动力系统基础

王逸舟

目录

Part 1

动力系统的概念

1. 动力系统

[离散动力系统] f 是拓扑空间 X 上的同胚，其迭代构成来了一个**离散动力系统**$\{f^n : n \in Z\}$.

[连续动力系统] $\phi(t,x) : R \times X \mapsto X$ 是拓扑空间 X 上的连续流，则称之为**连续动力系统**。

[微分动力系统] 如果 X 是一个 C^r 微分流形，ϕ 是 C^r 映射，则称 ϕ 诱导出的动力系统是**微分动力系统**。

1.1. 离散动力系统. [拓扑空间] 设 X 是一个集合，$\mathscr{T}$ 是 X 的一个子集族，如果 $\mathscr{T}$ 满足如下条件:

(i) $X, \emptyset \in \mathscr{T}$;
(ii) 若 $A, B \in \mathscr{T}$, 则 $A \cap B \in \mathscr{T}$;
(iii) 若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$, 则 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}$,

则称 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑。如果 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑，则称偶对 $(X, \mathscr{T})$ 是一个**拓扑空间**，或称集合 X 是一个相对于拓扑 $\mathscr{T}$ 而言的拓扑空间；或者当拓扑空间 $\mathscr{T}$ 已经约定或者在行文中已经指出而无需说明时，称集合 X 是一个拓扑空间。此外 $\mathscr{T}$ 的每一个元素都叫做拓扑空间 $(X.\mathscr{T})$(或 X）中的一个开集。

按照布尔巴基学派的观点，在集合上可以定义的母结构主要有三种:

一种是代数结构，集合上有了代数结构之后，就可以运算，从两个元素产生第三种。

一种是序结构，集合之间的元素有了先后关系。一种是拓扑结构，它用来描述连续性，分离性，附近，边界等性质。

设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f : X \mapsto Y$, 如果 Y 中每一个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**连续映射**，或简称映射 f 连续。

设 X 和 Y 是两个拓扑空间，如果 $f : X \mapsto Y$ 是一个一一映射，并且 $f, f^{-1} : X \mapsto Y$, 则称 f 是一个**同胚映射**或**同胚**。

[离散动力系统] f 是拓扑空间 X 上的同胚，其迭代构成来了一个离散动力系统 $\{f^n : n \in Z\}$.

在 R^2 上的线性变换 R_θ 是指一个旋转 θ 角的变换，它显然导出一个动力系统。

证明.（1）R^2 是拓扑空间。我们引入 R^2 中的标准拓扑，由此，我们说明了 R^2 上面有拓扑结构，R^2 是拓扑空间。(2) R_θ 是同胚映射。在都是空间中，f 同胚，当且仅当 f 和 f^{-1} 都是连续函数。

当绕 $(0,0)$ 旋转 θ 角时，我们知道变换矩阵为

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

也就是，变换矩阵是一个连续函数矩阵。其逆变换为：

$$M(-\theta)=\begin{pmatrix} \cos-\theta & -\sin-\theta \\ \sin-\theta & \cos-\theta \end{pmatrix}$$

也是一个连续函数矩阵。

如果是绕 (x',y') 旋转，首先我们将维度升高一维，将初始点写为 $(x_0,y_0,1)$，变换后的点写为 $(x_1,y_1,1)$，这是如果是绕原点的变换，那么变换矩阵可以相应的写为：

$$M(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

首先我们用一个变换矩阵将其平移到 $(0,0)$, 这是变换矩阵和逆变换的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这时，我们将绕绕 (x',y') 旋转分解成三个变换，首先平移 $(-x',-y')$，在绕 $(0,0)$ 旋转，然后再平移 (x',y') 将这三个矩阵乘起来就是我们的变换矩阵。

$$\begin{aligned}M(\theta,(x',y'))&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (1-\cos\theta)x'+\sin\theta y' \\ \sin\theta & \cos\theta & (1-\cos\theta)y'+\sin\theta y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

它是一个连续函数举证，把 θ 换成 $-\theta$ 就得到了逆变换的变换矩阵。

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & (1-\cos(-\theta))x'+\sin(-\theta)y' \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & (1-\cos(-\theta))y'+\sin(-\theta)y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

1.2. 连续动力系统. 一个映射 $\phi(t,x):R\times X\to X$ 称为集合 X 上的一个**流**，如果对 $\forall t_1,t_2\in R,x\in X.$
(i) $\phi(0,x)=x;$

