

国家精品课程

向量场的分岔理论基础

陈文彦
李庆远
陈永清
李秋红

高等教育出版社

高等学校教材

向量场的分岔理论基础

张芷芬	李承治
郑志明	李伟固

高等教育出版社

前 言

动力系统的理论,起源于对常微分方程的研究,近半个多世纪以来得到了蓬勃的发展. 随着在结构稳定系统的研究中所取得的突破性进展,对结构不稳定系统的研究(即分岔理论)便受到越来越多的关注. 分岔理论具有深厚的实际背景,又需借助于现代数学的深刻工具. 在实际应用和数学发展的双重推动下,这一理论的前景是广阔的.

所谓分岔现象,是指依赖于参数的某一研究对象当参数在一个特定值附近作微小变化时,它的某些性质所发生的本质变化.

在自然界中,分岔现象是普遍存在的. 例如,导管中的液体流动,当流速超过某个特定值时,就由层流变为湍流;在生态系统中,当一些自然条件超越某些特定状态时,便可引起生态平衡被破坏或种群灭绝等.

既然分岔现象普遍地存在于自然界中,因而在描述自然现象的数学模型中,分岔现象也大量存在.

例如,描写磁腔管中磁振荡的模型

$$\epsilon \frac{d^2 x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + \epsilon x = b \sin t,$$

其中 $0 < \epsilon \ll 1$, b 是一物理量. 自本世纪 40 年代起,这个方程就引起了人们的关注. 随后发现当 b 取某些特定值时,系统有非通常意义下的吸引子,从而引出了奇异吸引子的概念. 事实上,正是在 N. Levinson 对这个方程研究结果的启迪下, S. Smale 给出了著名的马蹄映射的例子.

又如,60年代从气象学研究中提出的 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \gamma x - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

变量 $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, 参数 $\sigma, \gamma, b > 0$, 其中 γ 是刻画气体流速的雷诺数. 利用计算机研究发现, 若取 $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, 则当 γ 在三个(分岔)值 $\gamma_1 \approx 13.926, \gamma_2 \approx 24.06$ 和 $\gamma_3 \approx 24.74$ 附近时, 相应系统的轨道结构呈现出某种“混乱”现象. 进一步的研究表明, 这种看起来“杂乱无章”的现象却有内在的规律性, 这不仅给湍流的形成以新的解释, 而且引出了一系列有关混沌现象的研究工作, 至今还是物理和数学界关注的热点问题之一.

再如, 从生态学中提出的虫口差分模型

$$x_{n+1} = x_n(a - bx_n), \quad a, b > 0, a - bx_n > 0,$$

经过适当变换可化为单参数一维单峰映射族

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, \quad 0 < \mu < 2, x \in [-1, 1].$$

70年代 M. J. Feigenbaum 对它进行了细致的研究后发现, 当 μ 从 0 连续增加时, $f_\mu(x)$ 不断出现倍周期分岔点, 而且对应于出现稳定周期点的那些分岔值具有很强的规律性, 从而发现了一个新的普适常数. 由此引出的相关的研究工作, 也受到物理和数学界的关注.

数学上作为研究分岔现象的理论——分岔理论主要研究三类问题: 由常微分方程(或向量场)所定义连续动力系统的分岔; 由映射所定义离散动力系统的分岔; 函数方程的零解随参数变化而产生的分岔. 前两类分岔称为动态分岔, 而第三类分岔称为静态分岔. 它们既有区别, 又相互联系. 本书主要讨论动态分岔, 特别是第一类(即向量场的)分岔.

动态分岔理论主要研究动力系统的轨道族的拓扑结构随参数变化所发生的变化及其规律。例如,奇点(或不动点)的汇聚与分离及该点附近轨道的变化;周期轨的产生与消失,同宿轨、异宿轨(或环)的形成与破裂;以及一些更复杂的动力学行为(例如混沌态)的出现与消失等。

虽然分岔理论的某些方面可以追溯到 Poincaré 时代,但在这一研究方向上取得长足的进展,只是近 30—40 年的事。迄今为止,大部分工作集中于平面上退化程度不高(即余维 ≤ 2)的分岔,包括同宿分岔和异宿分岔问题等。分岔理论的发展很大程度上依赖于结构稳定性理论的进展,而目前只对二维流形上的动力系统的结构稳定性有较完整的结果。因而,当相空间维数增大或系统的退化程度增大时,问题的复杂性大大增加,完整的工作尚属少见。此外,最初人们希望在分岔值附近都能进行开折,即在分岔值附近存在几张超曲面,它们把参数空间分成若干开区域,每个开区域对应结构稳定的系统。但人们逐渐认识到,在不少情况下分岔值附近不存在这样简单而理想的拓扑结构,往往只能从测度上进行描述。本书的第五章 §3 和第六章将涉及这一问题。

本书的撰写由张芷芬主持。第一、二、三章由张芷芬和李承治执笔,第四、五章和第一章 §4 中的光滑线性化部分由李伟固执笔,第六章由郑志明执笔,附录由李承治执笔,最后经集体讨论定稿。

下面简要介绍本书的内容安排。

第一章介绍基本概念和准备知识。我们假定读者具有常微分方程和常微分方程定性理论的基础知识。因此,对动力系统的概念只作了简略的介绍。然后通过实例引进分岔的概念及分岔问题的提法。本章还介绍了简化分岔问题的两个重要手段:中心流形定理和正规形理论。最后介绍了普适开折和分岔的余维这两个概念。第二章介绍几类平面向量场的最典型的分岔现象,如奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔等,以及研究这些问题的典型方法;

还介绍了弱 Hilbert 第 16 问题. 在第三章中, 我们综合运用第二章介绍的理论和方法, 研究了几类平面向量场的余维二分岔现象. 第四章主要介绍二维映射的双曲不动点, 并给出一类复杂的不变集 (Smale 马蹄) 存在性的简洁而严格的判别方法. 这些结果在研究三维向量场的分岔问题中有许多应用. 在第五章中, 我们研究三维向量场中双曲奇点的同宿分岔, 以及与前述 Lorenz 方程相关的由一个双曲鞍点和一个双曲闭轨形成的环的分岔. 第六章介绍实二次单峰映射族在某个分岔值附近的动力性态, 在参数空间中可以存在正 Lebesgue 测度集, 使相应的映射族具有非双曲的奇异吸引子. 这说明从测度角度上看, 非双曲的系统并不少, 并且其动力学行为非常复杂. 本章不属于教材的基本内容, 只向读者介绍近年来动力系统研究的这个新热点. 本书最后的附录涉及到深一些的数学内容, 它是为那些想对书中的某些内容 (特别是第一章 §1 和 §5) 进行深究的读者准备的, 使他们减少查找参考书的麻烦.

作为分岔理论的入门教材, 本书主要介绍动力系统分岔理论中一些基本概念、主要结果和常用方法, 并力图通过最简单的例子涉及到这个理论的一些本质方面. 我们把重点放在向量场的分岔上, 但不可避免地涉及到一些离散动力系统的情形. 我们力求在选材上体现少而精的原则, 因而不得不舍弃一些十分精彩但陈述冗长的结果或证明; 在着力于可读性的同时, 尽量兼顾一定的理论深度; 并在注重解析推理的同时, 兼顾几何直观. 本书的大部分材料选自有关的论文或专著, 我们在书中都做了具体的说明. 为了使读者易于接受, 我们对这些材料做了整理和加工. 例如, 第三章 §1 中大部分定理的证明和第四、五两章中全部定理的证明, 是作者重新给出的; 在第六章大部分定理的证明中, 作者对原始材料作了必要的补充. 我们也在书中介绍了作者们一些近期工作. 例如, 第二章中对参数一致的 Hopf 分岔定理; 对 Abel 积分零点个数的估计和有关高阶 Melnikov 函数的结果等. 限于作者们的水平和能力, 书中难免有不妥或错误之处, 我们热诚欢迎读者们的批评

与指正。

本书可作为大学数学系高年级本科生的选修课或相关专业研究生的基础课教材;也可供相关学科学生或科技人员当作参考书。书中的大部分内容,我们曾在北京大学讲授过,部分内容也曾在1990年“南开动力系统年”期间被用作教材。根据我们的经验,对于每周3—4学时的、一个学期的课程,可以讲授第一章§2—§4,第二章,第三章§1,第四章和第五章§1—§2;对于每周3学时的、二个学期的课程,则可以讲授第一章到第五章的全部内容,第六章可选讲或选读。对于初学者,我们建议在学完第一章§2后立即转入第二、三章,而第一章的其它各节可在适当时候再学,这样可能更容易接受些。

我们愿借此机会对参加过北京大学分岔理论讨论班的曾宪武、井竹君、王铎、高素志、唐云、张伟年、李宝毅、李翠萍、肖冬梅、齐东文、曹永罗、王兰宇、赵丽琴、彭临平等同志和我们的研究生们表示感谢,他们的报告和讨论使我们受益匪浅;其中有的同志还帮助我们仔细审阅了部分书稿,提出不少好的建议,避免了一些错误。我们要特别感谢由伍卓群、黄启昌、曹策问三位教授领导的第一届国家教委理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组的各位专家,他们从审定本书的撰写计划到审议书稿都提出了很多宝贵、中肯的意见;感谢本书的主审人王铎教授和韩茂安教授,他们不仅对本书提出了很多建设性的意见,而且还提供了部分习题;感谢张恭庆教授,他在百忙中审阅了本书的附录,并提出了宝贵的意见;感谢高等教育出版社的杨芝馨等同志,没有他们的辛勤工作,本书也不可能这样快与读者见面。

在撰写本书期间,作者们得到国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的支持,我们也借此机会向有关方面表示感谢。

作者

1995年8月于北京大学

目 录

第一章 基本概念和准备知识	1
§ 1 动力系统及其结构稳定性	1
§ 2 分岔与分岔问题的提法	9
§ 3 中心流形定理	21
§ 4 正规形	31
§ 5 普适开折与分岔的余维	44
习题与思考题一	56
第二章 常见的局部与非局部分岔	58
§ 1 奇点分岔	58
§ 2 闭轨分岔	64
§ 3 Hopf 分岔	70
§ 4 平面上的同宿分岔	85
§ 5 Poincaré 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题	94
§ 6 关于 Petrov 定理的证明	107
习题与思考题二	127
第三章 几类余维 2 的平面向量场分岔	129
§ 1 二重零特征根: Bogdanov-Takens 系统	130
§ 2 二重零特征根: $1:2$ 共振问题	145
§ 3 二重零特征根: $1:q$ 共振问题 ($q \geq 5$)	152
习题与思考题三	157
第四章 双曲不动点及马蹄存在定理	158
§ 1 双曲不动点定理	158
§ 2 符号动力学简介	165

§ 3	Smale 马蹄	170
§ 4	线性映射的复合映射的双曲性	178
§ 5	Birkhoff-Smale 定理	184
第五章	空间中双曲鞍点的同宿分岔	190
§ 1	具有三个实特征值的鞍点的同宿分岔	190
§ 2	空间中鞍焦点的同宿分岔	200
§ 3	环的分岔	216
第六章	实二次单峰映射族的吸引子	242
§ 1	关于单峰映射稳定周期点的存在性	243
§ 2	$F(x, a) = 1 - ax^2$ 的基本性质	248
§ 3	$F(x, a)$ 不存在稳定周期轨问题	253
§ 4	分布问题	271
附录	284
附录 A	Banach 流形和流形间的映射	284
附录 B	切丛与切映射, 向量场及其流, 浸入与浸盖 ...	287
附录 C	Thom 横截定理	301
参考文献	307
索引	316

第一章 基本概念和准备知识

作为全书的准备,我们在 § 1 中简述有关动力系统和结构稳定的基本概念,不加证明地陈述一些重要结果;在 § 2 中引入分岔的概念,并着重阐明分岔问题的提法;在 § 3 和 § 4 中分别介绍中心流形定理和正规形理论,在研究分岔问题时它们是进行简化处理的有效手段;最后,在 § 5 中介绍奇异向量场的普通开折和分岔的余维这两个重要的概念.

§ 1 动力系统及其结构稳定性

动力系统的概念和理论是从人们对常微分方程的研究中产生和发展起来的,而且对常微分方程的研究,至今仍是动力系统理论的重要组成部分.

考虑 \mathbb{R}^n 中的自治微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1.1)$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^r 向量场, $r \geq 1$. 由常微分方程中熟知的结果, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, 方程(1.1)以 $x(0) = x_0$ 为初值的解 $\alpha(t, x_0)$ 在包含 $t = 0$ 的某区间上存在. 如果 $f(x)$ 满足适当条件(或在某种等价意义下对 $f(x)$ 进行改造, 见[ZDHD, pp23-24]), 则解 $\alpha(t, x_0)$ 可以对一切 $t \in \mathbb{R}$ 存在, 并且 $\alpha(t, x)$ 满足:

- (1) $\alpha(0, x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $\alpha(s+t, x) = \alpha(s, \alpha(t, x)), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$;
- (3) $\alpha(t, x)$ 对 (t, x) 连续.

我们把满足上述条件(1)–(3)的映射 $\alpha: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 称为 \mathbf{R}^n 中的动力系统, 或者称为方程(1.1)的流, 并把点集

$$O_\alpha(x) = \{\alpha(t, x) | t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$$

称为流 α 过 x 的轨道.

不难证明, 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $O_\alpha(x_1)$ 和 $O_\alpha(x_2)$ 或者重合, 或者(对有限的时间 t)不相交. 因此, (1.1)的轨道集合依 f 的不同而呈现不同的规律.

常微分方程定性理论(或称为几何理论)的首要目标, 就是对于给定的 $f \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $r \geq 1$, 研究方程(1.1)的轨道集合的结构(轨道集合的拓扑结构图称为相图, 通常在相图上用箭头标明对应于时间 t 增大的轨道方向). 一般而言, 方程(1.1)不可能用初等函数的有限形式求解, 因此研究它的相图是一个困难的任务. 例如, 即使当 $n = 2$ 且 $f(x)$ 为某些二次多项式这种最简单的非线性情形, 人们至今尚不清楚相图的确切结构. 参见[Y1, 2], [Q].

现在把动力系统的概念加以推广. 设 M 是紧致的 C^∞ 微分流形, 记 $\text{Diff}^r(M)$ 为 M 上所有 C^r 微分同胚的集合(见附录 A 中定义 A. 8), $\mathcal{X}^r(M)$ 为 M 上所有 C^r 向量场的集合, $r \geq 1$. 在 C^r 拓扑下, $\text{Diff}^r(M)$ 和 $\mathcal{X}^r(M)$ 均为完备的度量空间(见附录 C 中定义 C. 1, 定义 C. 2, 附注 C. 4). $\forall X \in \mathcal{X}^r(M)$, 存在 X 过 $p \in M$ 的极大流 α_X (见附录 B 中定义 B. 13, 定义 B. 15, 和定理 B. 16). 为了讨论方便, 假设 M 是无边流形, 从而使 $\varphi \in \text{Diff}^r(M)$ 可以往正、负向无限延伸, 使 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 的极大流在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在(否则要对微分同胚或向量场作适当处理).

$\forall \varphi \in \text{Diff}^r(M)$, 考虑从整数集 \mathbf{Z} 到 $\text{Diff}^r(M)$ 的映射

$$\Phi: \mathbf{Z} \rightarrow \text{Diff}^r(M), \quad \Phi(n) = \varphi^n. \quad (1.2)$$

对固定的 φ , φ^n 是 M 上的一个单参数变换群; 对固定 $n \in \mathbf{Z}$, φ^n 给出 $M \rightarrow M$ 的微分同胚.

$\forall X \in \mathcal{X}^r(M)$, 考虑从实数集 \mathbf{R} 到 $\text{Diff}^r(M)$ 的映射

$$\alpha_x: \mathbf{R} \rightarrow \text{Diff}^r(M), \quad t \mapsto \alpha_x(t, p), \quad (1.3)$$

其中 α_x 是相应于 X 的流. 对固定的 X , $\alpha_x(t, p)$ 是 M 上的一个单参数变换群; 对固定 $t \in \mathbf{R}$ 和所有的 $p \in M$, $\alpha_x(t, p)$ 是 $M \rightarrow M$ 的微分同胚.

因此, 我们可以把上而两种映射统一写成

$$\varphi_t: M \rightarrow M,$$

当 $t \in \mathbf{R}$ 时, 它是由 α_x 导出的连续流; 当 $t \in \mathbf{Z}$ 时, 称它为离散流.

φ_t 满足:

- (1) $\varphi_0 = \text{id}_M$;
- (2) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{t+s}$;
- (3) $\varphi_t(x)$ 对 t, x 一并连续.

有时也把 φ_t 称为 M 上的 C^r 微分动力系统. 特别, 当 $t \in \mathbf{Z}$, 称为离散动力系统. 本书主要讨论连续流. 由于它与离散流有密切关系(参见下面的定义 1.6), 必要时也讨论离散流.

定义 1.1 设 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 如上, M 中的集合

$$O_\varphi(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbf{R} \text{ (或 } t \in \mathbf{Z})\} \subset M$$

称为连续流(或离散流) φ_t 过 x 的轨道. 如果把上式中的 \mathbf{R} (或 \mathbf{Z}) 改为 \mathbf{R}_+ (或 \mathbf{Z}_+) 或者 \mathbf{R}_- (或 \mathbf{Z}_-), 则相应地得到过 x 的正半轨道或者负半轨道, 并分别记为 $O_\varphi^+(x)$ 或者 $O_\varphi^-(x)$.

定义 1.2 过 x 的正(或负)半轨道的极限点称为 x 的 ω (或 α) 极限点. x 的全体 ω (或 α) 极限点组成的集合称为 x 的 ω (或 α) 极限集, 记为 $\omega(x)$ (或 $\alpha(x)$). 即

$$\omega(x) = \{y \in M \mid \exists t_i \rightarrow +\infty, \text{ 使 } \varphi_{t_i}(x) \rightarrow y\},$$

$$\alpha(x) = \{y \in M \mid \exists t_i \rightarrow -\infty, \text{ 使 } \varphi_{t_i}(x) \rightarrow y\}.$$

显然, 当 M 紧致时 $\omega(x) \neq \emptyset$, $\alpha(x) \neq \emptyset$.

定义 1.3 设 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 如上, $p \in M$ 称为游荡点, 如果存在 p 的邻域 $U \subset M$, 和某个正整数 N , 使 $\forall |t| > N$, 有 $\varphi_t(U) \cap U = \emptyset$; 不是游荡点的点称为非游荡点, φ_t 的所有非游荡点的集合称

为非游荡集, 记为 $\Omega(\varphi)$. 即

$$\Omega(\varphi) = \{p \in M \mid \text{对 } p \text{ 的任意邻域 } U, \exists t, |t| > 1, \\ \text{使 } \varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

显然, $\omega(x) \subset \Omega(\varphi)$, $\alpha(x) \subset \Omega(\varphi)$. 因此, 当 M 紧致时, $\Omega(\varphi) \neq \emptyset$. 下面定义的临界元是 $\Omega(\varphi)$ 的重要组成部分.

定义 1.4 设 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 如上, M 的连通子集

$$L = \{p \mid \varphi_t(p) = p \text{ 对某一 } t \neq 0 \text{ 成立}\}$$

称为一个临界元.

给出临界元的定义是为了陈述上简洁. 有时要对临界元进行如下细致的区分.

在微分同胚的情形, 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\varphi^k(p) = p$, 则 p 为临界元. 满足这个条件的最小数 k 称为 p 的周期, 并称 p 为 k 周期点. 特别地, 若周期为 1, 则称 p 为不动点. 对于 k 周期点 p , 如果 $D\varphi^k(p)$ 的所有特征值的模均不为 1, 则称 p 是一双曲不动点 ($k=1$) 或双曲周期点 ($k>1$).

在向量场的情形, 临界元 L 有两种类型. 一种类型是, L 由一个点 p 组成. 在这种情况下, $\forall t, \varphi_t(p) = p$ (或等价地 $X(p) = 0$), 此时称 p 为向量场的一个奇点. 称 p 为一个双曲奇点, 如果 $\forall t \neq 0, p$ 是 φ_t 的一个双曲不动点 (或等价地, $DX(p)$ 的所有特征根都有非零实部). 另一种类型是, L 由向量场的闭轨 γ 组成. 此时 $\forall p \in \gamma, \exists t \neq 0$, 使 $\varphi_t(p) = p$. 这种最小的正数 $t = T$ 称为闭轨 γ 的周期. γ 称为双曲闭轨, 如果对某个 $p \in \gamma$ (从而 $\forall p \in \gamma$), $D\varphi_T(p)$ 的所有特征值的模除了一个以外都不等于 1. 注意, 此时 γ 上的每一点都不是向量场的奇点, $\forall p \in \gamma, X(p)$ 是 $D\varphi_T(p)$ 的以 1 为特征值的特征向量.

在研究向量场的轨道结构时, 局部的困难在奇点附近 (就奇点本身而言, 它无非是动力系统的一个平衡点, 但在它附近的轨道结构却可能千变万化); 而整体的困难在于非游荡集的结构, 它反

映出动力系统的本质特征.

定义 1.5 M 中的集合 Δ 称为 φ 的不变集, 如果 $\forall x \in \Delta$, 有 $O_\varphi(x) \subset \Delta$.

不难证明, $O_\varphi(x)$, $\omega(x)$, $\alpha(x)$, $\Omega(\varphi)$ 都是 φ 的不变集.

在研究闭轨的分岔时, 建立如下定义的 Poincaré 映射是一个很重要的手段.

定义 1.6 设 γ 是 C^∞ 流 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 的一条闭轨, $p \in \gamma$. 取 M 内包含 p 点的一个如此“小”的光滑余维 1 子流形 U , 使得流 φ_t 相应的向量场在 U 上每一点与 U 都是无切的. 从而 $\exists U', p \in U' \subset U$, 和在 U' 上定义的 C^r 函数 T , 使得 $T(p)$ 等于 γ 的周期, 且 $\forall p' \in U'$,

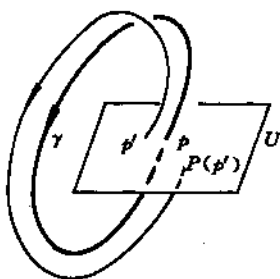


图 1-1

$\varphi_{T(p')}(p') \in U$. 由此可定义 Poincaré 映射

$$P: U' \rightarrow U, \quad P(p') = \varphi_{T(p')}(p'),$$

见图 1-1.

显然, $P(p) = p$, 即 p 是映射 P 的不动点. 利用 Poincaré 映射, 可以把对 C^r 向量场在闭轨 γ 附近轨道结构的研究, 转化为对 C^r 微分同胚 P 在不动点 p 附近轨道结构的研究.

我们现在转向结构稳定问题. 简言之, 在“小扰动”下不改变其轨道结构的动力系统是结构稳定的.

定义 1.7 称两个向量场 X_1 与 X_2 拓扑轨道等价, 如果存在同胚 $h: M \rightarrow M$, 它把 X_1 的每条轨道保向地映到 X_2 的相应轨道. 称

两个微分同胚 $\varphi_1, \varphi_2: M \rightarrow M$ 拓扑共轲, 如果存在同胚 $h: M \rightarrow M$, 使 $\varphi_2 = h^{-1} \circ \varphi_1 \circ h$. 称 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ (或 $\varphi \in \text{Diff}^r(M)$) C^k 结构稳定 ($k \leq r$), 如果存在 C^k 拓扑中的邻域 $U, X \in U \subset \mathcal{X}^r(M)$ (或 $\varphi \in U \subset \text{Diff}^r(M)$), 使 $\forall X' \in U$ 拓扑轨道等价于 X (或 $\forall \varphi' \in U \subset \text{Diff}^r(M)$ 拓扑共轲于 φ).

当同胚 h 还保持 X_1 与 X_2 相应轨道的时间对应时, 称为拓扑等价. 关于 C^r 拓扑的定义, 见附录 C. 通常考虑 C^1 结构稳定性. 此时常省略“ C^1 ”, 简称为结构稳定.

在向量场的双曲奇点 (或微分同胚的双曲不动点) 附近, 有下面的局部结果.

定理 1.8 (Hartman-Grobman 定理) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是包含 O 点的开集; 向量场 X 以 O 为双曲奇点 (或 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 以 O 为双曲不动点), 则存在 O 的开邻域 $V \subset U$, 使 X 与其相应的线性场 $DX(O)$ 在 V 上拓扑轨道等价 (或 φ 与其相应的线性映射 $D\varphi(O)$ 在 V 上拓扑共轲). ■

定理 1.9 (局部结构稳定性定理) 设 $X \in \mathcal{X}^r(\mathbb{R}^n)$, X 以 O 为双曲奇点, 则 X 在 O 点附近局部结构稳定, 即存在 X 在 $\mathcal{X}^r(\mathbb{R}^n)$ 中的一个 C^1 邻域 $U, \forall Y \in U, Y$ 在 O 附近有唯一的双曲奇点 p , 且 Y 在 p 附近的某邻域与 X 在 O 的某邻域内拓扑轨道等价. ■

(对离散的情形, 也有平行的结果.)

附注 1.10 如果把定义 1.7 中的拓扑轨道等价从 C^0 加强到 $C^k, k \geq 1$, 即要求 h 为 C^k 微分同胚, 则 X_1 与 X_2 在相应奇点处的线性化系统的特征根有相同的比值 (见 [GH, p42]). 这就把等价关系限制过严, 使得两个轨道结构相同的向量场也未必等价. 例如, 由定理 1.9 可知, 二维系统

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

是 (局部) 结构稳定的, 它与系统

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + \mu y$$

($\mu \neq 0$) 是 C^0 等价的, 但它们不是 C^1 等价的. 另一方面, 如果把定义 1.7 中的扰动从 C^r ($r \geq 1$) 加强到 C^0 , 则总可以扰动出不同的轨道结构, 因而无结构稳定可言. 例如, 由定理 1.9 可知, 一维系统 $\dot{x} = x$ 是局部结构稳定的, 但它的 C^0 扰动系统 $\dot{x} = x + \mu \sqrt{|x|}$ 与原系统在原点的任意小邻域内都有不同的轨道结构, 只要 $0 < |\mu| \ll 1$. 因此, 如无特别声明, 下文中的等价都指 C^0 等价, 而扰动都指 C^1 扰动.

在给出进一步的结果之前, 我们需要下面的定义.

定义 1.11 设 U, φ 同上. 称集合

$$W_{\varphi}^s(O) = \{x \in U \mid \varphi^k(x) \rightarrow O, \text{ 当 } k \rightarrow +\infty\}$$

和

$$W_{\varphi}^u(O) = \{x \in U \mid \varphi^{-k}(x) \rightarrow O, \text{ 当 } k \rightarrow +\infty\}$$

分别为 φ 在双曲不动点 O 的稳定流形与不稳定流形.

对于向量场的情形, 有类似的定义.

定义 1.12 设 γ 是向量场 X 的双曲奇点或双曲闭轨, 集合

$$W_X^s(\gamma) = \{x \in M \mid a_X(t)x \rightarrow \gamma, \text{ 当 } t \rightarrow +\infty\}$$

和

$$W_X^u(\gamma) = \{x \in M \mid a_X(t)x \rightarrow \gamma, \text{ 当 } t \rightarrow -\infty\}$$

分别称为 X 在 γ 的稳定流形和不稳定流形.

利用 Poincaré 映射, 可以把向量场在双曲闭轨附近的研究转化为映射在不动点附近的研究. 由 Hartman-Grobman 定理, $W_X^s(O), W_X^u(O)$ (或 $W_{\varphi}^s(O), W_{\varphi}^u(O)$) 可在 O 的小邻域内分别与线性映射 $A = DX(O)$ (或 $D\varphi(O)$) 的相应集合 E^s, E^u (它们是 \mathbb{R}^n 的线性子空间) 建立同胚. 因此, $W_X^s(O)$ 与 $W_X^u(O)$ (或 $W_{\varphi}^s(O)$ 与 $W_{\varphi}^u(O)$) 在 O 点附近都是 M 的子流形. 进而可以证明, 它们在 O 点分别与 E^s 和 E^u 相切; 从整体上看 $W_X^s(O)$ 与 $W_X^u(O)$ (或 $W_{\varphi}^s(O)$ 与 $W_{\varphi}^u(O)$) 是 M 的 C^r 浸入子流形 (但未必是 M 的子流

形,见附录 B 中附注 B. 24), 证明可参考[ZQ, 定理 4. 9 和 4. 10].

现在,我们可以陈述 M. M. Peixoto 在 1962 年证明的一个有关全局结构稳定性的结果(参见[ZDHD]).

定理 1. 13 设 M 是紧致的二维光滑流形, $X \in \mathcal{X}^r(M)$. 则 X 是 C^1 结构稳定的, 当且仅当

(1) X 的非游荡集仅由临界元组成;

(2) X 的临界元(奇点或闭轨)个数有限, 并且它们都是双曲的;

(3) 任何双曲临界元的稳定流形与任何双曲临界元的不稳定流形横截相交. \square

这里横截性的定义见附录 C 中定义 C. 10. 注意, 不相交也算作横截. 另一个有关结构稳定集的重要结果, 是下面的

定理 1. 14 二维可定向紧致流形 M 上 C^1 结构稳定向量场的集合在 $\mathcal{X}^k(M)$ (对 $k \geq 1$) 中是一个开稠集. \square

附注 1. 15 Peixoto 等人的上述结果, 从 60 年代开始吸引了在国外以 Smale 为代表、在国内以廖山涛为代表的一批数学家, 在微分动力系统方面他们做了大量工作(参见[L1], [Zzs] 等). 人们把满足定理 1. 13 中三个条件的向量场称为 **Morse-Smale 向量场**. (类似可定义 M-S 微分同胚). 自然要问: 定理 1. 13 和定理 1. 14 在高维流形上是否仍然成立? Smale 在 60 年代构造的称为“马蹄”的著名例子(见第四章), 以及 Newhouse 随后对“马蹄”的改造, 说明上述问题的答案都是否定的, 即在高维流形上的结构稳定向量场(或微分同胚)未必是 M-S 的, 而全体结构的稳定向量场(或微分同胚)的集合在 $\mathcal{X}^r(M)$ (或 $\text{Diff}^r(M)$) 中不一定是稠集. 进一步的问题是: 当 $\dim M > 2$ 时, 在 $\mathcal{X}^r(M)$ 中(或当 $\dim M > 1$ 时, 在 $\text{Diff}^r(M)$ 中)结构稳定的充要条件是什么? 对此 Smale 提出了比 M-S 条件更广的公理 A 条件, 并且给出两个结构稳定性猜测: 结构稳定 \Leftrightarrow 公理 A + 强横截条件; Ω 稳定性(即限制在非游荡集上结构稳定) \Leftrightarrow 公理 A + 无环条件. 这两个猜测的充分性部分已为

Smale 本人和其它人所证明;必要性部分则于 1987 年分别由 $\widetilde{\text{Mané}}^{[M]}$ 和 $\text{Palis}^{[Pa]}$ 对微分同胚的情形给出了证明. 对向量场情形的第一个猜测, 直到最近才由廖山涛^[L2]、胡森^[Hu], 和 Hayashi^[Ha]、文兰^[W] 分别对三维和一般情形给出证明.

§2 分岔与分岔问题的提法

从上节定义 1.7 可知, 若 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 不是结构稳定的, 则在 X 的任一个 C^1 邻域内, 都可以找到与 X 轨道结构不同的向量场. 研究结构不稳定向量场在“扰动”下轨道结构的变化规律, 是分岔理论的核心内容.

分岔的概念

定义 2.1 设 M 是光滑流形, $\Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中结构稳定向量场的集合, 则集合 $\Lambda^r(M) = \mathcal{X}^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$ 称为分岔集.

定义 2.2 设 $\epsilon \in \mathbb{R}^k$, $X(\epsilon) \in \mathcal{X}^r(M)$. 若 $X(\epsilon_0) \in \Lambda^r(M)$, 则称 ϵ_0 为族 $X(\epsilon)$ 的分岔值. 当参数 ϵ 通过分岔值时, 在相空间中向量场 $X(\epsilon)$ 所发生的轨道拓扑分类的变化称为分岔.

对于离散动力系统, 也可给出类似的定义.

由定理 1.9 可知, 如果向量场在奇点附近发生分岔现象, 则该奇点必是非双曲的.

当 M 是紧致二维定向流形时, 由定理 1.13 可知, 分岔集 $\Lambda^r(M)$ 包含的向量场具有如下结构: 它有非双曲的奇点或闭轨; 或者它的奇点和闭轨是双曲的, 但它们的稳定流形和不稳定流形不横截相交(这时出现下面定义的同宿轨或异宿轨); 或者它的非游荡集含有无限多个临界元.

由定义 1.7 易知, 结构稳定集 $\Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中的开集. 当 M 为二维紧致定向流形时, 再由定理 1.14 知, $\Sigma^r(M)$ 是开稠集, 从

而分岔集 $\Delta^r(M)$ 是这个开稠集的“边界”. 但在高维流形的情形, $\Delta^r(M)$ 可以有更复杂的结构(见附注 1.15).

定义 2.3 向量场的相轨线称为奇点(或闭轨)的同宿(homoclinic)轨, 如果这轨线不是奇点(或闭轨)本身, 而且它的 α 极限集与 ω 极限集都与这奇点(或闭轨)一致. 相轨线称为异宿(heteroclinic)轨, 如果它的 α 极限集和 ω 极限集是不同的奇点或闭轨.

定义 2.4 发生在奇点(或闭轨)的小邻域内, 并且与它的双曲性破坏相联系的分岔称为局部分岔. 发生在有限个同宿轨或异宿轨的小邻域内的分岔称为半局部分岔. 所有其余的分岔称为全局分岔.

上面的定义 2.1—2.4 取自[AAS]. 我们将在后面看到, 在研究局部分岔时, 可能伴随出现半局部分岔; 而研究半局部分岔时, 也可能伴随出现全局分岔.

附注 2.5 如上所述, 分岔集 $\Delta^r(M) = \mathcal{X}^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$ 是 $\mathcal{X}^r(M)$ 中的闭子集. 如果限制在 $\Delta^r(M)$ 上, 仍可以考虑结构稳定集 $\Sigma_1^r(M)$ 及其余集 $\Delta_1^r(M) = \Delta^r(M) \setminus \Sigma_1^r(M)$. $\Delta_1^r(M)$ 是 $\Delta^r(M)$ 中具有更复杂分岔现象的闭子集. 我们可以继续对 $\Delta_1^r(M)$ 进行这种剖分, 得到各种层次的分岔集.

例 2.6 考虑 \mathbb{R}^1 上的向量场

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2). \quad (2.1)$$

显然, $x = 0$ 总是方程(2.1)的一个奇点. 当 $\mu < 0$ 时, 它是(2.1)的唯一奇点, 并且是双曲的(定义见 §1). 当 $\mu = 0$ 时, $x = 0$ 仍是(2.1)的唯一奇点, 但它是非双曲的. 当 $\mu > 0$ 时, 除了 $x = 0$ 之外, (2.1)还有两个奇点 $x = -\sqrt{\mu}$ 和 $x = \sqrt{\mu}$, 三个奇点都是双曲的. 图 1-2 中给出(2.1)的奇点分布对参数 μ 的依赖关系. 由此可以看出, 当参数 μ 变化通过值 $\mu = 0$ 时, (2.1)的奇点个数

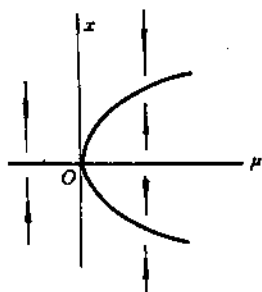


图 1-2

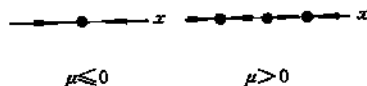


图 1-3

发生了突变,从而表示奇点个数的图形在 $\mu = 0$ 处发生了分岔. 习惯上把这种分岔现象称为**叉(pichfork)分岔**. 图 1-3 给出 $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$ 三种情形下, (2.1) 的相图. 由此可以看出, 相对于不同的 μ , (2.1) 的轨道拓扑结构所发生的变化. 显然, $\mu = 0$ 是唯一的分岔值.

