

向量场的分岔理论基础

张芷芬

目录

1. 前言	4
Chapter 1. 基本概念和准备知识	9
1. 动力系统及其结构稳定性	10
2. 分岔与分岔问题的提法	17
3. 中心流形定理	25
4. 正规形	34
5. 普适开折与分岔的余维	47
Chapter 2. 常见的局部与非局部分岔	49
1. 奇点分岔	49
2. 闭轨分岔	55
3. Hopf 分岔	60
4. 平面上的同宿分岔	72
5. Poincare 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题	81
6. 几类余维 2 的平面向量场分岔	83
Chapter 3. 双曲不动点及马蹄存在性定理	87
1. 双曲不动点定理	87

1. 前言

动力系统的理论,起源于对常微分方程的研究,近半个多世纪以来得到了蓬勃的发展。随着在结构稳定系统的研究中所取得的突破性进展,对结构不稳定系统的研究(既分岔理论)便受到越来越多的关注。分岔理论具有深厚的实际背景,又需借助于现代数学的深刻工具。在实际应用和数学发展的双重推动下,这一理论的前景是广阔的。

所谓分岔现象,是指依赖于参数的某一研究对象当参数在一个特定值附近作微小变化时,它的某些性质所发生的本质变换。

在自然界中,分岔现象是普遍存在的。例如,导管中的流体流动,当流速超过某个特定值时,就由层流变为湍流;在生态系统中,当一些自然条件超过某些特定状态时,便可引起生态平衡被破坏或种群灭绝。

既然分岔现象普遍存在于自然界中,因而在描述自然现象的数学模型中,分岔现象也大量存在。

例如,描写磁腔管中磁振荡的模型

$$\epsilon \frac{d^2 x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + \epsilon x = b \sin t,$$

其中 $0 < \epsilon \ll 1$, b 是一物理量。自本世纪 40 年代起,这个方程就引起了人们的关注。随后发现当 b 取某些特定值时,系统有非通常意义下的吸引子,从而引出了奇异吸引子的概念。事实上,正是在 N. Levinson 对这个方程研究结果的启迪下, S. Smale 给出了著名的马蹄映射的例子。

又如,60 年代从气象学中提出的 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\delta x + \delta y, \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \gamma x - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

变量 $(x, y, z) \in R^3$, 参数 $\delta, \gamma, b > 0$, 其中 γ 是刻画气体流速的雷诺数。利用计算机研究发现,若取 $\delta = 10, b = \frac{8}{3}$, 则当 γ 在三个(分岔)值 $\gamma_1 \approx 24.06$ 和 $\gamma_2 \approx 24.74$ 附近时,相应系统的轨道结构呈现某种“混乱”现象。进一步的研究表明,这种看起来“杂乱无章”的现象却有内在的规律性,这不仅给湍流的形成以新的解释,而

且引出了一系列有关混沌现象的研究工作，至今还是物理和数学界关注的热点问题之一。

再如，从生态学中提出的虫口差分模型

$$x_{n+1} = x_n(a - bx_n), a, b > -0, a - bx_n > 0,$$

经过适当变换可化为单参数一维单峰映射族

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, 0 < \mu < 2, x \in [-1, 1].$$

70 年代 M.J. Feigenbaum 对它进行了细致的研究后发现，当 μ 从 0 连续增加时， $f_\mu(x)$ 不断出现倍周期分岔点，而且对应于出现稳定周期点的哪些分岔值具有很强的规律性，从而发现了一个新的普适常数，由此引出的相关的研究工作，也受到物理和数学界的关注。

数学上作为研究分岔现象的理论——分岔理论主要研究三类问题：由常微分方程（或向量场）所定义的连续动力系统的分岔；由映射所定义的离散动力系统的分岔；函数方程的零解随参数变化而产生的分岔。前两类分岔称为动态分岔，而第三类分岔称为静态分岔。它们既有区别，又相互联系。本书主要讨论动态分岔，特别是第一类（既向量场的）分岔。

动态分岔理论主要研究动力系统的轨道族的拓扑结构随参数变化所发生的变化及其规律。例如，奇点（或不动点）的汇聚与分离及该点附近轨道的变化；周期轨的产生与消失，同宿轨、异宿轨（或环）的形成与破裂；以及一些更复杂的动力学行为（例如混沌态）的出现与消失等。

虽然分岔理论的某些方法可以追溯到 *Poincaré* 时代，但在这一研究方向上取得长足的进展，只是近 30-40 年的事。迄今为止，大部分工作集中于平面上退化程度不高（既余维 ≤ 2 ）的分岔，也包括同宿分岔和异宿分岔问题等。分岔理论的发展很大程度上依赖于结构稳定性理论的进展，而目前只有对二维流形上的动力系统的结构稳定性有较完整的结果。因而，当相空间维数增大或系统的退化程度增大时，问题的复杂性大大增加，完整的工作尚属少见。此外，最初人们希望在分岔值附近能进行开折，既在分岔值附近存在几张超曲面，他们把参数空间分成若干开区域，每个开区域对应结构稳定的系统。但人们逐渐认识到，在不少情况下分岔值附近不存在这样简单而理想的拓扑结构，往往只能从测度上进行描述。本书的第五章??和第六章将涉及这一问题。

本书的撰写由张芷芬主持。第一、二、三章由张芷芬和李承治执笔，第四、五章和第一章??中的光滑线性化部分由李伟固执笔，第六章由郑志明执笔，附录由李承治执笔，最后经集体讨论定稿。

下面简要介绍本书的内容安排。

第一章介绍基本概念和准备知识。我们假定读者具有常微分方程和常微分方程定性理论的基础知识。因此，对动力系统的概念只作了简略的介绍。然后通过实例引进分岔的概念及分岔问题的提法。本章还介绍了简化分岔问题的两个重要手段：中心流形定理和正规型理论。最后介绍了普适开折与分岔的余维这两个概念。第二章介绍几类平面向量场的典型的分岔现象，如奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔等，以及研究这些问题的典型方法；还介绍了弱 Hilbert 第 16 问题。在第三章中，我们综合运用第二章介绍的理论和方法，研究了几类平面向量场的余维二分岔现象。第四章主要介绍二维映射的双曲不动点，并给出一类复杂的不变集 (Smale 马蹄) 存在性的简洁而严格的判别方法。这些结构在研究三维向量场的分岔问题中有很多应用。在第五章中，我们研究三维向量场中双曲奇点的同宿轨分岔，以及与前述 Lorenz 方程相关的一个由双曲鞍点和一个双曲闭轨形成的环的分岔。第六章介绍实二次单峰映射族在某个分岔值附近的动力性态：在参数空间中可以存在正 Lebesgue 测度集，使相应的映射族具有非双曲的奇异吸引子。这说明从测度角度上看，非双曲的系统并不少，并且其动力学行为非常复杂。本章不属于教材的基本内容，只是向读者介绍近年来动力系统研究的这个新热点。本书最后的附录涉及到深一些的教学内容，它是为那些想对书中的某些内容（特别是第一章1和??）进行深究的读者准备的，使他们减少了查找参考书的麻烦。

作为分岔理论的入门教材，本书主要介绍动力系统分岔理论中一些基本概念、主要结果和常用方法，并力图通过最简单的例子涉及到这个理论的一些本质方面。我们把重点放在向量场的分岔上，但不可避免地会涉及到一些离散动力系统的情形。我们力求在选材上体现少而精的原则，因而不得不舍弃一些十分精彩但陈述冗长的结果或证明；在着力于可读性的同时，尽量兼顾一定的理论深度；并在注重解析推理的同时，兼顾几何直观。本书的大部分材料选自有关的论文或专著，我们在书中都做了具体的说明。为了使读者易于接受，我们对这些材料做了整理和加工。例如，第三章1中大部分定理的证明和第四、五两章全部定理的证明，是作者重新给出的；在第六章大部分定理的证明中，作者对原始材料做了必要的补充。我们也在书中介绍了作者们的一些近期工作。例如，第二章对参数一致的 Hopf 分岔定理；

对 Abel 积分零点个数的估计和有关高阶 Melnikov 函数的结果等。限于作者们的水平和能力，书中难免有不妥或错误之处，我们热诚欢迎读者们的批评与指正。

本书可作为大学数学系高年级本科生的选修或者相关专业研究生的基础课教材；也可供相关学科学生或科技人员当做参考书。书中的大部分内容，我们曾在北京大学讲授过，部分内容也曾在 1990 年“南开动力系统年”期间被用作教材。根据我们的经验，对于每周 3-4 学时的、一学期的课程，可以讲授第一章??-??, 第二章, 第三章??, 第四章和第五章??-??; 对于每周 3 学时、两个学期的课程，则可以讲授第一章到第五章的全部内容，第六章可选讲或选读。对于初学者，我们建议在学完第一章??后立即转入第二、三章，而第一章的其他各节可在适当时候再学，这样可能更容易接受些。

我们愿借此机会对参加过北京大学分岔理论讨论班的曾宪武、井竹君、王铎、高素志、唐云、张伟年、李宝毅、李翠萍、肖冬梅、齐东文、曹永罗、王兰宇、赵丽琴、彭临平等同志和我们的研究生们表示感谢，他们的报告和讨论使我们受益匪浅；其中有的同志还帮助我们仔细审阅了部分书稿，提出了不少好的建议，避免了一些错误。我们要特别感谢由伍卓群、黄启昌、曹策问三位教授领导的第一届国家教委理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组的各位专家，他们从审定本书的撰写计划到审议书稿都提出了很多宝贵、中肯的意见；感谢本书的主审人王铎教授和韩茂安教授，他们不仅对本书提出了很多建设性的意见，而且还提供了部分习题；感谢张恭庆教授，他在百忙中审阅了本书的附录，并提出了宝贵的意见；感谢高等教育出版社的杨芝馨同志，没有他们的辛勤工作，本书也不可能这么快与读者见面。

在撰写本书期间，作者得到国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的支持，我们也借此机会向有关方面表示感谢。

作者

1995 年 8 月于北京大学

CHAPTER 1

基本概念和准备知识

作为全书的准备, 我们在1中简述有关动力系统和结构稳定性的基本概念, 不加证明地陈述一些重要结果; 在??中引入分岔的概念, 并着重阐明分岔问题的提法; 在??和??中分别介绍中心流形定理和正规型理论, 在研究分岔问题时它们是进行简化处理的有效手段; 最后, 在??中介绍奇异向量场的普适开折和分岔的余维这两个重要的概念.

1. 动力系统及其结构稳定性

动力系统的概念和理论是从人们对常微分方程的研究中产生和发展起来的, 而且对常微分方程的研究, 至今任是动力系统理论的重要组成部分.

考虑 \mathbb{R}^n 中的自治微分方程

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^r 向量场, $r \geq 1$. 由常微分方程中熟知的结果, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, 方程 (??) 以 $x(0) = x_0$ 为初值的解 $\alpha(t, x_0)$ 在包含 $t = 0$ 的区间上存在. 如果 $f(x)$ 满足适当条件 (或在某种等价意义下对 $f(x)$ 进行改造, 见则解 $\alpha(t, x_0)$ 可以对一切 $t \in \mathbb{R}$ 存在, 并且 $\alpha(t, x)$ 满足:

- (1). $\alpha(0, x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (2). $\alpha(s+t, x) = \alpha(s, \alpha(t, x)), \forall s, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$;
- (3). $\alpha(t, x)$ 对 t, x 连续.

我们把满足上述条件 (1).- (3). 的映射: $\alpha: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为 \mathbb{R}^n 中的 (动力系统), 或者称为方程??的**流**, 并把点集

$$O_\alpha(x) = \{\alpha(t, x) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

称为流 α 过 x 的轨道.

不难证明, 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $O_\alpha(x_1)$ 和 $O_\alpha(x_2)$ 或者重合, 或者 (对有限的时间 t) 不相交, 因此,??的轨道集合依 f 的不同而呈现不同的规律.

常微分方程定性理论 (或者称为几何理论) 的首要目标, 就是对于给定的 $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), r \geq 1$, 研究方程??的轨道集合的结构 (轨道集合的拓扑结构图称为**相图**, 通常在相图上用箭头标明对应时间 t 增大的轨道方向). 一般而言, 方程??不可能用初等函数的有限形式求解, 因此研究它的相图是一个困难的任务. 例如, 即使当 $n = 2$ 且 $f(x)$ 为某些二次多项式这种最简单的非线性情形, 人们至今尚不清楚相图的确切结构. 参见 [?] [?]

现在把动力系统的概念加以推广. 设 M 是紧致的 C^∞ **微分流形**, 记 $Diff^r(M)$ 为 M 上所有 C^r **微分同胚** 的集合 (见附录 A 中定义 A.8), \mathcal{X} 为 M 上所有 C^r **向量场** 的集合, $r \geq 1$. 在 C^r 拓扑下, $Diff^r(M)$ 和 \mathcal{X} 均为完备的度量空间 (见附录 C 中的定义 C.1, 定义 C.2, 附注 C.4) $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, 存在 X 中过 $p \in M$ 的**极大流** α_X (见附录 B 中定义 B.13, 定义 B.15, 和定理 B.16). 为了讨论方便, 假设 M

是无边流形, 从而使 $\phi \in \text{Diff}^r(M)$ 可以往正、负向无限延伸; 使 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 的极大流在 $-\infty, +\infty$ 上存在 (否则要对微分同胚或向量场做适当处理)。

$\forall \phi \in \text{Diff}^r(M)$, 考虑从整数集 Z 到 $\text{Diff}^r(M)$ 的映射,

$$(2) \quad \Phi : Z \rightarrow \text{Diff}^r(M), \Phi(n) = \phi^n.$$

对固定的 ϕ , ϕ^n 是 M 上的一个单参数变换群; 对固定的 $n \in Z$, ϕ^n 给出了 $M \rightarrow M$ 的微分同胚。

$\forall X \in \mathcal{X}^r(M)$, 考虑从实数集 R 到 $\text{Diff}^r(M)$ 的映射

$$(3) \quad \alpha_X : R \rightarrow \text{Diff}^r(M), t \mapsto \alpha_X(t, p)$$

其中 α_X 是相应于 X 的流。对固定的 $X, \alpha_X(t, p)$ 是 M 上的一个单参数变换群; 对固定的 $t \in R$ 和所有的 $p \in M$, $\alpha_X(t, p)$ 是 $M \rightarrow M$ 的一个微分同胚。

因此, 我们可以把上面两种映射统一写成

$$\phi_t : M \rightarrow M$$

, 当 $t \in R$ 时, 它是由 α_X 导出的连续流, 当 $t \in Z$ 时, 称它为离散流。

ϕ_t 满足:

- (1). $\phi_0 = id_M$;
- (2). $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$;
- (3). $\phi_t(x)$ 对一切 t, x 一并连续;

有时也把 ϕ_t 称为 M 上的 C^r **微分动力系统**, 特别, 当 $t \in Z$, 称为**离散动力系统**。本书主要讨论连续流, 由于它与离散流有密切的关系 (参见下面的定义 1.6), 必要时也讨论离散流。

定义 1.1. 设 $\phi_t : M \rightarrow M$ 如上, M 中的集合

$$O_\phi(x) = \{\phi_t(x) | t \in R(t \in Z)\} \subset M$$

称为连续流 (或离散流) ϕ_t 过 x 的**轨道**。如果把上式中的 R (或 Z) 改为 R_+ (或 Z_+) 或者 R_- (或 Z_-), 则相应地得到过 x 的**正半轨道**或者**负半轨道**, 并分别记为 $O_\phi^+(x)$ 或者 $O_\phi^-(x)$ 。

定义 1.2. 过 x 的正 (或负) 半轨道的极限点称为 x 的 ω 或 α 极限点。 x 的全体 ω (或 α) 极限点组成的集合称为 x 的 ω (或 α) 极限集, 记为 $\omega(x)$ (或 $\alpha(x)$)。显然, 当 M 紧致时 $\omega(x) \neq \emptyset, \alpha(x) \neq \emptyset$ 。

定义 1.3. 设 $\phi_t: M \rightarrow M$ 如上, $p \in M$ 称为游荡点, 如果存在 p 的领域 $U \subset M$, 和某个正整数 N , 使 $\forall |t| > N$, 有 $\phi_t(U) \cap U = \emptyset$; 不是游荡点的点称为非游荡点, ϕ_t 的所有非游荡点的集合称为非游荡集, 记为 $\omega(\phi)$ 。既

$$\omega(\phi) = \{p \in M | \text{对 } p \text{ 的任意领域 } U, \forall t, |t| > 1, \text{使 } \phi_t(U) \cap U = \emptyset\}.$$

显然, $\omega(x) \subset \omega(\phi), \alpha(x) \subset \omega(\phi)$. 因此, 当 M 紧致时, $\omega(\phi) \neq \emptyset$. 下面定义的临界元是 $\omega(\phi)$ 的重要组成部分。

定义 1.4. 设 $\phi_t: M \rightarrow M$ 如上, M 的连通子集

$$L = \{p | \phi_t(p) = p, t \neq 0\}$$

称为一个临界元。

给出临界元的定义是为了陈述上简洁。有时要对临界元进行如下细致的区分。

在微分同胚的情形, 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\phi^k(p) = p$, 则 p 为临界元。满足这个条件的最小数 k 称为 p 的周期, 并称 p 为 k 周期点。特别地, 若周期为 1, 则称 p 为不动点。对于 k 周期点 p , 如果 $D\phi^k(p)$ 的所有特征值的模均不为 1, 则称 p 是一双曲不动点 ($k=1$) 或 (双曲周期点) ($k > 1$)。

在向量场的情形, 临界元 L 有两种类型。一种类型是, L 由一个点 p 组成。在这种情况下, $\forall t, \phi_t(p) = p$ (或等价地 $X(p) = 0$), 此时称 p 为向量场的一个奇点。称 p 为一个双曲奇点, 如果 $\forall t \neq 0, p$ 是 ϕ_t 的一个双曲不动点 (或等价地, $DX(p)$ 的所有特征根都有非零的实部)。另一种类型是, L 由向量场的闭轨 γ 组成。此时 $\forall p \in \gamma, \exists t \neq 0$, 使 $\phi_t(p) = p$. 这样最小的正数 $t = T$ 称为闭轨 γ 的周期。 γ 称为双曲闭轨, 如果对某个 $p \in \gamma$ (从而 $\forall p \in \gamma$), $D\phi_T(p)$ 的所有特征值的模除了一个以外都不等于 1. 注意, 此时 γ 上每一点都不是向量场的奇点, $\forall p \in \gamma, X(p)$ 是 $D\phi_r(p)$ 的以 1 为特征值的特征向量。

在研究向量场的轨道结构时, 局部困难在奇点附近 (就奇点本身而言, 它无非是动力系统的一个平衡点, 但在它附近的轨道结构却可能千变万化); 而整体的困难在于非游荡点集的结构, 它反映出动力系统的本质特征。

定义 1.5. M 中集合 Λ 称为 φ 的**不变集**, 如果 $\forall x \in \Lambda$, 有 $O_\varphi(x) \subset \Lambda$.

不难证明, $O_\varphi(x), \omega(x), a(x), \Omega(\varphi)$ 都是 φ 的不变集。

在研究闭轨的分岔时, 建议如下定义的 *Poincaré* 映射是一个很重要的手段。

定义 1.6. 设 γ 是 C^∞ 流 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 的一条闭轨, $p \in \gamma$. 取 M 内包含 p 点的一个如此”小”的光滑余维 1 子流形 U , 使得流 φ_t 相应的向量场在 U 上每一点与 U 都是无切的。从而 $\exists U', p \in U' \subset U$, 和在 U' 上定义的 C^r 函数 T , 使得 $T(p)$ 等于 γ 的周期, 且 $\forall p' \in U' \varphi_{T(p')}(p') \in U$. 由此可定义 *Poincaré* 映射

$$P: U' \rightarrow U, P(p') = \varphi_{T(p')}(p'),$$

见图??.

?? 图片

显然, $P(p) = p$, 既 p 是映射 P 的不动点。利用 *Poincaré* 映射, 可以把对 C^r 向量场在闭轨 γ 附近轨道结构的研究, 转化为对 C^r 微分同胚 P 在不动点 p 附近轨道结构的研究。

我们现在转向结构稳定性问题。简言之, 在”小扰动”下不改变其轨道结构的动力系统是结构稳定的。

定义 1.7. 称两个向量场 X_1 与 X_2 **拓扑轨道等价**, 如果存在同胚 $h: M \rightarrow M$, 它把 X_1 的每条轨道保向地映到 X_2 的相应轨道。称两个微分同胚 $\varphi_1, \varphi_2: M \rightarrow M$ **拓扑共轭**, 如果存在同胚 $h: M \rightarrow M$, 使 $\varphi_2 = h^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot h$ 。称 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ (或 $\varphi \in \text{Diff}^r(M)$) C^k **结构稳定** ($k \leq r$), 如果存在 C^k 拓扑中的邻域 $U, X \in U \subset \mathcal{X}^r(M)$ (或 $\varphi \in U \subset \text{Diff}^r(M)$), 使 $\forall X' \in U$ 拓扑轨道等价于 X (或 $\forall \varphi' \in U \subset \text{Diff}^r(M)$ 拓扑共轭与 φ)。

当同胚 h 还保持 X_1 与 X_2 相应轨道的时间对应时, 称为**拓扑等价**。关于 C^r 拓扑的定义, 见附录 C。通常考虑 C^1 结构稳定性。此时常省略” C^1 ”, 简称为结构稳定性。

在向量场的双曲奇点 (或微分同胚的双曲不动点) 附近, 有下面的局部结果。

定理 1.1 (Hartman-Grobman 定理). 设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是包含 O 点的开集; 向量场 X 以 O 为双曲奇点 (或 $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ 以 O 为双曲”不动点”), 则存在 O 的

开邻域 $V \subset U$, 使 X 与其他相应的线性场 $DX(O)$ 在 V 上拓扑轨道等价 (或 φ 与其相应的线性映射 $D\varphi(O)$ 在 V 上拓扑共轭)。

定理 1.2 (局部结构稳定性定理). 设 $X \in \mathcal{X}^r(\mathbf{R}^n)$, X 以 O 为双曲奇点, 则 X 在 O 点附近局部结构稳定, 既存在 X 在 $\mathcal{X}^r(\mathbf{R}^n)$ 中的一个 C^1 邻域 $U, \forall Y \in U, Y$ 在 O 附近有唯一的双曲奇点 p , 且 Y 在 p 附近的某邻域与 X 在 O 的某邻域内拓扑轨道等价。

(对于离散的情形, 也有平行的结果。)

推论. 如果把定义 1.7 中的轨道等价从 C^0 加强到 $C^k, k \geq 1$, 既要求 h 为 C^k 微分同胚, 则 X_1 与 X_2 在相应奇点处的线性系统的特征根有相同的比值 (见 $[GH, p42]$). 这就把等价关于限制过严, 使得两个轨道结构相同的向量场也未必等价。例如, 由定理 ?? 可知, 二维系统

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

是 (局部) 结构稳定的, 它与系统

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + \mu y$$

($\mu \neq 0$) 是 C^0 等价的。但他们不是 C^1 等价的。另一方面, 如果把定义 1.7 中扰动从 $C^r (r \geq 1)$ 加强到 C^0 , 则总是可以扰动处不同的轨道结构, 因而无结构 i 稳定性可言。例如, 由定义 ?? 可知, 一维系统 $\dot{x} = x$ 是局部结构稳定的, 但它的 C^0 扰动系统 $\dot{x} = x + \mu\sqrt{|x|}$ 与原系统在原点的任意小邻域内都有不同的轨道结构, 只要 $0 < |\mu| \ll 1$. 因此, 如无特别声明, 下文中的等价都指 C^0 等价, 而扰动都是 C^1 扰动。

在给出进一步的结果之前, 我们需要下面的定义。

定义 1.8. 设 U, φ 同上, 称集合

$$W_\varphi^s(O) = \{x \in U \mid \varphi^k(x) \rightarrow O, k \rightarrow +\infty\}$$

和

$$W_\varphi^u(O) = \{x \in U \mid \varphi^{-k}(x) \rightarrow O, k \rightarrow +\infty\}$$

分别称为 X 在 γ 的**稳定流形**与**不稳定流形**。

对于向量场的情形，有类似的定义。

定义 1.9. 设 γ 是向量场 X 的双曲奇点或双曲闭轨，集合

$$W_X^s(\gamma) = \{x \in M \mid \alpha_X(t)x \rightarrow \gamma, t \rightarrow +\infty\}$$

和

$$W_X^u(\gamma) = \{x \in M \mid \alpha_X(t)x \rightarrow \gamma, t \rightarrow -\infty\}$$

分别称为 X 在 γ 的**稳定流形**和**不稳定流形**.