(ii) $\phi(t_1+t_2,x)=\phi(t_1,\phi(t_2,x))$;

设 $x=\phi(t,x_0)$ 是常微分方程 $\frac{dx}{dt}=V(x)$ 关于初值条件 $x(0)=x_0$ 的解，其中 $x_0\in R^n$ 而且 f 使方程满足存在唯一性。$\{\phi(t,\cdot):R^n\to R^n:t\in R\}$ 构成一个动力系统。特别是映射 $f(x):=\phi(1,x)$ 导出一个离散动力系统。

在物理上，可以把它看成是物体在 R^n 空间中的运动，而且在此空间中的每一点 x 处的速度是已经被规定好的且与时间无关。

证明. 1、R^n 上面有拓扑结构，从而 R^n 是一个拓扑空间。

我们通过引入 R^n 中的标准拓扑来说明这一点。

2、$\phi(t,x)$ 是集合 X 上的一个流。

首先，我们来验证平移不变性，即如果 $x=\phi(t,t_0,x_0)$ 是方程的解，那么对于与任意的常数 τ, $x'=\phi(t+\tau,t_0,x_0)$ 也是他的解。

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{d(\phi(t+\tau,t_0,x_0))}{dt}=\frac{d(\phi(t+\tau,t_0,x_0))}{d(t+\tau)}\times\frac{d(t+\tau)}{dt}=V(x)\times 1=V(x)$$

这样，我们就验证了平移不变性。我们来看两个两个解 $\phi(t-t_0,0,x_0)$ 和 $\phi(t,t_0,x_0)$, 他们满足相同的初值条件 $t_0.x_0$, 所以就有

$$\phi(t-t_0,0,x_0)=\phi(t,t_0,x_0)$$

再根据平移不变性，

$$\phi(t-t_0,0,x_0)=\phi(t,0,x_0)$$

也就是说 $\phi(t,0,x_0)$ 代表了一切初始点在 $t_0.x_0$ 的解的性质，所以，也简记为 $\phi(t,x_0)$.

然后，我们取定一个初值 x_0，我们来验证它的群性质。显然 $\phi(0,x_0)=x_0$. 考虑 $\phi(t,\phi(s,x_0))$ 和 $\phi(t+s,x_0)$ 当 t=0 时，他们都取到了初值 x_1 和 x_2,

$$x_1=\phi(0,\phi(s,x_0))=\phi(s,x_0)$$

$$x_2=\phi(0+s.x_0)=\phi(s,x_0)]$$

当 x_0 取不同的点时，可能对应着不同的积分曲线，对应着不同的轨道，得到不同的 $\phi(t,x_0)$. 我们让 x_0 跑遍整个集合 X，就可以得到，

$$\phi(0,x)=x$$

$$\phi(t,\phi(s,x))=\phi(t+s,x)$$

到此，我们验证了 $\phi(t,x)$ 是一个流。

3、$\phi(t,x)$ 连续下面说明 $\phi(t,x)$ 在 (t_0,x_0) 点连续。根据三角不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\phi(t,x)-\phi(t_0,x_0)|\\
=&|\phi(t,x)-\phi(t,x_0)+\phi(t,x_0)-\phi(t_0,x_0)|\\
\leq&|\phi(t,x)-\phi(t,x_0)|+|\phi(t,x_0)-\phi(t_0,x_0)|
\end{aligned}
$$

对于任意给定的 $\epsilon>0$, 由解 $\phi(t,x_0)$ 在 t_0 的连续性，存在 $\delta_1(<\delta)$, 使当 $|t-t_0|<\delta_1$ 时，

$$|\phi(t,x_0)-\phi(t_0,x_0)|<\frac{\epsilon}{2}$$

根据解对初值的连续依赖性，

$$|\phi(t,x)-\phi(t,x_0)|\leq|x-x_0|e^{Lt}$$

其中 L 是 Lipschitz 常数。注意到，$|t-t_0|<\delta_1,|t|-|t_0|\leq|t-t_0|<\delta_1,|t|\leq|t_0|+\delta_1$. 此时，$|x-x_0|e^{Lt}\leq|x-x_0|e^{L(|t_0|+\delta_1)}$，其中 e

故，$|\phi(t,x)-\phi(t_0,x_0)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ □

1.2.1. *解对初值的连续依赖性的证明.* [Gronwall 不等式] 设 $x(t),f(t)$ 为区间 $[t_0,t_1]$ 上的实连续函数，$f(t)0$, 若存在实常数 g，使得

$$x(t)\leq g+\int_{t_0}^{t}f(\tau)x(\tau)\,d\tau,t\in[t_0,t_1],$$

则

$$x(t)\leq gexp(\int_{t_0}^{t}f(\tau)\,d\tau),t\in[t_0,t_1],.$$

[推广的 Gronwall 不等式] 设 $x(t),g(t)$ 为区间 $[t_0,t_1]$ 上的实连续函数，函数 $f(t)0$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上可积，他们满足，

$$x(t)\leq g(t)+\int_{t_0}^{t}f(\tau)x(\tau)\,d\tau,t\in[t_0,t_1],$$

则当 $t\in[t_0,t_1]$ 时，

$$x(t)\leq g(t)+\int_{t_0}^{t}f(\tau)g(\tau)exp(\int_{\tau}^{t}f(s)\,ds)\,d\tau$$

设方程有解 $x(t,y_0)$ 与 $x(t,z_0)$，他们都在区间 $[t_0,t_1]$ 上存在，则对一切 $t\in[t_0,t_1]$ 有，

$$x(t,y_0)-x(t,z_0\leq|y_0-z_0|e^{L(t-t_0)},$$

其中 L 是常数。

设方程有解 $x(t, y_0)$，在区间 $[t_0, t_1]$ 上存在，则存在 y_0 的领域 U, 使得当 $z_0 \in U$ 时，就有方程的唯一一个解 $x(t, z_0)$ 也在区间 $[t_0, t_1]$ 上有定义，则对一切 $t \in [t_0, t_1]$ 有，

$$x(t, y_0) - x(t, z_0 \le |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)},$$

其中 L 是常数。

证明顺序

Generalized Gronwall's inequality
Gronwall's inequality
Theorem 4

1.3. 符号动力系统. 设 Σ 是由一切双边序列, $S = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ 组成的集合, s_0 表示零位坐标元素, 映射,$\delta : (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \Rightarrow (\dots, d_{-1}, s_0, s_1, \dots)$ 易见 (...,a_-1,a_0,a_1,...) 是周期点.

1.$\Sigma(N)$ 是拓扑空间通过引入距离, $d(x,y) = \Sigma_l imits_{n\ddot{0}\infty^{\infty}} \frac{d(x_n, y_n)}{2^{|n|}}$ 其中, $d(x_n, y_n) = 2.\delta$ 是同胚,

3. 柱集

4. 可数拓扑基

1.4. 微分动力系统. 流形的概念是欧式空间的推广，粗略的说，流形在每一点的近傍和欧式空间的一个开集是同胚的，因此在每一点的近傍可以引入局部坐标系，流形是一块块”欧式空间”粘起来的结果。

设 M 是 Housdorff 空间，若对任意一点 $x \in M$, 都有 x 在 M 中的一个领域 U 同胚于欧式空间 R^m 的一个开集，则称 M 是一个 m 维**流形**。

设同胚映射为 $\phi_U : U \leftarrow \phi_U$, 则称 (U, ϕ_U) 是 M 的一个坐标卡。

因为 ϕ_U 是同胚，对任意一点 $y \in U$, 可以把 $\phi_U(y) \in R^m$ 的坐标定义为 y 的坐标，即命

$$u^i = (\phi_U(y))^i, y \in U, i = 1, 2, \dots, m.$$

我们称 $u^1 (1 \le i \le)$ 为点 $y \in U$ 的局部坐标。

设 (U, ϕ_U) 和 (V, ϕ_V) 是 M 的两个**坐标卡**，若 $U \cap V \neq \emptyset$, 则 $\phi_U(U \cap V)$ 和 $\phi_V(U \cap V)$ 都是 R^m 中的两个开集。

$$\phi_V \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \leftarrow \phi_V(U \cap V)$$

建立了两个欧式空间上开集的同胚，其逆映射为 $\phi_U \phi_V^{-1}$。

因为它们是从欧式空间的一个开集到另一个开集的映射，所以用坐标表示时，$\phi_V \phi_U^{-1}$ 和 $\phi_U \phi_V^{-1}$ 分别表示欧式空间的开集上的 m 个实函数。

$$\phi_V\phi_U^{-1}: y^i = f^i(x_1, x_2, \ldots, x^m), x \in \phi_U(U \cap V$$
$$\phi_U\phi_V^{-1}: x^i = g^i(y_1, y_2, \ldots, y^m), y \in \phi_V(U \cap V)$$

