目录

1. 前言

动力系统的理论，起源于对常微分方程的研究，近半个多世纪以来得到了蓬勃的发展。随着在结构稳定系统的研究中所取得的突破性进展，对结构不稳定系统的研究（既分岔理论）便受到越来越多的关注。分岔理论具有深厚的实际背景，又需借助于现代数学的深刻工具。在实际应用和数学发展的双重推动下，这一理论的前景是广阔的。

所谓分岔现象，是指依赖于参数的某一研究对象当参数在一个特定值附近作微小变化时，它的某些性质所发生的本质变换。

在自然界中，分岔现象是普遍存在的。例如，导管中的流体流动，当流速超过某个特定值时，就由层流变为湍流；在生态系统中，当一些自然条件超过某些特定状态时，便可引起生态平衡被破坏或种群灭绝。

既然分岔现象普遍存在于自然界中，因而在描述自然现象的数学模型中，分岔现象也大量存在。

例如, 描写磁腔管中磁振荡的模型

$$\epsilon\frac{d^2x}{dt}+(x^2-1)\frac{dx}{dt}+\epsilon x=b\sin t,$$

其中 $0<\epsilon\ll 1$,b 是一物理量。自本世纪 40 年代起，这个方程就引起了人们的关注。随后发现当 b 取某些特定值时, 系统有非通常意义下的吸引子, 从而引出了奇异吸引子的概念。事实上, 正是在 N.Levinson 对这个方程研究结果的启迪下，S.Smale 给出了著名的马蹄映射的例子。

又如，60 年代从气象学中提出的 Lorenz 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\delta x+\delta y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-xz+\gamma x-y,\\ \dfrac{dz}{dt}=xy-bz,\end{cases}$$

变量 $(x,y,z)\in R^3$，参数 $\delta,\gamma,b>0$, 其中 γ 是刻画气体流速的雷诺数。利用计算机研究发现，若取 $\delta=10,b=\frac{8}{3}$, 则当 γ 在三个（分岔）值 $\gamma_1\approx 24.06$ 和 $\gamma_2\approx 24.74$ 附近时，相应系统的轨道结构呈现某种”混乱” 现象。进一步的研究表明，这种看起来“杂乱无章”的现象却

有内在的规律性，这不仅给湍流的形成以新的解释，而且引出了一系列有关混沌现象的研究工作，至今还是物理和数学界关注的热点问题之一。

再如, 从生态学中提出的虫口差分模型

$$x_{n+1} = x_n(a - bx_n), a, b > -0, a - bx_n > 0,$$

经过适当变换可化为单参数一维单峰映射族

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, 0 < \mu < 2, x \in [-1, 1].$$

70 年代 M.J.Feigenbaum 对它进行了细致的研究后发现，当 μ 从 0 连续增加时, $f_\mu(x)$ 不断出现倍周期分岔点, 而且对应于出现稳定周期点的哪些分岔值具有很强的规律性，从而发现了一个新的普适常数，由此引出的相关的研究工作，也受到物理和数学界的关注。

数学上作为研究分岔现象的理论——分岔理论主要研究三类问题: 由常微分方程 (或向量场) 所定义的连续动力系统的分岔; 由映射所定义的离散动力系统的分岔；函数方程的零解随参数变化而产生的分岔。前两类分岔称为动态分岔，而第三类分岔称为静态分岔。它们既有区别，又相互联系。本书主要讨论动态分岔，特别是第一类（既向量场的）分岔.

动态分岔理论主要研究动力系统的轨道族的拓扑结构随参数变化所发生的变化及其规律。例如，奇点（或不动点）的汇聚与分离及该点附近轨道的变化；周期轨的产生与消失, 同宿轨、异宿轨 (或环) 的形成与破裂；以及一些更复杂的动力学行为（例如混沌态）的出现与消失等。

虽然分岔理论的某些方法可以追溯到 $Poinicar\acute{e}$ 时代，但在这一研究方向上取得长足的进展，只是近 30-40 年的事。迄今为止，大部分工作集中于平面上退化程度不高（既余维 ≤ 2）的分岔，也包括同宿分岔和异宿分岔问题等。分岔理论的发展很大程度上依赖于结构稳定性理论的进展，而目前只有对二维流形上的动力系统的结构稳定性有较完整的结果。因而，当相空间维数增大或系统的退化程度增大时，问题的复杂性大大增加，完整的工作尚属少见。此外，最初人们希望在分岔值附近能进行开折，既在分岔值附近存在几张超曲面，他们把参数空间分成若干开区域，每个开区域对应结构稳定的系统。但人们

逐渐认识到，在不少情况下分岔值附近不存在这样简单而理想的拓扑结构，往往只能从测度上进行描述。本书的第五章??和第六章将涉及这一问题。

本书的撰写由张芷芬主持。第一、二、三章由张芷芬和李承治执笔，第四、五章和第一章??中的光滑线性化部分由李伟固执笔，第六章由郑志明执笔，附录由李承治执笔，最后经集体讨论定稿。

下面简要介绍本书的内容安排。

第一章介绍基本概念和准备知识。我们假定读者具有常微分方程和常微分方程定性理论的基础知识。因此，对动力系统的概念只作了简略的介绍。然后通过实例引进分岔的概念及分岔问题的提法。本章还介绍了简化分岔问题的两个重要手段: 中心流形定理和正规型理论。最后介绍了普适开折与分岔的余维这两个概念。第二章介绍几类平面向量场的典型的分岔现象，如奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔等，以及研究这些问题的典型方法；还介绍了弱 Hilbert 第 16 问题。在第三章中，我们综合运用第二章介绍的理论和方法，研究了几类平面向量场的余维二分岔现象。第四章主要介绍二维映射的双曲不动点，并给出一类复杂的不变集 (Smale 马蹄) 存在性的简洁而严格的判别方法。这些结构在研究三维向量场的分岔问题中有很多应用。在第五章中，我们研究三维向量场中双曲奇点的同宿轨分岔，以及与前述 Lorenz 方程相关的一个由双曲鞍点和一个双曲闭轨形成的环的分岔。第六章介绍实二次单峰映射族在某个分岔值附近的动力性态: 在参数空间中可以存在正 Lebesgue 测度集，使相应的映射族具有非双曲的奇异吸引子。这说明从测度角度上看，非双曲的系统并不少，并且其动力学行为非常复杂。本章不属于教材的基本内容，只是向读者介绍近年来动力系统研究的这个新热点。本书最后的附录涉及到深一些的教学内容，它是为那些想对书中的某些内容 (特别是第一章??和??) 进行深究的读者准备的，使他们减少了查找参考书的麻烦。

作为分岔理论的入门教材，本书主要介绍动力系统分岔理论中一些基本概念、主要结果和常用方法，并力图通过最简单的例子涉及到这个理论的一些本质方面。我们把重点放在向量场的分岔上，但不可避免地会涉及到一些离散动力系统的情形。我们力求在选材上体现少而精的原则，因而不得不舍弃一些十分精彩但陈述冗长的结果或证明；

在着力于可读性的同时，尽量兼顾一定的理论深度；并在注重解析推理的同时，兼顾几何直观。本书的大部分材料选自有关的论文或专著，我们在书中都做了具体的说明。为了使读者易于接受，我们对这些材料做了整理和加工。例如，第三章??中大部分定理的证明和第四、五两章全部定理的证明，是作者重新给出的；在第六章大部分定理的证明中，作者对原始材料做了必要的补充。我们也在书中介绍了作者们的一些近期工作。例如，第二章对参数一致的 Hopf 分岔定理；对 Abel 积分零点个数的估计和有关高阶 Melnikov 函数的结果等。限于作者们的水平和能力，书中难免有不妥或错误之处，我们热诚欢迎读者们的批评与指正。

本书可作为大学数学系高年级本科生的选修或者相关专业研究生的基础课教材；也可供相关学科学生或科技人员当做参考书。书中的大部分内容，我们曾在北京大学讲授过，部分内容也曾在 1990 年“南开动力系统年”期间被用作教材。根据我们的经验，对于每周 3-4 学时的、一学期的课程，可以讲授第一章??-??, 第二章，第三章??, 第四章和第五章??-??; 对于每周 3 学时、两个学期的课程，则可以讲授第一章到第五章的全部内容，第六章可选讲或选读。对于初学者，我们建议在学完第一章??后立即转入第二、三章, 而第一章的其他各节可在适当时候再学，这样可能更容易接受些。

我们愿借此机会对参加过北京大学分岔理论讨论班的曾宪武、井竹君、王铎、高素志、唐云、张伟年、李宝毅、李翠萍、肖冬梅、齐东文、曹永罗、王兰宇、赵丽琴、彭临平等同志和我们的研究生们表示感谢，他们的报告和讨论使我们受益匪浅；其中有的同志还帮助我们仔细审阅了部分书稿，提出了不少好的建议，避免了一些错误。我们要特别感谢由伍卓群、黄启昌、曹策问三位教授领导的第一届国家教委理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组的各位专家，他们从审定本书的撰写计划到审议书稿都提出了很多宝贵、中肯的意见；感谢本书的主审人王铎教授和韩茂安教授，他们不仅对本书提出了很多建设性的意见，而且还提供了部分习题；感谢张恭庆教授，他在百忙中审阅了本书的附录，并提出了宝贵的意见；感谢高等教育出版社的杨芝馨同志，没有他们的辛勤工作，本书也不可能这么快与读者见面。

在撰写本书期间，作者得到国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的支持，我们也借此机会向有关方面表示感谢。

作者

1995 年 8 月于北京大学

CHAPTER 1

常见的局部与非局部分岔

本章介绍一些常见的分岔现象, 其中包括奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔、Poincare 分岔等, 其中前三种为局部分岔闭题, 后两种分别为半局部分岔和全局分岔问题。除了奇点分岔外, 本章的大部分讨论都限制在相空间为二维的情形.

1. 奇点分岔

考虑一个光滑的依赖于参数并且有奇点的向量场。当参数变动时, 我们关心奇点个数及其附近的轨道结构如何变化。这种分岔现象称为**奇点分岔**.

1.1. 一般理论. 向量场 X 的奇点 $p \in M$ 称为**非退化**的, 如果他在 p 点的线性部分算子是非奇异的, 即它的所有特征根均非零. 否则称为退化的。

光滑的依赖于变量和参数的向量场, 如果它的奇点是非退化的, 则奇点本身也光滑地依赖于参数。

证明. 设向量场由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x,\mu) \tag{1}$$

给出其中 $v \in C^r\left(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n\right), r1, k1.$ 设当 $\mu=\mu_0$ 时, $x=x_0$ 为 1 的非退化奇点, 既 $v\left(x_0,\mu_0\right)=0, \left.\frac{\partial v(x,\mu)}{\partial x}\right|_{(x_0,\mu_0)}$ 非奇异。由隐函数定理, 在 x_0,μ_0 附近存在光滑函数 $x=\Gamma(\mu)$, 使得 $\Gamma(\mu_0)=x_0$, 且 $v(\gamma(\mu),\mu)\equiv 0$. 定理得证。 □

定理 1.1说明, 当奇点非退化时, 奇点的个数在微小变化下不变, 它的位置也光滑的依赖于参数的变化。需要注意, 奇点的非退化性与双曲性是不同的概念。例如, 一个向量场在奇点处的线性部分是一对纯虚根时, 按照定义 1.1, 它是非退化的, 但它是双曲的。此时在

扰动下，虽然奇点个数 (在小领域内) 不发生变化，但其附近的轨道结构可能变化, 出现 Hopf 分岔，或 Poincare 分岔，我们将在??与??中分别予以讨论。

设 M 是 n 维紧致流形，$r1$, 则 $X^r(M)$ 中仅有非退化奇点 (它们必是孤立奇点) 或无奇点的向量场集合形成一个开稠子集.

证明. 设 $X \in X^r(M)$ 相应于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \in U(\xi), \tag{2}$$

其中 $f \in C^r(M, M), U(\xi)$ 为 M 中 ξ 点的领域. 如同第一章??的讨论，考虑投影

$$j^\circ f_2 \quad X^r(M) \to J^\circ(M, M): \quad X \mapsto (\xi, \tilde{f}),$$

其中 $\tilde{f} = f(\xi)$. 具有奇点的向量场集合在空间 $J^0(M, M)$ 中有表示式

$$S = \{(\xi, \tilde{f}) | \tilde{f} = 0\},$$

它是 $J^0(M, M)$ 中的光滑闭子流形 (因为 M 是紧空间). 设向量场 $f(x)$ 在 ξ 点非退化，既 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_\xi$ 非奇异, 从而由附录??中定理??知，$j \circ f$ 与子流形 S 横截相交。注意, 不想交也是横截. 再利用定理??, 得知仅有非退化奇点或无奇点的向量场在 $X^r(M)$ 中形成开稠子集。 □

这个定理说明, 向量场的一个退化奇点可以经过任意小的扰动转化为 (多个) 非退化奇点，或经扰动使奇点消失. 但如果我们考虑向量场族 $v(x, \mu)$, 则奇点的退化性往往是不可避免的. 事实上, 虽然小扰动可以把对应于 $\mu = \mu_1$ 的退化奇点 $x = x_1$ 扰动为非退化的, 但在 x_1 附近的 x_2 点, 相应于 μ_1 附近的 μ_2 却可能是新的退化奇点. 对一个具体的奇点分岔问题, 通常有两种处理方法: 一种是利用中心流形定理, 把问题归结在中心流形上, 见第一章例??; 另一种称为 Liapunov-Schmidt 方法, 或称为更替法 (alternative method). 为了说明这个方法的基本思想, 我们先看一种特殊情形. 设变量 $x = (y, z)$, 在 $x = 0$ 附近微分方程具有下列形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}y + f(y, z, \lambda), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}z + g(y, x, \lambda), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的特征根均为零, 而 $\boldsymbol{B}$ 的特征根均不为零; $f;g \in C^r, r2$; $f(0,0,0)=0, g(0,0,0)=0, f,g=O\left(|y,z|^2\right)$. 为了研究奇点的分布, 在 $x=0$ 和 $\lambda=0$ 附近考虑方程

$$\mathbf{A}y+f(y,z,\lambda)=0, \quad \mathbf{B}z+g(y,z,\lambda)=0 \tag{4}$$

由隐函数定理, 存在 $(y,\lambda)=(0,0)$ 的领域 U 和 C^r 函数 $z=\varphi(y,\lambda)$, 使得

$$B\varphi(y,\lambda)+g(y,\varphi(y,\lambda),\lambda)\equiv 0, \quad \forall (y,\lambda)\in U.$$

把函数 $z=\varphi(y,\lambda)$ 代入 4的第一个方程左端, 可得 C^r 函数

$$G(y,\lambda)\xrightarrow{\mathrm{d}} Ay+f(y,\varphi(y,\lambda),\lambda) \tag{5}$$

记

$$S=\{(y,\lambda)\in U|G(y,\lambda)=0\rangle, \quad S_{\lambda_0}=S\cap\{\lambda=\lambda_0\}$$

则对不同的 $\lambda, |\lambda|\ll 1, S_\lambda$ 结构的变化反应了奇点个数的变化规律. 这样就把对 4的讨论转化为对 $G(y,\lambda)=0$ 的讨论, 使空间维数得到降低, 通常称(5)为方程(3)的**分岔函数**. 为了应用上的便利, 下面在更一般的框架下讨论这个问题.

1.2. Liapunov-Schmidt 方法. 设 X, Z 和 Λ 为实 $Banach$ 空间, U 和 W 分别为 X 和 Λ 中零点的领域. C^1 映射 $M: U\times W\subset X\times\Lambda\to Z$, 满足 $M(0,0)=0$. 我们要研究方程

$$M(x,\lambda)=0 \tag{6}$$

在 $U\times W$ 中 $(0,0)$ 点的某领域内解的结构. 为此, 设 $A=D_xM(0,0)$, 并记 $N(A)$和$R(A)$ 分别为 A 在 X 中的零空间和 A 在 Z 中的值域空间. 本节的一个基本假设是

(H)$N(A)$ 在 X 中存在补空间; $R(A)$ 是 Z 中的闭集, 并且在 Z 中存在补空间. (当 A 为 Fredholm 算子时, 这个假设总是成立的. 在下文的应用中, 经常是这种情形.)

因此, 在 X 上存在投影 P, 在 P 上存在投影 Q, 使得

$$R(P)=N(A), \quad R(Q)=R(A). \tag{7}$$

$\forall x \in U$, 可写成 $x = u + v$,其中$u = Px \in N(A) = X_P, v = (I - P)x \in N(P) = X_{I-P}$. 这里 I 是恒同映射, X_p 和 $X_{!-P}$ 表示投影 P 和 I-P 的值域. 显然, 方程(6)等价于

$$QM(u+v,\lambda) = 0 \tag{8}$$

$$(I-Q)M(u+v,\lambda) = 0 \tag{9}$$

定义映射 $\psi : X_P \times X_{I-P} \times \Lambda \to R(A)$,

$$\psi(u,v,\lambda) = QM(u+v,\lambda)$$

则 $\phi(0,0,0) = 0$, 且$\mathrm{D}_v\psi(0,0,0) = A|_{\mathcal{N}(P)}$ 是 $N(P)$ 与 $R(A)$ 间的同构. 由隐函数定理, 存在 X_p 在原点的领域 U_0, X_{I-P} 在原点的领域 V_0, Λ 在原点的领域 W_0, 以及 C^1 映射 $v^* : U_0 \times W_0 \to V_0$, 使 $U_0 \times W_0 \subset U, W_0 \subset W$, 且

$$QM\left(u + v^*(u,\lambda), \lambda\right) \equiv 0, \quad \forall (u,\lambda) \in U_0 \times W_0,$$

并且 $v^*.(0,0) = 0, D_u v^*(0,0) = 0$. 利用 v^*, 定义 C^1 映射 $x^* : U_0 \times W_0 \to U$, 和 C^1 映射 $G : U_0 \times W_0 \to N(Q)$,

$$x^*(u,\lambda) = u + v^*(u,\lambda) \tag{10}$$

$$G(u,\lambda) = (I-Q)M\left(u + v^*(u,\lambda), \lambda\right) \tag{11}$$

容易验证,$x^*(0,0) = 0, D_u x^*(0,0) = I_{M(A)}, G(0,0) = 0, \mathrm{D}_u G(0,0) = 0$. 总结上面的讨论, 我们有下面的结果. 如果条件 (H) 成立,U_0, V_0, W_0 如上. 则 $\forall u \in U_0, x \in U_0 \times V_0 \subset X$, 和$\lambda \in W_0 \subset \Lambda$, 如下两组结论等价

- $Px = u, \quad M(x,\lambda) = 0;$
- $x = x^*(u,\lambda), \quad G(u,\lambda) = 0;$

其中 x^* 与 G 分别有(**??**)和 eqref2.1.9 定义.

定理 1.2说明, 原来的奇点分岔问题 $M(x,\lambda) = 0$ 转化为求解**分岔方程**$G(u,\lambda) = 0$. 注意 $x \in X, M(x,\lambda) \in Z$, 而 $u \in X_P = N(A), G(u,\lambda) \in Z_{I-\mathrm{Q}} = N(Q)$, 因而使问题的定义域及值域都作了显著的约化. 这就是 Liapinov-Schmidt 方法的核心思想.

现在我们把上面的一般理论用于 ^{n} 上的向量场奇点分岔问题. 考虑依赖于参数 λ 的向量场

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,\lambda), \tag{12}$$

其中 $f\in C^r\left(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^n\right), r2; f(0,0)=0, \mathrm{D}_xf(0,0)=\boldsymbol{A}$. 考虑奇点分岔问题, 就是要在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k$ 的原点附件考察方程

$$f(x,\lambda)=\boldsymbol{A}x-N(x,\lambda)=0 \tag{13}$$

其中 $N\in C^r\left(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^n\right), N(0,0)=0, \mathrm{D}_xN(0,0)=0$. 与前面的一般情况对比, 此时有 $X=Z=\mathbf{R}^n, \Lambda=\mathbf{R}^k$. 假设又有 $\dim r(\boldsymbol{A})=\operatorname{codim}R(\boldsymbol{A})=1$, 则存在投影 $P,Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, 满足(7). 从而存在 $u_0\in N(A), w_0\in N(Q)$, 使

$$N(\boldsymbol{A})=\operatorname{Span}\left\{\boldsymbol{u}_0\right\},\quad N(\boldsymbol{Q})=\operatorname{Span}\left\{w_0\right\rangle.$$

从上面的一般理论知道, 存在 $\delta>0,\sigma>0$ 和 G^r 函数 $v=v^*(a,\lambda)\in X_{I-P}$, 满足 $v^*(0,0)=0, D_av^*(0,0)=0$, 使当 $|a|<\delta, |\lambda|<\sigma$ 时,

$$\mathbf{Q}f\left(au_0+v^*(a,\lambda),\lambda\right)\equiv 0.$$

由定理 1.2, $x=au_0+v, v\in X_{I-P}$ 是(13)的解, 当且仅当 $v=v^*(a,\lambda)$ 且 (a,λ) 满足**分岔方程**

$$g(a,\lambda)=0,$$

这里**分岔函数** g 由下式定义:

$$g(a,\lambda)w_0=(I-Q)f\left(au_0+v^*(a,\lambda),\lambda\right) \tag{14}$$

用 Liapunov-Schmidt 方法重新考虑第一章例**??**. 我们考虑 ^{2} 中一类更广泛的微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta y+x^2+xy(1+\varphi(x))+y^2\Phi(x,y)\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\beta\neq 0, \varphi, \Phi\in C^\infty, \varphi(0)=0$. 考虑它的奇点 $(0,0)$ 在扰动下的分岔问题. 此时线性部分矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&\beta\end{pmatrix}, \dim N(\boldsymbol{A})=$

$\operatorname{codim} R(\boldsymbol{A})=1$. 取满足(7)的投影 $P, Q \cdot \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. 令

$$u_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, w_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, s_0=\begin{pmatrix}1\\\beta\end{pmatrix}$$

则

$$N(\boldsymbol{A})=X_P=\operatorname{Span}\{u_0\}, X_{I-P}=\operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_0\}$$

$$R(\boldsymbol{A})=R(Q)=\operatorname{Span}\{s_0\}.$$

取 $N(Q)=\operatorname{Span}\{w_0\}$. 函数 $v=v^*(a)=\begin{pmatrix}0\\v_2\end{pmatrix}\in X_{I-P}$ 由方程 $Qf\left(au_0+v^*(a)\right)=0$ 确定, 既

$$0=Q\left\{v_2 s_0+\left[a^2+av_2(1+\varphi(\alpha))+y^2\Phi\left(\alpha, v_2\right)\right] w_0\right\}=v_2 s_0.$$

因此 $v=v^*(a)\equiv 0$. 把它代入(14), 得到

$$\begin{aligned} g(a) w_0 &=(I-Q) f\left(a u_0+v^*(a)\right) \\ &=(I-Q) f\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=(I-Q)\begin{pmatrix}0\\a^2\end{pmatrix}=a^2 w_0 \end{aligned}$$

从而分岔函数 $g(a)=a^2$.

如果我们考虑方程(**??**)的 C^2 扰动, 扰动参数为 λ, 则扰动后方程的分岔函数 $g(a,\lambda)$ 满足 $g(a,0)=a^2$. 利用隐函数定理易知, 存在 $\delta>0$ 和 C^0 函数 $a=a(\lambda)$, 使得 $a(0)=0, D_a g(a(\lambda),\lambda)\equiv 0, \mathrm{D}_a^2 g(a(\lambda),\lambda)\neq 0, \forall|\lambda|<\delta$. 利用 Taylor 公式可得, 当 $|\lambda|\ll 1, |a-a(\lambda)|\ll 1$, 有

$$g(a,\lambda)=\mu(\lambda)+D_a^2 g(a(\lambda),\lambda)(a-a(\lambda))^2+o\left(|a-a(\lambda)|^2\right)$$

其中 $\mu(\lambda)=g(a(\lambda),\lambda)$. 因此, 在 $(a,\lambda)=(0,0)$ 附近, 方程 $g(a,\lambda)=0$ 当 $\mu(\lambda)\mathrm{D}_a^2(0,0)<0$ 时有两个零点. 应用定理 1.2可知, 原系统(**??**)在扰动下发生鞍结点分岔. 注意, 当扰动方程为 C^∞ 时, 最后的讨论可从第一章定理**??**直接得到. 本节中讨论的奇点分岔问题, 主要着重于奇点个数随参数变动而发生变化的规律. 实际上, 在奇点个数发生变化的同时 (甚至在奇点个数不变时, 见附注**??**), 轨道结构还可能发生其他变化. 例如闭轨、同宿轨、异宿轨等的产生或消失. 这些情形在下章中将会看到.

2. 闭轨分岔

考虑微分方程族

$$(X_\lambda): \quad \frac{dx}{dt} = v(x,\lambda) \tag{16}$$

其中 $v \in C^r\left(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n\right), r1, k1$. 设 X_0 有一条孤立闭轨 γ. 当 $\lambda \neq 0, |\lambda| \ll 1$ 时, 我们关心 X_λ 在 γ 的领域内是否还有闭轨? 有几条闭轨? 这就是**闭轨分岔**问题. 当 γ 为双曲闭轨时, 问题是平凡的 (见第一章**??**). 因此, 我们要找到一些方法, 来判别 γ 的双曲性, 以及当 γ 非双曲时如何研究闭轨的分岔问题. 至于 γ 为方程(16)的非孤立闭轨的情形, 我们留待**??**中讨论.

从原则上说, 可以把闭轨分岔问题转化为它的 Poincare 映射的不动点的不动点的分岔问题, 从而可利用上节的方法, 事实上, 任取 $p \in \gamma$, 存在过 p 的 $n-1$ 维" 无切截面" $U' \subset U$, 按第一章定义**??**所述, 可定义 Poincare 映射 $P: U' \times W \to U$, 它是 C^r 的, 其中 W 是 $\mathbf{R}^k$ 中原点的领域, 满足 $P(p,0) = p$. X_λ 的闭轨相应于 $M(x,\lambda) = \underline{\mathrm{d}} P(x,\lambda) - x$在$(x,\lambda) \in U' \times W$ 内的零点. 因此,**??**中的方法都是适用的. 注意, 如果把坐标原点平移到 p 点, 就会满足**??**中 $M(0,0) = 0$ 的条件.

在解决具体问题时, 困难在于如何实施上述原则. 下面, 我们就平面向量场的情形作进一步的讨论, 顺便介绍曲线坐标方法和某些重要结论.