利用 Poincare 映射，可以把向量场在双曲闭轨附近的研究化为在不动点附近的研究。由 Hartman-Grobman 定理， $W_X^s(O), W_X^u(O)$ (或 $W_\varphi^s(O), W_\varphi^u(O)$) 可在 O 的小领域内分别与线性映射 $A = DX(O)$ (或 $D\varphi(O)$) 相应的集合 E^s, E^u (它们是 \mathbf{R}^n 的线性子空间) 建立同胚。因此 $W_X^s(O)$ 与 $W_X^u(O)$ (或 $W_\varphi^s(O)$ 与 $W_\varphi^u(O)$) 在 O 点附近是 M 的子流形。进而可以证明，它们在 O 点分别与 E^s 和 E^u 相切；从整体上看 $W_X^s(O)$ 与 $W_X^u(O)$ (或 $W_\varphi^s(O)$ 与 $W_\varphi^u(O)$) 是 M 的 C^r **浸入子流形** (但未必是 M 的子流形，见附录 B 中附注 B.24)，证明可以参考 [ZQ, 定理 4.9 和 4.10].

现在我们可以陈述 M.M.Peixoto 在 1962 年证明的一个有关全局结构稳定性的结果 (参见 [ZDHD]) .

定理 1.3. 设 M 是紧致的二维光滑流形 $X \in \mathcal{X}^r(M)$. 则 X 是 C^1 结构稳定的，当且仅当

- (1) X 的非游荡集仅由临界元组成；
- (2) X 的临界元 (包括奇点和闭轨) 个数有限，并且他们都是双曲的；
- (3) 任何双曲临界元的稳定流形和任何双曲临界元的不稳定流形横截相交。

这里横截相交的定义见附录 C 中定义 C.10. 注意，不相交也算作横截。另一个有关结构稳定集的重要结果，是下面的

定理 1.4. 二维可定向紧致流形 M 上 C^r 结构稳定向量场的集合在 (对) 中是一个开稠集。

推论. peixoto 等人的上述结果，从 60 年代开始吸引了在国外以 Smale 为代表、在国内以廖山涛为代表的一批数学家，在微分动力系统方面他们做了大量的工作 (参见 [L1],[Zzs] 等). 人们把满足定理 1.13 中三个条件的向量场称为

Morse-Smale 向量场.(类似可定义 $M-S$ 微分同胚)。自然要问: 定理 1.13 和定理 1.14 在高维流形上是否仍然成立? Smale 在 60 年代构造的称为“马蹄”的著名例子 (见第四章), 以及 Newhouse 随后对“马蹄”的改造, 说明上述问题的答案都是否定的, 既在高维流形上的结构稳定向量场 (或微分同胚) 未必是 $M-S$ 的, 而全体结构稳定的向量场 (或微分同胚) 的集合在 $\mathcal{X}^r(M)$ (或 $Diff^r(M)$) 中不一定是稠集。进一步的问题是: 当 $\dim M > 2$ 时, 在 $(X)^r(M)$ 中 (或当 $\dim M > 1$ 时, 在 $Diff^r(M)$ 中) 结构稳定的充要条件是什么? 对此 Smale 提出了比 $M-S$ 条件更广的公理 A 条件, 并且给出了两个结构稳定性的猜测: 结构稳定 \Leftrightarrow 公理 $A+$ 强横截条件; ω 稳定性 \Leftrightarrow 公理 $A+$ 无环条件。这两个猜测的充分性部分已为 Smale 本人和其他人所证明; 必要性部分则于 1987 年分别由 Mane 和 Palis 对微分同胚的情形给出了证明。对向量场情形的第一个猜测, 直到最近才由廖山涛、胡森、和 Hayashi、文兰分别对三维和一般情形给出证明。

2. 分岔与分岔问题的提法

从上节定义??可知, 若 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 不是结构稳定的, 则在 X 的任何一个 C^1 领域内, 都可以找到与 X 轨道结构不同的向量场。研究结构不稳定向量场在”扰动”下轨道结构的变化规律, 是分岔理论的核心内容。

2.1. 分岔的概念.

定义 2.1. 设 M 是光滑流形, $\Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中结构稳定向量场的集合, 则集合 $\Lambda^r(M) = \mathcal{B}^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$ 称为 **分岔集**。

定义 2.2. 设 $\epsilon \in \mathbf{R}^k$, $X(\epsilon) \in \mathcal{E}\mathcal{X}^r(M)$ 。若 $X(\epsilon_0) \in \Lambda^r(M)$, 则称 ϵ_0 为族 $X(\epsilon)$ 的**分岔值**。当参数 ϵ 通过分岔值时, 在相空间中向量场 $X(\epsilon)$ 所发生的轨道拓扑分类的变化称为**分岔**。

对于离散动力系统, 也可以给出类似的定义。由定理??可知, 如果向量场在奇点附近发生分岔现象, 则该奇点必是非双曲的。

当 M 是紧致二维定向流形时, 由定理??可知, 分岔集 $\Lambda^r(M)$ 所包含的向量场具有如下结构: 它有非双曲的奇点或闭轨; 或者它的奇点和闭轨是双曲的, 但它们的稳定流形和不稳定流形部横截相交 (这时出现下面定义的同宿轨或异宿轨); 或者它的非游荡点集含有无限多个临界元。

由定义??易知, 结构稳定集 $\Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中的开集。当 M 为二维紧致定向流形时, 再由定理??知, $\Sigma^r(M)$ 是开稠集, 从而分岔集 $\Lambda^r(M)$ 是这个开稠集的“边界”, 但在高维流形的情形, $\Lambda^r(M)$ 可以有更复杂的结构 (见附注??)。

定义 2.3. 向量场的相轨线称为奇点 (或闭轨) 的**同宿 (homoclinic) 轨**, 如果这轨线不是奇点 (或闭轨) 本身, 而且它的 α 极限集与 ω 极限集都与这奇点 (或闭轨) 一致。相轨线称为**异宿 (heteroclinic) 轨**, 如果它的 α 极限集和 ω 极限集是不同的奇点或者闭轨。

定义 2.4. 如果发生在奇点 (或闭轨) 的小领域内, 并且与它的双曲性破坏相联系的分岔称为**局部分岔**。发生在有限个同宿轨或异宿轨的小领域内的分岔称为**半局部分岔**。所有其余的分岔称为**全局分岔**。

上面的定义 2.1-2.4 取自??. 我们将在后面看到, 在研究局部分岔时, 可能会伴随出现半局部分岔; 而研究半局部分岔时, 也可能伴随出现全局分岔。

推论. 如上所述, 分岔集 $\Lambda^r(M) = \mathcal{X}^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中的闭子集. 如果限制在 $\Lambda^r(M)$ 上, 任可以考虑结构稳定集 $\Sigma_1^r(M)$ 及其余集 $\Lambda_1^r(M) = \Lambda^r(M) \setminus \Sigma_1^r(M)$. $\Lambda_1^r(M)$ 是 $\Lambda^r(M)$ 中具有更多分岔现象的闭子集. 我们可以继续对 $\Lambda_1^r(M)$ 进行各种剖分, 得到各种层次的分岔集.

例 2.1. 考虑 \mathbb{R}^1 上的向量场

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2).$$

显然, $x = 0$ 总是方程 4 的一个奇点. 当 $\mu < 0$ 时, 它是 4 的唯一奇点, 并且是双曲的 (定义见 1). 当 $\mu = 0$ 时, $x = 0$ 任是 4 的唯一奇点, 但它是非双曲的. 当 $\mu > 0$ 时, 除了 $x = 0$ 之外, 方程 4 还有两个奇点 $x = -\sqrt{\mu}$ 和 $x = \sqrt{\mu}$, 它的三个奇点都是双曲的. 图 ?? 给出了 4 的奇点分布对参数 μ 的依赖关系. 由此可以看出, 当参数 μ 变化值通过 $\mu = 0$ 时, 4 的奇点个数发生了突变, 从而表示奇点个数的图形在 $\mu = 0$ 处发生了分岔. 习惯上把这种分岔现象称为 **叉 (pitchfork) 分岔**. 图 ?? 给出 $\mu < 0, \mu = 0, \mu > 0$ 三种情形下, 4 的相图, 由此可以看出, 相对于不同的 μ , 4 的轨道拓扑结构所发生的变化. 显然, $\mu = 0$ 是唯一的分岔值.

例 2.2. 考虑 \mathbb{R}^1 上的向量场

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \mu - x^2,$$

与上例同样的分析可知, $\mu = 0$ 是 5 的唯一分岔值: $\mu < 0$ 时向量场 5 无奇点; 当 $\mu > 0$ 时, 5 有两个双曲奇点; 当 $\mu = 0$ 时 5 有唯一奇点 $x = 0$, 它是非双曲的, 称为 **鞍结点 (saddle-node)**, 并把这种分岔现象称为 **鞍结点分岔**. 与上例相似, 可分别做出图 ?? 与图 ?. 从下面的例中, 我们可以对这一名称有更直观的理解.

例 2.3. 二维的鞍结点分岔. 考虑 \mathbb{R}^2 上的向量场

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

不难得知 $\mu = 0$ 是唯一的分岔值, 并可做出轨道拓扑分类图 (二维鞍结点分岔), 见图 ??.

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$
$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(\mu - r^2), \\ \frac{dy}{dt} = 1, \end{cases}$$

例 2.5 (DL). 首先考虑一个平面系统

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \left(1 - \frac{3}{2}x\right). \end{cases}$$

$$(10) \quad F(x, y) \xrightarrow{d} y^2 + x^2 - x^2 = C,$$
$$(11) \quad C = \frac{4}{27} - \mu,$$

(1) 当 $\mu = 0$ 时, 由10得到鞍点分界线 $\Gamma_0 \cup H_0$, 其中 Γ_0 是鞍点 A 的同宿轨道, 而 H_0 把相平面分成左右两部分 (见图??).

(2) 当 $\mu < 0$ 时, 由 10 可确定一条 (无界) 轨道 γ_μ , 它位于 Γ_0 所围有界区域之外和 H_0 的左侧; 当 $\mu \rightarrow 0$, γ_μ 收缩到 $\Gamma_0 \cup H_0$ 。

(3) 当 $\mu > 0$ 时, 由10可确定两条轨道, 其中一条为比轨道 Γ_μ , 它位于 Γ_0 所围有界区域的内部; 另一条 (无界) 轨道 H_μ 在 H_0 右侧。令 $\mu \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_0, H_\mu \rightarrow H_0$ 。

令函数

$$f(x, y, \mu) = F(x, y) - \left(\frac{4}{27} - \mu \right)$$

其中的 $F(x, y)$ 由10式定义。

利用此函数构造向量场族 X_μ 如下

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \left(1 - \frac{3}{2}x \right) + f(x, y, \mu)y. \end{cases}$$

容易算出

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(2,8)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{(2,8)} = 2f(x, y, \mu)y^2,$$

由此可知, 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 系统12的轨道分布如图??所示。(所用的论据, 类似于 Lyapunov 函数判断奇点的稳定性), 并且易知, 当 $0 < \mu \ll 1$ 时, 12的唯一闭轨就是9的闭轨 Γ_μ , 当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时, 它趋于 X_0 的同宿轨 Γ_0 。

在例??-例??中, 分岔现象都是由于奇点的非双曲性而发生的, 属于局部分岔。本例则不同, 分岔现象是由同宿轨 (对应于 $\mu = 0$) 在扰动下 ($\mu \neq 0$) 破裂而发生的, 称为**同宿分岔**, 它是一种局部分岔。

例 2.6. 考虑映射 $F: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, 它的线性部分以-1 为特征根。由下文中??例??可知, 不妨设

$$(13) \quad F(x) = -x + \alpha x^3 + O(|x|^5),$$

其中 $\alpha \neq 0$. 在 $x = 0$ 附近的一个领域内, 映射 F 以 $x = 0$ 为唯一不动点。注意, 由隐函数定理可知, 13的任一扰动在 $x = 0$ 附近任有唯一的不动点, 所以我们不妨取它的扰动系统保持 $x = 0$ 为不动点, 且具有下面的形式

$$F_\mu(x) = -(1 + \mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + O(|x|^4),$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}^1$, 光滑函数 $a_2(\mu), a_3(\mu)$ 满足 $a_2(0) = 0, a_3(0) = a$ 。考虑 F_μ 的两次叠代映射, 得到

$$F_\mu^3(x) = (1 + \mu)^2 x + O(\mu^2) x^2 - (2 + O(\mu)) a x^3 + O(|x|^4),$$

从而 $F_\mu^2(x) - x$ 可表示为

$$x [\mu(2 + \mu) + O(\mu^2) x - (2 + O(\mu)) a x^3 + O(|x|^3)].$$

因此, 利用 $\alpha \neq 0$ 及下文中的 Malgrange 定理 (定理??) 可知, 当 $\mu a > 0$ 且 $|\mu| \ll 1$ 时, F_μ^2 除了有不动点 $x = 0$ (它是 F_μ 的不动点) 之外, 又有两个新的不动点, 它们是 F_μ 的 2 周期点 (图?? 相应于 $a > 0$ 的情形)。如果把上面的映射 F_μ 看成一向量场的流的 **Poincare 映射**, 则当 μ 的值从负到正的瞬间 (设 $a > 0$), 原有的稳定闭轨变为不稳定的闭轨 γ_1 , 而在它的领域内又产生了一个稳定的几乎两倍与原周期的闭轨 γ_2 , 这种分岔现象称为**倍周期分岔**, 它发生在一个 *Mobius* 带上 (见图??), γ_1 位于这带的轴线, 而 γ_2 是这带的边界。

2.2. 分岔问题的提法. 从实际中产生的分岔问题, 常常是带参数的向量场族。例如

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu)$$

其中 $f \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ 。当 $\mu = 0$ 时, 相应系统

$$(15) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, 0) = f_0(x)$$

是结构不稳定的。当 $|\mu| \ll 1$ 时, 常把 14 称为 15 的一个 C^r 开折 (unfolding)。我们要研究的是:

问题 A 能否找到 $\mu = 0$ 在 \mathbf{R}^k 中的一个领域 V , 使得当 μ 在 V 中变动时, 弄清系统 14 的轨道结构如何变化?

在较简单的情况下还可以考虑: 能否把 V 分成若干子集, 它们对应 14 的轨道拓扑结构的不同等价类? 在例?? 中, $\mu = 0$ 把参数空间 $\mu \in \mathbf{R}^1$ 分成两部分, 其中 $\mu < 0$ 和 $\mu > 0$ 相应于系统 equ2.1 两种不同的且分别结构稳定的轨道拓扑类型。

进一步的问题是:

问题 B 能否找到15的开折, 它“包含”了15的任一开折所能出现的轨道结构?

问题 C 能否找到15的开折, 它满足问题 B 的要求, 并且含有“最少”的参数?

对上述问题的一些名词的确切含义进行澄清, 将会引导到“普适开折”和“分岔的余维”这样一些深刻的概念, 我们将在??中介绍, 本节先对这些概念给出直观的描述。这里需要指出的是, 由于向量场分岔集合可以是任意复杂结构的, 一般而言, 对上述问题回答是非常苦难的。在多数情形下, 只能对问题 A 作出问题的回答。但当系统??的相空间维数较低且它的“退化程度”不高时, 目前对问题 B 和 C 已有一些完整的结果。

下面以 \mathbf{R}^1 上的系统

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = -x^3$$

为例, 回答上面的问题。例??中系统4是??的一个开折。我们要证明, ??不是满足问题 B 要求的那种开折。现在考虑??的任意一个 C^∞ 开折

$$(17) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad f(x, 0) = -x^3$$

里这 $f(x, \mu)$ 在 $(0, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 的一个小领域中定义, m 是一个足够大的正整数。在进一步讨论之前, 我们需要下面的结果, 它可以看成是隐函数定理的推广。

定理 2.1 (Malgrange 定理). 设 $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 是包含原点的开集, $f \in C^\infty(U, \mathbf{R})$ 并且满足 $f(t, 0) = t^k g(t)$, 其中 $k \in \mathbf{Z}^+$, g 在 $t = 0$ 附近是光滑函数, 且 $g(0) \neq 0$ 。则存在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中 $(0, 0)$ 附近的领域 $V \subset U$ 和光滑函数 $q(t, x)$, 以及 \mathbf{R}^n 中 O 点附近某领域中的光滑函数 $a_0(x), \dots, a_{k-1}(x)$, 满足 $q(0, 0) \neq 0, a_0(0) = \dots a_{k-1}(0) = 0$, 以及

$$(18) \quad f(t, x) = q(t, x) \left[t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(x) t^i \right], \quad \forall (t, x) \in V.$$

证明可见 [CH, pp43-45]. 定理中的 C^∞ 光滑条件后来减弱到有限光滑性。由上面的定理可知, 对于开折19存在 \mathbf{R}^{m+1} 中零点的领域 V , 以及光滑函数 $q(x, \mu), a(\mu), b(\mu)$ 和 $c(\mu)$, 满足

$$(19) \quad q(0, 0) \neq 0, a(0) - b(0) = c(0) = 0$$

以及

$$f(x, \mu) = q(x, \mu) [a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^3 - x^3]$$

因此, 当 (x, μ) 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 中 $(0, 0)$ 点附近的一个小领域中取值时, 系统19与系统

$$(20) \quad \frac{dx}{dt} = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 - x^3$$

有相同的轨道结构。注意上式右端可改写为 $\lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu) \left(x - \frac{c(\mu)}{3}\right) - \left(x - \frac{c(\mu)}{3}\right)^3$, 其中 $\lambda_1(\mu) = a(\mu) + \frac{b(\mu)c(\mu)}{3} + \frac{2(c(\mu))^3}{27}$, $\lambda_2(\mu) = b(\mu) + \frac{(c(\mu))^2}{3}$ 。令 $y = x - \frac{c(\mu)}{3}$, 然后把 y 改写成 x , 则系统20变为

$$(21) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)x - x^3$$

显然, 21所能出现的轨道拓扑类型不超出系统

$$(22) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3,$$

所能出现的轨道拓扑类型, 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^1$ 是独立的参数。至此我们证明了??的任一开折 (可以含有任意多个参数) 所能出现的轨道拓扑结构, 都含于双参数开折22的轨道拓扑结构类型中, 既22就是问题 B 中所要求的开折。这时我们称22是??的一个 **普适开折**。对22进行定性分析不难得知, 在 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 平面上使对应的系统22成为结构不稳定的点的集合为原点 $O()$ 和由

$$\left\{ \lambda | \lambda_1 = \pm 2 \left(\frac{\lambda_2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda_2 > 0 \right\}$$

给出的两条**分岔曲线** Γ_+, Γ_- , 它们在 O 点相切, 并形成尖点, 见**分岔图??**, 相应于不同的 λ , 开折22的 5 种拓扑轨道分类中有 2 种是结构稳定的 (分别相应于

$\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ 把平面分成两个区域), 有三种是结构不稳定的。显然, 例10中开折4所能出现的轨道拓扑类型都含于其中。图??给出了方程22的奇点个数对 λ 的依赖关系, 图中的“奇点曲面”方程为 $\lambda_1 + \lambda_2 x - x^3 = 0$; 沿 x 轴方向穿越此曲面的次数给出系统的奇点个数。曲面折叠部分的“边缘”向 (λ_1, λ_2) 平面投影, 就得到图??中分岔曲线 Γ_+ 和 Γ_- 。

最后我们来证明??的任一单参数开折都不具有22的如上性质, 从而22还满足问题 C 的要求, 此时称由??引出的分岔为余维 2 的。事实上, 由于??的任一开折都可等份地转化成20的形式, 所以我们只需在三维空间 (a, b, c) 的原点附近的某领域 U 中考虑即可。 $\forall \mu$, 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 向量场20对应 U 中一点。设 Δ 为 U 的一个子集, 其中的点对应的向量场与??有“相同的奇异性”, 既

$$\Delta = \{(a, b, c) | \exists x_0, a + bx + cx^3 - x^2 = -(x - x_0)^3\}.$$

故 Δ 中的点 (a, b, c) 满足

$$a = x_0^3, b = -3x_0^2, c = 3x_0.$$

由此不难得知, Δ 是 U 中的一条曲线 (余维 2 子流形)。所以在 U 中至少二维曲面 (相应于??的二参数开折) 才能与 Δ 横截相交, 见图??, 而??的单参数开折所对应的 U 中的曲线虽然也可以在 O 点与 Δ 相交, 但在任意小的扰动下, 它都可以与 Δ 分离, 换句话说, 至少在二参数的开折中, 像??这样的分岔现象才是“不可去”的。

注意到 (a, b) 坐标平面在原点与 Δ 横截, 所以22同时具有问题 B、C 所要求的性质。

推论. 利用同样的推理不难证明: 当 $a \neq 0$ 时, \mathbf{R}^1 上的系统 $\frac{dx}{dt} = ax^{k+1} + O(|x|^{k+2})$ 是余维 k 的, 它的一个普适开折可取为 $\frac{dx}{dt} = \mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_k x^{k-1} + ax^{k+1}$ 。特别地, 例11中的系统5是 $\frac{dx}{dt} = -x^2$ 的一个普适开折, 但 $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2$ 则不是。我们将在??中把这里的讨论精确化、一般化。

3. 中心流形定理

在考虑一个向量场的分岔问题之前，一般要进行简化处理。一方面，希望在不改变力学性质的前提下把相空间维数尽可能降低；另一方面，力求在等价的意义上把微分方程的形式尽可能化简。前者要用到中心流形定理，将在本节介绍，后者要用正规形理论，将在下节介绍。这两节中讨论主要对 \mathbf{R}^n 中向量场进行，不难把结果推广到微分同胚的情形（例如，参见??）。

观察上节图??可以发现，二维空间上的分岔其实主要是由动力系统在一维不变流形 $y = 0$ 上结构变化所决定（参照图??），而在这不变流形之外的轨线，无非是向者不变流形的压缩。出现这种规律并不是偶然的，系统??在 $(0, 0)$ 点的线性部分矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

它分别以 0 和 -1 为特征值，它的非双曲部分是一维的。由此猜想：当微分方程右端在某一奇点的线性部分矩阵有 n_1 个零实部特征根， n_2 个非零实部特征根时，可以把分岔现象的研究，在奇点附近限制在某一个 n_1 维的不变流形上，从而问题的难度得以降低。