设 f 是实数集 $U \in R^m)f$ 的直到 k 次的偏导数存在且连续，则称 f 是 r 次可微的，或者称 f 是 C^r 的。

如果 $y^i = f^i(x_1, x_2, \ldots, x^m)$ 和 $x^i = g^i(y_1, y_2, \ldots, y^m)$ 都是 C^r 的。$(U \cap V \neq \emptyset)$, 或者 $U \cap V \neq \emptyset$, 我们称 (U, ϕ_U) 和 (V, ϕ_V) 是C^r **相容的**。

设 M 是一个 m 维流形，如果在 M 上给定了一个坐标卡集 $A = \{(U, \phi_U)$, $((V, \phi_V)$, (W, ϕ_W),...} , 满足下列条件，则称 A 是 M 的一个**微分结构**：

(i) $\{U, V, W, \ldots\}$ 是 M 的一个开覆盖；
(ii) 属于 A 的任意两个坐标卡都是 C^r- 相容的;
(iii) A 是极大的，即对于 M 的任意一个坐标卡 $(\bar{U} : \phi_{\bar{U}})$, 若与属于 A 的每一个坐标卡都是 C^r 相容的，则它自身属于 A。

若在 M 上给定了一 C^r 微分结构，则称 M 是一个 C^r **微分流形**。

如果 X 是一个 C^r 微分流形，ϕ 是 C^r 映射，则称 ϕ 诱导出的动力系统是**微分动力系统**。

2. 轨道与周期点

2.1. 轨道. 称集合

$$Orb_f(x) = \{f^k(x) : k \in Z\}$$

为 f 过 $x \in X$ 的**轨道**。

2.2. 周期点. 如果存在自然数 p, 使得 $f^p(x) = x$, 则称 x 为 f 的**周期点**。

周期轨道都是有限轨道，有限轨道都是周期轨道。

证明. 设 $Orb_f(x) = \{f^k(x) : k \in Z\}$ 是有限轨道，故 $Orb_f(x)$ 只有有限个互不相同的点。则存在一个自然数 N, $O = \{f^0(x), f^1(x), \ldots, f^N(x)\}$ 包含了所有这些点。则 $f^{N+1}(x)$ 必与 O 中的某一个或几个相等。不妨设 $f^{N+!}(x) = f^k(x), 0 \leq k \leq N$, 此时，$f^{N+!-k}(x) = x$, 即 x 为周期点。

设 $Orb_f(x) = \{f^k(x) : k \in Z\}$ 是周期轨道，不妨设周期为 p, 即

$$f^p(x) = x, f^l(x) \neq x, \forall l = 1, 2, \ldots, p-1$$

此时，$\forall k \in Z$, 记 $kmod(p) = b, 0 \leq b \leq p$, 则

$$f^k(x) = f^b(x) \in \{f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^p(x)\},$$

