

# 机场的出租车问题

2019年9月15日

## 摘要

出租车是许多乘客下飞机后去市区或其他目的地的较好选择，在机场这一综合客运枢纽承载了较大运力。本文运用排队论、线性回归、模糊数学等知识建立数学模型，成功解决了以机场出租车为背景而提出的问题。本文建立了司机到机场送客后去等待区排队载客还是放空返回市区拉客的决策模型，设计了机场乘车区排队系统以提高乘车效率，并提出了为短途载客再次返回机场的出租车提高收益的优先安排方案。

针对问题一，我们基于排队论，将出租车排队服务系统抽象为 $M/M/1/\infty/\infty$ 的单服务台排队模型，根据Little公式求出司机在机场内的平均等待时间，并考虑到乘客数量的影响，用惩罚项修正该时间。由此，可以计算司机采用两种选择分别的收益，应用经济均衡模型，引入权重因子，列出权重方程，从而解出司机选择去等待区排队载客的概率，这个概率越大，越推荐司机去等待区排队载客。具体抉择，见5.1.5。

针对问题二，结合深圳宝安机场的出租车数据，对数据进行可视化，提取数据中的有效信息，代入问题一建立的模型求出司机选择去等待区排队载客的概率。对整体数据进行平均值检验，利用模型计算出的概率值与实际的概率值的相对误差很小。对原有数据进行切割，将原有变量使用线性回归拟合，把问题一建立的模型、线性回归模型与实际情况进行对比，发现所建立的模型在长期和短期都有较好的周期性。这说明得到的模型较好的拟合了实际情况，并对司机的决策有指导意义。

针对问题三，基于排队论，构造了两种出租车排队服务系统，抽象成了多服务台并列排队模型和出租车阵列单服务台排队模型，计算每个模型的乘客等待时间、出租车等待时间并加权处理，得到评判乘车效率的指标，其中多服务台并列排队模型的评判指标为 $W_1 = 0.7362(min)$ ，出租车阵列单服务台排队模型的评判指标为 $W_2 = 0.6075(min)$ ，发现使用出租车阵列单服务台排队模型更能提高乘车效率。

针对问题四，我们基于模糊数学，建立了司机返回机场的吸引力函数，并根据吸引力函数来界定短途载客再次返回的出租车。在划分区间中，让吸引力不同的出租车驶入不同车道，从而实现“优先”安排。考虑到深圳宝安国际机场上客区的实际情况以及深圳宝安国际机场到各行政区的实际情况，我们针对乘客的目的地不同，给出了一个使得各出租车的收益尽量均衡的短途优先安排方案。具体方案，见5.5.2。

最后，给出本模型的优缺点及改进方向。

**关键词:** 排队论    经济均衡模型    模糊数学    机场出租车    概率决策

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

出租车是一种传统交通运输方式，以其速度较快、舒适度较高等优势受到人们欢迎，特别是在机场等综合客运枢纽，出租车承载了较大运力。近些年来，网约车发展势头迅猛，对出租车的冲击力造成了一定的冲击，但由于大部分机场没有网约车的专门泊位，导致出租车仍然是乘客的较佳选择。中国大部分机场的出发区和到达区是分开的，当出租车司机到机场送客完后，他们可以选择前往到达区的出租车等待区排队等待载客，也可以选择放空返回市区拉客。如果出租车司机排队等待载客，他们保证会拉到客人，但可能要在等待区等待一段时间；如果出租车放空返回市区，他们无需在此等待，但会造成空载的损失。影响出租车司机做出决策的因素是复杂的，出租车司机以其收益出发，考虑乘客数量、载客时间、航班情况等因素。

## 1.2 问题提出

根据以上背景，需要解决以下问题：

- 1.研究出租车司机做出决策的影响因素，从司机收益和乘客数量出发，建立一个出租车司机选择的决策模型，帮助司机选择前往等待区还是放空返回市区；
- 2.依据问题一所建模型，收集国内某城市的相关数据，做出该机场出租车司机的选择方案，并评价该模型的合理性和对相关因素的依赖性；
- 3.假如某机场乘车区有两条并行车道，设置合理的上车点，在出租车和乘客的安全都能得到保证的情况下，提高乘车的效率，减少出租车和乘客排队等待的时间；
- 4.某些时候，有些乘客在机场打车里程较短，出租车司机送完这些乘客后，可能重新返回机场载客，对于这种出租车，管理部门拟给予其一定“优先权”，使得各出租车的收益尽量均衡。给出一个可行的方案。

# 2 模型假设

- 假设机场的人流车流都具有时间短期（周）和长期（月度、季度）上的周期性；
- 司机符合理性人的假设，且在每一次决策中，仅考虑当前决策收益；
- 假设司机在运营过程中没有挑客、拒载等违反运营规范的行为；
- 假设两车道的出租车排队服务系统是多服务台并列排队模型的标准型，即乘客源和出租车源无限；各乘客的到达相对独立，且到达规律服从泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从负指数分布；
- 假设出租车阵列的出租车排队服务系统是单服务台排队模型的标准型，即乘客源和出租车源无限；各乘客的到达相对独立，且到达规律服从泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从负指数分布。

# 3 符号说明

- $E_T$  ..... 司机预期排队时间
- $Q_p$  ..... 乘客数量
- $D$  ..... 乘客数量影响因子

- $T_d$  ..... 机场接单平均用时
- $R_d$  ..... 机场接单平均盈利
- $T_u$  ..... 返回市区的平均空载时间
- $T_{ave}$  ..... 每单平均用时
- $R_{ave}$  ..... 每单平均利润
- $L_q$  ..... 稳态时排队平均车辆数
- $W_q$  ..... 稳态时排队平均等待时间
- $\lambda$  ..... 到达间隔时间分布参数
- $\mu$  ..... 服务时间分布参数
- $\rho$  ..... 业务强度
- $P$  ..... 推荐司机选择排队的概率
- $P_c$  ..... 权重因子
- $P_{Model}$  ..... 模型推荐司机排队概率
- $P_{Reality}$  ..... 实际司机排队概率
- $k_a$  ..... 车均载客数
- $t_a$  ..... 每车上客时间
- $t_b$  ..... 车辆离开乘车区时间
- $t_c$  ..... 每车服务时间
- $y$  ..... 机场接客一单收入
- $x$  ..... 机场接客一单里程
- $\mu_A(x)$  ..... 司机返回机场的吸引力函数

## 4 问题分析

### 4.1 问题一的分析

问题一要求建立出租车司机选择前往等待区排队等待载客或者放空返回市区拉客的决策模型。要建立该决策模型，需要引入推荐司机选择排队的概率 $P$ ， $P$ 值越大，越推荐司机前往等待区排队等待载客。

首先，本文使用排队论的原理，设车辆和乘客的到达均为泊松流，将出租车排队服务系统抽象为 $M/M/1/\infty/\infty$ 的单服务台排队模型，根据Little公式求出司机在机场内的平均等待时间。该平均等待时间还与机场乘客数量相关，因此要加上一项乘客数量的惩罚项。从而可以计算出司机下一单前往等待区排队等待载客的收益。之后，计算下一单放空返回市区拉客的平均收益。引入权重因子 $P_c$ ，用以权衡两种选择的收益程度，建立权衡等式，从而解出 $P$ ，据此进行决策。

## 4.2 问题二的分析

问题二要求结合具体数据，给出对应的选择方案，并对模型进行分析。

首先，进行数据的获取与处理。本文选用深圳市2011年04月18日至2011年04月26日（共8.5天）的城市出租车GPS轨迹数据，通过地图确定深圳宝安国际机场的经纬度范围，通过经纬度匹配，获取在这段时间内出租车经过深圳宝安国际机场的路线，从而获得司机前往等待区排队等待和放空返回市区拉客的选择情况。将数据可视化，绘出出租车在机场内等待时间、机场所接单所需用时、空载在机场外接单可能损失时间、机场接单价格分布的直方图，算出对应值，再获取资料得到出租车每单平均收入和用时。

随后，进行结果的求解与分析。将以上计算的这些量代入问题一建立的模型，将模型计算的值与司机的实际情况进行对比，验证模型的合理性。然后对数据作时序切割得到子数据，对原有变量使用线性回归拟合，把问题一建立的模型、线性回归模型与实际情况进行对比，验证模型对相关因素的依赖性。

## 4.3 问题三的分析

问题三是一个排队系统设计的问题。本文使用排队论的原理，将两车道的出租车排队服务系统抽象为 $M/M/2/\infty/\infty$ 的多服务台并列排队模型，计算出乘客的排队等待时间，同理可对称地求出出租车的排队等待时间，给两部分时间赋予权重，从而得到综合反应乘车效率的指标。在该模型的基础上进行优化，将每条车道两辆、共四辆出租车看成一个出租车阵列，基于出租车阵列设计出租车排队服务系统，抽象为 $M/M/1/\infty/\infty$ 的单服务台并列排队模型，计算该模型的乘车效率指标，随后将两种模型的性能进行比较，找到乘车效率较高的模型。

## 4.4 问题四的分析

问题四要求给出一个可行的“优先”安排方案，对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得出租车的收益尽量均衡。

要确立该方案，需要引入模糊数学的隶属度函数来量化返回机场重新载客对司机的吸引力。同时考虑司机从机场出发的这一笔单所获得的收入与这一笔单里程的关系，建立以里程为自变量的吸引力函数，并根据吸引力函数来界定短途载客再次返回的出租车。在划分区间中，让吸引力不同的出租车驶入不同车道以实现“优先”安排。综合考虑深圳宝安国际机场上客区的实际情况以及深圳宝安国际机场到各行政区的实际情况，同时针对乘客的目的地不同，给出一个使得各出租车的收益尽量均衡的短途优先安排方案。

# 5 模型的建立与求解

## 5.1 问题一的模型建立与求解

排队论是研究排队系统（又称随机服务系统）的数学理论和方法，是运筹学的一个重要分支。排队服务系统是指由输入、输出、服务规则、服务实施四部分组成的系统。在本题中，我们建立以乘客和空车为输入、载客出租车为输出、乘客满足出租车的运营为“服务台”的出租车排队服务系统，并综合考虑机场乘客数量的变化规律，运用经济均衡思想，建立出租车司机选择决策模型<sup>[3]</sup>。

### 5.1.1 车辆的到达为泊松流

设 $N(t)$ 表示在时间段 $[0, t)$ 内到达的车辆数， $P_n(t_1, t_2)$ 表示在时间段 $[t_1, t_2)$ 内有 $n(n \geq 0)$ 辆车到达的概率，即

$$P_n(t_1, t_2) = P\{N(t_2) - N(t_1) = n\} \quad (1)$$

由于 $P_n(t_1, t_2)$ 满足以下三个条件：

1. 无后效性：在不相交的时间区间内车辆的到达数是相互独立的，即在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内到达 $k$ 辆车的概率与 $t$ 之前到达多少辆车无关；

2. 平稳性：对于充分小的 $\Delta t$ ，在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内到达一辆车的概率只与时间长度 $\Delta t$ 有关，而与起始时刻 $t$ 无关，且

$$P_1(t, t + \Delta t) = \nu \Delta t + o(\Delta t) \quad (2)$$

其中 $\nu > 0$ 称为概率强度，即表示单位时间内有一辆车到达的概率；

3. 普通性：对于充分小的 $\Delta t$ ，在时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内有2个或2个以上的顾客概率极小，可以忽略不计，即

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(t, t + \Delta t) = o(\Delta t) \quad (3)$$