例 2.7 考虑 \mathbf{R}^1 上的向量场

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad (2.2)$$

与上例同样的分析可知, $\mu = 0$ 是 (2.2) 的唯一分岔值: $\mu < 0$ 时向量场 (2.2) 无奇点; 当 $\mu > 0$ 时, (2.2) 有二个双曲奇点; 当 $\mu = 0$ 时 (2.2) 有唯一奇点 $x = 0$, 它是非双曲的, 称为**鞍结点(saddle-node)**, 并把这种分岔现象称为**鞍结点分岔**. 与上例相似, 可分别作出图 1-4 与图 1-5. 从下面的例中, 我们可以对这一名称有更直观的理解.

例 2.8 二维的鞍结点分岔. 考虑 \mathbf{R}^2 上的向量场

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases} \quad (2.3)$$

不难得知 $\mu = 0$ 是唯一的分岔值, 并可作出轨道拓扑分类图

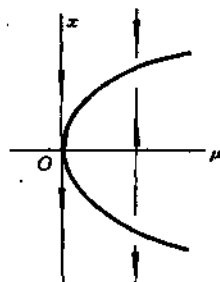


图 1-4

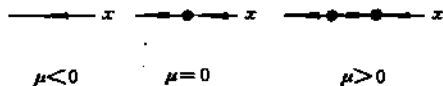


图 1-5

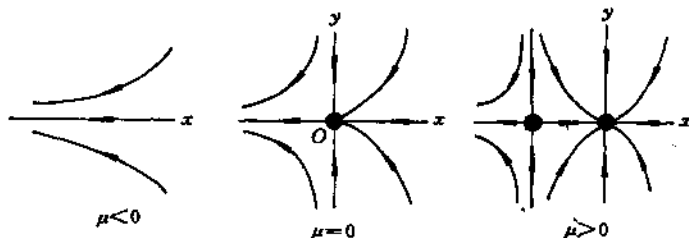


图 1-6

(二维鞍结点分岔), 见图 1-6.

例 2.9 考虑 \mathbb{R}^2 上 $(0,0)$ 点附近的单参数系统族

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.4)$$

它的线性部分矩阵以 $\mu \pm i$ 为特征值. 在极坐标变换下, 方程 (2.4) 变形为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$

当 $\mu \leq 0$ 时, 原点是稳定的焦点 ($\mu = 0$ 时非双曲); 当 $\mu > 0$ 时, 原点为不稳定焦点, 并有唯一闭轨 $r = \sqrt{\mu}$, 它是稳定的极限环 Γ_μ , 见图 1-7. 这里, 我们把平面上的孤立闭轨称为极限环; 它附近的轨道以它为 ω 极限集, 因此称它为稳定的极限环. 注意, 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, Γ_μ 趋于奇点 $r = 0$.

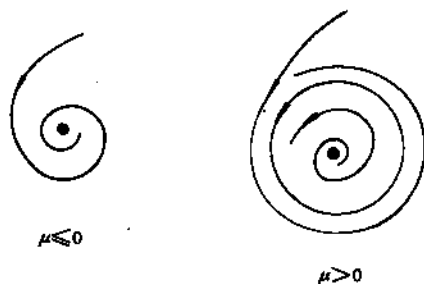


图 1-7

显然, $\mu = 0$ 是一个分岔值. 我们可以这样描述这个分岔现象: 当 μ 的取值从小到大通过 0 时, 奇点 $(x, y) = (0, 0)$ 改变其稳定性, 并从此奇点“冒出”一个极限环. 这称为 **Hopf 分岔**.

例 2.10 ([DL]) 首先考虑一个平面系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \left(1 - \frac{3}{2}x \right). \end{cases} \quad (2.5)$$

它有两个奇点: $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 为鞍点, $O(0, 0)$ 为中心. 容易从 (2.5) 消去 t , 得到首次积分

$$F(x, y) \stackrel{d}{=} y^2 + x^2 - x^3 = C, \quad (2.6)$$

其中 C 为任意常数. 为了下文中的方便, 记

$$C = \frac{4}{27} - \mu, \quad (2.7)$$

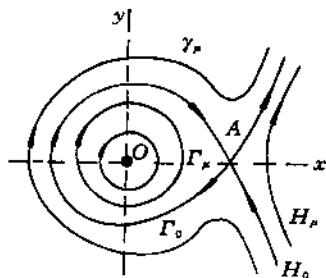


图 1-8

则方程(2.5)的轨道依 μ 的不同选取,有如下分布:

(1) 当 $\mu=0$ 时,由(2.6)得到鞍点分界线 $\Gamma_0 \cup H_0$,其中 Γ_0 是鞍点 A 的同宿轨道,而 H_0 把相平面分成左右两部分(见图1-8).

(2) 当 $\mu < 0$ 时,由(2.6)可确定一条(无界)轨道 γ_μ ,它位于 Γ_0 所围有界区域之外和 H_0 的左侧;当 $\mu \rightarrow 0^-$ 时, γ_μ 收缩到 $\Gamma_0 \cup H_0$.

(3) 当 $\mu > 0$ 时,由(2.6)可确定二条轨道,其中一条为闭轨 Γ_μ ,它位于 Γ_0 所围有界区域的内部;另一条(无界)轨道 H_μ 在 H_0 右侧.当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_0$, $H_\mu \rightarrow H_0$.

令函数

$$f(x, y, \mu) = F(x, y) - \left(\frac{4}{27} - \mu \right),$$

其中的 $F(x, y)$ 由(2.6)式定义. 利用此函数构造向量场族 X_μ 如下

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \left(1 - \frac{3}{2}x \right) + f(x, y, \mu)y. \end{cases} \quad (2.8)$$

容易算出

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(2.8)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{(2.8)} = 2f(x, y, \mu)y^2,$$

由此可知, 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 系统 (2.8) 的轨道分布如图 1-9 所示. (所

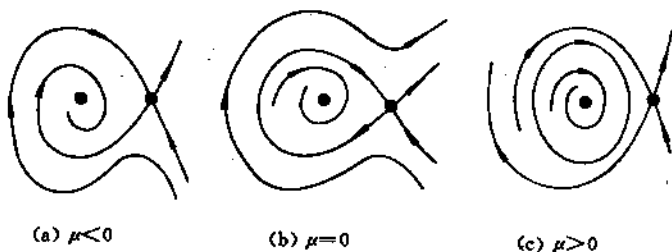


图 1-9

用的论据, 类似于用 Liapunov 函数判断奇点的稳定性). 并且容易得知, 当 $0 < \mu \ll 1$ 时, (2.8) 的唯一闭轨就是 (2.5) 的闭轨 Γ_μ . 当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时, 它趋于 X_0 的同宿轨 Γ_0 .

在例 2.6—例 2.9 中, 分岔现象都是由于奇点的非双曲性而发生的, 属于局部分岔. 本例则不同, 分岔现象是由于同宿轨 (对应于 $\mu = 0$) 在扰动下 ($\mu \neq 0$) 破裂而发生的, 称为同宿分岔, 它是一种半局部分岔.

例 2.11 考虑映射 $F: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, 它的线性部分以 -1 为特征根. 由下文中 §4 例 4.15 可知, 无妨设

$$F(x) = -x + ax^3 + O(|x|^5), \quad (2.9)$$

其中 $a \neq 0$. 在 $x = 0$ 附近的一个邻域内, 映射 F 以 $x = 0$ 为唯一不动点. 注意, 由隐函数定理可知, (2.9) 的任一扰动系统在 $x = 0$ 附近仍有唯一的不动点, 所以我们不妨取它的扰动系统保持 $x = 0$ 为不动点, 且具有下面的形式

$$F_\mu(x) = -(1 + \mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + O(|x|^4),$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}^1$, 光滑函数 $a_2(\mu), a_3(\mu)$ 满足 $a_2(0) = 0, a_3(0) = a$. 考虑 F_μ 的两次叠代映射, 得到

$$F_\mu^2(x) = (1 + \mu)^2 x + O(\mu^2)x^2 - (2 + O(\mu))ax^3 + O(|x|^4),$$

从而 $F_\mu^2(x) - x$ 可表示为

$$x[\mu(2 + \mu) + O(\mu^2)x - (2 + O(\mu))ax^2 + O(|x|^3)].$$

因此, 利用 $a \neq 0$ 及下文中的 Malgrange 定理(定理 2.12) 可知, 当 $\mu a > 0$ 且 $|\mu| \ll 1$ 时, F_μ^2 除了不动点 $x = 0$ (它是 F_μ 的不动点) 之外, 又有两个新的不动点, 它们是 F_μ 的 2 周期点(图 1-10(a))

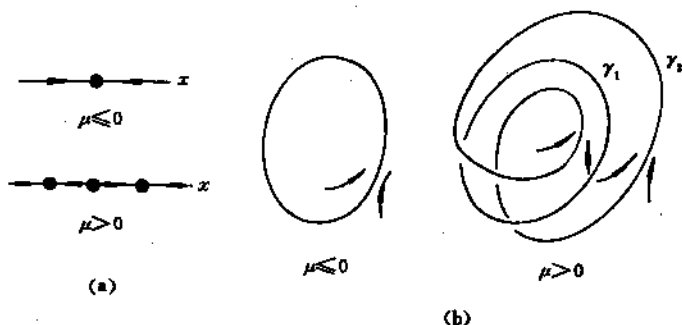


图 1-10

相应于 $a > 0$ 的情形). 如果把上面的映射 F_μ 看成一向量场的流的 Poincaré 映射, 则当 μ 的值从负到正的瞬间(设 $a > 0$), 原有的稳定闭轨变为不稳定闭轨 γ_1 , 而在它的邻域内又产生了一个稳定的几乎两倍于原周期的闭轨 γ_2 , 这种分岔现象称为倍周期分岔, 它发生在一个 Möbius 带上(见图 1-10(b)), γ_1 位于这带的轴线, 而 γ_2 是这带的边界.

分岔问题的提法

从实际中产生的分岔问题, 常常是带参数的向量场族. 例如

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad (2.10)$$

其中 $f \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. 当 $\mu = 0$ 时, 相应系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x, 0) = f_0(x) \quad (2.11)$$

是结构不稳定的. 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 常把(2.10)称为(2.11)的一个 C^r 开折(unfolding). 我们要研究的是:

问题 A 能否找到 $\mu = 0$ 在 \mathbb{R}^k 中的一个邻域 V , 使得当 μ 在 V 中变动时, 弄清系统(2.10)的轨道结构如何变化?

在较简单的情况下还可以考虑: 能否把 V 分成若干子集, 它们对应(2.10)的轨道拓扑结构的不同等价类? 在例 2.6 中, $\mu = 0$ 把参数空间 $\mu \in \mathbb{R}^1$ 分成二部分, 其中 $\mu < 0$ 和 $\mu > 0$ 相应于系统(2.1)两种不同的且分别结构稳定的轨道拓扑类型.

进一步的问题是:

问题 B 能否找到(2.11)的开折, 它“包含”了(2.11)的任一开折所能出现的轨道结构?

问题 C 能否找到(2.11)的开折, 它满足问题 B 的要求, 并且含有“最少”的参数?

对上述问题中一些名词的确切含义进行澄清, 将会引导到“普适开折”和“分岔的余维”这样一些深刻的概念, 我们将在 §5 中介绍, 本节先对这些概念给出直观的描述. 这里需要指出的是, 由于向量场分岔集合可以有任意复杂的结构, 一般而言, 对上述问题的回答是非常困难的. 在多数情形下, 只能对问题 A 作出部分回答. 但当系统(2.11)的相空间维数较低且它的“退化程度”不高时, 目前对问题 B 和 C 已有一些完整的结果.

下面以 \mathbb{R}^1 上的系统

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \quad (2.12)$$

为例, 回答上面的问题. 例 2.6 中的系统(2.1)是(2.12)的一个开折. 我们要证明, (2.1)不是满足问题 B 要求的那种开折. 现在考虑(2.12)的任意一个 C^∞ 开折

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad f(x, 0) = -x^3, \quad (2.13)$$

这里 $f(x, \mu)$ 在 $(0, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 的一个小邻域中定义, m 是一个足够大的正整数. 在进一步讨论之前, 我们需要下面的结果, 它可以看成是隐函数定理的推广.

定理 2.12 (Malgrange 定理) 设 $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 是包含原点的开集, $f \in C^\infty(U, \mathbf{R})$ 并且满足 $f(t, 0) = t^k g(t)$, 其中 $k \in \mathbf{Z}^+$, g 在 $t = 0$ 附近是光滑函数, 且 $g(0) \neq 0$. 则存在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中 $(0, 0)$ 附近的邻域 $V \subset U$ 和光滑函数 $q(t, x)$, 以及 \mathbf{R}^n 中 O 点附近某邻域中的光滑函数 $a_0(x), \dots, a_{k-1}(x)$, 满足 $q(0, 0) \neq 0, a_0(0) = \dots = a_{k-1}(0) = 0$, 以及

$$f(t, x) = q(t, x) \left[t^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) t^i \right], \quad \forall (t, x) \in V. \quad \blacksquare$$

证明可见 [CH, pp43 - 45]. 定理中的 C^∞ 光滑条件后来减弱到有限光滑性. 由上面的定理可知, 对于开折 (2.13) 存在 \mathbf{R}^{m+1} 中零点的邻域 V , 以及光滑函数 $q(x, \mu), a(\mu), b(\mu)$ 和 $c(\mu)$, 满足

$$q(0, 0) \neq 0, a(0) = b(0) = c(0) = 0, \quad (2.14)$$

以及

$$f(x, \mu) = q(x, \mu) [a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 - x^3].$$

因此, 当 (x, μ) 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 中 $(0, 0)$ 点附近的一个小邻域中取值时, 系统 (2.13) 与系统

$$\frac{dx}{dt} = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 - x^3 \quad (2.15)$$

有相同的轨道结构. 注意上式右端可改写为 $\lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu) \left(x - \frac{c(\mu)}{3} \right) - \left(x - \frac{c(\mu)}{3} \right)^3$, 其中 $\lambda_1(\mu) = a(\mu) + \frac{b(\mu)c(\mu)}{3} + \frac{2(c(\mu))^2}{27}$, $\lambda_2(\mu) = b(\mu) + \frac{(c(\mu))^2}{3}$. 令 $y = x - \frac{c(\mu)}{3}$, 然后把 y 改写为 x , 则系统 (2.15) 变为

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)x - x^3. \quad (2.16)$$

显然, (2.16) 所能出现的轨道拓扑类型不超出系统

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3, \quad (2.17)$$

所能出现的轨道拓扑类型,其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$ 是独立的参数. 至此我们证明了(2.12)的任一开折(可以含有任意多个参数)所能出现的轨道拓扑结构,都含于双参数开折(2.17)的轨道拓扑结构类型中. 即(2.17)就是问题B中所要求的开折. 这时我们称(2.17)是(2.12)的一个普适开折. 对(2.17)进行定性分析不难得知,在 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 平面上使所对应的系统(2.17)成为结构不稳定的点的集合为原点 $O(0,0)$ 和由

$$\left\{ \lambda \mid \lambda_1 = \pm 2 \left(\frac{\lambda_2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \lambda_2 > 0 \right\}$$

给出的两条分岔曲线 Γ_+, Γ_- , 它们在 O 点相切, 并形成尖点, 见分

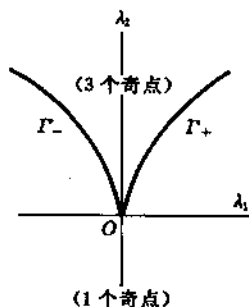


图 1-11

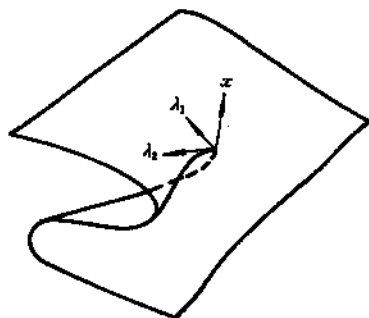


图 1-12

岔图 1-11. 相应于不同的 λ , 开折(2.17)的 5 种轨道拓扑分类中有 2 种是结构稳定的(分别对应于 $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ 把平面分成的两个区域), 有 3 种是结构不稳定的. 显然, 例 2.6 中开折(2.1)所能出现的轨道拓扑类型都含于其中. 图 1-12 给出方程(2.17)的奇点个

数对 λ 的依赖关系, 图中的“奇点曲面”方程为 $\lambda_1 + \lambda_2 x - x^3 = 0$; 沿 x 轴方向穿越此曲面的次数给出系统的奇点个数. 曲面折叠部分的“边缘”向 (λ_1, λ_2) 平面投影, 就得到图 1-11 中的分岔曲线 Γ_+ 和 Γ_- .

最后, 我们来证明 (2.12) 的任一单参数开折都不具有 (2.17) 的如上性质, 从而 (2.17) 还满足问题 C 的要求, 此时称由 (2.12) 引出的分岔为余维 2 的. 事实上, 由于 (2.12) 的任一开折都可等价地转化成 (2.15) 的形式, 所以我们只需在三维空间 (a, b, c) 的原点附近的某邻域 U 中考虑即可. $\forall \mu$, 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 向量场 (2.15) 对应 U 中的一点. 设 Δ 为 U 的一个子集, 其中的点对应的向量场与 (2.12) 有“相同的奇异性”, 即

$$\Delta = \{(a, b, c) \mid \exists x_0, \text{ 使 } a + bx + cx^2 - x^3 = -(x - x_0)^3\}.$$

故 Δ 中的点 (a, b, c) 满足

$$a = x_0^3, b = -3x_0^2, c = 3x_0.$$

由此不难得知, Δ 是 U 中的一条曲线 (余维 2 子流形). 所以在 U 中至少二维的曲面 (相应于 (2.12) 的二参数开折) 才能与 Δ 横截相交, 见图 1-13, 而 (2.12) 的单参数开折所对应的 U 中的曲线虽然也可以在 O 点与 Δ

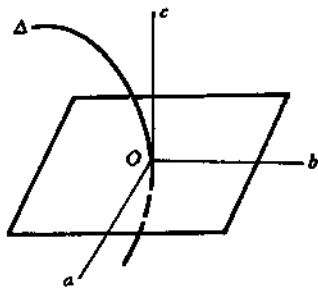


图 1-13

相交, 但在任意小的扰动下, 它都可以与 Δ 分离. 换句话说, 至少在二参数的开折中, 像 (2.12) 这样的分岔现象才是“不可去”的. 注意到 (a, b) 坐标平面在极点与 Δ 横截, 所以 (2.17) 同时具有问

题 B、C 所要求的性质。

附注 2.13 利用同样的推理不难证明, 当 $a \neq 0$ 时, \mathbb{R}^1 上的系统 $\frac{dx}{dt} = ax^{k+1} + O(|x|^{k+2})$ 是余维 k 的, 它的一个普适开折可取为 $\frac{dx}{dt} = \mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_k x^{k-1} + ax^{k+1}$. 特别地, 例 2.7 中的系统 (2.2) 是 $\frac{dx}{dt} = -x^2$ 的一个普适开折, 但 $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2$ 则不是。

我们将在 § 5 中把这里的讨论精确化、一般化。

§ 3 中心流形定理

在考虑一个向量场的分岔问题之前, 一般要进行简化处理。一方面, 希望在不改变动力学性质的前提下把相空间维数尽可能降低; 另一方面, 力求在等价意义下把微分方程的形式尽可能化简。前者要用中心流形定理, 将在本节介绍, 后者要用正规形理论, 将在下节介绍。这两节中的讨论主要对 \mathbb{R}^n 中的向量场进行, 不难把结果推广到微分同胚的情形 (例如, 参见 [Wil]).

观察上节图 1-6 可以发现, 二维空间上的分岔现象其实主要是由动力系统在—维不变流形 $y = 0$ 上的结构变化所决定 (参照图 1-5), 而在这不变流形之外的轨线, 无非是向这不变流形的压缩。出现这种规律并不是偶然的, 系统 (2.3) 在 $(0, 0)$ 点的线性部分矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

它分别以 0 和 -1 为特征值, 它的非双曲部分是一维的。由此猜想: 当微分方程右端在某一奇点的线性部分矩阵有 n_1 个零实部特征根, n_2 个非零实部特征根时, 可以把分岔现象的研究, 在奇点附近限制在某一个 n_1 维的不变流形上, 从而使问题的难度得以降低。

线性情形

先考虑线性方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, A 为 n 阶实数矩阵. 我们知道, 方程 (3.1) 的解

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x \quad (3.2)$$

的性态完全被矩阵 A 的特征值的性质所决定.

设矩阵 A 的特征值的集合为 $\sigma = \sigma(A)$, 则

$$\sigma = \sigma_s \cup \sigma_u \cup \sigma_c,$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_s &\stackrel{d}{=} \{\lambda \in \sigma \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}, \\ \sigma_u &\stackrel{d}{=} \{\lambda \in \sigma \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \\ \sigma_c &\stackrel{d}{=} \{\lambda \in \sigma \mid \operatorname{Re} \lambda = 0\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

记 E^s 为 \mathbb{R}^n 中相应于 $\lambda \in \sigma_s$ 的那些特征值的广义特征向量所张成的子空间; 并可类似定义 E^u 和 E^c , 则有直和分解

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c, \quad (3.4)$$

和相应的投影

$$\pi_s: \mathbb{R}^n \rightarrow E^s, \quad \pi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow E^u, \quad \pi_c: \mathbb{R}^n \rightarrow E^c.$$

这些投影映射的零空间分别为

$$\begin{aligned} \ker(\pi_s) &= E^{cu} \stackrel{d}{=} E^c \oplus E^u, \\ \ker(\pi_u) &= E^{cs} \stackrel{d}{=} E^c \oplus E^s, \\ \ker(\pi_c) &= E^{hs} \stackrel{d}{=} E^s \oplus E^u. \end{aligned}$$

上述投影都与 A 可交换, 故 E^s, E^u, E^c 都是 (3.1) 的不变子空间.

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 从非奇点出发的轨道在 E^s 中是指数型“压缩”的, 而在 E^u 中则是指指数型“增长”的 ($t \rightarrow -\infty$ 时的情况相反). 所

有对 $t \rightarrow \pm \infty$ 有界的轨道(特别地,所有奇点,闭轨)都停留在 E^c 内. 由于这些性质,通常称 E^s 为稳定子空间, E^u 为不稳定子空间, E^c 为中心子空间, $E^h = E^s \oplus E^u$ 为双曲子空间,并记投影 $\pi_h: \mathbb{R}^n \rightarrow E^h$. 轨道的动力学行为在双曲子空间内是单纯的,而复杂现象发生在中心子空间 E^c 内.

非线性情形

现在考虑非线性方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \quad (3.5)$$

其中 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = 0$ 且 $Df(0) = 0$. 问题是:方程(3.5)的轨道结构是否仍然具有方程(3.1)的上述规律? 下面的结果表明,线性方程(3.1)的中心子空间 E^c 推广为非线性方程(3.5)的中心流形 W^c . 虽然在较强条件下 W^c 可以整体存在,但通常实用的还是在奇点 $x = 0$ 的局部. 那些“复杂现象”(特别地,所有奇点、闭轨、同宿轨、异宿轨等)都发生在 W^c 上;在一定条件下, W^c 外的解指数型地趋于 W^c 上的解;且流形 W^c 上解的性质,可通过对 E^c 上诱导的方程的研究而得到. 本节的内容主要参考了[V]和[CLW].

我们先陈述整体的结果.

定义 3.1 设 X, Y 为 Banach 空间, $k \in \mathbb{Z}^+$, 定义映射空间

$$C_b^k(X, Y) \stackrel{\text{d}}{=} \{g \in C^k(X, Y) \mid g \text{ 的 } C^k \text{ 模有界}\}.$$

在本节中,记 $\tilde{x}(t, x)$ 为(3.5)的满足初值条件 $\tilde{x}(0, x) = x$ 的解. 并记 $\|Dg\| = \sup_{x \in X} |Dg(x)|$.

定理 3.2 (全局中心流形定理) 对于系统(3.5),存在与矩阵 A 和数 k 有关的正数 δ_k , 如果 $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 且 $\|Df\| < \delta_k$, 则有下列结论:

(1) 集合

$$W^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |\pi_h \tilde{x}(t, x)| < \infty\} \quad (3.6)$$

是(3.5)的不变集,它是 \mathbb{R}^n 的 C^k 子流形,即存在唯一的 $\varphi \in C_b^k(E^c, E^h)$,使

$$W^c = \{x_c + \varphi(x_c) \mid x_c \in E^c\}, \quad (3.7)$$

(2) 如果有 $\psi \in C_b^0(E^c, E^h)$, 使集合

$$M^c = \{x_c + \psi(x_c) \mid x_c \in E^c\}$$

是(3.5)的不变集,则 $M^c = W^c$,且 $\psi = \varphi$;

(3) 如果 $y \in W^c$,令 $x_c(t) = \pi_c \tilde{x}(t, y)$,则 $x_c(t)$ 满足方程

$$\frac{dx_c}{dt} = Ax_c + \pi_c f(x_c + \varphi(x_c)), \quad x_c \in E^c. \quad (3.8)$$

定义 3.3 定理 3.2 中的不变集 W^c 称为(3.5)的全局中心流形.

附注 3.4 定理 3.2 中有关全局中心流形唯一性的结论(2)指出,若 W^c 在(3.5)的流下不变,则 $\varphi \in C_b^0(E^c, E^h)$ 是唯一确定的.如果改为 $\varphi \in C^0(E^c, E^h)$,则结论一般不对,见[Sij].

定理 3.2 中的条件 $\|Df\| < \delta_k$ 是很强的,它使得该定理实际上很难应用.由于 $f(0) = 0, Df(0) = 0$,故在奇点 $x = 0$ 附近这个条件却是自然成立的.因此,利用截断(cut-off)函数从定理 3.2 得出的局部结果更自然,从而更实用.取截断函数 $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,满足 $0 \leq \eta(x) \leq 1$,且

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \|x\| \leq 1, \\ 0, & \text{当 } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

再令

$$f_\rho(x) = f(x)\eta\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

此时,为了研究方程(3.5)在 $x = 0$ 附近的中心流形,我们可以考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f_\rho(x). \quad (3.10)$$

显然, 当 $\|x\| \leq \rho$ 时, $f(x) \equiv f_\rho(x)$, 且不难证明

$$\|Df_\rho(x)\| \rightarrow 0, \text{ 当 } \rho \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

定理 3.5 (局部中心流形定理) 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = 0, Df(0) = 0$, 则 $\exists \varphi \in C^k(E^c, E^h)$ 和 $x = 0$ 在 \mathbb{R}^n 中的开邻域 U , 使得

(1) 流形

$$W_\varphi = \{x_c + \varphi(x_c) \mid x_c \in E^c\} \quad (3.12)$$

对 (3.5) 的流局部不变, 即

$$\tilde{x}(t, x) \in W_\varphi, \forall x \in W_\varphi \cap U, \forall t \in J_U(x),$$

这里 $\tilde{x}(t, x)$ 为 (3.5) 的满足 $\tilde{x}(0, x) = x$ 的解, $J_U(x)$ 为 x 在 U 内极大流相应的时间区间;

(2) $\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$;

(3) 如果 $x \in U$, 且 $J_U(x) = \mathbb{R}$, 则 $x \in W_\varphi$.

证明 设与 A 相关的 δ_k 已经确定 (见定理 3.2 的条件), 则由 (3.9) 和 (3.11), 可取 $\rho > 0$, 使 $f_\rho(x) \in C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 且 $\|Df_\rho\| < \delta_k$. 对系统 (3.10) 应用定理 3.2 可知, 存在由 (3.7) 给出的 C^k 子流形 W^c , 其中 $\varphi \in C_b^k(E^c, E^h)$, 且 $\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0$.

另一方面, 由 (3.9) 可知, 若取 $U \stackrel{d}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$, 则系统 (3.10) 与系统 (3.5) 在 U 中完全相同, 故结论 (1), (2) 成立. 限制在 U 内, 此处的 W_φ 就是 (3.6) 或 (3.7) 式定义的 W^c .

现设 $x \in U, J_U(x) = \mathbb{R}$. 则 $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{x}(t, x) \equiv \tilde{x}_\rho(t, x) \subset U$, 从而 $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\pi_h \tilde{x}(t, x)| < \infty$, 由 (3.6) 式, $x \in W^c$. 限制在 U 内, 也就是 $x \in W_\varphi$. 故结论 (3) 成立. \square

定义 3.6 如果 $\psi \in C^k(E^c, E^h)$, $k \geq 1, \psi(0) = 0, D\psi(0) = 0$, 使 $W_\psi \stackrel{d}{=} \{x_c + \psi(x_c) \mid x_c \in E^c\}$ 在 (3.5) 的流下局部不变, 则称 W_ψ 为 (3.5) 的一个 C^k 局部中心流形.

附注 3.7 显然, 可以对 (3.5) 取不同的截断函数, 而得到不

同的局部中心流形(尽管对每一个截断函数而言, (3.10) 的全局中心流形是唯一的). 例如, 在图 1-6 ($\mu = 0$) 中的原点附近, 取右半平面上与 x 轴相切的任一轨线, 再拼接上坐标原点及负 x 轴, 都构成一个局部中心流形. 但从定理 3.5 的结论(3) 可知, (3.5) 保持在 U 内的任何有界轨道(包括奇点、周期轨、同宿轨、异宿轨等) 都出现在(3.5) 的任一局部中心流形上. 因此, 对于研究分岔现象而言, 局部中心流形的不唯一性不是一个重要的问题. 还要指出, 虽然 f 的 C^k 光滑性保证了 W_φ 的 C^k 光滑性, 一般来说, f 的 C^∞ 光滑性(甚至解析性) 却不足以保证 W_φ 是 C^∞ 的. 事实上, 从定理的证明中可以看出, U 是以 ρ 为半径的球形邻域, 而 ρ 的选取要保证 $\|Df_\rho\| < \delta_k$. 一般来说, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\delta_k \rightarrow 0$, 这可能导致 $\rho \rightarrow 0$.

现在我们把局部中心流形、稳定、不稳定流形的结果合写成下面的定理.

定理 3.8 对于方程(3.5), 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$; 相对于 A , 有如上所述的子空间 E^s, E^u 和 E^c . 则在 \mathbb{R}^n 中 $x = 0$ 附近存在开邻域 U , 和 U 中的 C^k 流形 W^s, W^u 和 W^c , 它们的维数分别与这三个子空间相同, 在 $x = 0$ 点分别与 E^s, E^u 和 E^c 相切, 并且在 U 内是方程(3.5) 的不变流形; W^s 和 W^u 有定义 1.12 所表示的形式, W^c 有表达式(3.12), 其中 $\varphi \in C^k(E^c, E^h)$, $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = 0$. \square

类似于对中心流形的讨论, 可以定义并讨论(3.5) 的中心稳定流形 W^{cs} 和中心不稳定流形 W^{cu} , 这里不再详述. 上面已经说到, 系统在奇点附近的“复杂现象”发生在它的任一局部中心流形上. 下面的两个定理说明了中心流形的其它重要作用.

定理 3.9 (渐近性质定理) 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, 且对于矩阵 A , $\sigma_u = \emptyset$, 令 W_φ 为(3.5) 的一个 C^2 局部中心流形, 则可在 \mathbb{R}^n 中找到 O 的一个邻域 V 和正数 γ , 如果 $x \in V$, 且 $\{\tilde{x}(t, x) \mid t \geq 0\}$ 的闭包含在 V 内, 则 $\exists t_0 \geq 0, M > 0$ 和 $y \in$

$W_\varphi \cap V$, 使得

$$|\tilde{x}(t, x) - \tilde{x}(t - t_0, y)| \leq M e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.13)$$

定理 3.10 (Pliss 约化原理) 在定理 3.9 的条件下, 设 $y_0 \in W_\varphi \cap V$, 且 $\{\tilde{x}(t, x) | t \geq 0\}$ 的闭包含于 V 中. 则 $\tilde{x}(t, y)$ 作为 (3.5) 的解是稳定(渐近稳定, 或不稳定)的, 当且仅当 $x_c(t)$ 作为 (3.8) 的解是稳定(渐近稳定, 或不稳定)的. \square

定理 3.9 说明, 在一定条件下, 在奇点 O 的一个小邻域 V 内, 中心流形外的解可以指数型地趋于中心流形上的某一解(当 $t \rightarrow +\infty$, 如果 $\sigma_u = \emptyset$; 或当 $t \rightarrow -\infty$, 如果 $\sigma_s = \emptyset$). 而定理 3.10 说明, 在类似条件下, 为了

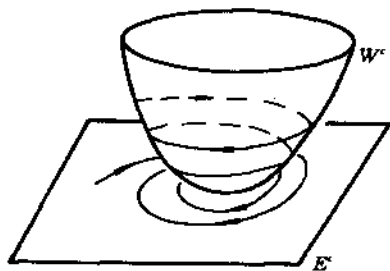


图 1-14

得到局部中心流形上 O 点附近的轨道结构, 只需要对它在线性子空间 E^c 上诱导的方程 (3.8) 来研究即可. 事实上, (3.8) 的轨道是 (3.5) 在 W^c 上的真实轨道向 E^c 的投影, 见图 1-14. 一般而言, 从原方程 (3.5) 得到诱导方程 (3.8) 不是容易的, 需要先知道 φ , 为此我们给出下面的定理.

定理 3.11 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, $\varphi \in C^1(E^c, E^h)$, $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = 0$. 则 $W_\varphi \stackrel{d}{=} \{x_c + \varphi(x_c) | x_c \in E^c\}$ 是 (3.5) 的一个局部中心流形, 当且仅当存在 E^c 中原点的开邻域 Ω , 使得 $\forall x_c \in \Omega$, 有

$$D\varphi(x_c)\pi_c(Ax_c + f(x_c + \varphi(x_c)))$$

$$= \pi_h(A\varphi(x_c) + f(x_c + \varphi(x_c))). \quad (3.14)$$

在很多情形下,我们并不需要知道 $\varphi(x_c)$ 的确切表达式,而是利用(3.14)式算出它的 Taylor 展式的前几项.

为了简单,先把(3.5)化成如下的标准形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Bx + f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Cy + g(x, y), \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, f, g = O(|x, y|^2)$; B 的特征根实部均为零,而

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix},$$

上面的 C_1 与 C_2 的特征根实部分别为负数与正数. 因此, $E^c = \{(x, 0)\}$, $E^h = \{(0, y)\}$, $W^c = \{(x, \varphi(x)) | x \in \mathbb{R}^n\}$. 下面尝试寻找 $y = \varphi(x)$ 的展式, $x \in \mathbb{R}^n$. (3.14) 现在成为

$$D\varphi(x)[Bx + f(x, \varphi(x))] = C\varphi(x) + g(x, \varphi(x)),$$

即

$$D\varphi(x)[Bx + f(x, \varphi(x))] - C\varphi(x) - g(x, \varphi(x)) = 0, \quad (3.16)$$

以及条件

$$\varphi(0) = 0, D\varphi(0) = 0.$$

利用待定系数法,可逐项计算 $\varphi(x)$.

例 3.12 考虑二维方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta y + x^2 + xy, \end{cases} \quad (3.17)$$

经过扰动在奇点 $(0, 0)$ 附近可能发生的分岔现象,其中 $\beta \neq 0$. 注意(3.17)在 $(0, 0)$ 点的线性部分矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, 因此当 $\beta \neq 0$ 时,

它有且只有一个零根,中心流形是一维的. 我们首先设法找出方程(3.17)在 E^c 上诱导出的方程,由此推断在中心流形上轨道的结构. 为此,先把(3.17)化为(3.15)的形式.

