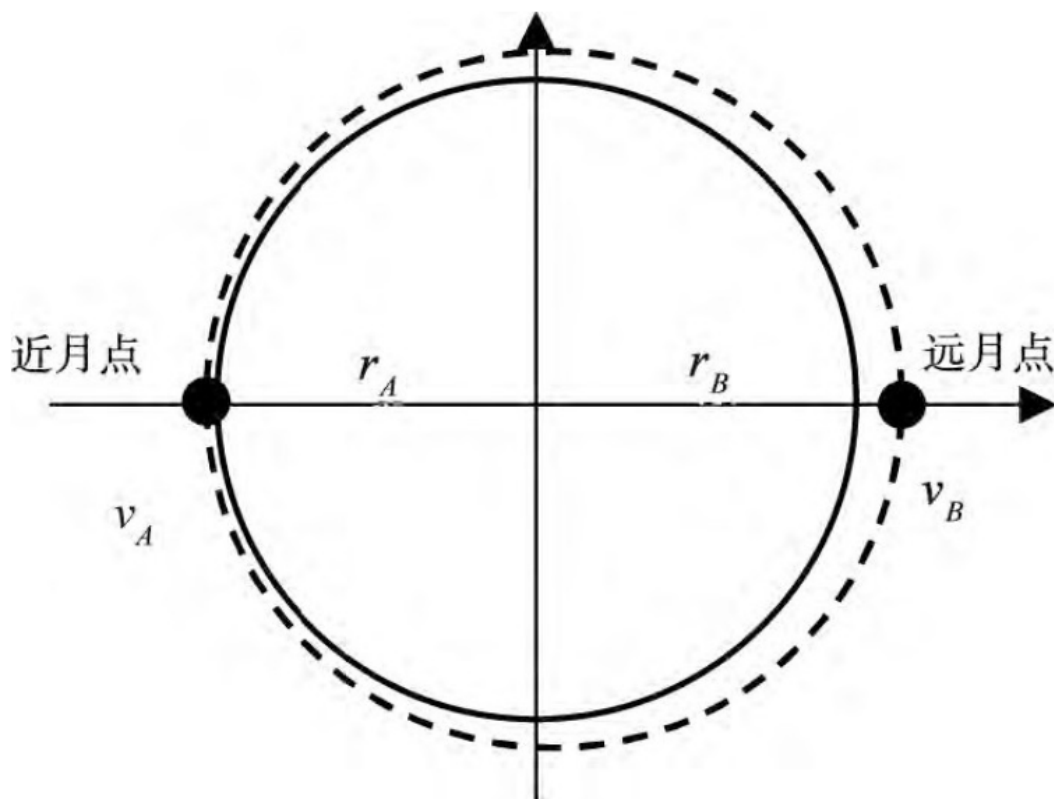
- m 嫦娥三号质量
- v_a 近月点速度
- v_b 远月点速度
- r_a 近月点月心距
- r_b 远月点月心距
- x_i 第*i*时刻横坐标
- y_i 第*i*时刻纵坐标
- $x(i+1)$ 第*i*+1时刻横坐标
- $y(i+1)$ 第*i*+1时刻纵坐标
- θ_i 第*i*时刻嫦娥三号运动方向与x轴正向的夹角
- F 发动机的推力
- m_i 第*i*时刻嫦娥三号质量
- v_e 比冲
- t 一个时间间隔
- F_x 合外力在x轴上的分量
- F_y 合外力在y轴上的分量
- a_x 加速度在x轴上的分量
- a_y 加速度在y轴上的分量
- g 月球上重力加速度
- β 重力方向与x轴负方向夹角

4 模型的建立与求解

4.1 问题1的模型建立与求解

4.1.1 确定近月点和远月点的速度

由假设2.3，嫦娥三号从近月点开始下落，且与着陆准备轨道在同一个平面上。又由假设2.1和2.2知，嫦娥三号的着陆准备轨道满足开普勒轨道定律，其着陆准备轨道如图一所示。



嫦娥三号的着陆准备轨道为椭圆，月心是焦点。忽略月球形状扁率，将月球看作球体，根据机械能守恒和开普勒第二定律可得

此处为公式一

其中：月球质量 $M = 7.3477 \times 10^{22} \text{ kg}$ ，万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ 。联立解得 $v_a = 1.6927 \text{ km/s}$ ， $v_b = 1.6144 \text{ km/s}$ 。

4.1.2 确定近月点和远月点的位置

根据该阶段所处的状态，可以大体估计出所需要的时间应在410s左右。事实上，嫦娥三号在主减速阶段共计飞行415s（详见4.2.1），其在月面投影飞行的纬度数为 12.6397° 。由于嫦娥三号落点为 19.51° W ， 44.12° N ，根据假设，嫦娥三号软着陆轨道为过月球自转轴的平面，且从南至北着陆，那么嫦娥三号的近月点纬度为 $44.12^\circ - 12.6397^\circ = 31.4803^\circ$ ，即嫦娥三号近月点的经纬度为 $(19.51^\circ \text{ W}, 31.4803^\circ \text{ N})$ 。根据对称性，远月点的经纬度为 $(160.5^\circ \text{ E}, 31.4803^\circ \text{ S})$ 。

4.2 问题2的模型建立与求解

4.2.1 模型建立

以近月点为坐标原点，近月点指向月心方向为y轴正方向，垂直于y轴且与嫦娥三号在近月点相同的方向为x轴正方向，建立直角坐标系。

把从15km到3km主减速阶段的软着陆轨道用时间间隔进行离散化，在主减速阶段，要使嫦娥三号获得最好的减速效果，减少燃料消耗，应该保持最大推力，且使每一时刻的推力方向与当时的速度矢量反向。当时

时间间隔足够小时，可以近似地把嫦娥三号在第 $i+1$ 时刻的位置点 (x_{i+1}, y_{i+1}) 指向第 i 时刻的位置点 (x_i, y_i) 的方向作为推力的方向，即