3.1. 线性情形. 先考虑线性方程

$$(23) \quad \frac{dx}{dt} = Ax,$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$, A 为 n 阶实数矩阵。我们知道，方程??的解

$$(24) \quad \varphi_t(x) = e^{tA}x$$

的性态完全被矩阵 A 的特征值的性质所决定。

设矩阵 A 的特征值的集合为 $\sigma = \sigma(A)$ ，则

$$\sigma = \sigma_s \cup \sigma_u \cup \sigma_c,$$

其中

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & \sigma_s \xrightarrow{d} \{\lambda \in \sigma | \operatorname{Re} \lambda < 0\} \\
 & \sigma_u = \{\lambda \in \sigma | \operatorname{Re} \lambda > 0\} \\
 & \sigma_c = \{\lambda \in \sigma | \operatorname{Re} \lambda = 0\}
 \end{aligned}$$

记 E^s 为 \mathbf{R}^n 中相应于 $\lambda \in \sigma_s$ 的那些特征值的广义特征向量所张成的子空间; 并可类似定义 E^u 和 E^c , 则有直和分解。

$$(26) \quad \mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

和相应的投影

$$\pi_s : \mathbf{R}^n \rightarrow E^s, \pi_u : \mathbf{R}^n \rightarrow E^u, \pi_c : \mathbf{R}^n \rightarrow E^c.$$

bb 这些投影映射的零空间分别为

$$(27) \quad \ker(x_s) = E^{cu} \xrightarrow{d} E^c \oplus E^u,$$

$$(28) \quad \ker(x_u) = E^{cs} \xrightarrow{d} E^c \oplus E^s,$$

$$(29) \quad \ker(x_c) = E^h \xrightarrow{d} E^s \oplus E^u,$$

上述投影都与 A 可交换, 故 E^s, E^u, E^c 都是 A 的不变子空间。

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 从非奇点出发的轨道在 E^s 中是指数型“压缩”的, 而在 E^u 中则是指数型“增长的” ($t \rightarrow -\infty$ 时情况相反)。所有对 $t \leftarrow +\infty$ 有界的轨道 (特别地, 所有奇点, 闭轨) 都停留在 E^c 内。由于这些性质, 通常称 E^s 为**稳定子空间**, E^u 为**不稳定子空间**, E^c 为**中心子空间**, $E^h = E^s \oplus E^u$ 为**双曲子空间**, 并记投影 $\pi_h : \mathbf{R}^n \rightarrow E^h$. 轨道的动力学行为在双曲子空间内是单纯的, 而复杂现象发生在中心子空间 E^c 内。

3.2. 非线性情形. 现在考虑非线性方程

$$(30) \quad \frac{dx}{dt} = A x + f(x),$$

其中 $f \in C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), k \geq 1, f(0) = 0$ 且 $Df(0) = 0$ 。

我们先称述整体的结果。

$$C_b^k(X, Y) \{q \in C^k(X, Y) | q\}$$

•

(1) 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0, i=1, \dots, k\}$ 是 \mathbb{R}^n 的 C^k 流形, 既存在唯一的 $\varphi \in C_b^k(E^c, E^k)$, 使

(2) 如果有 $\psi \in C_b^0(E^c, E^h)$, 使集合

是??的不变集, 则 $M^c = W^c$, 且 $\phi = \varphi$;

$$(32) \quad \frac{dx_c}{dt} = \mathbf{A}x_c + \pi_c f(x_c + \varphi(x_c)) \quad x_c \in E^c.$$

推论. 定理??中有关全局中心流形唯一性的结论 (2) 指出, 若 W^c 在??的流下不变, 则 $\varphi \in C_b^0(E^c, E^h)$ 是唯一确定的。如果改为 $\varphi \in C^0(E^c, E^h)$, 则结论一般不对, 见??。

定理??中的条件 $\|Df\| < \delta_k$ 是很强的, 它使得该定理实际上很难应用。由于 $f(0) = 0, Df(0) = 0$, 故在奇点 $x = 0$ 附近这个条件却是自然成立的。因此, 采用截断 (*cut-off*) 函数从定理??得出的局部结果更自然, 从而更实用。取截断函数 $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 满足 $0 \leq \eta(x) \leq 1$, 且

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1 \\ 0, & \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

再令

$$(33) \quad f_\rho(x) = f(x)\eta\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

此时, 为了研究方程??在 $x = 0$ 附近的中心流形, 我们考虑方程

$$(34) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f_\rho(x)$$

显然, 当 $\|x\| \leq \rho$ 时, $f(x) \equiv f_\rho(x)$, 且不难证明

$$(35) \quad \|Df_\rho(x)\| \rightarrow 0, \text{ 当 } \rho \rightarrow 0.$$

定理 3.2 (局部中心流形定理). 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 1, f(0) = 0, Df(0) = 0$, 则 $\exists \varphi \in C^k(E^c, E^h)$ 在 \mathbb{R}^n 中的开邻域 U , 使得

(1) 流形

$$(36) \quad W_\varphi = \{x_c + \varphi(x_c) \mid x_c \in E^c\}$$

对??的流局部不变, 既

$$\tilde{x}(t, x) \in W_\varphi, \forall x \in W_\varphi \cap U, \forall t \in J_U(x).$$

这里 $\tilde{x}(t, x)$ 为??的满足 $\tilde{x}(0, x) = x$ 的解, $J_U(x)$ 为 x 在 U 内极大流相应时间的时间区间;

(2) $\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$;

(3) 如果 $x \in U$, 且 $J_U(x) = \mathbb{R}$, 则 $x \in W_\varphi$.

证明. 设与 A 相关的 δ_k 已经确定 (见定理??的条件), 则由??和??, 可取 $\rho > 0$ 使 $f_\rho(x) \in C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 且 $\|Df_\rho\| < \delta_k$. 对系统??应用定理??可知, 存在由??给出的 C^k 子流形 W^c , 其中 $\varphi \in C_b^k(E^c, E^h)$, 且 $\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$.

另一方面, 由??可知, 若取 $U \xrightarrow{d} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$, 则系统??与系统??在 U 中完全相同, 故结论 (1), (2) 成立. 限制在 U 内, 此处的 W_φ 就是??或??式定义的 W^c .

现设 $x \in U, J_U(x) = \mathbb{R}$. 则 $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{x}(t, x) \equiv \tilde{x}_\rho(t, x) \subset U$, 从而 $\sup_{a \in \mathbb{R}} |\pi_h \tilde{x}(t, x)| < \infty$, 由??式, $x \in W^c$. 限制在 U 内, 也就是 $x \in W_\varphi$. 故结论 (3) 成立. \square

定义 3.3. 如果 $\psi \in C^k(E^c, E^h), k \geq 1, \psi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$, 使 $W_\psi \underbrace{d}_{\psi} \{x_c + \psi(x_c) \mid x_c \in E^c\}$ 在??的流下局部不变, 则称 W_ψ 为??的一个 k 局部中心流形。

推论. 显然, 可以对??取不同的截断函数, 而得到不同的局部中心流形 (尽管对每一个截断函数而言, ??的全局中心流形是唯一的). 例如, 在图??($\mu = 0$) 中的原点附近, 取右半平面上与 x 轴相切的任一轨线, 在拼接上坐标原点及负 x 轴, 都构成一个局部中心流形. 但从定理??的结论 (3) 可知, ??保持在 U 内的任何有界轨道 (包括奇点、周期轨、同宿轨、异宿轨等) 都出现在??的任一局部中心流形上. 因此, 对于研究分岔现象而言, 局部中心流形的不唯一性不是一个重要的问题. 还要指出, 虽然 f 的 C^k 光滑性保证了 W_φ 的 C^k 光滑性, 一般来说, f 的 C^∞ 光滑性 (甚至解析性) 却不足以保证 W_φ 是 C^∞ 的. 事实上, 从定理的证明中可以看出, U 是以 ρ 为半径的球形领域, 而 ρ 的选取要保证 $\|Df_\rho\| < \delta_k$. 一般来说, 当 $k \rightarrow \infty, \delta_k \rightarrow 0$, 这可能导致 $\rho \rightarrow 0$.

现在我们把局部中心流形、稳定、不稳定流形的结果合写成下面的定理。

定理 3.3. 对于方程??, 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), f(0) = 0, Df(0) = 0$; 相对于 A , 由如上所述的子空间 E^s, E^u 和 E^c . 则在 \mathbb{R}^n 中 $x = 0$ 附近存在开领域 U , 和 U 中的 C^k 流形 W^s, W^u 和 W^c , 它们的维数分别与这三个子空间相同, 在 $x=0$ 点分别与 E^s, E^u 和 E^c 相切, 并且在 U 内是方程??的不变流形; W^s 和 W^u 有定义??所表示的形式, W^c 有表达式??, 其中 $\varphi \in C^k(E^c, E^h), \varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$.

类似于中心流形的讨论, 可以定义并讨论??的中心稳定流形 W^{cs} 和中心不稳定流形 W^{cu} , 这里不再详述. 上面已经说道, 系统在奇点附近的“复杂现象”发生在它的任一局部中心流形上, 下面的两个定理说明了中心流形的其他重要作用。

定理 3.4 (渐进性质定理). 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), f(0) = 0, Df(0) = 0$, 且对矩阵 $A, \delta_x = \emptyset$, 令 W_φ 为??的一个 C^2 局部中心流形, 则可在 \mathbb{R}^n 中找到 O

的一个领域 V 和正数 γ , 如果 $x \in V$, 且 $\{\tilde{x}(t, x) | t \geq 0\}$ 的闭包含在 V 内, 则 $\exists t_0 \geq 0, M > 0$ 和 $y \in W_\varphi \cap V$, 使得

$$(37) \quad |\tilde{x}(t, x) - \tilde{x}(t - t_0, y)| \leq M e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0$$

定理 3.5 (Pliss 约化原理). 在定理??的条件下, 设 $y \in W_\varphi \cap V$, 且 $\{\tilde{x}(t, x) | t \geq 0\}$ 的闭包含在 V 中。则 $\tilde{x}(t, y)$ 作为??的解是稳定的 (渐进稳定, 或不稳定) 的, 当且仅当 $x_c(t)$ 作为??的解是稳定的 (渐进稳定, 或不稳定) 的。

定理??说明, 在一定条件下, 在奇点 O 的一个小领域 V 内, 中心流形外的解可以指数型地趋于中心流形上的某一解 (当 $t \rightarrow +\infty$, 如果 $\sigma_u = \emptyset$; 或当 $t \rightarrow -\infty$, 如果 $\sigma_s = \emptyset$)。而定理??说明, 在类似条件下, 为了得到局部中心流形上 O 点附近的轨道结构, 只需要对它在线性子空间 E^c 上诱导的方程??来研究即可。事实上, ??的轨道是??在 W^c 上的真实轨道向 E^c 的投影, 见图??. 一般而言, 从原方程??得到诱导方程??不是容易的, 需要先知道 ϕ , 为此我们给出下面的定理。

定理 3.6. 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 1, f(0) = 0, Df(0) = 0; \varphi \in C^1(E^c, E^h), \varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$. 则 $W_\varphi \xrightarrow{d} \{x_c + \varphi(x_c) | x_c \in E^c\}$ 是??的一个局部中心流形, 当且仅当存在 E^c 中原点的开领域 Ω , 使得 $\forall x_c \in \Omega$, 有

$$(38) \quad \begin{aligned} D\varphi(x_c) \pi_c(Ax_c + f(x_c + \varphi(x_c))) \\ = \pi_h(A\varphi(x_c) + f(x_c + \varphi(x_c))) \end{aligned}$$

在很多情形下, 我们并不需要知道 $\varphi(x_c)$ 的确切表达式, 而是利用??式算出它的 Taylor 展开的前几项。

为了简单, 先把??化成如下的标准形式:

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Bx + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Cy + g(x, y) \end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, f, g = O(|x, y|^2)$; B 的特征根的实部为零, 而

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix},$$

上面的 C_1 与 C_2 的特征根实部分别为负数与正数。因此 $E^c = \{(x, 0)\}$, $E^h = \{(0, y)\}$, $W^c = \{(x, \varphi(x)) | x \in \mathbb{R}^n\}$. 下面尝试寻找 $y = \varphi(x)$ 的展式, $x \in \mathbb{R}^n$, ?? 现在成为

$$D\varphi(x)[Bx + f(x, \varphi(x))] = C\varphi(x) + g(x, \varphi(x))$$

既

$$(40) \quad D\varphi(x)[Bx + f(x, \varphi(x))] - C\varphi(x) - g(x, \varphi(x)) = 0$$

以及条件

$$\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0.$$

利用待定系数法, 可逐项计算 $\varphi(x)$.

例 3.1. 考虑二维方程

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \beta y + x^2 + xy \end{cases}$$

经过扰动在奇点 $(0, 0)$ 附近可能发生的分岔现象, 其中 $\beta \neq 0$. 注意??在 $(0, 0)$ 点的线性部分矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, 因此当 $\beta \neq 0$ 时, 它有且只有一个零根, 中心流形是一维的。我们首先设法找出方程??在 E^c 上诱导出的方程, 由此推断在中心流形上轨道的结构。为此, 先把??化为??的形式。令

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, 既

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

则??化为

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\beta^2}(u+v)^2 - \frac{1}{\beta}(u+v)v, \\ \frac{dv}{dt} = \beta v + \frac{1}{\beta^2}(u+v)^2 + \frac{1}{\beta}(u+v)v. \end{cases}$$

注意到??式下面的条件, 我们可以设??的中心流形函数

$$v = \varphi(u) = au^2 + bu^3 + \dots$$

所表达。对方程??应用??式, 并把 $\varphi(u)$ 的如上表达式代入, 由待定系数法不难得到

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta^\alpha} u^2 + \dots$$

再把上式代入??的第一个方程, 得出??在 E^c 上诱导的方程为

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\beta^2} u^2 + \dots \quad \beta \neq 0.$$

由定理??, 附注??和例??可知, 系统经扰动在中心流形上发生鞍结点分岔。当 $\beta < 0$ 时, 它的拓扑结构与图??相同。

最后, 我们考考虑系统??依赖于参数的情形。设

$$(43) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \mu),$$

这里对矩阵 A 的假设同上, E^u, E^s 和 E^c 的维数分别是 n^+, n^- 和 n^0 ; $f \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $r \geq 1$, $f(x, 0) = O(\|x\|^2)$. 为简单起见, 还设 $f(0, \mu) = 0$, 既 $x = 0$ 总是??的一个奇点。

定理 3.7. 在上面的假设下, ??拓扑轨道等价于如下系统

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = g(\xi, \mu), & \xi \in \mathbb{R}^{n_0}, \mu \in \mathbb{R}^k, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\eta, & \eta \in \mathbb{R}^{n^-} \\ \frac{d\zeta}{dt} = \xi, & \zeta \in \mathbb{R}^{n^+}. \end{cases}$$

这个定理的证明可参考??. 实际上, 它的第一个方程就是??.

推论. 为了研究??的中心流形, 我们把 μ 也视作 (空间变量), 考虑

$$(45) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \mu), \quad \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

则在奇点 $(x, \mu) = (0, 0)$ 附近, 稳定与不稳定子空间任为 E^s 与 E^u , 而中心子空间为 $E^c \times \mathbb{R}^k$. 故??的局部稳定流形与不稳定流形 W^s 与 W^u 的结构与 $\mu \equiv 0$ 时类似。此时中心流形 $W^c = \{(x_c, \mu) + \varphi(x_c, \mu) \mid (x_c, \mu) \in E^c \times \mathbb{R}^k\}$, 其中 $\varphi(x_c, \mu) \in C^r(E^c \times \mathbb{R}^k, E^h)$. 由??的第二个方程易知, $\{(x, \mu) \mid \mu = \}$ 是??的不变集, 从而对固定的 $\mu, W^c|_{\mu=}$ 是??的不变流形。注意 $(x, \mu) = (0, 0)$ 是??的非双曲奇点。一般而言, 对于不同的 $\mu, W^c|_{\mu=}$ 上的轨道结构可能不同, 见下例。

例 3.2. 设 $x, y, \mu \in \mathbb{R}$, 考虑光滑系统

$$(46) \quad \text{label}eq : 1.3.22 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 + f(x, y, \mu), \\ \frac{dy}{dt} = -y + g(x, y, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0, \end{cases}$$

其中 $f = O(|x, y|^4)$, $g = O(|x, y|^2)$ 且 $g(x, 0, \mu) = 0$ 。由附注??和例??可知, 在 $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ 的小领域内, 中心流形 W^c 如图??所示。显然, 当 $\mu \leq 0$ 或 $\mu > 0$ 时, $W^c|_{\mu=}$ 有不同的结构。利用定理??及简单计算可知, 系统??拓扑轨道等价于

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu\xi - \xi^3, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0$$

它在 $(\xi, \eta, \mu) = (0, 0, 0)$ 附近的中心流形如图??所示, 它不过是把图??中的中心流形“摊平”在 (ξ, μ) 空间而已。

在下文对局部分岔的讨论中, 我们大都假定已经把问题化归到它的中心流形上, 既对所讨论方程的线性部分矩阵 A 而言, $\sigma(A) = \sigma_c$ (既 $\sigma_u, a_s = \emptyset$)。

4. 正规形

正规形 (normal form) 理论的基本思想, 是在奇点 (或不动点) 附近经过光滑变换把向量场 (或微分同胚) 化成 (在一定意义下) 尽可能简单的形式, 以便于研究。这是源于 Poincare 时代的一个课题。由于近年来分岔理论的发展, 正规形的应用更加广泛, 因而重新引起人们对它的重视, 并得出若干计算正规形的新方法。

众所周知, 经非退化线性变换 $x = \mathbf{T}y$, 线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$$

变换为

$$\frac{dy}{dt} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) y$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{A} 和 \mathbf{T} 为 $n \times n$ 矩阵, 且 $\det \mathbf{T} \neq 0$ 。因此, 在讨论线性系统的轨道结构时, 我们不妨假设 \mathbf{A} 为 Jordan 标准形, 除了 Jordan 块的排列顺序外, 它是唯一确定的。接下去的问题自然是: 对非线性部分是否可以做类似的简化? 在一定意义下, 答案是肯定的, 但一般不在有唯一性。无论如何, 这种简化对进一步研究分岔问题是很有用的。

4.1. 常微分方程在奇点附近的正规形. 考虑以 $x = 0$ 为奇点的 C^r 微分方程 ($r \geq 3$), 它在 $x = 0$ 附近可表示为

$$(47) \quad \frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + f(x) + \cdots + f^{r-1}(x) + O(|x|^r),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ (或 \mathbb{C}^n), \mathbf{A} 是线性部分矩阵, $f^k(x) \in H_m^k, H_n^k$ 为 n 元 n 维 k 次齐次向量多项式所成的空间, $k = 2, \cdots, r-1$.

先进行变换

$$(48) \quad x = y + h^2(y),$$

其中 $h^2(y) \in H_n^2$ 待定, 以使变换后的方程具有简单的形式, 把变换??代入??, 并注意

$$[\mathbf{I} + \mathbf{D} h^2(y)]^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{D} h^2(y) + O(|y|^2),$$

其中 \mathbf{I} 是 $n \times n$ 单位矩阵, Jacobi 矩阵 $Dh^2(y)$ 的每一元素都是 $O(|y|)$, 而 $\mathcal{O}(|y|^2)$ 表示 $n \times n$ 矩阵, 它的每一个元素都是 $O(|y|^2)$, 由此把方程??化为

$$(49) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + \{f^2(y) - [Dh^2(y)A_y - Ah^2(y)]\} + \bar{f}^3(y) + \cdots + \bar{f}^{r-1}(y) + O(|y|^x),$$

其中 f^2 与??中的相同, 而 \bar{f}^k 是经过运算得到的新的 k 次齐次多项式。

引入算子 $ad_A^2 : H_n^2 \rightarrow H_n^2$,

$$(50) \quad ad_A^2 [h^2(y)] = Dh^2(y)Ay - Ah^2(y),$$

则??变成

$$(51) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + [f^2(y) - ad_A^2(h^2(y))] + \bar{f}^3(y) + \cdots + f^{r-1}(y) + O(|y|^r),$$

记 \mathcal{R}^2 为算子 ad_A^2 在 H_n^2 中的值域, 而 \mathcal{S}^2 是 \mathcal{R}^2 在 H_n^2 中的一个补空间, 既

$$H_n^2 = \mathcal{R}^2 \oplus \mathcal{S}^2.$$

如果 $f^2(y) \in \mathcal{R}^2$, 则存在 $h^2(y) \in H_n^2$, 使 $f^2(y) = ad_A^2(h^2(y))$, 既??中的二次项可以消去; 否则, 只能找到 $h^2(y) \in H_n^2$, 使

$$(52) \quad f^2(y) - ad_A^2(h^2(y)) \in \mathcal{S}^2.$$

这样, 我们把??化为

$$(53) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + g^2(y) + \bar{f}^2(y) + \cdots + \bar{f}^{r-1}(y) + O(|y|^r),$$

其中 $g^2(y) \in \mathcal{S}^2$.

其次, 再考虑变换,

$$(54) \quad y = x + h^3(x)$$

其中 $h^3(z) \in H_n^3$. 重复上面的推理, 并注意这个变换不影响线性项与二次项, 容易得知??变为

$$(55) \quad \frac{dz}{dt} = Az + g^2(z) + [\bar{f}^2(z) - ad_A^3 h^3(z)] + \tilde{f}^4(x) + \cdots + \tilde{f}^{y-1}(z) + O(|z|^r),$$

其中 g^2, \bar{f}^2 与??中的相同, 而 $\tilde{f}^4, \dots, \tilde{f}^{r-1}$ 是经计算得到的, 而且

$$\text{ad}_A^3 : H_n^3 \rightarrow H_n^3, h^3(z) \mapsto -Dh^3(z)Az - Ah^3(z).$$

记 $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}(\text{ad}_A^3), \mathcal{S}^3, \mathcal{S}^3$ 为 \mathcal{R}^3 在 H_n^3 中的补空间, 既

$$H_n^3 = \mathcal{R}^3 \oplus \mathcal{S}^3$$

则当 $\bar{f}^2(z) \in \mathcal{R}^3$ 时, 存在 $h^3(z)$, 使得经过变换??可消去??中的三次项; 否则, 只能找到 $h^3(z) \in H_n^3$, 使??变为

$$\frac{dz}{dt} = Az + g^2(z) + g^3(z) + \tilde{f}^4(z) + \dots + \tilde{f}^{r-1}(z) + O(|z|^r),$$

其中 $g^h(z) \in \mathcal{S}^k, k = 2, 3$. 由此递推下去, 就可得到

定理 4.1. 设 $X \in \mathcal{X}^r(\mathbf{R}^n)$ (或 $\mathcal{X}^r(\mathbf{C}^n)$), $X(0) = 0, \mathbf{D}X(0) = A$, 并且 X 有表达式??, 则在原点附近的领域内存在一系列变换

$$(56) \quad x = y + h^k(y), \quad k = 2, \dots, r-1,$$

其中, $h^k(y) \in H_n^k$, 经过这一系列变换 (每次变换后把 y 换回 x), 可把??变为如下形式

$$(57) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + g^2(x) + \dots + g^{r-1}(x) + O(|x|^r)$$

其中, $g^k(x) \in \mathcal{S}^k, \mathcal{S}$ 是 $\mathcal{R}^k := \mathcal{R}(\text{ad}_A^k)$ 在 H_n^k 中的补空间, 算子 ad_A^k 由下式定义

$$(58) \quad \text{ad}_A^k : H_n^k \rightarrow H_n^k, \text{ad}_A^k(h^k(x)) = Dh^k(x)Ax - Ah^k(x)$$

$$k = 2, \dots, r-1$$

定义 4.1. 微分方程??的 j 次截取式 ($2 \leq j \leq r-1$)

$$(59) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + g^2(x) + \dots + g^j(x)$$

其中, $g^i(x) \in \mathcal{S}^i, i = 2, \dots, j$, 称为方程??的 j 次正规形.