令

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

则(3.17)化为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\beta^2}(u+v)^2 - \frac{1}{\beta}(u+v)v, \\ \frac{dv}{dt} = \beta v + \frac{1}{\beta^2}(u+v)^2 + \frac{1}{\beta}(u+v)v. \end{cases} \quad (3.18)$$

注意到(3.16)式下面的条件,我们可以设(3.18)的中心流形由函数

$$v = \varphi(u) = au^2 + bu^3 + \dots$$

所表达. 对方程(3.18)应用(3.16)式,并把 $\varphi(u)$ 的如上表达式代入,由待定系数法不难得到

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta^2}u^2 + \dots$$

再把上式代入(3.18)的第一个方程,得出(3.18)在 E^c 上诱导的方程为

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\beta^2}u^2 + \dots \quad \beta \neq 0.$$

由定理 3.10, 附注 2.13 和例 2.7 可知,系统经扰动在中心流形上发生鞍结点分岔. 当 $\beta < 0$ 时,它的拓扑结构与图 1-6 相同.

最后,我们考虑系统(3.5)依赖于参数的情形. 设

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \mu), \quad (3.19)$$

这里对矩阵 A 的假设同上, E^u, E^s 和 E^c 的维数分别为 n_+, n_- 和 n_0 ; $f \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n), r \geq 1, f(x, 0) = O(\|x\|^2)$. 为简单起见,还

设 $f(0, \mu) = 0$, 即 $x = 0$ 总是 (3.19) 的一个奇点.

定理 3.13 在上面的假设下, (3.19) 拓扑轨道等价于如下系统

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = g(\xi, \mu), & \xi \in \mathbb{R}^{n_0}, \mu \in \mathbb{R}^k, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\eta, & \eta \in \mathbb{R}^{n_-}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \zeta, & \zeta \in \mathbb{R}^{n_+}. \end{cases} \quad (3.20)$$

这个定理的证明可参考 [Sh]. 实际上, 它的第一个方程就是 (3.8).

附注 3.14 为了研究 (3.19) 的中心流形, 我们把 μ 也视作 (空间) 变量, 考虑

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \mu), \quad \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (3.21)$$

则在奇点 $(x, \mu) = (0, 0)$ 附近, 稳定与不稳定子空间仍为 E^s 与 E^u , 而中心子空间为 $E^c \times \mathbb{R}^k$. 故 (3.21) 的局部稳定流形与不稳定流形 W^s 与 W^u 的结构与 $\mu \equiv 0$ 时类似. 此时中心流形 $W^c = \{(x_c, \mu) + \varphi(x_c, \mu) | (x_c, \mu) \in E^c \times \mathbb{R}^k\}$, 其中 $\varphi(x_c, \mu) \in C^r(E^c \times \mathbb{R}^k, E^k)$. 由 (3.21) 的第二个方程易知, $\{(x, \mu) | \mu = \text{常数}\}$ 是 (3.21) 的不变集, 从而对固定的 μ , $W^c|_{\mu=\text{常数}}$ 是 (3.21) 第一个方程的不变流形. 注意 $(x, \mu) = (0, 0)$ 是 (3.21) 的非双曲奇点. 一般而言, 对于不同的 μ , $W^c|_{\mu=\text{常数}}$ 上的轨道结构可能不同, 见下例.

例 3.15 设 $x, y, \mu \in \mathbb{R}$, 考虑光滑系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 + f(x, y, \mu), \\ \frac{dy}{dt} = -y + g(x, y, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

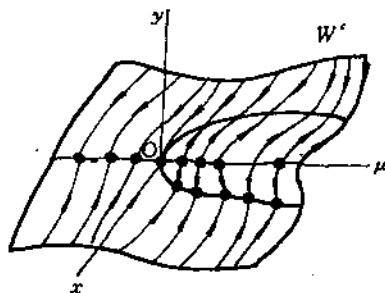


图 1-15

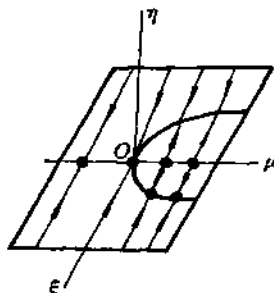


图 1-16

其中 $f = O(|x, y|^4)$, $g = O(|x, y|^2)$ 且 $g(x, 0, \mu) = 0$. 由附注 3.14 和例 2.6 可知, 在 $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ 的小邻域内, 中心流形 W^c 如图 1-15 所示. 显然, 当 $\mu \leq 0$ 或 $\mu > 0$ 时, $W^c|_{\mu=\text{常数}}$ 有不同的结构. 利用定理 3.13 及简单计算可知, 系统 (3.22) 拓扑轨道等价于

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu\xi - \xi^3, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

它在 $(\xi, \eta, \mu) = (0, 0, 0)$ 附近的中心流形如图 1-16 所示, 它不过是把图 1-15 中的中心流形“摊平”在 (ξ, μ) 空间而已.

在下文对局部分岔的讨论中, 我们大都假定已经把问题化归到它的中心流形上, 即对所论方程的线性部分矩阵 A 而言, $\sigma(A) = \sigma_c$ (即 $\sigma_u, \sigma_s = \emptyset$).

§4 正规形

正规形(normal form)理论的基本思想, 是在奇点(或不动点)附近经过光滑变换把向量场(或微分同胚)化成(在一定意义下)尽可能简单的形式, 以便于研究. 这是源于 Poincaré 时代的一个课

题. 由于近年来分岔理论的发展, 正规形的应用更加广泛, 因而重新引起人们对它的重视, 并得出若干计算正规形的新方法.

众所周知, 经非退化线性变换 $x = Ty$, 线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

变换为

$$\frac{dy}{dt} = (T^{-1}AT)y,$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^n$, A 和 T 为 $n \times n$ 矩阵, 且 $\det T \neq 0$. 因此, 在讨论线性系统的轨道结构时, 我们不妨假设 A 为 Jordan 标准形, 除了 Jordan 块的排列顺序外, 它是唯一确定的. 接下去的问题自然是: 对非线性部分是否可以作类似的简化? 在一定意义下, 答案是肯定的, 但一般不再有唯一性. 无论如何, 这种简化对进一步研究分岔问题是很有用的.

微分方程在奇点附近的正规形

考虑以 $x = 0$ 为奇点的 C^r 微分方程 ($r \geq 3$), 它在 $x = 0$ 附近可表示为

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f^2(x) + \cdots + f^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad (4.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ (或 \mathbb{C}^n), A 是线性部分矩阵, $f^k(x) \in H_n^k$, H_n^k 为 n 元 n 维 k 次齐次向量多项式所成的空间, $k = 2, \dots, r-1$.

先进行变换

$$x = y + h^2(y), \quad (4.2)$$

其中 $h^2(y) \in H_n^2$ 待定, 以使变换后的方程具有简单的形式. 把变换 (4.2) 代入 (4.1), 并注意

$$[I + Dh^2(y)]^{-1} = I - Dh^2(y) + \tilde{O}(|y|^2),$$

其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵, Jacobi 矩阵 $Dh^2(y)$ 的每一元素都是 $O(|y|)$, 而 $\tilde{O}(|y|^2)$ 表示 $n \times n$ 矩阵, 它的每一元素都是 $O(|y|^2)$, 由此把方程 (4.1) 化为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = & Ay + \{f^2(y) - [Dh^2(y)Ay - Ah^2(y)]\} + \bar{f}^3(y) + \\ & \cdots + \bar{f}^{r-1}(y) + O(|y|^r), \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 f^2 与 (4.1) 中的相同, 而 \bar{f}^k 是经过运算得到的新的 k 次齐次多项式.

引入算子 $\text{ad}_A^2: H_n^2 \rightarrow H_n^2$,

$$\text{ad}_A^2[h^2(y)] = Dh^2(y)Ay - Ah^2(y), \quad (4.4)$$

则 (4.3) 变成

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = & Ay + [f^2(y) - \text{ad}_A^2(h^2(y))] + \bar{f}^3(y) + \\ & \cdots + \bar{f}^{r-1}(y) + O(|y|^r), \end{aligned} \quad (4.5)$$

记 \mathcal{R}^2 为算子 ad_A^2 在 H_n^2 中的值域, 而 \mathcal{C}^2 是 \mathcal{R}^2 在 H_n^2 中的一个补空间, 即

$$H_n^2 = \mathcal{R}^2 \oplus \mathcal{C}^2.$$

如果 $f^2(y) \in \mathcal{R}^2$, 则存在 $h^2(y) \in H_n^2$, 使 $f^2(y) = \text{ad}_A^2(h^2(y))$, 即 (4.5) 中的二次项可以消去; 否则, 只能找到 $h^2(y) \in H_n^2$, 使

$$f^2(y) - \text{ad}_A^2(h^2(y)) \in \mathcal{C}^2. \quad (4.6)$$

这样, 我们把 (4.1) 化为

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g^2(y) + \bar{f}^2(y) + \cdots + \bar{f}^{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (4.7)$$

其中 $g^2(y) \in \mathcal{C}^2$.

其次, 再考虑变换

$$y = z + h^3(z), \quad (4.8)$$

其中 $h^3(z) \in H_n^3$. 重复上面的推理, 并注意这个变换不影响线性项与二次项, 容易得知 (4.7) 变为

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & Az + g^2(z) + [\bar{f}^2(z) - \text{ad}_A^3 h^3(z)] + \bar{f}^4(z) + \\ & \cdots + \bar{f}^{r-1}(z) + O(|z|^r), \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 g^2, \bar{f}^2 与 (4.7) 中的相同, 而 $\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^{r-1}$ 是经计算得到的, 而且

$$\text{ad}_A^3: H_n^3 \rightarrow H_n^3, \quad h^3(z) \mapsto \text{Dh}^3(z)Az - Ah^3(z).$$

记 $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}(\text{ad}_A^3)$, \mathcal{E}^3 为 \mathcal{R}^3 在 H_n^3 中的补空间, 即

$$H_n^3 = \mathcal{R}^3 \oplus \mathcal{E}^3,$$

则当 $\bar{f}^2(z) \in \mathcal{E}^3$ 时, 存在 $h^3(z)$, 使得经变换 (4.8) 可消去 (4.7) 中的三次项; 否则, 只能找到 $h^3(z) \in H_n^3$, 使 (4.7) 变为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & Ax + g^2(z) + g^3(z) + \tilde{f}^1(z) + \\ & \dots + \tilde{f}^{r-1}(z) + O(|z|^r), \end{aligned}$$

其中 $g^k(z) \in \mathcal{E}^k$, $k = 2, 3$. 由此递推下去, 就可得到

定理 4.1 设 $X \in \mathcal{R}^r(\mathbb{R}^n)$ (或 $\mathcal{R}^r(\mathbb{C}^n)$), $X(0) = 0$, $\text{DX}(0) = A$, 并且 X 有表达式 (4.1), 则在原点附近的邻域内存在一系列变换

$$x = y + h^k(y), \quad k = 2, \dots, r-1, \quad (4.10)$$

其中 $h^k(y) \in H_n^k$, 经过这一系列变换 (每次变换后把 y 换回 x), 可把 (4.1) 变成如下形式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g^2(x) + \dots + g^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad (4.11)$$

其中 $g^k(x) \in \mathcal{E}^k$, \mathcal{E}^k 是 $\mathcal{R}^k = \mathcal{R}(\text{ad}_A^k)$ 在 H_n^k 中的补空间, 算子 ad_A^k 由下式定义

$$\text{ad}_A^k: H_n^k \rightarrow H_n^k, \quad \text{ad}_A^k(h^k(x)) = \text{Dh}^k(x)Ax - Ah^k(x), \quad (4.12)$$

$k = 2, \dots, r-1$. \square

定义 4.2 微分方程 (4.11) 的 j 次截取式 ($2 \leq j \leq r-1$)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g^2(x) + \dots + g^j(x), \quad (4.13)$$

其中 $g^i(x) \in \mathcal{E}^i$, $i = 2, \dots, j$, 称为方程 (4.1) 的 j 次正规形.

附注 4.3 上面进行的只是有限步运算. 当(4.1)右端可以展成收敛的幂级数时, 这种步骤原则上可以无限地进行下去, 问题在于变换本身和所得到的(形式)正规形是否收敛. 在一定条件下, 结论是肯定的, 这就是 Poincaré-Dulac 定理, 见[A1], 或[CLW].

共振与非共振

在定理 4.1 中, 我们希望进一步确定, (4.11) 式中哪些 $g^k(x) = 0$. 也就是说, (4.1) 中哪些 $f^k(x)$ 属于 \mathcal{R}^k ? 为此, 我们假定 A 已化成它的 Jordan 标准形, 并引入共振的概念.

定义 4.4 特征值 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 称为共振的, 如果存在自然数 s ($1 \leq s \leq n$) 和整数组 $m = (m_1, \dots, m_n)$, 其中 $m_i \geq 0$ 并且 $|m|$

$\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 使得

$$\lambda_s = (m, \lambda) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i. \quad (4.14)$$

正数 $|m|$ 称作共振的阶.

例如 $\lambda_1 = 2\lambda_2$ 是 2 阶共振的; $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ 不是共振的; $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 是 3 阶共振的, 因为它可以改写为 $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.

考察(4.11)中哪些 $g^k(x)$ 不出现, 就是要考察同伦方程

$$\text{ad}_A^k(h^k(x)) \equiv Dh^k(x)Ax - Ah^k(x) = f^k(x) \quad (4.15)$$

对给定的 $f^k(x) \in H_n^k$, 是否有解 $h^k(x) \in H_n^k$.

设 A 是对角矩阵, 特征值 λ_i 互不相同, e_i 是 A 相应于 λ_i 的特征向量, 则 (e_1, \dots, e_n) 构成一组基. 设 (x_1, \dots, x_n) 是相对于 (e_1, \dots, e_n) 的坐标, 则

$$x^m \stackrel{d}{=} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}, \quad |m| = k \quad (4.16)$$

就是 H_n^k 中元素某一分量中的最简形式.

令 $h^k(x) = x^m e_s$, $|m| = k$, 则 $Dh^k(x)Ax$ 中只有第 s 个分量非零, 并且它等于

$$\frac{dx^n}{dx} Ax = (m_1 x_1^{m_1-1} \cdots x_n^{m_n}, \dots, m_n x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n-1}) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ = (m, \lambda) x^n.$$

另一方面, 由于 e_s 是 A 的相应于 λ_s 的特征向量, 因此

$$Ax^n e_s = \lambda_s x^n e_s.$$

把上面的结果代入(4.15)的左端, 得到

$$\text{ad}_A^k x^n e_s = [(m, \lambda) - \lambda_s] x^n e_s, \quad (4.17)$$

这说明 ad_A^k 也是对角的, 并且它的特征值具有 $[(m, \lambda) - \lambda_s]$ 的形式. 由此可知, 当 A 的特征值非共振时, ad_A^k 的所有特征值均非零, 故算子 ad_A^k 可逆, 同伦方程(4.15)可解.

当 A 有重特征值时, A 的 Jordan 标准形是上三角形矩阵. 此时 ad_A^k 也有相应的 Jordan 块, 并且 ad_A^k 的特征值仍具有 $[(m, \lambda) - \lambda_s]$ 的形式.

定义 4.5 向量值多项式 $x^m e_s$ 称为共振多项式, 如果

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad |m| \geq 2,$$

其中 λ, e_s, m , 和 $|m|$ 的意义同前.

利用上面的讨论, 我们可以得到下面的

定理 4.6 设 A 是上三角的 Jordan 标准形, 则可适当选取变换(4.10), 使(4.11)右端的诸 $g^i(x)$ 仅由共振多项式组成. |

正规形的计算

例 4.7 求 $\frac{dx}{dt} = Ax + f^2(x) + \cdots$ 的二次正规形, 其中 $x \in$

$$\mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 先在 H_2^2 中取一组基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_5 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_6 = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设 ad_A^2 在这组基下的矩阵为 L_A^2 , 即

$$\text{ad}_A^2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) L_A^2,$$

容易算出

$$L_A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

现将空间 H_2^2 与 \mathbf{R}^6 等同; $\varepsilon_i = e_i$, 其中 e_1, \dots, e_6 为 \mathbf{R}^6 中的标准正交基, 由 Fredholm 定理可知

$$\mathbf{R}^6 = \mathcal{R}(L_A^2) + \mathcal{N}(L_A^{2*}),$$

其中 $\mathcal{N}(L_A^{2*})$ 表示 L_A^{2*} 的零空间. 由 (4.18) 容易看出,

$$\mathcal{N}(L_A^{2*}) = \text{Span}\{e_1, e_2 + 2e_4\},$$

由此得到

$$H_2^2 = \mathcal{R}(\text{ad}_A^2) \oplus \mathcal{E}^2,$$

其中 $\mathcal{E}^2 = \text{Span}\{e_1, e_2 + 2e_4\}$, 由此得出二次正规形为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

或化成等价形式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 2b x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a x_1^2 + b x_1 x_2. \end{cases}$$

注意, $\text{Span}\{e_1, e_2\}$ 同样构成 $\mathcal{R}(\text{ad}_A^2)$ 的一个补空间. 事实上, 取 $v_1 = e_1, v_2 = e_2 + 2e_4, w_1 = e_1, w_2 = e_2$, 则内积

$$\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

因此,可取 $\text{Span}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ 为 $\mathcal{R}(\text{ad}_A^2)$ 的另一个补空间,而相应的二次正规形为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1^2 + bx_1x_2. \end{cases} \quad (4.19)$$

用类似方法,可以算出 k 次 ($k \geq 2$) 正规形为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1^2(1 + P(x_1)) + bx_1x_2(1 + Q(x_1)), \end{cases} \quad (4.20)$$

其中 $P(x_1)$ 与 $Q(x_1)$ 是 x_1 的 $k-2$ 次多项式,并且 $P(0) = Q(0) = 0$. 当 $ab \neq 0$ 时,可经过尺度变换把 (4.20) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1^2(1 + P(x_1)) + \eta x_1x_2(1 + Q(x_1)), \end{cases} \quad (4.21)$$

其中 $\eta = \text{sign}(ab)$ ($+1$ 或 -1).

附注 4.8 由于 $\mathcal{R}(\text{ad}_A^k)$ 的补空间不唯一,因此正规形也不是唯一的,从上面的例子中已经看出了这一点. 但当取定了一个补空间后,正规形中的系数就唯一确定了. 在例 4.7 中,求正规形的方法称为矩阵表示法. 由于 $\dim H_n^k = n \binom{n+k-1}{n-1}$, 矩阵表示法的计算量将随 n 或 k 的增大而迅速增大. 近年来又发现了计算正规形的共轭算子法和群表示论法等, 见王铎的综述文章 [Wd] 及其所引的文献.

例 4.9 考虑复方程

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + O(|z|^2),$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

即 A 有一对共轭纯虚特征根, 求它的(形式)正规形.

解 我们用共振原理求解. 记 $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$, 则共振条件是

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (k+1)\lambda_1 + k\lambda_2, \quad k=1, 2, \dots \\ (\text{或 } \lambda_2 &= k\lambda_1 + (k+1)\lambda_2, \quad k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

由定理 4.6 可知, 复正规形为

$$\frac{dz}{dt} = i\omega z + c_1 |z|^2 z + \dots + c_k |z|^{2k} z + \dots \quad (4.22)$$

(第二个方程与之共轭, 故略去不写).

映射在不动点附近的正规形

考虑以 $x=0$ 为不动点的 C^r 映射 $F(r \geq 3)$, 它在 $x=0$ 附近可表示为

$$F(x) = Ax + f^2(x) + \dots + f^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad (4.23)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ (或 \mathbb{C}^n), A 是线性映射(我们把它在某组基下的矩阵仍记为 A), $f^k(x) \in H_n^k$, H_n^k 为 n 元 n 维 k 次齐次向量多项式所成的空间, $k=2, \dots, r-1$.

考虑变换

$$x = H(y) \stackrel{d}{=} y + h^k(y), \quad (4.24)$$

其中 $h^k(y) \in H_n^k$, $I + h^k(\cdot)$ 在原点附近可逆, 则(4.24)有如下的逆变换

$$y = x - h^k(x) + O(|x|^{k+1}), \quad |x| \ll 1.$$

令

$$G(y) = H^{-1} \circ F \circ H(y),$$

则可把(4.23)化为

$$G(y) = Ay + f^2(y) + \cdots + f^{k-1}(y) + [f^k(y) - (h^k(Ay) - Ah^k(y))] + O(|y|^{k+1}),$$

$|y| \leq 1$. 因此, 与定理 4.1 平行, 可得到

定理 4.10 设 $F \in \text{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ (或 $\text{Diff}^r(\mathbb{C}^n)$), 并且有表达式 (4.23), 则在原点附近的邻域内存在一系列变换

$$x = y + h^k(y), \quad k = 2, \dots, r-1, \quad (4.25)$$

其中 $h^k(y) \in H_n^k$, 经过这一系列变换 (每次变换后把 y 换回 x), 可把 (4.23) 变成如下形式

$$G(x) = Ax + g^2(x) + \cdots + g^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad (4.26)$$

其中 $g^k(x) \in \mathcal{G}^k$, \mathcal{G}^k 是 $\mathcal{R}^k = \mathcal{R}(L_A^k)$ 在 H_n^k 中的补空间, 算子 L_A^k 由下式定义

$$L_A^k: H_n^k \rightarrow H_n^k, \quad L_A^k(h^k(x)) = h^k(Ax) - Ah^k(x),$$

$k = 2, \dots, r-1$. \square

定义 4.11 映射 (4.26) 的 j 次截取式 ($2 \leq j \leq r-1$)

$$Ax + g^2(x) + \cdots + g^j(x),$$

其中 $g^i(x) \in \mathcal{G}^i$, $i = 2, \dots, j$, 称为映射 (4.23) 的 j 次正规形.

定义 4.12 Jordan 形矩阵 A 的特征值 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{C}^n$ 称为共振的, 如果存在 s ($1 \leq s \leq n$) 和整数组 $m = (m_1, \dots, m_n)$, m_i

≥ 0 , $|m| \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 使得

$$\lambda_s = \lambda^m \stackrel{d}{=} \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_n^{m_n}. \quad (4.27)$$

正数 $|m|$ 称作共振的阶.

定义 4.13 向量值多项式 $x^m e_s$ 称为共振多项式, 如果 m 和 s 满足共振条件 (4.27), 其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 \mathbb{C}^n 的一组基, (x_1, \dots, x_n) 为相对于这组基的坐标, 并且矩阵 A 在此基下的 Jordan 标准形以 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 为对角元素.

类似于定理 4.6, 可以得到下面的

定理 4.14 设 $A = \text{Diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, 则可以选取适当的变换 (4.25), 使 (4.26) 右端的诸 $g^i(x)$ 仅由共振多项式组成. |

例 4.15 求以 $x=0$ 为不动点的一维映射 $F(x) = -x + \dots$ 的六次正规形.

解 $\lambda = -1$ 是唯一的特征值, 所以共振条件为

$$\lambda^k - \lambda = 0, \quad k \geq 2,$$

也就是

$$(-1)^{k-1} = 1, \quad k \geq 2.$$

所以共振多项式为 x^3, x^5, x^7, \dots 由定理 4.14, 六次正规形为

$$G(x) = -x + ax^3 + bx^5,$$

其中 a, b 为常数.

光滑线性化

定义 4.16 设 $k \geq 2$ 是一个自然数. 称光滑向量场 (或微分同胚) 的双曲奇点 (或双曲不动点) 为 k 阶非共振的, 如果它的特征根不满足所有 $\leq k$ 阶的共振关系. 如果一个奇点 (或不动点) 是任意有限阶非共振的, 则称它为无穷阶非共振的, 或简称非共振.

从前面的讨论可以看出, 一个 k 阶非共振奇点 (或不动点) 的 k 次正规形是线性的. 换句话说, 在奇点 (或不动点) 的邻域里可以找到 一个多项式的坐标变换, 使得在新坐标系下系统可以表示为一个线性部分加上一个 k 阶小量. 一个自然的问题是, 进一步可以通过什么样的坐标变换能把这个 k 阶小量去掉.

定义 4.17 设 k 是一个自然数或 $k = \infty$. 称 \mathbb{R}^n 上的光滑向量场 (或微分同胚) 在它的奇点 (或不动点) O 处可以 C^k 线性化, 如果存在点 O 的邻域 U 和 C^k 微分同胚 $H: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H(O) = O$, 使得经过坐标变换 $x \mapsto H(x)$ 后, 系统在 O 点邻域内变为线性的.

定理 4.18 ([IY]) 设 k 是一个自然数或 $k = \infty$, A 是一个 n 阶实方阵, 则存在一个依赖于 k 和 A 的数 k' , 满足

$$k' = \begin{cases} n \in \mathbb{Z}, & \text{当 } k < \infty, \\ \infty, & \text{当 } k = \infty, \end{cases}$$

使得如果原点是 C^∞ 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \dots \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.28)$$

或微分同胚

$$x \mapsto Ax + \dots \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.29)$$

的 k' 阶非共振双曲奇点(或非共振双曲不动点), 则系统(4.28)(或系统(4.29))可以 $C^{k'}$ 线性化. \square

附注 4.19 由于 $k' = k'(k, A)$ 的表达式比较复杂, 此处没有给出. 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, k' 线性地依赖于 k 的增长.

例 4.20 考虑 \mathbb{R}^1 上的 C^∞ 光滑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax + \dots \quad a \neq 0;$$

或微分同胚

$$x \mapsto \mu x + \dots \quad |\mu| \neq 0, 1.$$

因为特征根 $\lambda = a$ (或 $\lambda = \mu$) 不满足任意阶共振关系, 故由定理 4.18, 系统在原点处可以 C^∞ 线性化. 即 \mathbb{R}^1 上的 C^∞ 向量场(或微分同胚)在它们的双曲奇点(或双曲不动点)处可以 C^∞ 线性化.

例 4.21 由于 \mathbb{R}^2 上的向量场在双曲焦点的特征根为 $\lambda \pm i\omega$, $\lambda \neq 0, \omega \neq 0$. 它不满足任意阶共振关系, 故 \mathbb{R}^2 上的 C^∞ 向量场在它们的双曲焦点处可以 C^∞ 线性化.

在考虑分岔问题时, 我们常常只需要 C^1 线性化. 对此, 有下面较为简单的结果.

定理 4.22 设点 O 是 \mathbb{R}^n 中一个 C^∞ 光滑向量场(或微分同胚) X 的双曲奇点(或双曲不动点). 如果 X 在点 O 的线性部分算子的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足下列不等式

$$\operatorname{Re} \lambda_i \neq \operatorname{Re} \lambda_j + \operatorname{Re} \lambda_k, \quad (\text{或 } |\lambda_i| \neq |\lambda_j| \cdot |\lambda_k|), \quad (4.30)$$

$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则系统在点 O 处可以 C^1 线性化. \square

上述定理的证明对向量场和映射的情况分别由[Be]和[Go]给出.

例 4.23 平面上的 C^∞ 光滑向量场(或微分同胚)在它的双曲鞍点(或双曲鞍不动点)处可以 C^1 线性化.

例 4.24 如果 \mathbf{R}^3 中的向量场的一个双曲奇点有一对复特征根 $\lambda \pm i\omega$ 和一个实根 μ , 满足 $\omega \neq 0, \lambda\mu < 0$, 则称奇点为鞍焦点. 鞍焦点的特征根显然满足(4.30). 故 \mathbf{R}^3 中 C^∞ 向量场在它的鞍焦点处可以 C^1 线性化.

例 4.25 如果 \mathbf{R}^3 中 C^∞ 向量场在它的奇点 O 处的特征根满足 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \mu$, 并且

$$\lambda_2 + \mu \neq \lambda_1, \quad \lambda_2 \neq 2\lambda_1,$$

则它在该点可以 C^1 线性化.

在第五章讨论非局部分岔时, 遇到的向量场都是依赖于参数的. 因此, 下面我们讨论带参数的向量场或映射的线性化问题.

定义 4.26 设 k 是一个自然数或 $k = \infty$, $X_\epsilon (\epsilon \in \mathbf{R}^m)$ 是 \mathbf{R}^n 上的一个依赖于参数的向量场(或微分同胚)族. 设 $\epsilon = \epsilon_0$ 时 X_{ϵ_0} 有一个双曲奇点(或双曲不动点) O . 称族 X_ϵ 在点 (O, ϵ_0) 附近可以 C^k 线性化, 如果存在参数空间中 $\epsilon = \epsilon_0$ 的邻域 V , 相空间 \mathbf{R}^n 中点 O 的邻域 U , 以及一个 C^k 映射 $H: U \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$, 满足

$$(1) H(O, \epsilon_0) = O;$$

(2) 对每一个参数 $\epsilon \in V$, $H(\cdot, \epsilon): U \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个微分同胚, 使得通过依赖于参数 ϵ 的坐标变换 $x \mapsto H(x, \epsilon)$ 后, 系统在 O 点的邻域变成一个线性系统.

定理 4.27 ([IY]) 设 X_ϵ 是 \mathbf{R}^n 中的 C^∞ 向量场(或微分同胚)族, 且 $\epsilon = \epsilon_0$ 时点 O 是系统 X_{ϵ_0} 的非共振双曲奇点(或双曲不动点), 则对任意自然数 k , 族 X_ϵ 可以在点 (O, ϵ_0) 附近 C^k 线性化.

附注 4.28 由上述定理的结论并不能推出族 X_ϵ 可以在点 (O, ϵ_0) 附近 C^∞ 线性化. 因为随着 k 的增加, 可以实现线性化的点

O 的邻域 U 和 ε_0 的邻域 V 可能不断缩小.

本小节给出的定理是我们在第四章和第五章中讨论问题的基础.

§ 5 普适开折与分岔的余维

现在,我们把 § 2 后半部分中讨论的一些概念严密化.初次接触分岔理论的读者可以略过本节的内容,只需承认定理 5.13 的结果,而不影响对随后章节的学习.

普适开折的定义

定义 5.1 设向量场 X, Y (或映射 f, g) 都在 $p \in M$ 的邻域内有定义. 称 X 与 Y (或 f 与 g) 在 p 点有同一芽 (germ), 如果存在邻域 $U, p \in U \subset M$, 使 $X|_U = Y|_U$ (或 $f|_U = g|_U$).

附注 5.2 向量场 (或映射) 在 p 点的芽, 是向量场 (或映射) 的一个等价类. 我们把这个等价类中的任一元素称为这个芽的表示. 在考虑局部问题时, 利用芽的说法可使陈述简明. 附录 C 中定义的射式空间 $J_x^k(M, N)$ 或 $J^k(M, N)$ 都可以在映射芽的意义下给出.

现在考虑向量场族 $X_\mu \in \mathcal{X}^\infty(M)$. 在局部情形下, 不妨设 $M = \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^k$. 此时, 常把 X_μ 与其主部 $v(x, \mu)$ 等同 (参见附录 B 中附注 B.17), 而 X_μ 的流由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \mu)$$

所决定, 其中 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. 在上述等同意义下, 也把 v 称为向量场.

定义 5.3 (开折, 局部族) 对于向量场族 $v(x, \mu)$, 当把 v 视为从参数空间 $\mu \in \mathbb{R}^k$ 在原点的小邻域到向量场空间的映射时, 我们把 $v(x, \mu)$ 称为 $v(x, 0)$ 的一个 k 参数开折 (unfolding), 或称为形

变(deformation); 当把 v 视为直积空间 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k$ 中在 (x_0, μ_0) 点的映射芽时, 称它为一个**局部族**, 记为 $(v; x_0, \mu_0)$.

定义 5.4 (局部族的等价) 称两个向量场局部族 $(v; x_0, \mu_0)$ 与 $(w; y_0, \mu_0)$ 等价, 如果存在映射 $h, y = h(x, \mu)$, 在 (x_0, μ_0) 的映射芽, 对于每一个固定的 $\tilde{\mu}, h(\cdot, \tilde{\mu})$ 给出上面两个向量场(在相应定义域内)轨道间的保向同胚, 并且 $h(x_0, \mu_0) = y_0$.

定义 5.5 (导出族) 称局部族 $(u; x_0, \varepsilon_0)$ 是从局部族 $(v; x_0, \mu_0)$ 导出的, 如果存在连续映射 $\varphi, \mu = \varphi(\varepsilon)$, 在 ε_0 的映射芽, 使得 $u(x, \varepsilon) = v(x, \varphi(\varepsilon))$, 且 $\varphi(\varepsilon_0) = \mu_0$.

定义 5.6 (普适开折) 向量场的局部族 $(v; x_0, \mu_0)$ 称为向量场 $v_0 = v(\cdot, \mu_0)$ 的芽在 x_0 的**普适开折(versal unfolding)**, 如果任何一个包含 v_0 的局部族都与 $(v; x_0, \mu_0)$ 的一个导出族等价.

附注 5.7 注意两个向量场族的等价性要求它们含有相同维数的参数, 而导出族的引进使得同一个退化向量场的普适开折可以含有不同维数的参数, 从而可以进一步考虑含参数最少的普适开折.

附注 5.8 定义 5.4—5.6 都取自 Arnold 的书[A1, p267]. 定义 5.4 中不要求 $h(x, \mu)$ 对 μ 的连续性, 称这种等价为**弱等价**, 而定义 5.6 中的普适性, 一般是在弱等价意义下给出的. 若 $h(x, \mu)$ 对 μ 连续, 则称这种等价为**强等价**, 并可得到强等价意义下的普适性. 在[R1]中有例子表明, 弱等价意义下的普适开折可以不是强等价意义下的普适开折.

附注 5.9 一般而言, 对一个给定的奇异(即结构不稳定)向量场(芽) v_0 , 它的普适开折的存在性并不是明显的, 只有在周密的讨论之后, 才能得出结论, 参见第三章 §1.

读者可以用本节观点重新考察 §2 的讨论, 在那里利用 Malgrange 定理证明了, 奇异向量场(2.12)任取的开折(2.13)都与一个形如(2.16)的开折按定义 5.4 等价. 另一方面, (2.16)显然是(2.17)的一个导出族, 按定义 5.6, (2.17)是(2.12)的一个

普适开折. 从这里可以看出导出族的作用.

分岔的余维, 几何考虑

我们现在对向量场局部族的分岔问题考虑它的余维. 在全体向量场所成的空间 \mathscr{R} 中, 奇异(即结构不稳定)向量场 v_0 表示一个“点”, 仍记为 v_0 , 它落入分岔集 Δ (见定义 2.1), Δ 在 v_0 附近可能具有非常复杂的结构. 但如果限于考虑 Δ 中 v_0 邻近的点, 它具有与 v_0 “完全相同的奇异性”, 则这样的点集可能具有规则的结构. 例如, 形成 \mathscr{R} 的一个余维 k 的子流形 Δ' , 因此在 \mathscr{R} 中一个至少 k 维的流形 K 才能在 v_0 点与 Δ' 横截相交, 而这个 K 可用 v_0 的至少 k 参数开折来实现(图 1-17 和图 1-18 中分别对应 $k=1$ 和 $k=2$ 的情形). 由于横截相交性在小扰动下保持, 所以 K 扰为 K' 后仍与 Δ' 相交于 v_0 或其近旁的 v_0' (见图 1-17). 换句话说, K 所具有的 v_0 这

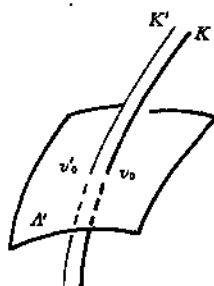


图 1-17 ($k=1$)

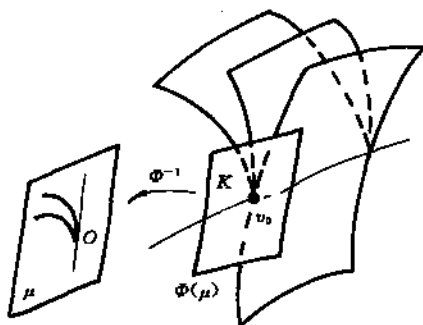


图 1-18 ($k=2$)

样的奇异性是扰不掉的. 一个维数小于 k 的开折所代表的流形, 虽然也能在 \mathscr{R} 中的 v_0 点与 Δ' 相交, 但在小扰动下, 它就可能与 Δ' 分离(这种相交不是横截的). 这说明, 像 v_0 这样的奇异性, 至少在 k 参数的开折中才是“不可去”的. 而这个数 k , 就是 v_0 的余维. 由

Thom 横截定理(见附录 C 中定理 C.15), 满足横截条件的向量场族的集合在 \mathcal{R} 的全体向量场族中构成一个稠密子集, 称其中的任一族为一个**通有**(generic)族, 或**一般族**. 因此, 可以粗略地说, 那种在至少 k 参数通有族中“不可去”的分岔现象是余维 k 的. 当然, 在空间 \mathcal{R} 中的 v_0 点附近, 除了 Λ' 之外, 还可能有余维低于 k 的奇异向量场的集合(即 $\Lambda \setminus \Lambda'$). 在较简单(较“理想”)的情形, 它们形成在 v_0 点附近的余维小于 k 的各层次的子流形 Λ'_k , 如果我们恰当选择 k 参数族 K , 使得它在 v_0 点与各层次的 Λ'_k 都横截, 则这个 K 就是一个普适开折. 此时, 如果把定义开折 K 的映射记为 $\Phi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathcal{R}$, 则 K 与各分岔曲面的截痕在 Φ^{-1} 下的象, 就形成了参数空间 \mathbf{R}^k 中的**分岔图**(见图 1-18). 这种几何的考虑有时是方便的.