此处为公式二

其中 θ_i 是第 i 时刻嫦娥三号运动方向与x轴正向的夹角。

在时间间隔很小的情况下可以忽略质量的变化，并且由比冲关系式

此处为公式三

可知第 i 时刻末嫦娥三号质量为

此处为公式四

对嫦娥三号在第 i 时刻至第 $i+1$ 时刻进行受力分析，由牛顿定律，容易得到

此处为公式五

其中， F_x, F_y 分别表示合外力在x、y轴上分量， a_x, a_y 分别表示嫦娥三号在x、y轴上的加速度， β 为重力方向与x轴负方向夹角。分析上式发现：在第 i 时刻至第 $i+1$ 时刻过程中，嫦娥三号沿x轴和y轴分别作匀加速直线运动，于是可得到关于位移和速度的方程：

此处为公式六

而对于着陆点的选取，分别使用python和matlab编程得到等高线以及梯度二值图，从而得到合适的着陆点。

4.2.2 仿真计算

4.2.3 主减速阶段的模型

在主减速阶段，代入初始状态进行递归就可以得到嫦娥三号主减速阶段的运动轨迹。通过python编程，最终可以得出嫦娥三号在主减速阶段的主发动机的推力方向、运行轨迹、运行速度和高度的变化曲线如图所示。

此处依次为图2-1、2-2、2-3、2-4

主减速阶段末端的状态如图所示。

```
start
time: 418.28759996663723
location: 382991.8263896647 53655.00908536001
v: 56.99958802854785
v_x: 33.43941247671982
v_y: 46.16014220770956
m: 1332.9397958400305
theta: 0.9438652760992058
height: 3000.204579668818
```

4.2.4 快速调整阶段的模型

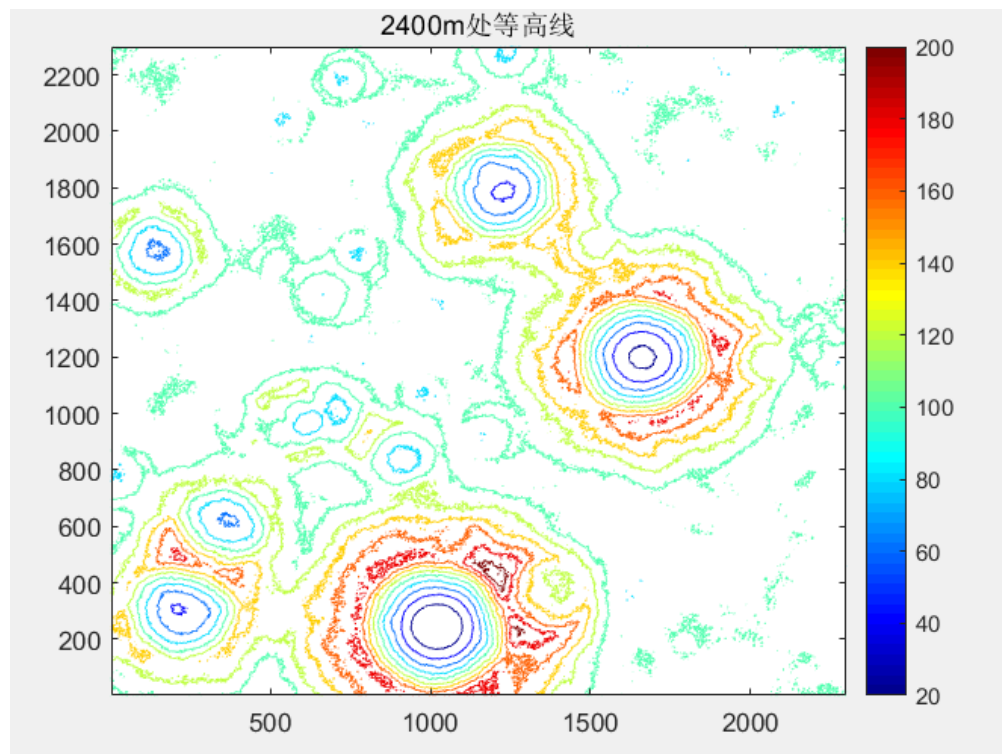
快速调整阶段的初始状态为主减速阶段末端的状态。代入初始状态值进行递归，使用python编程便可得出嫦娥三号在快速调整阶段的主发动机的推力方向、运行轨迹、运行速度和高度的变化曲线如图所示。