考虑平面上的微分方程族

$$(X_\lambda): \frac{dx}{dt} = v(x,\lambda) \tag{17}$$

其中 $v \in C^r\left(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^2\right), r2, k1$. 设 X_0 有闭轨 γ, 它有如下的参数表示

$$\gamma: \quad x = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

设 γ 以 T 为周期, 并且为负定向, 既当 t 增大时,$\varphi(t)$ 沿 γ 顺时针方向旋转. 取 γ 在 $\varphi(t)$ 点沿外法向的单位向量

$$\zeta(t) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

由 $\zeta(t) \perp \varphi'(t)$及$|\zeta(t)| = 1$ 易知, $\forall 0 t T$,

$$\langle \zeta(t), \varphi'(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle \zeta(t), \zeta'(t) \rangle \equiv 0, \tag{19}$$

其中 $\langle ;\dot{} \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的内积. 取坐标变换

$$x = \varphi(s) + \xi(s)n \tag{20}$$

其中 x 在 γ 附近; $0sT, |n| \ll 1$. 坐标 (s,n) 可以这样理解: 从 $\varphi(0)$ 沿 γ 经过时间 s 到达 $\varphi(s)$, 再从 $\varphi(s)$ 点沿 γ 的外法向 $\xi(s)$ 移动长度 n 到达 x 点 (当 n<0 时, 表示向内法向移动), 见图**??**. 注意,{ n= 常数} 与 {s= 常数} 在平面上形成蛛网形坐标曲线 (见图**??**), 称 (s,n) 为**曲线坐标**. 我们先把方程(17)转换成曲线坐标系下的方程, 然后建立 Poincare 映射. 把(20)对 t 求导, 并应用(**??**)得

$$v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\varphi'(s) + \xi'(s)n)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \zeta(s)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

分别以 $\zeta(s)$及$\varphi'(s)$ 对上式作内积, 利用**??**及 $|\zeta(s)| = 1$ 得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle,$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle}{|\varphi'(s)|^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle}$$

消去 t 得

(22)

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\left(|\varphi'(s)|^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle\right) \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \xi(s)n, \lambda) \rangle}{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \xi(s)n, \lambda) \rangle} \overset{\mathrm{d}}{=} F(n, s, \lambda),$$

由于 $x = \varphi(s)$ 为 X_0 的解, 故

$$\varphi'(s) = v(\varphi(s), 0); \tag{23}$$

利用(23)和(**??**), 可从(**??**)算得

$$F(0, s, 0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_{n=0,\lambda=0} = \left\langle \zeta(s), \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0)\zeta(s) \right\rangle \cdot = H(s) \tag{24}$$

从而(**??**)可写成

$$\frac{dn}{ds} = (H(s) + F_1(n, s, \lambda))\, n, \tag{25}$$

其中,$F_1|_{\lambda=0} = O(|n|)$. 因此,(25)满足初值条件 $n|_{s=0} = a$ 的解可表示为

$$n(s, a, \lambda) = a \left(\exp \int_0^s [H(t) + F_1(n(t, a, \lambda), t, \lambda)]\, \mathrm{d}t \right). \tag{26}$$

现在, 取 X_0 的闭轨 γ 上的点 $x_0 = \varphi(0)$, 过 x_0 以法线 n_0 为方向取一截线 L, 建立 26的 Poincare 映射 (见第一章定义**??**, 但此时与参数 λ 有关) $P : (a, \lambda) \mapsto n(T, a, \lambda)$, 这里的函数 $n(s, a, \lambda)$ 由 26定义. 显然,$n(T, 0, 0) = 0$. 定义**后继函数**

$$G(a, \lambda) = n(T, a, \lambda) - a, \tag{27}$$

则对每个 $\lambda, |\lambda| \ll 1, G(a, \lambda)$ 关于 a 的零点与 X_λ 在 γ 附近的闭轨相对应. 注意(17)中 $v \in C^r, r2, F$ 关于 n, λ 为 C^r 的, 关于 s 为 C^{r-1} 的, 故(26)中的解 $n \in C^r$, 从而(27)中的函数 $G \in C^r$. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\forall a \in (0, \epsilon)$, 都有 $G(a, \lambda) < 0 (> 0)$, 则称 γ 为**外侧稳定 (外侧不稳定) 的极限环**. 若存在 $\epsilon > 0$, 使 $\forall a \in (-\epsilon, 0)$, 都有 $G(a, \lambda) > 0 (< 0)$, 则称 γ 为**内侧稳定 (内侧不稳定) 的极限环**. 双侧均稳定 (均不稳定) 的极限环称为**稳定 (不稳定) 极限环**; 双侧稳定性不同时, 称 γ 为**半稳定极限环**. 从上述定义可知, 稳定 (不稳定) 极限环 w 必为孤立闭轨. 下面定义中的 γ 为非孤立闭轨.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_1, a_2 \in (0, \varepsilon)$ 使得 $G(a_1, \lambda) = 0$, 但 $G(a_2, \lambda) \neq 0$, 则称 γ 为**外侧复型极限环**. 若存在 $\epsilon > 0$, 使 $\forall a \in (0, \epsilon)$, 都有 $G(a, \lambda) = 0$, 则称 γ 为**外侧周期环域**. 类似可定义内侧复型极限环与内侧周期环域. 解析向量场不存在复型极限环.

证明. 由于在 X_0 的闭轨 $\gamma_1\{x = \varphi(t)|0tT\}$ 上无奇点, 利用方程(**??**)和 γ 的紧致性可知存在 $\delta > 0$, 使得当 $|n| < \delta, |\lambda| < \delta$ 时, $\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle$ 恒正. 因此, 方程(**??**)的右端函数 $F(n, s, \lambda)$i 解析, 从而 $G(a, \lambda)$ 解析. 由于解析函数的非孤立零点必存在一个领域, 使函数在其中恒为零. 因此定理得证. □

若存在 $\exists\epsilon>0$ 和正整数 k, lkr, 使当 $|a|<\epsilon$ 时, 有

$$G(a,0)=c_k a^k+o\left(|a|^k\right), \quad c_k\neq 0 \tag{28}$$

则称 γ 为 X_0 的 **k 重极限环**. 当 $k=1$ 时称为**单重极限环**, 当 $k>1$ 时, 称为**多重极限环**. 显然, 当 k 为奇数时, $c_k<0$ 表明 γ 为稳定的极限环, 而 $c_k>0$ 表明 γ 为不稳定的极限环; 当 k 为偶数时,γ 为半稳定的极限环. 注意, 这里说得稳定性为轨道稳定性, 而不是结构稳定性. 事实上, 与**??**的定义相对照可知, 单重环是结构稳定 (双曲) 的, 而多重环都是结构不稳定 (非双曲) 的. 为了判别 γ 是否为单重的, 我们记

$$\sigma=\int_0^T \operatorname{tr}\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)ds \tag{29}$$

若 $\sigma\neq 0$,, 则 γ 为 X_0 的单重环. 当 $\sigma<0$ 时 γ 为稳定的; 当 $\sigma>0$ 时 γ 为不稳定的.

证明. 由 (26), (27) 得到

$$G(a,0)=a\left(\exp\int_0^T [H(s)+F_1(n(s,a,0),s,0)]\,\mathrm{d}s-1\right).$$

故由 $F_1(n,s,0)=O(|n|)$, 和 $n(T,0,0)=0$, 可得

$$G'_a(0,0)=\lim_{a\to 0}\frac{G(a,0)-G(0,0)}{a}=\exp\int_0^T H(s)\mathrm{d}s-1 \tag{30}$$

另一方面, 把 (24) 式的内积按分量展开, 并利用 (18), (23) 可得

$$\begin{aligned}
H(s)&=\left\langle \xi(s),\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)\zeta(s)\right\rangle\\
&=\operatorname{tr}\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)-\frac{1}{|\phi'(s)|^2}\Phi\\
&=\operatorname{tr}\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)-\frac{1}{\langle v,v\rangle}\left\langle v,\frac{\partial v}{\partial x}v\right\rangle,\\
&=\operatorname{tr}\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)-\frac{d}{ds}\ln|v|
\end{aligned}$$

其中,$v=v(\varphi(s),0)$,

$$\Phi=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\varphi')^2+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\varphi'\varphi_2'+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Phi'\varphi_1'+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\varphi_2')^2.$$

注意到 γ 以 T 为周期, 因此

$$\int_0^T H(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s),0)\mathrm{d}s = \sigma,$$

代入 (30) 得

$$G_a'(0,0) = \mathrm{e}^{\sigma} - 1$$

当 $\sigma \neq 0$ 时, 得到 $G(0,0)=0, G_a'(0,0)\neq 0$. 故,$\gamma$ 是单重极限环. 它的稳定性与 σ 的符号之间的关系是显然的. 定理得证. □

当 X_0 的闭轨 γ 为多重极限环、复型极限环或 γ 附近为周期环域时，必有 $\sigma = 0$.

设 γ 为 X_0 的 k 重极限环 $(k1)$, 则对于 X_λ

- 存在 γ 的 (环形) 领域 U 和正数 δ, 使只要 $|\lambda| < \delta$,X_λ 在 U 内至多有 k 个极限环.
- $\forall i, 1ik, \forall \delta > 0$, 对任给的 γ 的 (环形) 领域 $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{U}$, $\exists X_0$ 的扰动系统 $X_\lambda, |\lambda| < \delta$, 使得 X_λ 在 $\boldsymbol{V}$ 内恰有 i 个极限环. 当 k 为偶数时, 上述结论可扩充至 $i = 0$.
- 当 k 为奇数时,$\forall V \subset U, \exists \delta > 0$, 使当 $|\lambda| < \delta$ 时,X_λ 在 V 内至少有一个极限环.

证明. 当扰动系统 X_λ 对应的 (17) 中的 $v \in C^\infty$ 时, 可由 Malgrange 定理 (第一章定理 **??**) 直接推得以上结论. 当 $v \in C^r$ 时, 可利用隐函数定理和中值定理证明. 详细推导从略. □

考虑 ^{2} 上的系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 + \lambda_2 y + ax^2 + bxy^2,$$

其中参数 $\lambda_2 \neq 0$. 设存在闭轨 γ, 周期为 T, 则 $\sigma = \int_0^T \operatorname{tr} \left.\frac{\partial v}{\partial(x,y)}\right|_\gamma \mathrm{d}t = \int_0^T \left.(\lambda_2 + 2bxy)\right|_\gamma \mathrm{d}t = \lambda_z T \neq 0$, 这里利用系统的第一个方程得到 $2xy\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(x^2\right)$. 因此, 这闭轨也是双曲的.

上例表明, 在一些具体问题中, 利用 (29) 计算 σ 时, 可以不必知道 $\phi(s)$ 的表达式, 这就给利用定理 2判别闭轨的双曲性提供了方便. 当 $\sigma = 0$ 时, 需要从 (27) 进一步计算 (28) 式中第一个不为零的 c_k, 以便按定义 **??**判断 γ 的重次. 这时一般来说计算量就大.

3. Hopf 分岔

当向量场在奇点的线性部分矩阵有一对复特征根, 并且随参数变化为穿越虚轴时, 在奇点附近的一个二维中心流形上, 奇点的稳定性发生翻转, 从而在奇点附近产生闭轨的现象, 称为 Hopf 分岔, 第一章 (**??**) 就是一个典型的实例. 既然 Hopf 分岔发生在二维中心流形上, 为了简单, 下面讨论二维方程.

3.1. 金典的 Hopf 分岔定理. 考虑 C^∞ 向量场

$$(X_\mu): \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(\mu)x + F(x,\mu) \tag{31}$$

其中 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2, \mu\in\mathbf{R}^1, F(0,0)=0, D_xF(0,0)=0$. 设线性部分矩阵 $\mathbf{A}(\mu)$ 有特征值 $\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$, 满足条件

(1) $[(H_1)]$ $\alpha(0)=0, \beta(0)=\beta_0\neq 0$;
(2) $\alpha'(0)\neq 0$;
(3) $\operatorname{Re} c_1\neq 0$;

其中 c_1 为向量场 X_0 的如下复正规型中的系数 (见第一章例 **??**),

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\beta_0 w + c_1|w|^2w + \cdots + c_k|w|^{2k}w + O\left(|w|^{2k+3}\right) \tag{32}$$

[Hopf 分岔定理] 设条件 1和 3成立, 则 $\exists\sigma>0$ 和 $x=0$ 的领域 U, 使得当 $|\mu|<\sigma$ 时, 方程 (31) 在 U 内至多有一个闭轨 (从而是极限环). 如果条件 2也成立, 则 $\exists\sigma>0$ 和在 $0<x_1\leq\sigma$ 上定义的函数 $\mu=\mu(x_1)$, 满足 $\mu(0)=0$, 而且

(1) 当 $\mu=\mu(x_1), 0<x_1 0$ 时, 系统 (31) 过点 $(x_1,0)$ 的轨道是它唯一的轨道. 当 $\operatorname{Re} c_1<0$ 时, 它是稳定的; 当 $\operatorname{Re} c_1>0$ 时, 它是不稳定的;
(2) 当 $\mu\alpha'(0)\operatorname{Re} c_1<0$ 时,$\mu'(x_1)>0$; 当 $\mu\alpha'(0)\operatorname{Re} c_1>0$ 时,$\mu'(x_1)<0$;

在下文中, 我们先证明一个更广泛的定理, 再证明定理 3.1.

Hopf 分岔定理有多种形式和多种证法. 例如可参考 [FLLL]. 实际应用定理 3.1时, 重要的是计算 $\mathbf{Re}c_1$. 对某些常见的方程, 导出计算公式将为应用带来方便. 下面给出一个例子.

[GH] 如果二维系统 X_0 具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix},$$

其中 $f(0,0)=g(0,0)=0$, D $f(0,0)=\mathrm{Dg}(0,0)=0, \beta_0 \neq 0$, 则有如下计算公式:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_1 = & \tfrac{1}{16}\left\{\left(f_{xxx}+f_{xvy}+g_{xxy}+g_{yyy}\right)\right. \\ & +\tfrac{1}{\beta_0}\left[f_{xy}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)-g_{xy}\left(g_{xx}+g_{yy}\right)\right. \\ & \left.\left.-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}\right]\right\}\Big|_{x=y=0} \end{aligned} \tag{33}$$

3.2. 退化 Hopf 分岔定理. 当条件 1与 3至少有一个不成立时, 仍有可能出现 Hopf 分岔, 这就是所谓的退化 Hopf 分岔问题.

考虑二维 m 参数向量场

$$(X_\mu): \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y,\mu), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y,\mu) \tag{34}$$

其中

$$x,y \in \mathbf{R}^1, \mu \in \mathbf{R}^m, f,g \in C^\infty, f(0,0,0)=g(0,0,0)=0$$

.

设在奇点 $(x,y)=(0,0)$, 系统 (34) 的线性部分矩阵有一对复特征根 $\alpha(\mu) \pm \mathrm{i}\beta(\mu)$, 满足条件 1, 则对任意自然数 k, 存在 $\delta>0$ 和光滑依赖于参数 μ 的多项式变换, 当 $|\mu|<\delta$ 时, 可以把 (34) 化为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = & [\alpha(\mu)+\mathrm{i}\beta(\mu)]w + c_1(\mu)w^2\overline{w} + \\ & \cdots + c_k(\mu)w^{2+1}\overline{w}^2 + O\left(|w|^{2k+3}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\alpha(0)=0, \beta(0)=\beta_0, c_i(0)=c_i, i=1,2,\cdots,k$, 这里 c_i 是把 X_0 化为 (32) 后的系数.

证明. 记 $\lambda(\mu)=(\lambda_1(\mu),\lambda_2(\mu))$, 其中 $\lambda_1(\mu)$ 和 $\lambda_2(\mu)$ 为复特征根 $\alpha(\mu) \pm \mathrm{i}\beta(\mu); m=(m_1,m_2)$, 其中 m_1,m_2 为自然数; $M_k \xrightarrow{\mathrm{d}} \{m|2m_1+m_2 2k+2\}$; 并且

$$(m,\lambda(\mu)) = m_1\lambda_1(\mu) + m_2\lambda_2(\mu)$$

. 由条件 1知, $\lambda_1(0) = (m, \lambda(0))$ 给出 $2k+2$ 阶的共振条件, 当且仅当 $m \in M^* \xrightarrow{\mathrm{d}} \{m|m_1 = m_2+1, m_3 = 1, \cdots, k\} \subset M_k$. 由于 $\lambda_j(\mu)$ 是光滑函数 (j=1,2), 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|\mu| < \delta$ 时, $\lambda_1(\mu) \neq (m, \lambda(\mu))$, 当 $m \in M_k \backslash M^*$. 因此, 用第一章定理 **??**和例 (**??**) 同样的推理可得引理的结论. $\square$

称 X_0 以 $(x, y) = (0, 0)$ 为 **k 阶细焦点** $(k \geq 1)$, 如果条件 1成立, 并且把 X_0 化成正规形 (32) 后, 满足条件

$$\mathrm{Re}\, c_1 = \cdots = \mathrm{Re}\, c_{k-1} = 0, \mathrm{Re}_{c_k} \neq 0 \tag{36}$$

设向量场 X_0 以 $(0,0)$ 点为 k 阶细焦点, 则 X_0 在扰动下可发生 k **阶 Hopf 分岔**, 既

(1) 对它的任一开折系统 X_μ, 存在 $\sigma > 0$ 和 $(x, y) = (0, 0)$ 点的领域 U, 使得当 $|\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 U 内至多有 k 个极限环;
(2) 对任意整数 $j, 1jk$, 任意常数 σ^*, $0 < \sigma^* < \sigma$, 以及 $(x, y) = (0, 0)$ 的任意领域 $U^* \subset U$, 存在一个开折系统 X_μ^*, 使得 X_μ^* 在 U^* 内恰有 j 个极限环, 其中 $|\mu| < \sigma^*$.

RS. 由引理 3.2, 可经光滑依赖于参数的多项式变换化为 (35). 对 (35) 及其共轭方程引入极坐标, 注意 $r^2 = w\overline{w}, \mathrm{e}^{2\varphi\mathrm{i}} = w\overline{w}^{-1}$, 可得到

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + \mathrm{Re}\left(c_1(\mu)\right)r^3 + \cdots + \mathrm{Re}\left(c_k(\mu)\right)r^{2k+1} + O\left(r^{2k+3}\right) \\ \dot{\varphi} = \beta(\mu) + O\left(r^2\right) \end{cases} \tag{37}$$

由于 $\beta \neq 0$, 所以当 $|\mu| \ll 1$ 时, 可从 (37) 得到,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = h_0(\mu)r + h_1(\varphi, \mu)r^2 + \cdots + h_k(\varphi, \mu)r^{2k+1} + O\left(r^{2k+3}\right) \tag{38}$$

其中 $r \ll 1$, 并且

$$h_0(\mu)=\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)},$$

$$h_1(\varphi,\mu)=\frac{\operatorname{Re}\left(c_1(\mu)\right)}{\beta(\mu)}+\eta_{1,0}\alpha(\mu),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_k(\varphi,\mu)=\frac{\operatorname{Re}\left(c_k(\mu)\right)}{\beta(\mu)}+\eta_{k,k-1}\operatorname{Re}\left(c_{k-1}(\mu)\right)+$$

$\cdots+\eta_{k,1}\operatorname{Re}\left(c_1(\mu)\right)+\eta_{k,0}\alpha(\mu),(k2),$

这里 $\eta_{i,j}=\eta_{i,j}(\varphi,\mu)$ 是 $\varphi\in[0,2\pi]$ 和 μ(在 0 附近) 的光滑函数. 当 $\mu=0$ 时, (38) 成为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\operatorname{Re}c_k}{\beta_0}r^{2k+1}+O\left(r^{2k+3}\right) \tag{39}$$

在 x_1 轴上建立方程 (38) 的 Poincare 映射 $P(x_1,\mu)$, 并令

$$V\left(x_1,\mu\right)=P\left(x_1,\mu\right)-x_1, \tag{40}$$

显然,

$$V\left(x_1,\mu\right)=V(r,\mu), text\ x_10. \tag{41}$$

$V\left(x_1,\mu\right)$ 在 $x_1>0$ 的零点个数对应于方程 (38) 非零周期解的个数.

令函数

$$R(r,\varphi,\mu)=u_1(\varphi,\mu)r+u_2(\varphi,\mu)r^2+\cdots+u_{2k+1}(\varphi,\mu)r^{2k+1}+\cdots$$

是 (38) 满足 $R(r,0,\mu)=r$ 的解; 而函数 $\psi(r,\varphi)$ 是方程 (39) 满足 $\psi(r,0)=r$ 的解, 则有

$$P\left(x_1,0\right)=\psi(r,2\pi)=R(r,2\pi,0)$$

. 由此可知, 当 x_10 时

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(0,0)=\frac{\partial P}{\partial x_2}(0,0)-1=\frac{\partial\psi}{\partial r}(0,2\pi)-1, \tag{42}$$

$$\frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0,0)=\frac{\partial^m P}{\partial x_1^m}(0,0)=\frac{\partial^m\psi}{\partial r^m}(0,2\pi),m>1. \tag{43}$$

由于 $\phi(r,\varphi)$ 是方程 (39) 的解, 我们有

?????????????????????????????????? 因此

(44)
$$\left.\frac{\partial^m}{\partial r^m}\psi(r,2\pi)\right|_{r=0}=\begin{cases}1, & 当m=1,\\ 0, & 当1<m<2k+1,\\ 2\pi[(2k+1)!]\dfrac{\mathrm{Re}c_k}{\beta_0}\neq 0, 当m=2k+1.\end{cases}$$

由 (42) 和 (44) 可得

$$\frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0,0)=\begin{cases}0, & 当1m<2k+1\\ 2\pi[(2k+1)!]\dfrac{\mathrm{Re}\,c_k}{\beta_0}, & m=2k+1.\end{cases}\tag{45}$$

注意方程 (38) 与 (39) 右端的函数当 $r=0$ 时恒为零, 并可以光滑地开拓到 $r<0$. 因此 $V\left(x_1,\mu\right)=P\left(x_1,\mu\right)-x_1$ 在 $\left(x_1,\mu\right)=(0,0)$ 的领域内是光滑函数, 由条件 (45), 利用 Malgrange 定理 (第一章定理 (**??**)), 在 $\left(x_1,\mu\right)=(0,0)$ 附近存在光滑函数 $h\left(x_1,\mu\right), h(0,0)\neq 0$, 以及对 x_1 的 $2k+1$ 阶多项式函数 $Q(x_1,\mu)$, 使

$$V\left(x_1,\mu\right)=Q\left(x_1,\mu\right)h\left(x_1,\mu\right).$$

另一方面,$V(0,\mu)\equiv 0$, 且 $V(x_1,\mu)$ 对 x_1 的正根和负根成对出现 (这里要用到, 当 (x_1,μ) 在 $(0,0)$) 附近的一个小领域内, $V(x_1,\mu)$ 对 x_1 至多有 k 个正根, 定理的结论 1得证.

为了证明结论 2, 我们假设 X_0 以 $x=0$ 为 k 阶细焦点, 既它具有如下的正规形

$$\dot z=\mathrm{i}\beta_0 z+c_k|z|^{2k}z+O\left(|z|^{2k+3}\right)\xrightarrow{d}F(z),\quad \mathrm{Re}\,c_k\neq 0$$

取它的扰动系统

$$\dot z=F(z)+\mu_{k-j}|z|^{2(k-j)}z+\cdots+\mu_{k-1}|z|^{2(k-1)}z,\tag{46}$$

其中 $\mu_0\in\mathbf{R}, k-jmk-1, j$ 固定 $(1jk)$. 化为极坐标方程

$$\dot r=\mu_{k-j}r^{2(k-j)+1}+\cdots+\mu_{k-1}r^{2k-1}+\mathrm{Re}\,c_k r^{2i+1}+O\left(r^{2k+3}\right)\tag{47}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{d}} G\left(\mu_{k-j},\cdots,\mu_{k-1};\mathrm{r}\right).\tag{48}$$

为了使系统 (46) 存在 j 个闭轨, 我们按下述方式依次选取 $\mu_{k-1},\cdots,\mu_{k-j}$, 设 $\operatorname{Re}c_k>0$ (当 $\operatorname{Re}c_k<0$ 时, 讨论是类似的), 则可选取 $0<r_k<1$ 使

$$G(0,\cdots,0;r_k)>0.$$

选 $\mu_{k-1}<0,|\mu_{k-1}|\ll\operatorname{Re}c_k$, 及 $r_{k-1}\in(0,r_k)$, 使得

$$G(0,\cdots,0,\mu_{k-1};r_k)>0,\quad G(0,\cdots,0,\mu_{k-1},r_{k-1})<0.$$

类似地, 可选 $\mu_{k-2},r_{k-2},\cdots,\mu_{k-j},r_{k-j}$, 使得 $\operatorname{Re}c_k,\mu_{k-1},\cdots,\mu_{k-j}$ 具有交替的符号, 并且 $0<|\mu_{k-j}|\ll\cdots\ll|\mu_{k-1}|\ll|\mathrm{Re}c_k|,0<r_{k-j}<\cdots<r_{k-1}<r_k$, 使得

$$\dot r>0\text{当}r=r_k,r_{k-2},\cdots$$
$$\dot r<0\text{当}r=r_{k-1},r_{k-3},\cdots$$

由 Poincare-Bendixson 环域定理, 扰动系统 (46) 至少存在 j 个极限环.

这里 r_k 的选取使产生的极限环都在 U^* 内, 而 μ 的选取满足 $|\mu|<\sigma^*$. 我们断言, 能对任意的 $\sigma>0$ 和 $r=0$ 的领域 U, (46) 在 U 内多于 j 个极限环, 则我们可以仿照上面的方法选取 $\mu_{k-j-1},r_{k-j}-1,\cdots,\mu_1,r_1$ 以及 a,r_0, 从而在 U 内的极限环总数大于 k, 这与结论 1矛盾. 至此, 定理 3.2证毕. □

定理 3.1的证明. 当 $k=1$ 时, 可以从定理 3.2得到 3.1. 事实上, 从定理 3.1的条件 3和 2得知 $x=0$ 是方程 (32) 的一阶细焦点, 因此定理 3.1的前一部分结论成立. 再设条件 1也成立, 由 (38)- (41) 可知, 后继函数

$$V(x_1,\mu)=x_1\tilde V(x_1,\mu),\tag{49}$$

其中

$$\tilde V(x_1,\mu)=\left[\exp\left(2\pi\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}\right)-1\right]+u_2(2\pi,\mu)x_1+O\left(x_1^2\right),\tag{50}$$

再由 (45) 可知

$$\tilde V(x_1,0)=2\pi\frac{\mathrm{Re}_1}{\beta_0}x_1^2+O\left(x_1^3\right).\tag{51}$$

由 (50) 和条件 1可知

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0,0)=\frac{2\pi}{\beta(0)}\alpha'(0)\neq 0. \tag{52}$$

利用隐函数定理, 存在 $\sigma>0$ 和 $0x_1\sigma$ 定义的光滑函数 $\mu=\mu(x_1)$, 满足 $\mu(0)=0$ 和

$$\tilde{V}\left(x_1,\mu\left(x_1\right)\right)\equiv 0 \tag{53}$$

至此, 定理 3.1的结论 1得证. 为了证明结论 2, 从 (53) 求导得到

(54)

$$\begin{cases}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}+\frac{\tilde{\partial}\tilde{V}}{\partial \mu}\mu'\left(x_1\right)=0\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial\mu\partial x_1}\mu'\left(x_1\right)+\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial\mu^2}\left(\mu'\left(x_1\right)\right)^2+\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\mu}\mu''\left(x_1\right)=0\end{cases}$$

利用 (51) 及条件 3可得

$$\mu'(0)=0\quad \mu^{"}(0)=-2\frac{\operatorname{Re}c_1}{\alpha'(0)}$$

由此得定理的结论 2. □

从以上证明立得以下结论, 设条件 1, 2和 3成立, 则存在 $\sigma>0$ 和 $x=0$ 的领域 U, 使得

(1) 当 $|\mu|<\sigma,\mathrm{Rec}_1\,\alpha'(0)\mu<0$ 时, 系统 (31) 在 U 内恰有一个极限环, 当 $\mathrm{Rec}_1\,\alpha'(0)\mu<0(>0)$ 时, 它是稳定 (不稳定) 的; 并且当 $\mu\to 0$ 时, 它缩向奇点 $x=0$;

(2) 当 $|\mu|<\sigma,\mathrm{Rec}_1\,\alpha'(0)\mu 0$ 时, 系统 (31) 在 U 内没有极限环.

在应用定理 3.2时, 需要首先判断未扰动系统 X_0 以 O 为细焦点的阶数, 也就是确定满足条件 (35) 的 k. 在实际计算时, 经常应用下面介绍的 **Liapunov 系数法**, 细节请见??????????????????????????????????[ZDHD].

设 X_0 具有如下的形式

=-$\beta_0 y+p(x,y)$,

$\dot{y}=\beta_0 x+q(x,y)$, 其中 $x,y\in,p,q=O\left(|x,y|^2\right),\beta_0\neq 0$. 我们利用待定系数法, 寻找 $V_j\in,j=1,2,\ldots$ 和函数

$$F(x,y)=\frac{\beta_0}{2}\left(x^2+y^2\right)+O\left(|x,y|^3\right),$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|(3.2)=\sum_{j=1}^{m}V_j\left(x^2+y^2\right)^{j+1} \tag{55}$$

满足上式的 $\{V_j\}$ 称为 (49) 的 Liapunov 系数. 在下面定理的意义下, 它与 Hopf 分岔系数 $\{\mathrm{Re}(C_j)\}$ 是等价的.

$V_1=\cdots-V_{k-1}=0, V_k>0$(或 <0), 当且仅当 $\mathrm{Re}\,c_1=\cdots=\mathrm{Re}\,c_{k-1}=0, \mathrm{Re}\,c_k>0$(或 <0).

定理的证明见??????????????????????????????????[BL]. 下文中, 我们把 $\{V_j\}$ 或 $\{\mathrm{Re}(c_j)\}$ 称为系统的 **焦点量**.