推论. 上面进行的只是有限步运算. 当??右端可以展开成收敛的幂级数时, 这种步骤原则上可以无限地进行下去, 问题在于变化本身和所得到的(形式)正规形是否收敛. 在一定条件下是肯定的, 这是 *Poincaré-Dulac* 定理, 见??, 或??.

4.2. 共振与非共振. 在定理??中, 我们希望进一步确定, ??式中哪些 $g^k(x) = 0$, 也就是说, ??中哪些 $f^k(x)$ 属于 \mathcal{R}^k ? 为此, 我们假定 A 已化为它的 Jordan 标准形, 并引入共振的概念.

定义 4.2. 特征值 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 称为**共振**的, 如果存在自然数 $s (1 \leq s \leq n)$ 和整数组 $m = (m_1, \dots, m_n)$, 其中 $m_i \geq 0$ 并且 $|m| \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 使得

$$(60) \quad \lambda_s = (m, \lambda) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$$

正数 $|m|$ 称为**共振的阶**.

例如 $\lambda_1 = 2\lambda_2$ 是 2 阶共振的; $2\lambda_1 = 3\lambda_1$ 不是共振的; $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 是 3 阶共振的, 因为它可以改写为 $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.

考察??中哪些 $g^k(x)$ 不出现, 就是要考察**同伦方程**

$$(61) \quad ad_A^k(h^k(x)) \equiv Dh^k(x)Ax - Ah^k(x) = f^k(x)$$

对给定的 $f^k(x) \in H_n^k$, 是否有解 $h^k(x) \in H_n^k$.

设 A 是对角矩阵, 特征值 λ_i 互不相同, e_i 是 A 相应于 λ_i 的特征向量, 则 (e_1, \dots, e_n) 构成一组基. 设 (x_1, \dots, x_n) 是相对于 (e_1, \dots, e_n) 的坐标, 则

$$(62) \quad x^m \implies x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad |m| = k$$

就是 H_n^k 中元素某一分量中的最简形式.

令 $h^k(x) = x^m \varepsilon_s, |m| = k$, 则 $Dh^k(x)Ax$ 中只有第 s 个分量非零, 并且他等于

$$\frac{\partial x^m}{\partial x} Ax = (m_1 x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n}, \dots, m_n x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n-1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (m, \lambda) x^m$$

另一方面, 由于 e_s 是 A 相应于 λ_s 的特征向量, 因此

$$Ax^m e_s = \lambda_s x^m e_s.$$

把上面的结果带入??的左端，得到

$$(63) \quad \operatorname{ad}_A^k x^m e_s = [(m, \lambda) - \lambda_s] x^m e_s,$$

这说明 ad_A^k 也是对角的，并且它的所有特征值具有 $[(m, \lambda) - \lambda_s]$ 的形式。由此可知，当 A 的特征值非共振时， ad_A^k 的所有特征值均非零，故算子 ad_A^k 可逆，同伦方程??可解。

当 A 有重特征值时， A 的 Jordan 标准形是上三角矩阵。此时 ad_A^k 也有相应的 Jordan 块，并且 ad_A^k 的特征值任具有 $[(m, \lambda) - \lambda_s]$ 的形式。

定义 4.3. 向量值多项式 $x^m e_s$ 称为**共振多项式**，如果

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad |m| \geq 2,$$

其中 λ, e_s, m , 和 $|m|$ 的意义同前。

利用上面的讨论，我们可以得到下面

定理 4.2. 设 A 是上三角的 Jordan 标准形，则可适当选取变换??，使??右端的诸 $g^i(x)$ 仅由共振多项式组成。

4.3. 正规形的计算.

例 4.1. 求 $\frac{dx}{dt} = Ax + f^2(x) + \dots$ 的二次正规形, 其中 $x \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

解 1. 先在 H_2^2 中取一组基

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_4 &= \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_5 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_6 = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

设 ad_A^2 在这组基下的矩阵为 L_A^2 , 既

$$\operatorname{ad}_A^2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) L_A^2,$$

容易算出

$$(64) \quad \mathbf{L}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现将空间 H_2^2 与 \mathbb{R}^6 等同: $\varepsilon_i = e_i$, 其中 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ 为 \mathbb{R}^6 中的标准正交基, 由 Fredholm 定理可知

$$\mathbb{R}^6 = \mathcal{R}(\mathbf{L}_A^2) + \mathcal{N}(\mathbf{L}_A^2),$$

其中 $\mathcal{N}(\mathbf{L}_A^2)$ 表示 L_A^2 零空间。由??容易看出,

$$\mathcal{N}(\mathbf{L}_A^2) = \text{Span}(e_1, e_2 + 2e_4)$$

由此得到

$$H_2^2 = \mathcal{R}(\mathbf{ad}_A^2) \oplus \mathcal{S}^2$$

其中 $\mathcal{S}^2 = \text{Span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 + 2\varepsilon_4\}$, 由此得出二次正规形为

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

或化成等价形式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 2bx_1^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1^2 + bx_1x_2 \end{cases}$$

注意, $\text{Span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 同样构成 $\mathcal{R}(\mathbf{ad}_A^2)$ 的一个补空间。事实上, 取 $v_1 = \varepsilon_1, v_2 = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_4, w_1 = \varepsilon_1, w_2 = \varepsilon_2$, 则内积

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

因此, 可取 $\text{Span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ 为 $\mathcal{R}(\text{ad}_A^2)$ 的另一个补空间, 而相应的二次正规形为

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1^2 + bx_1x_2. \end{cases}$$

用类似的方法, 可以算出 k 次 ($k \geq 2$) 正规形为

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1^2(1 + P(x_1)) + bx_1x_2(1 + Q(x_1)). \end{cases}$$

其中 $P(x_1)$ 与 $Q(x_1)$ 是 x_1 的 $k-2$ 次多项式, 并且 $P(0) = Q(0) = 0$, 当 $ab \neq 0$, 可经过尺度变换把??化为

$$(67) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1^2(1 + P(x_1)) + \eta x_1x_2(1 + Q(x_1)) \end{cases}$$

其中 $\eta = \text{sign}(ab)$ (+1 或 -1) .

推论. 由于 $\mathcal{CR}(\text{ad}_A^k)$ 的补空间不唯一, 因此正规形也不是唯一的, 从上面的例子中已经看出了这一点. 但当取定一个补空间后, 正规形中的系数就唯一确定了. 在例??中, 求正规形的方法称为**矩阵表示法**. 由于 $\dim H_k^k = n \binom{x+k-1}{n-1}$, 矩阵表示法的计算量随着 n 或 k 的增大而迅速增大. 近年来又发现了计算正规形的共轭算子法和群表示论法等, 见王铎的综述文章??及其所引的文献.

例 4.2. 考虑复方程

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \mathbf{O}(|z|^2),$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}, \omega > 0.$$

既 A 有一对共轭纯虚特征根, 求它的 (形式) 正规形。

解 2. 我们用共振原理求解。记 $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$, 则共振条件是

$$\lambda_1 = (k+1)\lambda_1 + k\lambda_2, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(\text{或 } \lambda_2 = k\lambda_1 + (k+1)\lambda_2, \quad k = 1, 2, \dots)$$

由定理??可知, 复正规形为

$$(68) \quad \frac{dz}{dt} = i\omega z + c_1|z|^2z + \dots + c_k|z|^{2k}z + \dots$$

(第二个方程与之共轭, 故略去不写)。

4.4. 映射在不动点附近的正规形. 考虑以 $x = 0$ 为不动点的 C^r 映射 $F(r \geq 3)$, 它在 $x = 0$ 附近可表示为

$$(69) \quad F(x) = Ax + f^2(x) + \dots + f^{r-1}(x) + O(|x|^r),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ (或 \mathbb{C}^n), A 是线性映射 (我们把它在某组基下的矩阵仍记为 A), $f^k(x) \in H_n^k, H_n^k$ 为 n 元 n 维齐次向量多项式所成的空间, $k = 2, \dots, r-1$ 。

考虑变换

$$(70) \quad x = H(y) \xrightarrow{d} y + h^k(y),$$

其中 $h^k(y) \in H_n^k, I + h^k(\cdot)$ 在原点附近可逆, 则??有如下的逆变换

$$y = x - h^k(x) + O(|x|^{k+1}), \quad |x| \ll 1.$$

令

$$G(y) = H^{-1} \circ F \circ H(y),$$

则可把??化为

$$G(y) = Ay + f^2(y) + \dots + f^{k-1}(y) + [f^k(y) - (h^k(Ay) - Ah^k(y))] + O(|y|^{k+1}),$$

$|y| \ll 1$. 因此, 与定理??平行, 可得到

定理 4.3. 设 $F \in \text{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ (或 $\text{Diff}^r(\mathbb{C}^n)$), 并且有表达式??, 则在原点附近的领域内存在一系列变换

$$(71) \quad x = y + h^k(y), \quad k = 2, \dots, r-1,$$

其中 $h^k(y) \in H_n^k$, 经过这一系列变换 (每次变换后把 y 换回 x), 可把??变成如下形式

$$(72) \quad G(x) = Ax + g^2(x) + \cdots + g^{r-1}(x) + O(|x|^r),$$

其中 $g^k(x) \in \mathcal{S}^k$, \mathcal{S}^k 是 $\mathcal{R}^k = \mathcal{R}(L_A^k)$ 在 H_n^k 中的补空间, 算子 L_A^k 由下式定义

$$L_A^k: H_n^k \rightarrow H_n^k, \quad L_A^k(h^k(x)) = h^k(Ax) - Ah^k(x),$$

$k = 2, \dots, r-1$.

定义 4.4. 映射??的 j 次截取式 ($2 \leq j \leq r-1$)

$$Ax + g^2(x) + \cdots + g^j(x)$$

其中 $g^i(x) \in \mathcal{S}^i, i = 2, \dots, j$, 称为映射??的 **j 次正规形**.

定义 4.5. Jordan 型矩阵 A 的特征值 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{C}^n$ 称为**共振的**, 如果存在 $s(1 \leq s \leq n)$ 和整数组 $m = (m_1, \dots, m_n), m_i \gg 0, |m| = \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 使得

$$(73) \quad \lambda_s = \lambda^m = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}.$$

正数 $|m|$ 称为**共振的阶**.

定义 4.6. 向量值多项式 $x^m e_s$ 称为**共振多项式**, 如果 m 和 s 满足共振条件??, 其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 \mathbb{C}^n 的一组基, (x_1, \dots, x_n) 为相对于这组基的坐标, 并且矩阵 A 在此基下的 Jordan 标准形以 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 为对角元素。

类似于定理??, 可以得到下面的

定理 4.4. 设 $A = \text{Diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, 则可以选取适当的变换??, 使得??右端的诸 $g^i(x)$ 仅由共振多项式组成.

例 4.3. 求以 $x = 0$ 为不动点的一维映射 $F(x) = -x + \dots$ 的六次正规形。

解 3. $\lambda = -1$ 是唯一的特征值, 所以共振条件为

$$\lambda^k - \lambda = 0, \quad k \geq 2,$$

也就是

$$(-1)^{k-1} = 1, \quad k \geq 2.$$

所以共振多项式为 $x^3x^5 \cdot x^7, \dots$ 由定理??, 六次正规形为

$$G(x) = -x + ax^3 + bx^5$$

其中 a, b 为常数。

4.5. 光滑线性化.

定义 4.7. 设 $k \geq 2$ 是一个自然数, 称光滑向量场 (或微分同胚) 的双曲奇点 (或双曲不动点) 为 **k 阶非共振的**, 如果它的特征根不满足所有 $\geq k$ 阶的共振关系。如果一个奇点 (或不动点) 是任意有限阶非共振的, 则称它为**无穷阶非共振的**, 或简称**非共振**。

从前面的讨论可以看出, 一个 k 阶非共振奇点 (或不动点) 的 k 次正规形是线性的。换句话说, 在奇点 (或不动点) 的领域里可以找到一个多项式的坐标变换, 使得在新坐标系下系统可以表示为一个线性部分加上一个 k 阶小量。一个自然的问题是, 进一步可以通过什么样的坐标变换能把这个 k 阶小量去掉。

定义 4.8. 设 k 是一个自然数或 $k = \infty$. 称 \mathbb{R}^n 的光滑向量场 (或微分同胚) 在它的奇点 (或不动点) O 处可以 C^k **线性化**, 如果存在点 O 的领域 U 和 C^k 微分同胚 $H: U \rightarrow \mathbb{R}^n, H(O) = O$, 使得经过坐标变换 $x \mapsto H(x)$ 后, 系统在 O 点领域内变为线性的。

定理 4.5 (IY). 设 k 是一个自然数或 $k = \infty, A$ 是一个 n 阶方程, 则存在一个依赖于 k 和 A 的数 k' , 满足

$$k' = \begin{cases} n \in \mathbb{Z}, k < \infty \\ \infty, k = \infty, \end{cases}$$

使得如果原点是 C^∞ 微分方程

$$(74) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + \dots \quad x \in \mathbb{R}^n$$

或微分同胚

$$(75) \quad x \mapsto Ax + \cdots \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的 k' 阶非共振双曲奇点 (或非共振双曲不动点), 则系统??(或系统??) 可以 C^k 线性化。

注意. 由于 $k' = k'(k, A)$ 的表达式比较复杂, 此处没有给出。当 $k \rightarrow \infty$ 时, k' 线性地依赖于 k 的增长。

例 4.4. 考虑 \mathbb{R} 上的 C^∞ 光滑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax + \cdots \quad \therefore \quad a \neq 0;$$

或微分同胚

$$x \mapsto \mu x + \cdots \quad |\mu| \neq 0, 1.$$

因为特征根 $\lambda = a$ (或 $\lambda = \mu$) 不满足任意阶的共振关系, 故由定理??, 系统在原点处可以 C^∞ 线性化。既 \mathbb{R}^1 上的 C^∞ 向量场 (或微分同胚) 在它们的双曲奇点 (或双曲不动点) 处可以 C^∞ 线性化。

例 4.5. 由于 \mathbb{R}^2 上的向量场在双曲集点的特征根为 $\lambda \pm i\omega, \lambda \neq 0, \omega \neq 0$. 它不满足任意阶的共振关系, 故 \mathbb{R}^2 上的 C^∞ 向量场在它的双曲集点处可以 C^∞ 线性化。

在考虑分岔问题时, 我们常常只需要 C^1 线性化。对此, 有下面较为简单的结果。

定理 4.6. 设点 O 是 \mathbb{R}^n 中一个 C^∞ 光滑向量场 (或微分同胚) X 的双曲奇点 (或双曲不动点)。如果 X 在点 O 的线性部分算子的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足下列不等式

$$(76) \quad \operatorname{Re} \lambda_i \neq \operatorname{Re} \lambda_j + \operatorname{Re} \lambda_k$$

或

$$(77) \quad |\lambda_i| \neq |\lambda_j| \cdot |\lambda_k|$$

$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则系统在点 O 处可以 C^1 线性化。

上述定理的证明对向量场和映射的情况分别由??和??给出。

例 4.6. 平面上的 C^∞ 光滑向量场（或微分同胚）在它的双曲鞍点（或双曲鞍不动点）处可以 C^1 线性化。

例 4.7. 如果 \mathbb{R}^3 中的向量场的一个双曲奇点有一对复特征根 $\lambda \pm i\omega$ 和一个实根 μ , 满足 $\omega \neq 0, \lambda\mu < 0$, 则称奇点为**鞍焦点**. 鞍焦点的特征根显然满足??. 故 \mathbb{R}^3 中 C^∞ 向量场在它的鞍焦点处可以 C^1 线性化。

例 4.8. 如果 \mathbb{R}^3 中 C^∞ 向量场在它的奇点 O 处的特征根满足 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \mu$, 并且

$$\lambda_2 + \mu \neq \lambda_1, \quad \lambda_2 \neq 2\lambda_1,$$

则它在该点可以 C^1 线性化。

在第五章讨论非局部分岔时, 遇到的向量场都是依赖与参数的。因此, 下面我们讨论带参数的向量场或者映射的线性化问题。

定义 4.9. 设 k 是一个自然数或 $k = \infty, X_\varepsilon (\varepsilon \in \mathbb{R}^m)$ 是 \mathbb{R}^n 上的一个依赖于参数的向量场（或微分同胚）族。设 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时, X_{ε_0} 有一个双曲奇点（或双曲不动点） O 。称族 X_ε 在点 (O, ε_0) 附近可以 C^k 线性化, 如果存在参数空间 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 的领域 V , 相空间 \mathbb{R}^n 中点 O 的领域 U , 以及一个 C^k 映射 $H, U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, 满足

(1) $H(O, \varepsilon_0) = O_1$;

(2) 对每一个参数 $\varepsilon \in V, H(\bullet, \varepsilon) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个微分同胚, 使得通过依赖于参数 ε 的坐标变换 $x \mapsto H(x, \varepsilon)$ 后, 系统在 O 点的领域变成一个线性系统。

定理 4.7 (IY). 设 X_ε 是 \mathbb{R}^n 中的 C^∞ 向量场（或微分同胚）族, 且 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时点 O 是系统 X_{ε_0} 的非共振双曲奇点（或双曲不动点）, 则对任意自然数 k, X_ε 可以在点 (O, ε_0) 附近 C^k 线性化。

注意. 由上述定理的结论并不能推出 X_ε 可以在点 (O, ε_0) 附近 C^∞ 线性化。因为随着 k 的增加, 可以实现线性化的点 O 的领域 U 和 ε 的领域 V 可能不断减小。

本小节给出的定理是我们在第四章和第五章中讨论问题的基础。

5. 普适开折与分岔的余维

现在, 我们把??后半部分中讨论的一些概念严格化。初次接触分岔理论的读者可以略过本节的内容, 只需承认定理??的结果, 而影响对随后章节的继续学习。

5.1. 普适开折的定义.

定义 5.1. 设向量场 X, Y (或映射 f, g) 都在 $p \in M$ 的领域内有定义。称 X 与 Y (或 f 与 g) 在 p 点有同一芽 (germ), 如果存在领域 $U, p \in U \subset M$, 使 $X|_U = Y|_U$ (或 $f|_U = g|_U$)。

注意. 向量场 (或映射) 在 p 点的芽, 是向量场 (或映射) 的一个等价类。我们把这个等价类中的任一元素称为这个芽的表示。在考虑局部问题时, 利用芽的说法可以使称述简明。附录 C 中定义的射式空间 $J_x^i(M, N)$ 或 $J^k(M, N)$ 都可以在映射芽的意义下给出。

现在考虑向量场族 $X_\mu \in \mathcal{X}^\infty(M)$. 在局部情形下, 不妨设 $M = \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^k$. 此时, 常把 X_μ 与其主部 $v(x, \mu)$ 等同 (参见附录 B 中附注 B.17R), 而 X_μ 的流由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \mu)$$

所决定, 其中 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. 在上述等同意义下, 也把 v 称为向量场。

定义 5.2 (开折, 局部族). 对于向量族 $v(x, \mu)$, 当把 v 视为参数空间 $\mu \in \mathbb{R}^k$ 在 origin 的小领域到向量场空间的映射时, 我们把 $x(x, \mu)$ 称为 $v(x, 0)$ 的一个 k 参数开折 (unfolding), 或称为形变 (deformation); 当把 v 视为直积空间 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ 中在 (x_0, μ_0) 点的映射芽时, 称它为一个局部族, 记为 $(v; x_0, \mu_0)$.

定义 5.3 (局部族的等价). 称两个向量场局部族 $(v; x_0, \mu_0)$ 与 $(w; y_0, \mu_0)$ 等价, 如果存在映射 $h, y = h(x, \mu)$, 在 x_0, μ_0 的映射芽, 对于每一个固定的

CHAPTER 2

常见的局部与非局部分岔

本章介绍一些常见的分岔现象, 其中包括奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔、Poincare 分岔等, 其中前三种为局部分岔问题, 后两种分别为半局部分岔和全局分岔问题。除了奇点分岔外, 本章的大部分讨论都限制在相空间为二维的情形。

1. 奇点分岔

考虑一个光滑的依赖于参数并且有奇点的向量场。当参数变动时, 我们关心奇点个数及其附近的轨道结构如何变化。这种分岔现象称为**奇点分岔**。

1.1. 一般理论.