此处依次为图3-1、3-2、3-3、3-4
快速调整阶段末端的状态如图所示。

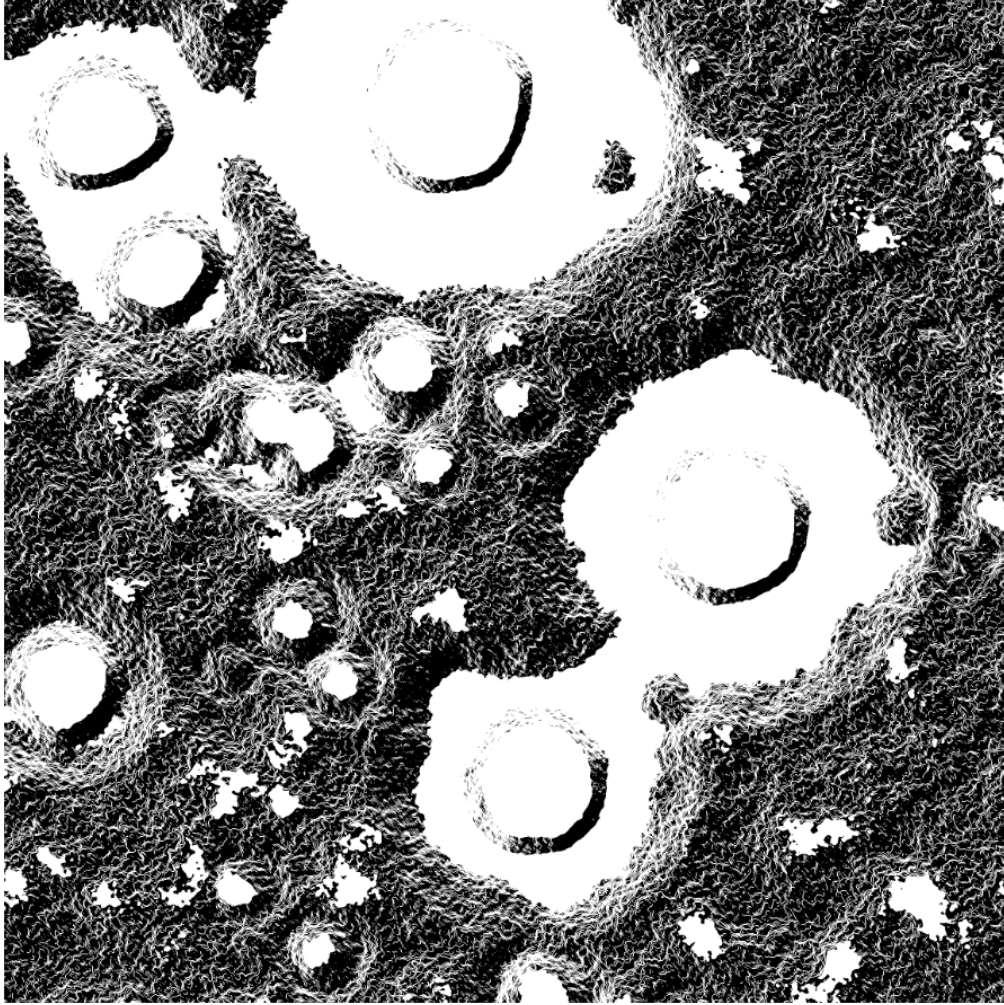
```
start
shuiping_V: 0.0009986183278307692
shuzhi_V: 35.117170098551185
time: 15.308199999977662
location: 383158.6602111742 54307.864948230286
v: 35.11717011274991
v_x: -7.73044360641243
v_y: 34.255742268645896
m: 1296.491700609427
theta: 1.7927409983596148
height: 2400.0688459947705
```

4.2.5 粗避障阶段的模型

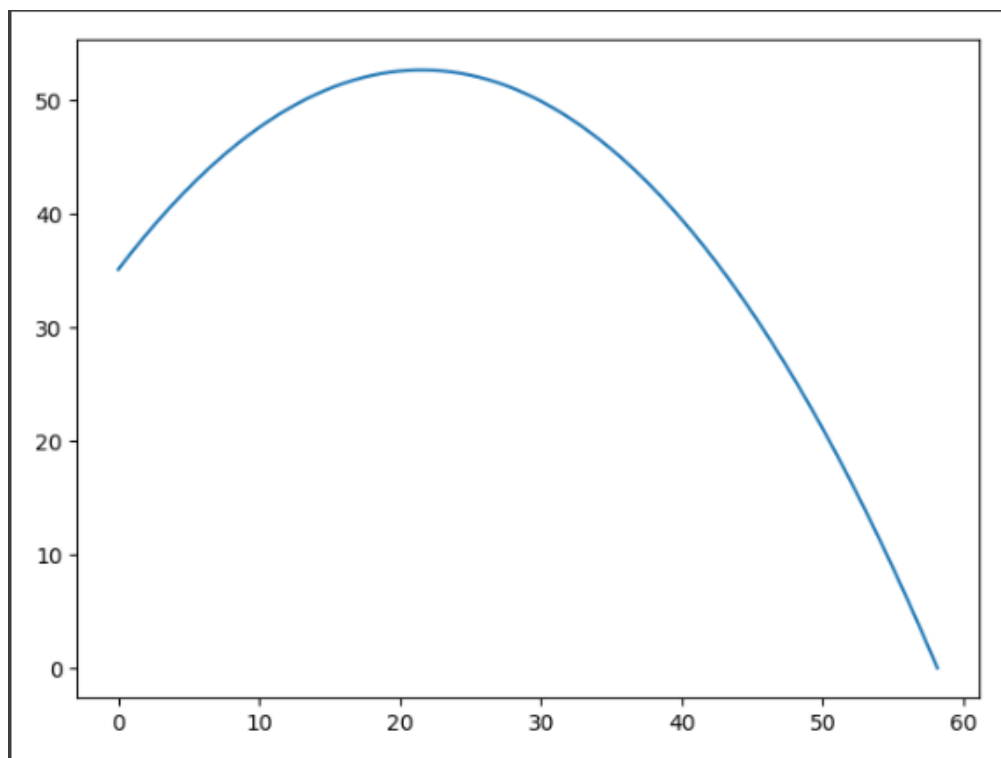
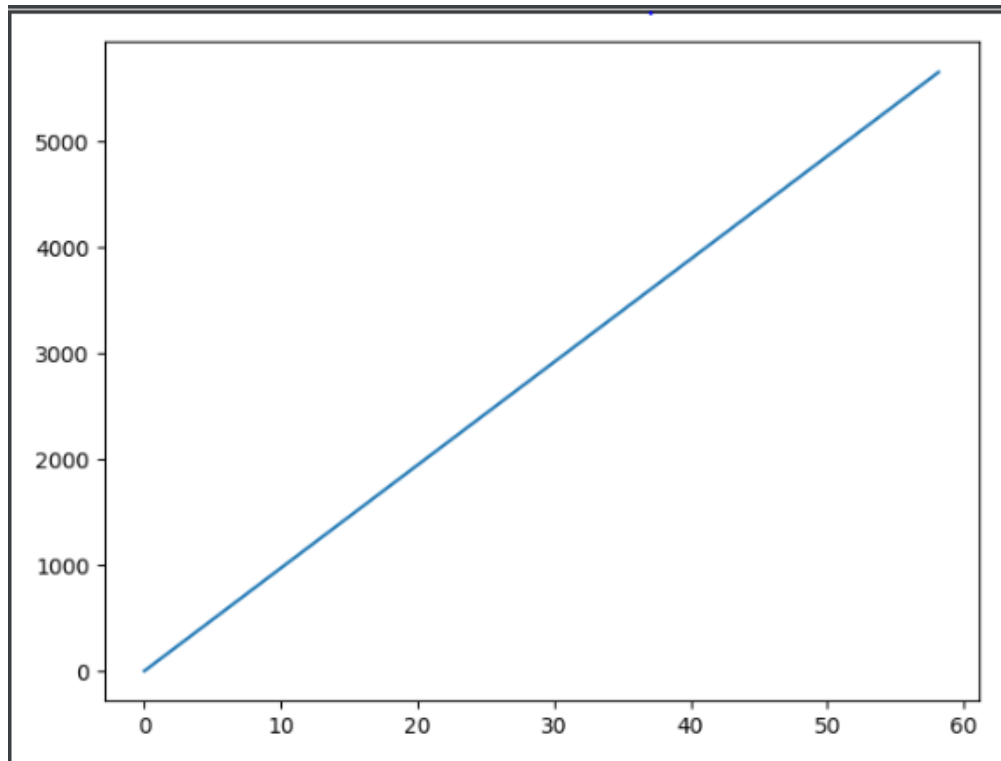
经过MATLAB编程可得到2400m处的等高线，如下图。