故称车辆的到达形成泊松流。

由排队论理论可知，当输入过程是泊松流时，车辆到达的时间间隔必须服从负指数分布（密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$ ）。也就是说，车辆到达的时间间隔服从负指数分布，与车辆到达形成参数为 $\lambda$ 的泊松流是等价的。

### 5.1.2 乘客的到达为泊松流

对于乘客而言，乘客的到达同样满足上述三个性质，故乘客的到达也是泊松流，乘客到达的时间间隔也必须服从负指数分布。

### 5.1.3 司机预期排队时间

由于车辆与乘客的到达都是泊松流，那么乘客相继到达时间间隔分布为负指数分布，服务时间的分布为负指数分布。我们可以建立以乘客和空车为输入，载客出租车为输出，而以乘车区内的乘客为“服务台”的单点式出租车排队服务系统。

考虑乘客数量充分时，由排队论理论，系统属于 $M/M/1/\infty/\infty$ 的情况。它表示：系统容量和顾客源无限；各车辆的到达相对独立，且到达规律服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布；各车辆的服务时间相对独立，且服从参数为 $\mu$ 的负指数分布。其中， $\lambda$ 表示每分钟进入机场出租车上客区等候的车辆数， $\mu$ 表示每分钟出租车出发数。车辆到达后排队一队，先到先服务。令 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ， $\rho$ 称为该系统的业务强度。

在系统达到稳态时，排队的平均车辆数为

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (4)$$

根据Little公式，司机的平均排队等待时间为

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (5)$$

当乘客数量不充分时，即考虑到机场乘客数量的变化规律，则通过增加一项惩罚项来增加等待时间，如果乘客数量越少，惩罚项就越大，即惩罚项与乘客数量反向变动，惩罚项为 $\frac{D}{Q_p}$ ，其中 $Q_p$ 为乘客数量， $D$ 为一个常数，表示乘客数量影响因子。

综合考虑“蓄车池”车辆数和机场乘客数量的变化规律，司机的预期排队时间为

$$E_T = W_q + \frac{D}{Q_p} \quad (6)$$

#### 5.1.4 推荐司机选择排队的概率

送客到机场的出租车司机都将会面临两个选择：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。

(B) 直接放空返回市区拉客。

对于选择(A)，司机下一单的预期平均收益为：

$$\frac{T_d \cdot R_d}{T_d + E_T} \quad (7)$$

对于选择(B)，司机下一单的预期平均收益为：

$$\frac{T_{ave} \cdot R_{ave}}{T_{ave} + T_u} \quad (8)$$

设推荐司机选择排队的概率为 $P$ ，令 $P = 1 - P_c$ ，其中 $P_c$ 为权重因子，用以权衡选择(A)与选择(B)的收益程度，即：

$$P_c \times \frac{T_d \cdot R_d}{T_d + E_T} = (1 - P_c) \times \frac{T_{ave} \cdot R_{ave}}{T_{ave} + T_u} \quad (9)$$

由(6)(7)式及 $P = 1 - P_c$ 可解得：

$$P = \frac{(T_u + T_{ave}) \cdot T_d \cdot R_d}{(T_u + T_{ave}) \cdot T_d \cdot R_d + (T_d + W_q + \frac{D}{Q_p}) \cdot T_{ave} \cdot R_{ave}} \quad (10)$$

#### 5.1.5 司机的选择策略

从模型中得到的 $P$ 即为推荐司机选择排队的概率， $P$ 的取值范围为 $[0, 1]$ 。 $P$ 值越大，说明我们更加推荐司机做出选择(A)，即前往到达区排队等待载客返回市区。具体而言，若

(1) $P > 0.5$ ，司机应作出选择(A)，此时排队等待乘客的预期平均收益高于直接放空返回市区拉客的预期平均收益；

(2) $P < 0.5$ ，司机应作出选择(B)，此时排队等待乘客的预期平均收益低于直接放空返回市区拉客的预期平均收益；

(3) $P = 0.5$ ，司机可以考虑自身其他情况应作出选择，此时排队等待乘客的预期平均收益等于直接放空返回市区拉客的预期平均收益。

## 5.2 问题二的数据及其处理

### 5.2.1 数据介绍

针对问题二，我们收集了深圳市2011年04月18日至2011年04月26日（共8.5天）的城市出租车GPS轨迹数据，其中包含13781台出租车的时间位置和属性信息（文件总大小9.37GB）。（数据来源于同济大学数学系“用出租车GPS数据分析深圳道路交通情况”<sup>[13]</sup>）

数据包含数据采集时间段为2011.04.18 0:00:01 ~ 2011.04.26 11:50:01,车辆总数为13781 台。值得注意的是,根据《2012年深圳统计年鉴》,2011年深圳市总共拥有出租车数量为14340 台<sup>[9]</sup>,而我们找到的数据占了约出租车总数的96.10%,从而可以近似认为所分析数据和总体基本没有差异。

数据包含,车牌号(name)、采集时间点(time)、经度(jd)、纬度(wd)、车辆载客状态(打表情况)(state)、车速(v)、行车方向(angle)。(可视化见数据处理部分)

对于每台车辆均存有其2011.04.18 0:00:01 ~ 2011.04.26 11:50:01内的相关数据,并分别保存在单独文件内。

文件内部保存形式如下:

name	time	jd	wd	status	v	angle
粤B85W15	2011/4/18 0:00	114.0895	22.5708	1	14	3
粤B85W15	2011/4/18 0:00	114.0895	22.57068	1	28	3
粤B85W15	2011/4/18 0:00	114.0895	22.57033	1	34	3
粤B85W15	2011/4/18 0:00	114.0896	22.57018	1	36	3
...	...	...	...	...	...	...

注:因行车环境的影响,记录采集间隔时间周期不恒定,具体请见附录说明。

### 5.2.2 其他数据和参数

查阅《2012年深圳统计年鉴》,根据“城市建设和环境保护”中“全市公共交通”部分,获知深圳市2011年公共交通情况如下,其中出租车市场供给规模为14340台<sup>[9]</sup>。

年份	年末实有公共汽车(辆)	年末公共汽车营运线路条数(条)	的士(辆)	轨道交通线路条数(条)
2011	12456	758	14340	4

根据相关参考文献,深圳市2010年出租车市场供给规模和组成情况如下:

	红的	黄的	绿的	运营牌照总数
数量	10196	309	2494	12999

可见,“红的”在深圳出租车中占绝大约(78.4%)的份额,从而下面考虑2011年深圳市出租车相关情况时,为了简洁明了,均以“红的”的相关参数指标为准,包含“黄的”、“绿的”的研究分析同理,在本文的分析中不再赘述。

根据“南方日报”报道<sup>[12]</sup>,并查阅相关相关文献<sup>[11]</sup>核对获知,深圳市2011年出租车基本价格如下:

	起步价	里程费	返空费	夜间行驶费	等时费
红的	10元2公里	2.4元/公里	25公里以上加收里程费的30%	加收里程费30%	0.8元/分钟
绿的	6元1.5公里	2.4元/公里	15公里以上加收里程费30%	加收里程费20%	0.5元/分钟

为了方便处理，我们选择四边形区域表示宝安国际机场所在区域，通过谷歌地图标定我们确定深圳宝安国际机场边界经纬度如下；值得说明的是，由于2011年深圳市未建设目前使用的T3 航站楼，而使用当时的T1，T2航站楼。

边界点	左上	左下	右上	右下
Latitude	22.6551259772	22.6020463674	22.6622545118	22.6129016261
Longitude	113.7860012054	113.8137245178	113.8113212585	113.8394737244

### 5.2.3 数据分析与可视化

1. 根据其中单台车7天内的GPS数据可以得到，每台车的行驶轨迹如Figure1所示（以第一台车为例）：

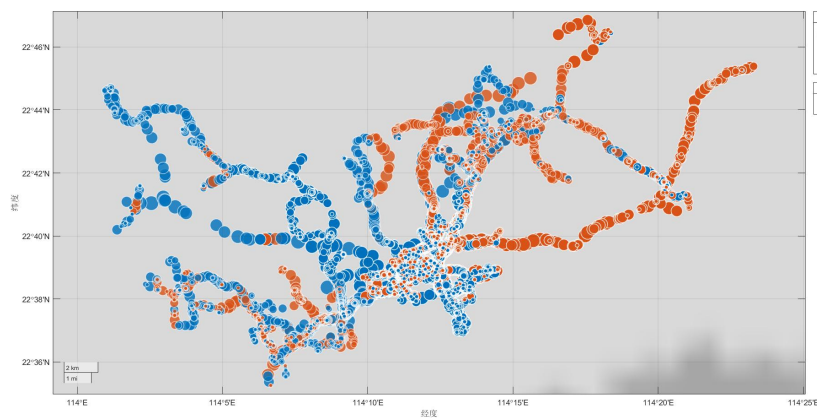


Figure 1: 单台出租车的行驶轨迹

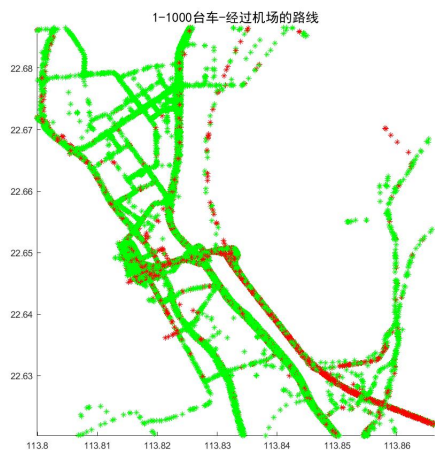
通过GPS数据分析，我们得到在2011.04.18至2011.04.26经过机场的车辆总路径数为131897条（具体信息见支持材料）。

2. 去除所有路线中GPS数据中的噪声数据和打表机器损坏的车辆数据，得到可用的出租车过机场的路线的选择如下：

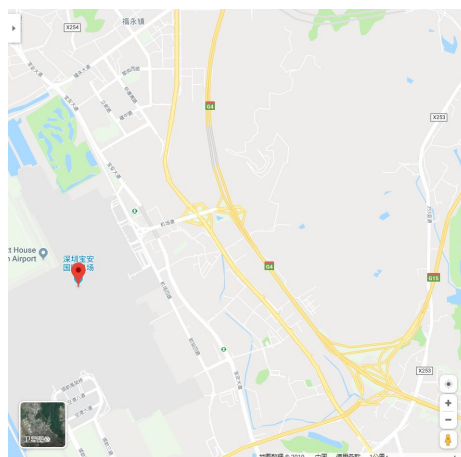
	在机场载客	空载离开机场	总数
数量（趟）	63112	57486	120598

3. 过机场的路线和相应城市路网结构如Figure2 所示（为了图示清晰，我们绘制1-1000 台车的行车轨迹）。





(a) 1-1000条路径的行车轨迹



(b) 路线对应的路网结构

Figure 2: 机场路线可视化

4. 通过出租车流量分析，我们发现深圳宝安机场在2011年具备抵达层和出发层分离的结构特点，车流量可视化如Figure3所示。其中上方车辆聚集区为出发区，下方车辆聚集区为抵达区，故数据满足于题设分析。