故 $Orb_f(x)$ 是有限轨道。

□

图 1. 极限点

图 2. hopf 分岔

3. 极限点与非游荡点

3.1. 极限点. 一个点 $x \in X$ 的正半轨

$$x, f(x), f^2(x), \ldots$$

一般都是不收敛的（若收敛，其极限必为不动点），但总有许多子序列收敛。

称 $y \in X$ 为 X 的一个ω **极限点**，如果存在正整数的一个子序列，$n_i rightarrow \infty$ 使得

$$f^{n_i}(x) \to \infty y$$

称 X 的全体 ω 极限点为 X 的 $\omega-$ 极限集。

称 $y \in X$ 为 X 的一个 α **极限点**，如果有正整数的一个子序列, $n_i \to \infty$, 使得

$$f^{-n_i} \to y,$$

称 x 的全体 α 极限点为 $\alpha-$ 极限集。

hopf 分岔是一种常见的分岔，或产生极限环，在极限环里面的点，是向外发散，极限环外面的点，向内收敛，但都是向极限环无限的逼近。

前面的概念都是在度量空间中考虑的，现在怎么把极限的概念推广到一般的欧式空间，我们引入如下的概念。

集合

$$\omega(f) = \cap_{n \in N}\{f^k(x)\bar{\ } : kn\}$$

$$\alpha(f) = \cap_{n \in N}\{f^{-k}\bar{\ } : kn\}$$

分别称为轨道 $Orb_f(x)$ 的ω **极限集**，和α **极限集**。

$$L(f) = \cap_{x \in X}\omega_f(x) \cup \alpha_f(x)$$

称为 f 的极限集。

3.2. 非游荡点. 我们知道，如果 $f^p(x) = x$, 我们把 x 叫做周期点。有时候，这个条件对于我们来说太过苛刻，这时候，找一个比它弱一点的条件，就是 $f^k(x)$ 还在 X 的附近，没有走远，我们把这个概念抽象出来，就得到下面的概念。

图 3. 非游荡点集

点 $x \in X$ 称为 X 的游荡点，如果存在 x 的领域 U，使得，

$$f^k(U) \cap U = \emptyset, \forall k \in Z \backslash \{0\}$$

不是游荡点的点称为**非游荡点**。非游荡点的集合记为 $\Omega(f)$.
(i) $\omega_f(x), \alpha_f(x), \Omega(f)$ 都是闭的；
(ii) $Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$
(iii) 当 X 是紧空间时，$\omega_f(x), \alpha_f(x)$, 和 $\Omega(f)$ 都非空。

证明. 1. 任意多个闭集的交是闭的。故对于 $\omega_f(x)$ 和 $\alpha_f(x)$，因为闭包是闭，由定义知，$\omega_f(x)$ 和 $\alpha_f(x)$ 都是任意多个闭集的交，故是闭集。任意多个开集的并是开集，要证所有非游荡点总是闭集，即证所有游荡点的集合是开集。设 x 为游荡点，由定义知，存在 x 的领域 U，使

$$f^k(U) \cap U = \emptyset, \forall k \in Z \backslash \{0\}$$

则对于 U 中任意一点也都是游荡点。领域是开集，故所有的游荡点构成的集合为开集。综上知，$\Omega(f)$

2、Per(f) 是所有周期点的集合。$\forall x \in Per(f)$，则 x 为 f 的周期点，不妨设 x 为 p-周期点，p 为正整数，则 $f^p(x) = x$. $\forall n \in N$, 当 $kbeq0$ 时，总可以使 kpn(k 充分大)，使得 $f^{kp}(x) = x \in \omega_f(x)$. 当 $k < 0$ 时，总可以使 $-kpn$(k 充分小)，使得 $f^{-kp}(x) = x \in \alpha_f(x)$ 而 $L(f) = \cap_{x \in X} \omega_f(x) \cup \alpha_f(x)$, 故 $x \in L(f)$, 从而 $Per(f) \subset L(f)$. 下面证明 $L(f) \subset \Omega(f)$ $\forall x_0 \in L(f)$, 则 $x_0 \in \omega_f(x)$ 或 $x_0 \in \alpha_f(x)$. 当 $x_0 \in \omega_f(x)$ 时，即 x_0 为$\omega - x_0$ 为非游荡点。根据定义，存在正整数的一个子序列，$n_i rightarrow \infty$ 使得

$$f^{n_i}(x) \to \infty x_o, x \in Z$$

即 $\forall \epsilon > 0, \exists I > 0, \forall i > I, |f^{n_i} - x_0| < \epsilon$. 即当 $i > I$ 时，$f^{n_i}(x) \in \delta(x_0,)$ 故对 x_0 的任意领域 U，都存在不同的正整数 k,l, 使得，$f^k(x), f^l(x) \in U$, 不妨设 $k > l$, 即

$$x \in f^{-k}(U), x \in f^{-l}(U)$$

故 $f^{-k+l}(U) \cap U \supset f^l(f^{-k} \cap f^{-l}(U)) \neq \emptyset$ $(x \in f^{-k}(U)$ 且 $x \in f^{-l}(U)). -k + l < 0.$

当 $x_0 \in \alpha_f(x)$ 时，即 x_0 为 $\alpha -, n_i \to \infty$, 使得

$$f^{-n_i} \to y,$$

即对 x_0 的任意领域 U，都存在不同的正整数 k，l，使得，使得，$f^{-k}(x), f^{-l}(x) \in U$, 不妨设 $k > l$, 即

$$x \in f^k(U), x \in f^l(U)$$

故 $f^{k-l}(U) \cap U \supset f^{-l}(f^k \cap f^l(U)) \neq \emptyset$ ($x \in f^k(U)$ 且 $x \in f^l(U)$). $-k+l<0$. 综上知，$f^m(U) \cap U \neq \emptyset, \forall m \in z \backslash 0$, 即 x_0 是非游荡点，从而 $L(f) \subset \Omega(f)$.