3.3. 应用. 考虑二维系统

=y ,

=-1+x$^2+\mu_1y+\mu_2xy+\mu_3x^3y+\mu_4x^4y$. 此系统有两个奇点 $(\pm1,0)$, 而 $(1,0)$ 是鞍点. 所以只需 (??????????????????????????????????) 考虑奇点 $(-1,0)$ 附近发生 Hopf 分岔的可能性. 令 $\xi=x+1$, 系统 (3.3) 变为 = y,

= -2 $\xi+y\left(\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_4\right)+\xi^2+\left(\mu_2+3\mu_3-4\mu_4\right)\xi_y$
$+\left(-3\mu_3+6\mu_4\right)\xi^2y+\left(\mu_3-4\mu_4\right)\xi^3y+\mu_4\xi^4y$.

这个系统在 $(0,0)$ 的线性部分矩阵有一对纯虚特征根的条件为

$$\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_4=0. \tag{56}$$

令 $y=-\sqrt{2}\eta$, 则在条件 (56) 下, 方程 (3.3) 变成 =-$\sqrt{2}\eta$,
$\dot{\eta}=\sqrt{2}\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2+\left(\mu_2+3\mu_3-4\mu_4\right)\xi\eta+$
$\left(-3\mu_3+6\mu_4\right)\xi^2\eta+\left(\mu_3-4\mu_4\right)\xi^3\eta+\mu_4\xi^4\eta$.

应用 Liapunov 系数法, 可以得到

$$\begin{array}{l} V_1=\frac{1}{16}\left(\mu_2-3\mu_3+8\mu_4\right) \\ V_2=\frac{1}{96\sqrt{2}}\left(5\mu_3-14\mu_4\right) \end{array}, 当V_1=0, V_3=\frac{14}{5}\mu_4, 当V_1=V_2=0.$$

由此应用定理 3.2, 可得下列结论:

(1) 若 $\mu_3=\mu_4=0, \mu_2\neq0$, 则当 $\mu_1=\mu_2$ 时发生一阶 Hopf 分岔, 并且系统 (3.3) 在原点附近存在唯一极限环的参数区域是

$$\mu_2\left(\mu_1-\mu_2\right)<0, 0<\left|\mu_1-\mu_2\right|\ll\left|\mu_2\right|\ll1$$

(2) 若 $\mu_4=0,\mu_3\neq 0$, 则当 $\mu_1=4\mu_3,\mu_2=3\mu_3$ 时发生二阶 Hopf 分岔, (3.3) 在原点附近存在两个极限环的参数区域是

$$\mu_3\left(\mu_2-3\mu_3\right)<0,\mu_3\left(\mu_1-\mu_2-\mu_3\right)>0$$
$$0<\left|\mu_1-\mu_2-\mu_0\right|\ll\left|\mu_2-3\mu_9\right|\ll\left|\mu_3\right|\ll 1$$

(3) 若 $\mu_4\neq 0$, 则三阶 Hopf 分岔发生的条件是

$$\mu_1=\frac{11}{5}\mu_4,\mu_2=\frac{2}{5}\mu_4,\mu_3=\frac{14}{5}\mu_4$$

而系统 (3.3) 在原点附近存在三个极限环的参数区域是

$$\mu_4\left(5\mu_3-14\mu_4\right)<0,\mu_4\left(\mu_2-3\mu_3+8\mu_4\right)>0$$
$$\mu_4\left(\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_4\right)<0$$
$$0<\left|\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_4\right|\ll\left|\mu_2-3\mu_3+8\mu_4\right|$$
$$\ll\left|5\mu_3-14\mu_4\right|\ll\left|\mu_4\right|\ll 1$$

Bautin 对右端是二次多项式的平面微分系统 (简称二次系统) 的一种标准形式导出了著名的焦点量公式 (见 [Ba]), 并证明了二次系统细焦点的阶数至多为 3 (他的第三个焦点量公式在符号及数值上都有误, 在 [QL], 及 [FLLL] 中得到纠正). 下面介绍的结果把他的公式推广到一般形式的二次系统上, 应用较方便.

[[Lc]] 设 =-y+a$_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2$
$\dot{y}=x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2$ 记

$$A=a_{20}+a_{02},B=b_{20}+b_{02},\alpha=a_{11}+2b_{02},\beta=b_{11}+2a_{20},$$
$$\gamma=b_{20}A^3-\left(a_{20}-b_{11}\right)A^2B+\left(b_{02}-a_{11}\right)AB^2-a_{01}B^3,$$
$$\delta=a_{02}^3+b_{20}^2+a_{02}A+b_{20}B,$$

则 (不计正数因子)

(57) $$V_1=A\alpha-B\beta$$

(58) $$V_2=[\beta(5A-\beta)+\alpha(5B-\alpha)]\gamma\text{如果}V_1=0,$$

(59)
$V_3=(A\alpha+B\beta)r\delta,\text{如果}V_1=V_2=0,V_k=0,\text{当}k>3,\text{如果}V_1=V_2=V_3=0.$

在最后一种情形下, 系统可积,$(0,0)$ 为中心点.

从原则上说, 当 X_0 以 O 为细焦点时, 总可以通过有限步运算确定细焦点的阶数 k. 但是当 k 较大时, 对一般系统想用 (57) 的方式来表达焦点量公式, 计算量非常大. 例如, 当把方程 (3.3) 右端关于 (x,y) 的齐二次项替换成齐三次项时, 细焦点的最高阶数为 5(见 [Si]); 但如果在 (3.3) 右端补充上三次项时, 则它的焦点量公式非常复杂; 即使利用计算机, 目前也仅推导出前几个焦点量公式. 确定焦点阶数和求焦点量公式, 与区分中心与焦点这个困难问题紧密相关. 在这里我们仅列举我国学者这方面的一些新工作: 蔡燧林、马晖 [CM] 给出了判别广义 Lienard 方程中心和焦点的较一般的方法; 黄启昌等 [HWW] 研究了泛函微分方程的 Hopf 分岔问题; 沈家齐、井竹君 [SI] 给出了判别存在 Hopf 分岔的一种新方法; 黄文灶 [Hw] 证明, 当非线性方程零点的拓扑度变号时, 会产生连通的分岔曲线, 等等. 若将条件 3换成

(1) $((H_3)')$ $F(x,\mu)\in C^\omega\left(U\times(-\sigma,\sigma),^2\right)$,

其中 U 是 ^{2} 中原点的一个开集, 则当条件 1, 2和 1成立时, 或者系统 (31) 当 $\mu=0$ 时以原点为中心, 或者当 $\mu\in(-\sigma,0)$ 或 $(0,\sigma)$ 时 (31) 在 U 内的奇点外围有唯一闭轨, 并且当 $\mu\to 0$ 时, 此闭轨缩向奇点. 这是 Hopf 分岔定理的另一种形式, 证明可以参考 [Zj]. 注意, 此处 $F(x,\mu)\in C^\omega$ 的条件不能减弱为 $F(x,\mu)\in C^\infty$, 请看下列.

=x $\sin\mu+y\cos\mu+(-x\cos\mu+y\sin\mu)\tan A, =-x\cos\mu+y\sin\mu+(-x\sin\mu-y\cos\mu)\tan A$, 其中 $A=\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}\left(2+\sin r^{-\frac{3}{2}}\right), r=\sqrt{x^2+y^2}, 0<\mu<\frac{\pi}{2}$. 容易验证, 对此系统而言, 条件 1, 2满足, 且右端函数是 C^∞ 的, 但不解析. 所以 1不满足. 由于

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big|_{3.3_\mu}=-r\cos\mu\left[\tan\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}\left(2+\sin r^{-\frac{3}{2}}\right)-\tan\mu\right]\right., (60)$$

其中 $0<r<1$. 故原点是 $(3.3)_0$ 的渐近稳定焦点.

考虑 (r,μ) 平面上由下式定义的曲线

$$\gamma:\quad \mu=\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}\left(2+\sin r^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{61}$$

它显然界于曲线 $\gamma_1 : \mu = \mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}$ 与曲线 $\gamma_2 : \mu = 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}$ 之间 (见图 2-2). 由于

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r} = r^{-\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}}\left(r^{\frac{1}{2}}\left(2+\sin r^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{2}\cos r^{-\frac{3}{2}}\right)$$

在 $r = 0$ 的任意小领域内都改变其符号，所以对任意小的 $\mu > 0$, 存在 $r_1(\mu) \neq r_2(\mu), r_i(\mu) \to 0$ 当 $\mu \to 0$, 使得 $r = r_i(\mu)$ 均满足方程 (61)$(i = 1, 2)$. 从而由 (60) 和 (61) 得到 $\frac{\mathrm{d}r_i(\mu)}{\mathrm{d}t} \equiv 0$. 这就说明对任意小的 μ, 系统 $(3.3)_\mu$ 在原点附近都至少有两条闭轨. 因此，上述结论的条件 $F(x,\mu) \in C^\omega$ 不能减弱为 $F(x,\mu) \in C^\infty$.

请读者验算，此例中对一切正整数 k, 都有 $\mathrm{Re}\, c_k = 0$ 时，奇点不见得是中心.

3.4. 对参数一致的 Hopf 分岔定理. 考虑 C^∞ 平面系统 = -$\partial H\frac{}{\partial y + \delta f(x,y,\mu,\delta), = \frac{\partial H}{\partial x} + \delta g(x,y,\mu,\delta),}$ 其中函数 $H = H(x,y)$, 参数 $\delta, \mu \in^1$, 且 δ 为小参数. 设系统有奇点 $x = 0$, 而且在该点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu,\delta) \pm i\beta(\mu,\delta)$. 若存在 $\delta > 0$ 及在 $0 < \delta < \sigma$ 定义的函数 $\mu = \mu(\delta)$, 满足条件

(H1*)

$$\alpha(\mu(\delta),\delta) = 0, \beta(\mu(\delta),\delta) \neq 0$$

,

则在一定的附加条件下，当 $\mu = \mu(\delta), \delta \in (0,\sigma)$ 时，系统 (3.4) 可在 $x = 0$ 点发生 Hopf 分岔. 对每一个固定的 $\delta \in (0,\sigma)$, 利用推论 3.2可知，存在 $\epsilon(\delta) > 0$, 使得当 $|\mu - \mu(\delta)| < \epsilon(\delta)$ 且 $\mu > \mu(\delta)$(或 $\mu < \mu(\delta)$) 时，系统无极限环. 问题是: 当 $\delta \to 0$ 时，可能有 $\epsilon(\delta) > 0$. 我们希望找到系统满足的条件，以保证存在正数 δ_0 和 $\epsilon_0 \to 0$. 我们希望找到系统满足的条件，以保证存在正数 δ_0 和 ϵ_0, 使得对所有的 $\delta \in (0,\delta_0)$, 都有 $\epsilon(\delta)\epsilon_0$. 这就是所谓的对参数一致的 Hopf 分岔问题, 见图 2-3???.

代替定理 3.1中条件 2和 3, 下文需要的条件是

(1) (H_2^*) $\alpha^* = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\frac{\partial\alpha(\mu(\delta),\delta)}{\partial\mu} \neq 0$,

(2) (H_3^*) $c_1^* = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\,\mathrm{Re}\,[c_1(\mu(\delta),\delta)] \neq 0$.

设系统 (3.4) 有奇点 (x_0, y_0), 系统在此奇点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu,\delta) \pm \mathrm{i}\beta(\mu,\delta)$. 又设存在 $\delta_1 > 0$ 和在 $0 < \delta < \delta_1$ 定义的函

数 $\mu=\mu(\delta)$, 使条件 3.4, 1和 2成立. 则存在 $\delta_2>0\,(\delta_2\delta_1)\,,\sigma>0$ 和在 $x_0<xx_0+\sigma,0<\delta<\delta_2$ 上定义的唯一函数 $\mu=h(x,\delta)$, 满足 $h(x_0,0)=0$, 而且

(1) 当 $\mu=h(x,\delta),x_0<xx_0+\sigma,0<\delta<\delta_2$ 时, (3.4) 过 xy 平面上的点 $(x_0,0)$ 的轨道是它的唯一闭轨 Γ_δ. 当 $c_1^*<0$ 时,Γ_δ 是稳定的极限环; 当 $c_1^*>0$ 时,Γ_δ 是不稳定的极限环;

(2) 当 $\alpha^*c_1^*<0$ 时,$\frac{\partial h}{\partial x}(x,\delta)>0$; 当 $\alpha^*c_1^*<0$ 时,$\frac{\partial h}{\partial x}(x,\delta)<0$.

证明. 不妨取 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 与定理 3.1的证明类似, 所不同的是以 $\mu-\mu(\delta)$ 代替那里的 μ, 而以 δ 为参数, 则那里的后继函数 $V(x,\mu)$ 变为 $V(x,\mu-\mu(\delta),\delta)$ 的形式. 注意到 $\delta=0$ 时, (3.4) 为 Hamilton 系统, 因此 $V(x,\mu-\mu(0),0)\equiv$. 代替 (49), 我们有

$$V(x,\mu-\mu(\delta),\delta)=\delta xV^*(x,\mu-\mu(\delta),\delta).$$

从条件 1, 2可得

$$\frac{\partial V^*}{\partial\mu}(0,0,0)\neq 0,\quad \frac{\partial^2V^*}{\partial x^2}(0,0,0)\neq 0.$$

对 $V^*(x,\mu-\mu(\delta),\delta)$ 在 $(x,\mu-\mu(\delta),\delta)=(0,0,0)$ 点用隐函数定理即可. 其它推理与定理 3.1的证明相同. □

在定理 3.4的条件下, 存在 $\delta_2>0\,(\delta_2\delta_1)\,,\sigma>0$ 和 (x_0,y_0) 的领域 U, 使得

(1) 当 $0<\delta<\delta_2,|\mu-\mu(\delta)|<\sigma$, 且 $\alpha^*c_1^*(\mu-\mu(\delta))<0$ 时, 系统 (3.4) 在 U 内恰有一个闭轨. 当 $c_1^*<0>0)$ 时, 它是稳定 (不稳定) 的极限环.

(2) 当 $0<\delta<\delta_2,|\mu-\mu(\delta)|<\sigma$, 且 $\alpha^*C_1^*(\mu-\mu(\delta))>0$ 时, 系统 (3.4) 在 U 内无闭轨.

在第三章 **??**中, 我们将看到这种对参数一致的 Hopf 分岔定理的作用.

4. 平面上的同宿分岔

由二维流形上的结构稳定性定理 (见第一章定理 **??**) 知道, 当存在鞍点的同宿轨 (或异宿轨) 时, 系统是结构不稳定的. 事实上, 这种

连接鞍点的轨线在扰动下可能破裂, 从而改变系统的拓扑结构. 第一章例 **??**就是一个典型的实例. 在本节里, 我们要进一步讨论, 当这种分岔产生时产生闭轨的规律.

我们先从几何上考虑, 以获得一些启示. 设平面上的单参数向量场族 X_μ 对应于如下的方程

d x$_{\overline{\mathrm{d}t=v(x,\mu)}}$, (62)

其中 $v \in C^\infty\left({}^2\times,{}^2\right)$. 设 X_0 的轨道结构如第一章图 1-9(b)??? 所示; 它有一条初等鞍点的同宿轨 Γ,Γ 内部是结构稳定焦点的吸引域. 当 $\mu \neq 0$ 时,γ 可能破裂为两条分界线 (鞍点的稳定流形和不稳定流形), 见图 $1-9$ 的 (a) 与 (c).

显然, 在图 1-9(c) 的情形, 分界线破裂的方向与破裂前 Γ 的稳定性相配合, 就构成了一个 Poincaré-Bendixson 环域, 从而系统 X_μ 存在闭轨. 当 $|\mu|$ 充分小时, 可以使这个环域充分靠近原来的同宿轨线. 因此, 我们可以认为闭轨是从 Γ 经过扰动破裂而产生的 (或反过来说, 当 $\mu \to 0$ 时, 闭轨趋于 Γ 而成为同宿轨). 这种分岔现象称为**同宿轨的分岔**, 或简称为**同宿分岔**.

考虑向量场族

$(X_k): \quad = f(x,\mu)$, (63)

中其 $f \in C^2\left({}^2\times,{}^2\right), f(0,0) = 0, X_0$ 以 $x = 0$ 为双曲鞍点 (既 $\det \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) < 0$), 并且具有同宿轨 Γ_0, 如图 2-4(a) 所示 (对情况 (b) 可类似讨论).

从前面的讨论中可以看出, 在研究同宿分岔时, 下面两个问题是重要的:

(1) 如何判断 X_0 的同宿轨 Γ_0 在其内侧的稳定性? (在第一章例 **??**中, 这是利用 Γ_0 内的焦点的稳定性得出来的. 我们希望从向量场在鞍点和 Γ_0 的特性来获得这个信息.)

(2) 如何判断 X_μ 的稳定流形和不稳定流形的相对位置?

为了解决问题 1, 我们先对 X_0 在 Γ_0 内侧引入 Poincare 映射 (见第一章定义 **??**). 取 $p_0 \in \Gamma_0, L_0$ 为过 p_0 点与 Γ_0 正交的无切线 (向内为正). 则在 p_0 附近存在一个领域 U, 使得 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 从 p 出发的轨线 $\phi(t,p)$ 经过 $t = T(p)$ 将再次与 L_0 交于一点 $P(p) = \phi(T(p), p)$(见图 2-5). 令 n_0 为沿着 L_0^+ 的单位向量, 则 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 它有如下的坐标表示

$$p = p_0 + \alpha n_0, \tag{64}$$

其中 $\alpha > 0$. 相应地,$P(p)$ 有坐标表示

$$P(p) = \varphi(T(p), p) = p_0 + \beta(\alpha) n_0, \tag{65}$$

其中 $\beta(a) \in C^1$, 只要 $0 < \alpha \ll 1$(因为 X_0是C^2 的). 定义函数

$$d(\alpha) = \beta(\alpha) - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

X_0 的同宿轨 Γ_0 称为是**渐近稳定** (或**不稳定**) 的, 如果存在 $\eta > 0$, 使得 $d(a) < 0$(或 > 0) 对所有的 $0 < a < \eta$ 成立. 注意 $\lim_{\alpha\to 0} d(\alpha) = 0$, 因此 Γ_0 的稳定性由极限

$$\lim_{\alpha\to 0} d'(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \beta'(\alpha) - 1$$

所决定: 当 $\lim_{\alpha\to 0} d^n(\alpha) < 0$(或 > 0), 也就是 $\lim_{\alpha\to 0} \beta'(\alpha) < 1$(或 > 1) 时, Γ_0 是渐近稳定 (或不稳定) 的.

引入记号

$$\sigma_0 = \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

设 X_0 具有双曲鞍点 O 及同宿轨 Γ_0, 如果 $\sigma_0 \neq 0$, 则当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_0 是渐近稳定的, 而当 $\sigma_0 > 0$ 时, Γ_0 是不稳定的.

[CH.] 如上所述, 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 可建立 X_0 在 p_0 领域的 Poincare 映射

$$P: \quad U \cap L_0^+ \to L_0, P(p) = \varphi(T(p), p),$$

并且 $p, P(p)$ 分别有表示式 (64) 和 (65). 把 (65) 式对 α 求导, 得到

$$\begin{aligned}\beta'(\alpha)n_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(T(p),p)\right]\frac{\partial T(p)}{\partial p}n_0 + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)} n_0 \\ &= f_\beta \frac{\partial T(p)}{\partial p}n_0 + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{t\to T(p)} n_0\end{aligned} \tag{66}$$

其中 $f_\alpha = f\left(\alpha n_0 + p_0, 0\right), \alpha \in$, 而 $f_\beta = f_{\beta(\alpha)}$. 注意 n_0 是沿 $f_0^\perp$ 的方向, 当 α 足够小时, $\boxed{\text{F}}$积 $\left\langle f_\beta^\perp, n_0\right\rangle \neq 0$, 在 (66) 式两端以 $f_\beta^\perp$ 作$\boxed{\text{F}}$积, 得到

$$\beta'(\alpha) = \frac{\left\langle f_\beta^\perp, \left.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)} n_0\right\rangle}{\left\langle f_\beta^\perp, n_0\right\rangle}$$

如果记

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)} n_0 = \xi f_\beta + \eta n_0, \tag{67}$$

其中 $\xi, \eta \in$, 则

$$\beta'(\alpha) = \eta. \tag{68}$$

下面, 我们设法把 $\lim_{\alpha\to 0}\eta$ 与 σ_0 建立联系. 首先, 由 f 的连续性, 可以把 f_β 表示为

$$f_\beta = \left(1+\varepsilon_1\right) f_a + \varepsilon_2 n_0, \tag{69}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ 当 $\alpha \to 0$. 另一方面, 由于

$$\varphi(T(p),p): \quad U \cap L_0^+ \to L_0, p_0 + \alpha n_0 \mapsto p_0 + \beta(\alpha) n_0,$$

它的导映射 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)}$ 把 $p_0+\alpha n_0$ 处的切向量 f_α 映到 $p_0+\beta(\alpha)n_0$ 处的切向量 f_β, 既

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)} f_\alpha = f_\beta. \tag{70}$$

由 (69), (70) 和 (67) 得出

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)} f_\beta = \left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\xi\right) f_\beta + \varepsilon_2 \eta n_0. \tag{71}$$

(71) 和 (67) 给出 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right|_{t=T(p)}$ 在基向量 (f_β, n_0) 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\xi & \xi \\ \varepsilon_2\eta & \eta \end{pmatrix},$$

从而

$$\det \left.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right|_{t=T_{(p)}} = (1+\varepsilon_1)\,\eta. \tag{72}$$

其次, 我们来计算上式左端的行列式 (它与坐标系的选取无关). 注意 $\frac{\partial}{\partial p}\varphi(t,p)$ 是变分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,p),0)u$$

的基本解矩阵, 并且 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right|_{t=0}$ 是单位矩阵, 由 Liouville 公式可知

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial p}\varphi(t,p)\right) = \exp\int_0^t \operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(t,p),0)\mathrm{d}t. \tag{73}$$

由 (68), (72) 和 (73) 最后得出

$$\beta'(a) = \frac{1}{1+\varepsilon_1}\exp\int_0^{T(p)} \operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(t,p),0)\mathrm{d}t. \tag{74}$$

条件 $\sigma_0 = \operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) < 0$ (或 > 0), 保证存在 $O(0,0)$ 的领域 V, 使得当 $x\in V$ 时, 有 $\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}f(x,0) < \frac{\sigma_0}{2} < 0$(或 $> \frac{\sigma_0}{2} > 0$). 当 $0<\alpha<\delta, \delta$ 足够小时, $T(p) = T_1 + T_2, T_1$ 是流 $\phi(t,p)$ 停留在 V 中的时间. 当 $\alpha\to 0$ 时, $T_1\to +\infty$, 而 $T_2 = T(p) - T_1$ 是有界的. 因此, 由 (74) 式容易推得

$$\lim_{\alpha\to 0}\beta'(\alpha) = 0(\text{或}+\infty), \text{当}\sigma_0 < 0(\text{或} > 0),$$

由附注 4立得定理的结论. □

设向量场 X_μ 由 (63) 给定. 假定 X_0 以 O 为双曲鞍点, 有同宿轨 Γ_0, 并且 $\sigma_0 = \operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) \neq 0$. 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\mu| < \delta$ 时, 如果 X_μ 在 Γ_0 的 η 领域内有闭轨 Γ_μ, 那么 Γ_μ 是唯一的闭轨; 并且当 $\sigma_0 < 0(> 0)$ 时, Γ_μ 是渐近稳定 (不稳定) 的.

证明. 我们只需考虑这样的闭轨 Γ_μ, 当 $\mu \to 0$ 时, 它趋于 Γ_0. 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 并取 L_0 和 n_0 同前, 则当 $|\mu|$ 足够小时, Γ_μ 必与 L_0 横截相交, 记 $p_\mu = \Gamma_\mu \cap L_0$. 对于 p_0 点附近的 $p \in L_0$, 引入坐标表示 $p = p_0 + \alpha n_0, |\alpha| < \delta$. 则有 $p_\mu = p_0 + \alpha_\mu n_0, |\alpha_\mu| < \delta$, 当 $|\mu|$ 足够小时. 对于任意固定的 μ, 可在 L_0 上 p_μ 点附近建立 X_μ 的 Poincare 映射 P_μ :

$$p = \alpha n_0 + p_0 \mapsto P_\mu(p) = \beta_\mu(\alpha) n_0 + p_0, \quad |\alpha - a_\mu| \ll 1,$$

并且 $\beta_\mu(\alpha_\mu) = \alpha_\mu$, 则 Γ_μ 的稳定性由 $\left[\beta'_\mu(\alpha_\mu) - 1\right]$ 的符号决定. 重复定理 4的证明方法, 并注意当 $\mu \to 0$ 时, $\Gamma_\mu \to \Gamma_0, \alpha_\mu \to 0$, 因此

$$\lim_{n \to 0} \beta'_\mu(\alpha_\mu) = \begin{cases} 0, \\ \text{当}\sigma_0 < 0, \\ \\ +\infty, \\ \text{当}\sigma_0 > 0. \end{cases} \tag{75}$$

这说明当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_μ 渐近稳定; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, Γ_μ 不稳定.

另一方面, 两个具有相同稳定性的闭轨不可能并列共存, 因此 Γ_μ 是 X_μ 的唯一闭轨. □

现在, 剩下要解决的就是我们在前面所提的问题 2, 既 X_0 的同宿轨 Γ_0 经扰动破裂后, 如何判断 X_μ 的稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u 的相对位置? Mel·nikov 函数就是用以描述 W_μ^s 与 W_μ^u 之间" 有向缝隙" 的判定量, 从而解决这个问题.

先把方程 (63) 改写为

$$(X_\mu): \quad = f(x) + \mu g(x, \mu), \tag{76}$$

其中 $f \in C^r(^2,^2), g \in C^r(^2 \times,^2), r \geq 2$. 设 X_0 以 x_0 为双曲鞍点, 有同宿轨 Γ_0. 设 Γ_0 有表达式

$$\Gamma_0: \quad x = \varphi(t), \quad \varphi(t) \to x_0 \text{当} t \to \pm\infty.$$

对于平面上的向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\left(\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right]$ 定义,

$$\boldsymbol{a}^{\perp}=\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\left\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^{\perp}\right\rangle.$$

容易验证, 对于任意二阶方阵 $\mathbf{A}$, 有

$$(Aa)\wedge b+a\wedge(Ab)=\operatorname{tr}A(a\wedge b). \tag{77}$$

过 Γ_0 上的 $\phi(0)$ 点截线 L, 使它沿着法向 $n(0)=(\varphi'(0))^{\perp}=f^{\perp}(\varphi(0))$. 当 $|\mu|\ll 1$ 时, X_μ 有双曲鞍点 x_μ 及其稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u. 这里 $x_\mu\to x_0$, 当 $\mu\to 0$. 利用 [SH] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数定理, 当 $|\mu|\ll 1, t\geq 0$(或$t\leq 0$) 时, X_μ 有唯一有界解 $W_\mu^s(t)(( )W_\mu^u(t))$, 它与 $\phi(t)$ 充分靠近, 且当 $t\to+\infty$(或 $-\infty$) 时, $W_\mu^s(t)$或$(W_\mu^u(t))\to x_\mu$. 为了描述 W_μ^s 与 W_μ^u 的相对位置, 我们引进下面的定义, 它可以看成是 W_μ^s 与 W_μ^u 间" 缝隙" 沿 $n(0)$ 的投影 (相差一个非零常数倍).

$$d(\mu)=\left\langle W_\mu^u(0)-W_\mu^s(0), f^{\perp}(\varphi(0))\right\rangle \tag{78}$$

令

$$D(t)=g(\varphi(t),0)\wedge f(\varphi(t))=\begin{vmatrix} f_1(\varphi(t)) & g_1(\varphi(t),0) \\ f_2(\varphi(t)) & g_2(\varphi(t),0) \end{vmatrix} \tag{79}$$

$$\sigma(t)=\int_0^t \operatorname{tr}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))\mathrm{d}t \tag{80}$$

设 $f,g\in C^r, r\geq 2, X_0$ 有同宿于双曲鞍点 x_0 的轨线 Γ_0, 则对扰动系统 X_μ, 有

$$d(\mu)=\mu\Delta+O\left(|\mu|^2\right), \tag{81}$$

其中

$$\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}D(t)\mathrm{e}^{-\sigma(t)}\mathrm{d}t, \tag{82}$$

而 $D(t),\sigma(t)$ 由 (79) 和 (80) 定义.