一个余维 2 分岔的例子(Bogdanov-Takens 系统)

考虑一个向量场芽, 限制在奇点处的中心流形上, 其线性部分矩阵相似于一个二阶幂零矩阵, 它有如下的表示

$$\frac{dx}{dt} = v_0(x) = Ax + \dots \quad (1.1)$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$, $v_0(0) = 0$, $Dv_0(0) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

这是一个有二重零特征根的奇异向量场. 我们关心的是: 它在 $x = 0$ 附近是否存在普适开折? 分岔的余维是多少? 它的分岔图如何? 其开折的拓扑结构有哪些不同的类型? 它们怎样随参数的变动从一种类型变成另一种类型? 这些问题的解决不是轻而易举的. 事实上, 这是由 Bogdanov^[Bo1,2] 和 Takens^[T] 在 70 年代中期分别独立解决的一个难题, 并且成为推动分岔理论进一步发展的一个著名工作. 因此, 我们将在本节和第三章 §1 中详细讨论这个例子, 借以介绍向量场分岔的一些基本理论与方法. 本节主要研究

这个奇异向量场的余维.

由例 4.7 的 (4.19) 式可知, 方程 (5.1) 具有正规形

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|x|^3), \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1x_2 + O(|x|^3). \end{cases} \quad (5.1)'$$

为了对它的奇异性加以限制, 这里假设 $ab \neq 0$.

设 U 为 \mathbb{R}^2 内包含 $x=0$ 的一个开邻域, $X(x)$ 为 x 点的全体 C^∞ 向量场芽的集合, 并记

$$\mathcal{X} = \{(\xi, v) \mid v \in X(\xi), \xi \in U\}.$$

与 (ξ, v) 相应的是在 ξ 点的向量场芽. 记 $V(\xi)$ 为 ξ 的一个小邻域, 则 (ξ, v) 可以表示为

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x \in V(\xi). \quad (5.2)$$

因此 (5.1) 可以简单表示为 $(0, v_0)$. 我们称 (ξ, v) 具有与 $(0, v_0)$ 相同的奇异性, 是指它满足如下两个条件:

(H₁) $v(\xi) = 0$, 且 $v(x)$ 在 $x = \xi$ 的线性部分矩阵 $Dv(\xi)$ 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(H₂) 把 (5.2) 在 $x = \xi$ 化为正规形 (5.1)' 后有 $ab \neq 0$.

现在可以把与 (5.1) 有相同奇异性的向量场表示成:

$$S = \{(\xi, v) \in \mathcal{X} \mid (\xi, v) \text{ 满足 (H}_1\text{) 和 (H}_2\text{)}\}. \quad (5.3)$$

记 $S^+ = \{(\xi, v) \in S \mid \text{条件 (H}_2\text{) 中 } ab > 0\}$ 和 $S^- = \{(\xi, v) \in S \mid \text{条件 (H}_2\text{) 中 } ab < 0\}$. 显然, $S^+ \cup S^- = S \subset \mathcal{X}$.

附注 5.10 这里函数空间 \mathcal{X} 的取法与上面谈的稍有不同. \mathcal{X} 中的每个“点”, 是 \mathbb{R}^2 中的一个点附着在一个在该点附近的切向量场. 这符合流形上向量场的一般定义 (见附录 B 中附注 B.14), 由于在 \mathbb{R}^n 中的每一点, 切空间就是 \mathbb{R}^n 自身, 所以常把向量场与其主部等同 (见附录 B 中附注 B.17). 我们此处的取法, 对描述上面的集合 S 并研究它在 \mathcal{X} 中的余维有很大方便, 并使得下文从横

截性定义非退化族符合定义 5.3 的原则(局部族要在相空间与参数空间的乘积空间中考虑). 要注意的是, 如果 S 在 \mathcal{X} 中构成余维为 k 的子流形, 且与 S 横截的子流形有参数表示 $\{(\xi, v_\varepsilon)\}$, 则 ε 的维数的最小值不再是 k , 而是 $k-n$, 其中 n 是 ξ 所在相空间的维数, 此例中 $n=2$.

下面证明 S 在 \mathcal{X} 中的 $(0, v_0)$ 点附近构成一个(局部)余维 4 子流形. 记

$$J^k \stackrel{\text{d}}{=} \{(\xi, j_\xi^k v) \mid (\xi, v) \in \mathcal{X}\},$$

其中 $j_\xi^k v$ 为 v 在 ξ 的 k -jet, 见附录 C. 从 \mathcal{X} 到 J^k 有自然投影

$$\pi_k: \mathcal{X} \rightarrow J^k, \quad (\xi, v) \mapsto (\xi, \tilde{v}, \widetilde{Dv}, \dots, \widetilde{D^k v});$$

从 J^m 到 J^n ($m \geq n$) 有自然投影 $\pi_{mn}: J^m \rightarrow J^n$:

$$(\xi, \tilde{v}, \widetilde{Dv}, \dots, \widetilde{D^m v}, \dots, \widetilde{D^n v}) \mapsto (\xi, \tilde{v}, \widetilde{Dv}, \dots, \widetilde{D^n v}),$$

其中坐标 \tilde{v} 是 $v(x)$ 在 $x = \xi$ 点的值(它是 2 维的), 而 $\widetilde{D^k v}$ ($k \geq 1$) 是 $v(x)$ 在 $x = \xi$ 点 k 阶导数的一种坐标表示. 例如, 取 \widetilde{Dv} 为 $v(x)$ 在 $x = \xi$ 点的 Jacobi 矩阵(它是 4 维的), 取 $\widetilde{D^2 v}$ 为 $v(x)$ 在 $x = \xi$ 点的 Hesse 矩阵(它是 6 维的).

定理 5.11 当 $k \geq 2$ 时, $\pi_k S$ 在 J^k 中的 $\pi_k(0, v_0)$ 点附近形成余维 4 光滑子流形, 且 S 在 \mathcal{X} 中的 $(0, v_0)$ 点附近形成余维 4 光滑子流形.

证明 由 S 的定义(5.3)式和条件 (H_1) 易知

$$\pi_1 S = \{(\xi, \tilde{v}, \widetilde{Dv}) \mid \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \det \widetilde{Dv} = \text{tr } \widetilde{Dv} = 0, \widetilde{Dv} \neq 0\},$$

其中 \tilde{v}_1 和 \tilde{v}_2 表示 \tilde{v} 的两个分量, $\det \widetilde{Dv}$ 和 $\text{tr } \widetilde{Dv}$ 分别表示矩阵 \widetilde{Dv} 的行列式和迹. 注意括号内右侧 4 个条件是彼此独立的, 故 $\pi_1 S$ 在 $\pi_1(0, v_0)$ 附近是 J^1 中的余维 4 子流形.

下面设 $k \geq 2$. 注意投影 π_k 是 C^∞ 浸盖, 由附录 B 中定理 B.27, $\pi_k^{-1}(\pi_1 S)$ 是 J^k 中的光滑子流形; 再由定理 C.16, $\pi_k^{-1}(\pi_1 S)$ 在 J^k

中的余维等于 $\pi_1 S$ 在 J^1 中的余维,即等于 4. 另一方面,由 S 的定义可知, $\pi_k S = \pi_{k1}^{-1}(\pi_1 S)|_{(H_2)}$. 注意条件 (H_2) 由不等式 $ab > 0$ 给出,其中的 a 和 b 是经过相空间的 C^∞ 变换得到的. 因此, $\pi_k S$ 是 $\pi_{k1}^{-1}(\pi_1 S)$ 在 $\pi_k(0, v_0)$ 点附近的开子集,从而它是 J^k 中 $\pi_k(0, v_0)$ 点附近的局部余维 4 光滑子流形.

注意 $S = \pi_k^{-1}(\pi_k S)$, 重复如上推理(用定理 B. 27 和定理 C. 16) 可知, S 在 \mathcal{X} 中 $(0, v_0)$ 附近, 构成局部的余维 4 光滑子流形. ■

现在设

$$\{(\xi, v_\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbf{R}^m, m \geq 2\} \subset \mathcal{X} \quad (5.4)$$

是 \mathcal{X} 中的向量场族(参见附注 5. 10), 且 v_0 就是原来的奇异向量场(5. 1) 在 $x=0$ 的向量场芽. 因此, 又把(5. 4) 称为 $(0, v_0)$ 的一个开折, 与它相应的微分方程是

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \varepsilon), \quad x \in V(\xi). \quad (5.5)$$

定义 5. 12 称(5. 1) 的开折 (ξ, v_ε) 是非退化的, 如果 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^m$ 到 J^2 的映射

$$(\xi, \varepsilon) \mapsto \pi_2(\xi, v_\varepsilon)$$

在 $(\xi, \varepsilon) = (0, 0)$ 点与空间 J^2 中的子流形 $\pi_2 S$ (在 $\pi_2(0, v_0)$ 点) 横截相交.

下面要证明的主要结果是:

定理 5. 13

(1) \mathcal{X} 中的全体非退化开折构成它的一个稠密集.

(2) 对于 $(0, v_0)$ 的任一开折(5. 4), 在 $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 的小邻域内存在 C^∞ 变换 $x = x(y, \varepsilon)$, 满足 $x(0, 0) = 0$, 并且把(5. 5) 化为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \theta(y_1, \varepsilon), \\ \dot{y}_2 &= \{\varphi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)y_2 + y_1^2 + y_1 y_2 Q(y_1, \varepsilon) + y_2^2 \Phi(y, \varepsilon)\} \theta(y_1, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中

$$\theta, Q, \Phi, \varphi, \psi \in C^\infty, \varphi(0) = \psi(0) = 0, Q(0, 0) = \eta, \theta(0, 0) = 1. \quad (5.7)$$

这里 $\eta = \pm 1$, 取决于 $(0, v_0) \in S^+$ 或 S^- . 在 $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 的小邻域内, (5.6) 轨道等价于如下的标准形

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varphi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)x_2 + x_1^2 + x_1x_2Q(x_1, \varepsilon) + x_2^2\Phi(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (5.8)$$

其中 Q, Φ, φ, ψ 同上. 若 (5.4) 还是非退化的, 则存在参数空间的 C^∞ 变换 $\varepsilon = \varepsilon(\mu), \varepsilon(0) = 0$, 把 (5.8) 进一步化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \mu_1 + \mu_2x_2 + x_1^2 + x_1x_2\tilde{Q}(x_1, \mu) + x_2^2\tilde{\Phi}(x, \mu), \end{cases} \quad (5.9)$$

其中 $\tilde{Q}, \tilde{\Phi}$ 满足与 Q, Φ 相同的条件.

定理的结论(1)是定义 5.12 和定理 C.15(Thom 定理的 jet 形式)的直接推论. 结论(2)由下面的几个引理得出. 虽然这个定理尚未回答 47 页所提出的问题, 但我们将以此定理为基础, 分以下两步解决这些问题. 为了确定起见, 只考虑 $(0, v_0) \in S^+$ 的情形.

(一) 在标准形 (5.9) ($\eta = 1$) 中, 取 $\tilde{Q}(x_1, \mu) \equiv 1, \tilde{\Phi}(x, \mu) \equiv 0$, 即讨论向量场族

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2y + x^2 + xy \end{cases} \quad (5.10)$$

的分岔图和轨道拓扑分类图, 这里 $x, y \in \mathbb{R}^1$.

(二) 对任意的 \tilde{Q} 和 $\tilde{\Phi}$ ($\tilde{Q}, \tilde{\Phi} \in C^\infty, \tilde{Q}(0, 0) = 1$), 来证明开折 (5.9) 都与 (5.10) 的一个导出族等价, 即 (5.10) 是 $(0, v_0) \in S^+$ 的一个普适开折, 并且是余维 2 的.

在作第(一)步讨论时, 除了运用微分方程定性理论的知识和方法外, 还要碰到几种常见的分岔现象. 所以, 我们首先在第二章

中介绍几种基本类型的分岔,然后在第三章中继续解决本节的问题.

定理 5.13 中结论(2)的证明

引理 5.14 设(5.4)是 $(0, v_0)$ 的一个开折,则存在 C^∞ 变换 $y = y(x, \varepsilon)$, $y(0, 0) = 0$, 它把方程(5.5)化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = F(y_1, \varepsilon) + y_1 y_2 G(y_1, \varepsilon) + y_2^2 \Psi(y, \varepsilon), \end{cases} \quad (5.11)$$

其中 $F, G, \Psi \in C^\infty$, 并且

$$F(0, 0) = \left. \frac{\partial F}{\partial y_1} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} \right|_{(0,0)} = 2, \quad G(0, 0) = \eta,$$

这里 $\eta = \text{sign}(ab)$, a 与 b 是把 $v(x, 0)$ 化为正规形(5.1)'后的二次项系数.

证明 由例 4.7 可知, 无妨假定(5.5)具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + w_1(x, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + \eta x_1 x_2 + g(x_1) + w_2(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (5.12)$$

其中函数 $w_1, w_2, g \in C^\infty$, 且 $g = O(|x|^3)$, $w_i(x, 0) = 0, i = 1, 2$. 令

$$u = x_1, \quad v = x_2 + w_1(x, \varepsilon),$$

则(5.12)变成

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \tilde{F}(u, \varepsilon) + v \tilde{G}(u, \varepsilon) + v^2 \tilde{\Psi}(u, v, \varepsilon), \end{cases} \quad (5.13)$$

其中 $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{\Psi} \in C^\infty$, 并且

$$\begin{aligned} \tilde{F}(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial u^2} \right|_{(0,0)} = 2, \\ \tilde{G}(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \eta. \end{aligned} \quad (5.14)$$

利用上面的条件, 可由隐函数方程 $\tilde{G}(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ 确定 C^∞ 函

数 $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, 再经过变换

$$y_1 = u - \alpha(\varepsilon), \quad y_2 = v,$$

把方程(5.13)变为(5.11)的形式,并满足引理的要求。I

引理 5.15 存在 C^∞ 变换 $x = x(y, \varepsilon)$, $x(0, 0) = 0$, 在 $(y, \varepsilon) = (0, 0)$ 的小邻域内, 它把方程(5.11)变成(5.6)形式。

证明 对(5.11)中的函数 $F(y_1, \varepsilon)$ 应用 Malgrange 定理(定理 2.12)可得

$$F(y_1, \varepsilon) = (\varphi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon)y_1 + y_1^2)q(y_1, \varepsilon),$$

其中 $\varphi, \phi, q \in C^\infty$, $\varphi(0) = \phi(0) = 0, q(0, 0) = 1$. 因此, 在 $(y, \varepsilon) = (0, 0)$ 的小邻域内, (5.11)可以改写成

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \left\{ \varphi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon)y_1 + y_1^2 + \frac{G(y_1, \varepsilon)}{q(y_1, \varepsilon)}y_1y_2 + \frac{\Psi(y_1, \varepsilon)}{q(y_1, \varepsilon)}y_2^2 \right\} q(y_1, \varepsilon). \end{cases} \quad (5.15)$$

令

$$u = y_1, \quad v = \frac{y_2}{\sqrt{q(y_1, \varepsilon)}},$$

则(5.15)转化成

$$\begin{cases} \dot{u} = v\sqrt{q}, \\ \dot{v} = \left\{ \varphi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon)u + u^2 + \frac{G}{\sqrt{q}}uv + \frac{\Psi}{2q\sqrt{q}}v^2 - \frac{\dot{q}}{2q\sqrt{q}}v \right\} \sqrt{q}, \end{cases} \quad (5.16)$$

其中 $q = q(u, \varepsilon), G = G(u, \varepsilon), \Psi = \Psi(u, \sqrt{q}v, \varepsilon)$, 且

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial u} \dot{u} = \frac{\partial q}{\partial u} v \sqrt{q}.$$

因此, (5.16)可以写成

$$\begin{cases} \dot{u} = v\theta(u, \varepsilon), \\ \dot{v} = \{ \varphi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon)u + u^2 + uvQ(u, \varepsilon) + v^2\Phi(u, v, \varepsilon) \} \theta(u, \varepsilon), \end{cases} \quad (5.17)$$

其中 $\theta = \sqrt{q}$, $Q = \frac{G}{\sqrt{q}}$, $\Phi = \Psi - \frac{1}{2q} \frac{\partial q}{\partial u}$, 而且 φ, ψ, θ, Q 和 Φ 满足条件(5.7).

下面再进行一次变换, 把(5.17)第二式中的 $\psi(\epsilon)u$ 变成 $\psi(\epsilon)v$ 的形式. 令

$$x_1 = u + \frac{\psi(\epsilon)}{2}, \quad x_2 = v,$$

则(5.17)化成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \tilde{\theta}(x_1, \epsilon), \\ \dot{x}_2 &= \{ \tilde{\varphi}(\epsilon) + \tilde{\psi}(\epsilon)x_2 + x_1^2 + x_1x_2\tilde{Q}(x_1, \epsilon) + x_2^2\tilde{\Phi}(x, \epsilon) \} \tilde{\theta}(x_1, \epsilon), \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中

$$\tilde{\theta}(x_1, \epsilon) = \theta(x_1 - \frac{\psi(\epsilon)}{2}, \epsilon),$$

$$\tilde{\varphi}(\epsilon) = \varphi(\epsilon) - \frac{1}{4}\psi^2(\epsilon),$$

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = -\frac{1}{2}\psi(\epsilon)(1 + \xi(\epsilon)),$$

$$\tilde{Q}(x_1, \epsilon) = Q(x_1 - \frac{1}{2}\psi(\epsilon), \epsilon) - \frac{1}{2}\psi(\epsilon)\zeta(x_1, \epsilon),$$

$$\tilde{\Phi}(x, \epsilon) = \Phi(x_1 - \frac{1}{2}\psi(\epsilon), x_2, \epsilon),$$

而函数 $\xi(\epsilon)$ 和 $\zeta(x_1, \epsilon)$ 由下式确定

$$Q(x_1 - \frac{1}{2}\psi(\epsilon), \epsilon) = 1 + \xi(\epsilon) + \zeta(x_1, \epsilon)x_1.$$

把 $\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{Q}$ 和 $\tilde{\Phi}$ 换回 θ, φ, ψ, Q 和 Φ 的形式后, 方程(5.18)成为(5.6), 而条件(5.7)仍成立. 引理证完. \blacksquare

附注 5.16 显然, 局部族(5.6) (在 $(y, \epsilon) = (0, 0)$ 附近的一个邻域内) 等价于(5.6)右端除以 $\theta(y_1, \epsilon)$ 所得的局部族, 并且在定义5.4中的映射 φ 与 h 都可取为相应空间中的恒同映射. 在这个

意义下,我们可以把向量场(5.6)与(5.8)视为等同.

引理 5.17 (5.4) 成为 $(0, v_0)$ 的非退化开折, 当且仅当 $\exists i, j \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq i < j \leq m$ (m 为 ε 的维数), 使行列式

$$\left. \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\varepsilon_i, \varepsilon_j)} \right|_{\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0} \neq 0, \quad (5.19)$$

其中 $\varphi(\varepsilon), \psi(\varepsilon)$ 是把(5.5)化为(5.6)的形式中所出现的函数, 而 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$.

证明 根据定义 5.12, (5.4) 的非退化性由映射

$$(\xi, \varepsilon) \mapsto \pi_2(\xi, v_\varepsilon) \quad (5.20)$$

在 $(\xi, \varepsilon) = (0, 0)$ 点与空间 J^3 中的子流形 $\pi_2 S$ (在 $\pi_2(0, v_0)$ 点) 横截相交来定义. 注意 $\pi_2(\xi, v_\varepsilon)$ 的坐标表示分别是 ξ , 及 v_ε 及其对 x 的前两阶导数在 ξ 的值, 从而可代替(5.20), 考虑映射

$$(x, \varepsilon) \mapsto (x, v(x, \varepsilon), Dv(x, \varepsilon), D^2v(x, \varepsilon))$$

在 $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 点与空间 J^3 中的子流形 $\pi_2 S$ 的横截相交性. 由附录 C 可知, 向量场(5.5)经过(把 $x = \varepsilon = 0$ 固定的)微分同胚作用后, 在 $x = \varepsilon = 0$ 点与某一子流形的横截相交性不改变. 利用引理 5.14, 引理 5.15 和附注 5.16, 我们可适当选取坐标系, 对(5.5)在(5.8)的形式下讨论(直接在(5.6)的形式下讨论, 可得同样结果, 但计算稍繁).

另一方面, 在 J^2 中 $\pi_2(0, v_0)$ 点附近 $\pi_2 S$ 可由如下方程确定(见条件 (H_1) 和 (H_2))

$$\begin{aligned} v_1(x, \varepsilon) &= 0, \quad v_2(x, \varepsilon) = 0, \\ \det \frac{\partial v(x, \varepsilon)}{\partial x} &= 0, \quad \text{tr} \frac{\partial v(x, \varepsilon)}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

因此, 由定理 C.13 可知, (5.8) 在 $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 点的非退化性等价于

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_m} \\ -2 & -\eta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta & 2\Phi & \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_m} \end{pmatrix}_{x=\varepsilon=0} = 4,$$

而它显然等价于条件(5.19)对某 $1 \leq i < j \leq m$ 成立. \blacksquare

引理 5.18 设(5.4)是非退化的开折,则存在 C^∞ 变换 $\mu = \mu(\varepsilon)$, $\mu(0) = 0$, 它在 $\varepsilon = 0$ 附近非退化,并把(5.8)变到(5.9).

证明 无妨设引理 5.17 中的 $i = 1, j = 2$. 令 $\mu = \mu(\varepsilon)$ 由下式给出:

$$\mu_1 = \varphi(\varepsilon), \mu_2 = \psi(\varepsilon), \mu_3 = \varepsilon_3, \dots, \mu_m = \varepsilon_m;$$

则由条件(5.7)知 $\mu(0) = 0$. 又由于(5.8)是非退化的,则由引理 5.17 可知, $\mu = \mu(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 是非退化的,引理得证. 方程(5.9)中的 $\tilde{Q}(y_1, \mu) = Q(y_1, \varepsilon(\mu))$, $\tilde{\Phi}(y, \mu) = \Phi(y, \varepsilon(\mu))$, 而 $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ 是 $\mu = \mu(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 附近的逆变换. \blacksquare

利用以上诸引理,可得定理 5.13 的结论(2).

习题与思考题一

1.1 考虑 \mathbf{R}^2 上的动力系统 φ , 设它的轨线分别具有图 1-6, 图 1-8 或图 1-9 的 7 种分布. 对每一种分布,取平面上不同区域的点 x , 讨论极限集 $\alpha(x)$ 和 $\omega(x)$. 并研究系统的非游荡集 $\Omega(\varphi)$. 对哪一种分布,你可以断言系统不是结构稳定的?

1.2 利用对(2.13)的讨论方法,证明 \mathbf{R}^1 上的系统(2.2)是 C^∞ 系统

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + O(|x|^3)$$

的一个普适开折.

1.3 对下列系统,求出与中心流形相应的诱导方程(3.8),并由此作出原方程在原点附近的相图(草图).

$$(1) \dot{x} = xy, \dot{y} = -y - 3x^2.$$

$$(2) \dot{x} = 2x^2 - y^2, \dot{y} = y - x^2 + xy.$$

1.4 考虑 $\frac{dx}{dt} = Ax + O(|x|^2)$, 其中 $x \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 假设向量场在旋转角度 π 下保持不变, 求其在原点附近的三次正规形.

1.5 设 \mathbb{R}^2 上的向量场以 $(0,0)$ 为奇点, 其线性部分在 $(0,0)$ 的矩阵具有二重零特征根, 而且向量场在旋转角度 $\frac{2\pi}{q}$ 下保持不变, 其中 q 为正整数, 并且满足 $q \geq 3$. 证明向量场在 $(0,0)$ 点附近的正规形为

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \bar{x}^2 x + c_2 x^2 \bar{x}^2 + \cdots + c_m x^{m+1} \bar{x}^m + A \bar{x}^{q-1} + O(|x|^q),$$

其中 x, c_i, A 为复数, $m = [\frac{q-1}{2}]$.

1.6 考虑三维系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + O(|x|^2).$$

求其在原点附近的三次正规形.

1.7 考虑 C^∞ 映射 $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, 它以 $-1 + \varepsilon$ 为特征根, $|\varepsilon| \ll 1$. 证明对给定的正偶数 k , 存在 $\delta > 0$, 使当 $|\varepsilon| < \delta$ 时, F 可以经过 C^∞ 变换化为

$$F(x) = (-1 + \varepsilon)x + a_3(\varepsilon)x^3 + a_5(\varepsilon)x^5 + \cdots \\ + a_{k-1}(\varepsilon)x^{k-1} + O(|x|^{k+1}).$$

利用此结果对例 2.11 的结论给出简单的证明.

1.8 利用上题的结果, 讨论以 -1 为特征根的一维映射

$$F(x) = -x + ax^5 + O(|x|^6), \quad a \neq 0$$

在小扰动下的分岔规律.

第二章 常见的局部与非局部分岔

本章介绍一些常见的分岔现象,其中包括奇点分岔、闭轨分岔、Hopf 分岔、同宿分岔、Poincaré 分岔等,其中前三种为局部分岔问题,后两种分别为半局部分岔和全局分岔问题.除了奇点分岔外,本章的大部分讨论都限制在相空间为二维的情形.

§ 1 奇点分岔

考虑一个光滑地依赖于参数并且具有奇点的向量场.当参数变动时,我们关心奇点个数及其附近的轨道结构如何变化.这种分岔现象称为奇点分岔.

一般理论

定义 1.1 向量场 X 的奇点 $p \in M$ 称为非退化的,如果它在 p 点的线性部分算子是非奇异的,即它的所有特征根均非零.否则称为退化的.

定理 1.2 光滑地依赖于变量和参数的向量场,如果它的奇点是非退化的,则奇点本身也光滑地依赖于参数.

证明 设向量场由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \mu) \quad (1.1)$$

给出,其中 $v \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $r \geq 1, k \geq 1$. 设当 $\mu = \mu_0$ 时, $x = x_0$ 为 (1.1) 的非退化奇点,即 $v(x_0, \mu_0) = 0$, $\left. \frac{\partial v(x, \mu)}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)}$ 非奇异. 由隐函数定理,在 (x_0, μ_0) 附近存在光滑函数 $x = \gamma(\mu)$, 使

$\gamma(\mu_0) = x_0$, 且 $v(\gamma(\mu), \mu) \equiv 0$. 定理得证. |

附注 1.3 定理 1.2 说明, 当奇点非退化时, 奇点的个数在参数的微小变化下不变, 它的位置也光滑地依赖于参数的变化. 需要注意, 奇点的非退化性与双曲性是不同的概念. 例如, 一个向量场在奇点处的线性部分矩阵有一对纯虚特征根时, 按定义 1.1, 它是非退化的, 但它是非双曲的. 此时在扰动下, 虽然奇点个数(在小邻域内)不发生变化, 但其附近的轨道结构可能变化, 出现 Hopf 分岔, 或 Poincaré 分岔, 我们将在 §3 与 §5 中分别予以讨论.

定理 1.4 设 M 是 n 维紧致流形, $r \geq 1$, 则 $\mathcal{X}^r(M)$ 中仅有非退化奇点(它们必是孤立奇点)或无奇点的向量场集合形成一个开稠子集.

证明 设 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 相应于微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U(\xi),$$

其中 $f \in C^r(M, M)$, $U(\xi)$ 为 M 中 ξ 点的邻域. 如同第一章 §5 的讨论, 考虑投影

$$j^0 f: \mathcal{X}^r(M) \rightarrow J^0(M, M): X \mapsto (\xi, \tilde{f}),$$

其中 $\tilde{f} = f(\xi)$. 具有奇点的向量场集合在空间 $J^0(M, M)$ 中有表示式

$$S = \{(\xi, \tilde{f}) | \tilde{f} = 0\},$$

它是 $J^0(M, M)$ 中的光滑闭子流形(因为 M 是紧空间). 设向量场 $f(x)$ 在 ξ 点非退化, 即 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\xi}$ 非奇异, 从而由附录 C 中定理 C.13 知, $j^0 f$ 与子流形 S 横截相交. 注意, 不相交也是横截. 再利用定理 C.15, 得知仅有非退化奇点或无奇点的向量场在 $\mathcal{X}^r(M)$ 中形成开稠子集. |

这个定理说明, 向量场的一个退化奇点可以经过任意小的扰动转化为(多个)非退化奇点, 或经扰动使奇点消失. 但如果我们考虑向量场族 $v(x, \mu)$, 则奇点的退化性往往是不可避免的. 事实

上,虽然小扰动可以把对应于 $\mu = \mu_1$ 的退化奇点 $x = x_1$ 扰为非退化的,但在 x_1 附近的 x_2 点,相应于 μ_1 附近的 μ_2 却可能是新的退化奇点. 对一个具体的奇点分岔问题,通常有两种处理方法:一种是利用中心流形定理,把问题归结到中心流形上,见第一章例 3.12;另一种称为 Liapunov-Schmidt 方法,或称为更替法 (alternative method). 为了说明这个方法的基本思想,我们先看一种特殊情形. 设变量 $x = (y, z)$, 在 $x = 0$ 附近微分方程具有下列形式

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(y, z, \lambda), \quad \frac{dz}{dt} = Bz + g(y, z, \lambda), \quad (1.2)$$

其中 A 的特征根均为零,而 B 的特征根均不为零; $f, g \in C^r, r \geq 2$; $f(0, 0, 0) = 0, g(0, 0, 0) = 0, f, g = O(|y, z|^2)$. 为了研究奇点的分布,在 $x = 0$ 和 $\lambda = 0$ 附近考虑方程

$$Ay + f(y, z, \lambda) = 0, \quad Bz + g(y, z, \lambda) = 0. \quad (1.3)$$

由隐函数定理,存在 $(y, \lambda) = (0, 0)$ 的邻域 U 和 C^r 函数 $z = \varphi(y, \lambda)$, 使得

$$B\varphi(y, \lambda) + g(y, \varphi(y, \lambda), \lambda) = 0, \quad \forall (y, \lambda) \in U.$$

把函数 $z = \varphi(y, \lambda)$ 代入 (1.3) 的第一个方程左端,可得 C^r 函数

$$G(y, \lambda) \stackrel{d}{=} Ay + f(y, \varphi(y, \lambda), \lambda). \quad (1.4)$$

记

$$S = \{(y, \lambda) \in U | G(y, \lambda) = 0\}, \quad S_{\lambda_0} = S \cap \{\lambda = \lambda_0\},$$

则对不同的 $\lambda, |\lambda| \ll 1, S_\lambda$ 结构的变化反映了奇点个数的变化规律. 这样就把对 (1.3) 的讨论转化为对 $G(y, \lambda) = 0$ 的讨论,使空间维数得到降低. 通常称 (1.4) 为方程 (1.2) 的分岔函数.

为了应用上的便利,下面在更一般的框架下讨论这个问题.

Liapunov-Schmidt 方法

设 X, Z 和 Λ 为实 Banach 空间, U 和 W 分别为 X 和 Λ 中零点的邻域. C^1 映射 $M: U \times W \subset X \times \Lambda \rightarrow Z$, 满足 $M(0, 0) = 0$. 我

们要研究方程

$$M(x, \lambda) = 0 \quad (1.5)$$

在 $U \times W$ 中 $(0, 0)$ 点的某邻域内解的结构. 为此, 设 $A = D_x M(0, 0)$, 并记 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别为 A 在 X 中的零空间和 A 在 Z 中的值域空间. 本节的一个基本假设是

(H) $\mathcal{N}(A)$ 在 X 中存在补空间; $\mathcal{R}(A)$ 是 Z 中的闭集, 并且在 Z 中存在补空间. (当 A 为 Fredholm 算子时, 这个假设总是成立的. 在下文的应用中, 经常是这种情形.)

因此, 在 X 上存在投影 P , 在 Z 上存在投影 Q , 使得

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A), \quad \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(A). \quad (1.6)$$

$\forall x \in U$, 可写成 $x = u + v$, 其中 $u = Px \in \mathcal{N}(A) = X_P, v = (I - P)x \in \mathcal{N}(P) = X_{I-P}$. 这里 I 是恒同映射, X_P 和 X_{I-P} 表示投影 P 和 $I - P$ 的值域. 显然, 方程 (1.5) 等价于

$$QM(u + v, \lambda) = 0, \quad (1.7a)$$

$$(I - Q)M(u + v, \lambda) = 0. \quad (1.7b)$$

定义映射 $\phi: X_P \times X_{I-P} \times \Lambda \rightarrow \mathcal{R}(A)$,

$$\phi(u, v, \lambda) = QM(u + v, \lambda).$$

则 $\phi(0, 0, 0) = 0$, 且 $D_v \phi(0, 0, 0) = A|_{\mathcal{N}(P)}$ 是 $\mathcal{N}(P)$ 与 $\mathcal{R}(A)$ 间的同构. 由隐函数定理, 存在 X_P 在原点的邻域 U_0, X_{I-P} 在原点的邻域 V_0, Λ 在原点的邻域 W_0 , 以及 C^1 映射 $v^*: U_0 \times W_0 \rightarrow V_0$, 使 $U_0 \times W_0 \subset U, W_0 \subset W$, 且

$$QM(u + v^*(u, \lambda), \lambda) \equiv 0, \quad \forall (u, \lambda) \in U_0 \times W_0,$$

并且 $v^*(0, 0) = 0, D_u v^*(0, 0) = 0$. 利用 v^* , 定义 C^1 映射 $x^*: U_0 \times W_0 \rightarrow U$, 和 C^1 映射 $G: U_0 \times W_0 \rightarrow \mathcal{N}(Q)$,

$$x^*(u, \lambda) = u + v^*(u, \lambda), \quad (1.8)$$

$$G(u, \lambda) = (I - Q)M(u + v^*(u, \lambda), \lambda). \quad (1.9)$$

容易验证, $x^*(0, 0) = 0, D_u x^*(0, 0) = I|_{\mathcal{N}(A)}, G(0, 0) = 0$,

$$D_u G(0,0) = 0.$$

总结上面的讨论,我们有下面的结果.

定理 1.5 如果条件(H)成立, U_0, V_0, W_0 如上. 则 $\forall u \in U_0, x \in U_0 \times V_0 \subset X$, 和 $\lambda \in W_0 \subset \Lambda$, 如下两组结论等价

$$(1) Px = u, \quad M(x, \lambda) = 0;$$

$$(2) x = x^*(u, \lambda), \quad G(u, \lambda) = 0,$$

其中 x^* 与 G 分别由(1.8)和(1.9)定义. \square

定理 1.5 说明,原来的奇点分岔问题 $M(x, \lambda) = 0$ 转化为求解其分岔方程 $G(u, \lambda) = 0$. 注意 $x \in X, M(x, \lambda) \in Z$, 而 $u \in X_P = \mathcal{N}(A), G(u, \lambda) \in Z_{I-Q} = \mathcal{N}(Q)$, 因而使问题的定义域及值域都作了显著的约化. 这就是 Liapunov-Schmidt 方法的核心思想.