3、X 为紧的度量空间，$\omega_f(x) \subset X, \alpha_f(x) \subset X$,$\Omega(f) \subset X$ 列紧集 $M \subset X$ 中每个点列都有收敛子序列收敛于一点 $x \in M$. 又因为，列紧空间中任意子集都是列紧集。故 $\omega_f(x), \alpha_f(x)$, 和 $\Omega(f)$ 都是列紧集。又列紧集的定义，总有一个点是在集合当中，故集合非空。从而 $\omega_f(x), \alpha_f(x)$, 和 $\Omega(f)$ 都非空。 □

$Orb_f(x), Fix(f), Per(f), \omega_f(x), \alpha_f(x), L(f), \Omega(f)$ 都是 f 的不变集。

证明. 1、$Orb_f(x) = \{f^k(x) : k \in Z\}$

$\forall y \in Orb_f(x)$, 即 $\forall k \in Z, \exists y = f^k(x) \in Orb_f(x)$. $z = f^l(y) = f^l(f^k(x)) = f^{l+k}(x), l+k \in Z$, 即 $z \in Orb_f(x)$, 故 $Orb_f(x)$ 为不变集。

2、Fix(f) 为 f 在 X 上所以不动点的集合。$\forall x \in Fix(f), f(x) = x, f(Fix(f)) = Fix(f)$, 故 Fix(f) 为不变集。

3、Per(f) 为 f 在 X 上所有周期点的集合。$\forall x \in Per(f)$, 即存在 $p \in N$, 使得 $x = f^p(x)$. $Orb_f(x) = f^k(x) : k \in Z$ $\forall y \in Orb_f(x)$, 即 $\forall k \in Z, y = f^k(x) \in Orb_f(x)$, 下证 $y \in Per(f)$. f^p(y)=f^p(f^k(x))=f^p+k(x)=f^k(f^p(x))=f^k(x)=y 故 $y \in Per(f)$, 即 Per(f) 为不变集。

4、$\omega(f) = \cap_{n \in N} \{f^k(\bar{x}) : kn\}$ $\forall y \in \omega_f(x)$, 即存在 $N > 0$(充分大)，当 $n > N$ 时，$y = f^k(x), kn > N$(充分大)。Orb_f(y)=f^l(y):l∈ $Z \forall Z \in Orb_f(y)$, 即 $\forall l \in Z$, 有 $z = f^l(y) \in Orb_f(y)$, 下证 $z \in \omega_f(x)$ $z = f^l(y) = f^l(f^k(x)) = f^{l+k}(x), l+kn+l > N$ (n 可充分大于 N) 故 $z \in \omega_f(x)$, 从而 $\omega_f(x)$ 为不变集。

5、$\alpha(f) = \cap_{n \in N} \{\bar{f^{-k}} : kn\}$ $\forall y \in \alpha_f(x)$, 即存在 $N > 0$(充分大)，当 $n > N$ 时，$y = f^{-k}(x), kn > N$(充分大)。Orb_f(y)=f^l(y):l∈ $Z \forall Z \in Orb_f(y)$, 即 $\forall l \in Z$, 有 $z = f^l(y) \in Orb_f(y)$, 下证 $z \in \alpha_f(x)$ $z = f^l(y) = f^l(f^{-k}(x)) = f^{l-k}(x), l-kn-l > N$ (n 可充分大于 N) 故 $z \in \alpha_f(x)$, 从而 $\alpha_f(x)$ 为不变集。

6、首先我们来证明 $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$.
任取 $x \in \Omega(f)$, 考虑 f(x) 的任意一个领域 U, 则 $V : f^{-1}(U)$ 是 x 的领域, 从而有 $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ 从而，

$$f^n(U) \cap U = f^{n+1}(U) \cap f(U) \supset f(f^(U) \cap U) \neq \emptyset$$

从而，$f(x) \in \Omega(f)$ 从而，$f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$.