证明. 记

$$\frac{\partial}{\partial\mu}W_{\mu}^{s}\ (t)|_{\mu=0}=z^{s}(t),\quad t0, \tag{83}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}W_{\mu}^{u}\ (t)|_{\mu=0}=z^{b}(t),\quad t0, \tag{84}$$

$$\Delta^{s}(t)=z^{s}(t)\wedge f(\varphi(t)),\quad t0, \tag{85}$$

$$\Delta^{U}(t)=z^{U}(t)\wedge f(\varphi(t)),\quad t0. \tag{86}$$

注意 $W_{\mu}^{s}(t)$ 是 (76) 的解 $(t\geq 0)$, 把它代入 (76), 对 μ 求导后取 $\mu=0$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}z^{s}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x}s^{s}(t)+g(\varphi(t),0),\quad t0. \tag{87}$$

因此, 把 (**??**) 对 t 求导, 再利用 (87) 和 (77) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^{s}(t)=&\frac{\mathrm{d}z^{s}(t)}{\mathrm{d}t}\wedge f(\varphi(t))+z^{s}(t)\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\varphi(t))\\=&\frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x}z^{s}(t)\wedge f(\varphi(t))+g(\varphi(t),0)\wedge\\&f(\varphi(t))+z^{s}(t)\wedge\frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x}f(\varphi(t))\\=&\left(\operatorname{tr}\frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x}\right)\Delta^{s}(t)+g(\varphi(t),0)\wedge f(\varphi(t)),\end{aligned}$$

利用常数变易公式可得

$$\Delta^{s}(t)=\mathrm{e}^{\sigma(t)}\left(\Delta^{s}(0)+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\sigma(t)}(g(\varphi(t),0)\wedge f(\varphi(t))\mathrm{d}t)\right). \tag{88}$$

另一方面, 因为 $t\to\infty$ 时 $\phi(t)\to x_0$, 所以 $f(\varphi(t))\to f\left(x_0\right)=0$, 且趋于零的衰减率为 $e^{\lambda_1 t}$, 这里 λ_1,λ_2 为 X_0 在双曲鞍点 x_0 的线性部分矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\right)$ 的特征根, $\lambda_1<0<\lambda_2$. 再次利用 [Sh] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数的定理可知, 当 $t\geq 0$ 时,$z^{s}(t)$ 有界. 从而由 (**??**) 知, $t\to\infty$ 时 $\Delta^{s}(t)\sim e^{\lambda_1 t}\to 0$. 记 $\sigma_0=\operatorname{tr}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\right)$, 则易知 $\lambda_1<\sigma_0<\lambda_2$, 故当 $t\to\infty$ 时 $e^{-\sigma(t)}\sim e^{-\sigma_0 t}$, 因此有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(t)}\Delta^{s}(t)=0,$$

从而由 (88) 式及上式得到

$$\Delta^s(0) = -\int_0^{+\infty} D(t)\mathrm{e}^{-\sigma(t)}\mathrm{d}t,$$

同理可得

$$\Delta^U(0) = -\int_0^{-\infty} D(t)\mathrm{e}^{-\sigma(t)}\mathrm{d}t.$$

从 (78), (82) 和 (**??**) 易知: $d(0)=0, d'(0)=\Delta^U(0)-\Delta^S(0)=\Delta$. 定理得证. □

由定理 4, 定理 4和定理 4立即得到

设 X_μ 由 (76) 给定,X_0 以 x_0 为双曲鞍点, 且有顺 (或逆) 时针定向的同宿轨 Γ_0, 并且 $\sigma_0 \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\eta| < \delta$ 时,

(1) 若 $\sigma_0\mu\Delta > 0$(或 < 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 $\eta-$ 领域内恰有一个从 Γ_0 分岔出来的极限环. 当 $X_\mu < 0$ 时, 它是稳定的; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, 它是不稳定的.

(2) 若 $\sigma_0\mu\Delta < 0$(或 > 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 $\eta-$ 领域内不存在极限环.

注意在 Δ 的表达式中含有 $\phi(t)$, 这使应用定理 4受到限制. 但在某些情形下无须求 $\phi(t)$ 便知 $D(t)$ 是定号的, 从而 Δ 与 $D(t)$ 有相同符号, 参见下面的例子.

设 $x, y \in$, 平面系统 =P(x, y),
=Q(x, y), 以原点为双曲鞍点, 有顺时针定向的同宿轨 Γ_0, 并且 $\sigma_0 = \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) \neq 0$, 则对充分小的 $|\mu|$, 当 $\mu\sigma_0 > 0$ 时, 扰动系统
=P(x, y)-$\mu Q(x,y)$,
$\dot{y} = Q(x,y) + \mu P(x,y)$, 在 Γ_0 的小领域内恰有一个极限环 (其稳定性由 σ_0 的符号决定); 而当 $\mu\sigma_0 < 0$ 时, (4) 在 Γ_0 附近没有极限环.

事实上,

$$D(t) = \det\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = \left(P^2 + Q^2\right)\big|_{x=\varphi(t)} 0,$$

并且等号仅在个别点上成立, 因此 $\Delta > 0$. 利用定理 4, 上面的结论立即可得.

在上面的定理 4和定理 4中都有条件 $\sigma_0 \neq 0$. $\sigma_0 = 0$ 称为**临界情形**, 此时称鞍点为**细鞍点**, 这就出现了**退化同宿分岔**. Roussarie[R2] 和 Joyal[Jo] 分别讨论了从 (退化的) 同宿分岔出多个闭轨的问题. 他们的基本思想是在奇点附近利用鞍点的性质, 与大范围的微分同胚相结合, 得出 Poincare 映射的表达式, 从而在退化程度较高时, 可以经过逐次适当的扰动, 反复改变同宿轨内侧的稳定性, 产生多个闭轨, 并在最后一次扰动时, 使同宿轨破裂面产生最后一个闭轨. 此时, 系统 (76) 右端的扰动项 g 中除了 μ 外还含有其他参数. 由于介绍退化情形的同宿分岔需要较大篇幅, 此处从略. 但对于 Hamilton 向量场的扰动系统, 我们将在 ??定理 ??中介绍一个常用的结果.

罗定军、韩茂安和朱德明在 [LHZ] 和 [HLZ] 中, 对孤立和非孤立同宿轨在扰动下产生极限环的唯一性作了详细的介绍; 冯贝叶 [F] 得出了在临界情形下判别同宿轨或异宿轨的稳定性方法; Mourtada[Mo] 对含有两个鞍点的异宿环的分岔问题进行了深入的研究.

4.1. 对参数一致的同宿分岔. 类似于对参数一致的 Hopf 分岔问题, 现在考虑含双参数 δ, μ 的平面 Hamilton 系统 $=\text{-}\partial H \frac{}{\partial y+\delta f(x,y,\mu,\delta),=\frac{\partial H}{\partial x}+\delta g(x,y,\mu,\delta),}$

其中 δ 为小参数; $H = H(x, y)$ 为 Hamilton 函数; 而且 H, f, g 有足够的光滑性. 设当 $0 \leq \delta\delta_1$ 时, 系统有双曲鞍点 (x_δ, y_δ), 而且存在函数 $\mu = \mu(\delta)$, 使当 $\mu = \mu(\delta)$ 时, 系统 (4.1) 有鞍点 (x_δ, y_δ) 的同宿轨 Γ_δ. 则在适当的条件下, 对每一个固定的 $\delta > 0$, 存在 $\varepsilon(\delta) > 0$, 使当 $|\mu - \mu(\delta)| < \varepsilon(\delta)$ 时, 在 Γ_δ 的领域内有定理 4的两条结论, 我们关心的是: 当 $\delta \to 0$ 时, 如何保证 $\varepsilon(\delta)$ 不趋于零, 参见图 $2-3$. 我们不在此处给出一般的定理, 只在第三章引理 ??中对一类特殊的系统介绍这种对参数一致的同宿分岔的结果.

5. Poincare 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题

本节考虑平面向量场族

$$(X_\mu): \quad = f(x) + \mu g(x, \mu), \tag{89}$$

其中 $f \in C^r\left({}^2,{}^2\right), g \in C^r\left({}^2\times,{}^2\right), r2$. 设 X_0 具有周期环域, 既存在一系列闭轨

$$\Gamma_h: \quad \{x | H(x) = h, h_1 < h < h_2\},$$

其中函数 $H \in C^{r+1}$. 我们关心的问题是: X_0 的哪些闭轨 Γ_{h_0} $(h_1 < h_0 < h_2)$ 经扰动 $(|\mu| \ll 1)$ 能成为 X_μ 的极限环 L_μ(既当 $\mu \to 0$ 时,$L_\mu \to \Gamma_{h_0}$)? 并且究竟能从 Γ_{h_0} 扰动出 X_μ 的几个极限环? 这就是 Poincare 分岔问题.

5.1. Poincare 分岔. 本节的一个基本假设是, 闭轨族 Γ_h 关于 h(在 h_0 附近) 单调排列 (当 X_0 为 Hamilton 系统, 且 H 为相应的 Hamilton 函数时, 这个假设总是成立的.) 因此过 Γ_{h_0} 上任意一点的无切线可用 h 参数化. 设

$$\Gamma_h: \quad x = \varphi(t,h), \quad 0tT_h, \tag{90}$$

其中 T_h 是 Γ_h 的周期. 为了考察当 $\mu \neq 0$ 时 X_μ 过 $\varphi(0,h)$ 的解能否成为闭轨, 我们沿 Γ_h 在 $\varphi(0,h)$ 点的法线方向 $f^\perp(\varphi(0,h))$ 取无切线 L. 设 $x = x(t,h,\mu)$ 是系统 (89) 的解, 满足初值条件 $x(0,h,\mu) = \varphi(0,h)$. 设此解当 $t = T(h,\mu)$ 时再次与 L 相交, 则由微分方程初值问题的解的唯一性知

$$x(t,h,0) = \varphi(t,h), \quad T(h,0) = T_h \tag{91}$$

定义后继函数

$$G(h,\mu) = \left\langle x(T(h,\mu),h,\mu) - x(0,h,\mu), f^\perp(\varphi(0,h))\right\rangle, \tag{92}$$

则显然当 $0|\mu| \ll 1$ 时, $G(h,\mu)$ 关于 h 的零点对应于 X_μ 的闭轨, 且 $G \in C^r$.

由于 X_0 在 Γ_{h_0} 附近均为闭轨, 故利用 (91) 和 Γ_h 以 T_h 为周期, 可以从 (92) 得到

$$G(h,0) = \left\langle x\left(T_h,h,0\right) - x(0,h,0), f^\perp(\varphi(0,h))\right\rangle \equiv 0,$$

$|h - h_0| \ll 1$. 因此

$$G(h,\mu) = \mu(\Phi(h) + \mu\Psi(h,\mu)). \tag{93}$$

(1) 若 $h = \overline{h}, 0 < |\mu| \ll 1$ 时, $x(t,\overline{h},\mu)$ 为 X_μ 的闭轨, 则必有 $\Phi(\overline{h}) = 0$;

(2) 若存在自然数 $k, 1kr$, 使

(94) $$\Phi(\overline{h}) = \Phi(\overline{h}) = \cdots = \Phi^{(k-1)}(\overline{h}) = 0, \Phi^{(k)}(\overline{h}) \neq 0,$$

则存在 $\sigma > 0, \delta > 0$, 使当 $0 < |\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 $\Gamma_{\overline{h}}$ 的 δ 领域内至多有 k 个闭轨, 它们是 X_μ 的极限环. 特别, 若 $\Phi(\overline{h}) = 0, \Phi'(\overline{h}) \neq 0$, 则当时, X_μ 在 $\Gamma_{\overline{h}}$ 的 δ 领域内恰有一个极限环.

证明. (1) 若

(2)

□

6. 几类余维 2 的平面向量场分岔

在本章中, 我们将综合运用第二章所介绍的几种典型的向量场分岔的理论与方法, 讨论向量场在非双曲奇点附近所发生的几种余维 2 分岔.

考虑以 $\mu \in^m$ $(m \geq 2)$ 为参数的向量场族

$$(X_k): \qquad = f(x, \mu),$$

其中 $x \in^n, f^\infty(^n \times^m, ^n)$. 无妨设 $x = 0$ 是向量场 X_0 的非双曲奇点, 并设 X_0 在该点的线性部分矩阵具有二重退化性. 因此,$f(0,0) = 0$, 且把 X_0 化到 $x = 0$ 附近的中心流形后, 其线性部分矩阵可以化为下列形式之一:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_1\omega_2 \neq 0, \omega_i \neq k\omega_j, i, j = 1, 2, k = 1, \cdots, 5$. 若平面向量场在奇点处的线性部分矩阵有二重零特征根, 并且向量场在旋转 $\frac{2\pi}{q}$ 角度时不变, 则称它有 q 阶对称性, 或称为 $1 : q$ 共振. $q = 1, 2$ 时, 线性部分矩阵具有 A_1 的形式; $q \geq 3$ 时, 线性部分矩阵具有 A_2 的形式. $q \leq 4$ 陈为强共振, $q \geq 5$ 称为弱共振. 除了 $q = 4$ 之外, 其它情况的余维 2 分岔的问题都已解决. 本章节 6.1—**??**分别介绍 $q = 1, 2,$ 及其 $q \geq 5$ 的情形. 在高阶项的适当非退化条件下, 扰动系统 X_μ 具有双参数的普世开折. 主要参考文献为:$q = 1$ 的余维 2 分岔见 [Bol,2] 和 [T], 余维 3,4 的讨论分别见 [DRSI,2] 和 [LR1]; $q = 2$ 和 $q = 3$ 的余维 2 分岔分别见 [Ho], $q = 2$ 的余维 3,4 的讨论分别见 [LR2] 和 [Rc]; $q \geq 5$ 的余维 2 分岔见 [T], 对 A_3,A_4 情形的讨论见 [Zol,2]. 在专著 [CLW] 和 [HZ] 中有对所有情形的详细介绍.

6.1. 二重零特征根:Bogdanov-Takens 系统. 在第一章??中, 我们讨论过二维 C^∞ 向量场

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O\left(|x,y|^2\right) \tag{95}$$

它具有正规形 (见第一章例??)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy \end{pmatrix} + O\left(|x,y|^3\right). \tag{96}$$

当 $ab \neq 0$ 时, 由第一章定理??, 系统 (96) 的任意非退化开折可转化为
=y,
=$\mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xyQ(x,\mu) + y^2\Phi(x,y,\mu)$, 其中 $Q, \Phi \in C^\infty, Q(0,0) = \pm 1 = \mathrm{sgn}(ab), \mu \in^m, m2$. 为确定起见, 取 $Q(0,0) = 1.Q(0,0) = -1$ 的情况可类似讨论.

6.2. 分岔图, 轨线的拓扑分类. 下面的定理是本节的第一个主要结果. 存在 ^{2} 中 $(\mu_1, \mu_2) = (0,0)$ 的领域 Δ, 使系统 (6.1) 在 Δ 中的分岔图有原点 $(\mu_1, \mu_2) = (0,0)$ 以及下列曲线组成:

(*a*): $\mathrm{SN}^\pm = \{\mu|\mu_1 = 0, \mu_2 > 0或\mu_2 < 0\}$;
(*b*): $\mathbf{H} = \left\{\mu|\mu_1 = -\mu_2^2 + O\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right), \mu_2 > 0\right\}$;
(*c*): $\mathrm{HL} = \left\{\mu|_{\mu_1} = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right), \mu_2 > 0\right\}$;

其中 $\mathrm{SN}^\pm, \mathrm{H}, \mathrm{HL}$ 分别为鞍结点分岔曲线, Hopf 分岔曲线和同宿分岔曲线. 当 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta$ 时, 系统 (6.1) 在相空间原点 $(x,y) = (0,0)$ 附近的轨道拓扑结构见图??

为了证明定理 6.2, 注意 $\mu_1 > 0$ 时, (6.1) 在原点附近无奇点; 而当 $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ 时, 由第二章例 ??知发生鞍结点分岔. 因此, 下面要考虑的只是 $\mu_1 < 0$ 的情形. 考虑参数及变量的替换:

$$\mu_1 = -\sigma^4, \mu_2 = \zeta\delta^2, x = \delta^2\bar{x}, y = \delta^3\bar{y}, t = \frac{\bar{t}}{\delta}, \tag{97}$$

其中 $\delta > 0$. 再把 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 写回 (x,y,z), 则 (6.1) 化为
=y,
=-1+x$^2 + \delta[(x+\zeta) + \delta\Psi(x,y,\delta,\zeta)]y$. 我们可以把 $(6.2)_\delta$ 看成是 $(6.2)_\delta$ 的扰动系统, 后者为 Hamilton 系统, 它有鞍点 $A(1,0)$ 的同宿轨道, 以

及该同宿轨所围的以点 $B(-1,0)$ 为中心的周期环域 (见第二章例 (**??**) 及图**??**), 周期环域中的闭轨族可表示为

$$\Gamma_h: \quad \left\{(x,y)|H(x,y)=h,-\frac{2}{3}<h<\frac{2}{3}\right\}, \tag{98}$$

其中

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+x-\frac{x^3}{3}. \tag{99}$$

当 $h\to-\frac{2}{3}+0$ 时, Γ_h 缩向奇点 B; 当 $h\to\frac{2}{3}-0$ 时, Γ_h 趋于同宿轨与鞍点 A 形成的同宿环 $\Gamma_{\frac{2}{3}}$.

注意对任意的 δ, $(6.2)_\delta$ 都以 A,B 为奇点, 且 A 为鞍点,B 为指标 $+1$ 的奇点. 因此, 若 $(6.2)_\delta$ 存在闭轨, 它必定与线段 $L=\{(x,y)|y=0,-1<x<1\}$ 相交. 另一方面, 由于 Γ_h 与 L 的交点 p_h 在 L 上关于 h 单调排列. 因此, 可用 h 把 L 参数化: $L:\quad \left\{p_h|p_h=L\cap\Gamma_h,-\frac{2}{3}<h<\frac{2}{3}\right\}$.

现在我们任取 $p_h\in L$, 考虑系统 $(6.2)_\delta$ 过 p_h 的轨线. 设它的正向及负向延续分别与 x 轴 (第一次) 交于点 Q_3 与 Q_1. 记 $\gamma_{(h,\delta,\zeta)}$ 为 $(6.2)_\delta$ 从 Q_1 到 Q_2 的轨线段 (见图 **??**). 当 $\delta>0$ 时,$\gamma(h,\delta,\zeta)$ 是系统 (6.2) 的闭轨, 当且仅当

$$F(h,\delta,\zeta)\equiv\int_{\gamma(h,\delta,\zeta)}[(\zeta+x)+\delta\Psi(x,y,\delta,\zeta)]yx=0. \tag{100}$$

证明. 注意当 $|x|<1$ 时, $\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}=1-x^2\neq 0$. 因此, $\gamma(h,\delta,\zeta)$ 为闭轨 $\Leftrightarrow Q_1=Q_2\Leftrightarrow H(Q_1)=H(Q_2)$. 另一方面, 由方程 $(6.2)_\delta$ 可得 $\square$

7. 关于单峰映射稳定周期点的存在性

本节我们要讨论单峰映射 Z.Z-I, 其中 7 = [— 1,1], 的稳定周期点的存在性问题.

定义 Li 称一个映射 rjf, 是单峰的，如果它满足下列三个条件’

(UDf 是连续的；

(6) / (0) = 1(

<u3) /在 [0, 口严格下降，而在 [一 1,0] 严格上升.

称 f 是 C1 单峰映射, 如果 f 满足上面三个条件外, 并

有 (u4) /是 C^1 的，且尸 (z) 尹 0, 当 C 尹 0 时.

令 f 是 C^1 单峰的，并令 F 是 f 的周期为会的轨道. 我们称 F 是稳定周期轨，如果 z £ P,|DP (x) | 称 F 是超稳定的，如果 0

€ *P.* 由稳定性定义，如果 F 是 f 的一条稳定周期轨, 那么对 x € P，有一个邻域 U, 使得对一切 *yeu,* 有 lim f 醇除了可 «~* + 8

能的 =1 外）.

现在我们要讨论的问题: 一个单峰映射可以有多少条稳定的周期轨道? 1918 年 Julia 证明了某类单峰映射至多有一条稳定的周期轨道.1978 年 Singe 网做了实质性推进，下面我们介绍他的一些工作.

设 f 是映射 J 的 Schwartz 导数 Sf (x) 定义为 5 窗-龄

「.

定义 1.2 称 f 是 S 单峰映射, 如果

(&)/是仃单峰映射!

(&)f 是 U 映射；

(S_3) 5/(x) < 0,x G 7, 并允许 S/Xz) =—o0(

(s)f 映 j(y)= 3 ，口到自身?

<s_5) 尸 (0) VO.

定理 1.3 如果 f 满足 (&),(&) 和 (&), 那么每条稳定周期轨至少吸引工 = 一 1,0 和 1 中的一点.

证明由简单计算和归纳法，下面前两个性质是容易得到的，此处不再F述.

1. 如果/,g € C^3, 那么 • g)S) = (Sn(g3))g，Gr)z + *Sg(.x).*
2. 如 M/e C^5 且 S/(x) <O,VxG L 那么 s(产)(z) < 0, m

3. \f 丨在 (一 1,1) 中没有正的局部最小.

如若不然，设 1 尸 | 在，£ (-1,1) 中有正极小. 不妨设尸) > 0, 那么舟 C)= 0. 注意到 f 是 C^3 的，以及 Sf(3-)<0,r(3-> 必与户 (少反号, 这与尸 3) 为极小值相矛盾, 特别, 上述事实也说明，如果 | 尸。)| = 1, 那么至少在 y 的一边，| 尸 | < 1. 如果贝尹士 D 是 f 的不动点并且 I 户。)I = 1, 那么这个不动点至少在一边是稳定的.

4. 如果 f 有有限多个临界点 3 称为 *f* 的临界点, 如果产愆) =0), 那么对每个整数 *n~l,f* 的周期为 n 的点是有限个. 更明确地讲, 对每个”> 1,/ 的周期为 « 的点是可分隔的.

如若不然，令 g = 产并设有无穷多 x G /, 满足 g(x)= 工. 由中值公式，便有无穷多 x €,，使营愆)=1. 由性质 2 和 *3,\g'* | 没有正的局部最小. 因此有无穷多 *x,g'* (x) = 0. 这与 f (因此与 *g)* 有有限多个临界点相矛盾.

5. 如果 *a<k<c* 是 & = 产的相邻不动点，并且在区间 [a,c]

中不含 g 的临界点，那么寸。)>1.

事实上，由中值公式，存在 *u,v,a<u<:b<v<c,* 使得 g，GO =g'(v) = 1. 因为 g 在［a,c］没有临界点,g，Gr) > 0,x G ［a,cl 于是由性质 3,g'(i)>l.

6. 如果 xe 是 g 的稳定不动点且 |g's)i vi, 那么定理结论成立.

因为 H 是 g 的稳定不动点，所以它的吸引域中包含勿的连通分支具有形式［-侦) 或者 O, 口 (［— 1, 口是平凡情况). 首先我们考虑 5,s) 情况.*g* 将此连通分支映到自身, 但小不在工的稳定流形内，于是 3 不会映入工的连通分支内. 因此，只有以下三种情况之一出现.

(i) g(r) = g(s)(= *r* 或 s);
(ii) g(r)=r 并且 g(s) = s；
(iii) g(r) =s 并且 g(s) =r.

如果情况 (D 出现, 那么由 Ro% 定理,g 在中有一个临界点声，它被吸引到 h. 但是 g = 产, 那么存在使得 f 将/ 映到 f 的临界点. 从而定理得证.

对情况 (ii)(或 (由)), 类似于 ，我们不妨设在 (r,s) 中无临界点. 那么由性质 5, 这两种情况都可排除 (在情况 (iii) 时，考虑 g^2).

现在我们考虑连通分支为［-1,5) 的情形. 此时一 1 被吸引到石类似的结论对　也成立. 于是，对 |/U)|<l,xe(-l,l) 时，定理得证. 如果 x=±l, 定理的结论显然.

.7. 如果 gS) = x, I = 1, 那么定理的结论成立.

不失一般性, 我伯设 g，(x) = 1. 如果工 = 士 1,• 那么无需证明. 如果女 £ (-1,1), Ek 性质 4, 有一个 z 的邻域 (r,s) 不包含 g 的其它不动点. 于是 g(y) > y,y *£ (r,x)* 或 g(3F)< y,y G (x,s). 否则，在 H 两边有点丿, 使得营。)>1, 因此营有一个正的极小点. 为了确定，假设 gQ) >y^y G (r,x). 令 4 是 y<x 中包含 5, 女) 的使得 £(少 > 3-的最大连通分支的最小值. 那么 g(d) = /(或者 d =—1 并由此 c 吸引一 1）. 显然扌以）21, 由此有一个点 se （d, 工)，使得营（矶 =1. 如果有;y e (d, 矿，使得 b。) = 0, 则利用性质 6, 否则由情况（iii）, 我们完成了性质 7 的证明，并因此证明了定理.I

定理 L 3 有以下几个推论.

推论 L4 如果/ 是 S 单峰映射, 那么它至多有一个稳定的周期点，加上在区间［一 1 ,/ （!)］中的一个可能的稳定不动点.

证明因为/ (0) =1, 点和 1 被吸引到同一条稳定周期轨. 由于 JCf) 是关于 / 不变的，如果一条周期執道有一个点属于 3, 那么这条轨道便落入/</）. 如果这条同期轨是一个稳定不动点 H 并且 0, 由情形 3, \$f$’\$_M$ W 1 或者 | 尸 | 母, 汀 < *1.* 如果是第一种情况，工吸引 Lo.xj 并因此吸引 0 点, 如果是第二种情况,r 吸引 |>, 口并因此吸引 1 和 0=广】(1）. 对 mvo 可类似地论证.

如果有一个周期 $P > 2$ 的稳定周期轨，那么用完全类似的讨论可以说明，户的最右边的不动点或者吸引尹的临界点，由此吸引 0 点或者它吸引 L 于是，我们证明了 f 在 JCf）中至多有一条稳定周期凱另外, 从上面的证明我们也可以看到，在 JO）中没有稳定周期轨，它仅仅吸引一 1.

现在我们考虑 f 的稳定周期轨，它不吸引 0 或 1-由定理 1. 3, 它一定吸引一 1, 并由此至多有一条这样的稳定周期轨 ·

下面我们证明，这样的稳定周期轨是 JCA）🄵 = (一 1,/ ）中的一个稳定不动点. 如同我们已经看到的，如果这条轨道有一个点在 JCf) 中, 那么整条轨道在 JV）中并吸引。和 L 因此, 这样的轨道必在

JCfj 🄵中. 由性质 3J 在 JU）🄵中至多有两个不动点，因为 /在 [一1,0] 中至多有两个不动点. 如果在中没有不动点，那么 f (.yy>y,y&J (.f^. 因此 J 在 J (/) 🄵中没有不动点也没有周期点? 如果/在 JUV 中只有一个不动点，当/U）>1 时, 我们有 r=—1, 因为/W Vy, 当了 <z. 由此 J 在 JCO 🄵中没有其它的稳定周期轨. 当 0 Vr‘(z) W 1 时，由定理 1.3/吸引一 1, 因此🄵中没有其它的稳定周期轨. 最后，假设 _/ 在 J(£> 🄵中有两个不动点，那么有一个不动点工使得 0</^)<1. 由定理 1-3,/吸引一 1 点且在丿侦) 🄵中,/ 无其它稳定周期点.I

摧论 L 5 设 f 是 S 单峰映射. 如果 fD > 1, 则在 J CO 🄵中没有稳定周期点.

证明如果那么由 3,/(x)>^,x€ (-1,0). 因此，在丿 (f) 🄵中没有稳定周期轨.I

推论 L 5 可以看成是推论 1. 4 的部分证明过程，用它可以断定 JUA 中不含稳定周期点.

推论 L6 存在没有稳定周期轨的 S 单峰映射.

证明一个经典的例子 J3) = 1 - 2x^2. 它是 Ulam 和 V. Neumann 在 1947 年给出的. 容易验证，质是 S 单峰映射. 经 0 点的轨道为 0,1, — 1,-由定理 1. 3 它至多有一条稳定周期轨, 并且吸引三点一 1,0,1 之一. 但是/(一 1) = 一 1 是不动点并且吸引这三个点. 因此，它们不能被其它周期轨道吸引. 但是，由于 4>1 它不是稳定不动点，所以须没有稳定周期轨.|

附注 1.7 在本节我们讨论了 S 单峰映射的稳定周期轨的存在性问题. 把定理 1. 3 和它的推论应用到映射族 FGr,a) = $/_0$(x) = 上时我们看到，如果 a 靠近 2, 那么判定 f_a 是否有稳定

周期轨的问题转化为讨论临界点轨道的性质 (在 § 3 定理 3,1 的证明中，要用到这一性质). 我们将看到，映射族侦如 a e [处, 2], 向靠近 2, 在参数区间中有一个开稠的参数集，相应的映射有稳定周期執. 这意味着其动力学行为是简单的, 不仅如此, 更有意义的是，在该参数区间中也存在一个正 Lebesgue 测度的参数集, 相应的映射没有稳定周期轨，并且其动力学行为是复杂的. 由此结果，我们讨论清楚了分支值 a = 2 附近的部分情况.