现在我们把上面的一般理论用于 \mathbf{R}^n 上的向量场奇点分岔问题. 考虑依赖于参数 λ 的向量场

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (1.10)$$

其中 $f \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n), r \geq 2; f(0,0) = 0, D_x f(0,0) = A$.

考虑奇点分岔问题, 就是要在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ 的原点附近考察方程

$$f(x, \lambda) = Ax - N(x, \lambda) = 0, \quad (1.11)$$

其中 $N \in C^r(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n), N(0,0) = 0, D_x N(0,0) = 0$. 与前面的一般情况对比, 此时有 $X = Z = \mathbf{R}^n, \Lambda = \mathbf{R}^k$. 假设又有 $\dim \mathcal{N}(A) = \text{codim } \mathcal{R}(A) = 1$, 则存在投影 $P, Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 满足(1.6). 从而存在 $u_0 \in \mathcal{N}(A), w_0 \in \mathcal{N}(Q)$, 使

$$\mathcal{N}(A) = \text{Span}\{u_0\}, \quad \mathcal{N}(Q) = \text{Span}\{w_0\}.$$

从上面的一般理论知道, 存在 $\delta > 0, \sigma > 0$ 和 C^r 函数 $v = v^*(a, \lambda) \in X_{I-P}$, 满足 $v^*(0,0) = 0, D_a v^*(0,0) = 0$, 使当 $|a| < \delta, |\lambda| < \sigma$ 时

$$Qf(au_0 + v^*(a, \lambda), \lambda) \equiv 0.$$

由定理 1.5, $x = au_0 + v$, $v \in X_{I-P}$ 是 (1.11) 的解, 当且仅当 $v = v^*(a, \lambda)$ 且 (a, λ) 满足分岔方程

$$g(a, \lambda) = 0,$$

这里分岔函数 g 由下式定义:

$$g(a, \lambda)w_0 = (I - Q)f(au_0 + v^*(a, \lambda), \lambda). \quad (1.12)$$

例 1.6 用 Liapunov-Schmidt 方法重新考虑第一章例 3.12. 我们考虑 \mathbf{R}^2 中一类更广泛的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta y + x^2 + xy(1 + \varphi(x)) + y^2\Phi(x, y), \end{cases} \quad (1.13)$$

其中 $\beta \neq 0, \varphi, \Phi \in C^\infty, \varphi(0) = 0$. 考虑它的奇点 $(0, 0)$ 在扰动下的分岔问题. 此时线性部分矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\dim \mathcal{N}(A) = \text{codim } \mathcal{R}(A) = 1$. 取满足 (1.6) 的投影 $P, Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. 令

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix},$$

则

$$\mathcal{N}(A) = X_P = \text{Span}\{u_0\}, X_{I-P} = \text{Span}\{v_0\},$$

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q) = \text{Span}\{s_0\}.$$

取 $\mathcal{N}(Q) = \text{Span}\{w_0\}$. 函数 $v = v^*(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X_{I-P}$ 由方程

$Qf(au_0 + v^*(a)) = 0$ 确定, 即

$$0 = Q\{v_2 s_0 + [a^2 + av_2(1 + \varphi(a)) + y^2\Phi(a, v_2)]w_0\} = v_2 s_0.$$

因此 $v = v^*(a) \equiv 0$. 把它代入 (1.12), 得到

$$\begin{aligned} g(a)w_0 &= (I - Q)f(au_0 + v^*(a)) \\ &= (I - Q)f\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = (I - Q)\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} = a^2 w_0. \end{aligned}$$

从面分岔函数 $g(a) = a^2$.

如果我们考虑方程(1.13)的 C^2 扰动,扰动参数为 λ ,则扰动后方程的分岔函数 $g(a, \lambda)$ 满足 $g(a, 0) = a^2$. 利用隐函数定理易知,存在 $\delta > 0$ 和 C^0 函数 $a = a(\lambda)$,使得 $a(0) = 0, D_a g(a(\lambda), \lambda) \equiv 0, D_a^2 g(a(\lambda), \lambda) \neq 0, \forall |\lambda| < \delta$. 利用Taylor公式可得,当 $|\lambda| \ll 1, |a - a(\lambda)| \ll 1$,有

$$g(a, \lambda) = \mu(\lambda) + D_a^2 g(a(\lambda), \lambda)(a - a(\lambda))^2 + o(|a - a(\lambda)|^2),$$

其中 $\mu(\lambda) = g(a(\lambda), \lambda)$. 因此,在 $(a, \lambda) = (0, 0)$ 附近,方程 $g(a, \lambda) = 0$ 当 $\mu(\lambda) D_a^2 g(0, 0) < 0$ 时有两个零点,当 $\mu(\lambda) D_a^2 g(0, 0) > 0$ 时无零点;当 $\mu(\lambda) = 0$ 时有一个(二重)零点. 应用定理1.5可知,原系统(1.13)在扰动下发生鞍结点分岔. 注意,当扰动方程为 C^∞ 时,最后的讨论可从第一章定理2.12直接得到.

附注 1.7 本节中讨论的奇点分岔问题,主要着重于奇点个数随参数的变动而发生变化的规律. 实际上,在奇点个数发生变化的同时(甚至在奇点个数不变时,见附注1.3),轨道结构还可能发生其它变化. 例如闭轨、同宿轨、异宿轨等的产生或消失. 这些情形在下章中将会看到.

§ 2 闭轨分岔

考虑微分方程族

$$(X_\lambda): \quad \frac{dx}{dt} = v(x, \lambda), \quad (2.1)$$

其中 $v \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $r \geq 1, k \geq 1$. 设 X_0 有一条孤立闭轨 γ . 当 $\lambda \neq 0, |\lambda| \ll 1$ 时,我们关心 X_λ 在 γ 的邻域内是否还有闭轨? 有几条闭轨? 这就是闭轨分岔问题. 当 γ 为双曲闭轨时,问题是平凡的(见第一章§1). 因此,我们要找到一些方法,来判别 γ 的双曲性,以及当 γ 非双曲时如何研究闭轨的分岔问题. 至于 γ 为方程(2.1)的非孤立闭轨的情形,我们留待§5中讨论.

从原则上说,可把闭轨分岔问题转化为它的Poincaré映射的

不动点的分岔问题,从而可利用上节的方法.事实上,任取 $p \in \gamma$, 存在过 p 的 $n-1$ 维“无切截面” $U' \subset U$, 按第一章定义 1.6 所述, 可定义 Poincaré 映射 $P: U' \times W \rightarrow U$, 它是 C^r 的, 其中 W 是 \mathbb{R}^k 中原点的邻域, 满足 $P(p, 0) = p$. X_λ 的闭轨相应于 $M(x, \lambda) \stackrel{d}{=} P(x, \lambda) - x$ 在 $(x, \lambda) \in U' \times W$ 内的零点. 因此, §1 中的方法都是适用的. 注意, 如果把坐标原点平移到 p 点, 就会满足 §1 中 $M(0, 0) = 0$ 的条件.

在解决具体问题时, 困难在于如何实施上述原则. 下面, 我们就平面向量场的情形作进一步的讨论, 顺便介绍曲线坐标方法和某些重要结论.

考虑平面上的微分方程族

$$(X_\lambda): \quad \frac{dx}{dt} = v(x, \lambda), \quad (2.2)$$

其中 $v \in C^r(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^2)$, $r \geq 2, k \geq 1$. 设 X_0 有闭轨 γ , 它有如下的参数表示

$$\gamma: \quad x = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

设 γ 以 T 为周期, 并且为负定向, 即当 t 增大时, $\varphi(t)$ 沿 γ 顺时针方向旋转. 取 γ 在 $\varphi(t)$ 点沿外法向的单位向量

$$\zeta(t) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

由 $\zeta(t) \perp \varphi'(t)$ 及 $|\zeta(t)| = 1$ 易知, $\forall 0 \leq t \leq T$,

$$\langle \zeta(t), \varphi'(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle \zeta(t), \zeta'(t) \rangle \equiv 0, \quad (2.4)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbb{R}^2 中的内积. 取坐标变换

$$x = \varphi(s) + \zeta(s)n, \quad (2.5)$$

其中 x 在 γ 附近, $0 \leq s \leq T, |n| \ll 1$. 坐标 (s, n) 可以这样理解: 从 $\varphi(0)$ 沿 γ 经过时间 s 到达 $\varphi(s)$, 再从 $\varphi(s)$ 点沿 γ 的外法向 $\zeta(s)$ 移动长度 n 到达 x 点 (当 $n < 0$ 时, 表示向内法向移动), 见图 2-1(a). 注意, $\{n = \text{常数}\}$ 与 $\{s = \text{常数}\}$ 在平面上形成蛛网形坐标曲线 (见

图 2-1(b)), 称 (s, n) 为曲线坐标.

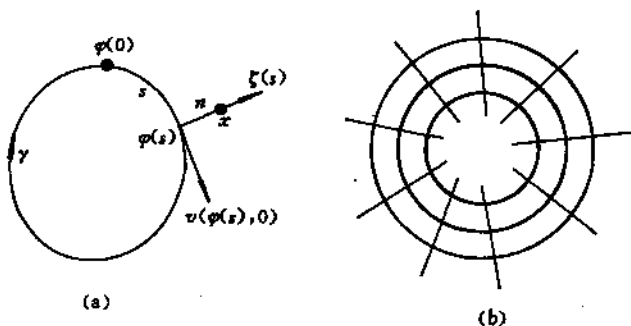


图 2-1

我们先把方程 (2.2) 转换成曲线坐标系下的方程, 然后建立 Poincaré 映射. 把 (2.5) 对 t 求导, 并应用 (2.2) 得

$$v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) = \frac{dx}{dt} = (\varphi'(s) + \zeta'(s)n) \frac{ds}{dt} + \zeta(s) \frac{dn}{dt}. \quad (2.6)$$

分别以 $\zeta(s)$ 及 $\varphi'(s)$ 对上式作内积, 利用 (2.4) 及 $|\zeta(s)| = 1$ 得

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle}{|\varphi'(s)|^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle}, \end{aligned}$$

消去 t 得

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{(\langle \varphi'(s) \rangle^2 + n \langle \varphi'(s), \zeta'(s) \rangle) \langle \zeta(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle}{\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \zeta(s)n, \lambda) \rangle} \\ &\stackrel{d}{=} F(n, s, \lambda), \end{aligned} \quad (2.7)$$

由于 $x = \varphi(s)$ 为 X_0 的解, 故

$$\varphi'(s) = v(\varphi(s), 0), \quad (2.8)$$

利用 (2.8) 和 (2.4), 可从 (2.7) 算得

$$F(0, s, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{n=0, \lambda=0} = \left\langle \zeta(s), \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) \zeta(s) \right\rangle := H(s). \quad (2.9)$$

从而(2.7)可写成

$$\frac{dn}{ds} = (H(s) + F_1(n, s, \lambda))n, \quad (2.10)$$

其中 $F_1|_{\lambda=0} = O(|n|)$. 因此, (2.10) 满足初值条件 $n|_{s=0} = a$ 的解可表示为

$$n(s, a, \lambda) = a \left(\exp \int_0^s [H(t) + F_1(n(t, a, \lambda), t, \lambda)] dt \right). \quad (2.11)$$

现在, 取 X_0 的闭轨 γ 上的点 $x_0 = \varphi(0)$, 过 x_0 以法线 $n(0)$ 为方向取一截线 L , 建立(2.11)的 Poincaré 映射(见第一章定义 1.6, 但此时与参数 λ 有关) $P: (a, \lambda) \mapsto n(T, a, \lambda)$, 这里的函数 $n(s, a, \lambda)$ 由(2.11)定义. 显然, $n(T, 0, 0) = 0$. 定义后继函数

$$G(a, \lambda) = n(T, a, \lambda) - a, \quad (2.12)$$

则对每个 $\lambda, |\lambda| \ll 1$, $G(a, \lambda)$ 关于 a 的零点与 X_λ 在 γ 附近的闭轨相对应. 注意(2.2)中 $v \in C^r, r \geq 2, F$ 关于 n, λ 为 C^r 的, 关于 s 为 C^{r-1} 的, 故(2.11)中的解 $n \in C^r$, 从而(2.12)中的函数 $G \in C^r$.

定义 2.1 若存在 $\varepsilon > 0$, 使 $\forall a \in (0, \varepsilon)$ 都有 $G(a, \lambda) < 0$ (> 0), 则称 γ 为外侧稳定(外侧不稳定)的极限环. 若存在 $\varepsilon > 0$, 使 $\forall a \in (-\varepsilon, 0)$, 都有 $G(a, \lambda) > 0$ (< 0), 则称 γ 为内侧稳定(内侧不稳定)的极限环. 双侧均稳定(均不稳定)的极限环称为稳定(不稳定)极限环; 双侧稳定性不同时, 称 γ 为半稳定极限环.

从上述定义可知, 稳定(不稳定)极限环必为孤立闭轨. 下面定义中的 γ 为非孤立闭轨.

定义 2.2 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_1, a_2 \in (0, \varepsilon)$ 使得 $G(a_1, \lambda) = 0$, 但 $G(a_2, \lambda) \neq 0$, 则称 γ 为外侧复型极限环. 若存在 $\varepsilon > 0$, 使 $\forall a \in (0, \varepsilon)$, 都有 $G(a, \lambda) = 0$, 则称 γ 为外侧周期环域.

类似可定义内侧复型极限环与内侧周期环域。

定理 2.3 解析向量场不存在复型极限环。

证明 由于在 X_0 的闭轨 $\gamma: \{x = \varphi(t) | 0 \leq t \leq T\}$ 上无奇点, 利用方程 (2.8) 和 γ 的紧致性可知存在 $\delta > 0$, 使得当 $|n| < \delta, |\lambda| < \delta$ 时, $\langle \varphi'(s), v(\varphi(s) + \xi(s)n, \lambda) \rangle$ 恒正. 因此, 方程 (2.7) 的右端函数 $F(n, s, \lambda)$ 解析, 从而 $G(a, \lambda)$ 解析. 由于解析函数的非孤立零点必存在一个邻域, 使函数在其中恒为零. 因此定理得证. \square

定义 2.4 若 $\exists \varepsilon > 0$ 和正整数 $k, 1 \leq k \leq r$, 使当 $|a| < \varepsilon$ 时, 有

$$G(a, 0) = c_k a^k + o(|a|^k), \quad c_k \neq 0, \quad (2.13)$$

则称 γ 为 X_0 的 k 重极限环. 当 $k = 1$ 时称为单重极限环, 当 $k > 1$ 时称为多重极限环.

显然, 当 k 为奇数时, $c_k < 0$ 表明 γ 为稳定的极限环, 而 $c_k > 0$ 表明 γ 为不稳定的极限环; 当 k 为偶数时, γ 为半稳定的极限环. 注意, 这里说的稳定性为轨道稳定性, 而不是结构稳定性. 事实上, 与第一章 §1 的定义相对照可知, 单重环是结构稳定(双曲)的, 而多重环都是结构不稳定(非双曲)的. 为了判别 γ 是否为单重的, 我们记

$$\sigma = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) ds. \quad (2.14)$$

定理 2.5 若 $\sigma \neq 0$, 则 γ 为 X_0 的单重极限环. 当 $\sigma < 0$ 时 γ 为稳定的, 当 $\sigma > 0$ 时 γ 为不稳定的.

证明 由 (2.11), (2.12) 得到

$$G(a, 0) = a \left(\exp \int_0^T [H(s) + F_1(n(s, a, 0), s, 0)] ds - 1 \right).$$

故由 $F_1(n, s, 0) = O(|n|)$ 和 $n(T, 0, 0) = 0$, 可得

$$G_a'(0, 0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{G(a, 0) - G(0, 0)}{a} = \exp \int_0^T H(s) ds - 1. \quad (2.15)$$

另一方面,把(2.9)式的内积按分量展开,并利用(2.3), (2.8)可得

$$\begin{aligned} H(s) &= \langle \zeta(s), \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) \zeta(s) \rangle \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{1}{|\varphi'(s)|^2} \Phi \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{1}{\langle v, v \rangle} \langle v, \frac{\partial v}{\partial x} v \rangle \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) - \frac{d}{ds} \ln |v|, \end{aligned}$$

其中 $v = v(\varphi(s), 0)$,

$$\Phi = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} (\varphi_1')^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \varphi_1' \varphi_2' + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \varphi_1' \varphi_2' + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} (\varphi_2')^2.$$

注意到 γ 以 T 为周期, 因此

$$\int_0^T H(s) ds = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s), 0) ds = \sigma,$$

代入(2.15)得

$$G_a'(0, 0) = e^\sigma - 1.$$

当 $\sigma \neq 0$ 时, 得到 $G(0, 0) = 0, G_a'(0, 0) \neq 0$. 故 γ 是单重极限环. 它的稳定性与 σ 的符号之间的关系是显然的. 定理得证. ■

推论 2.6 当 X_0 的闭轨 γ 为多重极限环、复型极限环或 γ 附近为周期环域时, 必有 $\sigma = 0$.

定理 2.7 设 γ 为 X_0 的 k 重极限环 ($k \geq 1$), 则对于 X_λ

(1) 存在 γ 的 (环形) 邻域 U 和正数 δ , 使只要 $|\lambda| < \delta$, X_λ 在 U 内至多有 k 个极限环.

(2) $\forall i, 1 \leq i \leq k, \forall \delta > 0$, 对任给的 γ 的 (环形) 邻域 $V \subset U$, $\exists X_0$ 的扰动系统 $X_\lambda, |\lambda| < \delta$, 使 X_λ 在 V 内恰有 i 个极限环. 当 k 为偶数时, 上述结论可扩充至 $i = 0$.

(3) 当 k 为奇数时, $\forall V \subset U, \exists \delta > 0$, 使当 $|\lambda| < \delta$ 时, X_λ 在 V 内至少有一个极限环.

证明 当扰动系统 X_λ 对应的 (2.2) 中的 $v \in C^\infty$ 时, 可由 Malgrange 定理 (第一章定理 2.12) 直接推得以上结论. 当 $v \in C^r$ 时, 可利用隐函数定理和中值定理证明. 详细推导从略. \square

例 2.8 考虑 \mathbb{R}^2 上的系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 y + ax^2 + bxy^2,$$

其中参数 $\lambda_2 \neq 0$. 设存在闭轨 γ , 周期为 T , 则

$$\sigma = \int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial v}{\partial (x, y)} \Big|_\gamma dt = \int_0^T (\lambda_2 + 2bxy) \Big|_\gamma dt = \lambda_2 T \neq 0,$$

这里利用系统的第一个方程得到 $2xydt = 2xdx = d(x^2)$. 因此, 这闭轨是双曲的.

附注 2.9 上例表明, 在一些具体问题中, 利用 (2.14) 计算 σ 时, 可以不必知道 $\varphi(s)$ 的表达式, 这就给利用定理 2.5 判别闭轨的双曲性提供了方便. 当 $\sigma = 0$ 时, 需要从 (2.12) 进一步计算 (2.13) 式中第一个不为零的 c_k , 以便按定义 2.4 判断 γ 的重次. 这时一般来说计算量较大.

§ 3 Hopf 分岔

当向量场在奇点的线性部分矩阵有一对复特征根, 并且随参数变化而穿越虚轴时, 在奇点附近的一个二维中心流形上, 奇点的稳定性发生翻转, 从而在奇点附近产生闭轨的现象, 称为 Hopf 分岔, 第一章例 2.9 就是一个典型的实例. 既然 Hopf 分岔发生在二维中心流形上, 为了简单, 下面都讨论二维方程.

经典的 Hopf 分岔定理

考虑 C^∞ 向量场

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = A(\mu)x + F(x, \mu), \quad (3.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}^1, F(0, 0) = 0, D_x F(0, 0) = 0$. 设线性部分矩阵 $A(\mu)$ 有特征值 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, 满足条件

$$(H_1) \alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0 \neq 0;$$

$$(H_2) \alpha'(0) \neq 0;$$

$$(H_3) \operatorname{Re} c_1 \neq 0,$$

其中 c_1 为向量场 X_0 的如下复正规形中的系数 (见第一章例 4.9),

$$\frac{dw}{dt} = i\beta_0 w + c_1 |w|^2 w + \cdots + c_k |w|^{2k} w + O(|w|^{2k+3}). \quad (3.2)$$

定理 3.1 (Hopf 分岔定理) 设条件 (H_1) 和 (H_3) 成立, 则 $\exists \sigma > 0$ 和 $x = 0$ 的邻域 U , 使得当 $|\mu| < \sigma$ 时, 方程 (3.1) 在 U 内至多有一个闭轨 (从而是极限环). 如果条件 (H_2) 也成立, 则 $\exists \sigma > 0$ 和在 $0 < x_1 \leq \sigma$ 上定义的函数 $\mu = \mu(x_1)$, 满足 $\mu(0) = 0$, 而且

(1) 当 $\mu = \mu(x_1)$, $0 < x_1 \leq \sigma$ 时, 系统 (3.1) 过点 $(x_1, 0)$ 的轨道是它的唯一闭轨. 当 $\operatorname{Re} c_1 < 0$ 时, 它是稳定的; 当 $\operatorname{Re} c_1 > 0$ 时, 它是不稳定的;

(2) 当 $\mu \alpha'(0) \operatorname{Re} c_1 < 0$ 时, $\mu'(x_1) > 0$; 当 $\mu \alpha'(0) \operatorname{Re} c_1 > 0$ 时, $\mu'(x_1) < 0$.

在下文中, 我们先证明一个更广泛的定理, 再证明定理 3.1.

附注 3.2 Hopf 分岔定理有多种形式和多种证法. 例如可参考 [FLLL]. 实际应用定理 3.1 时, 重要的是计算 $\operatorname{Re} c_1$. 对某些常见的方程, 导出计算公式将为应用带来方便. 下面给出一个例子.

例 3.3 ([GH]) 如果二维系统 X_0 具有如下形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$

其中 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0, Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0, \beta_0 \neq 0$, 则有如下计算公式:

$$\operatorname{Re} c_1 = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\beta_0} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) \\
 & - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \} |_{x=y=0}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

退化 Hopf 分岔定理

当条件 (H_2) 与 (H_3) 至少有一个不成立时, 仍有可能出现 Hopf 分岔, 这就是所谓退化 Hopf 分岔问题.

考虑二维 m 参数向量场

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, \mu), \quad (3.4)$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^m, f, g \in C^\infty, f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$.

引理 3.4 设在奇点 $(x, y) = (0, 0)$ 系统 (3.4) 的线性部分矩阵有一对复特征根 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, 满足条件 (H_1) , 则对任意自然数 k , 存在 $\delta > 0$ 和光滑依赖于参数 μ 的多项式变换, 当 $|\mu| < \delta$ 时, 可以把 (3.4) 化为

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dt} = & [\alpha(\mu) + i\beta(\mu)]w + c_1(\mu)w^2\bar{w} + \\
 & \cdots + c_k(\mu)w^{k+1}\bar{w}^k + O(|w|^{2k+3}), \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0, c_i(0) = c_i, i = 1, 2, \dots, k$, 这里 c_i 是把 X_0 化为 (3.2) 后的系数.

证明 记 $\lambda(\mu) = (\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu))$, 其中 $\lambda_1(\mu)$ 和 $\lambda_2(\mu)$ 为复特征根 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$; $m = (m_1, m_2)$, 其中 m_1, m_2 为自然数; $M_k \stackrel{d}{=} \{m | 2 \leq m_1 + m_2 \leq 2k + 2\}$; 并且

$$(m, \lambda(\mu)) = m_1 \lambda_1(\mu) + m_2 \lambda_2(\mu).$$

由条件 (H_1) 知, $\lambda_1(0) = (m, \lambda(0))$ 给出 $\leq 2k + 2$ 阶的共振条件, 当且仅当 $m \in M^* \stackrel{d}{=} \{m | m_1 = m_2 + 1, m_2 = 1, \dots, k\} \subset M_k$. 由于 $\lambda_j(\mu)$ 是光滑函数 ($j = 1, 2$), 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|\mu| < \delta$ 时

$$\lambda_1(\mu) \neq (m, \lambda(\mu)), \quad \text{当 } m \in M_k \setminus M^*.$$

因此,用第一章定理 4.6 和例 4.9 同样的推理可得引理的结论. ■

定义 3.5 称 X_0 以 $(x, y) = (0, 0)$ 为 k 阶细焦点 ($k \geq 1$), 如果条件 (H_1) 成立, 并且把 X_0 化成正规形 (3.2) 后, 满足条件

$$\text{Re} c_1 = \dots = \text{Re} c_{k-1} = 0, \text{Re} c_k \neq 0. \quad (3.6)$$

定理 3.6 设向量场 X_0 以 $(0, 0)$ 点为 k 阶细焦点, 则 X_0 在扰动下可发生 k 阶 Hopf 分岔, 即

(1) 对它的任一开折系统 X_μ , 存在 $\sigma > 0$ 和 $(x, y) = (0, 0)$ 点的邻域 U , 使得当 $|\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 U 内至多有 k 个极限环;

(2) 对任意整数 $j, 1 \leq j \leq k$, 任意常数 $\sigma^*, 0 < \sigma^* < \sigma$, 以及 $(x, y) = (0, 0)$ 的任意邻域 $U^* \subset U$, 存在一个开折系统 X_μ^* , 使得 X_μ^* 在 U^* 内恰有 j 个极限环, 其中 $|\mu| < \sigma^*$.

证明 ([RS]) 由引理 3.4, 系统 (3.4) 可经光滑依赖于参数的多项式变换化为 (3.5). 对 (3.5) 及其共轭方程引入极坐标, 注意 $r^2 = w\bar{w}$, $e^{2\varphi i} = w\bar{w}^{-1}$, 可得到

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + \text{Re}(c_1(\mu))r^3 + \dots + \text{Re}(c_k(\mu))r^{2k+1} + O(r^{2k+3}), \\ \dot{\varphi} = \beta(\mu) + O(r^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

由于 $\beta(0) \neq 0$, 所以当 $|\mu| \ll 1$ 时, 可从 (3.7) 得到

$$\frac{dr}{d\varphi} = h_0(\mu)r + h_1(\varphi, \mu)r^2 + \dots + h_k(\varphi, \mu)r^{2k+1} + O(r^{2k+3}), \quad (3.8)$$

其中 $r \ll 1$, 并且

$$h_0(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)},$$

$$h_1(\varphi, \mu) = \frac{\text{Re}(c_1(\mu))}{\beta(\mu)} + \eta_{1,0}\alpha(\mu),$$

.....

$$\begin{aligned} h_k(\varphi, \mu) &= \frac{\text{Re}(c_k(\mu))}{\beta(\mu)} + \eta_{k,k-1}\text{Re}(c_{k-1}(\mu)) + \\ &\quad \dots + \eta_{k,1}\text{Re}(c_1(\mu)) + \eta_{k,0}\alpha(\mu), (k \geq 2), \end{aligned}$$

这里 $\eta_{i,j} = \eta_{i,j}(\varphi, \mu)$ 是 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 和 μ (在 0 附近) 的光滑函数. 当 $\mu = 0$ 时, (3.8) 成为

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\text{Rec}_k}{\beta_0} r^{2k+1} + O(r^{2k+3}). \quad (3.9)$$

在 x_1 轴上建立方程 (3.8) 的 Poincaré 映射 $P(x_1, \mu)$, 并令

$$V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1. \quad (3.10)$$

显然,

$$V(x_1, \mu) = V(r, \mu), \quad \text{当 } x_1 \geq 0. \quad (3.11)$$

$V(x_1, \mu)$ 在 $x_1 > 0$ 的零点个数对应于方程 (3.8) 非零周期解的个数.

令函数

$R(r, \varphi, \mu) = u_1(\varphi, \mu)r + u_2(\varphi, \mu)r^2 + \dots + u_{2k+1}(\varphi, \mu)r^{2k+1} + \dots$ 是 (3.8) 满足 $R(r, 0, \mu) = r$ 的解; 而函数 $\psi(r, \varphi)$ 是方程 (3.9) 满足 $\psi(r, 0) = r$ 的解, 则有

$$P(x_1, 0) = \psi(r, 2\pi) = R(r, 2\pi, 0).$$

由此可知, 当 $x_1 \geq 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) &= \frac{\partial P}{\partial x_1}(0, 0) - 1 = \frac{\partial \psi}{\partial r}(0, 2\pi) - 1, \\ \frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0, 0) &= \frac{\partial^m P}{\partial x_1^m}(0, 0) = \frac{\partial^m \psi}{\partial r^m}(0, 2\pi), \quad m > 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由于 $\psi(r, \varphi)$ 是方程 (3.9) 的解, 我们有

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \psi(r, \varphi) \right|_{r=0} = \begin{cases} 0, & \text{当 } 1 \leq m < 2k+1, \\ [(2k+1)!] \frac{\text{Rec}_k}{\beta_0}, & \text{当 } m = 2k+1. \end{cases}$$

因此

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial r^m} \psi(r, 2\pi) \right|_{r=0} = \begin{cases} 1, & \text{当 } m = 1, \\ 0, & \text{当 } 1 < m < 2k+1, \\ 2\pi[(2k+1)!] \frac{\text{Rec}_k}{\beta_0} \neq 0, & \text{当 } m = 2k+1. \end{cases} \quad (3.13)$$

由(3.12)和(3.13)可得

$$\frac{\partial^m V}{\partial x_1^m}(0,0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 1 \leq m < 2k+1, \\ 2\pi[(2k+1)!] \frac{\text{Rec}_k}{\beta_0}, & \text{当 } m = 2k+1. \end{cases} \quad (3.14)$$

注意方程(3.8)与(3.9)右端的函数当 $r=0$ 时恒为零,并可以光滑地开拓到 $r<0$.因此, $V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1$ 在 $(x_1, \mu) = (0,0)$ 的邻域内是光滑函数.由条件(3.14),利用Malgrange定理(第一章定理2.12),在 $(x_1, \mu) = (0,0)$ 附近存在光滑函数 $h(x_1, \mu)$, $h(0,0) \neq 0$,以及对 x_1 的 $2k+1$ 阶多项式函数 $Q(x_1, \mu)$,使

$$V(x_1, \mu) = Q(x_1, \mu)h(x_1, \mu).$$

另一方面, $V(0, \mu) \equiv 0$,且 $V(x_1, \mu)$ 对 x_1 的正根与负根成对出现(这里要用到,当 (x_1, μ) 在 $(0,0)$ 附近的一个小邻域内时,方程(3.7)中 $\dot{\varphi} > 0$).因此,在 $(x_1, \mu) = (0,0)$ 附近的一个邻域内, $V(x_1, \mu)$ 对 x_1 至多有 k 个正根,定理的结论(1)得证.

为了证明结论(2),我们假设 X_0 以 $x=0$ 为 k 阶细焦点,即它具有如下的正规形

$$\dot{z} = i\beta_0 z + c_k |z|^{2k} z + O(|z|^{2k+3}) \stackrel{d}{=} F(z), \quad \text{Rec}_k \neq 0.$$

取它的扰动系统

$$\dot{z} = F(z) + \mu_{k-j} |z|^{2(k-j)} z + \cdots + \mu_{k-1} |z|^{2(k-1)} z, \quad (3.15)$$

其中 $\mu_m \in \mathbf{R}$, $k-j \leq m \leq k-1$, j 固定($1 \leq j \leq k$).化为极坐标方程

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu_{k-j} r^{2(k-j)+1} + \cdots + \mu_{k-1} r^{2k-1} + \text{Rec}_k r^{2k+1} + O(r^{2k+3}) \\ &\stackrel{d}{=} G(\mu_{k-j}, \cdots, \mu_{k-1}; r). \end{aligned}$$

为了使系统(3.15)存在 j 个闭轨,我们按下述方式依次选取 $\mu_{k-1}, \cdots, \mu_{k-j}$.设 $\text{Rec}_k > 0$ (当 $\text{Rec}_k < 0$ 时,讨论是类似的),则可

选取 $0 < r_k < 1$ 使

$$G(0, \dots, 0; r_k) > 0.$$

选 $\mu_{k-1} < 0, |\mu_{k-1}| \ll \text{Rec}_k$, 及 $r_{k-1} \in (0, r_k)$, 使得

$$G(0, \dots, 0, \mu_{k-1}; r_k) > 0, \quad G(0, \dots, 0, \mu_{k-1}, r_{k-1}) < 0.$$

类似地, 可选 $\mu_{k-2}, r_{k-2}, \dots, \mu_{k-j}, r_{k-j}$, 使得 $\text{Rec}_k, \mu_{k-1}, \dots, \mu_{k-j}$ 具有交替的符号, 并且 $0 < |\mu_{k-j}| \ll \dots \ll |\mu_{k-1}| \ll |\text{Rec}_k|, 0 < r_{k-j} < \dots < r_{k-1} < r_k$, 使得

$$\dot{r} > 0, \quad \text{当 } r = r_k, r_{k-2}, \dots$$

$$\dot{r} < 0, \quad \text{当 } r = r_{k-1}, r_{k-3}, \dots$$

由 Poincaré-Bendixson 环域定理, 扰动系统 (3.15) 至少存在 j 个极限环.

这里 r_k 的选取使产生的极限环都在 U^* 内, 而 μ 的选取满足 $|\mu| < \sigma$. 我们断言, 能得到这样的系统 (3.15), 它在 U^* 内恰有 j 个极限环. 若不然, 则对任意的 $\sigma > 0$ 和 $r = 0$ 的邻域 U , (3.15) 在 U 内有多于 j 个极限环, 则我们可以仿照上面的方法选取 $\mu_{k-j-1}, r_{k-j-1}, \dots, \mu_1, r_1$ 以及 α, r_0 , 从而在 U 内再获得另外的 $k-j$ 个极限环 ($|\mu| < \sigma$), 使扰动系统在 U 内的极限环总数大于 k , 这与结论 (1) 矛盾. 至此, 定理 3.6 证毕. ■

定理 3.1 的证明 当 $k=1$ 时, 可从定理 3.6 得到定理 3.1. 事实上, 从定理 3.1 的条件 (H_1) 和 (H_3) 得知 $x=0$ 是方程 (3.2) 的一阶细焦点, 因此定理 3.1 的前一部分结论成立. 再设条件 (H_2) 也成立, 由 (3.8) — (3.11) 可知, 后继函数

$$V(x_1, \mu) = x_1 \tilde{V}(x_1, \mu), \quad (3.16)$$

其中

$$\tilde{V}(x_1, \mu) = \left[\exp \left(2\pi \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} \right) - 1 \right] + u_2(2\pi, \mu)x_1 + O(x_1^2), \quad (3.17)$$

再由 (3.14) 可知

$$\tilde{V}(x_1, 0) = 2\pi \frac{\operatorname{Re} c_1}{\beta_0} x_1^2 + O(x_1^3). \quad (3.18)$$

由(3.17)和条件(H₂)可知

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{2\pi}{\beta(0)} d'(0) \neq 0. \quad (3.19)$$

利用隐函数定理, 存在 $\sigma > 0$ 和在 $0 \leq x_1 \leq \sigma$ 定义的光滑函数 $\mu = \mu(x_1)$, 满足 $\mu(0) = 0$ 和

$$\tilde{V}(x_1, \mu(x_1)) \equiv 0. \quad (3.20)$$

至此, 定理 3.1 的结论(1)得证. 为了证明结论(2), 从(3.20)求导得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \mu'(x_1) = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \mu \partial x_1} \mu'(x_1) + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \mu^2} (\mu'(x_1))^2 + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \mu''(x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

利用(3.18)及条件(H₃)可得

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x_1^2}(0, 0) = 4\pi \frac{\operatorname{Re} c_1}{\beta_0} \neq 0,$$

把上面的结果及(3.19)代入(3.21)得到

$$\mu'(0) = 0, \quad \mu''(0) = -2 \frac{\operatorname{Re} c_1}{d'(0)}.$$

由此得定理的结论(2). \blacksquare

从以上证明立得以下推论.