定义 1.1. 向量场 X 的奇点 $p \in M$ 称为**非退化的**, 如果他在 p 点的线性部分算子是非奇异的, 即它的所有特征根均非零。否则称为退化的。

定理 1.1. 光滑的依赖于变量和参数的向量场, 如果它的奇点是非退化的, 则奇点本身也光滑地依赖于参数。

证明. 设向量场由微分方程

$$(78) \quad \frac{dx}{dt} = v(x, \mu)$$

给出其中 $v \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $r \geq 1, k \geq 1$. 设当 $\mu = \mu_0$ 时, $x = x_0$ 为 78 的非退化奇点, 既 $v(x_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial v(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{(x_0, \mu_0)}$ 非奇异。由隐函数定理, 在 x_0, μ_0 附近存在光滑函数 $x = \Gamma(\mu)$, 使得 $\Gamma(\mu_0) = x_0$, 且 $v(\Gamma(\mu), \mu) \equiv 0$. 定理得证。□

注. 定理 1.1 说明, 当奇点非退化时, 奇点的个数在微小变化下不变, 它的位置也光滑的依赖于参数的变化。需要注意, 奇点的非退化性与双曲性是不同的概念。例如, 一个向量场在奇点处的线性部分是一对纯虚根时, 按照定义 1.1, 它

是非退化的, 但它是双曲的. 此时在扰动下, 虽然奇点个数 (在小领域内) 不发生变化, 但其附近的轨道结构可能变化, 出现 Hopf 分岔, 或 Poincare 分岔, 我们将在??与??中分别予以讨论。

定理 1.2. 设 M 是 n 维紧致流形, $r \geq 1$, 则 $\mathcal{X}^r(M)$ 中仅有非退化奇点 (它们必是孤立奇点) 或无奇点的向量场集合形成一个开稠子集。

证明. 设 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 相应于微分方程

$$(79) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U(\xi),$$

其中 $f \in C^r(M, M)$, $U(\xi)$ 为 M 中 ξ 点的领域. 如同第一章??的讨论, 考虑投影

$$j^0 f_2 : \mathcal{X}^r(M) \rightarrow J^0(M, M) : X \mapsto (\xi, \tilde{f}),$$

其中 $\tilde{f} = f(\xi)$. 具有奇点的向量场集合在空间 $J^0(M, M)$ 中有表示式

$$S = \{(\xi, \tilde{f}) | \tilde{f} = 0\},$$

它是 $J^0(M, M)$ 中的光滑闭子流形 (因为 M 是紧空间). 设向量场 $f(x)$ 在 ξ 点非退化, 既 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{\xi}$ 非奇异, 从而由附录??中定理??知, $j^0 f$ 与子流形 S 横截相交. 注意, 不想交也是横截. 再利用定理??, 得知仅有非退化奇点或无奇点的向量场在 $\mathcal{X}^r(M)$ 中形成开稠子集. \square

这个定理说明, 向量场的一个退化奇点可以经过任意小的扰动转化为 (多个) 非退化奇点, 或经扰动使奇点消失. 但如果我们考虑向量场族 $v(x, \mu)$, 则奇点的退化性往往是不可避免的. 事实上, 虽然小扰动可以把对应于 $\mu = \mu_1$ 的退化奇点 $x = x_1$ 扰动为非退化的, 但在 x_1 附近的 x_2 点, 相应于 μ_1 附近的 μ_2 却可能是新的退化奇点. 对一个具体的奇点分岔问题, 通常有两种处理方法: 一种是利用中心流形定理, 把问题归结在中心流形上, 见第一章例??; 另一种称为 Liapunov-Schmidt 方法, 或称为更替法 (alternative method). 为了说明这个方法的基本思想, 我们先看一种特殊情形. 设变量 $x = (y, z)$, 在 $x = 0$ 附近微分方程具有下列形式

$$(80) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + f(y, z, \lambda), \quad \frac{dz}{dt} = Bz + g(y, x, \lambda),$$

其中 A 的特征根均为零, 而 B 的特征根均不为零; $f, g \in C^r, r \geq 2; f(0, 0, 0) = 0, g(0, 0, 0) = 0, f, g = O(|y, z|^2)$. 为了研究奇点的分布, 在 $x = 0$ 和 $\lambda = 0$ 附近考

考虑方程

$$(81) \quad \mathbf{A}y + f(y, z, \lambda) = 0, \quad \mathbf{B}z + g(y, z, \lambda) = 0$$

由隐函数定理, 存在 $(y, \lambda) = (0, 0)$ 的领域 U 和 C^r 函数 $z = \varphi(y, \lambda)$, 使得

$$B\varphi(y, \lambda) + g(y, \varphi(y, \lambda), \lambda) \equiv 0, \quad \forall (y, \lambda) \in U.$$

把函数 $z = \varphi(y, \lambda)$ 代入 81 的第一个方程左端, 可得 C^r 函数

$$(82) \quad G(y, \lambda) \xrightarrow{d} Ay + f(y, \varphi(y, \lambda), \lambda)$$

记

$$S = \{(y, \lambda) \in U | G(y, \lambda) = 0\}, \quad S_{\lambda_0} = S \cap \{\lambda = \lambda_0\}$$

则对不同的 $\lambda, |\lambda| \ll 1$, S_λ 结构的变化反应了奇点个数的变化规律. 这样就把对 81 的讨论转化为对 $G(y, \lambda) = 0$ 的讨论, 使空间维数得到降低, 通常称 (82) 为方程 (80) 的 **分岔函数**. 为了应用上的便利, 下面在更一般的框架下讨论这个问题.

1.2. Liapunov-Schmidt 方法. 设 X, Z 和 Λ 为实 *Banach* 空间, U 和 W 分别为 X 和 Λ 中零点的领域. C^1 映射 $M : U \times W \subset X \times \Lambda \rightarrow Z$, 满足 $M(0, 0) = 0$. 我们要研究方程

$$(83) \quad M(x, \lambda) = 0$$

在 $U \times W$ 中 $(0, 0)$ 点的某领域内解的结构. 为此, 设 $A = D_x M(0, 0)$, 并记 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别为 A 在 X 中的零空间和 A 在 Z 中的值域空间. 本节的一个基本假设是

(H) $\mathcal{N}(A)$ 在 X 中存在补空间; $\mathcal{R}(A)$ 是 Z 中的闭集, 并且在 Z 中存在补空间. (当 A 为 Fredholm 算子时, 这个假设总是成立的. 在下文的应用中, 经常是这种情形.)

因此, 在 X 上存在投影 P , 在 P 上存在投影 Q , 使得

$$(84) \quad \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A), \quad \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(A).$$

$\forall x \in U$, 可写成 $x = u + v$, 其中 $u = Px \in \mathcal{N}(A) = X_P, v = (I - P)x \in \mathcal{N}(P) = X_{I-P}$. 这里 I 是恒同映射, X_P 和 X_{I-P} 表示投影 P 和 $I-P$ 的值域. 显然, 方程 (83) 等

价于

$$(85) \quad QM(u + v, \lambda) = 0$$

$$(86) \quad (I - Q)M(u + v, \lambda) = 0$$

定义映射 $\psi : X_P \times X_{I-P} \times \Lambda \rightarrow \mathcal{R}(A)$,

$$\psi(u, v, \lambda) = QM(u + v, \lambda)$$

则 $\phi(0, 0, 0) = 0$, 且 $D_v \psi(0, 0, 0) = A|_{\mathcal{N}(P)}$ 是 $\mathcal{N}(P)$ 与 $\mathcal{R}(A)$ 间的同构. 由隐函数定理, 存在 X_P 在原点的邻域 U_0 , X_{I-P} 在原点的邻域 V_0 , Λ 在原点的邻域 W_0 , 以及 C^1 映射 $v^* : U_0 \times W_0 \rightarrow V_0$, 使 $U_0 \times W_0 \subset U$, $W_0 \subset W$, 且

$$QM(u + v^*(u, \lambda), \lambda) \equiv 0, \quad \forall (u, \lambda) \in U_0 \times W_0,$$

并且 $v^*(0, 0) = 0$, $D_u v^*(0, 0) = 0$. 利用 v^* , 定义 C^1 映射 $x^* : U_0 \times W_0 \rightarrow U$, 和 C^1 映射 $G : U_0 \times W_0 \rightarrow \mathcal{N}(Q)$,

$$(87) \quad x^*(u, \lambda) = u + v^*(u, \lambda)$$

$$(88) \quad G(u, \lambda) = (I - Q)M(u + v^*(u, \lambda), \lambda)$$

容易验证, $x^*(0, 0) = 0$, $D_u x^*(0, 0) = I_{M(A)}$, $G(0, 0) = 0$, $D_u G(0, 0) = 0$. 总结上面的讨论, 我们有下面的结果.

定理 1.3. 如果条件 (H) 成立, U_0, V_0, W_0 如上. 则 $\forall u \in U_0, x \in U_0 \times V_0 \subset X$, 和 $\lambda \in W_0 \subset \Lambda$, 如下两组结论等价

- $Px = u, \quad M(x, \lambda) = 0;$
- $x = x^*(u, \lambda), \quad G(u, \lambda) = 0;$

其中 x^* 与 G 分别有(??)和 [eqref2.1.9](#) 定义.

定理1.3说明, 原来的奇点分岔问题 $M(x, \lambda) = 0$ 转化为求解 **分岔方程** $G(u, \lambda) = 0$. 注意 $x \in X, M(x, \lambda) \in Z$, 而 $u \in X_P = \mathcal{N}(A), G(u, \lambda) \in Z_{I-Q} = \mathcal{N}(Q)$, 因而使问题的定义域及值域都作了显著的约化. 这就是 Liapunov-Schmidt 方法的核心思想.

现在我们把上面的一般理论用于 \mathbf{R}^n 上的向量场奇点分岔问题. 考虑依赖于参数 λ 的向量场

$$(89) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \lambda),$$

其中 $f \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $r \geq 2$; $f(0, 0) = 0$, $D_x f(0, 0) = \mathbf{A}$. 考虑奇点分岔问题, 就是要在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ 的原点附件考察方程

$$(90) \quad f(x, \lambda) = \mathbf{A}x - N(x, \lambda) = 0$$

其中 $N \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $N(0, 0) = 0$, $D_x N(0, 0) = 0$. 与前面的一般情况对比, 此时有 $X = Z = \mathbf{R}^n$, $\Lambda = \mathbf{R}^k$. 假设又有 $\dim(\mathbf{A}) = \text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{A}) = 1$, 则存在投影 $P, Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 满足(84). 从而存在 $u_0 \in \mathcal{N}(A)$, $w_0 \in \mathcal{N}(Q)$, 使

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{Span}\{u_0\}, \quad \mathcal{N}(Q) = \text{Span}\{w_0\}.$$

从上面的一般理论知道, 存在 $\delta > 0, \sigma > 0$ 和 G^r 函数 $v = v^*(a, \lambda) \in X_{I-P}$, 满足 $v^*(0, 0) = 0$, $D_a v^*(0, 0) = 0$, 使当 $|a| < \delta, |\lambda| < \sigma$ 时,

$$Qf(au_0 + v^*(a, \lambda), \lambda) \equiv 0.$$

由定理1.3, $x = au_0 + v, v \in X_{I-P}$ 是(90)的解, 当且仅当 $v = v^*(a, \lambda)$ 且 (a, λ) 满足分岔方程

$$g(a, \lambda) = 0,$$

这里分岔函数 g 由下式定义:

$$(91) \quad g(a, \lambda)w_0 = (I - Q)f(au_0 + v^*(a, \lambda), \lambda)$$

例 1.1. 用 Liapunov-Schmidt 方法重新考虑第一章例???. 我们考虑 \mathbf{R}^2 中一类更广泛的微分方程

$$(92) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta y + x^2 + xy(1 + \varphi(x)) + y^2\Phi(x, y) \end{cases}$$

其中 $\beta \neq 0, \varphi, \Phi \in C^\infty, \varphi(0) = 0$. 考虑它的奇点 $(0, 0)$ 在扰动下的分岔问题. 此时线性部分矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{A}) = 1$. 取满足(84)的投影

$P, Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. 令

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

则

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = X_P = \text{Span}\{u_0\}, X_{I-P} = \text{Span}\{v_0\}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(Q) = \text{Span}\{s_0\}.$$

取 $\mathcal{N}(Q) = \text{Span}\{w_0\}$. 函数 $v = v^*(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X_{I-P}$ 由方程 $Qf(au_0 + v^*(a)) = 0$ 确定, 既

$$0 = Q\{v_2 s_0 + [a^2 + av_2(1 + \varphi(\alpha)) + y^2 \Phi(\alpha, v_2)] w_0\} = v_2 s_0.$$

因此 $v = v^*(a) \equiv 0$. 把它代入(91), 得到

$$\begin{aligned} g(a)w_0 &= (I - Q)f(au_0 + v^*(a)) \\ &= (I - Q)f\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = (I - Q)\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} = a^2 w_0 \end{aligned}$$

从而分岔函数 $g(a) = a^2$.

如果我们考虑方程(??)的 C^2 扰动, 扰动参数为 λ , 则扰动后方程的分岔函数 $g(a, \lambda)$ 满足 $g(a, 0) = a^2$. 利用隐函数定理易知, 存在 $\delta > 0$ 和 C^0 函数 $a = a(\lambda)$, 使得 $a(0) = 0, D_a g(a(\lambda), \lambda) \equiv 0, D_a^2 g(a(\lambda), \lambda) \neq 0, \forall |\lambda| < \delta$. 利用 Taylor 公式可得, 当 $|\lambda| \ll 1, |a - a(\lambda)| \ll 1$, 有

$$g(a, \lambda) = \mu(\lambda) + D_a^2 g(a(\lambda), \lambda)(a - a(\lambda))^2 + o(|a - a(\lambda)|^2)$$

其中 $\mu(\lambda) = g(a(\lambda), \lambda)$. 因此, 在 $(a, \lambda) = (0, 0)$ 附近, 方程 $g(a, \lambda) = 0$ 当 $\mu(\lambda) D_a^2(0, 0) < 0$ 时有两个零点. 应用定理1.3可知, 原系统(??)在扰动下发生鞍结点分岔. 注意, 当扰动方程为 C^∞ 时, 最后的讨论可从第一章定理??直接得到.

注意. 本节中讨论的奇点分岔问题, 主要着重于奇点个数随参数变动而发生变化的规律. 实际上, 在奇点个数发生变化的同时 (甚至在奇点个数不变时, 见附注??), 轨道结构还可能发生其他变化. 例如闭轨、同宿轨、异宿轨等的产生或消失. 这些情形在下章中将会看到.

2. 闭轨分岔

考虑微分方程族

$$(93) \quad (X_\lambda): \quad \frac{dx}{dt} = v(x, \lambda)$$

其中 $v \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $r \geq 1, k \geq 1$. 设 X_0 有一条孤立闭轨 γ . 当 $\lambda \neq 0, |\lambda| \ll 1$ 时, 我们关心 X_λ 在 γ 的领域内是否还有闭轨? 有几条闭轨? 这就是**闭轨分岔**问题. 当 γ 为双曲闭轨时, 问题是平凡的 (见第一章1). 因此, 我们要找到一些方法, 来判别 γ 的双曲性, 以及当 γ 非双曲时如何研究闭轨的分岔问题. 至于 γ 为方程(93)的非孤立闭轨的情形, 我们留待??中讨论.

从原则上说, 可以把闭轨分岔问题转化为它的 Poincare 映射的不动点的不动点的分岔问题, 从而可利用上节的方法, 事实上, 任取 $p \in \gamma$, 存在过 p 的 $n-1$ 维“无切截面” $U' \subset U$, 按第一章定义??所述, 可定义 Poincare 映射 $P: U' \times W \rightarrow U$, 它是 C^r 的, 其中 W 是 \mathbf{R}^k 中原点的领域, 满足 $P(p, 0) = p$. X_λ 的闭轨相应于 $M(x, \lambda) = \underline{d}P(x, \lambda) - x$ 在 $(x, \lambda) \in U' \times W$ 内的零点. 因此, ??中的方法都是适用的. 注意, 如果把坐标原点平移到 p 点, 就会满足1中 $M(0, 0) = 0$ 的条件.

在解决具体问题时, 困难在于如何实施上述原则. 下面, 我们就平面向量场的情形作进一步的讨论, 顺便介绍曲线坐标方法和某些重要结论.

考虑平面上的微分方程族

$$(94) \quad (X_\lambda): \quad \frac{dx}{dt} = v(x, \lambda)$$

其中 $v \in C^r(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^2)$, $r \geq 2, k \geq 1$. 设 X_0 有闭轨 γ , 它有如下的参数表示

$$\gamma: \quad x = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

设 γ 以 T 为周期, 并且为负定向, 既当 t 增大时, $\varphi(t)$ 沿 γ 顺时针方向旋转. 取 γ 在 $\varphi(t)$ 点沿外法向的单位向量

$$(95) \quad \zeta(t) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}.$$

由 $\zeta(t) \perp \varphi'(t)$ 及 $|\zeta(t)| = 1$ 易知, $\forall 0 \leq t \leq T$,

$$(96) \quad \langle \zeta(t), \varphi'(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle \zeta(t), \zeta'(t) \rangle \equiv 0,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbb{R}^2 中的内积. 取坐标变换

$$(97) \quad x = \varphi(s) + \xi(s)n$$

其中 x 在 γ 附近; $0 \leq s \leq T, |n| \ll 1$. 坐标 (s, n) 可以这样理解: 从 $\varphi(0)$ 沿 γ 经过时间 s 到达 $\varphi(s)$, 再从 $\varphi(s)$ 点沿 γ 的外法向 $\xi(s)$ 移动长度 n 到达 x 点 (当 $n < 0$ 时, 表示向内法向移动), 见图?? . 注意, $\{n = \text{常数}\}$ 与 $\{s = \text{常数}\}$ 在平面上形成蛛网形坐标曲线 (见图??), 称 (s, n) 为**曲线坐标**. 我们先把方程(94)转换成曲线坐标系下的方程, 然后建立 Poincare 映射. 把(97)对 t 求导, 并应用(??)得

$$(98) \quad v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) = \frac{dx}{dt} = (\varphi'(s) + \xi'(s)n) \frac{ds}{dt} + \zeta(s) \frac{dn}{dt}$$

分别以 $\zeta(s)$ 及 $\varphi'(s)$ 对上式作内积, 利用??及 $|\zeta(s)| = 1$ 得

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle}{|\varphi'(s)|^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle} \end{aligned}$$

消去 t 得

$$(99) \quad \frac{dn}{ds} = \frac{(|\varphi'(s)|^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle) \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \xi(s)n, \lambda) \rangle}{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \xi(s)n, \lambda) \rangle} \triangleq F(n, s, \lambda),$$

由于 $x = \varphi(s)$ 为 X_0 的解, 故

$$(100) \quad \varphi'(s) = v(\varphi(s), 0);$$

利用(100)和(??), 可从(??)算得

$$F(0, s, 0) = 0,$$

$$(101) \quad \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{n=0, \lambda=0} = \left\langle \zeta(s), \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) \zeta(s) \right\rangle \cdot = H(s)$$

从而(??)可写成

$$(102) \quad \frac{dn}{ds} = (H(s) + F_1(n, s, \lambda)) n,$$

其中, $F_1|_{\lambda=0} = O(|n|)$. 因此, (102) 满足初值条件 $n|_{s=0} = a$ 的解可表示为

$$(103) \quad n(s, a, \lambda) = a \left(\exp \int_0^s [H(t) + F_1(n(t, a, \lambda), t, \lambda)] dt \right).$$

现在, 取 X_0 的闭轨 γ 上的点 $x_0 = \varphi(0)$, 过 x_0 以法线 n_0 为方向取一截线 L , 建立 103 的 Poincare 映射 (见第一章定义 ??, 但此时与参数 λ 有关) $P : (a, \lambda) \mapsto n(T, a, \lambda)$, 这里的函数 $n(s, a, \lambda)$ 由 103 定义. 显然, $n(T, 0, 0) = 0$. 定义后继函数

$$(104) \quad G(a, \lambda) = n(T, a, \lambda) - a,$$

则对每个 $\lambda, |\lambda| \ll 1$, $G(a, \lambda)$ 关于 a 的零点与 X_λ 在 γ 附近的闭轨相对应. 注意 (94) 中 $v \in C^r, r \geq 2$, F 关于 n, λ 为 C^r 的, 关于 s 为 C^{r-1} 的, 故 (103) 中的解 $n \in C^r$, 从而 (104) 中的函数 $G \in C^r$.

定义 2.1. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\forall a \in (0, \epsilon)$, 都有 $G(a, \lambda) < 0 (> 0)$, 则称 γ 为 **外侧稳定 (外侧不稳定) 的极限环**. 若存在 $\epsilon > 0$, 使 $\forall a \in (-\epsilon, 0)$, 都有 $G(a, \lambda) > 0 (< 0)$, 则称 γ 为 **内侧稳定 (内侧不稳定) 的极限环**. 双侧均稳定 (均不稳定) 的极限环称为 **稳定 (不稳定) 极限环**; 双侧稳定性不同时, 称 γ 为 **半稳定极限环**.

从上述定义可知, 稳定 (不稳定) 极限环 w 必为孤立闭轨. 下面定义中的 γ 为非孤立闭轨.

定义 2.2. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists a_1, a_2 \in (0, \epsilon)$ 使得 $G(a_1, \lambda) = 0$, 但 $G(a_2, \lambda) \neq 0$, 则称 γ 为 **外侧复型极限环**. 若存在 $\epsilon > 0$, 使 $\forall a \in (0, \epsilon)$, 都有 $G(a, \lambda) = 0$, 则称 γ 为 **外侧周期环域**.

类似可定义内侧复型极限环与内侧周期环域.

定理 2.1. 解析向量场不存在复型极限环.

证明. 由于在 X_0 的闭轨 $\gamma_1 \{x = \varphi(t) | 0 \leq t \leq T\}$ 上无奇点, 利用方程 (??) 和 γ 的紧致性可知存在 $\delta > 0$, 使得当 $|n| < \delta, |\lambda| < \delta$ 时, $\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle$ 恒正. 因此, 方程 (??) 的右端函数 $F(n, s, \lambda)$ 解析, 从而 $G(a, \lambda)$ 解析. 由于解析函数的非孤立零点必存在一个领域, 使函数在其中恒为零. 因此定理得证. \square

定义 2.3. 若存在 $\exists \epsilon > 0$ 和正整数 $k, l \leq k \leq r$, 使当 $|a| < \epsilon$ 时, 有

$$(105) \quad G(a, 0) = c_k a^k + o(|a|^k), \quad c_k \neq 0$$

则称 γ 为 X_0 的 **k 重极限环**. 当 $k = 1$ 时称为**单重极限环**, 当 $k > 1$ 时, 称为**多重极限环**.

显然, 当 k 为奇数时, $c_k < 0$ 表明 γ 为稳定的极限环, 而 $c_k > 0$ 表明 γ 为不稳定的极限环; 当 k 为偶数时, γ 为半稳定的极限环. 注意, 这里说得稳定性为轨道稳定性, 而不是结构稳定性. 事实上, 与1的定义相对照可知, 单重环是结构稳定 (双曲) 的, 而多重环都是结构不稳定 (非双曲) 的. 为了判别 γ 是否为单重的, 我们记

$$(106) \quad \sigma = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) ds$$

定理 2.2. 若 $\sigma \neq 0$, 则 γ 为 X_0 的单重环. 当 $\sigma < 0$ 时 γ 为稳定的; 当 $\sigma > 0$ 时 γ 为不稳定的.

证明. 由 (103), (104) 得到

$$G(a, 0) = a \left(\exp \int_0^T [H(s) + F_1(n(s, a, 0), s, 0)] ds - 1 \right).$$

故由 $F_1(n, s, 0) = O(|n|)$, 和 $n(T, 0, 0) = 0$, 可得

$$(107) \quad G'_a(0, 0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{G(a, 0) - G(0, 0)}{a} = \exp \int_0^T H(s) ds - 1$$

另一方面, 把 (101) 式的内积按分量展开, 并利用 (95), (100) 可得

$$\begin{aligned} H(s) &= \left\langle \xi(s), \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) \zeta(s) \right\rangle \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{1}{|\phi'(s)|^2} \Phi \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{1}{\langle v, v \rangle} \left\langle v, \frac{\partial v}{\partial x} v \right\rangle \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{d}{ds} \ln |v| \end{aligned}$$

其中, $v = v(\varphi(s), 0)$,

$$\Phi = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} (\varphi')^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \varphi' \varphi'_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Phi' \varphi'_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} (\varphi'_2)^2.$$

注意到 γ 以 T 为周期, 因此

$$\int_0^T H(s)ds = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0)ds = \sigma,$$

代入 (107) 得

$$G'_a(0, 0) = e^\sigma - 1$$

当 $\sigma \neq 0$ 时, 得到 $G(0, 0) = 0, G'_a(0, 0) \neq 0$. 故, γ 是单重极限环. 它的稳定性与 σ 的符号之间的关系是显然的. 定理得证. \square

推论. 当 X_0 的闭轨 γ 为多重极限环、复型极限环或 γ 附近为周期环域时, 必有 $\sigma = 0$.

定理 2.3. 设 γ 为 X_0 的 k 重极限环 ($k \geq 1$), 则对于 X_λ

- 存在 γ 的 (环形) 领域 U 和正数 δ , 使只要 $|\lambda| < \delta, X_\lambda$ 在 U 内至多有 k 个极限环.
- $\forall i, 1 \leq i \leq k, \forall \delta > 0$, 对任给的 γ 的 (环形) 领域 $V \subset U, \exists X_0$ 的扰动系统 $X_\lambda, |\lambda| < \delta$, 使得 X_λ 在 V 内恰有 i 个极限环. 当 k 为偶数时, 上述结论可扩充至 $i = 0$.
- 当 k 为奇数时, $\forall V \subset U, \exists \delta > 0$, 使当 $|\lambda| < \delta$ 时, X_λ 在 V 内至少有一个极限环.