8. $F\ x, a\ = 1 - ax^2$ 的基本桂质

我们将讨论 A（a）= 🄵（0』）返回到一个固定的小区间尸 =（一 *S,s*）的方式，其中 a = exp（— C）. 特别要讨论它们是怎样靠近原点的，以及靠近原点的速度. 而 F3,4）的迭代的一些基本性质对于理解这些问题起着重要作用. 应当指出，尽管我们只对这一特殊映射展开讨论，但是这种以 Jakobson 开始,Benedicks 和 Carleson 发展的理论是解决一系列此类问题的关键所在.

首先我们将广分成一列不相交的小区间的并 = U *I”*

1^|>° 其中七 ==exp（— 0, 而当🄵 V 0 时,

—（—- C-J.-1L 并记为 *Ip* =—

引理 2.1 对充分小 *8>0,* 存在国 <2, 使得对 ae ［何,2 🄵如果%€ [- 1.1］和 & 满足

函（勿,a）| 2* 丿 =0,1,2,“麟一 1,

并且

I 砂皿 <-?,

那么

2（1.9）匕（2.1）

证明令 * = 眄 =sin 淡在此变换下,F（н,4）可以表示为

— —arcsin（l — a sin^2 扌。）.

Tt Z

9

cos —*n*

诜（饥 <0 =— -/2a sgn（5）~~，三一~~.

Jcos 或 + 国京” 刍令%= Fu（%,a）,Qu = au（Q”）, 其中。。= 广（%）. 假设 I 初 >

1 一 2 乩，= S1,…,j-l, 但是区 | W1 — 2 战记砰 = 會萨一如 t • F, · 那么我们有

fr-i J >-1

aF = p’(n)］Ja『(句,a) 反代’(为)!!(- *2am.* (2. 2)

v—j w=0

假设%充分靠近 2, 用归纳法容易证明 | 狷 W1 —$\boxed{F}$,, = £• •, ,
疋因此 cos 湛 M 0. 于是 1*8* 趴 *3* I >1.9. 另外, 我们有平 '(向) = 二说，
血 IWS 以及 £ 广 (为)=I -$_r$ - - 当 a£

J1 一务 S,2］时，立得

宜 (E)IKL9 光 1

引 02.2 存在常数，>0 和 *k(S)>0,* 当角充分靠近 2 时，对所有 a£
［%,2］和所有 |x| 法%_1，存在使得下面的不等式成立.

(1) | 歹 Cr,a) | 羸 =、· .. J 一,

(2) log|a$_T$F(x,a)|>rZ.

证明记%= 烈"). 注意到如果而且 f =-1 + e, 那么 f < F(&a) <-
1 + 4& 设瓦［> c$_{a_v}$ 如果

I 如 ，那么 |。项 (%,(0| = |2a7$_0$| 如果 2-'+'N 知 22-',

ZN2, 那么

IM(%,a)| > |2 $\boxed{F}$ • 前 | ...|2a%_J

N %2-‘ 2a(l - 2 • 2」"+2) • • • 2<z(l - 4'“ . 2 • 2^{-w+z})

=(2a)'2-'(l — 2 • 2~$^{w+2}$)(l -4*2- 2~$^{2,+2}$) • • • (1 -
2~$^!$) .= 泌 (1 _ 号)(1 _$) ... (/烏).

因为%充分靠近 2, 取，=*ln2, 那么蜘庖即如从上面的证明过程
可知，对：=1,...,Z - 1, 函 (知 a) | 2 1 — $ > 5- 最后，取 *3) =
(log2)T"log -1, 得 I 下面的引理 2. 3 要证明，当 <5 非常小并且吗充
分大时, 在参数区间 (缶,2) 中存在一个小区间 d, 使得映射 Sm/Af 厂
是一一对成的, 并且保持指数扩张"

引理 2.3 对任意充分小 *S>0,* 任意正整数 N 和任意向 V 2, 存在
m 法 *N* 和一个参数小区间 A> U(00,2), 使得

(1) 对任意 d，&(a)W— - 1;

(2) 是 & 到广的一一映射且是映上的；

(3) |&FJ(l,a)| > (1.9)' 一 1 万 =1,2,...，叫-1. 证明因为

(1 + 勾 +1) — (1 + &)= 勾 +1 — &

=2 — Q + <2(1 + &) (1 如)*t*

当—身时, 我们有 1 + M+1 > |(1 + 专).

即 1+6 是指数增长的. 另外，如果那么从不等式

警 =_ 号 _2 妙爲〈-争

可归纳地证明 af 🄵心) 是单调下降的. 由这些事实，结论 (1) 🄵 (2) 得证. 这是因为对上述的 B 和 N, 我们选出包含 2 的小参数区间 21(0C= [00,21 由于 1 + & 是按指数增长，只要充分小，总有 m、> N，使得 4(a) M —扌,2 W v W 屿一 1 ,Q € 但是氧 (赁) > <5, 其中爲是的左端点. 注意到 &,(a) ,a € 占。是单调下降的，所以存在 A 二得当时,&,A,f 广是一一映射. 最后我们证明指数扩张性. 因为'

J

| 为应 (1,<2)| = U(- 2a&),

y=l

其中 & = 1 并且一 1 M & M ~^*v = 2,…W 吗—1. 从而结论（3）得证.]

下面的引理 2.4 说明互卧和 &F” 是可以比较的. 更确切地讲，M 和🄵 F，的增长速度是相同的, 我们已轻知道，

为卧 +1 =-- 2『为殆，$a_x F^a = 1$

和

平 +1 =-- 2『”-（尸尸，$3_a F^a = 0$.

因此

V—1

M = U（-25），v = 1,2，…（2. 3）

:=0

并归纳地得到

3 瑚，= 为时多专（1 + 涂）/ = 2,3,…（2.4）显然有

$d_a F$ 一 x^a.

引理 2.4 存在充分小的 ^>0 和㈤ V2,% 靠近 2, 如果

1 一 2N*

(2) % W a V 2;

(3) | 为玲-'(%,a) | 2exp_f'3,j = 8,9,,“”, 那么

1 |%Fl(%,a)|

16、|3 项 1(知 <2)|

证站由连续性，如果 d 充分小，角靠近 2, 那么对任意%和 a 满足条件（1）和（2）, 容易证明

五弁 11 ）> 🄵

2。吕「|2aVSa）”” 8

[width=0.45347in,height=0.43333in]media/image79.png[width=0.47361in,height=0.333

(2.8)

8

我们仅证第一个不等号，并只就声 > °，茶〉^{0} 情况给以证明, 其它情况可类似证明.

屏 2 0, 裟 > 0. 如果 $3_aFi>0$, 那么法序 2 0. 所以 1

十 $pi\ o$

旎🄵 21—云瀚 5 · 如果%🄵 <0, 那么勺声 <0. 而 0/’12

expWJ 于是因为因

此

1 + __^__>!___8_

十海尸身^1 exp”,

最后，我们来归纳地证明引理结论.3 = 7 时无需证明，设

j 时，有

因为

” 许队 I 尸 I

頭🄵的 _ 有丛 I「+2 🄵同

fi + 一沙履 ___] | 许 | h + 屏 E

I 十 2 崩小 (E) 丿 | 丛 | 丨十料🄵”)

因此由 (2. 5) — (2. 9) 可证

1 ’ ”+W，a) 丨 /“ .

行 W ” 珂和 7 $ ^{1}

附注 2. 5 我们简要地说明一下引理 2.1 —引理 2. 4 的意义. 在 §3 主要结果的证明中我们可以看到，執道媚 (。) 条 1 将会反复地进入临界点的小邻域广中. 粗略地说，引理 2.1 和引理 2. 2 根据兀的迭代的这种特性，分别讨论了当参数靠近 2 时，兀进入 r 前和走出厂后, 在广外的扩张性质. 引理 z.3 将作为我们归纳地得到正 Lebesgue 参数集

$\boxed{F}$的基础. 我们将 F3,a) 看成二元函数，引理 2.4 说明 *F(.x,a)* 的迭代对工和 a 是等度增长的. 这一结果的好处在于对参数或对变量的估算可以相互转化. 在 § 3 定理 3.1 的证明中，我们将看到这些性质所起的重要作用. 这些看似简单的引理的意义还不仅仅如此 • 对于一般的映射族 FGc,a)，我们可以提出与上面基本性质类似的假设. 如果 FCz,a) 满足这些假设，那么 F(н,<0 也具有类似于 1 -損的重要结果，细节将在本章的小结中阐述.

9. F(x,a) 不存在稳定周期轨问题

在本节里，我们要证明下面的定理：

定理 3.1 存在具有正 Lebesgue 测度的集合厶 C (0,2), 使得对所有 a £ 🄵，映射 F , 屹 1 一妃岸色 J 没有稳定的题熱凱.

显然,F3,a),a £ (0,2), 是 S 单峰映射. 特别，由 Singer 理论，当 a 6 3,2) 血靠近 2 时,F(z,a) 在 *J(F)* 🄵中无稳定不动点而在中至多有一条稳定周期轨; 并且假如 x = 0 没有被吸引到一条周期轨，那么 F<x,a) 没有稳定周期轨 • 于是，定理 3.1 可以从下面的定理 3. 2 得到.

定理 3.2 存在 ZUU(0,2), 🄵具有正 Lebesgue 测度，以及一个正整数蜘，使得对所有 Q £ 🄵,

| 为🄵 (1,。)| 2exp(*3), v>yo,

证明这个定理的证明比较长. 因此，我们将它分成下面三个部分.

A 我们根据 >(0,«) 不断返回到/ • 的特点，讨论返回的形式. 与此同时用自由返回概念，归纳地将参数区间 4 分类.

由引理 2. 3, 存在一个最小整数观 J〉*N)*，使得

/1! *a*

是 4, 到厂上的 1 一 1 映射. 称🄵是映射的首次自由返回的指标，相应的参数首次分类为

厶 1 = (o+l) U /’「’(Ach).

在下一步的讨论中，参数集合耳 =4,/4 不再考虑，从 4 中排除🄵是基于如下事实’ 因为 F”，(o,A)= 尸，因此存在参数角 G 4„ 使得 0 点是 FU.oo) 的周期为屿的超稳定周期点. 为了保证定理结论成立，将向连同發的一个邻域 & 排除掉. 请注意，实际上在参数区间 A 中，我们全部排除了使兀可能有小于等于观 I 的稳定周期轨的参数.

设 B 是第艮次分类的任意一个构成区间 #21. 下面我们定义第龙 +1 次自由返回以及相应的分类.

设 =7” 《 • = ［如切，|“| > 0. 我们要讨论 3 在 *F* 下的进一步划分, 定义非负整数 *P* = 少 (3), 它是使聞 S 一 *Fg*© | C 鸟辭

成立的最大值. 更确切地讲，对所有 a £ ® 和所有? G (0,c”>),

有🄵) 一 *3，a)| M 🄵，顶 =1,2, · “，夕. (3.1)

但是存在 a£s 和〃 £ (O,c“т),

屁 + 危)—”+】(”)|> ~~J 篇界，.~~ <3. 2)

应当注意, 对某些 $P,\frown_{i+j}$ 怎) 可能返回到厂，我们将它们记为皿} 如, 并被称为有界返回.

令，’ 是最小整数 $i>p+l$, 使得尸”*+’(0,3)PI 广 = $\boxed{\mathrm{F}}$ *0. 下面要做的工作是，在任基础上，进一步从 d 中排除一些参数集合，使得在任的剩余集中, 不含使 f_a 有小于等于 ⌒i+1 的稳定周期轨的参数. 不仅如此，相应于剩余集中的参数映射 f_a 至少在峋时是指数扩张的.

令 Si 是小区间 ly 的指标集，满足 (i) 石 U 聂和 (ii) |y| M。+ k. 但是我们在 s 中排除掉满足条件 &,+: $\boxed{\mathrm{F}}$)£ 小，卩 | $>a + k + 1$ 的所有参数 (记作瓦,y).

(a) 如果 & = 0, 那么我们不做分类而是继续迭代下去. 用爆$_1$ = 讯 * + i 表示第一次非本质自由返回的指标, 在独 1 之后, 重复上述过程，令 A 表示可能的有界返回指标, 小是最小的正整数使得它重新返回到 I'. 此时$\boxed{\mathrm{F}}$) 可能再一次出现. 此时用 n_{ki} = % + Px + ?i 表示第二次非本质自由返回的时刻，并继续这一过程. 由后面证明中可以得到的映射的指数扩张性, 这一过程将在有限步后停止 (也参见 [TTY]). 在根. 与昭之间的所有非本质自由返回我们用$\boxed{\mathrm{F}}$ *}: = 表示.

(b) 若 §• 尹。, 令 f 表示 3 中映到 1_7 上的子区间,7 6 5,- 那么 R|>«. 此时,F”*+”(O,s) 未必可以严格地表为区间 & 的并. 令

K = F 性 +’(0,s)\((U 功 U (c°+ 砰],d+“])).

K 可能由 0,1 或 2 个区间构成.

(1) 如果对某些由于每个刀毗邻于一个已选定的 4, 此时我们只要稍稍扩展相应的参数区间纳 , 使得 ⌒*+, ’(0, $\boxed{\mathrm{F}}$)= ZrU K. 这样的构造意味着对恰当的了和符号士有

GUF”*(O,M,7)U0U&±1 · (3.3)

由此，我们可以定义第 ⌒ + 1 次自由返回.

(2) 如果 K 中含有区间 J, 满足七,UJ,M| =a, 记 F⌒+, (0, ”)=U 糺并考虑它的进一步迭代直至与厂相交. 在此基础上重复上面的构造. 用此方法我们得到由 U A* 的一不分类已 (%$\boxed{\mathrm{F}}$)=(«»: ,>} 记线 =U a(i,y 并定义为 +1 为

血 +1 = U 练 +1O).

a»W 勺

附注 3.3 在构造分类 R 的过程中，每个参数的小区间

R, 都与!’ 中的一个区间关联. 这样的区间分成两类，一类区间是 $\boxed{F}$，而另一类区间除包含形如七的区间外, 它的端点落入 $\boxed{F}$ 毗邻的区间内 (见公式 (3. 3)). 为了避免引入复杂的记号，在下面的讨论中，我们只就第一类区间展开讨论, 而不考虑第二类区间存在的可能性. 读者可以仿照证明思想，对第二类区间得到同样的结论.

B 我们用归纳方法证明，对第 & 次自由返回和所有 aU 瓦，下面的事实成立.

(i) 如果㈣ = 吗念) 是第 k 次返回的指标成 > 1, 那么

|3_IF^{n,}4-^{I}(l,a)| 2exp(2miP)；

(ii) 如果 1 MiM 皿 (a), 那么

5(1,a) I 2expi”3；

(hi) >exp(— •/~j), 1< j C m*.

我们注意到对 & = 1, 由引理 2. 3 和叫的定义，显然上面的 , (ii) 和 (iii) 都成立.

下面我们对应 + 1 证明 (i), (ii) 和顷) 成立. 令 3 是瓦中一个小参数区间，并令力 =$P3$ 网和 “如 A 中所定义. 我们也假定旬中的小区间 “映到区间孔，以 | V 产时, 归纳步骤成立. 下面我们首先估计 P 的上界. 由中值公式

弓 (“)-”(%<!)— FPT(l,q) - ” 一 1(1 - $_af,d)$ =4 矿 &

砂一 1(1 一对 2,<1), (3.4)

其中 0 <7,<7<c_{p_1}, 由 (2. 3) 和 (3.1) 对我

们有

庖縻 1 一时,a)| 行成 (1 一妙,4)|

|a『(l,a)| ~ 丛 |H(l,a)| VW2,(3.5)

其中 c = exp(^£ 日. 同理可证

IM(1 —$\boxed{F}$。) 丨卜$\boxed{F}$

l”(S “ ”2,

容易看到, (3. 5) 和 (3. 6) 对 0〈矿〈〃也成立. 因此, 由 (3. 1),(3. 4) 和 (3.6) 我们得到

M 亲旧怎) 一州 (孔 ©| ₤ 謗 V 玄烏 exp(2 E W exp(2 g 只要 j —iWm" 那么由 (ii),exp(2 /?)Nexp(严) • 但是由引理 2. 3 和不等式 (3.1), 当 S 充分小和向充分靠近 2 时, 我们有

' W 2#(a + j»+V2¥(ai + 房)

W 157(靛 1 + 犊 Q W 15-牝 <". (3.7)

此式也说明, 当 j 增加时不等式 *j* M 2 故十在 $j = m_k$ 之前就破坏掉了. 因此

PW2M*. (3.8)

令 a = *(a,bf.* 我们讨论 $n =$ 的长度的下界.

邛可以表为

I 糾 =|E»+P+l(0,4)— I .

=[FX1(🄵 *s),a)—砂 +1* 苦% , 占汁 *(3.9)*

因为

I&*Q) 一扌叫 0)| = |。一石 ||% 广 *(0, 廿) 丨

N g —们 • 佥 expm¥$, *a<a' <t>,*

并注意到 M 对纟和 a 的导数是同阶的, 而从上式可见 *\a-b* 与

I&Q) — & 冲)| 比较是微不足道的 (也可参考 [TTY]). 因此

| 糾濠 1^031 |&0) - 轧 3)| | 为"0 |

貝扣, l/&F",a)|, (3.10)

其中 1 一播

由 (3. 2) 和 (3.4), 存在 7, r,0<r <7<^-1> 使得

"| 小%1 - 寸 @) | > 备🄵暖, (3.11) 利用一致估计 (3. 5) 和 (3. 6) 我们有

| 西"(夕 @)| >-^19^(1

将 (3.11) 和上式代入 (3.10)

ici > 1 *Cfi* *\1 * 丨 &+i(Q) 丨 g "、

🄵法説右仔』3+ 安

我们要进一步证明 |fi|>exp(-2z($^{s/8}$). 事实上,由假设 (iii), 底 +13)1 2 exP(— -/*pTi).* 利用 (3. 8) 并注意到 *Na = log^{J}[||], 那么当 $ 充分小,

&| =exp(—』 *p*。) 一 exp(— /V)— ,

I 钉 +l (a) | >exp[- (| + 2 抒) 可,

~~d = 竺 p~~ -厂 ^^) ,.

^{C}A—1 exp ' 2 *J* 㠯 _ *]*)

0\\ >— Q + 2+】) · 2expG (QN 厂弟, (3.13) 60

V>

下面我们对 & + I 证明 成立, 首先证明对 V a E 血, la^i+^d.a) ! Nexp (2S* + Q* + 会 #*) • (3.14)

由微分链式法则

= 否" 厂 1(1, 侄)(一 *2a($_{m}$ (a))* •

i

为 FP 黄叫 +1@),a) |2a 氧 (e) 为网 (紐 + 心),a) |

> 2aexp(— 序)• &xp(2 *JL* 1) • 彳备🄵 (-少 + 2

QT)• 🄵🄵.

因为 '》 🄵埒、并且 | 弓 +1 慫)| >exp(— 上式可表为

| 球《5 (京 + 心) 優) | 鴻温可 •

exp (2 — 1 — //r — *Jp* + 1)》 exp (+/>*) .

(3.15)

由 (3. 7) , 砰》 15 出从而对所有 a £ 3,

庖 E+P (l/) | > exp[*2mf* + 十声 *)

濠 exp (2O*+ 见专 +

这是因为 (戒? + 会 A (wi* + ",

由分类定义, 设对 f = h.^+^CO.a) 与/• 相交. 那么

| 招冲 +3+: L (l,a) | >exp (2 (m* + *p* + h) b.

事实上, 由于 <#, 并且 |F 《%,a) | *R,j* =

一 2, 其中%= F^+%1,@) , 所以由引理 2.1

| 粕-1 (從) | 2 (L9) L.

于是

| 为砂,+Z>K_l（l,a）| >（1.9/Texp（2S* + *）* +
备疗）N exp（2（m* + 力 + 标）4）.

如果是自由返回，那么记 m*+i = m_t + /> + ; i, 并且对 k + 1, 我们证明了（i）, 如果是非本质自由返回，由（3.13）, 时,+#+ 七（0 仲）与九，| 叫〈产相交. 重复前面的讨论，并在下一次返回时，我们有

’IV”L（l,a）| 2exp（2”£）.

如此继续下去直至到吗时，返回是自由的时侯为止. 自由返回在有限次非本质自由返回后必会出现，这是因为 s 的象的长度，如同我们在 A 中看到的一样，在返回时是非常快地增长的. 我们完成了«）’ 的证明.

当 * + 1 时关于 W）的证明，我们只对给出证明. 而对时间段叫〈V 叽的证明是类似的.

J j+l

如果 i 一皿 V 内 V 皿，其中 $p = pk$ 如（3.1）和（3. 2）定义, 那么我们有

= 区评-f （最 +l（O,a）,

» exp（2m; 〃）· 2κP（- 77）1 勿F T-叫（氧 +i（a）,a）|.

由一致估计 (3. 5) 和 (3.6), 归纳假设 (ii) 和 m* > 产,

Nexp(2m? — /}? + (1 — 1 — m*)#) 2 exp#.

如果 $i>p_k + m_k$, 由 (3.14)

| 杏尸」1(1”)|

=|%E‘+A(l,a) • 布尸-%—》厂 1(8 叫 +a+[(a),a))|

2 exp(2g + 力)* + 佥讨)l/FF-l(机 +A+1MB 卜. 由引理 23, 我们得到

低不一叫”L(氧 +p,+i(e),a) 丨 > 5exp(r(t 一唯一勿一])). 注意到

2 12 1 *2*

2(m_t + *fit*)^3 + —/>^{3} + *7*(*I* — *1* — p_k — mQ — log y > 技. 从而 (ii) 得显.

(iii) 的证明. 要证当 $m_t < j K$ m_{i+1} 时 > exp(— /7). 由引理 2. 3, 只要 a。充分靠近 2, 总可适当选取使得阳 > *2d* 注意到屿 1, 我们有

况 * 2 ~$2^{\frown m}t$ + 2 & + 1 + a.

因此，当时

| 烏 | 2 exp(— Ja + 点 + 1) > exp (— Vm_k) > exp(— R). C 最后我们来估计，在构造血 +1 时，从旬中排除的参数集的测度. 更确切地讲，我们要证明

|g| 2 | 血丨 (1 一 9, (3.16)

8

其中 0Way 1 且 U(l-4)>0. 如果 (3.16) 得以证明, 那么由

*=1

归纳过程我们有

n—1

14.1 > |1 一 J I U I» …> U(1 — G 心 |.

注意到 4+1 U&, 我们有

Al = I n4t|>0.

*=1

并完成了定理 3. 2 的证明. 在证明（3.16）之前，我们暂时假设对所有%, 個 G 3UJ、存在与互无关的常数 c, 使得

V |* 中（0, 代）| $\boxed{F}$

c ; |"E（O, s）| f C'

令 Q = U F" 妇（0,3）可以表示为

|P«E（O*）| = | 砂 5（0^）— 砂 +（0』）|

= 叫 FT（氧 +p+i（a）Q -

与推导（3.10）相似，我们得到

| 尸%1 （0 仲）|

> 号旧『中-叫一 1（"）| | 命 + 小 8）-上 ++（方）I , 其中 H 在%+a+i（a）和氧 +*10）之间. 因此得

(1) |F'（8,<z）| N 凯丿 =0,1,2,• • •,/»*+! - m_k- p- $2t$

(2) $C3$.

利用引理 2、1

| 砂中（0, 也）丨

> y（l. 9）FF-"% 叫 +*（a）-氧 + 宀 0）h

9 j.

= 号（1. 9）叫 + 厂叫一》一 1| 糾 >exp（- 2 舟）. 我们也有

|E+i（0,a）| = |%FF（0, 次）1 I 叫，其中 W £a, 于是，我们得到了 a 长度的一个下界

即参. 燮- 2 🄵)

1 ’ - .

另一方面，令刃表示 a 中可以包含于 A+i 的小区间全体. 根据四 +1 定义，记鼠 +1 = w\a/，则

l^TMi+1(O,wt+1)J <exp(— /a + A +1).

而

|E+i(O, 🄵 i)| = I 弟 +11,

其中术 £ 添 +1，因此

exp(— /a + H)

一 | 讣 f(O,a 〃)| ’

利用 (3.17), 我们可以估计从 & 中排除的参数集的测度

[]@ll@ 丨如一 |«/ |

1 刎’

因此，有

I 血 I - I4t+il ’ ..._exp(— -/a+T+T)

nr] W const r- = «i

141 exp(-2“E)

和

| 四 +11 (1 — a*) |<i*

因为 I 闵 <a + 如所以四 £ 戲, 其中

队—const exp(2(a + 幻 M — /« -pA + 1).

8 8

容易验证 IT (I f &) > 0, 因此 U (1 - M > 0.

XI k — \

附注 3.4 读者可以看到，在证明 (3.16) 时，我们仅考虑了从，次自由返回到 $k + 1$ 次自由返回的过程中，没有非本质自由返回. 更明

确地说，我们仅 考虑了”= 吨 +1 情况，对于一般情况，读者可仿照上述过程证明间样的结果.

下面证明 (3、17) 成立. 我们将给出一个形式上更一般的结

论.

. 引 3 3.5 设砂，(0,3) 那么有常数 q 和 &，使

得对任意 *a,b£3* 和丿 < 所》+1, 下列不等式成立

(3.19)

证明显然, 我们只需证明 (3.18) 成立.(3,19) 式的结果可从 (3.18) 和引理 2. 4 推得.(3.18) 式等价于

崗 0)|

l^)T ^C,

由归纳的结论 ，得

22 |ET(/)| =

因此，利用引理 2. 4, 得

| 如 Wdexp(— 2 邳).

因为 m》 l,

図’w (1 + 备卩 M (1 + ”exp(_ »d))y 2,

于是 (W)’ 在对参数的一致性估计中是不重要的因素. 为了证明 (3.18), 我们只要估计] 1 🄵勢 * 因为

斉 |£0)| ’ 🄵修川) 一 &sin

ロ🄵 1 = 咬 g^ln|^1+ |^)|))

b 踞旧。) 一 &(4)|

W exp 🄵—🄵 (a) I .

所以我们只要估计

„ I 演）一”） |

3 -

令佑} 藹为自由返回或非本质自由返回的指标，并且专 V 知如果 f<j, 那么 S 可分段表示为

篒芙 “W）一膈）1 篒 V

5 = 2J 2J —旧商 = 匕为.

>-1 v=（. |C-WI 斤 1

由有的定义,q e 加，并且书 = （句$\boxed{\text{F}}$），句 8)）u%. 我们将，分成两部分’ ’

„ I&3）—句。）| 弓 *‘ |5 怎）一 &。）|

月 =* ”）1 + 『謂$\boxed{\text{F}}$）1 ’

首先估计第一个和式，当 卩 = <> 时，~~吃: 二; 件1~~ M 导；当勺 + pj 时，记 S = V —如显然/ = 1,2, —,/>>, 此时

厲（仅）一”3） 丨 =| 玲（匕 S）M）— F；（& 9），为）|

i I

勺 | 囱 |.

同时

.|&(a)|=|F，怎怎)g)|

i

> |F，(O,Q)| — |F，(q(Q),a) - FM0,4)L 记 &*)= 〃，则. 因此由 (3.1) 式，

0a) I > |?,(«) I —法 I |.

我们得到

成 0）1

q I 蜘）1

(3. 20) 我们把不等式右边的和式分成两部分

% f; f,

月 = 力十 i -

5=1 1=1 $—时 +1

其中 pi = I Vw. 第一部分我们用基本估计

IMI”,

.\ W \ >e-

第二部分我们利用 (3.1),(3. 4) 和 (3. 5) 推导出

| 割 1(1,” £ 詷 &(a) —F，(”)| M 亦志 lg)|, 其中咋 g, 糾 _|). 于是

%| $\boxed{\text{F}}$」|旧此一 1(1,0)| | 加丨

V $\boxed{\text{F}}$.

因此

2 = 象 + 套日 4 也 MI 🄵” 十华!]