推论 3.7 设条件(H₁), (H₂) 和(H₃) 成立, 则存在 $\sigma > 0$ 和 $x = 0$ 的邻域 U , 使得

(1) 当 $|\mu| < \sigma$, $\operatorname{Re} c_1 d'(0) \mu < 0$ 时, 系统(3.1)在 U 内恰有一个极限环, 当 $\operatorname{Re} c_1 < 0$ (> 0) 时, 它是稳定(不稳定)的; 并且当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 它缩向奇点 $x = 0$;

(2) 当 $|\mu| < \sigma$, $\operatorname{Re} c_1 d'(0) \mu \geq 0$ 时, 系统(3.1)在 U 内没有极

限环. ■

附注 3.8 在应用定理 3.6 时, 需要首先判断未扰动系统 X_0 以 O 为细焦点的阶数, 也就是确定满足条件 (3.5) 的 k . 在实际计算时, 经常应用下面介绍的 **Liapunov 系数法**, 细节请见 [ZDHD]. 设 X_0 具有如下的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta_0 y + p(x, y), \\ \dot{y} = \beta_0 x + q(x, y), \end{cases} \quad (3.22)$$

其中 $x, y \in \mathbf{R}$, $p, q = O(|x, y|^2)$, $\beta_0 \neq 0$. 我们利用待定系数法, 寻找 $V_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots$ 和函数

$$F(x, y) = \frac{\beta_0}{2}(x^2 + y^2) + O(|x, y|^3),$$

使得

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(3.22)} = \sum_{j=1}^m V_j (x^2 + y^2)^{j+1}. \quad (3.23)$$

满足上式的 $\{V_j\}$ 称为 (3.16) 的 Liapunov 系数. 在下面定理的意义下, 它与 Hopf 分岔系数 $\{\text{Re}(c_j)\}$ 是等价的.

定理 3.9 $V_1 = \dots = V_{k-1} = 0, V_k > 0$ (或 < 0), 当且仅当 $\text{Re}c_1 = \dots = \text{Re}c_{k-1} = 0, \text{Re}c_k > 0$ (或 < 0). ■

定理的证明见 [BL]. 下文中, 我们把 $\{V_j\}$ 或 $\{\text{Re}(c_j)\}$ 称为系统的**焦点量**.

应用

例 3.10 考虑二维系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \mu_1 y + \mu_2 xy + \mu_3 x^3 y + \mu_4 x^4 y. \end{cases} \quad (3.24)$$

此系统有两个奇点 $(\pm 1, 0)$, 而 $(1, 0)$ 是鞍点. 所以只须考虑奇点 $(-1, 0)$ 附近发生 Hopf 分岔的可能性. 令 $\xi = x + 1$, 系统 (3.24) 变为

$$\dot{\xi} = y,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -2\xi + y(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4) + \xi^2 + (\mu_2 + 3\mu_3 - 4\mu_4)\xi y \\ & + (-3\mu_3 + 6\mu_4)\xi^2 y + (\mu_3 - 4\mu_4)\xi^3 y + \mu_4 \xi^4 y. \end{aligned} \quad (3.25)$$

这个系统在 $(0,0)$ 的线性部分矩阵有一对纯虚特征根的条件为

$$\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 = 0. \quad (3.26)$$

令 $y = -\sqrt{2}\eta$, 则在条件 (3.26) 下, 方程 (3.25) 变成

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\sqrt{2}\eta, \\ \dot{\eta} = \sqrt{2}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2 + (\mu_2 + 3\mu_3 - 4\mu_4)\xi\eta + \\ \quad (-3\mu_3 + 6\mu_4)\xi^2\eta + (\mu_3 - 4\mu_4)\xi^3\eta + \mu_4\xi^4\eta. \end{cases}$$

应用 Liapunov 系数法, 可以得到

$$V_1 = \frac{1}{16}(\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4),$$

$$V_2 = \frac{1}{96\sqrt{2}}(5\mu_3 - 14\mu_4), \quad \text{当 } V_1 = 0,$$

$$V_3 = \frac{14}{5}\mu_4, \quad \text{当 } V_1 = V_2 = 0.$$

由此应用定理 3.6, 可得下列结论:

(1) 若 $\mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_2 \neq 0$, 则当 $\mu_1 = \mu_2$ 时发生一阶 Hopf 分岔, 并且系统 (3.24) 在原点附近存在唯一极限环的参数区域是

$$\mu_2(\mu_1 - \mu_2) < 0, \quad 0 < |\mu_1 - \mu_2| \ll |\mu_2| \ll 1.$$

(2) 若 $\mu_4 = 0, \mu_3 \neq 0$, 则当 $\mu_1 = 4\mu_3, \mu_2 = 3\mu_3$ 时发生二阶 Hopf 分岔, (3.24) 在原点附近存在二个极限环的参数区域是

$$\mu_3(\mu_2 - 3\mu_3) < 0, \quad \mu_3(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) > 0,$$

$$0 < |\mu_1 - \mu_2 - \mu_3| \ll |\mu_2 - 3\mu_3| \ll |\mu_3| \ll 1.$$

(3) 若 $\mu_4 \neq 0$, 则三阶 Hopf 分岔发生的条件是

$$\mu_1 = \frac{11}{5}\mu_4, \quad \mu_2 = \frac{2}{5}\mu_4, \quad \mu_3 = \frac{14}{5}\mu_4.$$

而系统 (3.24) 在原点附近存在三个极限环的参数区域是

$$\mu_4(5\mu_3 - 14\mu_4) < 0, \mu_4(\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4) > 0,$$

$$\mu_4(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4) < 0,$$

$$0 < |\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4| \ll |\mu_2 - 3\mu_3 + 8\mu_4|$$

$$\ll |5\mu_3 - 14\mu_4| \ll |\mu_4| \ll 1.$$

Bautin 对右端是二次多项式的平面微分系统(简称二次系统)的一种标准形式导出了著名的焦点量公式(见[Ba]),并证明了二次系统细焦点的阶数至多为 3(他的第三个焦点量公式在符号及数值上都有误,在[QL],及[FLLL]中得到纠正).下面介绍的结果是把他的公式推广到一般形式的二次系统上,应用较方便.

例 3.11 ([Lc]) 设

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{cases} \quad (3.27)$$

记

$$A = a_{20} + a_{02}, B = b_{20} + b_{02}, \alpha = a_{11} + 2b_{02}, \beta = b_{11} + 2a_{20},$$

$$\gamma = b_{20}A^3 - (a_{20} - b_{11})A^2B + (b_{02} - a_{11})AB^2 - a_{02}B^3,$$

$$\delta = a_{02}^2 + b_{20}^2 + a_{02}A + b_{20}B,$$

则(不计正数因子)

$$V_1 = A\alpha - B\beta,$$

$$V_2 = [\beta(5A - \beta) + \alpha(5B - \alpha)]\gamma, \text{ 如果 } V_1 = 0,$$

$$V_3 = (A\alpha + B\beta)r\delta, \text{ 如果 } V_1 = V_2 = 0,$$

$$V_k = 0, \text{ 当 } k > 3, \text{ 如果 } V_1 = V_2 = V_3 = 0.$$

(3.28)

在最后一种情形下,系统可积, (0,0) 为中心点.

附注 3.12 从原则上说,当 X_0 以 O 为细焦点时,总可以通过有限步运算确定细焦点的阶数 k . 但是当 k 较大时,对一般系统想用(3.28)的方式来表达焦点量公式,计算量非常大. 例如,当把方程(3.27)右端关于 x, y 的齐二次项替换成齐三次项时,细焦点的最高阶数为 5(见[Si]);但如果在(3.27)右端补充上三次项,则它

的焦点量公式十分复杂,即使利用计算机,目前也仅推导出前几个焦点量公式. 确定细焦点阶数和求焦点量公式,与区分中心与焦点这个困难问题紧密相关. 在这里我们仅列举我国学者在这方面的一些新近工作:蔡燧林、马晖^[CM]给出了判别广义 Liénard 方程中心和焦点的较一般方法;杜乃林、曾宪武^[DZ]给出了计算焦点量的递推公式;黄启昌等^[HWW]研究了泛函微分方程的 Hopf 分岔问题;沈家齐、井竹君^[SJ]给出了判别存在 Hopf 分岔的一种新方法;黄文灶^[HW]证明,当非线性方程零点的拓扑度变号时,会产生连通的分岔曲线,等等.

附注 3.13 若将条件 (H_3) 换成

$$(H_3)' \quad F(x, \mu) \in C^\omega(U \times (-\sigma, \sigma), \mathbb{R}^2),$$

其中 U 是 \mathbb{R}^2 中原点的一个开集,则当条件 (H_1) , (H_2) 和 $(H_3)'$ 成立时,或者系统(3.1)当 $\mu=0$ 时以原点为中心,或者当 $\mu \in (-\sigma, 0)$ 或 $(0, \sigma)$ 时(3.1)在 U 内的奇点外围有唯一闭轨,并且当 $\mu \rightarrow 0$ 时,此闭轨缩向奇点. 这是 Hopf 分岔定理的另一种形式,证明可参考[Z]. 注意,此处 $F(x, \mu) \in C^\omega$ 的条件不能减弱为 $F(x, \mu) \in C^\infty$,请看下例.

例 3.14

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \sin \mu + y \cos \mu + (-x \cos \mu + y \sin \mu) \tan A, \\ \frac{dy}{dt} = -x \cos \mu + y \sin \mu + (-x \sin \mu - y \cos \mu) \tan A, \end{cases} \quad (3.29)_\mu$$

其中 $A = e^{-\frac{1}{r}}(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$. 容易验证,对此系统而言,条件 (H_1) , (H_2) 满足,且右端函数是 C^∞ 的,但不解析. 所以 $(H_3)'$ 不满足. 由于

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{(3.29)_\mu} = -r \cos \mu [\tan(e^{-\frac{1}{r}}(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}})) - \tan \mu], \quad (3.30)$$

其中 $0 < r < 1$. 故原点是 (3.29)₀ 的渐近稳定焦点.

考虑 (r, μ) 平面上由下式定义的曲线

$$\gamma: \mu = e^{-\frac{1}{r}}(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}}). \quad (3.31)$$

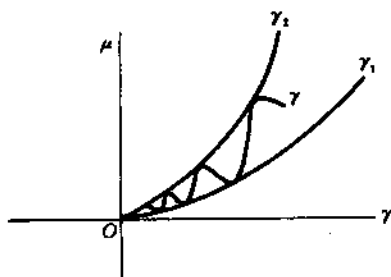


图 2-2

它显然界于曲线 $\gamma_1: \mu = e^{-\frac{1}{r}}$ 与曲线 $\gamma_2: \mu = 3e^{-\frac{1}{r}}$ 之间 (见图 2-2). 由于

$$\frac{d\mu}{dr} = r^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{r}} \left(r^{\frac{1}{2}}(2 + \sin r^{-\frac{3}{2}}) - \frac{3}{2}\cos r^{-\frac{3}{2}} \right)$$

在 $r=0$ 的任意小邻域内都改变其符号, 所以对任意小的 $\mu > 0$, 存在 $r_1(\mu) \neq r_2(\mu)$, $r_i(\mu) \rightarrow 0$ 当 $\mu \rightarrow 0$, 使得 $r = r_i(\mu)$ 均满足方程 (3.31) ($i=1, 2$). 从而由 (3.30) 和 (3.31) 得到 $\frac{dr_i(\mu)}{d\mu} \equiv 0$. 这说明对任意小的 μ , 系统 (3.29) _{μ} 在原点附近都至少有两条闭轨. 因此, 上述结论的条件 $F(x, \mu) \in C^\infty$ 不能减弱为 $F(x, \mu) \in C^0$.

请读者验算, 此例中对一切正整数 k , 都有 $\text{Rec}_k = 0$. 因此, 对 C^∞ 系统而言, 当对一切正整数 k , $\text{Rec}_k = 0$ 时, 奇点不见得是中心.

对参数一致的 Hopf 分岔定理

考虑 C^∞ 平面系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \delta f(x, y, \mu, \delta), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \delta g(x, y, \mu, \delta), \end{cases} \quad (3.32)$$

其中函数 $H = H(x, y)$, 参数 $\delta, \mu \in \mathbb{R}^1$, 且 δ 为小参数. 设系统有奇点 $x = 0$, 而且在该点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu, \delta) \pm i\beta(\mu, \delta)$. 若存在 $\sigma > 0$ 及在 $0 < \delta < \sigma$ 定义的函数 $\mu = \mu(\delta)$, 满足条件

$$(H_1^*) \quad \alpha(\mu(\delta), \delta) = 0, \quad \beta(\mu(\delta), \delta) \neq 0,$$

则在一定的附加条件下, 当 $\mu = \mu(\delta)$, $\delta \in (0, \sigma)$ 时, 系统 (3.32) 可在 $x = 0$ 点发生 Hopf 分岔. 对每一固定的 $\delta \in (0, \sigma)$, 利用推论 3.7 可知, 存在 $\varepsilon(\delta) > 0$, 使得当 $|\mu - \mu(\delta)| < \varepsilon(\delta)$ 且 $\mu > \mu(\delta)$ (或 $\mu < \mu(\delta)$) 时, 系统有极限环. 问题是: 当 $\delta \rightarrow 0$ 时可能有 $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$. 我们希望找到系统满足的条件, 以保证存在正数 δ_0 和 ε_0 , 使得对所有的 $\delta \in (0, \delta_0)$, 都有 $\varepsilon(\delta) \geq \varepsilon_0$. 这就是所谓对参数一致的 Hopf 分岔问题, 见图 2-3.

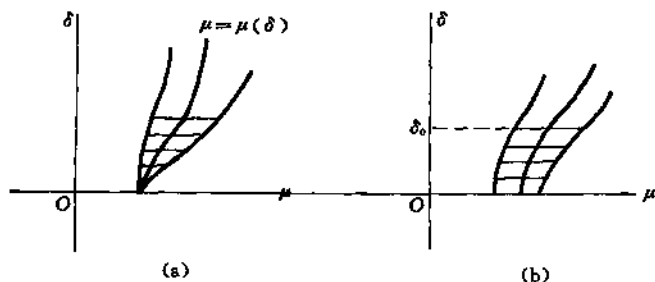


图 2-3

代替定理 3.1 中的条件 (H_2) 和 (H_3) , 下文需要的条件是

$$(H_2^*) \quad \alpha^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \alpha(\mu(\delta), \delta)}{\partial \mu} \neq 0,$$

$$(H_3^*) \quad c_1^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \operatorname{Re}[c_1(\mu(\delta), \delta)] \neq 0.$$

定理 3.15 设系统(3.32)有奇点 (x_0, y_0) , 系统在此奇点的线性部分矩阵有特征根 $\alpha(\mu, \delta) \pm i\beta(\mu, \delta)$. 又设存在 $\delta_1 > 0$ 和在 $0 < \delta < \delta_1$ 定义的函数 $\mu = \mu(\delta)$, 使条件 (H_1^*) , (H_2^*) 和 (H_3^*) 成立. 则存在 $\delta_2 > 0$ ($\delta_2 \leq \delta_1$), $\sigma > 0$ 和在 $x_0 < x \leq x_0 + \sigma, 0 < \delta < \delta_2$ 上定义的唯一函数 $\mu = h(x, \delta)$, 满足 $h(x_0, 0) = 0$, 而且

(1) 当 $\mu = h(x, \delta)$, $x_0 < x \leq x_0 + \sigma, 0 < \delta < \delta_2$ 时, (3.32)过 xy 平面上的点 $(x, 0)$ 的轨道是它的唯一闭轨 Γ_δ . 当 $c_1^* < 0$ 时, Γ_δ 是稳定的极限环; 当 $c_1^* > 0$ 时, Γ_δ 是不稳定的极限环;

(2) 当 $\alpha^* c_1^* < 0$ 时, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \delta) > 0$; 当 $\alpha^* c_1^* > 0$ 时, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \delta) < 0$.

证明 不妨取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$. 与定理3.1的证明类似, 所不同的是以 $\mu - \mu(\delta)$ 代替那里的 μ , 而以 δ 为参数, 则那里的后继函数 $V(x, \mu)$ 变为 $V(x, \mu - \mu(\delta), \delta)$ 的形式. 注意到 $\delta = 0$ 时, (3.32)为Hamilton系统, 因此 $V(x, \mu - \mu(0), 0) \equiv 0$. 代替(3.16), 我们有

$$V(x, \mu - \mu(\delta), \delta) = \delta x V^*(x, \mu - \mu(\delta), \delta).$$

从条件 (H_2^*) , (H_3^*) 可得

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2}(0, 0, 0) \neq 0.$$

对 $V^*(x, \mu - \mu(\delta), \delta)$ 在 $(x, \mu - \mu(\delta), \delta) = (0, 0, 0)$ 点用隐函数定理即可. 其它推理与定理3.1的证明相同. \square

推论 3.16 在定理3.15的条件下, 存在 $\delta_2 > 0$ ($\delta_2 \leq \delta_1$), $\sigma > 0$ 和 (x_0, y_0) 的邻域 U , 使得

(1) 当 $0 < \delta < \delta_2$, $|\mu - \mu(\delta)| < \sigma$, 且 $\alpha^* c_1^*(\mu - \mu(\delta)) < 0$ 时, 系统(3.32)在 U 内恰有一个闭轨. 当 $c_1^* < 0$ (> 0)时, 它是稳定(不稳定)的极限环.

(2) 当 $0 < \delta < \delta_2$, $|\mu - \mu(\delta)| < \sigma$, 且 $\alpha^* c_1^*(\mu - \mu(\delta)) > 0$ 时, 系统(3.32)在 U 内无闭轨. \square

在第三章 §1 中,我们将看到这种对参数一致的 Hopf 分岔定理的作用.

§4 平面上的同宿分岔

由二维流形上的结构稳定性定理(见第一章定理 1.13)知道,当存在鞍点的同宿轨(或异宿轨)时,系统是结构不稳定的.事实上,这种连接鞍点的轨线在扰动下可能破裂,从而改变系统的拓扑结构.第一章例 2.10 就是一个典型的实例.在本节里,我们要进一步讨论,当这种分岔发生时产生闭轨的规律.

我们先从几何上考虑,以获得一些启示.设平面上的单参数向量场族 X_μ 对应于如下的方程

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \mu), \quad (4.1)$$

其中 $v \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$. 设 X_0 的轨线结构如第一章图 1-9(b) 所示;它有一条初等鞍点的同宿轨 Γ , Γ 内部是稳定焦点的吸引域.当 $\mu \neq 0$ 时, Γ 可能破裂为两条分界线(鞍点的稳定流形与不稳定流形),见图 1-9 的(a)与(c).

显然,在图 1-9(c) 的情形,分界线破裂的方向与破裂前 Γ 的稳定性相配合,就构成了一个 Poincaré-Bendixson 环境,从而系统 X_μ 存在闭轨.当 $|\mu|$ 充分小时,可以使这个环境充分靠近原来的同宿轨线.因此,我们可以认为闭轨是从 Γ 经扰动破裂而产生的(或反过来说,当 $\mu \rightarrow 0$ 时,闭轨趋向于 Γ 而成为同宿轨).这种分岔现象称为同宿轨的分岔,或简称为同宿分岔.

考虑向量场族

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad (4.2)$$

其中 $f \in C^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$, $f(0, 0) = 0$, X_0 以 $x = 0$ 为双曲鞍点(即 $\det \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) < 0$),并且具有同宿轨 Γ_0 , 如图 2-4(a) 所示(对情

形(b)可类似讨论).

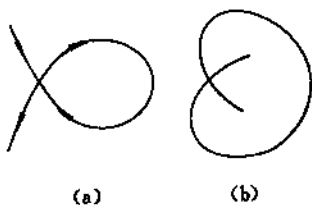


图 2-4

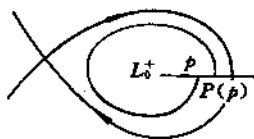


图 2-5

从前面的讨论中可以看出,在研究同宿分岔时,下面两个问题是重要的:

(1) 如何判断 X_0 的同宿轨 Γ_0 在其内侧的稳定性和稳定性? (在第一章例 2.10 中,这是利用 Γ_0 内的焦点的稳定性得出来的. 我们希望能从向量场在鞍点和 Γ_0 的特性来获得这个信息.)

(2) 如何判断 X_μ 的稳定流形与不稳定流形的相互位置?

为了解决问题(1),我们先对 X_0 在 Γ_0 内侧引入 Poincaré 映射 (见第一章定义 1.6). 取 $p_0 \in \Gamma_0$, L_0 为过 p_0 点与 Γ_0 正交的无切线 (向内为正). 则在 p_0 附近存在一个邻域 U , 使得 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 从 p 出发的轨线 $\varphi(t, p)$ 经过 $t = T(p)$ 将再次与 L_0 交于一点 $P(p) = \varphi(T(p), p)$ (见图 2-5). 令 n_0 为沿着 L_0^+ 的单位向量, 则 $\forall p \in U \cap L_0^+$, 它有如下的坐标表示

$$p = p_0 + \alpha n_0, \quad (4.3)$$

其中 $\alpha > 0$. 相应地, $P(p)$ 有坐标表示

$$P(p) = \varphi(T(p), p) = p_0 + \beta(\alpha) n_0, \quad (4.4)$$

其中 $\beta(\alpha) \in C^1$, 只要 $0 < \alpha \ll 1$ (因为 X_0 是 C^2 的). 定义函数

$$d(\alpha) = \beta(\alpha) - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

定义 4.1 X_0 的同宿轨 Γ_0 称为是渐近稳定(或不稳定)的, 如

果存在 $\eta > 0$, 使得 $d(\alpha) < 0$ (或 > 0) 对所有的 $0 < \alpha < \eta$ 成立.

附注 4.2 注意 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d(\alpha) = 0$, 因此 Γ_0 的稳定性由极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} d'(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta'(\alpha) - 1$$

所决定: 当 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d'(\alpha) < 0$ (或 > 0), 也就是 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta'(\alpha) < 1$ (或 > 1)

时, Γ_0 是渐近稳定 (或不稳定) 的.

引入记号

$$\sigma_0 = \text{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

定理 4.3 设 X_0 具有双曲鞍点 O 及同宿轨 Γ_0 , 如果 $\sigma_0 \neq 0$, 则当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_0 是渐近稳定的, 而当 $\sigma_0 > 0$ 时 Γ_0 是不稳定的.

证明 ([CH]) 如上所述, 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 可建立 X_0 在 p_0 邻域的 Poincaré 映射

$$P: U \cap L_0^+ \rightarrow L_0, P(p) = \varphi(T(p), p),$$

并且 $p, P(p)$ 分别有表示式 (4.3) 和 (4.4). 把 (4.4) 式对 α 求导, 得到

$$\begin{aligned} \beta'(\alpha)n_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(T(p), p) \right] \frac{\partial T(p)}{\partial p} n_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 \\ &= f_\beta \frac{\partial T(p)}{\partial p} n_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $f_\alpha = f(\alpha n_0 + p_0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 而 $f_\beta = f_{\beta(\alpha)}$. 注意 n_0 是沿 f_0^\perp 的方向, 当 α 足够小时, 内积 $\langle f_\beta^\perp, n_0 \rangle \neq 0$, 在 (4.5) 式两端以 f_β^\perp 作内积, 得到

$$\beta'(\alpha) = \frac{\langle f_\beta^\perp, \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 \rangle}{\langle f_\beta^\perp, n_0 \rangle}.$$

如果记

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{t=T(p)} n_0 = \xi f_\beta + \eta n_0, \quad (4.6)$$

其中 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, 则

$$\beta'(\alpha) = \eta. \quad (4.7)$$

下面,我们设法把 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta$ 与 σ_0 建立联系. 首先,由 f 的连续性,可以把 f_β 表示为

$$f_\beta = (1 + \varepsilon_1)f_\alpha + \varepsilon_2 n_0, \quad (4.8)$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ 当 $\alpha \rightarrow 0$. 另一方面,由于

$$\varphi(T(p), p): U \cap L_0^+ \rightarrow L_0, p_0 + \alpha n_0 \mapsto p_0 + \beta(\alpha)n_0,$$

它的导映射 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)}$ 把 $p_0 + \alpha n_0$ 处的切向量 f_α 映到 $p_0 + \beta(\alpha)n_0$ 处的切向量 f_β , 即

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)} f_\alpha = f_\beta. \quad (4.9)$$

由(4.8), (4.9) 和(4.6) 得出

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)} f_\beta = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xi) f_\beta + \varepsilon_2 \eta n_0. \quad (4.10)$$

(4.10) 和(4.6) 给出 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)}$ 在基向量 (f_β, n_0) 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xi & \xi \\ \varepsilon_2 \eta & \eta \end{bmatrix},$$

从而

$$\det \left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=T(p)} = (1 + \varepsilon_1) \eta. \quad (4.11)$$

其次,我们来计算上式左端的行列式(它与坐标系的选取无关). 注意 $\frac{\partial}{\partial p} \varphi(t, p)$ 是变分方程

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, p), 0)u$$

的基本解矩阵, 并且 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{t=0}$ 是单位矩阵, 由 Liouville 公式可知

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial p} \varphi(t, p) \right) = \exp \int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(t, p), 0) dt. \quad (4.12)$$

由(4.7), (4.11) 和(4.12) 最后得出

$$\beta'(a) = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \exp \int_0^{T(p)} \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(t, p), 0) dt. \quad (4.13)$$

条件 $\sigma_0 = \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) < 0$ (或 > 0), 保证存在 $O(0, 0)$ 的邻

域 V , 使得当 $x \in V$ 时, 有 $\operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) < \frac{\sigma_0}{2} < 0$ (或 $> \frac{\sigma_0}{2} > 0$).

当 $0 < a < \delta$, δ 足够小时, $T(p) = T_1 + T_2$, T_1 是流 $\varphi(t, p)$ 停留在 V 中的时间. 当 $a \rightarrow 0$ 时 $T_1 \rightarrow +\infty$, 而 $T_2 = T(p) - T_1$ 是有界的. 因此, 由 (4.13) 式容易推得

$$\lim_{a \rightarrow 0} \beta'(a) = 0 \text{ (或 } +\infty \text{)}, \text{ 当 } \sigma_0 < 0 \text{ (或 } > 0 \text{)},$$

由附注 4.2 立得定理的结论. \square

定理 4.4 设向量场 X_μ 由 (4.2) 给定. 假设 X_0 以 O 为双曲鞍点, 有同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 = \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \neq 0$. 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\mu| < \delta$ 时, 如果 X_μ 在 Γ_0 的 η 邻域内有闭轨 Γ_μ , 那么 Γ_μ 是唯一的闭轨; 并且当 $\sigma_0 < 0$ (> 0) 时, Γ_μ 是渐近稳定 (不稳定) 的.

证明 我们只须考虑这样的闭轨 Γ_μ , 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 它趋于 Γ_0 . 取 $p_0 \in \Gamma_0$, 并取 L_0 和 n_0 同前, 则当 $|\mu|$ 足够小时, Γ_μ 必与 L_0 横截相交, 记 $p_\mu = \Gamma_\mu \cap L_0$. 对于 p_0 点附近的 $p \in L_0$, 引入坐标表示 $p = p_0 + an_0$, $|a| < \delta$. 则有 $p_\mu = p_0 + \alpha_\mu n_0$, $|\alpha_\mu| < \delta$, 当 $|\mu|$ 足够小时. 对于任意固定的 μ , 可在 L_0 上 p_μ 点附近建立 X_μ 的 Poincaré 映射 P_μ :

$$p = an_0 + p_0 \mapsto P_\mu(p) = \beta_\mu(a)n_0 + p_0, \quad |a - \alpha_\mu| \ll 1,$$

并且 $\beta_\mu(\alpha_\mu) = \alpha_\mu$, 则 Γ_μ 的稳定性由 $[\beta'_\mu(\alpha_\mu) - 1]$ 的符号决定. 重复定理 4.3 的证明方法, 并注意当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_0$, $\alpha_\mu \rightarrow 0$, 因此

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \beta'_\mu(\alpha_\mu) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma_0 < 0, \\ +\infty, & \text{当 } \sigma_0 > 0. \end{cases}$$

这说明当 $\sigma_0 < 0$ 时, Γ_μ 渐近稳定; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, Γ_μ 不稳定.

另一方面,两个具有相同稳定性的闭轨不可能并列共存,因此 Γ_μ 是 X_μ 的唯一闭轨. \blacksquare

现在,剩下要解决的就是我们在前面所提的问题(2),即 X_0 的同宿轨 Γ_0 经扰动破裂后,如何判断 X_μ 的稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u 的相对位置? Mel'nikov 函数就是用以描述 W_μ^s 和 W_μ^u 之间“有向缝隙”的判定量,从而解决这个问题.

先把方程(4.2)改写为

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x) + \mu g(x, \mu), \quad (4.14)$$

其中 $f \in C^r(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$, $g \in C^r(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$, $r \geq 2$. 设 X_0 以 x_0 为双曲鞍点,有同宿轨 Γ_0 . 设 Γ_0 有表达式

$$\Gamma_0: \quad x = \varphi(t), \quad \varphi(t) \rightarrow x_0, \text{ 当 } t \rightarrow \pm \infty.$$

对于平面上的向量 $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, 定义

$$a^\perp = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad a \wedge b = \langle a, b^\perp \rangle.$$

容易验证,对于任意二阶方阵 A , 有

$$(Aa) \wedge b + a \wedge (Ab) = \operatorname{tr} A (a \wedge b). \quad (4.15)$$

过 Γ_0 上的 $\varphi(0)$ 点取截线 L , 使它沿法向 $n(0) = (\varphi'(0))^\perp = f^\perp(\varphi(0))$. 当 $|\mu| \ll 1$ 时, X_μ 有双曲鞍点 x_μ 及其稳定流形 W_μ^s 与不稳定流形 W_μ^u . 这里 $x_\mu \rightarrow x_0$, 当 $\mu \rightarrow 0$. 利用 [Sh] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数的定理, 当 $|\mu| \ll 1$, $t \geq 0$ (或 $t \leq 0$) 时, X_μ 有唯一有界解 $W_\mu^s(t)$ (或 $W_\mu^u(t)$), 它与 $\varphi(t)$ 充分靠近, 且当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$) 时, $W_\mu^s(t)$ (或 $W_\mu^u(t)$) $\rightarrow x_\mu$. 为了描述 W_μ^s 与 W_μ^u 的相互位置, 我们引进下面的定义, 它可以看成是 W_μ^s 与 W_μ^u 间“缝隙”沿 $n(0)$ 的投影 (相差一个非零常数倍).

$$d(\mu) = \langle W_\mu^u(0) - W_\mu^s(0), f^\perp(\varphi(0)) \rangle. \quad (4.16)$$

令

$$D(t) = g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t)) = \begin{vmatrix} f_1(\varphi(t)) & g_1(\varphi(t), 0) \\ f_2(\varphi(t)) & g_2(\varphi(t), 0) \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) dt. \quad (4.18)$$

定理 4.5 设 $f, g \in C^r, r \geq 2, X_0$ 有同宿于双曲鞍点 x_0 的轨线 Γ_0 , 则对扰动系统 X_μ , 有

$$d(\mu) = \mu \Delta + O(|\mu|^2), \quad (4.19)$$

其中

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt, \quad (4.20)$$

而 $D(t), \sigma(t)$ 由 (4.17) 和 (4.18) 定义.

证明 记

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} W_\mu^s(t) \right|_{\mu=0} &= z^s(t), \quad t \geq 0, \\ \left. \frac{\partial}{\partial \mu} W_\mu^u(t) \right|_{\mu=0} &= z^u(t), \quad t \leq 0, \\ \Delta^s(t) &= z^s(t) \wedge f(\varphi(t)), \quad t \geq 0, \\ \Delta^u(t) &= z^u(t) \wedge f(\varphi(t)), \quad t \leq 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

注意 $W_\mu^s(t)$ 是 (4.14) 的解 ($t \geq 0$), 把它代入 (4.14), 对 μ 求导后取 $\mu = 0$, 得到

$$\frac{dz^s(t)}{dt} = \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} z^s(t) + g(\varphi(t), 0), \quad t \geq 0. \quad (4.22)$$

因此, 把 (4.21) 对 t 求导, 再利用 (4.22) 和 (4.15) 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta^s(t) &= \frac{dz^s(t)}{dt} \wedge f(\varphi(t)) + z^s(t) \wedge \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \\ &= \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} z^s(t) \wedge f(\varphi(t)) + g(\varphi(t), 0) \wedge \\ &\quad f(\varphi(t)) + z^s(t) \wedge \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} f(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$$= \left(\operatorname{tr} \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x} \right) \Delta^s(t) + g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t)),$$

利用常数变易公式可得

$$\Delta^s(t) = e^{\sigma(t)} \left(\Delta^s(0) + \int_0^t e^{-\sigma(t)} (g(\varphi(t), 0) \wedge f(\varphi(t))) dt \right). \quad (4.23)$$

另一方面, 因为 $t \rightarrow \infty$ 时 $\varphi(t) \rightarrow x_0$, 所以 $f(\varphi(t)) \rightarrow f(x_0) = 0$, 且趋于零的衰减率为 $e^{\lambda_1 t}$, 这里 λ_1, λ_2 为 X_0 在双曲鞍点 x_0 的线性部分矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ 的特征根, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. 再次利用 [Sh] 关于鞍点分界线光滑依赖于参数的定理可知, 当 $t \geq 0$ 时 $\Delta^s(t)$ 有界. 从而由 (4.21) 知, $t \rightarrow \infty$ 时 $\Delta^s(t) \sim e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$. 记 $\sigma_0 = \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, 则易知 $\lambda_1 < \sigma_0 < \lambda_2$, 故当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e^{-\sigma(t)} \sim e^{-\sigma_0 t}$, 因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma(t)} \Delta^s(t) = 0,$$

从而由 (4.23) 式及上式得到

$$\Delta^s(0) = - \int_0^{+\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt.$$

同理可得

$$\Delta^u(0) = - \int_0^{-\infty} D(t) e^{-\sigma(t)} dt.$$

从 (4.16), (4.20) 和 (4.21) 易知: $d(0) = 0$, $d'(0) = \Delta^u(0) - \Delta^s(0) = \Delta$. 定理得证. \blacksquare

由定理 4.3, 定理 4.4 和定理 4.5 立即得到

定理 4.6 设 X_μ 由 (4.14) 给定, X_0 以 x_0 为双曲鞍点, 且有顺 (或逆) 时针定向的同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得当 $|\mu| < \delta$ 时

(1) 若 $\sigma_0 \mu \Delta > 0$ (或 < 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 η -邻域内恰有一个从 Γ_0 分岔出的极限环. 当 $\sigma_0 < 0$ 时, 它是稳定的; 当 $\sigma_0 > 0$ 时, 它是不稳的.

(2) 若 $\sigma_0 \mu \Delta < 0$ (或 > 0), 则 X_μ 在 Γ_0 的 η -邻域内不存在极限环. |

注意在 Δ 的表达式中含有 $\varphi(t)$, 这使应用定理 4.6 受到限制. 但在某些情形下无须求 $\varphi(t)$ 便知 $D(t)$ 是定号的, 从而 Δ 与 $D(t)$ 有相同符号, 参见下面的例子.

例 4.7 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

以原点为双曲鞍点, 有顺时针定向的同宿轨 Γ_0 , 并且 $\sigma_0 = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, 则对充分小的 $|\mu|$, 当 $\mu\sigma_0 > 0$ 时, 扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) - \mu Q(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \mu P(x, y) \end{cases} \quad (4.24)$$

在 Γ_0 的小邻域内恰有一个极限环 (其稳定性由 σ_0 的符号决定); 而当 $\mu\sigma_0 < 0$ 时, (4.24) 在 Γ_0 附近没有极限环.

事实上,

$$D(t) = \det \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = (P^2 + Q^2)|_{x=\varphi(t)} \geq 0,$$

并且等号仅在个别点上成立, 因此 $\Delta > 0$. 利用定理 4.6, 上面的结论立即可得.