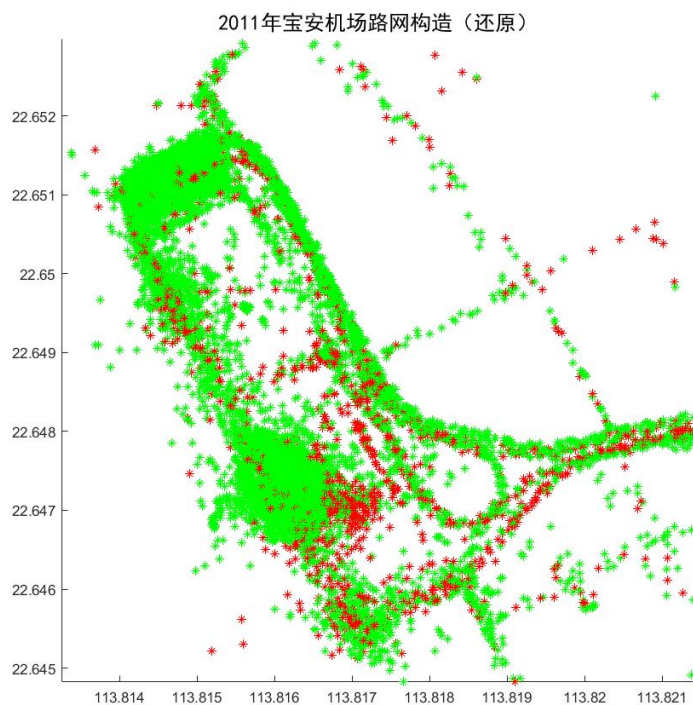


Figure 3: 宝安机场内部结构（还原2011年）

5. 通过时序的出租车运行情况分析，可以分析计算得到“机场内等待时间数据”、“机场所接单的用时数”

据”、“空载机场外接单可能时间损失数据”其可视化如Figure4(a) ~ (c) 所示。

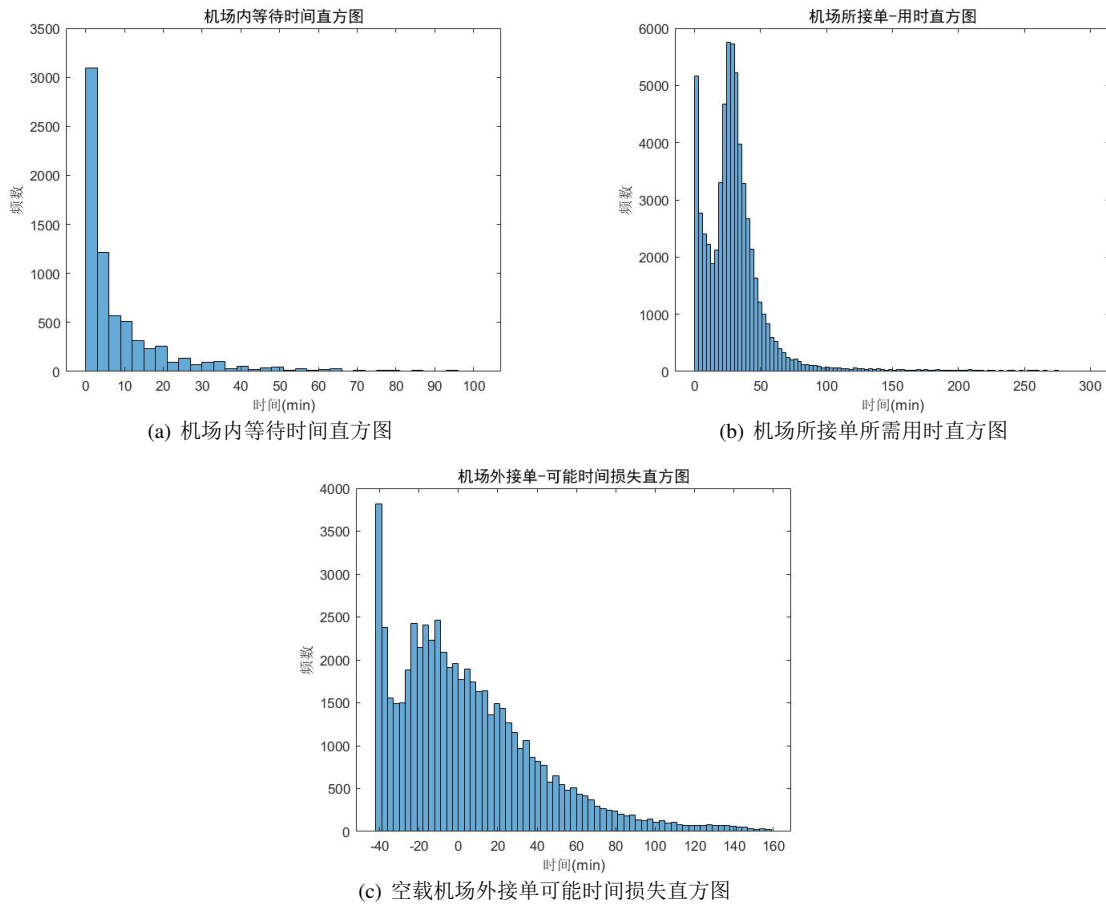


Figure 4: 时间数据可视化

6. “机场内等待时间数据”、“机场所接单的用时数据”、“空载机场外接单可能时间损失数据”均值如下：

	机场内等待时间	机场所接单的用时	空载机场外接单可能时间损失
均值 (min)	9.6369	31.6334	14.5606

7. 此外依据相关数据中“2011年深圳市出租车服务费用说明”，同时结合所有过机场路线运营的里程和时间可以计算出，在机场接单的收益分布数据，可视化如Figure5 所示。其平均值为45.3384 元。

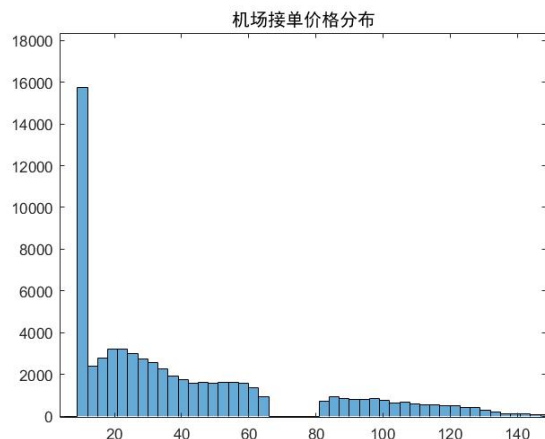


Figure 5: 机场接单价格分布直方图

8. 查阅相关资料得到出租车司机收入情况并推算相关工作时长。

深圳市出租车司机每月的平均工资大约为8000元左右，因此平均一天深圳市出租车司机的工资大概为267元。此外，平均每日接单为6单，则出租车“每单平均费用”及“每单平均用时”见下表。

$T_{ave}(\text{min})$	$R_{ave}(\text{yuan})$
30.0	44.5

## 5.3 问题二的结果及其分析

### 5.3.1 数据优势

问题2使用2011.04.18到2011.04.26（为期8.5天）真实城市出租车数据进行分析，并求出相关参数，验证问题1中所建立模型。并证实了模型的合理性并验证模型对相关因素的数据依赖性。

特别值得说明的是我们选取的深圳城市出租车数据具有以下优势：

1. 深圳宝安国际机场，具备抵达区和出发区分离的结构特点，符合题目的研究假设（见数据处理机场内部路线还原）。
2. 深圳宝安国际机场，人流量大，且（2011年）深圳市出租车规模大，司机面临等待接机和外出接单的权衡取舍。
3. 2011年，网约车还未兴起，数据展示出的情况更加实际和准确（其未作为出租车的替代出行选择出现）<sup>[14]</sup>。
4. 数据出租车数量大，涵盖深圳市2011年约96.10%的出租车信息，能真实可靠的还原现实情况。

### 5.3.2 模型的合理性和依赖性分析

#### 1. 整体数据使用平均值检验

由上述“数据分析”部分得到， $E_T$ (“司机预期排队时间”)、 $T_d$ (“机场接单平均用时”)、 $R_d$ (“机场接单平均盈利”)、 $T_u$ (“返回市区的平均空载时间”)、 $T_{ave}$ (“每单平均用时”)、 $R_{ave}$ (“每单平均利润”)。

	$E_T$	$T_d$	$R_d$	$T_u$	$T_{ave}$	$R_{ave}$
取值	9.6369	31.6334	45.3384	14.5606	30.0	44.5

将上述数据带入公式求得P值:

$$P_{Model} = \frac{(T_u + T_{ave}) \cdot T_d \cdot R_d}{(T_u + T_{ave}) \cdot T_d \cdot R_d + (T_d + E_T) \cdot T_{ave} \cdot R_{ave}} = 0.5370291434738039 \quad (11)$$

而实际上可以由, 选择“在机场载客”数目为63112, 选择“空载离开机场”数目为57486, 从而求得P值。

$$P_{Reality} = \frac{63112}{63112 + 57486} = 0.523325428282 \quad (12)$$

二者差异  $\frac{P_{Reality} - P_{Model}}{P_{Reality}} \approx 0.0262$  非常小, 即可以认为在整体的平均的状况下, 模型求解的结果是能够合理解释实际的现象的。

## 2. 数据的依赖性检验与线性模型对比:

为了验证模型对于不同数据的可靠性, 我们将原有数据做两种(时序)切割。分别分成  $9(8.5) \times 1Day$  和  $52 \times 4Hours$  两份大小的数据, 并对原有变量同时使用线性回归拟合, 比较建立的决策模型和拟合所得线性回归模型。

### (1) 使用 $9(8.5) \times 1Day$ 的数据检验

使用相应数据统计分析, 参照  $P_c = 1 - P$  和  $P$  值的计算公式(10), 得到数据和结果如下:

$T_d$	$R_d$	$T_u$	$E_T$	实际选择P值	模型决策P值	线性回归P值
29.53488	40.18924	20.63828	11.5897195	0.506072	0.522631	0.506072
34.06397	48.40036	15.73205	8.91291803	0.52372	0.567878	0.52372
34.56369	46.11369	15.25535	10.7836646	0.518368	0.543687	0.518368
31.3431	45.34074	13.32511	8.24992941	0.526553	0.538074	0.526553
32.94117	46.54315	10.5938	7.73707286	0.527281	0.534032	0.527281
28.46058	41.33528	15.82332	9.38658993	0.524456	0.516191	0.524456
28.99789	43.58585	12.34945	10.4082162	0.529801	0.504326	0.529801
32.24047	47.94801	11.04048	11.2908169	0.529249	0.521919	0.529249
31.12961	51.367	15.22752	10.6273303	0.534671	0.564712	0.534671