$=1 sT g + 1 I s=l 气〃 + 1 ”

注意到 Pi’ = j Vw 和土丨 Ui W* 我们有安’l%(a) —4(6)1 V “顽 Wl

因为当勺 + Pi <v< t_{j+1} 时，句 (a) n / = 0 以及

庵詩) 一 ℰ 🄵)I 2 号杞此 f-”‘a) I I 物) 一晶 (6) I, 其中 0 在 5(4) 与之间，我们有

|&（龄-£0）| / 3 t lOl^-1* 驼 +«）- ℰ 🄵）I 一而可

一 0 万 | 的 J 1 句 +, 怎）1

事实上，旧怎）| > | 弓 + ［🄵）|, 并由引理 2.1

| 古尸；+ 厂”Sa）| > （1.9）’，+「”,

于是

| 腿）一伊）I W 专鼎 “定詩）一鈴件）I. 因此, 第二部分可以估计如下：

W 13）— 60）1

< 1 卩 O^+L I 句 +&）_ 句 +Q）I

£ 如思 +J 司呢孩）1

<AY（IO1ᴶ 庇 +S —与璀 I

毛万 4【1 时呢，（心

竃 3-队仞 1

I 氣 s -

’/+L

s < const 2 -7= 学 V

i V^> ᴾ’

为完成（3.18）的估计，我们只要估计上面不等式右边和式的界. 完全类似于（3.13）的估计，我们有

| 川 +1（%, 次）|》exp（_ 2 游），(3.21)

其中囱 £ 農, 切, %= 下面我们要证明陶 +1! > 5 囱 I. 为此，先证明在有限的时间段 KKP, 中，~~鶱: 糾~~ la/s 血）[

的一致有界性，其中气，工合 £ 七”3 如 6 欢

1—1

|% 刑（工 1, 绮）| =（” 巨成愆”,

$V=O$

$I\ ^{a}i$\ ’亅 頌 |Fu（Zi，ai）—狄（丑, 企）11

w M 丿 $^{\exp}$l：—g&i r

由（3.1）, 当 vW 物时

|F*”（H,a）—知（<z）I M ~~”:V~~ ~~|~~,z £ 弓，a 任 a>,

我们得到

I $\boxed{F}$（跖，角）一卧（务血）|

M IA（ai）I + |& $\boxed{F}$ 2）+ |^（«1）— ^（此）I,

和

| 殆（处,%）1 > y|^（0,a_2）|.

于是

|F”（; C1, 勿）一户”（以，%）|

| 尸 6 血）[–

由归纳的结论（ii），引理 2. 4,（3. 5）和（3. 6）

|”-1（瑚）| Vxp（2 4）,

IM 广（l，a）l N«tP（2 罗）.

因此

|&（角）—f_M（a_2）| — const|&F*-l（lM）| | 向一此 |

W const $|9_X F^{*-1}$（1 | | 角—a_t /

C const exp(2 A/^) | 鬲一%|,

以及

| 勺愆）一$\boxed{F}$（6）|

论一 K ~~15-1（$\boxed{F}$）|~~-淄眦 exp（_ 2 痒.

注意到 | 羸饥）| 濠 exp（— O 和立得

頌中（时。1）—欢《气血）1 ,

2J 77J7 Ti W const,

£ | 殆（以, 角）|

因为图’ 是一个有界数，所以

广二 r V const $_f$

|% 尸（工 2& I

其中册 e *Ip.,* a* a>.

由引理 2.1 和上述估计，我们得到

|bj+”= |P>+i（0»a）— PJ+I（0,Z*）1

=I 尸心 M,+3+l)(q+3+i(a),a)- F«,zM,+D+I)(q+p,+10)

0）|

Nconst 呢 +3+i（a）- q+D+i（6）I r I” 叫叫,

2 const jjT 1。打

>const 0|exp（\/Z）exp（~ 2 才）.（3.22）

因为 $ 很小，所以（3. 22）意味着 |b,+“N5］巩. 最后，我们估计和式

要注意, 某些🄵可能同时位于某个区间 L 中. 当此情况发生时, 由于血 +1N 5 囱 |，我们有血 I < I” I, J（s）表示这些。代 *L* 的

最大下标, 由此有

[width=0.91319in,height=0.45972in]media/image81.png[width=0.65347in,height=0.413

于是

-s s

/ VI 1 |bj（$）|

不等式（3. 24）表明和式亩的杓不妨是不同的 • 将和式

V’ 1 丨勺丨

叨

分成两部分，令儿是使得

方🄵 5

的指标集，而儿是剩余指标集. 那么

. QO

S 、後 M const,

即上式左端是一致有界的. 如果 ye 则

由 (3,22), 如果 *k>j*

|ct*| > const |q|exp(y^J) exp(—)

- const 插加 |exp（V^i exp（一 2,）
- exp（— 3 力）.

但唉 U/七由加的定义立得件 C 9#. 此不等式说明｛的｝心, 有

限. 因此

2 声件、声

*jWJ** V *fij %* 丿 € 七 V 巧

是一致有界的. 于是，我们证明了引理 3. 5, 从而定理 3.2 证毕.|

10. 分布问题

我们仍用如表示点エ =0 的 V 次迭代，并且令岡 =4 立如 (4.1) 在本节中，我们讨论四的渐近性质. 更确切地讲，我们将证明下面的基本定理. 定理 4.1 对于前面定义的🄵中几乎所有的参数，序列🄵广的”、极限产是鲍对连续的: 🄵 =Mr, 其中〃，对所有 $P<2$ 成立.

附注 4.2 这个定理表明，测度产不是很特殊的，并且临界点的轨道关于测度 “遍历, 为证明这一定理, 我们将依照 § 3 中所得到的基本性质分步进行讨论. 我们首先讨论在广上的分布, 然后讨论在 $[—i,U\r$ 上的分布，由后面的讨论我们知道，E-i,uy 上的分布不难从广上的分布得到. 因此，讨论清楚厂上的性质是重要的.

我们已皎知道，&8), 🄵以三种形式返回到厂，自由返回，非本质自由返回和有界返回. 我们首先证明在 r 上自由返回 x_B(= 的分布具有有界密度. 其次，用类似的方法可以证明非本质返回” {£»,} 的分布具有有界密度. 我们最后证明有界返回 {少丿的分布具有密度 g £ $Lf,p<2$.

定理 4,1 的证明

1. 自由返回的分布问题的讨论.

记 4 = 4, 不妨设 A 的 Lebesgue 测度为 1, 即臨 =1. 这样, 我们可以把它看成概率测度. 在此基础上，我们可以引入期望 E 和条件概率等概念.

取定 1 MM • • • M V，和間必 m, 定义

== 化 w e I %、j 一 1,2,—,z},

或者财 =A 由前面的讨 • 论我们知道，这种形式的参数集合可以分成一列子集 # 3), 其中每个 x (0 相应于一条不同的 “路径”i, 该路径在第%次自由返回时，通过区间 1% 我们定义

4, = {a £ # \ $x_{„}(a)$ 6 h),

= {a & ” I 弓 (a) £ I_u, $x_{„+1}$(a) £ 🄵，路径 i},

心 =1) 🄵 &*).

对每个路径 i, 由 (3.13) 🄵可扩增为 l 个区间 4,(0, 其中

lAXi) I = 乙 (用)2 弦卩)=exp(—2κ*). (4.2)

由分类的意义，我们知道珏 (D 可以分成一些区间孔的并，由前面的引理 3. 5, 我们得到

. IZ I

m%(D M const (4.3)

为完成情形 1 的证明，我们首先给出两个事实, 并把它们归纳为下面两个引理.

引理 4. 3 给定 # = 或 U 4• 有一个与” 无关的

常数 Q, 使得如果对某常数 $Q > c°$, 下式

mA* M 2Q | A, | *mA*

对所有的 v 成立, 那么，对所有 “我们有

瑚’ 户 MQIWmA

证明由 (4. 3) 我们有

mA“ —必)、*raA*$_{llfl}$*(i’) +*

v,i KlMYz)

曰 41 S ~~况 n~~〉 mW).

心 >g) 、’ ’ *k*

因为

亞烏🄵心)3 山零,

并注意到、心 |/殓 0 V+ 8, 所以适当选择 g, 我们有 S 制 §m 处 M 糸 m# .

对，< g，存在一个常数氐，使得 *L(.*$_V$*,i)* 法 L_o. 于是

N 瑚 *) 加 8 瑚祯) 具争財 m# ,

认 Yq> S 3 佑 乙

其中%2 (2c/Z_0). 于是

(号 + 号 | 成🄵 # 京心 |m#. |

附注 4.4 引理 4.3 给🄵从 V 到 “的 “转移概率” 的一个估计. 引理 4. 3 的一种特殊情况为

引 9 4.5 假如

An = {a w AJzrGi) e *I„},n* = 1,2,—

那么对所有的如,

mA«Wco|A, |.

证明我们用归纳法来证明这个引理. 当 n=l 时，由引理 *2.3* 可得

M %! 匕 I,

如果上述不等式对 « 时成立, 下面证明

mA”x+l 具帛//.

事实上，如果我们记 x = U/网, 那么

A» n+l =

由归纳法假设,

mAnMcolAJ <Qc$_0$|Z„|m^ ,

其中 Q= (m”)T. 于是，由引理 4. 3, 我们立得

mAn+1 = 庭七 W j’QcolAJniNMcolAJ. | 下面我们开始估计 {%} 的分布函数. 令不含 0) 是长度为 © 的任意固定区间，取 #=4, 并考虑

E(X»(^M)) =— [XsStGz)) da,

J 人

其中担, 是示性函数,A 可以依照不同的路径分解为 4, = 对每个 £, 由引理 3. 5, 🄵 (a) 在九中的分布有一致有界密度. 因此

[width=0.37361in,height=0.45972in]media/image83.png(4.4)

那么

E(FN) W const £.

下面我们任意取定一个充分大的正整数五，并考虑

Eg) = S N-叶 Xa(气) • • %(勺)da.

弗 “*N 八

我们要证明

E<F£) < (const 6)^h + Owb.

E(F 幻可依下标数组 (力，…，水) 分成两部分. 因为

CardfOt, —,j$_h$) I min|j$_{ft}$ — j$_£$| < -/N} 并注意到’

🄵🄵，(叼卩…么慦 “)da W 1,

因此，在 (4. 6) 中相应的这些项全体为。3 遴).E(H) 中剩余的项可做如下估计. 取 A < *k* <…V 水 W N, 满足力 +1 -

/N, *=1, · · · , 力一 1. 并考虑一个区间 3UA 假设与 s&omW , , 那么我们在引理 4.3 中选择龙 = 力以及 *i={ae* & 吃 e L，sW2}. 对这样的取法，引理 4. 3 中的假设条件显然成立. 此时，我们在该引理中取 2Q= IAJT, 令

4 片,={a & 两 |zj,+*(a) £ 🄵}.

由引理 4. 3, 我们有

< *Qm^i \1^*\.

归纳地应用引理 4: 3, 在 $k = j_{l+l}$ - h 次迭代后，只要 N 充分大, 使得 | 侦 >qT2-E, 我们推得

mA 件 < *2~^J* • *Q* • •JIM Co|/^|ни-^,.

因此

于是

m=h < (c°|L|)k

如果我们进一步要求，对每个项 “z 厶 £ = 1, · · · , 九, 那么由

fti h

引理 3.5, 上述测度的下降比例为 M 无 (参考 (4.4)). 因此，当 N 充分大时，

E(理)M(*)”+O(NT).

于是，对几乎所有 4_

|| limF/le M 勺 e. (4.7)
N-*8

(4. 7) 式意味着自由返回的极限分布在 x = 0 外有有界密度 (界为 c°). 由于在 x#: O 处密度一致有界，以及对所有的”，为尹 0, 所以 x = 0 处的情况可以不必考虑.

利用非本质返回的定义和性质，类似地可以证明，非本质返回的极限分布具有有界密度.

2. 有界返回的分布问题的讨论.

我们要讨论有界返回 ?, « = *l,2,-,N,j* = 1,2,-的分布问题. 这个问题的讨论可廿分成二步进行，我们首先讨论对 *J(J* 固定) 的分布，然后对所有 *j>J* 进行分析.

对令%• 表示 X-0 点第 j 次返回的时刻，并且记🄵 (4)

= 称此返回是奇 (偶) 的, 如果相应的揉序列 (Kneading sequence) 是奇 (偶) 的. 任给定 Q 和，> 0, 并令 ©(a) 是区间，定义为

a(a)_ J(M> — *p~l,uj* — p), 奇返回，

+ *P*、* + p + 2), 偶返回. 我们考虑

破 =H_N(,a)= 布力九 3)(外 *)).

n=\

令 U 是 W 中的一个参数区间. 假设巧 S) 是 0 点的 0 次迭代，对 a € U, 我们考虑马🄵)= 理,3,a), 其中 b = (0, ±Ft) 二 > 八. 由中值定理和 (3. 5) 式, 我们有

\ffj\ const |tf(a) $|^2$ exp qj > const |ff(a) $|^2$ expji, (4.8) 这里我们要特别指出，如果 {%} 徂 i 是一个奇 (偶) 揉序列，那么的右 (左) 端点为 f, 如图 6-1 所示.

[width=2.4in,height=0.84028in]media/image84.png

图 6-1

因此，一个点石 6 孔的第丿次有界返回属于 3(a) 的 “条件概率”, 由引理 3.5, 满足下面的不等式，

点尸編可’BA’

b, I < p.

于是，由 (4.8) 式以及 x_B e 1„, 立得

fiCZoifa) (jnXti)) < const I e~$^{J'3}$

MM ^CP 其中

”=(g I c； N const p eT^{*5}”} •

显然復 | I” > 同 UM. 因此

_1 _ i_ 4

&% 也 3)(为,(a)) W const p 刃.

从而得

E(H£(a)) W const p~̂l e”- 捉.

我们考虑 (HE* 的期望 E((H 女 a))”). 它可以表为下面和的形式

N_h S E(🄵 sg(a)) · “gg(a))) ·

如同对自由返回情况的分析，我们将上述和式依照 min|n_{s+1}-n_i|

S

< /N 和厲 +1—标 > 加分成两部分. 由一个类似的讨论得到，对充分大的 h, 我们有

J J. I J

E((H&(a))A) W (const ”🄵以 ‘厂,)* + 0<N-芝).(4. 9) 由 (4. 9) 式我们得到，相应于少 j, 极限分布对几乎所有的 a E A 有密度幻，它满足’

[g/(a) ds M const Z 厂 M ” 厂 (4.10)

Jfv(a)

对 J > J, 我们要证明相应 j> J 的全体有界返回的数目 (分布) 是小的，记

n —1

8

其中织 =2 气，而气 (a) 定义为

丿 7+1

_ J1. 了🄵 (a) 存在，

饥 8)= [皿火,&) 不存在.

如果外 6 WA、由 (3. 8) 中有关步的估计推得

8

号 gl^w g| 「

J=1

因此仞 M l“l. 由上式还可以得到，只有 I 川 >J+1 时，们才可能不为 0, 从而立得

< const 2

点 ʜJ+1

因此 E(TQ W eT C 与前面对自由返回情况的讨论相同，我们考虑 ECTQ 时分两种情况:minlsi-啪 W 加和 1%+1-色 |

S

> m 并由此容易证明，对几乎所有的

尽 7\(a) VeTQ

N-*w

总结上述的结论，我们可以将; • 上的分布情况写成下面的定理.

定理 4.6 对几乎所有的 *aEA,* 自由返回和非本质自由返回的极限分布具有一致有界的密度, 而有界返回极限分布具有密度 gU). 2 满足不等式

gGr) Wcon 就 [习厂第侦🄵—工)+ 习 e「第 * 甄工—*uj)J,*

%odd 勺 even

(4.11)

其中

• z V0.

3. 在厂外的分布问题的讨论.

到目前为止，我们仅在 r 内讨论了分布问题. 令 {罔愆)) 🄵】表示轨道 {5(a)}: =i 回到广的点. 那么 (4.1) 的冶, 可以表示为

1 a 1 M n d , ”

上 =4 力%时 = 时%)= 吏沼),

v=l *v=*\ 卜 1 *u* i=0

(4.12)

其中求和号 Z’ 表示, 如果 F’Jq *& r,j= l,2,-,k,* 那么

V

^(Uv) 属于该和式 ·

令产表示 (他住】的“•-极限. 我们已经证明皿闻 =

川厂 £ ”, P V 2.

, —*8 J

下面我们讨论 {成>} 🄵 1. 由于风 W ”, 卩 =1,…,AC 所以

supp /4° U [1 —泌 2,] 🄵

给定小区间 3U 口一渺 S1], 那么 F-4 由广中两个对称小区间。和一 0 组成. 由 (4.12) 我们有

&3)= 必> 3)= 成 *3* U (-。)).

因此

ju(co) < f A(x) di,

8 expl — •|- 搭)

其中 ft(x) = const 2 . 做变量替换 y = FS), 那么

I & —z|E

上式的右端具形式

, (.2

Hz) dx = 2 > (F 尸 Cr))(F「> dz ,

JnU(-fl) J® ; ±7

其中 {FQ 捻是 FT 的两个分支，我们证明

2

J> (F 尸 (z)) (F 🄵), (Z) £ 〃, /> V 2.

事实上

IL* ” 一 3) 的 F-3I 风 = j: |y |，云🄵血

const $|_o$ | A (x) | *• Ax < const > £. &

因为

[width=1.65972in,height=0.52639in]media/image85.pngL

P

& + G 、, 卩 = [击 +1 其中 E 和 G 为常数. 记上式右端的两项为 £ 和 S” 为证明（4.13）的收敛性，我们只要估计 & 和 £ 的阶. 利用 | 🄵 | 2e~”, 我们有 |x-$_M$J > 🄵财,Y W] 口 E 🄵. 因此得 S 的估计式

7

S] W const] 号七一伊’| 心 1*2 🄵和祯 W const e（邱 T”）·

y=\

用积分估计式，我们容易证明

Sgf const 、厂亍

T/勺 +1 V

7 1 🄵

V const （1 + 🄵來）厂野七

由上述对 & 和另的估计立得（4.13）的收敛性. 因此,V P<2.

闵（1-折，1）£ （4.14）

现在令 a 是 (一 1,1 - 中的一个区间，那么

n

为 (a) = 🄵〉3) · (4.15)

*=2

我们已经知道对于 z£ (1 —抻,D, 如果 FXQ 冬广 “ =1,2, -,k-l, 那么存在 A> 1, 使得

|3нF*(z)| >A*. (4.16)

用此事实以及完全类似前面的方法，我们有下面的估计

W j g*(z)dx, h = 2,3,—

其中 kill? < const A~\ 2, 由此推得

L8

ZJgAO)&,

k=2

8 , ’

其中习由此我们证明了定理 4.1. |

*=2

小話 4.7 以上我们已经详细地讨论了 F(z,a) = 1 —心 2 在 a = 2 附近的动力学行为. 证明过程也说明，［Yo］中阐述的关于当前如何研究非双曲系统的看法的实用性. 下面我们简单地介绍，关于一般单峰🄵射族兀 S) 的新结果，以此作为对上面特例的总结.

定义 4.8 设 # 是一个参数空间. Y 艾ロ, 设兀 (工) 是区间 1= ［一 1, 口上的映射. 称 {兀} 住” 是正则映射族，如果

(i) 是关于 Gc,a) 的 C，映射；

(ii) c_0 = 0 是九的唯一临界点，兀在 ［一 1,0) 单调上升而在 (0, 口单调下降，$A(oxo<f_a(o),fl(o)KJl(o),$ 并且对所有 X 6 (— 1,0) 匕 (z) > X| •”

(iii) 存在正数 4：,A；,C* 和 r^2, 使得对所有 a 任 # 和所有慾, 少 G I

A；| 🄵 7 三庖兀慾) 丨 |x|^{r}-i,

以及

I ajaS) I v {p. X $_1$1 \

TV^)T$^{Cexp]c}$ 7~^{1}I)-

附注 4. 9 请读者分析 F(H,a) 是否是正则映射族.

记 {c„(a)l-$_{=1}$ 表示临界点 c° = 0 的轨道. 下面我们皀义可扰动参数的概念 •

定义 4.10 设 {兀} 抵 “是正则映射族. 一个参数 a . 称为可扰动参數，如果它满足如下条件:

<M) 存在 L >Q,y 并且兀. 没有稳定

周期轨;

(CE。) 存在 l >0, 使得对每个 de(0,L) 和”2、如果 *H £1* 满足 n.(F $ 并且尺 *3) e *(-S,3),i = 0,l,*

• • •,* — 1, 那么 (X)| > e”(

M (qd))

(T) 战叫 (”)) =Q,^o-

附注 4.11 (M) 条件即通常所说的 Misiurewicz 条件, 它要求临界点勺 =0 是非回复的; 面九. 没有稳定周期轨可以保证在临界点的任意邻域外的任何足够长南轨道段的指数增长.(CEQ 条件是证明过程中技术上的要求，它保证轨道的增长指数 (比方说 A) 与临界点邻域的选取无关.(T) 条件是F截条件, 它保证九F截地穿过 0 . 对兀愆)=1 一技回言, F =2 是可扰的. 可以证明对此映射

定义 4.12 参数队称为一个 Borel 集 JJ £ 或的 Lebesgue 正 91 点，如果

, -|。D(4. — e,a* + e) |

T I# n (a. — e>a. + e) |

其中F表示集合。的”besgue 测度. 特别，如果该极限值为 1, 则称 a•, 为 Lebesgue 全? I 点.

附注 4.13 显然全稠性意味着正稠性. 在对兀 =1 一山的讨论中，我们仅证明了。. = 2 是正稠点 -实际上将证明F加改动，可以证明。.=2 是全稠点.

对一般的具可扰参数山的正则族 {兀槌 A 我们有

定理 4.14 令 {兀} 亦/是正则族. 对每一个可扰参数 a* E 行，存在正常数 a 和用使得%是满足以下诸条件的参数 a 构成的集合” 的全稠点.

(NS) 兀无稳定周期轨;

(ER) V « > 1. |/S(0) | > e exp(— na)f

(CE1) V ”20,| 勺務 (兀 (0))| > A exp («A);

(CE2) 对 V«>1, 如果 x6 [-1.1] 满足充愆) 尹 0 对于 k == 0,1,— ,n — 1 成立，并且務 (£)= 0, 那么 | >

k exp(n 人).

由于对每个 a E D,f_a 满足条件 (NS),(CE1) 和 (CE2), 利用 CNS] 的结果，立得对 f_a 存在一个关于 Lebesgue 测度绝对连续的不变概率测度产.

近年来，在非双曲系统研究中不断有较深刻的结果出现. 我们在本章中不准备介绍了. 但有一点要指出，我们在这里介绍的 Benedic 屁和 Carleson 的证明思想 (简称 BC 方法)，近几年来在这个方向的研究中起着十分关键的作用. 事实上, 无论是对一般区间映射族还是对平面间宿相切 (例如 Henon 映射)，鞍结分岔甚至高维的同宿分岔现象所得到的主要结果的证明方法，基本上是 BC 方法, 或者是从这一方法中派生出来的.

即使我们只考虑 R” 上的向量场. 在讨论分岔的余维数时, 也需要在全体光滑向量场所成的（无穷维）空间中考虑某些子流形的余维数, 以及光滑映射与这个子流形的横截相交性等. 为此，我们在附录 A-C 中介绍一些有关微分流形与微分拓扑的概念、名词和重要结果，以便使读者减少🄵找参考书的麻烦. 对这些结果本身感兴趣的读者, 可以参考有关的文献，例如

[Al], 和 [Zg] 等.

附录 **A Banach** 流形和流形间的映射

微分流形是欧氏空间中光滑曲面概念的抽象和推广. 它的基本思想是, 先在这个对象的局部通过与 Banach 空间的一个开集建立微分同胚而引进相应的代数和拓扑结构，然后再把这些局部结构光滑地粘接起来. 因此，我们可以把 Banach 空间中的运算推广到微分流形上.

微分流形的定义

定义 A. 1 设 M 是一个连通的 Hausdorff 空间,B 是一个 Banach 空间. 假设 U 是 M 的开子集怦是从 U 到 8 中开子集构）的同胚映射, 则祢（U 瘁）是 M 的一个坐标卡.

M 的两个坐标卡（U，时，（V,^ 祢为是 C 相容的，如果当 u n V 尹。时，映射

,。广 1 叫而，p（C7 fl V）- <P（JJ f| V）

是 8 上的仃微分同胚,

M 的坐标卡集必 ={（亿洪）|a£ A}（A 是一个指标集）称为一个 L 坐标系, 如果

(1) $\{U_a \backslash aeA\}$ 是 M 的一个开覆盖;

(2) 庭中的任意两个坐标卡都是 r 相容的.

M 的两个 C 坐标系 # 🄵庭勢为等价的，如果也 U M 还是 M 的 (7 坐标系.M 上 (7 坐标系的一个等价类 £ 称作 M 的一个仃微分结构. 2 内所有坐标系的并集 #=U {方 1^65} 称作 M 的一个极大仃坐标系, 而（V, 时 6 丿称作一个容许坐标卡.

如果在 M 上给定了一个< 7 微分结构 & 删称 S=（M,£）是一个仃微分流形. 一般常把 M 与 f 等同，简称 M 为微分流形, 为了标明卡映射甲的取值空间 B, 可称 M 为装备在 B 上的 Banach 流孵（注意, 由 M 的连通性和坐标卡的相容性易知,B 与坐标卡的选取无关）. 特别, 当 B 为 Hilbert 空间时，称 M 为 Hilbert 流形涵当 B 为有限维空间（例如 R”）时 ，称 M 为 3 维）微分流形.

附注 A.2 应该指出，一旦给定了諺的一个坐标系行，就可以把与 M 等价的全部坐标系合起来而得到一个极大坐标系，从而生成 M 上的一个微分结构. 因此，只须给定 M 上一个特定的坐标系, 就可以决定这个微分流形.

附注 A.3 如果把定义 A.1 中的仃全部换成 C”, 则我们相应地得到 b 微分流形.C” 微分流形也称为光滑流形.

例 A.4 (1) 设 B 是一个 Banach 空间，则可取坐标卡（B,id）, (id 是 B 的恒同映射）, 这个坐标卡显然就构成 B 上的一个 b 坐标系. 因此，任何 Banach 空间都是装备在它自身上的一个光滑 Banach 流形.

S” = {工 £ R”$^{+1}$1 U|| = 1）是一个 m 维流形. 事实上，记 N = {1,O,-,O},S= {-1,0,• • •, () } 分别是 S” 的北极与南极，取坐标卡 (S”\{N}, ” (S»\{S}, ft）, 其中

”S”\{N}fRK, 啊 = (~~丨一三僅~~, 🄵 S^{n}\{S} — R”, 你如,…, 命 +1) = (~~丨 . 务~~, 容易得出

^?T, ! R^{n}\{0} ->R”\{0}, 件矿🄵）= 赤是 C~ 微分同胚.

流形间的映射

定义 A.5 设 M,N 分别是装备在 Banach 空间 A,B± 的役’ 流形.*ftM^N* 称为是(/映射, 如果 VнEM, 及 N 上任一容许坐标卡 <V,Q J3）6 V, 3 必中的容许坐标卡（U, 机工 G *U, f*（*U*）*U* V, 使得映射（叫作 *f* 的局部表示）

*f^ = <!>^a f -f'** 中（U）U A — *<p*（*V*） U B 是仃的.

容易证明下面的两个定理.

定理 A.6 设 *f*MfN* 是流形间的连续映射，则/ 是顷的，当且仅当对 M 与 N 上任意取定的坐标系而言，相关的局部表示都是仃的.|

定理 A.7 设 *M,N,P* 都是仃流形都是尸映射，则复合映射也是（7 的.|

定义 A.8 设是 <7 微分流形，称须，MfN 为仃微分同胚，如果它是一一的仃映射, 并且其逆映射 M 也是 C5 的. 如果两个流形间存在一个 r 微分同胚，则称这两个流形 C 微分同胚.

子流形与积流形

类似于向量空间的子空间与乘积空间, 微分流形也存在子流

形与积流形.