然后我们来证明 $\Omega f \subset f(\Omega f)$. 下证 $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$. $\forall x \in \Omega(f), \forall x \in U, f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ $f^{-k}(f^k(U) \cap U) = U \cap f^{-k}(U)$, 故 $x \in \Omega(f^{-1})$. $\forall x \in \Omega(f^{-1}), \forall x \in U, f^{-k}(U) \cap U \neq \emptyset$ $\emptyset = f^k(f^{-k}(U) \cap U) = U \cap f^{-k}(U)$, 故 $x \in \Omega(f)$ 故 $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$.

将前半部分的结论带到 f^{-1}, 就有, $f^{-1}(\Omega(f^{-1}) \subset \Omega(f^{-1})$, 故, $f^{-1}(\Omega(f) \subset \Omega(f)$, 故$\Omega(f) \subset f(\Omega(f))$

综上知，$f(\Omega(f))\Omega(f)$, 即$\Omega(f)$

$\square$

Part 2

结构稳定性

4. 离散动力系统的结构稳定性

4.1. 全局结构稳定性. C^r 流形 X 上的动力系统 f 称为是结构稳定的, 如果存在 f 在 C^r 拓扑中的领域 U, 使得, 对任意 $g \in U$ 都与 f 拓扑共轭.

显然,C^r 结构稳定则是 C^{r+1} 结构稳定, C_1 结构稳定性通常直接称为结构稳定性.

定理 4.1. *C^r 结构稳定则是 C^{r+1} 结构稳定*

证明. □

4.1.1. *f 的 C^r 拓扑.* 固定 M 的允许坐标领域的一个有限覆盖 $(U_i, \phi_i), i = 1, 2, \ldots, N$ 称一列 C^r 微分同胚 f_n 在 C^r 意义下, 收敛到一个 C^r 微分同胚 f, 如果, 对所有 $1 \leq i, j \leq N$, 局部坐标表示, $\phi_j f_n \phi_i^{-1}$ 连同直到 r 阶偏导数, 在使这些局部表示有意义的电上, 一致收敛到 $\phi_j f \phi_i^{-1}$ 及其所对应的偏导数.

4.1.2. *f 的范数的定义.*

4.2. 局部结构稳定性. 设 $U \subset X$ 是开集, 且 $f \in C^r(U, X)$ 是到其相集的同胚, f 在 $p \in U$ 处被称为是 C^r 局部结构稳定的, 如果存在 p 点的领域 $V \subset U$ 及 f 在 $C^r(UX)$ 中的领域 W, 使得, 对任意 $g \in W$, 都与某点 $q \in V$ 处, 与 f 在 p 点处局部拓扑共轭.

f 在点 $p \in X$ 和 g 在点 $q \in Y$ 称为局部拓扑共轭的, 如果存在 p,q 的开领域 $U \subset X$,$V \subset Y$, 和同胚 h : 使得

定理 4.2. *设 X 是 $Bananch$ 空间, $U \subset X$ 是 O 的开领域, 若 O 是 $f \in C^1(U, X)$ 的双曲不动点, 则 f 在 O 附近是局部结构稳定的.*

证明. 第一步, 首先证明, 存在 O 的领域 $W \subset U$ 和 f 的 C^1 领域 V 使得, 使得, 任意 $g \in V$ 在 W 中有唯一的不动点 c, 并且 c 是 g 的双曲不动点. 事实上,X 上双曲线性映射全体 $H(X)$ 构成可逆有界线性映射空间 $L(X)$ 上的开集, 故存在 δ 使 $A = Df(O)$ 的 $\delta-$ 领域属于 $H(X)$. 由 Df 的连续性, 存在 $\alpha > 0$ 使得当 $||x|| < \alpha$ 时,

□

5. 连续动力系统的结构稳定性

定理 5.1 (安德罗洛夫-旁特里雅金定理). *在 $X(\Omega)$ 中系统结构稳定的重要条件是: (1) 它只有有限个奇点, 而且所有的奇点都是双曲的. (2) 它只有有限条闭轨, 而且所有的闭轨都是双曲的. (3) 它没有从鞍点到鞍点的轨线.*

定理 5.2 (皮邦图定理). 设 M^2 是二维可定向的紧流形, $f \in C^1(M^2)$, 则向量场为结构稳定的充要条件是: *(1)* 系统有有限个平衡点和闭轨, 且他们都是双曲的; *(2)* 系统不存在从鞍点到鞍点的轨线; *(3)* 系统的非游荡点集仅由平衡点和闭轨组成.