附注 4.8 在上面的定理 4.4 和定理 4.6 中都有条件 $\sigma_0 \neq 0$. $\sigma_0 = 0$ 称为临界情形, 此时称鞍点为细鞍点, 这就出现了退化同宿分岔. Roussarie^[R2] 和 Joyal^[Jo] 分别讨论了从 (退化的) 同宿轨分岔出多个闭轨的问题. 他们的基本思想是在奇点附近利用鞍点性质, 与大范围的微分同胚相结合, 得出 Poincaré 映射的表达式, 从而在退化程度较高时, 可以经过逐次适当的扰动, 反复改变同宿轨内侧的稳定性, 产生多个闭轨, 并在最后一次扰动时, 使同宿轨破裂而产生最后一个闭轨. 此时, 系统 (4.14) 右端的扰动项 g 中除了 μ 外还含有其它参数. 由于介绍退化情形的同宿分岔需要较大篇

幅,此处从略. 但对于 Hamilton 向量场的扰动系统,我们将在 § 6 定理 6.4 中介绍一个常用的结果.

罗定军、韩茂安和朱德明在 [LHZ] 和 [HLZ] 中,对孤立和非孤立同宿轨在扰动下产生极限环的唯一性作了详细的讨论; 冯贝叶^[F] 得出了在临界情形下判别同宿轨或异宿轨的稳定性的方法; Mourtada^[Mo] 对含两个鞍点的异宿环的分岔问题进行了深入的研究.

对参数一致的同宿分岔

类似于对参数一致的 Hopf 分岔问题,现在考虑含双参数 δ, μ 的平面 Hamilton 扰动系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \delta f(x, y, \mu, \delta), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \delta g(x, y, \mu, \delta), \end{cases} \quad (4.25)$$

其中 δ 为小参数; $H = H(x, y)$ 为 Hamilton 函数; 而且 H, f, g 有足够的光滑性. 设当 $0 \leq \delta \leq \delta_1$ 时,系统有双曲鞍点 (x_δ, y_δ) , 而且存在函数 $\mu = \mu(\delta)$, 使当 $\mu = \mu(\delta)$ 时,系统 (4.25) 有鞍点 (x_δ, y_δ) 的同宿轨 Γ_δ . 则在适当的条件下,对每一个固定的 $\delta > 0$, 存在 $\epsilon(\delta) > 0$, 使当 $|\mu - \mu(\delta)| < \epsilon(\delta)$ 时,在 Γ_δ 的邻域内有定理 4.6 的两条结论. 我们关心的是: 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,如何保证 $\epsilon(\delta)$ 不趋于零,参见图 2-3.

我们不在此给出一般的定理,只在第三章引理 1.6 中对一类特殊的系统介绍这种对参数一致的同宿分岔的结果.

§ 5 Poincaré 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题

本节考虑平面向量场族

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x) + \mu g(x, \mu), \quad (5.1)$$

其中 $f \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g \in C^r(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $r \geq 2$. 设 X_0 具有周期环域, 即存在一系列闭轨

$$\Gamma_h: \{x \mid H(x) = h, h_1 < h < h_2\},$$

其中函数 $H \in C^{r+1}$. 我们关心的是: X_0 的哪些闭轨 Γ_{h_0} ($h_1 < h_0 < h_2$) 经扰动 ($|\mu| \ll 1$) 能成为 X_μ 的极限环 L_μ (即当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $L_\mu \rightarrow \Gamma_{h_0}$)? 并且究竟能从 Γ_{h_0} 扰动出 X_μ 的几个极限环? 这就是 Poincaré 分岔问题.

Poincaré 分岔

本节的一个基本假设是, 闭轨族 Γ_h 关于 h (在 h_0 附近) 单调排列 (当 X_0 为 Hamilton 系统, 且 H 为相应的 Hamilton 函数时, 这个假设总是成立的). 因此过 Γ_{h_0} 上任意一点的无切线可用 h 参数化. 设

$$\Gamma_h: x = \varphi(t, h), \quad 0 \leq t \leq T_h, \quad (5.2)$$

其中 T_h 是 Γ_h 的周期. 为了考察当 $\mu \neq 0$ 时 X_μ 过 $\varphi(0, h)$ 的解能否成为闭轨, 我们沿 Γ_h 在 $\varphi(0, h)$ 点的法线方向 $f^\perp(\varphi(0, h))$ 取无切线 L . 设 $x = x(t, h, \mu)$ 是系统 (5.1) 的解, 满足初值条件 $x(0, h, \mu) = \varphi(0, h)$. 设此解当 $t = T(h, \mu)$ 时再次与 L 相交, 则由微分方程初值问题的解的唯一性知

$$x(t, h, 0) = \varphi(t, h), \quad T(h, 0) = T_h. \quad (5.3)$$

定义后继函数

$$G(h, \mu) = \langle x(T(h, \mu), h, \mu) - x(0, h, \mu), f^\perp(\varphi(0, h)) \rangle, \quad (5.4)$$

则显然当 $0 \leq |\mu| \ll 1$ 时, $G(h, \mu)$ 关于 h 的零点对应于 X_μ 的闭轨, 且 $G \in C^r$.

由于 X_0 在 Γ_{h_0} 附近均为闭轨, 故利用 (5.3) 和 Γ_h 以 T_h 为周期, 可以从 (5.4) 得到

$$G(h, 0) = \langle x(T_h, h, 0) - x(0, h, 0), f^\perp(\varphi(0, h)) \rangle \equiv 0,$$

$|h - h_0| \ll 1$. 因此

$$G(h, \mu) = \mu(\Phi(h) + \mu\Psi(h, \mu)). \quad (5.5)$$

定理 5.1 (1) 若 $h = \bar{h}$, $0 < |\mu| \ll 1$ 时, $x(t, \bar{h}, \mu)$ 为 X_μ 的闭轨, 则必有 $\Phi(\bar{h}) = 0$;

(2) 若存在自然数 k , $1 \leq k \leq r$, 使

$$\Phi(\bar{h}) = \Phi'(\bar{h}) = \dots = \Phi^{(k-1)}(\bar{h}) = 0, \quad \Phi^{(k)}(\bar{h}) \neq 0, \quad (5.6)$$

则存在 $\sigma > 0, \delta > 0$, 使当 $0 < |\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 邻域内至多有 k 个闭轨, 它们是 X_μ 的极限环. 特别, 若 $\Phi(\bar{h}) = 0, \Phi'(\bar{h}) \neq 0$, 则当 $0 < |\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 邻域内恰有一个极限环.

证明 (1) 若 $\Phi(\bar{h}) \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使当 $|h - \bar{h}| < \delta$ 时, $|\Phi(h)| > \frac{|\Phi(\bar{h})|}{2} > 0$. 由 (5.5) 可知存在 $\sigma > 0$, 当 $0 < |\mu| < \sigma$ 且 $|h - \bar{h}| < \delta$ 时, $G(h, \mu)$ 无零点, 即 X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 邻域无闭轨.

(2) 反证. 设 (5.6) 成立, 但 $\forall \sigma > 0$, 不存在 $\delta > 0$, 使当 $|\mu| < \sigma$ 时, X_μ 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ 邻域内至多有 k 个闭轨. 因此, 存在 μ_m 和正数 δ_m , 满足当 $m \rightarrow +\infty$ 时 $\mu_m \rightarrow 0, \delta_m \rightarrow 0$, 并且 X_{μ_m} 在 $\Gamma_{\bar{h}}$ 的 δ_m 邻域内至少有 $k+1$ 个闭轨, 即 $G(h, \mu_m)$ 对 h 在 $|h - \bar{h}| < \delta_m$ 内至少有 $k+1$ 个零点. 利用 Rolle 定理可知, 存在 θ_m , 满足 $|\theta_m - \bar{h}| < \delta_m$, 而且

$$\Phi^{(k)}(\theta_m) + \mu_m \frac{\partial^k}{\partial h^k} \Psi(\theta_m, \mu_m) = 0.$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得 $\Phi^{(k)}(\bar{h}) = 0$, 这与已知条件矛盾. \blacksquare

为了实际应用的方便, 下面的定理给出从 Γ_h 的表达式与原方程来计算 (5.5) 式中的 $\Phi(h)$ 的公式.

定理 5.2 对于方程 (5.1) 和 Γ_h 的表达式 (5.2), 有

$$\Phi(h) = \int_0^{T_h} e^{-\sigma(t, h)} (g(\varphi(t, h), 0) \wedge f(\varphi(t, h))) dt, \quad (5.7)$$

其中

$$\sigma(t, h) = \int_0^t \text{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, h)) dt.$$

证明 从(5.5)和(5.4)知

$$\Phi(h) = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} G(h, \mu) \right|_{\mu=0} = \left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial T(h, \mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) \right|_{\mu=0} - \frac{\partial x}{\partial \mu}(0, h, 0), f^\perp(\varphi(0, h)) \rangle,$$

其中 $\frac{\partial x}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ 在 $x = x(T_h, h, 0)$ 取值. 由于 $x = x(t, h, 0)$ 是 X_0 的解, 利用(5.3)及 T_h 为 Γ_h 的周期可得

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x=x(T_h, h, 0)} = f(x(T_h, h, 0)) = f(\varphi(T_h, h)) = f(\varphi(0, h)),$$

故

$$\Phi(h) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \mu}(T_h, h, 0) - \frac{\partial x}{\partial \mu}(0, h, 0), f^\perp(\varphi(0, h)) \right\rangle.$$

若令

$$\begin{aligned} \Delta(t, h) &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \mu}(t, h, 0), f^\perp(\varphi(0, h)) \right\rangle \\ &= \frac{\partial x}{\partial \mu}(t, h, 0) \wedge f(\varphi(0, h)), \end{aligned}$$

则

$$\Phi(h) = \Delta(T_h, h) - \Delta(0, h). \quad (5.8)$$

与 § 4 中(4.23)式的推导相类似, 可得 $\Delta(t, h)$ 的表达式如下

$$e^{\sigma(t, h)} \left(\Delta(0, h) + \int_0^t e^{-\sigma(t, h)} g(\varphi(t, h), 0) \wedge f(\varphi(t, h)) dt \right). \quad (5.9)$$

由推论 2.6 知, 当 $|h - \bar{h}| \ll 1$ 时, $\sigma(T_h, h) \equiv 0$. 因此, 由(5.8)和(5.9)得到(5.7). \square

附注 5.3 当 $\Phi(h) \equiv 0$ 时, (5.5) 成为

$$G(h, \mu) = \mu^k (\Phi_k(h) + \mu \Psi(h, \mu)).$$

此时称 $\Phi_k(h)$ 为高阶 Mel'nikov 函数, 从它的零点分布可研究扰动系统闭轨的个数. 另外, 在应用定理 5.1 讨论分岔问题时, 系统

(5.1) 中的右端除了依赖于扰动参数 μ 外, 还可能依赖于其它参数 $\lambda \in \mathbb{R}^k$, 从而 $\Phi(h)$ 转化为 $\Phi(h, \lambda)$, 由此研究对 λ 的不同取值 $\Phi(h, \lambda)$ 相对于 h 的零点个数的变化.

Hamilton 系统的扰动与弱 Hilbert 第 16 问题

在实际应用中, 经常出现 (5.1) 的一种特殊形式, 即 Hamilton 向量场的扰动系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P(x, y, \mu, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q(x, y, \mu, \lambda), \end{cases} \quad (5.10)$$

这里变量 $x, y \in \mathbb{R}$, 参数 $\mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^k$, 映射 $H \in C^{r+1}, P, Q \in C^r$, $r \geq 2$. 设当 $\mu = 0$ 时, 未扰动系统有闭轨族, 并有表达式

$$\Gamma_h: \{(x, y) | H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}.$$

假设 Γ_h 关于 h 单调排列. 对于系统 (5.10), 公式 (5.7) 成为

$$\Phi(h, \lambda) = - \oint_{\Gamma_h} \left(\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q \right) dt. \quad (5.11)$$

注意当 $\mu = 0$ 时, 沿 Γ_h 有

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

因此, 可把 (5.11) 改写为

$$\Phi(h, \lambda) = \oint_{\Gamma_h} Q(x, y, 0, \lambda) dx - P(x, y, 0, \lambda) dy. \quad (5.12)$$

Л. С. Понтрягин^[Pon], 张芷芬(见[N]) 和陈翔炎^[C] 最先对系统 (5.10) 给出了相应于定理 5.1 的结果.

附注 5.4 当 $H(x, y)$ 为 x, y 的 $n+1$ 次多项式, P, Q 为 x, y 的次数不大于 n 的多项式时, (5.12) 是一个 Abel 积分, 寻求它对 h 的零点个数问题称为弱 Hilbert 第 16 问题. 由于这个问题是 V. I. Arnold^[A1, 2] 首先提出来的, 有时也称为 Hilbert-Arnold 问题. 1900

年, D. Hilbert^[H] 在第二届国际数学家大会上提出了 23 个数学问题, 其中第 16 个问题的后半部分是: 右端为 n 次多项式的平面系统极限环的最小上界 $H(n)$ 是多少? 可能出现的极限环相对位置如何? 近一个世纪以来, 特别是最近几十年来, 出现了大量的工作. 例如, 史松龄^[Sa] 和陈兰荪、王明淑^[CW] 最先分别举例证明 $H(2) \geq 4$; 李继彬、黄其明^[LH] 举例证明 $H(3) \geq 11$; 叶彦谦、陈兰荪和杨信安(见[CY] 和[YY]) 利用[Zzf1, 2] 中关于极限环的唯一性定理, 证明二次多项式系统中按叶彦谦分类的(I) 类方程至多有一个极限环, 等等. 在叶彦谦等的专著[Y1, 2], 蔡燧林和蔡燧林、张平光的综述文章[Cs] 和[CZ], 马知恩的专著[Mz], 梁肇军的专著[Lz], 以及 Dumortier 等人的系列文章[DRR1, 2] 和[DER] 中, 读者可发现大量有趣的结果. 经过 Il'yashenko^[I] 和 Ecalle^[E] 修补证明后的 Dulac^[D] 有限性定理指出: 一个给定的 n 次多项式系统的极限环个数有限. 但是, 对全体 n 次多项式系统而言, 其极限环个数的一致上界如何估计(哪怕是否有限), 即使对 $n=2$ 这种最简单的非线性情形, 仍是一个未知的问题. S. Smale^[Sm] 认为, 对 $H(n)$ 的研究可能是 Hilbert 问题中最困难的一个问题, 可见这是对数学工作者的一个重大挑战.

由(5.5) 式可知, Abel 积分(5.12) 是系统(5.10) 在 Γ_A 附近后继函数的一阶近似. 因此, 积分(5.12) 的零点个数与系统(5.10) 的极限环个数密切相关. 当 H 是 $n+1$ 次多项式, P 和 Q 为 n 次多项式时, (5.10) 是一类特殊的 n 次系统, 即 Hamilton 向量场的扰动系统, 所以把研究 Abel 积分(5.12) 零点个数的问题称为弱 Hilbert 第 16 问题. 还应指出的是, 当所考虑的多项式系统接近可积而非 Hamilton 系统时, 需要先乘上一个积分因子, 才能把它化为(5.10) 的形式. 此时 H, P, Q 可能不再是多项式. 习惯上仍把(5.12) 称为 Abel 积分, 把求其零点个数的问题称为弱 Hilbert 第 16 问题.

例 5.5 考虑 van der Pol 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (5.13)$$

其中 $0 < |\mu| \ll 1$. 可把它改写为如下的等价形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (5.14)$$

当 $\mu = 0$ 时, (5.14) 为 Hamilton 系统, 它的闭轨族可表示为

$$\Gamma_h: \{(x, y) | H(x, y) \stackrel{d}{=} x^2 + y^2 = h^2, h > 0\},$$

或写成参数方程

$$\Gamma_h: x = h \cos t, \quad y = h \sin t.$$

代入(5.11)式, 得到

$$\Phi(h) = -2 \int_0^{2\pi} h^2 \sin^2 t (1 - h^2 \cos^2 t) dt = -2\pi h^2 \left(1 - \frac{h^2}{4}\right).$$

显然 $h = 2$ 是它的唯一正零点, 并且是简单零点. 由定理 5.1, 当 $|\mu| \ll 1$ 时, 系统(5.14)有唯一的闭轨 γ . 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, γ 趋于半径为 2 的圆周.

在这个例中, 由于 $\Phi(h)$ 可以积分为显式, 使问题很快获解. 但在多数情况下问题并不如此轻而易举, 请看下例.

例 5.6 考虑平面系统 X_μ 如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + O(|\mu|^2), \\ \frac{dy}{dt} = -1 + x^2 + \mu(\alpha + x)y + O(|\mu|^2), \end{cases} \quad (5.15)$$

其中变量 $x, y \in \mathbb{R}$, 参数 $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$, μ 为小参数. 显然, X_0 为 Hamilton 系统, 它有首次积分

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} = h. \quad (5.16)$$

容易得知, X_0 的轨线分布如图 2-6 所示, 环绕中心点 $B(-1, 0)$ 为周期环域, 它以奇点 B 和鞍点 $A(1, 0)$ 及其同宿轨(称为同宿环)

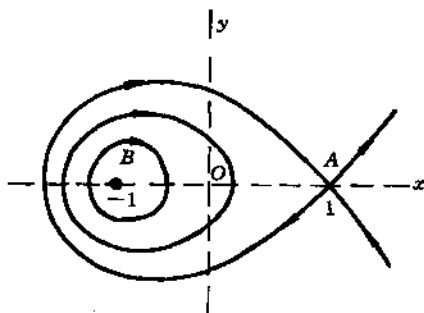


图 2-6

为边界. 闭轨族为

$$\Gamma_h: \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3} \right\}.$$

当 $h \rightarrow -\frac{2}{3}$ 时, Γ_h 缩向奇点 B ; 当 $h \rightarrow \frac{2}{3}$ 时, Γ_h 扩大为同宿环.

利用定理 5.1, 定理 5.2 和 (5.12), 为了研究当 $0 < |\mu| \ll 1$ 时 X_μ 是否有闭轨, 需要对不同的 α 研究积分

$$\Phi(h, \alpha) = \oint_{\Gamma_h} (\alpha + x)y dx \quad (5.17)$$

关于 $h \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 的零点分布规律. 虽然 (5.17) 形式上很简单, 但它不能积分为初等函数的有限形式, 研究它的零点规律并不容易. 本节主要介绍两种研究 Abel 积分的方法: 文献中常见的 Picard-Fuchs 方程法 (例如, 见 [CS]), 和我们最近得到的直接方法.

Picard-Fuchs 方程法

首先把 (5.17) 改写为

$$\Phi(h, \alpha) = \alpha I_0(h) + I_1(h), \quad (5.18)$$

这里设

$$I_k(h) = \oint_{\Gamma_h} x^k y dx = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} x^k y dx, \quad (5.19)$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots$, $\xi(h) < \eta(h)$ 是 Γ_h 与 x 轴的交点的横坐标, $y = y(x, h) \geq 0$ 满足 (5.16). 注意

$$\lim_{h \rightarrow -2/3} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = \lim_{h \rightarrow -2/3} \frac{\int_{\xi(h)}^{\eta(h)} x y dx}{\int_{\xi(h)}^{\eta(h)} y dx} = -1,$$

故可定义

$$P(h) = \begin{cases} -\frac{I_1(h)}{I_0(h)}, & \text{当 } -\frac{2}{3} < h \leq \frac{2}{3}, \\ 1, & \text{当 } h = -\frac{2}{3}. \end{cases} \quad (5.20)$$

又由于 $I_0(h) = \oint_{\Gamma_h} y dx = S(h)$, $S(h)$ 为 Γ_h 所围成的紧区域的面积. 所以当 $h > -\frac{2}{3}$ 时,

$$\Phi(h, \alpha) = 0 \iff F(h, \alpha) \stackrel{d}{=} \alpha - P(h) = 0. \quad (5.21)$$

定理 5.7 (1) 当 $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$ 时, $\frac{5}{7} < P(h) < 1$, 且

$$\lim_{h \rightarrow 2/3} P(h) = \frac{5}{7}.$$

(2) 当 $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$ 时, $P'(h) < 0$, 且 $\lim_{h \rightarrow -2/3} P'(h) = -\frac{1}{8}$, $\lim_{h \rightarrow 2/3} P'(h) = -\infty$.

由定理 5.1, 定理 5.7 和 (5.21) 可知, 当 $5/7 < \alpha < 1$ 且 $|\mu| \ll 1$ 时, X_μ 存在唯一闭轨. 在证明定理 5.7 之前, 先证一个引理.

引理 5.8 $P(h)$ 满足如下的 Riccati 方程

$$(9h^2 - 4)P' = 7P^2 + 3hP - 5. \quad (5.22)$$

证明 将 (5.16) 对 h 求导, 其中 $y = y(x, h)$, 得到 $\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{y}$,

再利用 $y(\xi(h), h) = y(\eta(h), h) = 0$, 可从 (5.19) 得到

$$I_k'(h) = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^k}{y} dx. \quad (5.23)$$

因此,由(5.16), (5.19) 和(5.23) 可得

$$I_k(h) = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^k y^2}{y} dx = 2hI_k'(h) - 2I_{k+1}'(h) + \frac{2}{3}I_{k+3}'(h). \quad (5.24)$$

另一方面,利用分部积分可得

$$I_k(h) = \frac{1}{k+1}(I_{k+1}'(h) - I_{k+3}'(h)). \quad (5.25)$$

从(5.24) 和(5.25) 中消去 $I_{k+3}'(h)$, 得到

$$(2k+5)I_k(h) = -4I_{k+1}'(h) + 6hI_k'(h).$$

特别地,

$$\begin{cases} 5I_0 = -4I_1' + 6hI_0', \\ 7I_1 = -4I_2' + 6hI_1'. \end{cases} \quad (5.26)$$

由(5.16) 有 $dH = ydy + (1-x^2)dx$, 从而 $(1-x^2)ydx = ydH - y^2dy$. 沿 Γ_h 积分此式得到 $I_2(h) \equiv I_0(h)$. 在(5.26) 中以 I_0 代 I_2 , 并反解出 I_0' 和 I_1' , 最终得到

$$\begin{cases} (9h^2 - 4)I_0' = \frac{15}{2}hI_0 + 7I_1, \\ (9h^2 - 4)I_1' = 5I_0 + \frac{21}{2}hI_1. \end{cases} \quad (5.27)$$

把(5.27) 代入 $P' = \frac{I_0'I_1 - I_1'I_0}{I_0^2}$, 即得(5.22). \square

定理 5.7 的证明 把(5.22) 改写为系统

$$\frac{dP}{dt} = -7P^2 - 3hP + 5, \quad \frac{dh}{dt} = -9h^2 + 4. \quad (5.28)$$

由于在 h 轴上向量场(5.28) 的方向指向上方, 且上面定义的函数 $P(h) \rightarrow 1$, 当 $h \rightarrow -\frac{2}{3}$. 因此, $P = P(h)$ 的图形是从系统(5.28) 的

鞍点 $(-\frac{2}{3}, 1)$ 到结点 $(\frac{2}{3}, \frac{5}{7})$ 的分界线, 见图 2-7. 向量场(5.28)

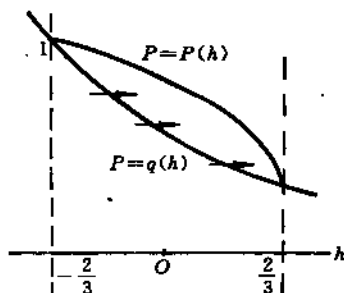


图 2-7

的水平等斜线由方程 $7P^2 + 3hP - 5 = 0$ 给出, 它的图形为双曲线, 在上半平面的一支为

$$q(h) = \frac{1}{14}[-3h + \sqrt{9h^2 + 140}]. \quad (5.29)$$

显然, $P = P(h)$ 的图形与 $P = q(h)$ 的图形除了两奇点外不可能相交, 再由 (5.22) 和 (5.29) 可以分别算出

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -2/3} P'(h) &= -\frac{1}{8}, \\ q'\left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此, 当 $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$ 时, $P = P(h)$ 的图形整个落在 $P = q(h)$ 的图形上方, 从而沿 $P = P(h)$ 有 $P'(h) < 0$. $\lim_{h \rightarrow 2/3} P'(h) = -\infty$ 可从 (5.22) 得到. ■

直接方法

为了判断 Abel 积分的零点个数, 目前使用的方法大都要经过曲折的推导. 下面介绍一个可在一定条件下从原方程判别的直接方法.

设 (5.10) 中的 Hamilton 函数有如下形式

$$H(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y), \quad (5.30)$$

其中 $\Phi \in C^2[a, A]$, $\Psi \in C^2[b, B]$. 设

- (H₁) (1) $\exists \alpha \in (a, A)$, 使得 $\Phi'(x)(x - \alpha) > 0$ (或者 < 0),
 $\forall x \in (a, A) \setminus \{\alpha\}$;
 (2) $\exists \beta \in (b, B)$, 使得 $\Psi'(y)(y - \beta) > 0$ (或者 < 0),
 $\forall y \in (b, B) \setminus \{\beta\}$.

此条件说明 $\forall h \in (h_1, h_2)$, X_0 的闭轨 $\Gamma_h = \{(x, y) | H(x, y) = h\}$ 是凸的, 其上点的横坐标的最小值 $a(h)$ 与最大值 $A(h)$ 满足 $a \leq a(h) \leq A(h) \leq A$; 其上点的纵坐标的最小值 $b(h)$ 与最大值 $B(h)$ 满足 $b \leq b(h) \leq \beta \leq B(h) \leq B$, 且 $(a(h), \beta)$ 与 $(A(h), \beta)$ 分别为 Γ_h 的最左点与最右点, $(a, b(h))$ 与 $(a, B(h))$ 分别为 Γ_h 的最低点与最高点. 在条件(H₁)下, $\forall x \in (a(h), \alpha)$, 存在唯一的 $\tilde{x} = \tilde{x}(x) \in (a, A(h))$, 使 $\Phi(x) = \Phi(\tilde{x})$; $\forall y \in (b(h), \beta)$, 存在唯一的 $\tilde{y} = \tilde{y}(y) \in (\beta, B(h))$, 使 $\Psi(y) = \Psi(\tilde{y})$. 由条件(H₁)易知, $\forall x \in (a(h), \alpha)$, $\forall y \in (b(h), \beta)$ 有

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(\tilde{x})} < 0, \quad \frac{d\tilde{y}}{dy} = \frac{\Psi'(y)}{\Psi'(\tilde{y})} < 0. \quad (5.31)$$

现在考虑两个 Abel 积分之比

$$P(h) = \frac{I_2(h)}{I_1(h)}, \quad (5.32)$$

其中

$$I_k(h) = \oint_{\Gamma_h} f_k(x)g(y)dx, \quad (5.33)$$

这里 $f_k \in C^1(a, A)$, $k = 1, 2$, $g \in C^2(b, B)$, 并满足

- (H₂) (1) $f_1(x)f_1(\tilde{x}) > 0$, $\forall x \in (a(h), \alpha)$;
 (2) $g'(y)g'(\tilde{y}) > 0$, $\forall y \in (b(h), \beta)$.

现在定义两个判别函数

$$\xi(x) = \frac{f_2(x)\Phi'(\tilde{x}) - f_2(\tilde{x})\Phi'(x)}{f_1(x)\Phi'(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x})\Phi'(x)},$$

$$\eta(y) = \frac{(g(\tilde{y}) - g(y))\Psi'(\tilde{y})\Psi'(y)}{g'(\tilde{y})\Psi'(y) - g'(y)\Psi'(\tilde{y})}, \quad (5.34)$$

其中 $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$, $x \in (a(h), a)$, 和 $\tilde{y} = \tilde{y}(y)$, $y \in (b(h), \beta)$.

定理 5.9 ([LZ]) 设 $H(x, y)$ 具有 (5.30) 的形式, 并且条件 (H_1) 与 (H_2) 成立; 当 $x \in (a, a)$, $y \in (b, \beta)$ 时, 有 $\xi'(x)\eta'(y) > 0$ (或 < 0), 则 $P'(h) > 0$ (或 < 0) 对 $h \in (h_1, h_2)$ 成立. \blacksquare

有时所考虑的 Hamilton 函数具有如下形式

$$H(x, y) = \varphi(x)y^2 + \Phi(x), \quad (5.35)$$

其中 $\varphi, \Phi \in C^2[a, A]$, 且 $\varphi(x)$ 定号 (为确定起见, 设 $\varphi(x) > 0$). 考虑 Abel 积分之比

$$Q(h) = \frac{\oint_{\Gamma_A} f_2(x)y dx}{\oint_{\Gamma_A} f_1(x)y dx}, \quad (5.36)$$

其中 $f_k \in C^1[a, A]$, $k = 1, 2$. 类似地, 当 $\Phi(x)$ 满足条件 (H_1) 的 (1) 时, $\forall x \in (a(h), a)$ 可定义 $\tilde{x} = \tilde{x}(x) \in (a, A(h))$, 使 $\Phi(x) = \Phi(\tilde{x})$. 定义判别函数

$$\zeta(x) = \frac{f_2(x) \sqrt{\varphi(\tilde{x})\Phi'(\tilde{x})} - f_2(\tilde{x}) \sqrt{\varphi(x)\Phi'(x)}}{f_1(x) \sqrt{\varphi(\tilde{x})\Phi'(\tilde{x})} - f_1(\tilde{x}) \sqrt{\varphi(x)\Phi'(x)}}. \quad (5.37)$$

定理 5.10 ([LZ]) 设 $H(x, y)$ 具有 (5.35) 的形式, 条件 (H_1) (1) 与 (H_2) (1) 成立, 又若当 $x \in (a, a)$ 时 $\zeta'(x) > 0$ (或 < 0), 则 $Q'(h) < 0$ (或 > 0) 对 $h \in (h_1, h_2)$ 成立. \blacksquare

例 5.6 的第二种解法

(5.16) 具有 (5.35) 的形式, 且 $\varphi(x) \equiv \frac{1}{2}$, $\Phi(x) = x - \frac{1}{3}x^3$.

取 $a = -1$, 则条件 (H_1) (1) 成立. 另一方面, (5.20) 定义的 $P(h)$ 具有 (5.36) 的形式, 且 $f_2(x) = -x$, $f_1(x) \equiv 1$, 故条件 (H_2) (1) 成立. 代入 (5.37) 得

$$\zeta(x) = \frac{-x(1-\tilde{x}^2) + \tilde{x}(1-x^2)}{(1-\tilde{x}^2) - (1-x^2)} = \frac{-(1+x\tilde{x})}{x+\tilde{x}}.$$

由(5.31)知 $\frac{d\tilde{x}}{dx} < 0$, 且由图 2-6 知 $x < -1 < \tilde{x} < 1$, 从而

$$\zeta'(x) = \frac{1}{(x+\tilde{x})^2} \left((1-\tilde{x}^2) + (1-x^2) \frac{d\tilde{x}}{dx} \right) > 0.$$

由定理 5.10 立刻可得 $P'(h) < 0$.

附注 5.11 上面介绍的方法主要用于 Abel 积分具有如下的形式:

$$I(h) = aI_0(h) + bI_1(h) = I_0(h)(a + bP(h)),$$

其中 a 和 b 为常数, $h_1 < h < h_2$, $P(h) = \frac{I_1(h)}{I_0(h)}$, 而且 $I_0(h) > 0$, 当 $h > h_1$. 如果能证明 $P'(h) \neq 0$, $h_1 < h < h_2$, 则 $I(h)$ 在 (h_1, h_2) 的零点个数至多为 1. 当 Abel 积分具有形式

$$I(h) = aI_0(h) + bI_1(h) + cI_2(h),$$

其中 a, b, c 为常数, $h_1 < h < h_2$, 而且当 $h > h_1$ 时 $I_0(h) > 0$, 则可以把 $I(h)$ 改写为

$$I(h) = I_0(h)(a + bP(h) + cQ(h)),$$

其中 $P(h) = \frac{I_1(h)}{I_0(h)}$, $Q(h) = \frac{I_2(h)}{I_0(h)}$. 若能证明 $P(h)$ 与 $Q(h)$ 之一单调, 例如 $P'(h) \neq 0$, $h_1 < h < h_2$, 则 $I(h)$ 的零点个数问题转化为 $a + bP + cQ(P)$ 对 P 的零点个数问题, 其中 $Q(P) = Q(h(P))$, 而 $h = h(P)$ 是 $P = P(h)$ 的反函数. 由于 $a + bP$ 是 P 的线性函数, 所以当曲线 $Q = Q(P)$ 无变曲点(或有 k 个变曲点)时, $I(h)$ 在 (h_1, h_2) 的零点个数至多为 2(或 $k + 2$). 对于研究某些向量场的分岔问题, 这是一个有效的方法, 可参见 [DLZ]. 此外, 与研究 Abel 积分相关, 一些作者研究平面上与闭轨族相应的周期函数的单调性问题, 读者可参考曾宪武和井竹君最近的工作 [ZJ] 及其引文.

§ 6 关于 Petrov 定理的证明

当 Abel 积分有多个零点时, 用 § 5 中介绍的方法讨论有较大

困难. 因此, 我们在本节中介绍另一种方法, 即化到复域中用辐角原理估算零点的个数. 另一方面, 为了研究 Hamilton 向量场的扰动系统所具有的极限环个数的上界, 我们需要把相应的 Abel 积分零点个数的估计, 与 Hopf 分岔、同宿分岔、异宿分岔等所能出现的极限环个数相联系, 这是本节将要介绍的另一个问题.

考虑 Hamilton 向量场的扰动系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu P(x, y) + o(\mu), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q(x, y) + o(\mu), \end{cases} \quad (6.1)_\mu$$

其中 μ 是小参数, $H(x, y)$, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 都是 x 和 y 的实多项式, $\deg H = m + 1$, $\deg P, \deg Q \leq n$.

设 Hamilton 向量场 (6.1)₀ 有闭轨族

$$\Gamma(h) = \{(x, y) | H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\},$$

其中 $H = h_1$ 和 $H = h_2$ 分别对应系统 (6.1) _{μ} 的中心型奇点和奇闭轨. 设 U 是奇闭轨 $H = h_2$ 所围成的区域的紧致邻域, 则当 μ 充分小时, 系统 (6.1) _{μ} 在 U 中的极限环个数的最小上界 $B(m, n)$ 与下面 Abel 积分 (也叫一阶 Mel'nikov 函数, 参看 (5.12) 式)

$$\varphi(h) = \int_{\Gamma(h)} Q(x, y)dx - P(x, y)dy, h_1 < h < h_2,$$

的孤立零点个数 (计重次) 的最小上界 $Z(m, n)$ 有如下关系:

(1) 如果 $\varphi(\bar{h}) = 0$, $\varphi'(\bar{h}) \neq 0$, 其中 $h_1 < \bar{h} < h_2$, 则系统 (6.1) _{μ} 有双曲闭轨 $L_{\bar{h}, \mu} \rightarrow \Gamma(\bar{h})$, 当 $\mu \rightarrow 0$; 反之, 如果系统有闭轨 $L_{\bar{h}, \mu} \rightarrow \Gamma(\bar{h})$, 当 $\mu \rightarrow 0$, 则有 $\varphi(\bar{h}) = 0$.

(2) $Z(m, n)$ 不小于系统 (6.1) _{μ} 的闭轨 $L_{\bar{h}, \mu}$ 的个数的总和, 此处 $L_{\bar{h}, \mu} \rightarrow \Gamma(\bar{h})$, 当 $\mu \rightarrow 0$.

1984 年 A. G. Khovansky^[K] 和 A. N. Varchenko^[Va] 独立地证明了 $Z(m, n) < +\infty$, 即对一切 x 和 y 的实多项式 $H(x, y)$, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 其中 $\deg H = m + 1$, $\deg P, \deg Q \leq n$, Abel 积分

$\varphi(h)$ 的零点个数有一致的上界. $Z(m, n)$ 应是 m 和 n 的函数, 但除个别情形外, 迄今未得到其表达式. 对一些特殊的二次或三次 Hamilton 向量场在 $n = 2, 3$ 或 4 的情况下来估算 $B(m, n)$ 和 $Z(m, n)$, 已有一些有趣的结果, 见 [DGZ], [DRS2], [GaHo] 等. 但即使对于 $m = n = 2$ 的一般情形, 问题也远没有彻底解决.