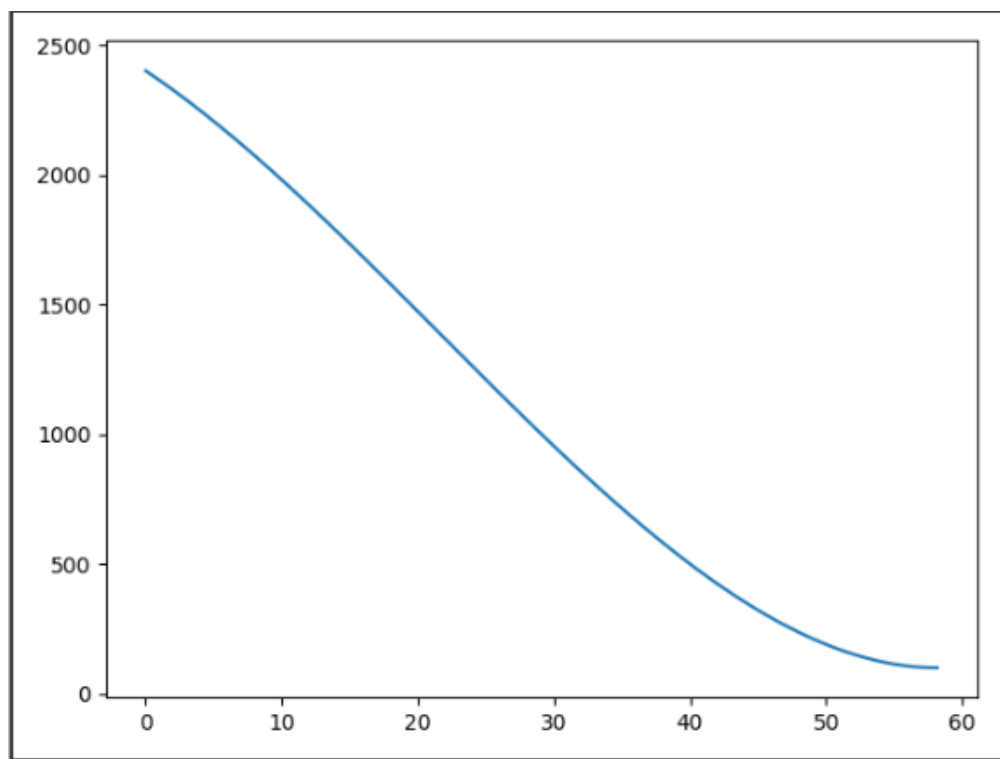


经过python编程可得到2400m处的梯度二值图，如下图。



结合两图，选取(1150,1150)为初步落月地点，该点地势平坦，燃料消耗最少且只有竖直方向的运动，方便计算。将月心作为原点，取图片为xOy平面，以向上为y轴，向右为x轴，以月心指向快速调整末端的嫦娥三号为z轴，建立直角坐标系。粗避障阶段的起始状态为快速调整阶段末端的状态。代入初始状态值进行递归，使用python编程便可得出嫦娥三号在粗避障阶段的主发动机的推力、运行速度和高度的变化曲线如图所示。