分别绘制模型“模型决策P值”和“线性回归P值”与“实际选择P值”的百分比差异图像(其中横轴第一天为2011.04.18)。

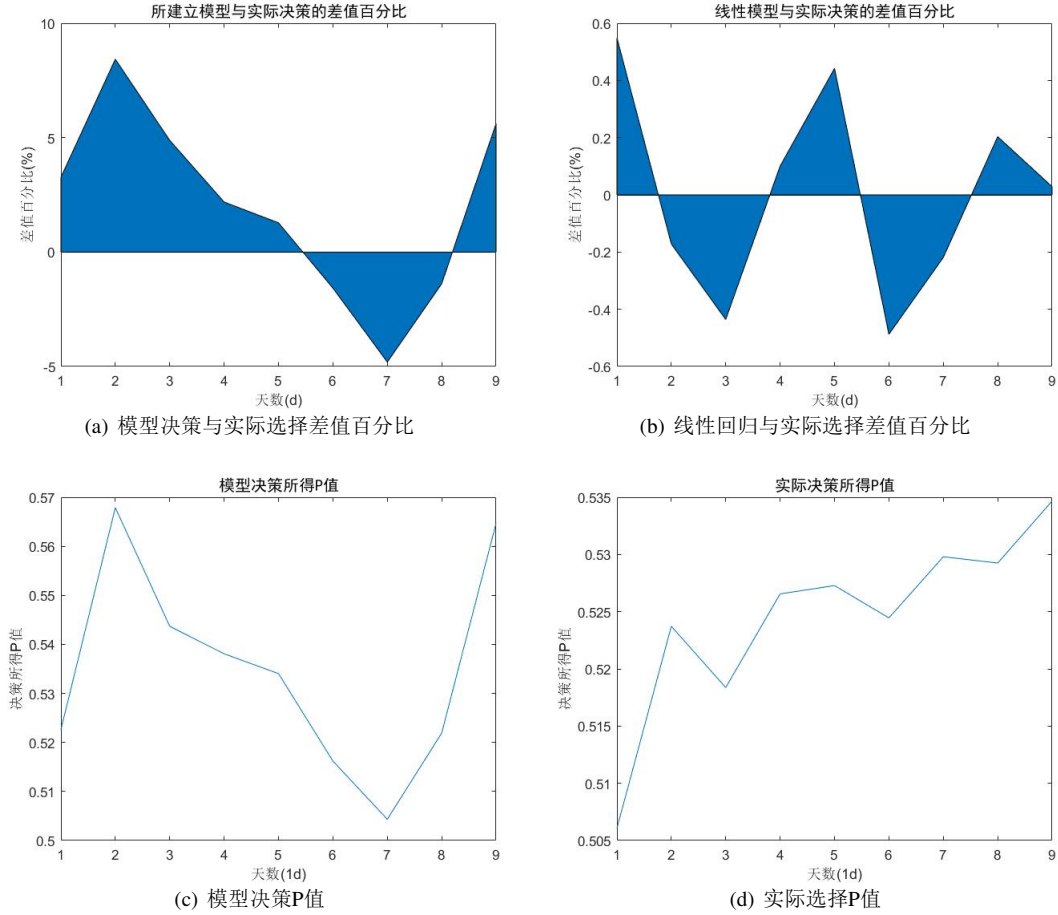


Figure 6:  $9(8.5) \times 1Day$ 中模型与实际比较

查询万年历获知，2011.04.18为周一，观察模型与实际差异在第6，7天时出现明显下降，这两天正是周六、周日，此后差距值又呈现明显上升趋势，整体呈现周期趋势。此模型在没有额外日期情况下，其决策结果自动对周末产生不同的调节，整体展现出模型在较长时间周期（周）上，具有良好的周期趋势的特点。而其自动在周末时出现反向调整，和实际情况也正好吻合。

相比而言，线性模型因为数据量非常小，差异值只是在实际值周围体现有非常小的类似随机的波动情况，没有展现出模型所具有的周期的波动性。

其中可以进一步分析选择排队的司机的决策的正确性，我们带入临界  $P_c = 0.5$  进入公式：

$$E_T = \frac{(T_u + T_{ave}) \cdot T_d \cdot R_d}{T_{ave} \cdot R_{ave}} - T_d \quad (13)$$

由以上公式，可以计算得出在完全信息的情况下，司机可以接受的最大等待时间。将这个临界时间和在该时间段内的所有排队司机作比较，统计计算出，做出了完全信息理性人假设下的正确决策的比率。

天数(d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
正确选择率	0.760181	0.892532	0.822441	0.838235	0.81943	0.758993	0.719434	0.784507	0.877828

可以看出，正确的比率在0.8左右波动，这说明近八成的司机选择，都是符合完全信息和理性人假设的预期的。对于不符合预期的偏差，我们的解释见“问题2结果分析”：

## (2) 使用 $52 \times 4Hours$ 的数据检验

因为计算所得数据篇幅较大，且和 $9(8.5) \times 1Day$ 的数据类似，故具体结果置于附录中。在此，分别绘制模型“模型决策P值”和“线性回归P值”与“实际选择P值”的百分比差异图像（其中横轴0刻度为2011.04.18 04:00:00，两刻度间间隔为4h）。

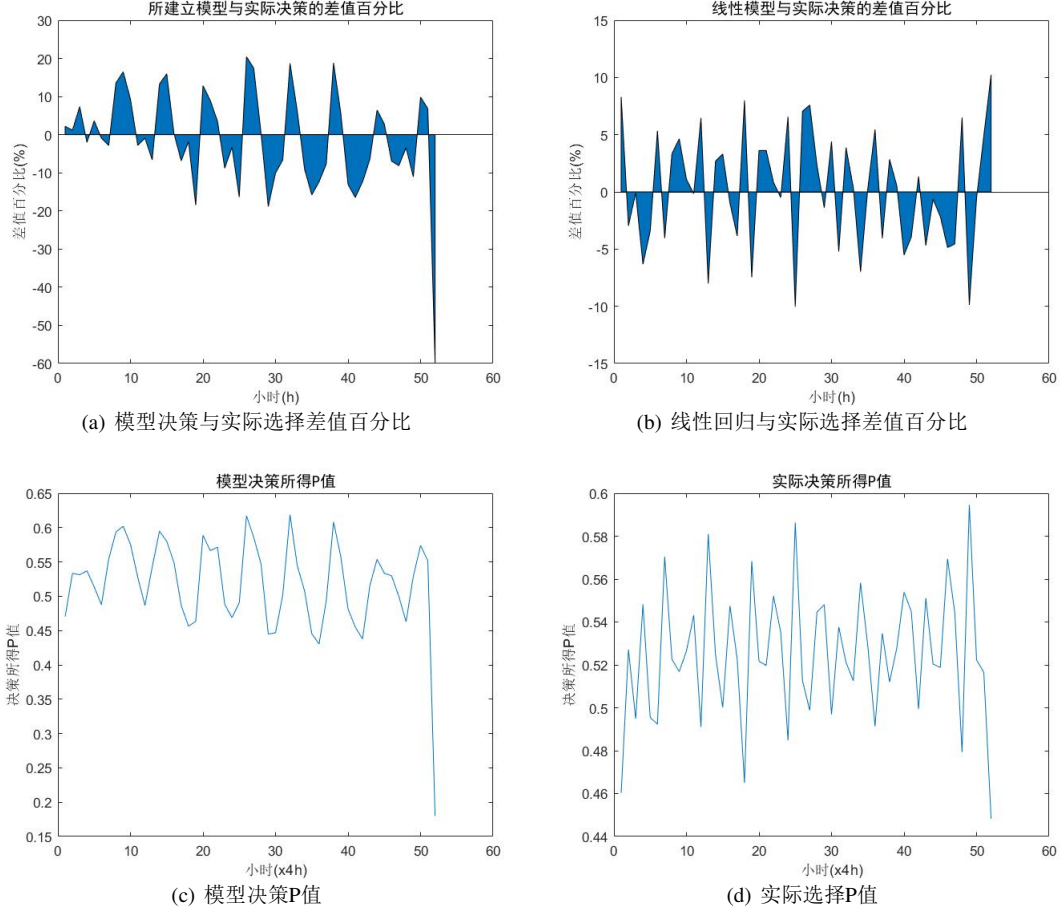


Figure 7:  $52 \times 4Hours$ 中模型与实际比较

观察模型决策P值呈现明显的周期性变化，其周期基本稳定为一天，正好具有8个半峰。且可以看出在短期即一天的不同时间段内，二者差异仍然有明显周期性变化。

相比而言，线性模型的差异值只是在实际值周围体现有随机间隔的类似随机的波动情况，其没能体现出同所建立模型所具有显著的周期性波动性。

和使用 $9(8.5) \times 1Day$ 的数据检验相似，应用相关公式可以计算的每一个时间阶段的完全信息理性人假设下的正确选择比率，因为数据共有52组，在此画出其曲线。

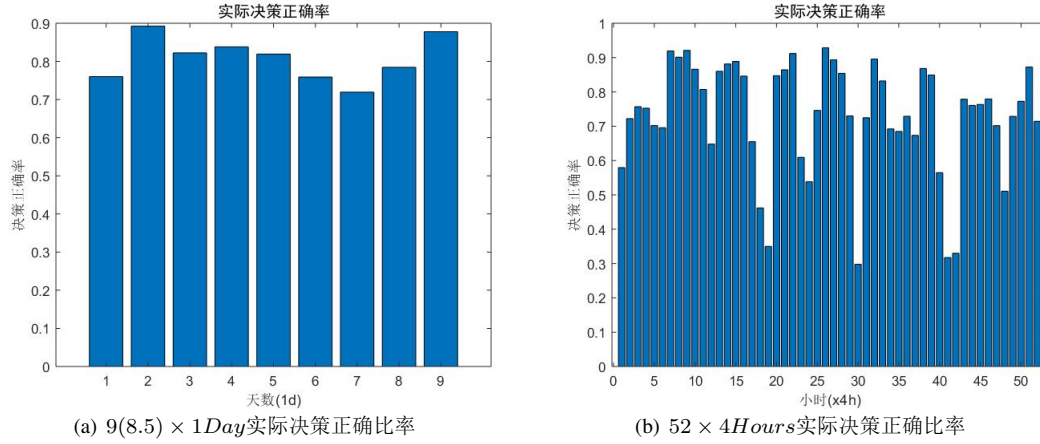


Figure 8:  $52 \times 4Hours$  实际决策正确比率

可以看出，绝大多数的决策正确率都是较高的，这说大多数的司机选择，都是符合完全信息和理性人假设的预期的。对于不符合预期的偏差，我们的解释见“问题2结果分析”：

### 5.3.3 结果分析

问题2通过所收集到相应数据，整理统计并分析求出相关出租车相对应时间区间内具体参数。使用所得数据，代入问题1中所建立的模型，求解相应决策并和实际决策对比，发现所建立模型符合现实中的实际情况，并且在长期和短期都具有良好的周期性。经过原有数据的不同分割，得到不同大小的两组数据，对模型的相关因素进行了数据的依赖性分析，得到模型是基本可靠和符合现实的。

值得说明的是，因为在问题1模型建立中，假定出租车司机是掌握完全信息的理性人，但这一假设在实际当中并不满足。从而在宏观上看，司机的选择往往在周期中具有蛛网效应，而在不同的周期之间可能会发生叠加，总而使得在实际决策中的P值和理性人假设下的模型计算的P值有偏差，这也出租车司机在排队等待和空载出站选择中，需要调整和重新考虑决策的原因。

对于司机实际选择不符合预期而产生的偏差，可能的原因如下：

1. 出租车司机在实际决策中，难以获得完全的信息，其所作决策和完全信息假设下会存在一定偏差。
2. 因为在机场接单可能受到除了  $E_T$  (“司机预期排队时间”)、 $T_d$  (“机场接单平均用时”)、 $R_d$  (“机场接单平均盈利”)、 $T_u$  (“返回市区的平均空载时间”)、 $T_{ave}$  (“每单平均用时”)、 $R_{ave}$  (“每单平均利润”)这些因素影响之外，还会受到例如天气、交通、个人事务等随机因素的影响。
3. 出租车司机对于信息变化的反应具有惯性，存在类似蛛网效应。例如很多出租车之间存在信息的交流关系，当机场盈利多时，司机会呼唤联盟内出租车都到机场接单，从而来到机场的车辆数目可能会大于均衡数量，造成司机对于信息的反应产生惯性，同时在跨时间段中这种效应还可能叠加，这也能够解释在实际决策中P值的多峰波动。