证明. 当扰动系统 X_λ 对应的 (94) 中的 $v \in C^\infty$ 时, 可由 Malgrange 定理 (第一章定理 ??) 直接推得以上结论. 当 $v \in C^r$ 时, 可利用隐函数定理和中值定理证明. 详细推导从略. \square

例 2.1. 考虑 2 上的系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 y + ax^2 + bxy^2,$$

其中参数 $\lambda_2 \neq 0$. 设存在闭轨 γ , 周期为 T , 则 $\sigma = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial(x,y)} \Big|_\gamma dt = \int_0^T (\lambda_2 + 2bxy) \Big|_\gamma dt = \lambda_2 T \neq 0$, 这里利用系统的第一个方程得到 $2xydt = 2xdx = d(x^2)$. 因此, 这闭轨也是双曲的.

推论. 上例表明, 在一些具体问题中, 利用 (106) 计算 σ 时, 可以不必知道 $\phi(s)$ 的表达式, 这就给利用定理 2.2 判别闭轨的双曲性提供了方便. 当 $\sigma = 0$ 时, 需

要从 (104) 进一步计算 (105) 式中第一个不为零的 c_k , 以便按定义 ?? 判断 γ 的次. 这时一般来说计算量就大.

3. Hopf 分岔

当向量场在奇点的线性部分矩阵有一对复特征根, 并且随参数变化为穿越虚轴时, 在奇点附近的一个二维中心流形上, 奇点的稳定性发生翻转, 从而在奇点附近产生闭轨的现象, 称为 Hopf 分岔, 第一章 (??) 就是一个典型的实例. 既然 Hopf 分岔发生在二维中心流形上, 为了简单, 下面讨论二维方程.

3.1. 金典的 Hopf 分岔定理. 考虑 C^∞ 向量场

$$(108) \quad (X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = A(\mu)x + F(x, \mu)$$

其中 $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \mu \in \mathbf{R}^1, F(0, 0) = 0, D_x F(0, 0) = 0$. 设线性部分矩阵 $A(\mu)$ 有特征值 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, 满足条件

- (1). $[(H_1)] \alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0 \neq 0;$
- (2). $\alpha'(0) \neq 0;$
- (3). $\operatorname{Re} c_1 \neq 0;$

其中 c_1 为向量场 X_0 的如下复正规型中的系数 (见第一章例 ??),

$$(109) \quad \frac{dw}{dt} = i\beta_0 w + c_1 |w|^2 w + \cdots + c_k |w|^{2k} w + O(|w|^{2k+3})$$

定理 3.1 (Hopf 分岔定理). 设条件 (1). 和 (3). 成立, 则 $\exists \sigma > 0$ 和 $x = 0$ 的领域 U , 使得当 $|\mu| < \sigma$ 时, 方程 (108) 在 U 内至多有一个闭轨 (从而是极限环). 如果条件 (2). 也成立, 则 $\exists \sigma > 0$ 和在 $0 < x_1 \leq \sigma$ 上定义的函数 $\mu = \mu(x_1)$, 满足 $\mu(0) = 0$, 而且

- (1). 当 $\mu = \mu(x_1), 0 < x_1 \leq \sigma$ 时, 系统 (108) 过点 $(x_1, 0)$ 的轨道是它唯一的轨道. 当 $\operatorname{Re} c_1 < 0$ 时, 它是稳定的; 当 $\operatorname{Re} c_1 > 0$ 时, 它是不稳定的;
- (2). 当 $\mu\alpha'(0) \operatorname{Re} c_1 < 0$ 时, $\mu'(x_1) > 0$; 当 $\mu\alpha'(0) \operatorname{Re} c_1 > 0$ 时, $\mu'(x_1) < 0$;

在下文中, 我们先证明一个更广泛的定理, 再证明定理 3.1.

推论. Hopf 分岔定理有多种形式和多种证法. 例如可参考 [FLLL]. 实际应用定理 3.1 时, 重要的是计算 $\operatorname{Re} c_1$. 对某些常见的方程, 导出计算公式将为应用带来方便. 下面给出一个例子.

例 3.1 (GH). 如果二维系统 X_0 具有如下形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$

其中 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$, $\beta_0 \neq 0$, 则有如下计算公式:

$$(110) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} c_1 = & \frac{1}{16} \{ (f_{xxx} + f_{xvy} + g_{xxy} + g_{yyy}) \\ & + \frac{1}{\beta_0} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) \\ & - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \}_{|x=y=0} \end{aligned}$$

3.2. 退化 Hopf 分岔定理. 当条件 (1) 与 (3) 至少有一个不成立时, 仍有可能出现 Hopf 分岔, 这就是所谓的退化 Hopf 分岔问题.

考虑二维 m 参数向量场

$$(111) \quad (X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, \mu)$$

其中

$$x, y \in \mathbf{R}^1, \mu \in \mathbf{R}^m, f, g \in C^\infty, f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$$

推论. 设在奇点 $(x, y) = (0, 0)$, 系统 (111) 的线性部分矩阵有一对复特征根 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, 满足条件 (1), 则对任意自然数 k , 存在 $\delta > 0$ 和光滑依赖于参数 μ 的多项式变换, 当 $|\mu| < \delta$ 时, 可以把 (111) 化为

$$(112) \quad \begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & [\alpha(\mu) + i\beta(\mu)]w + c_1(\mu)w^2\bar{w} + \\ & \cdots + c_k(\mu)w^{2+1}\bar{w}^2 + O(|w|^{2k+3}), \end{aligned}$$

其中 $\alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0, c_i(0) = c_i, i = 1, 2, \dots, k$, 这里 c_i 是把 X_0 化为 (109) 后的系数.

证明. 记 $\lambda(\mu) = (\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu))$, 其中 $\lambda_1(\mu)$ 和 $\lambda_2(\mu)$ 为复特征根 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$; $m = (m_1, m_2)$, 其中 m_1, m_2 为自然数; $M_k \xrightarrow{d} \{m | 2 \leq m_1 + m_2 \leq 2k + 2\}$; 并且

$$(m, \lambda(\mu)) = m_1\lambda_1(\mu) + m_2\lambda_2(\mu)$$

由条件 (1) 知, $\lambda_1(0) = (m, \lambda(0))$ 给出 $\leq 2k + 2$ 阶的共振条件, 当且仅当 $m \in M^* \xrightarrow{d} \{m | m_1 = m_2 + 1, m_3 = 1, \dots, k\} \subset M_k$. 由于 $\lambda_j(\mu)$ 是光滑函数 ($j=1, 2$), 故

存在 $\delta > 0$, 使当 $|\mu| < \delta$ 时, $\lambda_1(\mu) \neq (m, \lambda(\mu))$, 当 $m \in M_k \setminus M^*$. 因此, 用第一章定理 ?? 和例 (??) 同样的推理可得引理的结论. \square

定义 3.1. 称 X_0 以 $(x, y) = (0, 0)$ 为 **k 阶细焦点** ($k \geq 1$), 如果条件 (1) 成立, 并且把 X_0 化成正规形 (109) 后, 满足条件

$$(113) \quad \operatorname{Re} c_1 = \cdots = \operatorname{Re} c_{k-1} = 0, \operatorname{Re} c_k \neq 0$$

定理 3.2. 设向量场 X_0 以 $(0, 0)$ 点为 k 阶细焦点, 则 X_0 在扰动下可发生 **k 阶 Hopf 分岔**, 既

- (1). 对它的任一开折系统 X_μ , 存在 $\sigma > 0$ 和 $(x, y) = (0, 0)$ 点的领域 U , 使得当 $|\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 U 内至多有 k 个极限环;
- (2). 对任意整数 $j, 1 \leq j \leq k$, 任意常数 $\sigma^*, 0 < \sigma^* < \sigma$, 以及 $(x, y) = (0, 0)$ 的任意领域 $U^* \subset U$, 存在一个开折系统 X_μ^* , 使得 X_μ^* 在 U^* 内恰有 j 个极限环, 其中 $|\mu| < \sigma^*$.

RS. 由引理 3.2, 可经光滑依赖于参数的多项式变换化为 (112). 对 (112) 及其共轭方程引入极坐标, 注意 $r^2 = w\bar{w}, e^{2\varphi i} = w\bar{w}^{-1}$, 可得到

$$(114) \quad \begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + \operatorname{Re}(c_1(\mu))r^3 + \cdots + \operatorname{Re}(c_k(\mu))r^{2k+1} + O(r^{2k+3}) \\ \dot{\varphi} = \beta(\mu) + O(r^2) \end{cases}$$

由于 $\beta \neq 0$, 所以当 $|\mu| \ll 1$ 时, 可从 (114) 得到,

$$(115) \quad \frac{dr}{d\varphi} = h_0(\mu)r + h_1(\varphi, \mu)r^2 + \cdots + h_k(\varphi, \mu)r^{2k+1} + O(r^{2k+3})$$

其中 $r \ll 1$, 并且

$$\begin{aligned} h_0(\mu) &= \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}, \\ h_1(\varphi, \mu) &= \frac{\operatorname{Re}(c_1(\mu))}{\beta(\mu)} + \eta_{1,0}\alpha(\mu), \\ &\dots\dots\dots \\ h_k(\varphi, \mu) &= \frac{\operatorname{Re}(c_k(\mu))}{\beta(\mu)} + \eta_{k,k-1}\operatorname{Re}(c_{k-1}(\mu)) + \\ &\dots + \eta_{k,1}\operatorname{Re}(c_1(\mu)) + \eta_{k,0}\alpha(\mu), (k \geq 2), \end{aligned}$$

这里 $\eta_{i,j} = \eta_{i,j}(\varphi, \mu)$ 是 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 和 μ (在 0 附近) 的光滑函数. 当 $\mu = 0$ 时, (115) 成为

$$(116) \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\operatorname{Re} c_k}{\beta_0} r^{2k+1} + O(r^{2k+3})$$

在 x_1 轴上建立方程 (115) 的 Poincare 映射 $P(x_1, \mu)$, 并令

$$(117) \quad V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1,$$

显然,

$$(118) \quad V(x_1, \mu) = V(r, \mu), \text{ 当 } x_1 \geq 0.$$

$V(x_1, \mu)$ 在 $x_1 > 0$ 的零点个数对应于方程 (115) 非零周期解的个数.

令函数

$$R(r, \varphi, \mu) = u_1(\varphi, \mu)r + u_2(\varphi, \mu)r^2 + \cdots + u_{2k+1}(\varphi, \mu)r^{2k+1} + \cdots$$

是 (115) 满足 $R(r, 0, \mu) = r$ 的解; 而函数 $\psi(r, \varphi)$ 是方程 (116) 满足 $\psi(r, 0) = r$ 的解, 则有

$$P(x_1, 0) = \psi(r, 2\pi) = R(r, 2\pi, 0)$$

. 由此可知, 当 $x_1 \geq 0$ 时

$$(119) \quad \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial P}{\partial x_2}(0, 0) - 1 = \frac{\partial \psi}{\partial r}(0, 2\pi) - 1,$$

$$(120) \quad \frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0, 0) = \frac{\partial^m P}{\partial x_1^m}(0, 0) = \frac{\partial^m \psi}{\partial r^m}(0, 2\pi), m > 1.$$

由于 $\phi(r, \varphi)$ 是方程 (116) 的解, 我们有

???????????????????????????????????? 因此

$$(121) \quad \left. \frac{\partial^m}{\partial r^m} \psi(r, 2\pi) \right|_{r=0} = \begin{cases} 1, & \text{当 } m = 1, \\ 0, & \text{当 } 1 < m < 2k + 1, \\ 2\pi[(2k + 1)!] \frac{\operatorname{Re} c_k}{\beta_0} \neq 0, & \text{当 } m = 2k + 1. \end{cases}$$

由 (119) 和 (121) 可得

$$(122) \quad \frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0,0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 1 \leq m < 2k+1 \\ 2\pi[(2k+1)!] \frac{\operatorname{Re} c_k}{\beta_0}, & m = 2k+1. \end{cases}$$

注意方程 (115) 与 (116) 右端的函数当 $r = 0$ 时恒为零, 并可以光滑地开拓到 $r < 0$. 因此 $V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1$ 在 $(x_1, \mu) = (0, 0)$ 的领域内是光滑函数, 由条件 (122), 利用 Malgrange 定理 (第一章定理 (??)), 在 $(x_1, \mu) = (0, 0)$ 附近存在光滑函数 $h(x_1, \mu)$, $h(0, 0) \neq 0$, 以及对 x_1 的 $2k+1$ 阶多项式函数 $Q(x_1, \mu)$, 使

$$V(x_1, \mu) = Q(x_1, \mu) h(x_1, \mu).$$

另一方面, $V(0, \mu) \equiv 0$, 且 $V(x_1, \mu)$ 对 x_1 的正根和负根成对出现 (这里要用到, 当 (x_1, μ) 在 $(0, 0)$ 附近的一个小领域内, $V(x_1, \mu)$ 对 x_1 至多有 k 个正根, 定理的结论 (1). 得证.

为了证明结论 (2), 我们假设 X_0 以 $x = 0$ 为 k 阶细焦点, 既它具有如下的正规形

$$\dot{z} = i\beta_0 z + c_k |z|^{2k} z + O(|z|^{2k+3}) \xrightarrow{d} F(z), \quad \operatorname{Re} c_k \neq 0$$

取它的扰动系统

$$(123) \quad \dot{z} = F(z) + \mu_{k-j} |z|^{2(k-j)} z + \cdots + \mu_{k-1} |z|^{2(k-1)} z,$$

其中 $\mu_0 \in \mathbf{R}$, $k-j \leq m \leq k-1$, j 固定 ($1 \leq j \leq k$). 化为极坐标方程

$$(124) \quad \dot{r} = \mu_{k-j} r^{2(k-j)+1} + \cdots + \mu_{k-1} r^{2k-1} + \operatorname{Re} c_k r^{2k+1} + O(r^{2k+3})$$

$$(125) \quad \xrightarrow{d} G(\mu_{k-j}, \cdots, \mu_{k-1}; r).$$

为了使系统 (123) 存在 j 个闭轨, 我们按下述方式依次选取 $\mu_{k-1}, \cdots, \mu_{k-j}$, 设 $\operatorname{Re} c_k > 0$ (当 $\operatorname{Re} c_k < 0$ 时, 讨论是类似的), 则可选取 $0 < r_k < 1$ 使

$$G(0, \cdots, 0; r_k) > 0.$$

选 $\mu_{k-1} < 0$, $|\mu_{k-1}| \ll \operatorname{Re} c_k$, 及 $r_{k-1} \in (0, r_k)$, 使得

$$G(0, \cdots, 0, \mu_{k-1}; r_k) > 0, \quad G(0, \cdots, 0, \mu_{k-1}, r_{k-1}) < 0.$$

类似地, 可选 $\mu_{k-2}, r_{k-2}, \dots, \mu_{k-j}, r_{k-j}$, 使得 $\operatorname{Re} c_k, \mu_{k-1}, \dots, \mu_{k-j}$ 具有交替的符号, 并且 $0 < |\mu_{k-j}| \ll \dots \ll |\mu_{k-1}| \ll |\operatorname{Re} c_k|, 0 < r_{k-j} < \dots < r_{k-1} < r_k$, 使得

$$\dot{r} > 0 \text{ 当 } r = r_k, r_{k-2}, \dots$$

$$\dot{r} < 0 \text{ 当 } r = r_{k-1}, r_{k-3}, \dots$$

由 Poincare-Bendixson 环域定理, 扰动系统 (123) 至少存在 j 个极限环.

这里 r_k 的选取使产生的极限环都在 U^* 内, 而 μ 的选取满足 $|\mu| < \sigma^*$. 我们断言, 能对任意的 $\sigma > 0$ 和 $r = 0$ 的领域 U , (123) 在 U 内多于 j 个极限环, 则我们可以仿照上面的方法选取 $\mu_{k-j-1}, r_{k-j-1}, \dots, \mu_1, r_1$ 以及 a, r_0 , 从而在 U 内的极限环总数大于 k , 这与结论 (1) 矛盾. 至此, 定理 3.2 证毕. \square

定理 3.1 的证明. 当 $k = 1$ 时, 可以从定理 3.2 得到 3.1. 事实上, 从定理 3.1 的条件 (3) 和 (2) 得知 $x = 0$ 是方程 (109) 的一阶细焦点, 因此定理 3.1 的前一部分结论成立. 再设条件 (1) 也成立, 由 (115) - (118) 可知, 后继函数

$$(126) \quad V(x_1, \mu) = x_1 \tilde{V}(x_1, \mu),$$

其中

$$(127) \quad \tilde{V}(x_1, \mu) = \left[\exp \left(2\pi \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} \right) - 1 \right] + u_2(2\pi, \mu)x_1 + O(x_1^2),$$

再由 (122) 可知

$$(128) \quad \tilde{V}(x_1, 0) = 2\pi \frac{\operatorname{Re} e_1}{\beta_0} x_1^2 + O(x_1^3).$$

由 (127) 和条件 (1) 可知

$$(129) \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{2\pi}{\beta(0)} \alpha'(0) \neq 0.$$

利用隐函数定理, 存在 $\sigma > 0$ 和 $0 \leq x_1 \leq \sigma$ 定义的光滑函数 $\mu = \mu(x_1)$, 满足 $\mu(0) = 0$ 和

$$(130) \quad \tilde{V}(x_1, \mu(x_1)) \equiv 0$$

至此, 定理 3.1 的结论 (1). 得证. 为了证明结论 (2)., 从 (130) 求导得到

$$(131) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \mu'(x_1) = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \mu \partial x_1} \mu'(x_1) + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \mu^2} (\mu'(x_1))^2 + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \mu''(x_1) = 0 \end{cases}$$

利用 (128) 及条件 (3). 可得

$$\mu'(0) = 0 \quad \mu''(0) = -2 \frac{\operatorname{Re} c_1}{\alpha'(0)}$$

由此得定理的结论 (2).. □

从以上证明立得以下结论,

推论. 设条件 (1)., (2). 和 (3). 成立, 则存在 $\sigma > 0$ 和 $x = 0$ 的领域 U , 使得

- (1). 当 $|\mu| < \sigma, \operatorname{Re} c_1 \alpha'(0) \mu < 0$ 时, 系统 (108) 在 U 内恰有一个极限环, 当 $\operatorname{Re} c_1 \alpha'(0) \mu < 0 (> 0)$ 时, 它是稳定 (不稳定) 的; 并且当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 它缩向奇点 $x = 0$;
- (2). 当 $|\mu| < \sigma, \operatorname{Re} c_1 \alpha'(0) \mu \geq 0$ 时, 系统 (108) 在 U 内没有极限环.

注. 在应用定理 3.2 时, 需要首先判断未扰动系统 X_0 以 O 为细焦点的阶数, 也就是确定满足条件 (112) 的 k . 在实际计算时, 经常应用下面介绍的 **Liapunov 系数法**, 细节请见 [ZDHD]. 设 X_0 具有如下的形式

$$(132) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\beta_0 y + p(x, y), \\ \dot{y} = \beta_0 x + q(x, y), \end{cases}$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}, p, q = O(|x, y|^2), \beta_0 \neq 0$. 我们利用待定系数法, 寻找 $V_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots$ 和函数

$$F(x, y) = \frac{\beta_0}{2} (x^2 + y^2) + O(|x, y|^3),$$

使得

$$(133) \quad \left. \frac{dF}{dt} \right|_{(132)} = \sum_{j=1}^m V_j (x^2 + y^2)^{j+1}$$

满足上式的 $\{V_j\}$ 称为 (126) 的 Liapunov 系数. 在下面定理的意义下, 它与 Hopf 分岔系数 $\{\operatorname{Re}(C_j)\}$ 是等价的.

定理 3.3. $V_1 = \cdots - V_{k-1} = 0, V_k > 0$ (或 < 0), 当且仅当 $\operatorname{Re} c_1 = \cdots = \operatorname{Re} c_{k-1} = 0, \operatorname{Re} c_k > 0$ (或 < 0).

定理的证明见[BL]. 下文中, 我们把 $\{V_j\}$ 或 $\{\operatorname{Re}(c_j)\}$ 称为系统的 **焦点量**.

3.3. 应用.

例 3.2. 考虑二维系统

$$(134) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \mu_1 y + \mu_2 xy + \mu_3 x^3 y + \mu_4 x^4 y. \end{cases}$$

此系统有两个奇点 $(\pm 1, 0)$, 而 $(1, 0)$ 是鞍点. 所以只需考虑奇点 $(-1, 0)$ 附近发生 Hopf 分岔的可能性. 令 $\xi = x + 1$, 系统 (134) 变为

$$(135) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = y, \\ \dot{y} = -2\xi + y(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4) + \xi^2 + (\mu_2 + 3\mu_3 - 4\mu_4)\xi y \\ \quad + (-3\mu_3 + 6\mu_4)\xi^2 y + (\mu_3 - 4\mu_4)\xi^3 y + \mu_4 \xi^4 y. \end{cases}$$

这个系统在 $(0, 0)$ 的线性部分矩阵有一对纯虚特征根的条件为

$$(136) \quad \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 = 0.$$

令 $y = -\sqrt{2}\eta$, 则在条件 (136) 下, 方程 (135) 变成

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\sqrt{2}\eta, \\ \dot{\eta} = \sqrt{2}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2 + (\mu_2 + 3\mu_3 - 4\mu_4)\xi\eta + \\ \quad (-3\mu_3 + 6\mu_4)\xi^2\eta + (\mu_3 - 4\mu_4)\xi^3\eta + \mu_4\xi^4\eta. \end{cases}$$

应用 Liapunov 系数法, 可以得到

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{16}(\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4), \text{ 当 } V_1 = 0, V_3 = \frac{14}{5}\mu_4, \text{ 当 } V_1 = V_2 = 0. \\ V_2 &= \frac{1}{96\sqrt{2}}(5\mu_3 - 14\mu_4) \end{aligned}$$

由此应用定理 3.2, 可得下列结论:

- (1). 若 $\mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_2 \neq 0$, 则当 $\mu_1 = \mu_2$ 时发生一阶 Hopf 分岔, 并且系统 (134) 在原点附近存在唯一极限环的参数区域是

$$\mu_2 (\mu_1 - \mu_2) < 0, 0 < |\mu_1 - \mu_2| \ll |\mu_2| \ll 1$$

- (2). 若 $\mu_4 = 0, \mu_3 \neq 0$, 则当 $\mu_1 = 4\mu_3, \mu_2 = 3\mu_3$ 时发生二阶 Hopf 分岔, (134) 在原点附近存在两个极限环的参数区域是

$$\begin{aligned} \mu_3 (\mu_2 - 3\mu_3) < 0, \mu_3 (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) > 0 \\ 0 < |\mu_1 - \mu_2 - \mu_0| \ll |\mu_2 - 3\mu_3| \ll |\mu_3| \ll 1 \end{aligned}$$

- (3). 若 $\mu_4 \neq 0$, 则三阶 Hopf 分岔发生的条件是

$$\mu_1 = \frac{11}{5}\mu_4, \mu_2 = \frac{2}{5}\mu_4, \mu_3 = \frac{14}{5}\mu_4$$

而系统 (134) 在原点附近存在三个极限环的参数区域是

$$\begin{aligned} \mu_4 (5\mu_3 - 14\mu_4) < 0, \mu_4 (\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4) > 0 \\ \mu_4 (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4) < 0 \\ 0 < |\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4| \ll |\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4| \\ \ll |5\mu_3 - 14\mu_4| \ll |\mu_4| \ll 1 \end{aligned}$$

Bautin 对右端是二次多项式的平面微分系统 (简称二次系统) 的一种标准形式导出了著名的焦点量公式 (见 [Ba]), 并证明了二次系统细焦点的阶数至多为 3 (他的第三个焦点量公式在符号及数值上都有误, 在 [QL], 及 [FLLL] 中得到纠正). 下面介绍的结果把他的公式推广到一般形式的二次系统上, 应用较方便.