粗避障阶段末端的状态如图所示。

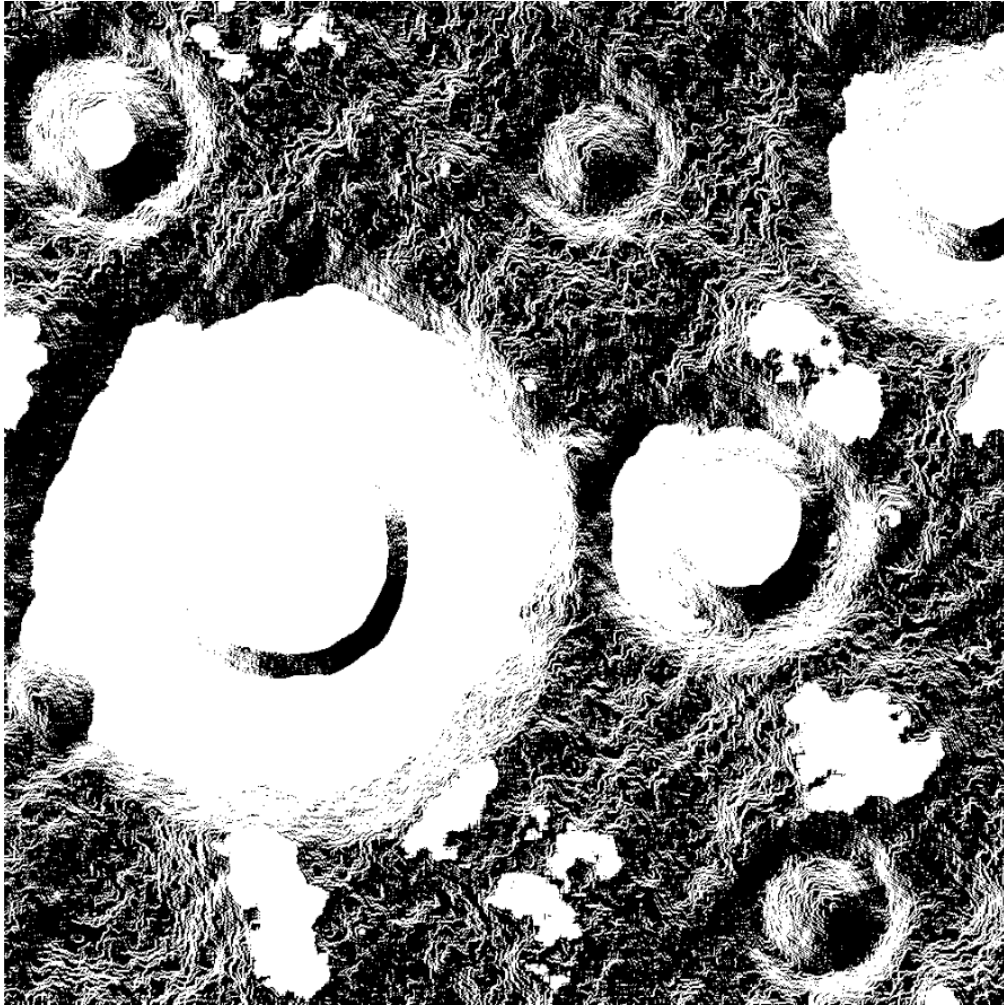
```
start  
time: 58.163500000807296  
v: -2.0799216107574817e-06  
m: 1240.5128554077905  
height: 100.01243841764517
```

4.2.6 精避障阶段的模型

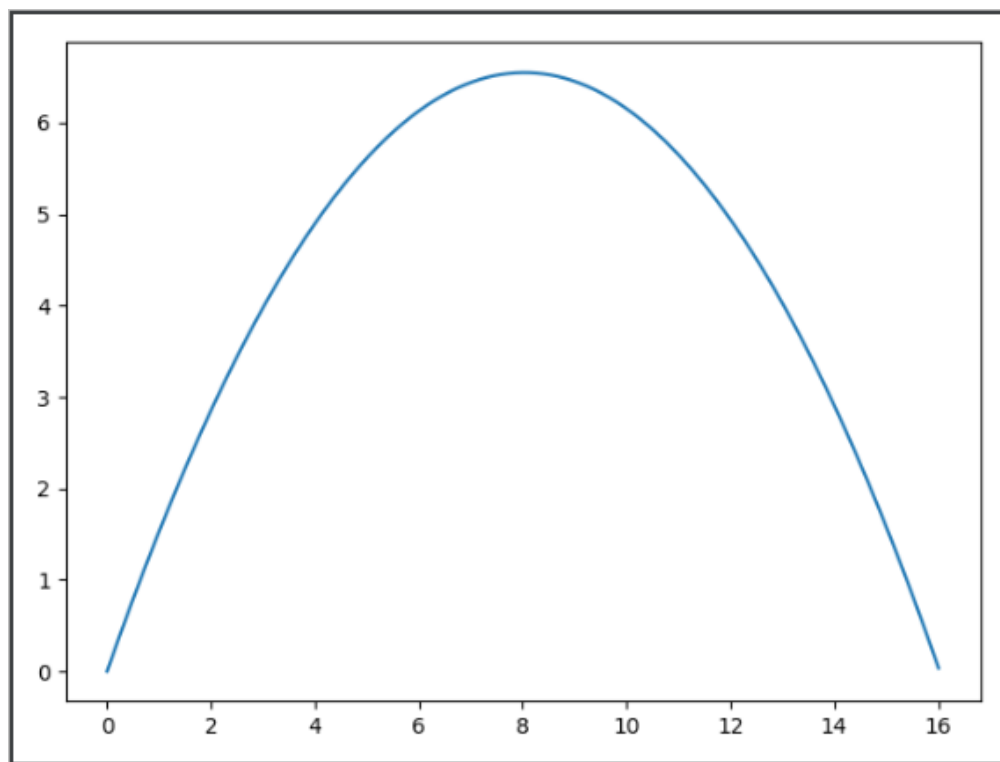
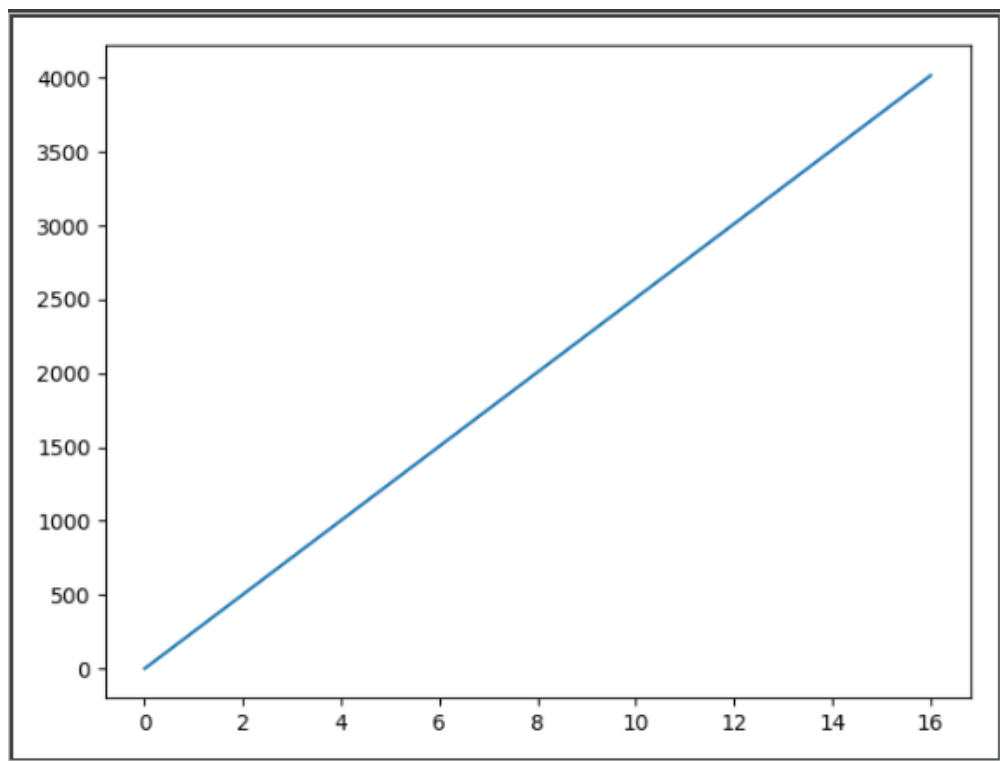
经过MATLAB编程可得到100m处的等高线，如下图。