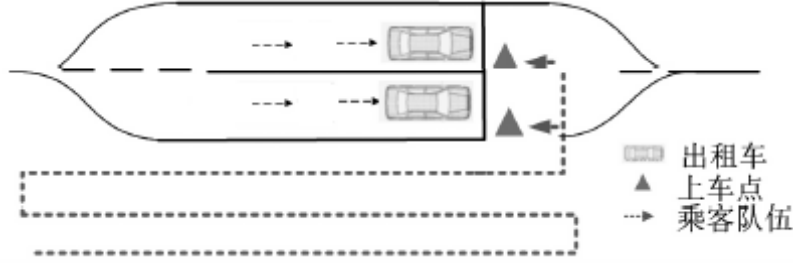
## 5.4 问题三的模型建立与求解

根据机场乘车区的道路状况、上车点的数目等因素，可将机场的出租车排队系统分为三类：单点式出租车排队服务系统、多点并列式出租车排队服务系统、多点纵列式出租车排队服务系统<sup>[2,4,5,6]</sup>。在本问题中，该机场乘车区有两条并行车道，可知该出租车排队系统是一个多点纵列式出租车排队服务系统。



#### 5.4.1 基于多服务台并列排队模型的机场出租车乘车区排队系统

本问题的多点纵列式出租车排队服务系统可以抽象为排队论中的多服务台并列排队模型。在两个车道上分别设置两个上车点，在最前排两台出租车的前面。乘客在车道前并排排队等待上车，如下图所示。



假设该模型是多服务台并列排队模型的标准型<sup>[3]</sup>，即  $M/M/2/\infty/\infty$ 。它表示：乘客源和出租车源无限；各乘客的到达相对独立，且到达规律服从参数为  $\lambda_1$  的泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从参数为  $\mu_1$  的负指数分布。其中， $\lambda_1$  表示单位时间乘客的平均到达数， $\mu_1$  为单位时间平均服务的顾客数。在本问题中， $\lambda_1$  表示每分钟进入机场出租车上客区等候的乘客数， $\mu_1$  表示每分钟每条车道出租车可以运走的乘客数。共有2个服务台，各服务台的平均服务率相同且各台工作相互独立。顾客到达后排成一队，先到先服务。整个服务系统最大的平均服务率为  $2\mu_1$ ，令  $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1}$ ， $\rho_1$  称为该系统的业务强度。

在系统达到稳态时，系统中无乘客的概率为

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2 \frac{1}{1-\rho_1}} \quad (14)$$

排队的平均乘客数为

$$L_{q1} = \frac{(2\rho_1)^2 \rho_1 P_0}{2!(1-\rho_1)^2} \quad (15)$$

顾客的平均排队等待时间为

$$W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} \quad (16)$$

根据2013年5-6月上海虹桥机场T2航站楼的出租车观测数据，车均载客数  $k_a = 1.25(\text{human}/\text{car})$ ，每辆车的上客时间  $t_{a1} = 15(\text{s}/\text{car})$ 。取车辆离开乘车区的时间  $t_{b1} = 10(\text{s}/\text{car})$ ，由于前面的车开走之后后面的车可以直接停进来，则每辆车服务时间  $t_{c1} = t_{a1} + t_{b1} = 25(\text{s}/\text{car})$ 。由此可以计算出  $\mu_1 = k_a \frac{60}{t_{c1}} = 3(\text{human}/\text{min})$ 。

取  $\lambda_1 = 5\text{human}/\text{min}$ ，根据以上公式，计算可得： $P_0 = 0.09$ ， $L_{q1} = 3.75(\text{human})$ ， $W_{q1} = 0.75(\text{min})$ 。

反过来，如果把乘客满足出租车的运营看作“服务”，即可求得出出租车的排队时间。假设该模型是多服务台并列排队模型的标准型，即  $M/M/2/\infty/\infty$ 。它表示：出租车源和乘客客源无限；各出租车的到达相对独立，且到达规律服从参数为  $\lambda'_1$  的泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从参数为  $\mu'_1$  的负指数分布。在本问题中， $\lambda'_1$  表示每分钟进入机场出租车上客区的出租车数， $\mu'_1$  表示每分钟每条车道乘客可以满足的出租车数。共有2个服务台，各服务台的平均服务率相同且各台工作相互独立。出租车到达后排成一队，先到先服务。整个服务系统最大的平均服务率为  $2\mu'_1$ ，令  $\rho'_1 = \frac{\lambda'_1}{2\mu'_1}$ ， $\rho'_1$  称为该系统的业务强度。

为了便于计算，由于一台出租车平均可以运走1.25人，则用每分钟进入机场出租车上客区的出租车所能承载的人数替代  $\lambda'_1$ 。假设每分钟有3.2辆车进入出租车停车区，则  $\lambda'_1 = 3.2 \times 1.25 = 4(\text{human}/\text{min})$ 。同理，用每分钟每条车道可以服务的人数替代  $\mu'_1$ ，则  $\mu'_1 = \frac{\lambda_1}{2} = 2.5(\text{human}/\text{min})$ 。



$P'_0$ 、 $L'_{q1}$ 、 $W'_{q1}$ 的计算方法与上文相同，只是变量的值需要改变。通过计算，可得： $P'_0 = 0.11$ ， $L'_{q1} = 2.816(\text{human})$ ， $W'_{q1} = 0.704(\text{min})$ 。

引入 $W_{q1}$ 和 $W'_{q1}$ 的加权平均值 $W_1$

$$W_1 = \varphi_1 W_{q1} + \varphi'_1 W'_{q1} \quad (17)$$

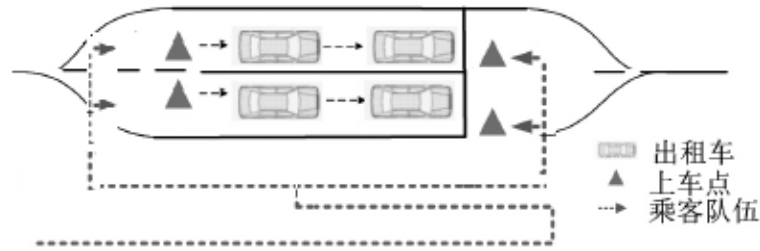
$W_1$ 作为综合反应乘车效率的指标， $W_1$ 越小，乘车效率越高。

取 $\varphi_1 = 0.7$ ， $\varphi'_1 = 0.3$ ，计算得 $W_1 = 0.7362(\text{min})$ 。

为了更加提高乘车效率，可以对以上模型进行优化。

#### 5.4.2 基于单服务台排队模型和出租车阵列的机场出租车乘车区排队系统

由于车均载客数 $k_a = 1.25(\text{human}/\text{car})$ ，而计算得到的队列中的人数 $L_q = 3.75(\text{human})$ ，基于这种情况，可以以四台出租车为单位，形成 $2 \times 2$ 出租车阵列。其中两个上车点设置在阵列前排两台出租车的前面，另外两个上车点设置在阵列后排两台出租车的后面。乘客在车道前并排排队等待上车，每四台车走后，后面四台车跟上来，四组乘客分别上各自对应的出租车，如下图所示。由于 $4k_a > L_q$ ，这种方式可能会造成空载，空载的情况会在下文讨论。



以一个出租车阵列为一个“服务台组”，将该模型抽象成一个单服务台排队模型的标准型，即 $M/M/1/\infty/\infty$ 。它表示：乘客源和出租车源无限；各乘客的到达相对独立，且到达规律服从参数为 $\lambda_2$ 的泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从参数为 $\mu_2$ 的负指数分布。其中， $\lambda_2$ 表示单位时间乘客的平均到达数， $\mu_2$ 为单位时间服务台组平均服务的顾客数。顾客到达后排队一队，先到先服务。令 $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ ， $\rho_2$ 称为该系统的业务强度。

在系统达到稳态时，排队的平均乘客数为

$$L_{q2} = \frac{\rho_2^2}{(1 - \rho_2)} \quad (18)$$

顾客的平均排队等待时间为

$$W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} \quad (19)$$

若车均载客数 $k_a = 1.25(\text{human})$ ，则四辆车的载客数为 $5(\text{human})$ ，每辆车的上客时间 $t_{a2} = 15(\text{s}/\text{car})$ 。而基于出租车阵列的原因，后排队需要等待前排队离开以后才可以离开，且以阵列为单位，阵列与阵列之间的交接也需要时间，所以车辆离开乘车区的时间 $t_b$ 需要调整， $t_{b2} = 30(\text{s}/\text{car})$ 。则每辆车服务时间 $t_{c2} = t_{a2} + t_{b2} = 45(\text{s}/\text{car})$ 。由此可以计算出 $\mu_2 = 4k_a \frac{60}{t_{c2}} = 6.67(\text{human}/\text{min})$ 。

取 $\lambda_2 = 5(\text{human}/\text{min})$ ，根据以上公式，计算可得： $L_{q2} = 2.25(\text{human})$ ， $W_{q2} = 0.45(\text{min})$ 。

对于空载的情况，近似来看，空载率 $\alpha = \frac{4K_a - L_q}{4K_a} \cdot 100\% = 25\%$ ，即每个阵列会有一辆车空载。对于空载的车辆，这里假设其离开乘车区后又重新返回乘车区。由于空载，出租车的时间成本有所增加，可能会使司机减少到机场接送客的次数，从而使乘客的排队等待时间又有可能增加。因此，采用这种方法，在原有的排队等待时间的基础上，应该加上一项惩罚项 $W_0$ ，以表示空载对于乘车效率的消极影响。

取 $\Delta W = W_{q2} - W_{q1}$ ，定义 $W_0 = \Delta W * \alpha$ ，计算得到 $W_0 = 0.075(min)$ 。则经过修正的顾客排队等待时间 $W_{q2n} = W_{q2} + W_0 = 0.525(min)$ 。

反过来，如果把乘客满足出租车的运营看作“服务”，即可求得出出租车的排队时间。假设该模型是单服务台并列排队模型的标准型，即 $M/M/1/\infty/\infty$ 。它表示：出租车源和乘客客源无限；各出租车的到达相对独立，且到达规律服从参数为 $\lambda'_2$ 的泊松分布；各乘客的服务时间相对独立，且服从参数为 $\mu'_2$ 的负指数分布。在本问题中， $\lambda'_2$ 表示每分钟进入机场出租车上客区的出租车阵列数， $\mu'_2$ 表示乘客可以满足的出租车阵列数。出租车到达后以四辆车为单位组成一个阵列，先到的阵列先服务。令 $\rho'_2 = \frac{\lambda'_2}{\mu'_2}$ ， $\rho'_2$ 称为该系统的业务强度。

为了便于计算，由于一台出租车平均可以运走1.25人，则用每分钟进入机场出租车上客区的出租车阵列所能承载的人数替代 $\lambda'_2$ 。假设每分钟有3.2辆车进入出租车停车区，则每分钟有0.8个出租车阵列进入出租车停车区，则 $\lambda'_2 = 0.8 \times 1.25 \times 4 = 4(human/min)$ 。同理，用每分钟出租车阵列可以服务的人数替代 $\mu'_2$ ，则 $\mu'_2 = \lambda_2 = 5(human/min)$ 。

$L'_{q2}$ 、 $W'_{q2}$ 的计算方法与上文相同，只是变量的值需要改变。通过计算，可得： $L'_{q2} = 3.2(human)$ ， $W'_{q2} = 0.8(min)$ 。