设 N 是微分流形 M 的一个开子集, 则把 M 上的微分结构限制到 N 上，就自然得到 *N* 上的一个微分结构, 从而使 *N* 成为一个与 M 同维数的流珍这时，称 N 是 M 的一个开子流形. 俱是 M 前一个闭子集，例为 R”+i 中的闭子集 3” 也可以成为一个流形（见例 A.4）. 注礨，此时程 R”+i 中存在坐标卡〔U, 乎），使祁 J （AS”）成为 R” 的子集. 这引出如下的一般定义

定义 A.9 设 M 是装备在 Banach 流形理上的微分流形.M 的一个子集 *N* 称为 *M* 的子流形. 如果戏 *£N,3M* 的容许坐标卡（。疗）, 和 *B* 的宜和分解 B = 8】击 0, 使得🄵 £ U, 并且

卩《7|”| 村）= 中《7）0（4 X {0}）.（A.1）

可对这个定义给出直观的几何解释 *N NC* 容许坐标

卡（U, 时, 使邻域 U ﬂ N 经甲作用展平在 *B* 的子空间 B_t 上.

定理 A.UJ 设 N 是微分流形 M 的子流形，则 N 自身也是一个微分流形，并且它的微分结构可由下面的坐标系生成：

{(C/r|N, pBnM)：(U,P）是 M 的容许坐标卡，

它满足条件（A.1)}．|

在附录 B 中, 我们将介绍通过浸入或浸盖来构造（或鉴别）子流形的方法.

定义 A.11 设是微分流形，它们分别有坐标系｛(。心”|a£4｝和{V”侏 B｝, 删集合 *MXN* 在由坐标卡｛(亿 X 皿，饱 X sMu°x*）|a £ A, 尸务 B ｝生成的微分结构下作成微分流形，称它为肱与 N 的积流形, 仍记为 *MXN.*

附录 B 切丛与切映射，向量场及其流，漫入与浸盖

向量丛是积流形的推广，而流形上的向量场，则是作为一个特殊的向量丛（即切丛的截面）而定义的. 利用切映射，我们可以把

Banach 空间中的隐函数（反函数）定理以及局部浸入和浸盖定理推广到流形上, 从而得到判断（构造）子流形的有效手段. 下面先定义向量丛.

向　丛

定义 B.1 设 M 是仃微分流形,B 是 & 皿 ch 空间$_t$*UCM* 是开集，称 17X3 为局部向量丛, 并称 U 为底空间, 它可以等同于 (7 X {0}, 后者称为同部向量丛的 # 截面.V«6 u, 称 3} X B 为过 « 的鉀维，它可以众 *B* 获取 Banach 结构.*Y u£ U,bW B,* 由 R（“，方）=” 所定义的映射 *^UXB^U* 称为投影..

注意, 过 “的纤维就是而 U X 召为积流形 *MXB* 的一个开子流形.

定义 B. 2 设 *UXB* 和 5 X B 都是局部向量丛. 如果映射 *”U 7* 和%: E7f ）都是（7 的，则由

强 *u,b*）=（阳（“），¥%（“）• 6）

所定义的映射 *fUXB-^U’* x *B’* 称为 r 局部向量丛映射. 如果这个映射还是一一的, 则称它为仃局部向量丛同构.

注意, 一个局部向量丛映射把纤维 S} X 五线性地映到纤维 (« (»)} XB*. 一个局部的向量丛映射是局部向量丛同构，当且仅当 VuGU, %（«）是 Banach 空间器与否之间的同构映射.

类似于微分流形的定义，我们可以把局部向量丛粘接起来，得出整体的向量丛结构.

定义 B.3 设 S 是集合. 称（W, 时是 S 的一个局都向量丛卡，如果 IV U S, 甲是从 W 到一个＜ 7 局部向量丛 *UXB* 的一一映射（U,B

可能与 p 有关）. 称这样的卡集留 ={（W^,%）|a£7i} 是 S 的 b 向丛坐标系，如果

（1）$\{W_a \backslash aeA\}$ 覆盖 S;

（2）若（”》, 代)，（w“啊）e 第，吼,n 巧声尹。, 则%（叽 n 巫 #）是局部向量丛，且阳 ° 缶’^（WoAW’|)）是 b 局部向量丛同构. 称 S 的两个向量丛坐标系幽 1 与绥将价, 如果🄵 1U 漆必是一个向量丛坐标系. 向量丛坐标系的一个等价类称为 S 上的一个 C° 向量丛结构. 称 *Ef*）是一个 b 向暈丛，这里 S 是一个集合，🄵是 S 上的一个 r 向量丛结构. 与微分流形类似，通常也把 E 与 S 等同，并把源中的任意局部向量丛卡称为一个容许向 丛卡. 向量丛有如下性质’

（1）仃向量丛 *E* 是一个侦微分流形.

（2）对向量丛 E, 定义其専截面（或称为 E 的底空间）

M {p e E\ 3 容许向量丛卡使 p = 它是 E 的子流形.

设怦）是一个容许向量丛卡，弈 *WfU X* 设 pF

W，满足甲（/>）= 3,0）, 令集合

Eg = ?”’（{“} X BQ,

它可以通过中从 B 诱导 Banach 结构，并以 *p* 为零元素. 如果（Wi, ft）和（巫“啊）是两个容许向量丛卡,P G W^i Cl W2, 则 *Eg* 与 E’,%线性拓扑同构（作为线性空网是同构的，作为拓扑空间 * 同胚的）. 在这个意义下，可以认为 Eg 与甲无关, 可记为 E_P.

（4）v«eE,3 唯一的 Pe M（底空间)，使得 eeE_P. 由此，可定义投彩

E f M, = *p,*

它是仃的满映射，并且旷 W）= 耳称为过 *peM* 的纤维，它具有的 Banach 结构称为纤维型. 在有些书上，把上面的性质作为向量丛的定义. 我们有时也把向量丛记为或 wEf M, 以标明投影映射 m 和底空间 Af.

从几何上粗略地说，以流形 M 为底空间的向量丛, 就是在 *M* 上的每一点 “附着” 一个以该点为零元素的 Banach 空间, 而不同点上附着的 Banach 空间是彼此同构的. 例如，在 S? 上，我们可以用下

列两种方式构造出不同的向量丛:V，€ S2, 取过力的法线为纤维 E,；或取过 *p* 的切平面为 *Ep.* 前者的纤维型是畔，而后者是 R^s.

切空间与切丛

我们可以通过坐标卡把 Banach 空间中曲线相切的概念诱导到流形上，从而建立切空间与切丛.

定义 B.4 设 M 是仃微分流形设 $>0, 开区间 Z = (一🄵 3) . 称。映射 cJf M 为 M 上的一条曲线「如果"0) = P，则称曲线以 P 为基点. 设上, 电是以 P 为基点的两条曲线，并且 (U 怦) 是一容许坐标卡，p e U. 如果

D (p。C]) (0) — D (p。@) (0)

(即 Banach 空间中的曲线处 q 与中。勺在。点相切)，则称 M 上的曲线勺与 6 在 p 点相切，

注意，利用流形 M 上坐标卡的相容性,%与位在声点的相切性与容许坐标卡的选取无关, 事实上，设 0, 對)，(叫决) 是两个坐标卡,/> 6 n u_2. 设 D3。2 (0) = D (p。C2) (O) . 由于 •

矽。G = (©。p–1) - (中。c;) , i = 1,2,

所以

D (© ° <: i) (0) = D (0 » 亍') (卩 3)) • D (p- cD (0)

=D@ -伊 f) (p (/>)) - D (p» c_z) (0) = D (。。C2) (0) .

这样, 我们在同基点的曲线之间规定了一个等价关系 m🄵 Qq 与 § 在 * 点相切. 记 c 在🄵的等价类为称它为流形 M 在 P 点的一个切向

定义 B.5 设 M 是 U 微分流形 (r>l) ,/>eAf. 在» 点的全体切向量之集合

T»W) = 是 M 上以? 为基点的曲线} 称为流形 M 在 p 点的切空间. 并称 M 上全体切空间的集合

为 M 的切丛.

定 SB.6 切空间是一个 Banach 空间, 而切丛 TM 在投影

jrtTMM (jr^cjp — p)

之下作成一个向量丛

证明先证明 *T?(M)* 是一个 Banach 空间. 取包含 7 点的一个坐标卡 (!/, 甲), 则以/ 为基点的曲线 c 有局部表示 D3u)(0)W 0 (R,Span?07)). 记旦 =(7?,Spanp({7)), 它是一个 Banach 空间 • 这样.v Ed_f $er_?$(A/), 有" = D(>C)(O) 与之对应. 反之，Vp € 耳，令 c«)= 广 (敏")+ 拔)，则 p° c(r)= 秩 *i>) + vt,* 从而 D("Q(O)=a, 从 c 可得于

是，得到 TpW) 到品的一一对应. 这样，就可把 B_r 的 Banach 空间结构通过局部表示 D0>。c)(0) 而迁移到 *T* 政 *M)* 上.

再来证明是向量丛，其中投影 *mTM f M* 通过巩［員捞 =/• 规定. 取仃微分流形 M 的一个坐标系 ==*{(U*$_a$*,* 物)|a£A}, 则由下文的定理 B.10 可知,*^={(TU*$_a$*,T<p*$_a$*)*$_a$*eA* 就构成了 TM 上一个 (7-[1] 向量丛坐标系，其中 7Va = *U^Tp(M),* 而丁削丁 (我 UQ) 是如下定义的切映射.

切映射

设是微分流形 J：A/f N 是仃映射 5 法 1). 设 q 宀是财上在” 点相切的两条曲线，则/。勺和 E 是 N 上在/(/.) 点相切的曲线. 事实上，设 (U, 时，(V)Si) 分别是 *M.N* 上的容许坐标卡,*p € u,fip')e* v,y(u)uv, 则 D(少勺 “。)=D(wy)(o). 注意

<*l*>° *f* ° *c,*— 3。y。p-') ° (p ° C,), *i* — 1,2, 则由 Banach 空间中导算子的链式法则可得

D(0 ° *f* - c,)(0) = D(° ” *f*。广)(中 (0)) - D(中 > c；)(0),

(B. 1)

从而

D@ * *f*。勺)(0) = D((J。*f* ° c$_z$)(0).

由此，我们给出如下定义

定义F 7 如果是流形间的 C^1 映射, 则称映射 T/：*TM* -> *TN,* 7y([c3 = [/。理 3

为 *f* 的切映射. 有时也把 7Y 记为 d/或兀.

如果 (U 建)，(y,Q 是上而所说的坐标卡，则由 (B.1) 式可知，序有如下表示式

Tfi 3,a) 1 (須 (/>), D3 - *f*。广)(?</>)) • 0),

(B.2) 其中 p 表示 D(p。c) (0). 由此，可从 Banach 空间中导算子的性质, 得出切映射的如下性质，

(1) 若 *f*: *MfN* 是仃的，则 *TfWN* 是 (7T 的.

T”M) - Tp(N) 是线性的.

(3) 若 *AMf,* K 是流形间的仃映射，则

T(g，*f)=TgF*

是 TM^TK 的 (7T 映射.

(4) 若五: 是恒同映射，则 Th: $TMfTM$ 也是恒同映射.

(5) 若 BMf N 是微分同胚，则 $Tf'TMfTN$ 是单、满映射，且

引理 B.8 设 W 是 Banach 空间 B 的开子集 (从而是 b Banach 流形 B 的开子流形)，则 7W 同构于局部向量丛 W X 尊 (因此，我们在下文中把加与"X B 等同).

证明设 c 是 W 上以在为基点的曲线，则存在唯一的 i&B, 使得由

Cp,b(.t) — p 1b 所定义的曲线在 P 点与 c 褂切. 事实上，以 (0) 是名 *(R,B)* 中唯一的线性映射, 使得与曲线，在在点相切的另一曲线具有形式

g(t) = p + Dc(0) • *t.*

令 g = CM，则 b = DC(0) - 1 是唯一存在的. 定义映射

A' IV X B- *TW, h{p,b} — [Cp,b}*$_P$,

则上而的结论表明 h 是一一的. 我们可以在 TW 上建立局部向量丛结构. 例如，取 *K{p}XB)* 为过 *pEW* 的纤维，则儿恰是 7W 与 *WXB* 的局部向量丛同构映射.|

引理 B.9 设 W 和 W^7 分别是 Banach 空间 B 和 3 的开子集, f, *W^W'* 是仃微分同胚，则 *TfiWxB^W' XB'* 是局部向量丛同构映射.

证明因为

773,8)=(須 (力)，D_f。)E)

(见 (B. 2) 式，取务少为恒同映射)，所以 *Ff* 是 *L* 局部向量丛映射 (见定义 B. 2). 又因为『是仃微分同胚，因此 *(T* = TH* 也是一个 < 7 一' 局部向量丛映射, 从而" 是一向量丛同构映射.| 现在可以证明

定理 B.10 设财是</微分流形 & 梁 1),#={(儿用) 楂 £ A} 是 M 的一个仃坐标系，则 *T* 庭 =((T(U$_a$) ,T 皿))S £ 是切丛 *TM* 的 C-^{1} 向量丛坐标系，从而 TM 是 (7T 向量丛.' 此外，如果 M 是" 维流形，则 *TM* 是 *2n* 维流形.

证明 (U T«j$_a$) |« e A} Z) 7W. T«J$_O$) n

A. 则由引理 B.8,

T 物 cr(s)n T(UQ)=T($_P$n T(a(s))

是局部向量丛，并且

T% ° (Tfj,)-11 码 (7\%)(1 崇 “)=T(師。缶’)

(见定义.B. 7 下的性质 (3) 和 (5)). 注意驿。传’ 是%(C/$_Q$) 所在的

Banach 空间 E 中的开子集你 T（S）f| *TW*）到自身的 CT 映射. 由引理 B. 9 立得，(T”。(亍铅厂是 C-1 向量丛同构映射. 因此，帛曳口.9 申的柔侔 U）和 坞成立. 有关维数的论断，是引理 B.8 的自然推论（注意做 S）是它所在 Banach 空间的开子集）.|

附注 B. 11 前面已经提到，流形间的切映射是 Banach 空间中导算子的推广 • 因此，有时把它称为导映射 • 设 M 和 N 是充分光滑的微分流形，则定理 B. 10 说明,TM 和 TN 是向量丛，从而是微分流形（见向量丛的性质 ），并且 TM 因此, 可以继

续求二阶导映射 *T*（*Tf*）*=T²f>T*（*TM*）*^T*（*TN*）, 并可递推地定义高阶导映射.

向量场及其流

定义 B.12 设（E, 心 M）是一个向量丛. 如果映射

满足?rM = idM, 则称它为向量丛的一 个截面 M 称为是（7 连续的，如果它作为 Banach 流形间的映射 Af-£ 是（7 的 ·

定义 B. 13 设 M 是一个 C5 微分流形, 其切丛上的一个 C7rMsW8）截面 *XiM^TM,* 称为 M 上的一个仃向量场.*M* 上一切（7 向量场的集合记为缶飞 M）.

附注 B.M 设 *X’M^TM* 为一向量场, 按定义 QX = idM, 即 V *P &M,* 有 X3）€ *TpM.* 换句话说,M 上的向量场就是把 M 上的每一点赋予一个（在该点切空间内的）切向量，从而形成一个 M 上的切向量场.

现在设（ 】, 1）~M 是 M 上的一条 § 曲线（sWr）, 我们要规定曲线上每一点的切向量 • 注蠢由映射 *f M* 可得切映射

Tai 77 = / X R— *TM.*

取切丛 77 的一个截面 A-/-TI, A（t）-a,D,Vt&7, 则复合映射

Ta - A> 7->TAf 是上的一条 C1”1 曲线. 记廿 =• Ta。人，称 *QTM^M* 上的曲线 a 在 p 点的切向董. 如果取/上的坐标卡 (W,id) 和 M 上的坐标卡 (。并)(£ E *W,$_a$(t) EU),* 则由公式 (B. 2) 可知，映射/有局部表示

*(f) = Ta(t,l) = (a(t), D(0。a)(r)). (B. 3)

注意, 上面的 1 是 R' 中的单位映射.

定义 B.1S 设 f £ 亥'(M)JURi 是开区间,0 e *I.* 称 a: / f M 是 S 的过 A6M 的积分曲线或流，如果 *Yt&r,*

J </(f) =£(a«)),

1 a(0) = *p„.*

称上述流是极大的，如果 £ 过 A, 的任一流俄 J U Ri f M (J 是包含 0 的开区间)，都有 *JUI,* 且 a|j = &

取 M 上的坐标卡 *(U,^,fio eU,* 设向量场 TM 有局部表示其中 *sU— B* (Banach 空间). 与上面/(c) 的局部表示相对照, 就得到 Banach 空间中关于 3。a) 的微分方程初值问题

j D(p ° a) «) — *v(a(t))=* 为。少-i ((中。a) (f)),

I(0。a)(0) — *<p 3°).*

利用坐标卡的 c^1 相容性，此方程与坐标卡的选取无关. 就是说，如果取另一坐标卡 *(V* 仲 *HpM* V，则只须把上面微分方程和初值条件中的 *<P°* a 换成 0。a 即可.

利用 Banach 空间中微分方程初值问题解的存在和唯一性定理，可以得到

定理 B. 16 设?€ l.jgjf 过力的极大流

是存在且唯一的. I

由附注 B. 14 可知，求? & 过户的流, 就是在 M 上找一条过 * 的曲线，使它在每一点的切向量刚好与 S 在该点给出的切向量相吻合，这与欧氏空间中向量场的流的概念相一致.

附注 B. 17 如果 Af = U 是 Banach 空间 B 的一个开子集，则

u 上的向量场就是一个映射 x: i/f a x 8, 它具有如下形式

X(H)=(工 VGc)).

我们称 V 是 X 的主部 (principal part). 显然, 我们可以把 X 与 V 等同，简单地认为向量场 X 就是映射们 *U^B.* 此时, 如果曲线F) 满足微分方程

Da(f) =U(g),

则它就是 *X* 的流 (在定义 B. 15 中仲 =id).

如果 M 是一个 U 微分流形，(U,p) 是它的「个坐标卡，啊 *U* fiy'UB, 厕 M 上的向量场 X 诱导出 8 上的一个向量场.

云 =7V · X(?ri(z)),

它称为 X 的局部表示.

设是一曲线,。是亲的主部，如果

D5(r) =V(«(0),

其中三 = 罕 5、则 a 就是 M 上的积分曲线.

特别地，当 B = R” 时, 京的主部 0 具有形式 (叽。),…，吃 (“)), z£R”. 设曲线 a(£) 的局部表示为 (勺《),…,a”Q)), 则它成为积分曲线的条件是

因此可以说，对于 « 维流形上的向量场而言, 其积分曲线的局部表示满足 R” 中的微分方程组.

🄵入与浸盖

隐函数定理是微分学中最重要的定理之一 • 设 f R” 是 a’ 的. 当 $m = n$ 并且导算于 D/(x_D) 是单、满映射时 J 给出 x_0 的邻域到 K（女）的某邻域之间的微分同胚., 如果 D/（x_0）仅是单射（设 $m <$ 沥, 则存在 R” 中/（x_0）附近的局部微分同胚幻使得在％点附近有

g ° f（命,..., 办）H*（气,…,%,。,• • •,（)）,

这在微分几何中称为 1 局部）正则浸入. 另一方面, 若 W（他）仅是一个满射（设 $m > n$）, 则存在 R” 中归点附近的局部微分同胚矿使在玄点附近有

f°^{h}-（气，…, 弓, %+1，.“, 工京 i （而,…, 不)，这称为（局部）正则浸盖（投影）.

容易把隐函数定理推广到 Banach 空间. 现在我们把上面有关技入和🄵盖的结果就 Banach 空间的一般情形给🄵证明，然后再通过坐标卡推广到微分流形上, 并由此得到构造（或判断）子流形的方法. 对于无穷维的 Banach 空间，仅有 D/（x）的单射（或满射）>’ 件是不够的，要附加适当的可裂性条件. 首先给出下面的.. 代”「

定义 B. 18 设 E 是 Banach 空间，田是 E 的闭子空间. 🄵🄵容在 E 的团子空间码，使 E = g £ 爲, 则称瓦是可裂的（split）.

附注 B.19 如果 E 是有限维的, 则它的任何子空间都是闭且可裂的；如果日是 Hilbert 空间,G 匚 E 是闭子空间，则 E = G® G 🄵，因此 Hilbert 空间的闭子空间都是可裂的. 但存在无限维 Banach 空间,

它有不可裂的闭子空间. 一般而言,E 的闭子空间 F 可裂的充要条件是; 寻 $P3$ （E,E）, 使 = 且「= 脸 £ $E\backslash Pe=\hat{}e\}$.

定理 B.20（局部浸入: 定理）设 E,F 是 Banach 空间，八 $UU\ EfF$ 是仃映射,$r\hat{}l,u_aEU$. 设"g)，Ef F 是单射，并且 D/（«o）的值域码 = 烫是闭且可裂的. 从而存在闭子空间 $F_1\ U\ F,F$ = 🄵 £ FR.（当 E = R",F = R" 时，只须设 rank（D/ （阳））=m.）则存在开集 VCF （/ («„）€ V）和归 UE W 码, 以及仃微分同胚? > V-> W, 使得（卩。f)（e） = （e,0）,Y e

£ V (1 (E X {0}) UE.

证明由条件可知，线性映射 D/(«o) 是 £ 到码 = 阕 ("(%)) UF 的代数与拓扑同构. 令

g：U X 码 U E X 卩 2 f F = F1 🄵码，g(",t>) = /(a) + v, 其中$_u eu,ve\ F_s$. 注意

D/(u_0) 0 '

DggO) = „ ,

(J

是 $U\ XF_2\hat{}F_t®F_t\hat{}F$ 的 U 微分同胚' 由隐函数定理, 存在开集卩, 归, 使 (#。, 0)e 及仃微分

同胚 f>: V f W, P⇁ = $g\backslash_w$. 因此，v (e,0) e v, (p • y)(e)= 3。g)(e,O) — (e,0). I

定理 B.21 (局部浸盖定理) 设 E,F 为 Banach 空间,f>$U(Z$ Ef F 为 (7 映射,r>l,«$_0$ e tA 设 D/($_{M_0}$) 是满射，并且战 = ker(D/($_{Ko}$)) 是可裂的,E = & \$ Ez(当 E = R-,F = R" 时，只须设 rank(D/m))= 如)，则存在开子集 U 和 V,% £17, UC7,VU F£E，以及 (7 微分同胚岫 f 邛使得 («, u) e V.

证明定义映射

g：t7 C £j ® E_2 -* F® E_2, g("i,"z)— (/(a_l,tt_a),w_z). 因此

(Dj/Cwo) $D_2/(a_0)$'

Dg(uo,O)= ,

。$^{j£}$2

故 Dg($_{Mo}$,0)eGX(£,K®E_a), 由隐函数定理，存在开集 V,

成 UC7,VUF 🄵旦, 以及仃微分同胚 SV-*U,, 使得 <!>-' $—g\backslash v$-因此

a, 勿 =(g。,)(心力 =(/w«tv),^3(w,v)),

其中。 山 X 处，即间 (心 a) = 5 e Q 0)(14 加)=* · I

现在把上面的结果推广到微分流形之间的映射 *f'M f N.* 注意及 $T_M(N)$ 都是 Banach 空间，因此下面的可裂性条件是合理的.

定义 B.22 设 M 和 N 是 Banach 流形 *J*、*MfN* 是 C7 映射. 称/ 在 *PEM^C*-局部浸入, 如果 Tp/ 是单射, 而且它的象集在 $T_{}WN$ 中是闭的可裂集. 称；' 在 *P&M* 是 b 局部浸盖，如果是满射，而且 ker(Tyf) 作为丁双的闭子空间是可裂的. 在流形 M 上每一点都是 C 局部浸入 (局部浸盖) 的映射称为 C 浸入 (浸盖).

定理 B.23 设是 Banach 流形,*f*: *M^N* 是仃映射 (r > 1), 则下列三种陈述是等价的：

(1) /在，EM 是局部浸入；

(2) 存在坐标卡 *(U, G 雨，P £ U ,fUV 冷 U fU*、*5Vfir* x u', 且 K3)=0, 使得 o。須。0T:。'—成 x V' 是包含映射 Pi 3,。)；

存在少的邻域 U, 使得是 N 中的子流形，且 flu 是 U 到/W) 的微分同胚.

证明 (1) 与 (2) 的等价性可由定理 B.20 得到.(2) 与 (3) 的等价性可由子流形定义 A.9 得到，注意 V 是 N 中的开集.|

附注 B.24 定理 B.23 说明, 若在力是局部浸入, 则存在/> 的邻域 U, 使 *f(U)* 是 N 中的子流形. 要特别注意这个结论的局部性. 🄵使須在 M 的每一点都是局部接入, 也不能断言/'(M) 是 N 的子流形. 事实上，浸入的局部单射性不能保证整体的单射性. 例如，由平面极坐标方程 r = COS2W 定义的映射 f IT 是一个浸入，但不是单射，且/(5[1]) 不是 W 的子流形 (见图 1). 即使浸入 『*MfN* 在整体上是单射，仍不足以保证須 (M) 是 N 的子流形. 一个反例是由极坐标方程 r = sin 田定义的映射/ (0,2^) U R f R2(见图 2). 上面两例中的问题都出在 W 原点附近的邻域内、

[width=2.07361in,height=0.9in]media/image86.png[width=0.11319in,height=1in]media

图 L 图 2

利用须从 M 诱导的拓扑与 7XM) 作为畔的子集而获得的拓扑是不同的. 在前一种拓扑下,/”(M) 作成一微分流形, 因而有时称单射溪入的象集 _f€M) 是一个漫入子流形; 但是在后一种拓扑下, 它可能不是 *N* 的子流形. 此时 M 与 *HMK* 作为 *N* 的子空间) 不同胚. 这就引出了下面的

定义 B.25 设北 *M-N* 是寝入, 并且是 M 到/’(M)(在 N 的相关拓扑下) 的同胚, 则称它是一个嵌入. 此时, 称是 N 的嵌入子流孵.

容易证明下面的

定 SB. 26 设F *MfN* 是单值的浸入, 若它是 *M* 到 *f(M)* 开映射 (或闭映射), 则 /是一个嵌入.I

定理 B. 27 设是微分流形,*f^M -> N* 是仃映射,*q € N,S* = 广 W). 若 / 在 S 上每一点都是局部浸盖, 则 S 是 M 中的一个仃子流形.

证明由定理 B.21 及子流形的定义即得.**I**

附注 B.28 设是仃映射. 点 *qgN* 称为 f 的正则值, 如果 *Y* 作广 *5* 项是满射且其核在与 M 中是可裂的. 记为 为 •/的一切正则值的集合, 则定理 B. 27 有如下等价的陈述:

” 定理 B.29 若则广】(q) 是 M 中的子流形.|

在讨论一个映射的水平集时, 这种说法是方便的.

附录 **C Thom** 横截定理

在寻找结构不稳定向量场的普适开折时, 有时要确定开折中的通有族 (generic family), 或称为一般族, 非退化族. 为此, 需要利用 Thom 横截定理 (它是从著名的 Sard 定理导出的), 事实上, 为了把无穷维问题简化到有穷维, 我们需要的是 jet 形式的 Thom 横截定理. 因此, 我们先建立映射空间中的拓扑, 再引进成流形, 最后介绍 Thom F截定理.

映射空间的拓扑’

记 (7 (M,N) 为 *C* 微分流形 M 与 N 之间的 (7 映射所成的集合. 我们在 *C\M,N*) 中引进拓扑, 使它成为拓扑空间.

定义 C.1 (弱拓扑, 即 compact-open 拓扑) 设/’ £ C (*.M, N*), (t/瘁) 和 (丫仲) 分别是 M 和 N 的容许坐标卡; 令 *KUU* 是紧集, 使 *f* (*K*) *U* 丫; 令 e 为正实数. 定义弱子基邻域

彳 (m7,9>), W, 0), K,e) = {g £ (7 (5/0) |g (K) U U, sup ||。(。° f。pT)(z) —。(4&。g ° < e}.

C7M,N)中的 U 弱拓扑就是由这种形式的集合所生成的. 任何包含有限个这种集合交集的集合都是 f 的一个邻城. 所得的拓扑空间记为

定义 C.2 (强拓扑，或 fine 拓扑,WHiney 拓扑). 令 * = {(亿, 铀)|a 任 4} 是 M 的一个局部有限坐标系，即 M 的每一点都有一个邻域, 它只与有限个相交; 记火 =A},K.U 亿是 M 上的紧集; 图 ={(皿 *)愣 £ B} 是 N 的坐标系. 对任一正数集合 £ = (&a|a£ A}, 定义

，(儿岳,Q - {g£(T(Af,N)|g(KQU*(小

sup ID0S)° f ⁰ 妃)(Z)

—成由 *3 ° g ”* Q (Z) II <$£_a$. V a e *A}, CXM,N*) 上的 r 强拓扑就是以上面类型的集合为拓扑基（开集）所生成的. 记所得的拓扑空间为 *CslM’N*).