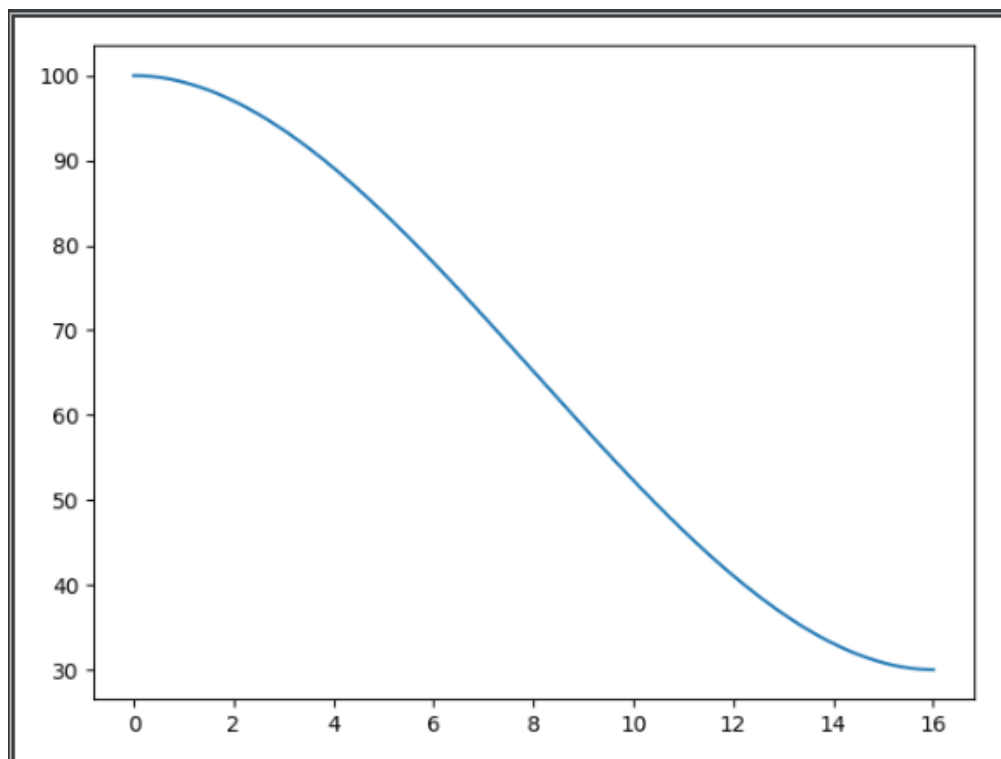
此处插图100.png

经过python编程可得到100m处的梯度二值图，如下图。



结合两图，选取（754,643）为初步落月地点，该点地势平坦，燃料消耗最少，即需要向x轴正方向移动25.4m，向y轴正方向移动14.3m。精避障阶段的起始状态为粗避障阶段末端的状态。代入初始状态值进行递归，使用python编程便可得出嫦娥三号在精避障阶段的主发动机的推力、运行速度和高度的变化曲线如图所示。