引入 $W_{q2n}$ 和 $W'_{q2}$ 的加权平均值 $W_2$

$$W_2 = \varphi_2 W_{q2n} + \varphi'_2 W'_{q2} \quad (20)$$

$W_2$ 作为综合反应乘车效率的指标， $W_2$ 越小，乘车效率越高。

取 $\varphi_2 = 0.7$ ， $\varphi'_2 = 0.3$ ，计算得 $W_2 = 0.6075$ 。

### 5.4.3 结果分析

由于 $W_2 < W_1$ ，即可说明引入出租车阵列可以有效提高乘车效率。事实上，当引入出租车阵列后，相当于利用长度弥补了车道宽度有限的劣势，充分有效利用空间，且以阵列为单位更加有利于规范管理，从而保障了乘客和出租车的安全。综上所述，引入出租车阵列提高了乘车效率。

## 5.5 问题四的模型建立与求解

### 5.5.1 基于模糊数学确定返回机场的吸引力函数

出租车司机从机场接客后是否返回机场重新载客是一个决策模型，一般来说，乘客的目的地较近时，也即司机这一笔单所赚的钱较少时，司机更有可能返回机场，也就是说返回机场重新载客对司机的吸引力较大。为了量化这种“吸引力”，引入模糊数学的隶属度函数<sup>[7]</sup>。

在模糊数学中，隶属函数是这样定义的：

设 $U$ 为一论域，如果给定了一个映射：

$$\begin{aligned} \mu_A &= U \rightarrow [0, 1] \\ y &\rightarrow \mu_A(y) \in [0, 1] \end{aligned} \quad (21)$$

则该映射确定了一个模糊集合 $A$ ，其映射 $\mu_A$ 称为模糊集的隶属函数， $\mu_A(y)$ 称为 $y$ 对模糊集 $A$ 的隶属度。

在本问题中，我们要研究出租车返回机场的吸引力隶属函数 $\mu_A(y)$ 。在本问题中， $y$ 为司机从机场出发的这一笔单所获得的收入（单位：元）。设 $x$ 为这一笔单里程（单位：km），收入（ $y$ ）与里程（ $x$ ）呈正相关关系，则研究的吸引力函数以里程（ $x$ ）为自变量。

以深圳市为例，深圳市有两种出租车：红的、绿的，这里仅研究红的。红的起步价为10元2公里，里程费为2.4元/公里，且25公里以上加收里程费的30%的返空费，夜间行驶加收里程费的30%，候时费为0.8元/分钟。不计夜间行驶费和候时费，将 $y$ 表示成 $x$ 的分段函数，经过化简，可得：

$$y = \begin{cases} 10 & , 0 < x < 2 \\ 2.4x + 5.2 & , 2 \leq x < 25 \\ 3.12x - 12.8 & , x \geq 25 \end{cases} \quad (22)$$

确定隶属函数有多种方法，这里采用 $F$ 分布法，利用现有的一些函数，通过参照比较，选择最能代表所论模糊集的函数作为隶属函数。对于本问题，我们使用降半正态分布：

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , y(x) < a \\ e^{-\left(\frac{y(x)-a}{\sigma}\right)^2} & , y(x) \geq a \end{cases} \quad (23)$$

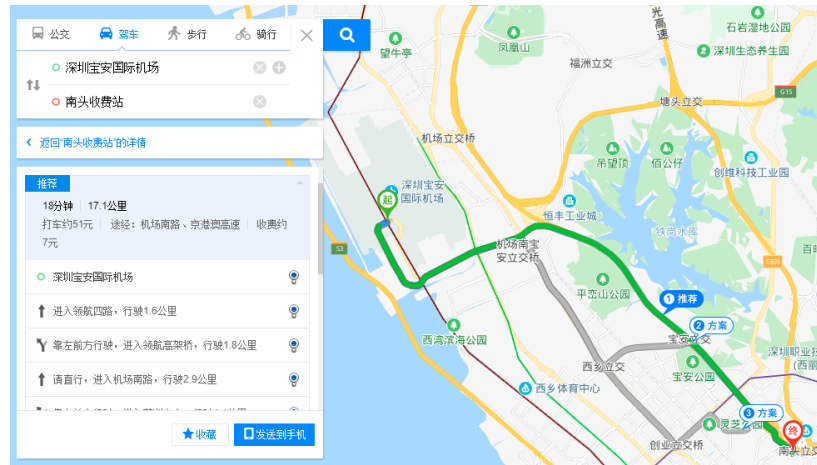
其中 $a$ 为期望， $\sigma$ 为方差。在本问题中，吸引力隶属函数的形式如下所示：

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , y(x) < 0 \\ e^{-\left(\frac{y(x)}{\lambda}\right)^2} & , y(x) \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

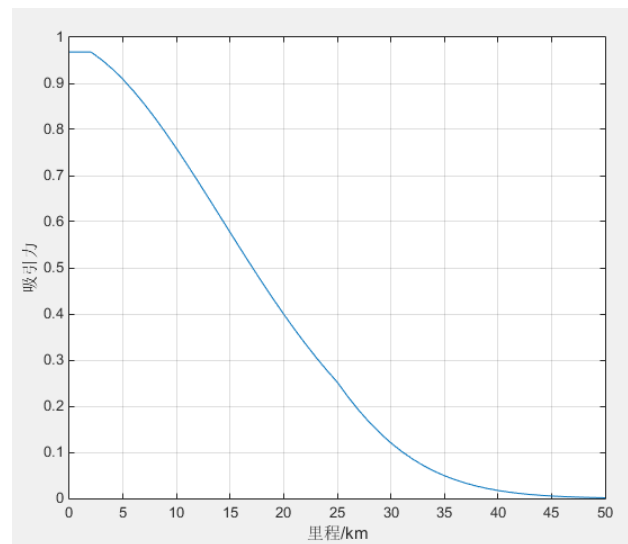
其中 $a = 0$ ，表示当出租车行驶里程为0时，吸引力为1，出租车势必会回到机场（事实上，它本身就在机场）。 $\lambda$ 为常数，它的确定方法如下：取吸引力为0.5（中值）的点，代入吸引力隶属函数计算。由于出租车从机场出来要返回深圳市区比较方便省时的道路是高速公路，而从机场经高速公路到市区有一定的距离，从而以出租车高速公路在市区的收费站为分界点，能够大致将去市区（距离较远）和在机场周边（距离较近）的出租车分开，所以令从机场经高速公路到高速公路在市区的收费站的里程所对应的吸引力为0.5。

如下图所示，从深圳宝安国际机场到京港澳高速在深圳市区的收费站（也是高速公路的终点）南头立交，距离为17.1km，将其带入吸引力函数的公式，可得： $\mu_A(17.1) = e^{-\left(\frac{2.4 \times 17.1 + 5.2}{\lambda}\right)^2} = 0.5$ ，解得 $\lambda = 55.54$ 。将 $\lambda$ 和 $y(x)$ 代入 $\mu_A(x)$ 的表达式，可得：

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ e^{-\left(\frac{10}{55.54}\right)^2} & , 0 \leq x < 2 \\ e^{-\left(\frac{2.4x+5.2}{55.54}\right)^2} & , 2 \leq x < 25 \\ e^{-\left(\frac{3.12x-12.8}{55.54}\right)^2} & , x \geq 25 \end{cases} \quad (25)$$



作出吸引力函数 $\mu_A(x)$ 的图像如图所示：



将返回机场重新载客的吸引力划分区间，列入表格如下：

里程/km	吸引力函数	吸引力
0-10	0.75-1	强
10-17.1	0.5-0.75	较强
17.1-25	0.25-0.5	较弱
25以上	0-0.25	弱

### 5.5.2 基于吸引力函数确定短途优先安排方案<sup>[8]</sup>

为了让短途载客再次返回的出租车有“优先权”，就要给这些出租车尽量安排里程较远、打车费用较高的乘客，才可以实现各出租车收益的均衡。

由式(7)，司机下一单的平均收益与预期的排队时间成负相关。为了提高短途载客再次返回司机的下一单的平均收益，就应该尽量缩短他们的排队时间。

由Figure5，机场接单价格分布中间有一个截断区间，这是受25km以上返空费的影响。所以为了提高短途载客再次返回司机的下一单的平均收益，实现出租车收益的均衡，就要尽量给短途载客再次返回的出租车安排截断区间右边的单对应的乘客。

具体实施起来，由于在现实的出租车上客区乘客预估打车距离是比较困难的，但乘客能比较容易地说出目的地在哪个市辖区，所以用区作为划分标准。下表显示从深圳宝安国际机场到各行政区的出租车里程。表中用机场到各区区政府距离近似替代机场到各区的距离，以及机场到各区的打车费用（按照上文分段函数计算）。

行政区	里程/km	费用/元
福田区	32.4	88.29
罗湖区	41.8	117.62
南山区	19.6	52.24
宝安区	15.7	42.88
龙岗区	59.6	173.15
盐田区	53.8	155.06
坪山区	76.3	225.26
光明区	30.4	82.05
龙华区	40.1	112.31

深圳宝安国际机场的出租车上客区是三车道，现行机制是出租车可驶入三个车道中的任意一个，由管理人员安排乘客乘坐空闲车道驶来的出租车。对于短途载客再次返回的出租车，尽量为其安排里程较远、打车费用较高的乘客。取每笔单100元以上的区，即：罗湖区、龙岗区、盐田区、坪山区、龙华区。在出租车端，在三条车道中，留出最左车道专门让短途载客再次返回的出租车驶入。在乘客端，让乘客在到达上客区之前进行导流，使去以上五个区的乘客到最左车道乘车。Figure5显示，出租车在机场接的100元以上的单占有单的比例不到33.3%，这说明使短途载客再次返回的出租车驶入最左车道也可以有效减少其排队时间，从而提高下一单收益。

利用吸引力函数来界定短途载客再次返回的出租车。记录在三小时内从机场拉客又返回机场的出租车，评价其吸引力函数，对应吸引力划分区间。在划分区间中，让吸引力为“强”和“较强”两档的出租车驶入最左车道，从而实现“优先”安排，为其安排里程较远、打车费用较高的乘客。但从实际操作来看，当最左车道空闲时，可以安排蓄车池中等待的出租车进入最左车道，从而不致其他两个车道排队过多，但要保证最左车道等待的车的辆数不能过多，以保证短途载客返回机场的出租车等待的时间不会太长。

## 6 模型的优缺点

优点：

- 问题一模型基于排队论推导，应用经济均衡模型建立推荐候机概率求解模型，同时经过问题二的实际数据检验，发现模型对现实情况解释性很强，而且结果体现出有实际意义并且可以解释的周期性波动，进一步说明了假设中的周期性假设的合理性。
- 问题三模型利用了排队论中基本模型并据此进行拓展，通过对比的方法找到更优的模型，更有说服力；

- 问题四模型在理论上充分考虑到了实际情况，具有实用性和可操作性。

缺点：

- 模型在实际数据的检验中，将实际机场中面对的排队长度和航班到达量放入预期排队时间中考虑，并没有微观验证这两个因素的作用情况。
- 问题4模型，没有使用实际数据模拟验证安排方案的具体定量效果。

## 7 模型的改进方向

- 模型可以进一步引入微观的当时排队长度和航班到达数量的因素进行分析和验证。
- 对于问题四模型，可以进一步引入具体数据检验，并可引入空载接单吸引力函数曲线，分析求解多种因素决策的均衡结果。