定理 5.3 (皮邦图稠密性定理). 设 M^2 是二维可定向的紧流形, 记 $C^1(M^2)$ 中一切结构稳定的向量场的子集为 Σ, 则 Σ 在 $C^1(M^2)$ 中是开的且是稠密的.

5.2. 局部结构稳定性.

Part 3

细焦点

6. 微分方程的双曲平衡点

6.1. 线性方程的平衡点.

6.2. 非线性方程的平衡点.

7. 后继函数法

7.1. 后继函数法.

ZYJ. 如果 □

YSY. 如果 □

WYZ. 首先考虑一个函数 $h(x)$ 是周期函数，我们找它的原函数还是周期函数的条件. 如果 $h(x+l)=h(x)$, 那么 □

定义 7.1 (解析函数 (复变函数)). **??** 如果函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内可微, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的 **解析函数**, 或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

定义 7.2 (解析函数 (实变函数)). **??** 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内可以展开成 Taylor 级数, 则称 $f(x)$ 为区间 D 上的**解析函数**.

注意 (反例 1). Taylor 展开存在但是不收敛到原函数.

7.1.1. 焦点量.

注意. 焦点量, 鞍点量与奇点量.

7.1.2. 例子.

7.1.3. 技巧: 常见的三角为 0 的积分.

(1). 三角函数的正交性 $1,\sin(x),\cos(x),\sin(2x),\cos(2x),\sin(3x),\cos(3x),\ldots$

它们中的任意两个不同的函数的乘积在 $[0,2\pi]$ 上的积分等于 0.

$$\int_0^{2\pi} 1\mathbf{d}x=2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)\mathbf{d}x=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)\mathbf{d}x=\pi$$

(2). $\sin^n(x)\cos^m(x)$

(a). 有一个是奇数

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\mathbf{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(x)\mathbf{d}x = 0$$

,n 是奇数。

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(x)\mathbf{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \cos^n(\frac{\pi}{2}-x)\mathbf{d}(\frac{\pi}{2}-x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \sin^n(x)\mathbf{d}x = -\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\mathbf{d}x = 0$$

，n 是奇数。

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\cos^m(x)\mathbf{d}x = 0$$

, 如果 m 和 n 中有一个是奇数.

(b). 都是偶数如果 m 和 n 都是偶数，就用公式

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

. ，一般不等于 0.

(3). 幂次的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathbf{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathbf{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}, \text{n 是奇数} \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \text{n 是偶数} \end{cases}$$

7.2. 后继函数法的改进. 我们不难发现, 在计算焦点量的过程中, 影响计算速度的主要有两个一个是 $(0,\theta)$ 的定积分，一个是 $(0,\pi)$ 的不定积分。在用计算机代数系统来计算的时候, 会花费掉大量的时间, 所以在遇到的问题比价复杂，计算量很大的时候，应该找一种方法，来避开这里的定积分和不定积分，节约计算资源，节约计算的时间成本。有一种方法是, 把计算机不擅长处理的积分问题化成计算机擅长处理的迭代和求留数。

7.2.1. *一种迭代求焦点量的方法.*

7.2.2. *留数与积分.*

定义 7.3 (留数).

8. 形式级数法

8.1. Lyapunov 稳定性. 粗略的讲, 所谓 Lyapunov 稳定性，对一个微分方程的特解，就是当初始值发生微小的扰动，它的解的变化还是在微小的范围内, 我们就说它是 Lyapunov 稳定的.

8.2. Lyapunov 判别法.

8.3. 形式级数. 一般来讲，没有证明收敛性的级数, 我们都叫它形式级数.

8.4. 形式级数法.

Step1: 我们假设形式级数为
Step2: 我们将它带入到方程里面就有
Step3: 依次求出形式级数的前面的几项

9. 对称性

9.1. 可返性.

对称系统:
可返系统:

9.2. 对称性.

10. 直接利用周期的方法

10.1. 直接利用.

11. 二次系统以后结果

除了线性系统, 二次系统是最平凡最简单的平面微分方程的系统, 然而即使是二次系统, 任然有很多问题没有解决. 下面给出一些结果.

定理 11.1.

12. 三次系统以后结果

定理 12.1.

13. 多项式的理想与 Singular 入门