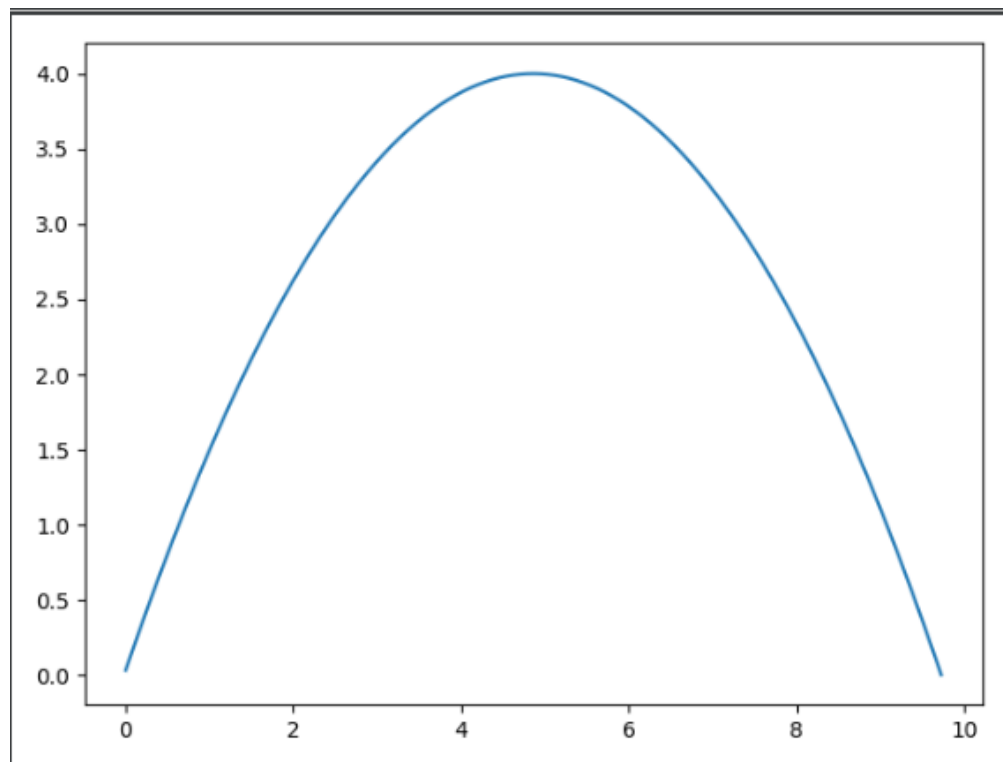
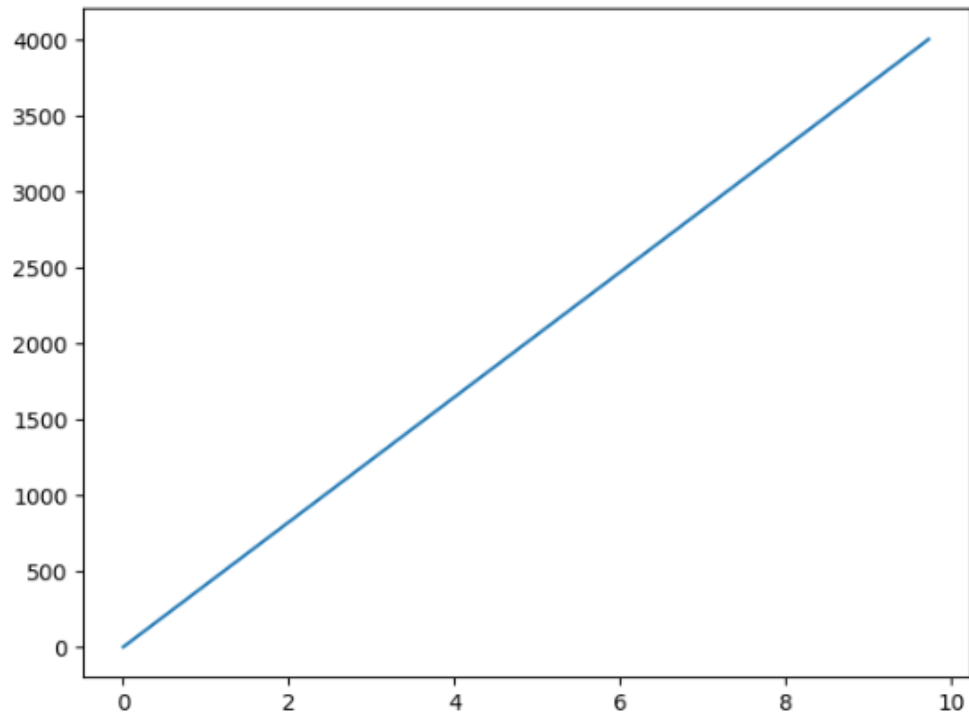


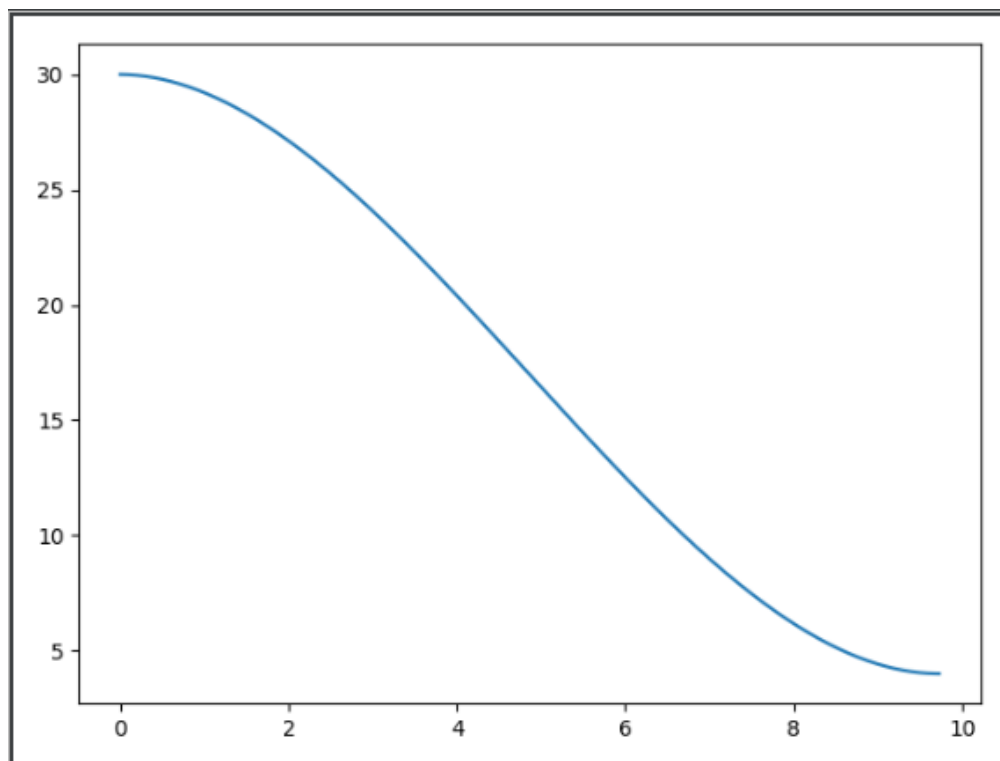
精避障阶段末端的状态如图所示。

```
start  
time: 16.0080999999976032  
v: 0.03550947606212837  
m: 1229.5722989064545  
height: 30.000099938130006
```