## References

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会, 高教社杯全国大学生数学建模竞赛论文格式规范, 北京, 2009。
- [2] 魏中华,王琳,邱实.基于排队论的枢纽内出租车上客区服务台优化.[J],公路交通科技(应用技术版),2017,13(10):298-300.
- [3] 胡运权. 运筹学基础及应用.[M],高等教育出版社, 2008.
- [4] 俞春辉,杨晓光,马万经.考虑随机需求的出租车上客区泊位设置模式和规模优化方法.[J], 中国公路学报,2015,28(03):102-109.
- [5] 吴娇蓉,李铭,梁丽娟.综合客运枢纽出租车上客点管理模式和效率分析.[J],交通信息与安全,2012,30(04):18-23.
- [6] 佚名.郑州新郑机场出租车秩序管理站.[OL],2019, <http://www.whalebj.com/xzjc/default.aspx>
- [7] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用.[M], 华南理工大学出版社, 2006.
- [8] 佚名. 基于“互联网+”的出租车补贴方案优化研究.[OL],2017, <https://github.com/PrideLee/The-subsidy-scheme-of-DiDi>
- [9] 《2012深圳统计年鉴》.[M],2012, <https://gdidd.jnu.edu.cn/doc/gdtjnj/sztjnj/2012/main.htm>
- [10] 任亚飞,金睿,莫金亮,刘法超.出租车GPS数据可视化分析[J].数字技术与应用,2019,37(02):219-220+222.
- [11] 韩彪.对深圳出租车市场10个热点问题的解释[J].深圳大学学报(人文社会科学版),2010,27(02):16-21.
- [12] 南方日报. “深圳出租车8年来首次调价, 里程费返空费增加” 2017.05,<http://sz.people.com.cn/n2/2017/0505/c202846-30138825.html>
- [13] 同济大学数学系. “用出租车GPS数据分析深圳道路交通情况” <http://math.tongji.edu.cn/model/camp2011D.html>
- [14] 于作、高玥, 出租车行业规制的困境摆脱及其走势判断,中国与全球化, Vol.6, 2015。

# 附录

## 附录1 Ataxi.m

```
function [result,route,Num] = Ataxi(ORDER)
%ORDER = 1;
for i = ORDER:ORDER
    ori = readtable(strcat(strcat("taxi(",num2str(i)),").csv"));
end
Size_ori = size(ori);
Position = table2array(ori(:,3:4)); %获得经纬度
State = table2array(ori(:,5)); %状态

Ap = [];
As = [];
Aorder = [];
num =1;
for i=1:Size_ori(1)
    if (Position(i,2) >= 22.59)&&(Position(i,2) <= 22.66)
        if Position(i,1) <= 113.823
            Aorder(num,:) = i;
            Ap(num,:) = [Position(i,1),Position(i,2)];
            As(num,:) = State(i);
            num = num +1;
        end
    end
end

if isempty(Ap)
    disp(ORDER);
    disp('线路不过机场! ');
    result = 0;
else
    %figure();
    %geoplot (Ap(:,2),Ap(:,1),"r*");
    % geobubble(Ap(:,2),Ap(:,1),'colordata',categorical(As));
    disp(ORDER);
    disp('线路过机场! ');
    result = 1;
end
```



```

route = [];
num_route = 1;
Size_Ao = size(Aorder);

for i=1:Size_Ao(1)
    %找到一个端点
    position = Aorder(i);
    if State(position)
        position = Aorder(i);
        position = position-1;
        while (position>= 1) &&(State(position))
            position = position - 1;
        end
        route(num_route,1) = position+1;
        %找到另外一个端点
        position = Aorder(i);
        position = position+1;
        while (position<=Size_ori(1)) &&(State(position))
            position = position + 1;
        end
        route(num_route,2) = position-1;
        route(num_route,3) = 1;
        num_route = num_route+1;
    end
    %    table2timetable(ori(1:5,2:3))

    position = Aorder(i);
    if (~State(position))
        position = position-1;
        while (position>= 1) &&(~State(position))
            position = position - 1;
        end
        route(num_route,1) = position+1;
        %找到另外一个端点
        position = Aorder(i);
        position = position+1;
        while (position<=Size_ori(1)) && (~State(position))
            position = position + 1;
        end
        route(num_route,2) = position-1;

```

```

        route(num_route,3) = 0;
        num_route = num_route+1;
    end
end
    route = unique(route,'rows');
    Size_route = size(route);
    Num = Size_route(1);
end

```

## 附录2 Taxis.m

```

clear;clc;
head = 1;
for i=1:(size(Route))(1)
    [~,Temp,route_num] = Ataxi(i);
    result(i) = route_num;
    Route(head:head+route_num-1,1:3) = Temp;
    Route(head:head+route_num-1,4) = i;
    head = head + route_num;
end

```

## 附录3 caculate.m

```

route_size = size(Route);
i = 1;
while i<=route_size(1)
    ori = readtable(strcat(strcat("taxi(",num2str(Route(i,4))),").csv"));
    Size_ori = size(ori);
    Position = table2array(ori(:,3:4)); %获得经纬度
    for j=1:result(Route(i,4))
        Route(i+j-1,5) = datenum(table2array(ori(Route(i+j-1,1),2)));
        Route(i+j-1,6) = datenum(table2array(ori(Route(i+j-1,2),2)));
%         STIME (i+j-1,:) = datestr(Route(i+j-1,5));
%         ETIME (i+j-1,:) = datestr(Route(i+j-1,6));
%         TIME (i+j-1,:) = datestr(Route(i+j-1,6) - Route(i+j-1,5),13);
        Temp_distance = 0;

        for k= Route(i+j-1,1):(Route(i+j-1,2)-1)
%             if (Position(k,2)) >0 && Position(k,1)>0 && Position(k+1,1)>0 && Position(k+1,2)>0
                Gap = distance(Position(k,2),Position(k,1),Position(k+1,2),Position(k+1,1));
                if Gap <= 1

```

```

        Temp_distance = Temp_distance + Gap;
%        TEST(i+k) = Gap;
%    else
%        TEST(i+k) = 0;
    end

%    end

    end
    Route(i+j-1,7) = Temp_distance;
    Route(i+j-1,8) = Position(Route(i+j-1,1),2); Route(i+j-1,9) = Position(Route(i+j-1,1),2);
    Route(i+j-1,10) = Position(Route(i+j-1,2),2);Route(i+j-1,11) = Position(Route(i+j-1,2),2);
%    figure();
% hold on
%    if Route(i+j-1,3) == 1
% %        geoplan (Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),2),Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),2));
%        plot (Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),1),Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),1));
%    else
% %        geoplan (Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),2),Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),2));
%        plot (Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),1),Position(Route(i+j-1,1):Route(i+j-1,2),1));
%    end
%    disp(i+j-1);
    end
    i = i+result(Route(i,4));
    disp(i);
end

```

#### 附录4 CUT-time.m

%按照时间 将数据分割开来

```

START = datenum( '18-Apr-2011 00:00:00');
LEN = datenum( '26-Apr-2011 00:00:00') - datenum( '18-Apr-2011 00:00:00');
GAP = datenum( '18-Apr-2011 04:00:00') - datenum( '18-Apr-2011 00:00:00');
result_size = size(Result);

Arr_NUM = ceil(LEN/GAP);
Result_CUT = [];
NUM_STORE = ones(1,ceil(Arr_NUM));

for i=1:result_size(1)
    TEMP = ceil((Result(i,5) - START)/GAP);

```

```

    if TEMP <1
        TEMP =1;
    else
        if TEMP > Arr_NUM
            TEMP = Arr_NUM;
        end
    end
    end
    Result_CUT(NUM_STORE(TEMP),:,TEMP) = Result(i,:);
    NUM_STORE(TEMP) = NUM_STORE(TEMP)+1;
end

```

#### 附录5 CUT-Waittime.m

%计算在机场的相关时间和路线收益参数

```

for j = 1:Arr_NUM
    Result = Result_CUT(:, :, j);
    % clear;clc;
    % load('Cost.mat');
    route_size = size(Result);
    Wait_num = 1;
    Airuse_num = 1;
    Leave_num = 1;

    for i=1:route_size(1)

        if (Result(i,3)==0) && (Result(i,7)<=0.3)
            if (Result(i,12) <= 100) && (Result(i,12) > 0)
                Waittime(Wait_num,1,j) = Result(i,12);
                Waittime(Wait_num,2,j) = i;
                Wait_num = Wait_num + 1;
            end
        end

        if (Result(i,3)==1) && (Result(i,12) >0) && (Result(i,12) <= 300 )
            Airusetime(Airuse_num,1,j) = Result(i,12);
            Airusetime(Airuse_num,2,j) = i;
            Airuse_num = Airuse_num + 1;
        end
    end
end

```

```

        if (Result(i,3)==0) && (Result(i,7)<=120) && (Result(i,12) <= 200 ) && (Result
            Leavetime(Leave_num,1,j) = Result(i,12);
            Leavetime(Leave_num,2,j) = i;
            Leave_num = Leave_num + 1;
        end

    end

    Ave_Wait(j) = sum(Waittime(:,1,j))/(Wait_num-1);
    Ave_Airuse(j) = sum(Airusetime(:,1,j))/(Airuse_num-1);
    Ave_Leave(j) = sum(Leavetime(:,1,j))/(Leave_num-1);

%
%     figure();
%     histogram(Waittime(:,1,j));
%     title('机场内等待时间直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
%     xlabel('时间(min)');
%     ylabel('频数');
%     figure();
%     histogram(Airusetime(:,1,j));
%     title('机场所接单-用时直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
%     xlabel('时间(min)');
%     ylabel('频数');
%     figure();
%     Leave_Gap = Leavetime(:,1,j) - Ave_Airuse - Ave_Wait;
%     histogram(Leave_Gap);
%     title('机场外接单-可能时间损失直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
%     xlabel('时间(min)');
%     ylabel('频数');

AVE_fee(j) = sum(Result_CUT(:,13,j))/sum(Result_CUT(:,3,j));
WL(j) = (Airuse_num-1)/(Airuse_num + Leave_num - 2);

flag = ((Ave_Leave(j)-Ave_Airuse(j)+30.0)*Ave_Airuse(j)*AVE_fee(j))/(30.0*44.5) -
if flag <= 0
    flag = mean(Waittime(1:(Wait_num-1),1,j));
end
tell = Waittime(1:(Wait_num-1),1,j);

total = sum( tell < flag);
Rate(j,:) = total/ (Wait_num-1);

```

end

#### 附录6 Regress.m

%模型分析和对比

```
X = [Ave_Airuse', AVE_fee', Ave_Leave', Ave_Wait'];
```

```
EP = 1 - (((Ave_Wait + Ave_Airuse)*30*44.5)./...  
          ((Ave_Leave- Ave_Airuse + 30.0).*Ave_Airuse.*AVE_fee + ((Ave_Wait + Ave_Airuse)*30
```

```
DETA = (EP - WL)./WL*100;
```

```
size_X = size(X);
```

```
X1= [ones(size_X(1),1),X];
```

```
[b,bint,r,rint,stats] = regress(WL',X1)
```

```
Y = X1*b;
```

```
DETAre = (Y' - WL)./WL*100;
```

```
figure();
```

```
area(DETA);
```

```
title('所建立模型与实际决策的差值百分比','Fontname','黑体','FontSize',12);
```

```
xlabel('天数(d)');
```

```
ylabel('差值百分比(%)' );
```

```
figure();
```

```
area(DETAre);
```

```
title('线性模型与实际决策的差值百分比','Fontname','黑体','FontSize',12);
```

```
xlabel('天数(d)');
```

```
ylabel('差值百分比(%)' );
```