例 3.3 ([Lc].) 设

$$(137) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases}$$

记

$$\begin{aligned} A &= a_{20} + a_{02}, B = b_{20} + b_{02}, \alpha = a_{11} + 2b_{02}, \beta = b_{11} + 2a_{20}, \\ \gamma &= b_{20}A^3 - (a_{20} - b_{11})A^2B + (b_{02} - a_{11})AB^2 - a_{01}B^3, \\ \delta &= a_{02}^3 + b_{20}^2 + a_{02}A + b_{20}B, \end{aligned}$$

则 (不计正数因子)

$$(138) \quad V_1 = A\alpha - B\beta$$

$$(139) \quad V_2 = [\beta(5A - \beta) + \alpha(5B - \alpha)]\gamma \text{ 如果 } V_1 = 0,$$

$$(140) \quad V_3 = (A\alpha + B\beta)r\delta, \text{ 如果 } V_1 = V_2 = 0, V_k = 0, \text{ 当 } k > 3, \text{ 如果 } V_1 = V_2 = V_3 = 0.$$

在最后一种情形下, 系统可积, $(0, 0)$ 为中心点.

注. 从原则上说, 当 X_0 以 O 为细焦点时, 总可以通过有限步运算确定细焦点的阶数 k . 但是当 k 较大时, 对一般系统想用 (138) 的方式来表达焦点量公式, 计算量非常大. 例如, 当把方程 (137) 右端关于 (x, y) 的齐二次项替换成齐三次项时, 细焦点的最高阶数为 5(见 [Si]); 但如果在 (137) 右端补充上三次项时, 则它的焦点量公式非常复杂; 即使利用计算机, 目前也仅推导出前几个焦点量公式. 确定焦点阶数和求焦点量公式, 与区分中心与焦点这个困难问题紧密相关. 在这里我们仅列举我国学者这方面的一些新工作: 蔡燧林、马晖 [CM] 给出了判别广义 Lienard 方程中心和焦点的较一般的方法; 黄启昌等 [HWW] 研究了泛函微分方程的 Hopf 分岔问题; 沈家齐、井竹君 [SI] 给出了判别存在 Hopf 分岔的一种新方法; 黄文灶 [Hw] 证明, 当非线性方程零点的拓扑度变号时, 会产生连通的分岔曲线, 等等.

注. 若将条件 (3). 换成

$$(1). ((H_3)') \quad F(x, \mu) \in C^\omega(U \times (-\sigma, \sigma), \mathbb{R}^2),$$

其中 U 是 \mathbb{R}^2 中原点的一个开集, 则当条件 (1)., (2). 和 (1). 成立时, 或者系统 (108) 当 $\mu = 0$ 时以原点为中心, 或者当 $\mu \in (-\sigma, 0)$ 或 $(0, \sigma)$ 时 (108) 在 U 内的奇点外围有唯一闭轨, 并且当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 此闭轨缩向奇点. 这是 Hopf 分岔定理的另一种形式, 证明可以参考 [Zj]. 注意, 此处 $F(x, \mu) \in C^\omega$ 的条件不能减弱为 $F(x, \mu) \in C^\infty$, 请看下列.

例 3.4.

$$(141) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \sin \mu + y \cos \mu + (-x \cos \mu + y \sin \mu) \tan A, \\ \frac{dy}{dt} = -x \cos \mu + y \sin \mu + (-x \sin \mu - y \cos \mu) \tan A, \end{cases}$$

其中 $A = e^{-\frac{1}{r}} \left(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}} \right)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$. 容易验证, 对此系统而言, 条件 (1), (2) 满足, 且右端函数是 C^∞ 的, 但不解析. 所以 (1) 不满足. 由于

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{(141)_\mu} = -r \cos \mu \left[\tan \left(e^{-\frac{1}{r}} \left(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}} \right) \right) - \tan \mu \right], \quad (142)$$

其中 $0 < r < 1$. 故原点是 $(141)_0$ 的渐近稳定焦点.

考虑 (r, μ) 平面上由下式定义的曲线

$$(143) \quad \gamma: \quad \mu = e^{-\frac{1}{r}} \left(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}} \right)$$

它显然界于曲线 $\gamma_1: \mu = e^{-\frac{1}{r}}$ 与曲线 $\gamma_2: \mu = 3e^{-\frac{1}{r}}$ 之间 (见图 2-2). 由于

$$\frac{d\mu}{dr} = r^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{r}} \left(r^{\frac{1}{2}} \left(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{3}{2} \cos r^{-\frac{3}{2}} \right)$$

在 $r = 0$ 的任意小领域内都改变其符号, 所以对任意小的 $\mu > 0$, 存在 $r_1(\mu) \neq r_2(\mu)$, $r_i(\mu) \rightarrow 0$ 当 $\mu \rightarrow 0$, 使得 $r = r_i(\mu)$ 均满足方程 (143) ($i = 1, 2$). 从而由 (3.4) 和 (143) 得到 $\frac{dr_i(\mu)}{dt} \equiv 0$. 这就说明对任意小的 μ , 系统 $(141)_\mu$ 在原点附近都至少有两闭轨. 因此, 上述结论的条件 $F(x, \mu) \in C^\omega$ 不能减弱为 $F(x, \mu) \in C^\infty$.

请读者验算, 此例中对一切正整数 k , 都有 $\operatorname{Re} c_k = 0$ 时, 奇点不见得是中心.

3.4. 对参数一致的 Hopf 分岔定理. 考虑 C^∞ 平面系统

$$(144) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \delta f(x, y, \mu, \delta), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \delta g(x, y, \mu, \delta), \end{cases}$$

其中函数 $H = H(x, y)$, 参数 $\delta, \mu \in \mathbb{R}^1$, 且 δ 为小参数. 设系统有奇点 $x = 0$, 而且在该点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu, \delta) \pm i\beta(\mu, \delta)$. 若存在 $\delta > 0$ 及在 $0 < \delta < \sigma$ 定义的函数 $\mu = \mu(\delta)$, 满足条件

(H1*)

$$\alpha(\mu(\delta), \delta) = 0, \beta(\mu(\delta), \delta) \neq 0$$

则在一定的附加条件下, 当 $\mu = \mu(\delta), \delta \in (0, \sigma)$ 时, 系统 (144) 可在 $x = 0$ 点发生 Hopf 分岔. 对每一个固定的 $\delta \in (0, \sigma)$, 利用推论 3.2 可知, 存在 $\epsilon(\delta) > 0$, 使得当 $|\mu - \mu(\delta)| < \epsilon(\delta)$ 且 $\mu > \mu(\delta)$ (或 $\mu < \mu(\delta)$) 时, 系统无极限环. 问题是: 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 可能有 $\epsilon(\delta) > 0$. 我们希望找到系统满足的条件, 以保证存在正数 δ_0 和 $\epsilon_0 \rightarrow 0$. 我们希望找到系统满足的条件, 以保证存在正数 δ_0 和 ϵ_0 , 使得对所有的 $\delta \in (0, \delta_0)$, 都有 $\epsilon(\delta) \geq \epsilon_0$. 这就是所谓的对参数一致的 Hopf 分岔问题, 见图 2-3???

代替定理 3.1 中条件 (2). 和 (3)., 下文需要的条件是

- (1). $(H_2^*) \alpha^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \alpha(\mu(\delta), \delta)}{\partial \mu} \neq 0$,
- (2). $(H_3^*) c_1^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} [c_1(\mu(\delta), \delta)] \neq 0$.

定理 3.4. 设系统 (144) 有奇点 (x_0, y_0) , 系统在此奇点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu, \delta) \pm i\beta(\mu, \delta)$. 又设存在 $\delta_1 > 0$ 和在 $0 < \delta < \delta_1$ 定义的函数 $\mu = \mu(\delta)$, 使条件 3.4, (1). 和 (2). 成立. 则存在 $\delta_2 > 0$ ($\delta_2 \leq \delta_1$), $\sigma > 0$ 和在 $x_0 < x \leq x_0 + \sigma, 0 < \delta < \delta_2$ 上定义的唯一函数 $\mu = h(x, \delta)$, 满足 $h(x_0, 0) = 0$, 而且

- (1). 当 $\mu = h(x, \delta), x_0 < x \leq x_0 + \sigma, 0 < \delta < \delta_2$ 时, (144) 过 xy 平面上的点 $(x_0, 0)$ 的轨道是它的唯一闭轨 Γ_δ . 当 $c_1^* < 0$ 时, Γ_δ 是稳定的极限环; 当 $c_1^* > 0$ 时, Γ_δ 是不稳定的极限环;
- (2). 当 $\alpha^* c_1^* < 0$ 时, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \delta) > 0$; 当 $\alpha^* c_1^* > 0$ 时, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \delta) < 0$.

证明. 不妨取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$. 与定理 3.1 的证明类似, 所不同的是以 $\mu - \mu(\delta)$ 代替那里的 μ , 而以 δ 为参数, 则那里的后继函数 $V(x, \mu)$ 变为 $V(x, \mu - \mu(\delta), \delta)$ 的形式. 注意到 $\delta = 0$ 时, (144) 为 Hamilton 系统, 因此 $V(x, \mu - \mu(0), 0) \equiv 0$. 代替 (126), 我们有

$$V(x, \mu - \mu(\delta), \delta) = \delta x V^*(x, \mu - \mu(\delta), \delta).$$

从条件 (1)., (2). 可得

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2}(0, 0, 0) \neq 0.$$

对 $V^*(x, \mu - \mu(\delta), \delta)$ 在 $(x, \mu - \mu(\delta), \delta) = (0, 0, 0)$ 点用隐函数定理即可. 其它推理与定理 3.1 的证明相同. \square

在定理 3.4 的条件下, 存在 $\delta_2 > 0$ ($\delta_2 \leq \delta_1$), $\sigma > 0$ 和 (x_0, y_0) 的领域 U , 使得

- (1). 当 $0 < \delta < \delta_2, |\mu - \mu(\delta)| < \sigma$, 且 $\alpha^* c_1^*(\mu - \mu(\delta)) < 0$ 时, 系统 (144) 在 U 内恰有一个闭轨. 当 $c_1^* < 0 > 0$ 时, 它是稳定 (不稳定) 的极限环.

(2). 当 $0 < \delta < \delta_2$, $|\mu - \mu(\delta)| < \sigma$, 且 $\alpha^* C_1^*(\mu - \mu(\delta)) > 0$ 时, 系统 (144) 在 U 内无闭轨.

在第三章 ?? 中, 我们将看到这种对参数一致的 Hopf 分岔定理的作用.

4. 平面上的同宿分岔

由二维流形上的结构稳定性定理 (见第一章定理 ??) 知道, 当存在鞍点的同宿轨 (或异宿轨) 时, 系统是结构不稳定的. 事实上, 这种连接鞍点的轨线在扰动下可能破裂, 从而改变系统的拓扑结构. 第一章例 ?? 就是一个典型的实例. 在本节里, 我们要进一步讨论, 当这种分岔产生时产生闭轨的规律.

我们先从几何上考虑, 以获得一些启示. 设平面上的单参数向量场族 X_μ 对应于如下的方程

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \mu), \quad (145)$$

其中 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. 设 X_0 的轨道结构如第一章图 1-9(b)??? 所示; 它有一条初等鞍点的同宿轨 Γ , Γ 内部是结构稳定焦点的吸引域. 当 $\mu \neq 0$ 时, γ 可能破裂为两条分界线 (鞍点的稳定流形和不稳定流形), 见图 1-9 的 (a) 与 (c).

显然, 在图 1-9(c) 的情形, 分界线破裂的方向与破裂前 Γ 的稳定性相配合, 就构成了一个 Poincaré-Bendixson 环域, 从而系统 X_μ 存在闭轨. 当 $|\mu|$ 充分小时, 可以使这个环域充分靠近原来的同宿轨线. 因此, 我们可以认为闭轨是从 Γ 经过扰动破裂而产生的 (或反过来说, 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 闭轨趋于 Γ 而成为同宿轨). 这种分岔现象称为**同宿轨的分岔**, 或简称为**同宿分岔**.

考虑向量场族

$$(X_k): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad (146)$$

中其 $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $f(0, 0) = 0$, X_0 以 $x = 0$ 为双曲鞍点 (既 $\det \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) < 0$), 并且具有同宿轨 Γ_0 , 如图 2-4(a) 所示 (对情况 (b) 可类似讨论).

从前面的讨论中可以看出, 在研究同宿分岔时, 下面两个问题是重要的:

- (1). 如何判断 X_0 的同宿轨 Γ_0 在其内侧的稳定性? (在第一章例 ?? 中, 这是利用 Γ_0 内的焦点的稳定性得出来的. 我们希望能从向量场在鞍点和 Γ_0 的特性来获得这个信息.)
- (2). 如何判断 X_μ 的稳定流形和不稳定流形的相对位置?

为了解决问题 (1), 我们先对 X_0 在 Γ_0 内侧引入 Poincare 映射 (见第一章定义 ??). 取 $p_0 \in \Gamma_0$, L_0 为过 p_0 点与 Γ_0 正交的无切线 (向内为正). 则在 p_0 附近存在一个领域 U , 使得 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 从 p 出发的轨线 $\phi(t, p)$ 经过 $t = T(p)$ 将再次与 L_0 交于一点 $P(p) = \phi(T(p), p)$ (见图 2-5). 令 n_0 为沿着 L_0^+ 的单位向量, 则 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 它有如下的坐标表示

$$(147) \quad p = p_0 + \alpha n_0,$$

其中 $\alpha > 0$. 相应地, $P(p)$ 有坐标表示

$$(148) \quad P(p) = \phi(T(p), p) = p_0 + \beta(\alpha) n_0,$$

其中 $\beta(\alpha) \in C^1$, 只要 $0 < \alpha \ll 1$ (因为 X_0 是 C^2 的). 定义函数

$$d(\alpha) = \beta(\alpha) - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

定义 4.1. X_0 的同宿轨 Γ_0 称为是**渐近稳定** (或**不稳定**) 的, 如果存在 $\eta > 0$, 使得 $d(\alpha) < 0$ (或 > 0) 对所有的 $0 < \alpha < \eta$ 成立.

注意 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d(\alpha) = 0$, 因此 Γ_0 的稳定性由极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} d'(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta'(\alpha) - 1$$

所决定: 当 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d'(\alpha) < 0$ (或 > 0), 也就是 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta'(\alpha) < 1$ (或 > 1) 时, Γ_0 是渐近稳定 (或不稳定) 的.

引入记号

$$\sigma_0 = \text{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

定理 4.1. 设 X_0 具有双曲鞍点 O 及同宿轨 Γ_0 , 如果 $\sigma_0 \neq 0$, 则当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_0 是渐近稳定的, 而当 $\sigma_0 > 0$ 时, Γ_0 是不稳定的.

[CH.] 如上所述, 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 可建立 X_0 在 p_0 领域的 Poincare 映射

$$P: U \cap L_0^+ \rightarrow L_0, P(p) = \varphi(T(p), p),$$

并且 $p, P(p)$ 分别有表示式 (147) 和 (148). 把 (148) 式对 α 求导, 得到

$$\begin{aligned} \beta'(\alpha)n_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi(T(p), p) \right] \frac{\partial T(p)}{\partial p} n_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 \\ (149) \quad &= f_\beta \frac{\partial T(p)}{\partial p} n_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t \rightarrow T(p)} n_0 \end{aligned}$$

其中 $f_\alpha = f(\alpha n_0 + p_0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 而 $f_\beta = f_{\beta(\alpha)}$. 注意 n_0 是沿 f_0^\perp 的方向, 当 α 足够小时, \mathbb{F} 积 $\langle f_\beta^\perp, n_0 \rangle \neq 0$, 在 (149) 式两端以 f_β^\perp 作 \mathbb{F} 积, 得到

$$\beta'(\alpha) = \frac{\left\langle f_\beta^\perp, \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 \right\rangle}{\langle f_\beta^\perp, n_0 \rangle}$$

如果记

$$(150) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 = \xi f_\beta + \eta n_0,$$

其中 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, 则

$$(151) \quad \beta'(\alpha) = \eta.$$

下面, 我们设法把 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta$ 与 σ_0 建立联系. 首先, 由 f 的连续性, 可以把 f_β 表示为

$$(152) \quad f_\beta = (1 + \varepsilon_1) f_\alpha + \varepsilon_2 n_0,$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ 当 $\alpha \rightarrow 0$. 另一方面, 由于

$$\varphi(T(p), p): U \cap L_0^+ \rightarrow L_0, p_0 + \alpha n_0 \mapsto p_0 + \beta(\alpha) n_0,$$

它的导映射 $\frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)}$ 把 $p_0 + \alpha n_0$ 处的切向量 f_α 映到 $p_0 + \beta(\alpha) n_0$ 处的切向量 f_β , 既

$$(153) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} f_\alpha = f_\beta.$$

由 (152), (153) 和 (150) 得出

$$(154) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)} f_\beta = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xi) f_\beta + \varepsilon_2 \eta n_0.$$

(154) 和 (150) 给出 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)}$ 在基向量 (f_β, n_0) 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xi & \xi \\ \varepsilon_2 \eta & \eta \end{pmatrix},$$

从而

$$(155) \quad \det \left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)} = (1 + \varepsilon_1) \eta.$$

其次, 我们来计算上式左端的行列式 (它与坐标系的选取无关). 注意 $\frac{\partial}{\partial p} \varphi(t, p)$ 是变分方程

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, p), 0)u$$

的基本解矩阵, 并且 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=0}$ 是单位矩阵, 由 Liouville 公式可知

$$(156) \quad \det \left(\frac{\partial}{\partial p} \varphi(t, p) \right) = \exp \int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(t, p), 0) dt.$$

由 (151), (155) 和 (156) 最后得出

$$(157) \quad \beta'(a) = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \exp \int_0^{T(p)} \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(t, p), 0) dt.$$

条件 $\sigma_0 = \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) < 0$ (或 > 0), 保证存在 $O(0, 0)$ 的领域 V , 使得当 $x \in V$ 时, 有 $\operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) < \frac{\sigma_0}{2} < 0$ (或 $> \frac{\sigma_0}{2} > 0$). 当 $0 < \alpha < \delta$, δ 足够小时, $T(p) = T_1 + T_2$, T_1 是流 $\phi(t, p)$ 停留在 V 中的时间. 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $T_1 \rightarrow +\infty$, 而 $T_2 = T(p) - T_1$ 是有界的. 因此, 由 (157) 式容易推得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta'(\alpha) = 0 \text{ (或 } +\infty \text{)}, \text{ 当 } \sigma_0 < 0 \text{ (或 } > 0 \text{)},$$

由附注 4 立得定理的结论. □

定理 4.2. 设向量场 X_μ 由 (4) 给定. 假定 X_0 以 O 为双曲鞍点, 有同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 = \text{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) \neq 0$. 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\mu| < \delta$ 时, 如果 X_μ 在 Γ_0 的 η 领域内有闭轨 Γ_μ , 那么 Γ_μ 是唯一的闭轨; 并且当 $\sigma_0 < 0 (> 0)$ 时, Γ_μ 是渐近稳定 (不稳定) 的.

证明. 我们只需考虑这样的闭轨 Γ_μ , 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 它趋于 Γ_0 . 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 并取 L_0 和 n_0 同前, 则当 $|\mu|$ 足够小时, Γ_μ 必与 L_0 横截相交, 记 $p_\mu = \Gamma_\mu \cap L_0$. 对于 p_0 点附近的 $p \in L_0$, 引入坐标表示 $p = p_0 + \alpha n_0, |\alpha| < \delta$. 则有 $p_\mu = p_0 + \alpha_\mu n_0, |\alpha_\mu| < \delta$, 当 $|\mu|$ 足够小时. 对于任意固定的 μ , 可在 L_0 上 p_μ 点附近建立 X_μ 的 Poincare 映射 P_μ :

$$p = \alpha n_0 + p_0 \mapsto P_\mu(p) = \beta_\mu(\alpha) n_0 + p_0, \quad |\alpha - \alpha_\mu| \ll 1,$$

并且 $\beta_\mu(\alpha_\mu) = \alpha_\mu$, 则 Γ_μ 的稳定性由 $[\beta'_\mu(\alpha_\mu) - 1]$ 的符号决定. 重复定理 4.1 的证明方法, 并注意当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_0, \alpha_\mu \rightarrow 0$, 因此

$$(158) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \beta'_\mu(\alpha_\mu) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma_0 < 0, \\ +\infty, & \text{当 } \sigma_0 > 0. \end{cases}$$

这说明当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_μ 渐近稳定; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, Γ_μ 不稳定.

另一方面, 两个具有相同稳定性的闭轨不可能并列共存, 因此 Γ_μ 是 X_μ 的唯一闭轨. \square

现在, 剩下要解决的就是我们在前面所提的问题 (2)., 既 X_0 的同宿轨 Γ_0 经扰动破裂后, 如何判断 X_μ 的稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u 的相对位置? Melnikov 函数就是用以描述 W_μ^s 与 W_μ^u 之间“有向缝隙”的判定量, 从而解决这个问题.

先把方程 (4) 改写为

$$(159) \quad (X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x) + \mu g(x, \mu),$$

其中 $f \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g \in C^r(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $r \geq 2$. 设 X_0 以 x_0 为双曲鞍点, 有同宿轨 Γ_0 . 设 Γ_0 有表达式

$$\Gamma_0: \quad x = \varphi(t), \quad \varphi(t) \rightarrow x_0 \text{ 当 } t \rightarrow \pm\infty.$$

对于平面上的向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 定义,

$$\mathbf{a}^\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^\perp \rangle.$$

容易验证, 对于任意二阶方阵 \mathbf{A} , 有

$$(160) \quad (Aa) \wedge b + a \wedge (Ab) = \text{tr } A(a \wedge b).$$

过 Γ_0 上的 $\phi(0)$ 点截线 L , 使它沿着法向 $n(0) = (\varphi'(0))^\perp = f^\perp(\varphi(0))$. 当 $|\mu| \ll 1$ 时, X_μ 有双曲鞍点 x_μ 及其稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u . 这里 $x_\mu \rightarrow x_0$, 当 $\mu \rightarrow 0$. 利用 [SH] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数定理, 当 $|\mu| \ll 1, t \geq 0$ (或 $t \leq 0$) 时, X_μ 有唯一有界解 $W_\mu^s(t)(W_\mu^u(t))$, 它与 $\phi(t)$ 充分靠近, 且当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$) 时, $W_\mu^s(t)$ (或 $W_\mu^u(t)$) $\rightarrow x_\mu$. 为了描述 W_μ^s 与 W_μ^u 的相对位置, 我们引进下面的定义, 它可以看成是 W_μ^s 与 W_μ^u 间“缝隙”沿 $n(0)$ 的投影 (相差一个非零常数倍).

$$(161) \quad d(\mu) = \langle W_\mu^u(0) - W_\mu^s(0), f^\perp(\varphi(0)) \rangle$$

令

$$(162) \quad D(t) = g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t)) = \begin{vmatrix} f_1(\varphi(t)) & g_1(\varphi(t), 0) \\ f_2(\varphi(t)) & g_2(\varphi(t), 0) \end{vmatrix}$$

$$(163) \quad \sigma(t) = \int_0^t \text{tr } \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) dt$$

定理 4.3. 设 $f, g \in C^r, r \geq 2, X_0$ 有同宿于双曲鞍点 x_0 的轨线 Γ_0 , 则对扰动系统 X_μ , 有

$$(164) \quad d(\mu) = \mu \Delta + O(|\mu|^2),$$

其中

$$(165) \quad \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt,$$

而 $D(t), \sigma(t)$ 由 (162) 和 (163) 定义.