4.2.7 缓速下降阶段的模型

缓速下降避障阶段的起始状态为精避障阶段末端的状态。代入初始状态值进行递归，使用python编程便可得出嫦娥三号在缓速下降阶段的主发动机的推力、运行速度和高度的变化曲线如图所示。





缓速下降阶段末端的状态如图所示。

```
start
time: 9.7287999999990665
v: 0.004232693885219924
m: 1222.9481000070482
height: 4.000099628930911
```

4.2.8 自由落体阶段的模型

自由下降阶段的起始状态为距月面高度4m，主发动机推力为0，垂直自由落体运动，整个过程耗时大约1.5686s，落月速度为2.55m/s。

5 模型的优缺点

优点：

- 得到了完整的软着陆过程轨迹以及数学模型，使用离散化方法基本拟合了真实的情况；

- 可以具体刻画不同时刻嫦娥三号的状态；

缺点：

- 由于离散化的时候用区间端点代替各个时刻的状态，则时间间隔越大，误差越大；
- 在最小化燃料的方面仍有不足；

References

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会, 高教社杯全国大学生数学建模竞赛论文格式规范, 北京, 2009。
- [2] 韩中庚, 数学建模竞赛获奖论文精选与点评, 北京: 科学出版社, 2007。
- [3] 杜剑平、韩中庚, “互联网+”时代的出租车资源配置模型, 数学建模及其应用, Vol.4 No.4, Dec.2015。
- [4] 于作、高玥, 出租车行业规制的困境摆脱及其走势判断, 中国与全球化, Vol.6, 2015。
- [5] 于作、高玥, “网约车新政”实施两周年, 专家再议“打车难”, 中国经济周刊, 2018。

附录

附录1 guihua.m

```
a=[142.46 5018.36 323 ;  
24.29 612.76 7 ;  
150.17 4018.26 985 ;  
103.99 2253.69 286 ;  
238.64 4287.86 205 ;  
44.63 701.66 3 ;  
62.5 920.59 6 ;  
167.28 2401.82 180 ;  
325.78 3612.18 346] ;
```

```
x1=a(:,1);  
x2=a(:,2);  
y=a(:,3);  
X=[ones(9,1),x1,x2];  
cftool  
%b=regress(y,X)
```

附录2 quhua.m

```
data;  
a=data1(:,1);  
b=data1(:,2);  
scatter(a,b,'.')
```

```
longgang=0;  
luohu=0;  
futian=0;  
nanshan=0;  
baoan=0;  
longhua=0;  
guangming=0;  
yantian=0;  
pingshan=0;
```

```
for i=1:2000;  
if a(i,1)>=114.108254 && a(i,1)<=114.216626 && b(i,1)>=22.53873 && b(i,1)<=22.590794  
    luohu=luohu+1;  
end
```



```

if a(i,1)>=114.009656 && a(i,1)<=114.216626 && b(i,1)>=22.517231 && b(i,1)<=22.589726
    futian=futian+1;
end

if a(i,1)>=113.88993 && a(i,1)<=114.009656 && b(i,1)>=22.49052 && b(i,1)<=22.60374
    nanshan=nanshan+1;
end

if a(i,1)>=113.775953 && a(i,1)<=113.927156 && b(i,1)>=22.54821 && b(i,1)<=22.808845
    baoan=baoan+1;
end

if a(i,1)>=113.879438 && a(i,1)<=113.994564 && b(i,1)>=22.725267 && b(i,1)<=22.818839
    guangming=guangming+1;
end

if a(i,1)>=113.973724 && a(i,1)<=114.096756 && b(i,1)>=22.599069 && b(i,1)<=22.766996
    longhua=longhua+1;
end

if a(i,1)>=114.223237 && a(i,1)<=114.340807 && b(i,1)>=22.551948 && b(i,1)<=22.64057
    yantian=yantian+1;
end

if a(i,1)>=114.295102 && a(i,1)<=114.435668 && b(i,1)>=22.632831 && b(i,1)<=22.766196
    pingshan=pingshan+1;
end

if a(i,1)>=114.057661 && a(i,1)<=114.335633 && b(i,1)>=22.599736 && b(i,1)<=22.819505
    longgang=longgang+1;
end

if a(i,1)>=114.334771 && a(i,1)<=114.594201 && b(i,1)>=22.470082 && b(i,1)<=22.670854
    longgang=longgang+1;
end

end

```

附录3 readdata-fromcsv.m

```

data1=zeros(2000,2);
for i=1:2000
    g=['cabin (' num2str(i) ').csv'];
    data1(i,:) = xlsread(g,1,'C2:D2');
    i
end

```

附录4 shijian.m

```

rate=zeros(10,24);
for i=1:1:10
    g=['cabin (' num2str(i) ').csv'];
    data1 = readtable(g);
    data = table2cell(data1);    %??table×a??3é cell'
    data(:,8)=[];
    %b=str2num(char(data))
    % a=find(data(:,2)<'2011/04/18 01:00:00');
    scale=size(data);
    n=scale(1);
    state=data(:,5);
    state=cell2mat(state);
    date = datevec(data(:,2));
    count=zeros(24,1);
    load=zeros(24,1);
    for j=1:n
        count(date(j,4)+1)=count(date(j,4)+1)+1;
        if state(j,1)==1
            load(date(j,4)+1)=load(date(j,4)+1)+1;
        end
    end
    a=load./count;
    rate(i-50,:)=a';
end

```