#### 附录7 cost.m

%计算花费

```
Size_Result = size(Result);
```

```
Result(:,12) = (Result(:,6) - Result(:,5))*24*60;
```

```

ERROE_NUM = 0;
num = 1;

for i=1:Size_Result(1)
    if Result(i,3) == 1
        if Result(i,7) <= 2
            Result(i,13) = 10;
        else
            if Result(i,7) <= 25
                Result(i,13) = 10 + (Result(i,7) -2)*2.4;
            else
                Result(i,13) = 10 + (Result(i,7) -2)*2.4*1.3;
            end
        end
        end
        %%%%计算载到客的收费
        FEE(num) = Result(i,13);
        num = num +1;
        %%%%
    else
        Result(i,13) = 0;
    end
    if Result(i,13) >= 500
        Result(i,13) = 0;
        ERROE_NUM = ERROE_NUM + 1;
    end
    %        TEST(i) = Result(i,13);
end

D = sum (Result(:,3));
E = sum (Result(:,13));
AVE = E / D

```

#### 附录8 waittime.m

```

%计算在机场的等等待时间
clear;clc;
load('Cost.mat');
route_size = size(Result);
Wait_num = 1;
Airuse_num = 1;
Leave_num = 1;

```

```

for i=1:route_size(1)

    if (Result(i,3)==0) && (Result(i,7)<=0.3)
        if (Result(i,12) <= 100) && (Result(i,12) > 0)
            Waittime(Wait_num,1) = Result(i,12);
            Waittime(Wait_num,2) = i;
            Wait_num = Wait_num + 1;
        end
    end

    if (Result(i,3)==1) && (Result(i,12) >0) && (Result(i,12) <= 300 )
        Airusetime(Airuse_num,1) = Result(i,12);
        Airusetime(Airuse_num,2) = i;
        Airuse_num = Airuse_num + 1;
    end

    if (Result(i,3)==0) && (Result(i,7)<=120) && (Result(i,12) <= 200 ) && (Result(i,12) > 0)
        Leavetime(Leave_num,1) = Result(i,12);
        Leavetime(Leave_num,2) = i;
        Leave_num = Leave_num + 1;
    end

end

Ave_Wait = sum(Waittime(:,1))/(Wait_num-1);
Ave_Airuse = sum(Airusetime(:,1))/(Airuse_num-1);
Ave_Leave = sum(Leavetime(:,1))/(Leave_num-1);

figure();
histogram(Waittime(:,1));
title('机场内等待时间直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
xlabel('时间(min)');
ylabel('频数');
figure();
histogram(Airusetime(:,1));
title('机场所接单-用时直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
xlabel('时间(min)');
ylabel('频数');
figure();

```



```

Leave_Gap = Leavetime(:,1) - Ave_Airuse - Ave_Wait;
histogram(Leave_Gap);
title('机场外接单-可能时间损失直方图','Fontname','黑体','FontSize',12);
xlabel('时间(min)');
ylabel('频数');

TOTAL = sum(Waittime(:,1) < 16.238628114695985);
Rate = TOTAL/ (Wait_num-1);

```

#### 附录9 Plot.m

```

route_size = size(Result);
i = 1;
while i<= 2000
    ori = readtable(strcat(strcat("taxi(",num2str(Result(i,4))),").csv"));
    % Size_ori = size(ori);
    Position = table2array(ori(:,3:4)); %获得经纬度
    j = 0;
    for j=1:result(Result(i,4))
        % figure();
        hold on
        if Result(i+j-1,3) == 1
            % geoplanet (Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),2),Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1),Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1));
            plot (Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1),Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1));
        else
            % geoplanet (Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),2),Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1));
            plot (Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1),Position(Result(i+j-1,1):Result(i+j-1,2),1));
        end
        % disp(i+j-1);
    end
    i = i+result(Result(i,4));
    disp(i);
end

```

#### 附录10 plotfigure.m

```

lamda=55.54;

```

```

x=0:1:50;
a=exp(-(10/lamda)^2);
b=exp(-(2.4*x+5.2)/lamda).^2);
c=exp(-(3.12*x-12.8)/lamda).^2);
y=a.*(x>=0&x<2)+b.*(x>=2&x<25)+c.*(x>=25);
plot(x,y)
grid on

```

#### 附录11 $52 \times 4Hours$ 的模型检验

```

\begin{table}[H]
\begin{tabular}{@{}cccccc@{}}
\toprule
实际选择 & & 模型决策 & & 线性模型 & &  $T_d$  & &  $R_d$  & &  $T_u$  & &  $E_T$  & \\
0.460326 & & 0.470499 & & 0.49852 & & 20.084548 & & 35.51477 & & 25.03863 & & 13.01073 & \\
0.527084 & & 0.533287 & & 0.511423 & & 29.582239 & & 48.47437 & & 16.56023 & & 14.18667 & \\
0.494881 & & 0.531302 & & 0.494429 & & 32.462566 & & 45.56961 & & 19.42355 & & 15.85029 & \\
0.54816 & & 0.537099 & & 0.513495 & & 29.859331 & & 41.39755 & & 22.12682 & & 11.73832 & \\
0.495513 & & 0.51364 & & 0.478431 & & 35.247912 & & 37.63662 & & 24.1106 & & 15.66689 & \\
0.492313 & & 0.48759 & & 0.51856 & & 27.027872 & & 33.68461 & & 18.83463 & & 7.97092 & \\
0.570423 & & 0.554208 & & 0.547282 & & 21.550984 & & 37.88139 & & 26.28939 & & 6.137419 & \\
0.522573 & & 0.593583 & & 0.54002 & & 31.787508 & & 55.32672 & & 18.79791 & & 12.22756 & \\
0.516813 & & 0.602052 & & 0.540801 & & 39.733449 & & 52.84766 & & 18.29927 & & 10.48168 & \\
0.526475 & & 0.575552 & & 0.532235 & & 37.966549 & & 53.7279 & & 14.27675 & & 11.92605 & \\
0.543138 & & 0.527923 & & 0.542292 & & 38.287957 & & 50.35684 & & 6.029822 & & 8.24325 & \\
0.491034 & & 0.48647 & & 0.522777 & & 24.231777 & & 33.17861 & & 19.81174 & & 7.435048 & \\
0.580994 & & 0.542704 & & 0.534441 & & 23.633665 & & 37.77039 & & 26.04745 & & 7.944774 & \\
0.524933 & & 0.594817 & & 0.538965 & & 33.138565 & & 55.19248 & & 18.59792 & & 12.21559 & \\
0.500177 & & 0.580049 & & 0.516742 & & 37.479189 & & 51.63815 & & 19.16867 & & 14.12693 & \\
0.547556 & & 0.54914 & & 0.542056 & & 35.388217 & & 47.63119 & & 11.92713 & & 8.075077 & \\
0.522576 & & 0.486696 & & 0.502412 & & 42.887626 & & 45.81553 & & 5.670402 & & 12.48421 & \\
0.464963 & & 0.456386 & & 0.50217 & & 25.392318 & & 31.91179 & & 19.05339 & & 10.07269 & \\
0.568369 & & 0.46336 & & 0.525958 & & 22.593809 & & 33.81308 & & 14.29602 & & 6.763886 & \\
0.52168 & & 0.588722 & & 0.540572 & & 30.190255 & & 56.33678 & & 18.04839 & & 12.574 & \\
0.519727 & & 0.566549 & & 0.538532 & & 34.185285 & & 48.42734 & & 15.96368 & & 9.422644 & \\
0.552072 & & 0.571594 & & 0.556728 & & 35.391203 & & 49.3251 & & 12.68867 & & 6.445978 & \\
0.535079 & & 0.487961 & & 0.532398 & & 35.500744 & & 47.62891 & & 3.305419 & & 8.764138 & \\
0.484806 & & 0.468828 & & 0.51662 & & 24.529329 & & 32.58983 & & 17.93003 & & 7.988073 & \\
0.586364 & & 0.490477 & & 0.527513 & & 23.180205 & & 35.55952 & & 17.76358 & & 7.455877 & \\
0.512494 & & 0.6172 & & 0.548617 & & 32.225337 & & 58.71971 & & 20.607 & & 12.264 & \\
0.498835 & & 0.585823 & & 0.536714 & & 36.750593 & & 48.49713 & & 19.38174 & & 9.859955 & \\

```

0.544661	&	0.547022	&	0.557247	&	31.989077	&	48.1586	&	9.664372	&	5.913328	\\
0.548107	&	0.444836	&	0.540528	&	40.949567	&	49.63546	&	-4.77092	&	6.988737	\\
0.496921	&	0.446808	&	0.518828	&	26.606309	&	36.1744	&	8.660732	&	7.902545	\\
0.537656	&	0.501955	&	0.509625	&	21.605086	&	36.59743	&	26.63716	&	11.6785	\\
0.521158	&	0.618753	&	0.541322	&	28.869077	&	52.95392	&	28.35317	&	12.303	\\
0.512591	&	0.544517	&	0.51463	&	32.552273	&	45.30576	&	18.71198	&	12.46205	\\
0.558252	&	0.508087	&	0.519286	&	32.046511	&	41.8447	&	13.1687	&	9.935077	\\
0.528944	&	0.445366	&	0.530391	&	28.366677	&	37.91392	&	4.408723	&	6.154435	\\
0.491309	&	0.430456	&	0.518114	&	24.60512	&	33.21156	&	9.179306	&	7.126265	\\
0.534737	&	0.493631	&	0.513077	&	21.611622	&	34.35831	&	25.77383	&	10.21078	\\
0.511958	&	0.608315	&	0.52651	&	27.461115	&	48.73441	&	33.8196	&	13.73305	\\
0.527844	&	0.557598	&	0.530715	&	32.461288	&	49.33834	&	15.797	&	11.13029	\\
0.55389	&	0.481443	&	0.523306	&	30.653565	&	44.27889	&	6.852484	&	9.703059	\\
0.544887	&	0.455047	&	0.523376	&	30.844264	&	42.83673	&	3.455647	&	8.809297	\\
0.499402	&	0.437653	&	0.506123	&	25.926096	&	39.82117	&	7.375424	&	11.21299	\\
0.551098	&	0.515011	&	0.525223	&	21.994565	&	37.53167	&	23.6038	&	9.219032	\\
0.520357	&	0.55396	&	0.516935	&	33.955695	&	57.64456	&	12.27546	&	15.9527	\\
0.518765	&	0.533413	&	0.507593	&	32.866759	&	47.24005	&	16.09062	&	14.02186	\\
0.56944	&	0.529846	&	0.541752	&	33.230553	&	48.86071	&	8.608025	&	8.435647	\\
0.544091	&	0.499856	&	0.519308	&	38.253353	&	51.82184	&	3.991462	&	12.25011	\\
0.47932	&	0.462808	&	0.510503	&	26.261768	&	40.00774	&	10.65451	&	10.87665	\\
0.594595	&	0.529059	&	0.535852	&	22.495909	&	47.55628	&	16.26979	&	10.50994	\\
0.522302	&	0.573823	&	0.519439	&	32.14717	&	56.24104	&	17.56228	&	15.69273	\\
0.516517	&	0.551728	&	0.541891	&	35.440983	&	49.46084	&	11.40093	&	8.727529	\\
0.448276	&	0.179982	&	0.494154	&	7.7206154	&	16.08147	&	0.163385	&	5.060571	\\
\bottomrule													
\end{tabular}													
\end{table}													