证明. 记

$$(166) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} W_{\mu}^s(t)|_{\mu=0} = z^s(t), \quad t \geq 0,$$

$$(167) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} W_{\mu}^u(t)|_{\mu=0} = z^u(t), \quad t \leq 0,$$

$$(168) \quad \Delta^s(t) = z^s(t) \wedge f(\varphi(t)), \quad t \geq 0,$$

$$(169) \quad \Delta^u(t) = z^u(t) \wedge f(\varphi(t)), \quad t \leq 0.$$

注意 $W_{\mu}^s(t)$ 是 (159) 的解 ($t \geq 0$), 把它代入 (159), 对 μ 求导后取 $\mu = 0$, 得到

$$(170) \quad \frac{dz^s(t)}{dt} = \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} z^s(t) + g(\varphi(t), 0), \quad t \geq 0.$$

因此, 把 (??) 对 t 求导, 再利用 (170) 和 (160) 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta^s(t) &= \frac{dz^s(t)}{dt} \wedge f(\varphi(t)) + z^s(t) \wedge \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \\ &= \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} z^s(t) \wedge f(\varphi(t)) + g(\varphi(t), 0) \wedge \\ &\quad f(\varphi(t)) + z^s(t) \wedge \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} f(\varphi(t)) \\ &= \left(\text{tr} \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} \right) \Delta^s(t) + g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t)), \end{aligned}$$

利用常数变易公式可得

$$(171) \quad \Delta^s(t) = e^{\sigma(t)} \left(\Delta^s(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t)} (g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t))) dt \right).$$

另一方面, 因为 $t \rightarrow \infty$ 时 $\phi(t) \rightarrow x_0$, 所以 $f(\varphi(t)) \rightarrow f(x_0) = 0$, 且趋于零的衰减率为 $e^{\lambda_1 t}$, 这里 λ_1, λ_2 为 X_0 在双曲鞍点 x_0 的线性部分矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ 的特征根, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. 再次利用 [Sh] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数的定理可知, 当 $t \geq 0$

时, $z^s(t)$ 有界. 从而由 (??) 知, $t \rightarrow \infty$ 时 $\Delta^s(t) \sim e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$. 记 $\sigma_0 = \text{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, 则易知 $\lambda_1 < \sigma_0 < \lambda_2$, 故当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e^{-\sigma(t)} \sim e^{-\sigma_0 t}$, 因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha(t)} \Delta^s(t) = 0,$$

从而由 (171) 式及上式得到

$$\Delta^s(0) = - \int_0^{+\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt,$$

同理可得

$$\Delta^U(0) = - \int_0^{-\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt.$$

从 (161), (165) 和 (??) 易知: $d(0) = 0, d'(0) = \Delta^U(0) - \Delta^S(0) = \Delta$. 定理得证. \square

由定理 4.1, 定理 4.2 和定理 4.3 立即得到

定理 4.4. 设 X_μ 由 (159) 给定, X_0 以 x_0 为双曲鞍点, 且有顺 (或逆) 时针定向的同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\eta| < \delta$ 时,

- (1). 若 $\sigma_0 \mu \Delta > 0$ (或 < 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 η - 领域内恰有一个从 Γ_0 分岔出来的极限环. 当 $X_\mu < 0$ 时, 它是稳定的; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, 它是不稳定的.
- (2). 若 $\sigma_0 \mu \Delta < 0$ (或 > 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 η - 领域内不存在极限环.

注意在 Δ 的表达式中含有 $\phi(t)$, 这使应用定理 4.4 受到限制. 但在某些情形下无须求 $\phi(t)$ 便知 $D(t)$ 是定号的, 从而 Δ 与 $D(t)$ 有相同符号, 参见下面的例子.

例 4.1. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

以原点为双曲鞍点, 有顺时针定向的同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, 则对充分小的 $|\mu|$, 当 $\mu \sigma_0 > 0$ 时, 扰动系统

$$(172) \quad \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) - \mu Q(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \mu P(x, y), \end{cases}$$

在 Γ_0 的小领域内恰有一个极限环 (其稳定性由 σ_0 的符号决定); 而当 $\mu \sigma_0 < 0$ 时, (172) 在 Γ_0 附近没有极限环.

事实上,

$$D(t) = \det \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = (P^2 + Q^2)|_{x=\varphi(t)} \geq 0,$$

并且等号仅在个别点上成立, 因此 $\Delta > 0$. 利用定理 4.4, 上面的结论立即可得.

在上面的定理 4.2 和定理 4.4 中都有条件 $\sigma_0 \neq 0$. $\sigma_0 = 0$ 称为**临界情形**, 此时称鞍点为**细鞍点**, 这就出现了**退化同宿分岔**. Roussarie[R2] 和 Joyal[Jo] 分别讨论了从(退化的)同宿分岔出多个闭轨的问题. 他们的基本思想是在奇点附近利用鞍点的性质, 与大范围的微分同胚相结合, 得出 Poincare 映射的表达式, 从而在退化程度较高时, 可以经过逐次适当的扰动, 反复改变同宿轨内侧的稳定性, 产生多个闭轨, 并在最后一次扰动时, 使同宿轨破裂面产生最后一个闭轨. 此时, 系统 (159) 右端的扰动项 g 中除了 μ 外还含有其他参数. 由于介绍退化情形的同宿分岔需要较大篇幅, 此处从略. 但对于 Hamilton 向量场的扰动系统, 我们将在 ?? 定理 ?? 中介绍一个常用的结果.

罗定军、韩茂安和朱德明在 [LHZ] 和 [HLZ] 中, 对孤立和非孤立同宿轨在扰动下产生极限环的唯一性作了详细的介绍; 冯贝叶 [F] 得出了在临界情形下判别同宿轨或异宿轨的稳定性方法; Mourtada[Mo] 对含有两个鞍点的异宿环的分岔问题进行了深入的研究.

4.1. 对参数一致的同宿分岔. 类似于对参数一致的 Hopf 分岔问题, 现在考虑含双参数 δ, μ 的平面 Hamilton 系统

$$(173) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \delta f(x, y, \mu, \delta), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \delta g(x, y, \mu, \delta), \end{cases}$$

其中 δ 为小参数; $H = H(x, y)$ 为 Hamilton 函数; 而且 H, f, g 有足够的光滑性. 设当 $0 \leq \delta \leq \delta_1$ 时, 系统有双曲鞍点 (x_δ, y_δ) , 而且存在函数 $\mu = \mu(\delta)$, 使当 $\mu = \mu(\delta)$ 时, 系统 (173) 有鞍点 (x_δ, y_δ) 的同宿轨 Γ_δ . 则在适当的条件下, 对每一个固定的 $\delta > 0$, 存在 $\varepsilon(\delta) > 0$, 使当 $|\mu - \mu(\delta)| < \varepsilon(\delta)$ 时, 在 Γ_δ 的领域内有定理 4.4 的两条结论, 我们关心的是: 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 如何保证 $\varepsilon(\delta)$ 不趋于零, 参见图 2-3. 我们不在此处给出一般的定理, 只在第三章引理 ?? 中对一类特殊的系统介绍这种对参数一致的同宿分岔的结果.

5. Poincaré 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题

本节考虑平面向量场族

$$(174) \quad (X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x) + \mu g(x, \mu),$$

其中 $f \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g \in C^r(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $r \geq 2$. 设 X_0 具有周期环域, 既存在一系列闭轨

$$\Gamma_h: \quad \{x | H(x) = h, h_1 < h < h_2\},$$

其中函数 $H \in C^{r+1}$. 我们关心的是: X_0 的哪些闭轨 Γ_{h_0} ($h_1 < h_0 < h_2$) 经扰动 ($|\mu| \ll 1$) 能成为 X_μ 的极限环 L_μ (既当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $L_\mu \rightarrow \Gamma_{h_0}$)? 并且究竟能从 Γ_{h_0} 扰动出 X_μ 的几个极限环? 这就是 Poincaré 分岔问题.

5.1. Poincaré 分岔. 本节的一个基本假设是, 闭轨族 Γ_h 关于 h (在 h_0 附近) 单调排列 (当 X_0 为 Hamilton 系统, 且 H 为相应的 Hamilton 函数时, 这个假设总是成立的.) 因此过 Γ_{h_0} 上任意一点的无切线可用 h 参数化. 设

$$(175) \quad \Gamma_h: \quad x = \varphi(t, h), \quad 0 \leq t \leq T_h,$$

其中 T_h 是 Γ_h 的周期. 为了考察当 $\mu \neq 0$ 时 X_μ 过 $\varphi(0, h)$ 的解能否成为闭轨, 我们沿 Γ_h 在 $\varphi(0, h)$ 点的法线方向 $f^\perp(\varphi(0, h))$ 取无切线 L . 设 $x = x(t, h, \mu)$ 是系统 (174) 的解, 满足初值条件 $x(0, h, \mu) = \varphi(0, h)$. 设此解当 $t = T(h, \mu)$ 时再次与 L 相交, 则由微分方程初值问题的解的唯一性知

$$(176) \quad x(t, h, 0) = \varphi(t, h), \quad T(h, 0) = T_h$$

定义后继函数

$$(177) \quad G(h, \mu) = \langle x(T(h, \mu), h, \mu) - x(0, h, \mu), f^\perp(\varphi(0, h)) \rangle,$$

则显然当 $0 \leq |\mu| \ll 1$ 时, $G(h, \mu)$ 关于 h 的零点对应于 X_μ 的闭轨, 且 $G \in C^r$.

由于 X_0 在 Γ_{h_0} 附近均为闭轨, 故利用 (176) 和 Γ_h 以 T_h 为周期, 可以从 (177) 得到

$$G(h, 0) = \langle x(T_h, h, 0) - x(0, h, 0), f^\perp(\varphi(0, h)) \rangle \equiv 0,$$

$|h - h_0| \ll 1$. 因此

$$(178) \quad G(h, \mu) = \mu(\Phi(h) + \mu\Psi(h, \mu)).$$

定理 5.1. (1). 若 $h = \bar{h}, 0 < |\mu| \ll 1$ 时, $x(t, \bar{h}, \mu)$ 为 X_μ 的闭轨, 则必有 $\Phi(\bar{h}) = 0$;

(2). 若存在自然数 $k, 1 \leq k \leq r$, 使

$$(179) \quad \Phi(\bar{h}) = \Phi'(\bar{h}) = \dots = \Phi^{(k-1)}(\bar{h}) = 0, \Phi^{(k)}(\bar{h}) \neq 0,$$

则存在 $\sigma > 0, \delta > 0$, 使当 $0 < |\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 领域内至多有 k 个闭轨, 它们是 X_μ 的极限环. 特别, 若 $\Phi(\bar{h}) = 0, \Phi'(\bar{h}) \neq 0$, 则当时, X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 领域内恰有一个极限环.

证明. (1). 若

(2).

□

6. 几类余维 2 的平面向量场分岔

在本章中, 我们将综合运用第二章所介绍的几种典型的向量场分岔的理论与方法, 讨论向量场在非双曲奇点附近所发生的几种余维 2 分岔.

考虑以 $\mu \in \mathbb{R}^m (m \geq 2)$ 为参数的向量场族

$$(X_k): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. 不妨设 $x = 0$ 是向量场 X_0 的非双曲奇点, 并设 X_0 在该点的线性部分矩阵具有二重退化性. 因此, $f(0, 0) = 0$, 且把 X_0 化到 $x = 0$ 附近的中心流形后, 其线性部分矩阵可以化为下列形式之一:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_1 \omega_2 \neq 0, \omega_i \neq k \omega_j, i, j = 1, 2, k = 1, \dots, 5$. 若平面向量场在奇点处的线性部分矩阵有二重零特征根, 并且向量场在旋转 $\frac{2\pi}{q}$ 角度时不变, 则称它有 q 阶对称性, 或称为 $1:q$ 共振. $q = 1, 2$ 时, 线性部分矩阵具有 A_1 的形式; $q \geq 3$ 时, 线性部分矩阵具有 A_2 的形式. $q \leq 4$ 称为强共振, $q \geq 5$ 称为弱共振. 除了 $q = 4$ 之外, 其它情况的余维 2 分岔的问题都已解决. 本章节 6.1—6.5 分别介绍 $q = 1, 2$, 及其 $q \geq 5$ 的情形. 在高阶项的适当非退化条件下, 扰动系统 X_μ 具有双参数的普世开折. 主要参考文献为: $q = 1$ 的余维 2 分岔见 [Bol, 2] 和 [T], 余维 3, 4 的讨论分别见 [DRSI, 2] 和 [LR1]; $q = 2$ 和 $q = 3$ 的余维 2 分岔分别见 [Ho], $q = 2$ 的余维 3, 4 的讨论分别见 [LR2] 和 [Rc]; $q \geq 5$ 的余维 2 分岔见 [T], 对 A_3, A_4 情形的讨论见 [Zol, 2]. 在专著 [CLW] 和 [HZ] 中有对所有情形的详细介绍.

6.1. 二重零特征根: Bogdanov-Takens 系统. 在第一章 1.1 中, 我们讨论过二维 C^∞ 向量场

$$(180) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(|x, y|^2)$$

它具有正规形 (见第一章例??)

$$(181) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy \end{pmatrix} + O(|x, y|^3).$$

当 $ab \neq 0$ 时, 由第一章定理??, 系统 (181) 的任意非退化开折可转化为

$$(182) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xyQ(x, \mu) + y^2\Phi(x, y, \mu), \end{cases}$$

其中 $Q, \Phi \in C^\infty, Q(0, 0) = \pm 1 = \text{sgn}(ab), \mu \in \mathbb{R}^m, m \geq 2$. 为确定起见, 取 $Q(0, 0) = 1, Q(0, 0) = -1$ 的情况可类似讨论.

6.2. 分岔图, 轨线的拓扑分类. 下面的定理是本节的第一个主要结果.

定理 6.1. 存在 \mathbb{R}^2 中 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 的领域 Δ , 使系统 (182) 在 Δ 中的分岔图有原点 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 以及下列曲线组成:

- (a): $\text{SN}^\pm = \{\mu | \mu_1 = 0, \mu_2 > 0 \text{ 或 } \mu_2 < 0\};$
- (b): $\text{H} = \left\{ \mu | \mu_1 = -\mu_2^2 + O\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right), \mu_2 > 0 \right\};$
- (c): $\text{HL} = \left\{ \mu | \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right), \mu_2 > 0 \right\};$

其中 $\text{SN}^\pm, \text{H}, \text{HL}$ 分别为鞍结点分岔曲线, *Hopf* 分岔曲线和同宿分岔曲线. 当 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta$ 时, 系统 (182) 在相空间原点 $(x, y) = (0, 0)$ 附近的轨道拓扑结构见图??

为了证明定理 6.1, 注意 $\mu_1 > 0$ 时, (182) 在原点附近无奇点; 而当 $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ 时, 由第二章例 ?? 知发生鞍结点分岔. 因此, 下面要考虑的只是 $\mu_1 < 0$ 的情形. 考虑参数及变量的替换:

$$(183) \quad \mu_1 = -\sigma^4, \mu_2 = \zeta\delta^2, x = \delta^2\bar{x}, y = \delta^3\bar{y}, t = \frac{\bar{t}}{\delta},$$

其中 $\delta > 0$. 再把 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 写回 (x, y, z) , 则 (182) 化为

$$(184) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -1 + x^2 + \delta[(x + \zeta) + \delta\Psi(x, y, \delta, \zeta)]y. \end{cases}$$

我们可以把 $(184)_\delta$ 看成是 $(184)_\delta$ 的扰动系统, 后者为 Hamilton 系统, 它有鞍点 $A(1, 0)$ 的同宿轨道, 以及该同宿轨所围的以点 $B(-1, 0)$ 为中心的周期环域 (见第二章例 (??) 及图??), 周期环域中的闭轨族可表示为

$$(185) \quad \Gamma_h : \left\{ (x, y) | H(x, y) = h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3} \right\},$$

其中

$$(186) \quad H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}.$$

当 $h \rightarrow -\frac{2}{3} + 0$ 时, Γ_h 缩向奇点 B ; 当 $h \rightarrow \frac{2}{3} - 0$ 时, Γ_h 趋于同宿轨与鞍点 A 形成的同宿环 $\Gamma_{\frac{2}{3}}$.

注意对任意的 δ , $(184)_\delta$ 都以 A, B 为奇点, 且 A 为鞍点, B 为指标 +1 的奇点. 因此, 若 $(184)_\delta$ 存在闭轨, 它必定与线段 $L = \{(x, y) | y = 0, -1 < x < 1\}$ 相交. 另一方面, 由于 Γ_h 与 L 的交点 p_h 在 L 上关于 h 单调排列. 因此, 可用 h 把 L 参数化: $L : \{p_h | p_h = L \cap \Gamma_h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}\}$.

现在我们任取 $p_h \in L$, 考虑系统 $(184)_\delta$ 过 p_h 的轨线. 设它的正向及负向延续分别与 x 轴 (第一次) 交于点 Q_3 与 Q_1 . 记 $\gamma_{(h, \delta, \zeta)}$ 为 $(184)_\delta$ 从 Q_1 到 Q_2 的轨线段 (见图 ??). 当 $\delta > 0$ 时, $\gamma(h, \delta, \zeta)$ 是系统 (184) 的闭轨, 当且仅当

$$(187) \quad F(h, \delta, \zeta) \equiv \int_{\gamma(h, \delta, \zeta)} [(\zeta + x) + \delta \Psi(x, y, \delta, \zeta)] y dx = 0.$$

证明. 注意当 $|x| < 1$ 时, $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = 1 - x^2 \neq 0$. 因此, $\gamma(h, \delta, \zeta)$ 为闭轨 $\Leftrightarrow Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow H(Q_1) = H(Q_2)$. 另一方面, 由方程 $(184)_\delta$ 可得 \square

CHAPTER 3

双曲不动点及马蹄存在性定理

本章中我们将给出关于 \mathbb{R}^2 中映射的几个定理。这些定理在第五章中是我们研究空间 \mathbb{R}^3 中鞍点同宿分岔的基础，同时这些定理也有其自身的重要价值。在??中我们将证明一个双曲不动点定理。在??中引进符号动力学的基本概念。在??中给出马蹄存在定理。在??中给出一个关于两个线性映射的复合映射的双曲性的判断引理。在??中作为?? ??中诸结果的一个应用，我们将给出 \mathbb{R}^4 中 *Birhoff – Smale* 定理的证明。

本章和下一章的主要定理在 *Sil'nikov'* 的文章 [Sil1-3] 和 *Wiggins* 的书 [Wi2] 中都能找到，但此处所有定理的证明都是独立给出的。我们力图把几何直观与数学的严密性统一起来，并给予读者一套易于掌握的方法，用以解决高维空间中其他类似的问题。

1. 双曲不动点定理

1.1. 定理的陈述. 首先我们引进一些基本概念。令

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^1\}$$

定义 1.1. 设 $C > 0$ 是一个常数，平面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上的一条 C **水平曲线**指的是一个李氏常数为 C 的 x 的函数 $y = f(x), x \in (a, b)$ 的图像。当 $-\infty < a < b < +\infty$ 时，称点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 为该曲线的**端点**。类似的， $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上一条 C **垂直曲线**指的是一个李氏常数为 C 的 y 的函数 $x = g(y), y \in (a, b)$ 的图像。特别的，当 $a = -\infty, b = +\infty$ 时，则称其为**无限 C 水平曲线**或**无限 C 垂直曲线**。

定义 1.2. 称平面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上两条不交的无限 C 水平曲线所界区域为 C **水平带域**；两条不交的无限 C 垂直曲线所界区域为 C **垂直带域**。

以下我们总是假设 μ_h, μ_v 是两个正常数，满足 $\mu_h \mu_v < 1$ 。

定义 1.3. 平面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上的区域 D 称为 (μ_h, μ_v) 矩形, 若它是一个 μ_h 水平带域与一个 μ_v 垂直带域的交, 那组 μ_h 水平对边称为**边界的水平部分**, 记作 $\partial_h D$; 那组 μ_v 垂直对边 g 称为**边界的垂直部分**, 记作 $\partial_v D$.

对 $p \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, 我们记 $T_p(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$ 为平面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 过点 p 的切空间。令

$$K_p^+ = \{\zeta_p = (\zeta_p^-, \zeta_p^+) \in T_p(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) \mid |\zeta_p^+| \geq \mu_0^{-1} |\zeta_p^-|\},$$

$$K_p^- = \{\zeta_p = (\zeta_p^-, \zeta_p^+) \in T_p(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) \mid |\zeta_p^+| \leq \mu_h |\zeta_p^-|\},$$

见图 (??).

定义 1.4. 令 $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 是一个区域. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 是一个微分同胚. 称 f 在 D 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 如果有

- (1). $DfK_p^+ \subset K_f^+(p), \forall p \in D$;
- (2). $Df^{-1}K^- \subset K^-f^{-1}(p), \forall p \in fD$; 且存在常数 $\lambda > 1$, 使得
- (3). $|(Df\zeta_p)^+| \geq \lambda |\zeta_p^+|, \forall p \in D, \zeta_p \in K_p^+$
- (4). $|(Df^{-1}\xi_p)^-| \geq \lambda |\xi_p^-|, \forall p \in fD, \xi_p \in K_p^-$

直观地讲, 映射 f 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件指的是 f 在水平方向压缩和在垂直方向拉伸, 并且它将任意 μ_0 垂直曲线变为 μ_v 垂直曲线, 而其逆 f^{-1} 将任何 μ_h 水平曲线变为 μ_h 水平曲线。

定理 1.1 (双曲不动点定理). 令 D 是平面 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上一个 (μ_h, μ_v) 矩形, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 是一个微分同胚, 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 并且有

- (1). 相交条件成立: $fD \cap D \neq \emptyset$;
- (2). 边界条件成立: $fD \cap \partial_v D = \emptyset; f\partial_h D \cap D = \emptyset$,

则 f 在 D 中有唯一双曲不动点

$$O = \prod_{i=-\infty}^{\infty} f^i D$$

上述定理的几何直观见图??.

1.2. 证明的思路. 令

$$(188) \quad \begin{aligned} D_0 &= D, & D_i &= f(D_{i-1}) \cap D \\ D_{-i} &= f^{-1}(D_{-i+1} \cap fD), & i &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

第一步证明 $D_{\pm i}$ 是 (μ_h, μ_v) 矩形, 并满足条件

$$(189) \quad \begin{aligned} \partial_k D_i &\subset \partial_h D, \quad \partial_v D_{-i} \subset \partial_v D \\ D_i &\subset D_{i-1}, \quad D_{-i} \subset D_{-i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

第二步证明 $V = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$ 和 $H = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{-i}$ 分别是端点属于 $\partial_h D$ 和 $\partial_v D$ 的 μ_v 垂直曲线和 μ_h 水平曲线。

第三步证明 $H \cap V$ 是 f 的一个双曲不动点。

见图??.

1.3. 几个引理.