附注 C3 上面我们假设 r<8. 为了定义 C$(Af,N)(或 C; W,N)), 只须把包含映射 *C8*(*M,NS*(*M,N*)(或 *N* 机诱导的拓扑对所有有限的 r 合起来即得.

附注 C.4 q(Af,N) 有很好的性质. 例如，它可以赋予完备的度量，并有可数基’ 当 *M* 为紧流形时与皿 *M,N*) 一致, 它们是 Banach 空间. 当肱不紧时，弱拓扑不能很好地控制 U 映射在“无穷远”的性质，强拓扑就成为需要的了’ 注意，在 M 非紧时，强拓扑在任一点都没有可数基，因而它不可度量化. 但是，在强拓扑下🄵(M,N) 的任一弱闭子空间都是 Baim 空间（剩余集在其中稠密）. 这对研究通有性质是很重要的. 如无特别声明，下文中都取强拓扑, 并把🄵(M,N) 简记为 C7M,N).

下面几个定理反映了 *CXM’N*) 中函数类的性质.

定 3 C.5 设为 U 微分流形，1 M s M+ 8, ICrCs.dimM <+oo. 则 G\M,N) 在) 中稠密, 其中

U CXM,N) 表示如下任何一个映射类:

微分同胚、嵌入、闭嵌入、浸入、浸盖、真映射（即紧集的原象是紧集）. I

定理 C.6 G) 设则任何 U 镰分流形 U 微分同胚于一个 C” 微分流形’

(2) 设 lWrVsW+8, 若两个 C• 微分流形 (7 微分同胚, 则它们 C^1 微分同胚.|

定理 C.7 (Whitney 定理) 设 lW『W+8, 则任何 n 维的 C 微分流形都仃微分同胚于 RE' 的一个闭子流形.I

附注 G8 从定理 C6 可知, 如果把所论流形的光滑性提高到 C", 并不是一个很严重的事情. 今后我们将经常作这样的假定. 虽然» 维微分流形是我维欧氏空间非常一般的推广, 但定理 C 7 说明, 它反过来又可作为嵌入子流形放到 $R^{2"+1}$ 维欧氏空间中.

射式 W) 流形

设是 U 微分流形. 我们把三元组怹, 了, *U*) 的等价类母, *f,U*\称为从肱到 *N* 的一个 r-jet, 其中。U *M* 是开集,h 6 *U* ,*f* 6 *C**U*、*N* 机等价关系 (.*x,f,U*\🄵S' ,*f* ,*U'*\是指注 =/ , 并存在 M 与 N 中的容许坐标卡 (W, 仞和 (*V*,<!>-) , 使 WUU (~1 t? UM, 并且局部表示

>P - £ * *p'* 与。。尹。广: Wf / (iy) n *f* (W) 在 z 的前 r 阶 (包括 0 阶) 导数均相同.

显然, 上面的定义与坐标卡的选取无关, 从而也与。的选取无关. 因此记

称徵为映射 r 在エ点的 r*, 并称 Z 为起点, / ») 为终点.

记尸 (*M,N*) 为全体从肱到 *N* 的 r-jet 之集合' 我们把 J^r (*M,* N) 中起点在 x 的子集记为终点在 y 的子集记为 *J* 試 *M,N*) * 而把再) 与 *J^M,N*) 的交集记为

现在考虑一个特殊情形,M = R^m(N = R". 此时简记

J (R^m,R^n) =

设 uuRm 是开集, /er (u,R^B) , 则 f 在点的广阶丁🄵辰多项式就给出/ 在 # 点的。jet 一种自然的表示. 这个从 R" 劉 R" 的多项式映射可由『在纟点直到 r 阶 (包括。阶) 导算子所唯一决定. 这些导算子合起来, 属于向量空间

FGng) = R^n X %R 七 R*),

*=1

其中 Sf * (R^{ra},R") 表示从 R™ 到 RK 的龙重对称线性映射所成的向量空间. 这说明, 对 PGMM) 中的每一个元素, 都有且仅有一个中的元素与之对应, 从而有下面的等同关系,

— P'S,"），

= R™ X PXwig）.

因此，当 r 有限时，尸（成是有限维的向量空间' 如果 UUR 七 V U R" 都是开集，则尸（U,V）是按 S,"）的开子集.

现. 在设 *M, N* 分别是皿维和" 维流形. 若(U , 會),(V,

°）分别是上的容许坐标卡，则

E &/ h* 疗 Cr）（少。/"。广）

就给出了尸（U,V）f 尸（🄵。），🄵丫））的单、满映射, 从上面的讨论中得知是 jr（m,"）中的开集，而 jr（m 两与欧氏空间同构' 所以（8, 尸（U, 矿））就是尸 3f,N）的一个坐标卡' 这样，就可以从的 tT 坐枚系导出 J^r（$.M,N$）的 C。坐标系' 当

是 C^{+i} 流形时，尸（M,M）是一个甘微分流形, 称为从 M 到 N 的射式（jet）流形.

Thom 横截定理

定义 C9 线性空间 Z 的两个线性子空间 X 与 Y 称为是横栽的，如果它们之和是整个空间,$L = X + Y$.

由于微分流形的切空间是线性空间，而切映射是切空间之间的映射，所以可以定义两个子流形的横截性和流形间的映射与象空间中某子流形的横截性.

定义 C. 10 设 A,B 是光滑 Banach 流形 M 的两个光滑子流形. 称于流形 A 与 8 横截，如果 A PI B = 0, 或者 V $pEAdB$, T_PA 与 T_pB 在 TpM 中（在定义 C. 9 的意义下）横截.

定义 C.11 设 M,N 是光滑的 Banach 流形 M 是 N 的光滑子流形. 称 C"(r>l) 映射 f: MfN 在点 p £ M 与 A 横截，如果 面 & A, 或者/(/>) 6 A, 并且满足下面的条件

- (1) $(Tpf'XTpM) + T_{fw}A = Tfs>N$, 而且

(2) $T_{fw}A$ 的原象.$(T_f\hat{}A)$ 在 T_PM 中可裂. 在每一点都与 A 横截的映射 f, 称为与子流彩 A 檎截.

注意，当 M 是 Hilbert 流形 (特别地，是有限维流形) 时，可裂性条件 (2) 是自然成立的 (见附注 B. 20).

例 C.12 (1) 如果定 JtC.il 中子流形 4 上的每一点都是 y 的正则值 (见附注 B. 28)，则 f 与 A 横截.

(2) 如果 Af,N 是有穷维的，且 dim(M) 4-dini(^)<dimN, 则； 与 A 横截意味着 *f(.M) CIA = 0.* 例如，把 R^1 嵌入 R^5 的映射与 R 中的曲线 *7* 横截 K 嵌入曲线与 7 在 It，中无公共点'

由于横截相交性与坐标卡的选取无关, 所以当 *M* 与 *N* 都为有穷维流形时，下面的结果显然成立.

定理 C. 13 设 M 和 N 分别为林维和孙维的 C" 微分流形，*f N* 是可微映射，A 是 N 的余维为 5 的 *C~* 子流形. 设 *M* 在血点附近有局部坐标 扌，…，漬，*N* 在 *fg* 点附近有局部坐标护,…，俨. 如果在『3。) 的某邻域 U 内，点集 A Ci U 有表达式尸 =…= 尸 =0, 则映射『与子流形 A 横截的充分必要条件是 (尊 | 在 点的秩为 s. I

下面设 M 和 N 是有限维光滑微分流形，且是第二可数的，人是 N 的光滑子流形，记

= j/er(A/,N)|r>l,/ 与 A 横截｝，

虫 Sard 定理和附注 C, 4, 可以推出下面的结果.

定理 C. 14 (Thom 横截定理) *W(M,N; A)* 是 *C^M'N)* 中的剩余集 (即可数个开調集的交集), 从而在 *UVM'N)* 中稠密. 如

果厶是闭子流形，则它还是开的.I

证明可参考［Hir,pp74 - 77 ㊣这个定理说明，若厶是 M 的闭子流形, 则中与 *A* 不横截的映射可以在任意小扰动下成为横截，而原来横截的映射仍可保持横截, 因此，利用㊣截性可以得出 CTW'N）中的通有族，又称为一般族.

Thom 横截定理可以推广到 jet 形式. 这样就可把无限维空间中的通有性问题，转化到有限维空间 *mM,N*）中的横截问题.

定理 C. 15 （Thom 横截定理的 jet 形式）设 *M,N* 是无边界的有限维光滑流形,A 是的 L 子流形,1Mr Vs W 8. 则映射集合

事 ={/eCCA/.JOI//与 A 横截}

在 C\M,N）中是剩余集，从而是稠密集. 如果 4 是团的，则質在中还是开的.|

证明可见［Hir,pp80 一 811 下面的定理对于确定子流形的余维数是重要的.

定理 C.16 设 *f'MfN* 是 5 映射,A 是 N 的子流形. 如果 f 与 A 横截，则尸'（4）是 M 的子流形. 如果 A 在 N 中有有限余维，则

codim（yTG4)）= codim（A）. |

特别地，当是浸盖时, 条件勺’ 与 4 横截” 总是溝足的; 而投影是特殊的浸盖.

参考文献

[Al] Arnold V I. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1983

[A2] Arnold V L Ten problems. Adv. in Sov. Math. 1990(1): 1—8* 数学译林，1993(4):257-261

CAAIS]Afraimovich V *S,* Arnold V I, H 如 shenko Yu S_f Sil^iikov L P · Bifurcation Theoryj Dynamical Systems V . New York：Springer-Verlag, 1988

[ALGM] Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I I_t Maier A G. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane- New York(Israel Program for Sci. Transl. , Wiley« 1973

[AMR] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. London Amsterdam — Tokyo；Addison-Wesley Publishing Company, Inc. , 1983

[Ba] Bautin N N. On the number of limit cycles which appear with variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type. Math. Sb. 1952, 30：181 — 196 (in Russian)i AMS Trans. Series 1962, 5：396-413 (in English)

[BC1] Benedicks M, Carleson L. On iteration of 1 — « x^2 on (—1,1). Ann. Math. 1985, 122：1-25

[BC2] . The dynamics of the Hfenon map. Ann Math. 1991» 133：73 —

169

[Be] EeJIHHUKHft r P · HopMaJILHHe gpMbh I HBapMaHMH H jTOWIbHblC OTOGpaJKOHMfi- Khcbi Haykosa AyMKa, 1979

[BL] Bonin G, Legault J. Comparision de la methode des eon-stantes de Liapunov et la bifurcation de Hopf. Canad. Math. Bulk 1988, 31(2)：200 -209

[Bol] Budanov R T. Versal deformations of a singular point of a vector field

on the plane in the case of zero eigenvalues. Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2：37—65 (in Russian) *i* Sei. Math. Sov. 1981, 1*1* 389—421 (in English)

[Bo2] · Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields.

Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2；23 — 35 Gn Russain)i
Sei. Math. Sov. 1981, l_t 373-387 (in English)

C. 陈翔炎. 含参数微分方程的周期僻与极限环. 教学学报，1963, 13(4)：607 — 609

[Cyl] 曹永罗. 关于非双曲奇异吸引子. 北京大学博士论文，1994

[Cy2] Cao Yongluo. Strange attractor of H^non map and its basin. Scientia Sinica (Series A), 1995, 3839-35

[CH] Chow Shui-Nee, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory. New York：Springer-Verlag, 1982

[CLW] Chow Shui-Nee< Li Chengzhi, Wang Duo. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. New Yorkt Cambridge University Press, 1994

[CM] 蔡燧林, 马晖. 广义 Lizard 方程的奇点的中心焦点判定问题. 浙江大学学报.1991, 25(4)：562-589

[Cs] 蔡燧林. 二次系统研究近况. 数学遂展，1989, 18(1)：5-21

[CS] Cushman R, Sanders J. A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation. J · Diff · Eq. 1985, 59：243 — 256

[CW] 陈兰赢，王明二次彼分系统极限芥的相对位置和数目. 败学学报，1979, 22(6)：751-758

[CY] 陈兰莉，叶奮谦. 方程组等 =-¥ + &r + ZH，+ zy + p：,$=z 的极限环的唯一性. 数学学报，1975, 18. 219-222

ECZ] 蔡燧林，张平光. 二次系统极限环的唯一性. 高校应用敛学学报，1991, 6(3)：450-461

D. Dulac H · Sur ks cycles limites. Bull. Soc · Math. Fr. 1923 · 511 45 — 188

[DER] Dumortier F • El Morsalani M, Rousseau C. Hilbert% 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics, to appear in

Nonlinearity

[DGZ] Drachman B_t van Gils S A, Zhang Zhi-Fen. Abelian integrals for quadratic vector fields. J. Reine Angew. Math. 1987, 3821 165—180

EDL] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程. 北京：高等教育出版社，1991

[DLZ] Dumortier F, Li Chengzhi • Zhang Zhi-Fen. Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded hetroclinic loops. Preprint $_f$ 1996

[DRR1] Dumortier F_f Roussarie R, Rousseau C. Hilbert% 16th problem for quadratic vector fields, J. Diff · Eq · 1994, 1101 86—133

[DRR2] · Elementary graphics of cyclicity one and two. Nonlinearity,

1994, h 86-133

[DRS1] Dumortier F_f Roussarie R, Sotomayor J. Generic 3-parameter family of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. Ergodic Theory and Dynamical Systems 1987, 7: 375—413

[DRS2] · Generic 3-parameter family o£ planar vector fields $_T$ unfolding of

saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts. Lecture Notes in Math. 1991* 1480: 1—164

[DZ] 杜乃林，曾宪穢 · 计算焦点🄵的一类通推公式. 科学通报，1994, 39 (19)：1742-1744

[E] Ecalle E J · Finitude des cycles limites et acc616ro-sommation de ^application de re tour. Lecture Notes in Math. 1990 · 14551 74 — 159

[EZ] Edmunds D E t Zheng Z. On the stable periodic orbits of regular maps on a completely ordered invariant set. Preprint

[F] 泻贝叶. 临界情况下奇环的稿定性. 数学学报, 1990, 33(1)：113-134 [FLLL] Farr W W, Li Chengzhi9 Labouriau I St Langford W F. Degenerete

Hopf bifurcation formulas and Hilbert 七 16th problem. SIAM Math. Anal. 1989, 20： 13-30

[GH] Guckenheimer J •, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York：Springer-Verlag v 1983

[GaHo] Gavrilov L« Horoaov E · Limit cycles and zero of Abelian integrals satisfying third order Picard-Fuchs equations. Lecture Notes in

Math. 1990, 1455： 160-196

[Go] POMOSOB E IL 9KBMBaJieHTHocTE ceMeAcTB 4n44»eoMOp^x*MOB KaHeMHoro K/iacca rjtaflKocTw- BecTH. XapbKOB. yw-Ta- Cep. Max. -MaT, 1976, 134(41)、95— 104

[Gw] 高维新. 僻析理论讲义 (北京大学数学系用).

H. Hilbert H D. M&thmatische Probleme (lecture). The second International Congress of Mathematicians, Paris 1900» Gottinger Nachrichtenj 1900： 253-297

[Ha] Hayashi S. On the solution of C^l stability conjecture for flows. Preprint. [HI] Horozov E, Uiev I D. On saddle-loop bifurcations of limit cycles in perturbations o£ quadratic Hamiltonian systems. J. Diff · Eq. 1994, 113 (1)： 84-105

[Hir] Hirsch M W. Differential Topology. New York Heidelberg Berlin： Springer-V^rlag, 1976

[HLZ] 韩茂安，罗定军，朱帬明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性 (I
)、*5).* 数学学报，1992, 35(4)：541-548、35(5), 673-684

[Hm] 韩茂安. 周期扰动系统的不变环面与亚调和解的分支. 中国科学 (A 辑)，1994(11), 1152-1160

[Ho] Horozov E. Versal deformations of equivariant vector fields in the case of symmetry of order 2 and 3. Trans, of Petrov ski Seminar 1979, 5*1* 163 _192 (in Russian)

[Hw] Huang Wenzao. The bifurcation theory for nonlinear equations* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. VoL 109 New York, Marcel Dekber. INC, 1987, 249—260.

[HWW] Huang Qichang$_t$ Wei Junjie. Wu Ji&ngbong. Hopf bifurcations oi some second-order FDEs with infinite delay and their applications. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(4)：

[Hu] Hu Sen. A. proof of the C stability conjecture for 3-dimensional flows. Trans. AMS. 1994.

[HZ] 韩茂安. 朱德明. 微分方程分支理论. 北京: 煤炭工业出版社，1994

I. Il\eshenko Yu S. Finiteness theorems for limit cycles. Russian Math. Surveys 1990, 40_1 143-200

[IL] UVashenko Yu S, Li Weigu. Nolocal Bifurcation$_f$ to be published by AMS

[IY] UVashenko Yu S, Yakovenko S. Finitely smooth normal forms of local families diffeomorphisms and vector fields. Russian Math. Surveys 1991, 46：1-43

[Jajjakobson M V. Absolutely continuous invariant measure for one-parameter family of one-dimensional map- Comm. Math. Phys. 1981* 81: 39 — *88*

[Jo] Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual generalized hoinuclinic bifurcation. SIAM J. Math. 1988. 48：481—496

[K] Khovansky A G · Real analytic manifolds with finiteness properties and complex Abelian integrals. Funct. Anal. Appl. 1984, 18：119—128

[LI] 廖山涛. 微分动力系统的建性理论. 北京，科学出版社，1992

[L2] Liao Shantao. Obstruction sets, Minimal rambling sets and their applications. In：Oiinese Mathematics into 21st Century. Peking University Press, 1992.

[Lc] 李承治. 关于平面二次系统的两个向風中国科学 (A1») · 1982Q2), 1087-1096

[LbZ] Li Bao-Yi · Zhang Zhi-Fen. A note on a result of G · S · Petrov about the weakened 16th Hilbert problem. JMAA 1995, 190：489^516

[LH] 李继彬，黄其明. 平面三次微分系统的极限环复眼分支. 数学年刊 (B 辑)，1987, 8；391-403

[LHZ] 罗定军，韩茂安. 朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性 (I). 数学学报，1992, *35(3); 407-417*

[LR1] Li Chengzhi, Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation t the cusp of order 4. J. Diff. Eq. 1989, 79：132-167

[LR2] · Codimension *2* symmetric homoclinic bifurcation. Cam J.

Math. 1990, 42：191 一 212

[Lw] Li Weigu. The bifurcation of ”eight figure” of separatrix of saddle with zero saddle value in the plane» Preprint of Peking University f Research Report f No 46, 1995

[Lz] 梁肇军. 多项式律分系统全简分析导引. 武汉，华中师范大学出版社. 1989

[LZ] Li Chengzhi, Zhang Zhi-Fen. A criterion for determing the monotonicity of the ratio of two Abelian integrals. J. Diff. Eq · ,1996, 124$ 407— 424

[M] MaM R · A proof of the C^1 stability conjecture. Inst. Hautes. Sci · Publ. Math. 1987- 66, 161-210

[Maj Mardesic P. The Number of limit cycles of polynomial deformations of a Hamiltonian vector field. Ergod. Th · & Dynam. Sys. , 1990, 10；523 _529

[Mo] Mourtada A. Degenerate and non-trivial hyperbolic polycycles with two vertices. J · Diff. Eq. , 1994, 113：68—83

[MV] Mora L, Viana L · Abundance of strange attractor. Acta. Math. 1993, 170, 1-63

[Ma] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥，安律教育出版社，1996 [NS] Nowicki T, Strien V S. Absolutely continuous invariant measures forC* unimodal maps satisfying the Collet-Eckmann condition- Inv · Math. 1988, 93：619—635

[Pl] Petrov G S · Number of zeros of complete elliptic integrah. Funct. Anal. AppL 1988. 18, 148—149

[P2] · The Chebyshev property of elliptic integrals. Funct. Anah AppL

1988. 22：72-73

[Pa] Palis J, A proof of the Q- stability conjecture. Inst, Hautes. Sci. Pubh Math. 1987, 66, 211-218

[Pon] nOHTTJITHH JI Q O flMHlMHTeCKHX CHCTeMaX, GJIM-SKIDC K EMHJTVTOHODbJM. ^ypHUi SKcnepHMeHTLrrbHoA н TeopeTHwecKofi <t） HamcK, 1934* 4：883 — 885

[PT] Palis J, Taken，F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge University Press« 1992

[Q] 秦元 «h 律分方程所定义的积分曲线，上、下册, 北京 * 科学出版社, 1956C959

[QL] 秦元勋，刘尊全. 律分方程公式的机器推导（ ）· 科学通报，1981,7：388-391

[Rl] Roussarie R. Weak and continuous equivahnces for families of line dif- feomorphisms. In ^Dynamical Systems and Bifurcation Theory*, Camacho, Pacifico ed.，Longman, Scientific and Technical, Pitman Research Notes in Math. Series 160, 1987* 377-385

[R2] On the number of limit cycles which appear by perturbation of

separatrix loop of phnar vector fields, BoL Soc · Bras.

Mat. 1986, 17: 67-101

[Rc] Rousseau C- Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field with 7-jet C™- equivalent to + (± J: ^{3} ± F · Lecture Notes in Math. 1989, 1455$ 334—354

[RS] Rousseau C; Schlotniuk D. Generalized Hopf bifurcations and applications to planar quadratic systems. Ann. Polon · Math. 1988, 49* 1 — 16

[RT] Ruelle D, Tokens F. On the nature of turbulence. Common. Math. Phys. 1971. 20: 167-192

[S] Singer D · Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. SIAM Ap- pL Math. 1978, 35: 260-267

[Sh] Shoshitaishvili A N · Bifurcation of topok^ical type of singular points of parameterized vector fields. Funct. Anal. AppL 1972(2): 169 — 170

[Si] Sibirskii K S. On the number of limit cycles in a neighborhood of singular points. Diff. Eq. 1965, 11 36—47 (in Russian)

[Sij] Sijbrand J. Properties of center manifold F Trans. AMS 1985, 289; 431 -469

[Sill] Sil^iikov L P. On a Poincart-Birkhoff problem. Math USSR Sb. 3 i 353-371 .

[Sil2] . On the generation of a periodic motion from a trajectory doubly

asymptotic to an eqilibrium state of saddle type. Math USSR Sb 1968, 6: 428-438

[Sil 3]— · A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddh-focus type. Math USSR Sb 1970. 10, 91-102

[SJ] Shen Jaqi, Jing Zujun. A new detecting method of conditions for the ex-

istence of Hopf bifurcation. In "Dynamical Systems* Nankai Series in Pure, Apl. Math, and Theor · Phy. , Vol 4, eds. S*T Liao,T-R Ding and Y-Q Ye, World Scientific Publishing, Singapore» 1993$ 188—203

[Sm] Smale S. Dynamics retrospective, great problems, attempts that failed.

Nonlinear Science, The Next Decade. 见" 数学译林",
动力系统学的回顾;宣大问题 失败的尝试.1993(4),262-
269"

[%] 史松龄. 平面二次系统存在四个极限环的具体例子. 中国科学, 1979

(11), 1051-1056

[T] Takens F. Forced oscillations and bifurcations: Applications of global analysis I . In Commun. Math. Vol 3 Inst. Rtjksuniv. Utrecht. , 1974 [TTY] Thieullen P, Tresser C, Young L-S · Positive Liapunov exponent for gereric one-parameter families of unimodal maps. Preprint

V. Vanderbauwhede A. Center manifold 私 normal forms and elementary bifurcations. Tn Dynamics Reported, Vol 2, ed& U. Kirchgraber and O · Walther, New York. Wiley, 1989, 89-169

[V&] Varchenko A N. Estimate of the number of zeros of an Abelian integral depending on a parameter and limt cycles. Funct. AnaL AppL 1984, 18: 98-108

[W] Wen Lan, On the C stability conjecture for flows.]. Diff. Eq-1996, 129(2): 334—357

[Wd] Wang Duo- An introduction to the normal form theory of odinary differential equations. Advances in Math. 1990, 19(1)$ 38 — 71

[Wil] Wiggins S · Introduction to Applied Nonlinear Dynamic 成 Systems and Chaos. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag,1990

[Wi2] , Global Bifurcations and Chaos T Analytical Methods. New York

Berlin Heidelberg Springer-Verlag»198 8

[Wl] 王兰宇. 多峰映射的动力学. 北京大学博士论文.1996

X. 肖冬梅. 一类余维 3 鞍点型平面向員场的分支, 中国科学 (A 辑).1993

(3)；252——262

LY1] 叶彦谦等. 极限环论　第二版. 上海: 上海科学技术出版社，1984 [Y2] 叶彦 3L 多项式微分系统定性理论. 上海，上梅科学技术出版社，1995 [YQ] YOCCOZ J C. Recent developments in dynamics. Plenary Address of the

TCM 勺 4

[YY] 杨信安，叶彦谦. 方程糸 =-】+ & + #+ 玲 + 陌，咨 = 工的极限环的唯一性. 福州大学学报，1978(2)：122-127

[Z] Zheng Zhiming. On the abundance of chaotic behavior for generic one-parameter families of maps. Acta Math- Sinica, 1996(12)；398—412

[Zdl] Zhu Deming, Melnikov vector and heteroclinic manifolds. Science tn China, Ser.A, 1994. 37(6), 673-682.

[Zd2] · Melnikov-type vectors and principal normals. Science in China,

Se“A, 1994, 37(7)；814-822.

[Zd3] . Transversal hetroclinic orbits in general degenerate cases. Science

in China, Sen A, 1996, 39(2)：U2-12L

EZDHD] 张芷芬. 丁同仁, 黄文灶. 董镇喜. 微分方程定性理论. 北京：科学出版社.1985

:Zg] 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海,上海科学技术出版社.1986

[Zj] 张嫦炎. 常微分方程几何理论与分支间庖 (修订本). 北京，北京大学出版社，1987

[ZJ] Zeng Xianwu, Jing Zujun, Monotonicity and critical points of period.

Prepress in Natural Science, 1996, 6(4) t 401 — 407

[ZQ] 张锦炎,钱敏. 微分动力系统导引. 北京,北京大学出版社.1991

[Zol] Zoladek H · On the versality of certain family o£ vector fields on the plane. Math. USSR Sb. 1984, 48：463-492

[Zo2] · Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes. J. Diff, Eq. 1987 · 671 1 — 55

[N] 涅梅斯基 B B. 四十年来的苏联数学 (1917-1957), 常做分方程部分. 饶生忠译. 北京: 科学出版社，I960

[Zzfl] Zhang Zhi-fen · On the uniqueness of the limit cycles of some nonlinear oscillation equations. Doki. Acad. Nauk SSSR» 1958, 119$ 659 — 662 (in Russian)

[Zzf2] . Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized

Li&nard equations. Applicable Analysis, 1986, 23$ 63—67.

囱F] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京，科学出版社,1987

中文词条按首字的笔画排列, 西文开头的词条按字母顺序排列.

[]@llll@ 画 子

— 五

责任编辑杨芝馨封面设计季思九责任绘🄵都林

版式设计李承治

责任印制王彦

（京）**112** 号

全书分为六章，各章内容分别是: 基本🄵念和准备知识，常见的局部与非局都分岔, 几类余维 2 的平面同曩场分岔，双曲不动点及马蹄存在定理, 空间中双曲🄵点的同宿分岔，实二次单峰映射族的吸引子. 在🄵三章的每章之后, 部配备了一定致量的习题.

本书可作为高等学校數学专业高年级本科生的选修课🄵材，或相关专业研究生的基 BB 课教材; 也可供希望了解分岔理佬这门学科的学生、教师或科技人员作为参考书.

图书在版编目（**CIP**）数据

向量场的分岔理论基础/张芷芬等编.-北京: 高等教

育出版社,1997

ISBN 7-04-006216-X

I. 向… 口. 张…皿. 矢量场 0413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 22634 号

高等教育出版社出版

北京沙摊后街 55 号

邮政编码：100009 传真:64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷广印刷

*

开^ 850X 1168 1/32 印张 10.375 字數 250 000

.1997 年 10 月第 I 版 1997 年 10 月第 I 次印刷

印数 0 001-1 715

定价 10.20 元

[width=2.33333in,height=3.7in]media/image90.jpeg