当 $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ 时, 即对 Bogdanov-Takens 系统, G. S. Petrov^[P1, 2] 证明 $Z(2, n) = n - 1$; 当 $\varphi(h) \neq 0$ 时, [Bo1, 2] 中证明 $B(2, 2) = 1$, [DRS1] 中证明 $B(2, 3) = 2$, [LR1] 中证明 $B(2, 4) = 3$, P. Mardesic^[Ma] 证明, $B(2, n) = n - 1$; 李宝毅、张芷芬^[LbZ] 证明, 当 $\varphi(h) \equiv 0$ 而二阶 Mel'nikov 函数不恒为零时, $B(2, n) = 2n - 2$ (或 $2n - 3$), 当 n 为偶 (或奇) 数. 这是在弱 Hilbert 第 16 问题的研究中少有的完整结果. 本节主要介绍 Petrov 和 Mardesic 的思想. 我们将 $\varphi(h)$ 扩充到复域, 然后对 Petrov 的方法作一点改进, 用辐角原理来直接估算 $B(2, n)$ (见 [LbZ]). 这种手法可用来研究其它类似问题.

Abel 积分的构造

当 Abel 积分 $\varphi(h)$ 在积分号下的项数较多时, 为了估算 $\varphi(h)$ 的零点个数, 必须先研究它的构造. 由 Green 公式, 有

$$\varphi(h) = \int_{\Gamma(h)} Qdx - Pdy = \int_{\Gamma(h)} Q_1 dx,$$

其中 Q_1 也是 x 和 y 的多项式.

令 $\omega_1 = Q_1 dx$, $\omega_2 = Q_2 dx$, 两个多项式微分 1-形式 ω_1 和 ω_2 称为有关系“ \sim ”, 即 $\omega_1 \sim \omega_2$, 如果

$$\int_{\Gamma(h)} \omega_1 \equiv \int_{\Gamma(h)} \omega_2.$$

此式成立的一个充分条件是

$$\omega_1 - \omega_2 = Adh + dB,$$

其中 A 和 B 都是 x 和 y 的多项式. 显然“ \sim ”是等价关系. 令

$$\{\omega\}/\sim = \Omega = \{[\omega]\},$$

其中 $[\omega]$ 表示包含 ω 的等价类, Ω 对运算

$$[\omega_1] + [\omega_2] = [\omega_1 + \omega_2]$$

而言是一交换群;另外还有

$$f(h)[\omega] = [f(H)\omega],$$

即

$$f(h) \int_{\Gamma(h)} \omega = \int_{\Gamma(h)} f(H)\omega,$$

其中 $f(h)$ 是 h 的多项式,即 Ω 可在多项式环 \tilde{R} 上进行乘法运算,且对 $f_1(h), f_2(h) \in \tilde{R}, [\omega_1], [\omega_2] \in \Omega$,下列分配律和结合律成立:

- (1) $f_1(h)([\omega_1] + [\omega_2]) = f_1(h)[\omega_1] + f_1(h)[\omega_2];$
- (2) $(f_1(h) + f_2(h))[\omega_1] = f_1(h)[\omega_1] + f_2(h)[\omega_1];$
- (3) $f_1(h)f_2(h)[\omega_1] = f_1(h)[f_2(H)\omega_1].$

故 Ω 是 \tilde{R} 上的模(module). 当 Hamilton 函数 $H(x, y) = y^2 + f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 x 的多项式时, 较易证明 Ω 有有限生成元, 即 Ω 可表为有限个生成元的线性组合, 其系数是 \tilde{R} 中的元素, 即是 h 的多项式. 请读者注意, 生成元的构造取决于 Hamilton 函数, 而不受扰动项 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 的影响, 后者只决定在线性组合中系数多项式的次数和形式.

定理 6.1 ([P1]) 考虑 Bogdanov-Takens 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \mu P(x, y) + o(\mu), \\ \frac{dy}{dt} = -x + x^2 + \mu Q(x, y) + o(\mu), \end{cases} \quad (6.2)_\mu$$

其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 是 x 和 y 的多项式, $\deg P, \deg Q \leq n$, 则有 $\Omega = \{I_0(h), I_1(h)\}$, 且

$$\varphi(h) = f_0(h)I_0(h) + f_1(h)I_1(h), 0 < h < \frac{1}{6}, \quad (6.3)$$

其中 $I_i(h) = \int_{\Gamma(h)} x^i y dx, i = 0, 1$, 而 $f_0(h), f_1(h) \in \tilde{R}, \deg f_0(h)$

$$\leq \left[\frac{n-1}{2} \right], \deg f_1(h) \leq \left[\frac{n}{2} \right] - 1.$$

我们将证明作为习题留给读者. 只要对 n 做归纳法即可证得.

Picard-Fuchs 方程

为了估算 $\varphi(h)$ 在 $(0, \frac{1}{6})$ 上的零点个数, 除了知道 $\varphi(h)$ 的构造 (6.3) 外, 还必须知道 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 的性质, 下面我们要证明

定理 6.2 考虑系统 (6.2) _{μ} , 此时定理 6.1 中的 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 满足以下的 Picard-Fuchs 方程

$$h(h - \frac{1}{6}) \frac{d}{dh} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}h - \frac{1}{6} & \frac{7}{36} \\ -\frac{1}{6}h & \frac{7}{6}h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad 0 < h < \frac{1}{6}. \quad (6.4)$$

证明 方程 (6.4) 中蕴含着 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 的许多重要性质. 在 §5 中我们已经对 Bogdanov-Takens 系统的另一种等价形式 (5.15) 推导出了 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 所满足的 Picard-Fuchs 方程 (5.27). 由于 Picard-Fuchs 方程在研究弱 Hilbert 第 16 问题中的重要性, 此处我们将介绍另一种递推公式^[DG2]. 由于

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} = h, \quad 0 < h < \frac{1}{6}.$$

故沿 $H(x, y) = h$ 有

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{y},$$

并且

$$x^{n-2}y^m(y \frac{\partial y}{\partial x} + x - x^2) = 0.$$

利用分部积分得

$$E_{n,m} = - \int_{\Gamma(h)} \frac{n-1}{m+2} x^{n-3} y^{m+2} dx + \int_{\Gamma(h)} x^{n-1} y^m dx =$$

$$\int_{\Gamma(h)} x^n y^m dx = 0.$$

特别地,

$$E_{4,-1}: -2 \int_{\Gamma(h)} xy dx + \int_{\Gamma(h)} \frac{x^3}{y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^4}{y} dx = 0,$$

$$E_{3,-1}: - \int_{\Gamma(h)} y dx + \int_{\Gamma(h)} \frac{x^2}{y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^3}{y} dx = 0;$$

$$E_{2,-1}: \int_{\Gamma(h)} \frac{x}{y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^2}{y} dx = 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} F_n: h \frac{d}{dh} \int_{\Gamma(h)} x^n y dx &= \int_{\Gamma(h)} \frac{h x^n}{y} dx \\ &= \int_{\Gamma(h)} \frac{x^n y}{2} dx + \int_{\Gamma(h)} \frac{x^{n+2}}{2y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^{n+3}}{3y} dx. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} F_1: h \frac{d}{dh} \int_{\Gamma(h)} xy dx &= \int_{\Gamma(h)} \frac{xy}{2} dx + \int_{\Gamma(h)} \frac{x^3}{2y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^4}{3y} dx \\ &= \frac{7}{6} \int_{\Gamma(h)} xy dx + \frac{1}{6} \int_{\Gamma(h)} \frac{x^2}{y} dx && (\text{由 } E_{4,-1}) \\ &= \frac{7}{6} \int_{\Gamma(h)} xy dx + \frac{1}{6} \int_{\Gamma(h)} \frac{x^2}{y} dx - \frac{1}{6} \int_{\Gamma(h)} y dx && (\text{由 } E_{3,-1}) \\ &= -\frac{1}{6} \int_{\Gamma(h)} y dx + \frac{7}{6} \int_{\Gamma(h)} xy dx + \frac{1}{6} \frac{d}{dh} \int_{\Gamma(h)} xy dx, && (\text{由 } E_{2,-1}) \end{aligned}$$

由此得到

$$(h - \frac{1}{6}) I_1'(h) = -\frac{1}{6} I_0(h) + \frac{7}{6} I_1(h), \quad (6.5)$$

其中 $0 < h < \frac{1}{6}$. 类似地,

$$\begin{aligned}
 F_0: \quad & h \frac{d}{dh} \int_{\Gamma(h)} y dx \\
 &= \int_{\Gamma(h)} \frac{y}{2} dx + \int_{\Gamma(h)} \frac{x^2}{2y} dx - \int_{\Gamma(h)} \frac{x^3}{3y} dx \\
 &= \frac{5}{6} \int_{\Gamma(h)} y dx + \frac{1}{6} \int_{\Gamma(h)} \frac{x}{y} dx \quad (\text{由 } E_{3,-1}, E_{2,-1}) \\
 &= \frac{5}{6} \int_{\Gamma(h)} y dx + \frac{1}{6} \frac{d}{dh} \int_{\Gamma(h)} x y dx,
 \end{aligned}$$

由此得到

$$h I_0'(h) = \frac{5}{6} I_0(h) + \frac{1}{6} I_1'(h), \quad (6.6)$$

其中 $0 < h < \frac{1}{6}$. 由 (6.5), (6.6) 得

$$h \left(h - \frac{1}{6} \right) I_0'(h) = \left(\frac{5}{6} h - \frac{1}{6} \right) I_0(h) + \frac{7}{36} I_1(h), \quad (6.7)$$

其中 $0 < h < \frac{1}{6}$. 由 (6.5), (6.7) 便得 (6.4). ■

几个预备定理

当 μ 充分小时, 为了估算方程 (6.2) $_{\mu}$ 在 U 中的极限环个数, 除了知道 $\varphi(h)$ 在开区间 $(0, \frac{1}{6})$ 上的零点个数外, 还要知道当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $\varphi(h)$ 趋于奇点 $\Gamma(0)$ 和趋于同宿轨 $\Gamma(\frac{1}{6})$ 的极限环个数. 为此我们需要引入下面的定理. 为了避免行文冗长, 我们不引证明, 有兴趣的读者可参看引文.

定理 6.3 ([LbZ], [X], [ALGM]) 考虑方程 (6.2) $_{\mu}$. 如果

$$\varphi(h) = \alpha h^{m+1} + o(h^{m+1}), \quad \alpha \neq 0, \quad 0 < h \ll 1,$$

则 (6.2) $_{\mu}$ 至多存在 m 个极限环, 当 $\mu \rightarrow 0$ 时它们趋于奇点 $(0, 0)$.

请读者注意, 此定理对一般形式的方程 (6.1) $_{\mu}$ 也成立, 只要下列条件满足:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2 + y^2) \in C^{\infty},$$

$$P(x, y) = O(|x| + |y|) \in C^\infty,$$

$$Q(x, y) = O(|x| + |y|) \in C^\infty.$$

韩茂安和朱德明在专著[HZ]中对非 Hamilton 系统的线性中心也证得与定理 6.3 完全类似的结论.

定理 6.4 ([R2]) 考虑方程(6.1) $_{\mu}$. 设 $\Gamma_h: \{(x, y) | H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}$ 是紧致的, 且 $\Gamma(h_2)$ 对应于(6.1) $_0$ 的双曲鞍点 (\bar{x}, \bar{y}) 的同宿轨, 则(6.1) $_{\mu}$ 在同宿轨 $\Gamma(h_2)$ 邻域的一阶 Melnikov 函数 $\varphi(h)$ 有以下展式

$$\begin{aligned} \varphi(h) = & b_0 + a_1(h_2 - h)\ln(h_2 - h) + b_1(h_2 - h) + \\ & a_2(h_2 - h)^2\ln(h_2 - h) + b_2(h_2 - h)^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

其中 $0 < h_2 - h \ll 1$, 而且由[HI]和[Hm]可知

$$b_0 = \varphi(h_2),$$

$$a_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot M, \quad (M \text{ 是非零常数}),$$

$$b_1 = \frac{d}{dt}\varphi(h) \Big|_{h=h_2} = \pm \int_{\Gamma(h_2)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt, \quad \text{当 } a_1 = 0,$$

其中积分式前符号的选择, 取决于闭轨 $\Gamma(h)$ 的定向和当 h 增加时 $\Gamma(h)$ 是扩大或缩小.

如果 a_{k+1} (或 b_k) 是展式(6.8)中第一个不为 0 的系数, 则至多有 $r = 2k + 1$ (或 $r = 2k$) 个极限环, 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 它们趋于 $\Gamma(h_2)$.

定理 6.4 是研究同宿分岔的主要依据. 对于异宿轨而言, 韩茂安和江其保推得了类似的渐近展式, 只是展式中的系数与极限环的个数之间的联系尚待进一步探索. 朱德明^[Zd1,2,3] 最近发展了指数二分性和三分性理论, 深化了不变流形的表示理论, 用统一的方法研究了各类系统(高维或低维, 可积或不可积)的同宿轨、异宿轨的存在性和横截性等问题.

定理 6.5 考虑方程(6.2) $_{\mu}$. 如果展式(6.8)中第一个不为 0 的系数是 a_{k+1} 或 b_k , 则(6.3)式可改写成如下形式:

$$\varphi(h) = \left(\frac{1}{6} - h\right)^k (f_0^*(h)I_0(h) + f_1^*(h)I_1(h)), \quad 0 < h < \frac{1}{6},$$

$$\text{其中 } \deg f_0^*(h) \leq \left[\frac{n-1}{2}\right] - k, \quad \deg f_1^*(h) \leq \left[\frac{n}{2}\right] - k - 1.$$

这个定理的直观含义是, 如果当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 有 $2k+1$ 或 $2k$ 个极限环趋于同宿轨 $\Gamma(\frac{1}{6})$, 则 $\varphi(h)$ 在开区间 $(0, \frac{1}{6})$ 上的零点个数将减少 k 个. 下面我们先证一个引理, 然后推证此定理.

作变换 $h = \frac{1}{6} - l$, 得

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{6} - l, \quad 0 < l < \frac{1}{6}.$$

$\Gamma(l) = \Gamma(\frac{1}{6} - h)$ ($0 < l < \frac{1}{6}$) 对应系统 $(6.2)_\mu$ 的闭轨族, 而 $\Gamma(\frac{1}{6})$ 和 $\Gamma(0)$ 分别对应 $(6.2)_0$ 的中心型奇点和同宿轨. 在上述变换下, 展式 (6.8) 变为

$$\varphi\left(\frac{1}{6} - l\right) = b_0 + a_1 l \ln l + b_1 l + a_2 l^2 \ln l + b_2 l^2 + \cdots \quad (6.9)$$

其中 $0 < l \leq 1$.

引理 6.6 ([Ma]) 对方程组 $(6.2)_\mu$, 有

$$\bar{I}_0(l) = \int_{\bar{\Gamma}(l)} y dx = \bar{a}_0 + \bar{b}_0 l \ln l + o(l \ln l),$$

$$\bar{I}_1(l) = \int_{\bar{\Gamma}(l)} xy dx = \bar{a}_1 + \bar{b}_1 l \ln l + o(l \ln l),$$

其中 $0 < l \leq 1$, 并且 $\bar{a}_0 \bar{a}_1 \neq 0$, $\bar{a}_0 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_0 \neq 0$.

证明 $\Gamma(0)$ 的方程为

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad -\frac{1}{2} < x < 1.$$

因此

$$\bar{a}_0 = I_0(0) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{6}{5},$$

$$\bar{a}_1 = \bar{I}_1(0) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 x(x-1)(x+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{6}{35},$$

$$\bar{b}_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \bigg|_{(1,0)} = \frac{\partial y}{\partial y} \bigg|_{(1,0)} = 1,$$

$$\bar{b}_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \bigg|_{(1,0)} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} \bigg|_{(1,0)} = 1.$$

直接运算便可证明引理.

定理 6.5 的证明 令

$$\bar{f}_0(l) = f_0\left(\frac{1}{6} - l\right) = c_1 l^{m_1}(1 + O(l)), \quad c_1 \neq 0,$$

$$\bar{f}_1(l) = f_1\left(\frac{1}{6} - l\right) = d_1 l^{m_2}(1 + O(l)), \quad d_1 \neq 0,$$

故

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(l) &= \varphi\left(\frac{1}{6} - l\right) = \bar{f}_0 \bar{I}_0 + \bar{f}_1 \bar{I}_1 \\ &= \bar{a}_0 c_1 l^{m_1}(1 + o(1)) + \bar{a}_1 d_1 l^{m_2}(1 + o(1)) \\ &= O(l^k), \quad 0 < l \ll 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

往下分两种情形来证 $\min(m_1, m_2) \geq k$.

第一种情形: $m_1 \neq m_2$.

由等式(6.10)立刻得 $\min(m_1, m_2) \geq k$.

第二种情形: $m_1 = m_2$.

假设 $m_1 = m_2 = m < k$, 则由等式(6.10), 有

$$\bar{a}_0 c_1 + \bar{a}_1 d_1 = 0. \quad (6.11)$$

由引理 6.6, 有

$$\begin{aligned} \bar{I}_0 &= \bar{a}_0 + \bar{b}_0 l \ln l + o(l \ln l), \\ \bar{I}_1 &= \bar{a}_1 + \bar{b}_1 l \ln l + o(l \ln l). \end{aligned} \quad (6.12)$$

把它们代入等式(6.10), 并利用等式(6.11), 便得

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(l) &= \frac{d_1}{\bar{a}_0} (\bar{a}_0 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_0) l^{m+1} \ln l (1 + o(1)) \\ &= O(l^k), \quad 0 < l \ll 1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

从而 $m \geq k$, 得到矛盾, 故 $\min(m_1, m_2) \geq k$.

若有 $\min(m_1, m_2) > k$, 可把等式(6.10)中的 k 换成 $k+1$, 同理可证 $\min(m_1, m_2) \geq k+1$, 从而最终可证 $\min(m_1, m_2) = k$. 回到原变量 $h = \frac{1}{6} - l$, 定理 6.5 得证. \square

扩充到复域

定理 6.7 定理 6.1 中的 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 都可单值解析地扩充到复域

$$G = \mathbb{C} \setminus \{h \in \mathbb{R} | h \geq \frac{1}{6}\},$$

并且具有以下性质:

(1) $I_0(h) \sim h^{\frac{5}{6}}$, $I_1(h) \sim h^{\frac{7}{6}}$, 当 $h \rightarrow \infty$.

(2) $I_0(0) = 0$, $I_0'(0) \neq 0$; $I_1(0) = I_1'(0) = 0$, $I_1''(0) \neq 0$; $I_0(h)I_1(h) \neq 0$, 当 $h \in G$, $h \neq 0$.

(3) $\operatorname{Im} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} \neq 0$, 当 $h \in \mathbb{R}$, $h > \frac{1}{6}$ (沿上下边界).

定理 6.8 考虑方程

$$I''(h) + p(h)I'(h) + q(h)I(h) = 0. \quad (6.14)$$

$h = h_0$ 是正则奇点的充要条件是: $h = h_0$ 分别是 $p(h)$ 和 $q(h)$ 的次数不大于 1 和 2 的极点, 即(6.14)可写成

$$I''(h) + \frac{p_1(h)}{h - h_0} I'(h) + \frac{q_1(h)}{(h - h_0)^2} I(h) = 0, \quad (6.15)$$

其中 $p_1(h)$ 和 $q_1(h)$ 在 $h = h_0$ 解析.

对无穷远奇点作变换 $\frac{1}{h} = t$, 则有

$$\frac{d}{dh} = -t^2 \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dh^2} = t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t^3 \frac{d}{dt},$$

而方程(6.14)变为

$$t^4 \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right) \right) \frac{dI}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) I = 0,$$

其中 $I(t) = I\left(\frac{1}{t}\right)$. 如果 $p\left(\frac{1}{t}\right) \sim \alpha t$, $q\left(\frac{1}{t}\right) \sim \beta t^2$, 则由定理 6.8, $t=0$ 是上方程的正则奇点, 即无穷远奇点是方程 (6.14) 的正则奇点.

定义 6.9 方程 (6.14) 称为 Fuchs 型方程, 如果它只有正则奇点 (有穷, 无穷).

定理 6.10 ([Gw]) 设 $h = h_0$ 是方程 (6.14) 的正则奇点, 则对充分小正数 γ , 在 $0 < |h - h_0| < \gamma$ 上, (6.14) 的基本解组有以下形式:

$$\omega_1(h) = (h - h_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (h - h_0)^k, \quad (6.16)$$

$$\omega_2(h) = (h - h_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (h - h_0)^k + a\omega_1 \ln(h - h_0), \quad (6.17)$$

其中 a, a_k 和 b_k 是常数; ρ_1 和 ρ_2 是下列判定方程的两个根,

$$\rho(\rho - 1) + p_1(h_0)\rho + q_1(h_0) = 0,$$

$\operatorname{Re} \rho_1 \geq \operatorname{Re} \rho_2, a_0 = 1$. 令 $m = \rho_1 - \rho_2$, 如果 $m \neq 0$, 则 $b_0 = 1$. 令 \mathbb{Z}_+ 表示非负整数集, 如果 $m \in \mathbb{Z}_+$, 则 $b_m = 0$; 如果 $m \notin \mathbb{Z}_+$, 则 $a = 0$. 其它 a_k 和 b_k 的确定可参看高维新的解析理论讲义^[Gw].

由 Picard-Fuchs 方程 (6.4) 可推得

$$I_0(h) = \frac{6}{5}hI_0'(h) - \frac{1}{5}I_1'(h), \quad (6.18)$$

$$I_1(h) = \frac{6}{35}hI_0'(h) + \frac{6}{35}(5h - 1)I_1'(h).$$

及

$$\begin{aligned} I_0''(h) &= -6hI_0''(h) + I_1''(h), \\ I_1''(h) &= -6hI_0''(h) + 6hI_1''(h). \end{aligned} \quad (6.19)$$

最后推得

$$I_0''(h) + \left(\frac{5}{6h-1} - \frac{5}{6h} \right) I_0(h) = 0, \quad (6.20)$$

$$I_1''(h) - \frac{1}{h}I_1'(h) + \left(\frac{35}{6h-1} - \frac{35}{6h} \right) I_1(h) = 0. \quad (6.21)$$

由定理 6.8, $h=0$ 和 $h=\frac{1}{6}$ 都是 (6.20) 和 (6.21) 的正则奇点. 作

变换 $h = \frac{1}{t}$, 得

$$t^4 \frac{d^2 I_0(t)}{dt^2} + 2t^3 \frac{dI_0(t)}{dt} + t^2 \left(\frac{6}{35} + \dots \right) I_0(t) = 0, \quad (6.22)$$

$$t^4 \frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} + 3t^3 \frac{dI_1(t)}{dt} + t^2 \left(\frac{35}{36} + \dots \right) I_1(t) = 0, \quad (6.23)$$

其中 $I_0(t) = I_0\left(\frac{1}{t}\right)$, $I_1(t) = I_1\left(\frac{1}{t}\right)$. 由定理 6.8, $t=0$ 是方程 (6.22) 和 (6.23) 的正则奇点, 故无穷远奇点是方程 (6.20) 和方程 (6.21) 的正则奇点, 由定义 6.9, (6.20) 和 (6.21) 都是 Fuchs 型方程.

下面我们来证明定理 6.7. 为此先利用定理 6.10 来讨论 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 在奇点 $h=0$ 及无穷远处的渐近展式.

方程 (6.20)–(6.23) 在 $0 < |h - h_0| < r$ 上的通解可写成

$$I(h) = C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2, \quad (6.24)$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数, ω_1 和 ω_2 由 (6.16) 和 (6.17) 给出.

对方程 (6.22), 奇点 $t=0$ 的判定方程是

$$\rho(\rho-1) + 2\rho + \frac{5}{36} = \rho^2 + \rho + \frac{5}{36} = 0,$$

解得 $\rho_1 = -\frac{1}{6}$, $\rho_2 = -\frac{5}{6}$. 因 $m = \rho_1 - \rho_2 = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}_+$, 故展式

(6.17) 中的 $a=0$. $I_0(t) \sim t^{-\frac{1}{6}}$ 或 $t^{-\frac{5}{6}}$, 当 $t \rightarrow 0$; 即 $I_0(h) \sim h^{\frac{5}{6}}$ 或 $h^{\frac{1}{6}}$, 当 $h \rightarrow \infty$.

同理, 对方程 (6.23), 奇点 $t=0$ 的判定方程是

$$\rho(\rho-1) + 3\rho + \frac{35}{36} = \rho^2 + 2\rho + \frac{35}{36} = 0,$$

解得 $\rho_1 = -\frac{5}{6}$, $\rho_2 = -\frac{7}{6}$. 因 $m = \rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}_+$, 故展式

(6.17) 中的 $a=0$. $I_1(t) \sim t^{-\frac{5}{6}}$ 或 $t^{-\frac{7}{6}}$, 当 $t \rightarrow 0$; 即 $I_1(h) \sim h^{\frac{7}{6}}$ 或

$h^{\frac{5}{6}}$, 当 $h \rightarrow +\infty$.

由方程(6.18)便知, 应取 $I_0(h) \sim h^{\frac{5}{6}}$ 和 $I_1(h) \sim h^{\frac{7}{6}}$, 当 $h \rightarrow +\infty$. 定理 6.7 中的性质(1)得证.

为求 $I_0(h)$ 在 $h=0$ 附近的展式, 先对方程(6.20)求奇点 $h=0$ 的判定方程 $\rho(\rho-1)=0$ 的根, 得 $\rho_1=1$ 和 $\rho_2=0$. 因 $m=\rho_1-\rho_2=1 \in \mathbb{Z}_+$, 由定理 6.10, $\omega_1(0)=0, \omega_2(0)=b_0=1$. 如果通解(6.24)中的 $C_2 \neq 0$, 便有 $I_0(0)=C_1\omega_1(0)+C_2\omega_2(0)=C_2b_0 \neq 0$, 但此处 $I_0(0)=\int_{\Gamma(0)} ydx=0$, 故必有 $C_2=0$. 即得 $I_0(h)=C_1\omega_1(h)=C_1h+\dots \sim h, I_0'(0) \neq 0, I_0(h)$ 在 $h=0$ 解析. 由于(6.20)除 $h=0, h=\frac{1}{6}$ 外无其它有穷奇点, 故 $I_0(h)$ 可单值解析地扩充到 G .

为求 $I_1(h)$ 在 $h=0$ 附近的展式, 先对方程(6.21)求奇点 $h=0$ 的判定方程 $\rho(\rho-1)-\rho=\rho^2-2\rho=0$ 的根, 得 $\rho_1=2, \rho_2=0$. 因 $m=\rho_1-\rho_2=2 \in \mathbb{Z}_+$, 由定理 6.10, $\omega_1(0)=0, \omega_2(0)=b_0=1$. 如果通解(6.24)中的 $C_2 \neq 0$, 便有 $I_1(0)=C_1\omega_1(0)+C_2\omega_2(0)=C_2b_0 \neq 0$, 但此处 $I_1(0)=\int_{\Gamma(0)} xydx=0$, 故必有 $C_2=0$. 即得 $I_1(h)=C_1\omega_1(h)=C_1h^2+\dots \sim h^2, I_1(0)=I_1'(0)=0, I_1''(0) \neq 0, I_1(h)$ 在 $h=0$ 解析. 由于(6.21)除 $h=0, h=\frac{1}{6}$ 外无其它有穷奇点, 故 $I_1(h)$ 可单值解析地扩充到 G .

下面证明性质(2)中关于 $h \in G, h \neq 0$ 时, $I_0(h)I_1(h) \neq 0$.

令 $L^\pm = \{h \in \mathbb{R} \mid h > \frac{1}{6}\}$ 分别表示区域 G 的从上下两侧逼近的水平边界. 我们断言下列不等式成立:

$$\operatorname{Im} I_0(h) \neq 0, \operatorname{Im} I_1(h) \neq 0, h \in L^\pm. \quad (6.25)$$

由于当 $h \in L^\pm$ 时, 方程(6.4)是一个实解析系统, 故 $(\operatorname{Im} I_0, \operatorname{Im} I_1)$ 是方程(6.4)当 $h \in L^\pm$ 时的一个解. 令 $P(h) = \frac{\operatorname{Im} I_1(h)}{\operatorname{Im} I_0(h)}$, 与 §5

中讨论的情况类似, $P(h)$ 满足下列 Riccati 方程

$$h\left(h - \frac{1}{6}\right)P' = -\frac{7}{36}P^2 + \left(\frac{1}{3}h + \frac{1}{6}\right)P - \frac{1}{6}h. \quad (6.26)$$

考虑(6.26)的等价系统

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\frac{7}{36}P^2 + \left(\frac{1}{3}h + \frac{1}{6}\right)P - \frac{1}{6}h, \\ \frac{dh}{dt} = h\left(h - \frac{1}{6}\right). \end{cases} \quad (6.27)$$

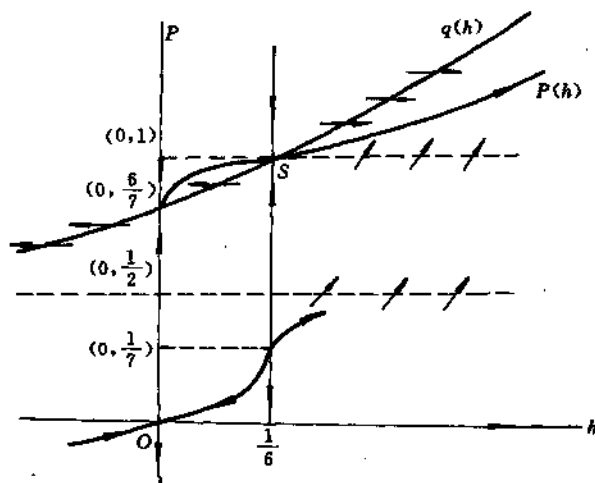


图 2-8

系统(6.27)的相图如图 2-8 所示. 其中点 $S: (h, P) = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$ 是鞍点, 由方程

$$P = q(h) = \frac{6h + 3 + 3\sqrt{4h^2 - \frac{2}{3}h + 1}}{7}$$

所决定的双曲线是过点 S 的水平等倾线. 利用 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 在 h

$= \frac{1}{6}$ 附近的渐近展式, 不难算出当 $h \in L^\pm$ 时

$$\lim_{h \rightarrow 1/6} \frac{\operatorname{Im} I_1(h)}{\operatorname{Im} I_0(h)} = \frac{\bar{b}_1}{b_0} = 1.$$

故 $P(h)$ 是鞍点 S 在 $h > \frac{1}{6}$ 一侧的不稳定流形. 由于 $P(h)$ 介于双曲线 $q(h)$ 与直线 $P = 1$ 之间, 故有

$$1 < P(h) < \infty, \quad h \in L^\pm,$$

因此断言(6.25)得证.

由于 $I_i(h)$ 是复共轭的, 即 $I_i(\bar{h}) = \overline{I_i(h)}$, $i = 1, 2$, 故若它们在 G 中还有其它零点, 必成对出现. 这样再加上断言(6.25)和性质(1), 不难用辐角原理来证明 $I_0(h)I_1(h) \neq 0$, 当 $h \in G, h \neq 0$. 我们将此作为习题.

往下证性质(3): $\operatorname{Im} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} \neq 0$, 当 $h \in \mathbf{R}, h > \frac{1}{6}$.

用反证法. 设

$$\operatorname{Im} \frac{I_1(h^*)}{I_0(h^*)} = 0, \quad \text{其中 } h^* \in \mathbf{R}, h^* > \frac{1}{6}.$$

即

$$\operatorname{Re}(I_0(h_0^*)) \operatorname{Im}(I_1(h^*)) - \operatorname{Re}(I_1(h^*)) \operatorname{Im}(I_0(h^*)) = 0.$$

即向量 $(\operatorname{Im} I_0(h), \operatorname{Im} I_1(h))$ 和向量 $(\operatorname{Re} I_0(h), \operatorname{Re} I_1(h))$ 在 $h = h^*$ 成比例. 由于这两个向量函数当 $h \in \mathbf{R}, h > \frac{1}{6}$ 时都是实线性方程(6.18)的解, 如果它们在一点 $h = h^*$ 时成比例, 则它们将在一切 $h \in \mathbf{R}, h > \frac{1}{6}$ 上成比例, 即 $\frac{I_1(h)}{I_0(h)}$ 在 $h > \frac{1}{6}$ 上取实值. 令 $l = re^{i\theta}$, 代入等式(6.12), 经计算得

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\bar{I}_1(l)}{I_0(l)} \right) \sim c(\bar{a}_0 \bar{b}_1 - \bar{b}_0 \bar{a}_1) \pi l, \quad 0 < r \ll 1,$$

其中 c 为非零常数, 即虚部不为零. 回到原变量 $h = \frac{1}{6} - l$, 此结论仍成立, 即 $\operatorname{Im} \left(\frac{I_1(h)}{I_0(h)} \right) \neq 0$, 当 $0 < \frac{1}{6} - h \ll 1$, 得矛盾. 故反证法

的前题不成立,性质(3)得证. 定理 6.7 证毕. |

Petrov 定理的证明

定理 6.11 ([P1],[P2],[Ma],[LbZ]) 考虑系统(6.2)_μ.

如果 $\deg P(x,y), \deg Q(x,y) \leq n$, 则对同宿轨 $\Gamma(\frac{1}{6})$ 所围成区域的任意紧致邻域 U , 存在 $E > 0$, 当 $|\mu| < E$ 时, U 中极限环个数的最小上界 $B(2,n) = n - 1$.

证明 我们将 U 中的极限环 $L_{h,\mu}$ 分成三类:

- (1) $L_{h,\mu} \rightarrow O(0,0)$, 当 $\mu \rightarrow 0$;
- (2) $L_{h,\mu} \rightarrow \Gamma(h)$, $0 < h < \frac{1}{6}$, 当 $\mu \rightarrow 0$;
- (3) $L_{h,\mu} \rightarrow \Gamma(\frac{1}{6})$, 当 $\mu \rightarrow 0$.

由定理 6.1,

$$\varphi(h) = f_0(h)I_0(h) + f_1(h)I_1(h), \quad 0 < h < \frac{1}{6},$$

其中 $f_0(h)$ 和 $f_1(h)$ 是 h 的多项式, 且 $\deg f_0(h) \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\deg f_1(h) \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

由定理 6.7, $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 可单值解析地扩充到复域 G , 故 $\varphi(h)$ 也可单值解析地扩充到 G .

由定理 6.5, 有

$$\varphi(h) = \left(\frac{1}{6} - h\right)^k (f_0^*(h)I_0(h) + f_1^*(h)I_1(h)), \quad h \in G,$$

其中 $\deg f_0^*(h) \leq \left[\frac{n-1}{2}\right] - k$, $\deg f_1^*(h) \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1 - k$. 此处不妨假设当 $h \in G$ 时, $f_0^*(h)$ 和 $f_1^*(h)$ 无公共零点.

令

$$F(h) = \left(\frac{1}{6} - h\right)^k \left(f_0^*(h) + \frac{I_1(h)}{I_0(h)} f_1^*(h)\right), \quad h \in G.$$

由定理 6.7 的性质(2), $F(h)$ 在 G 上解析. 取区域 $D \subset G$, 其边界 ∂D 满足下列条件:

$$\partial D = C_\beta^+ \cup L_{a\beta}^- \cup C_r^- \cup L_{a\beta}^+.$$

其中

$$C_\beta = \{h \in \mathbb{C} \mid |h| = \beta, \beta \gg 1\},$$

$$C_r = \{h \in \mathbb{C} \mid |h - \frac{1}{6}| = r, 0 < r \ll 1\},$$

$$L_{a\beta} = \{h \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{6} + r \leq h \leq \beta\}.$$

而 C_β^+ 和 C_r^- 分别表示沿 C_β 逆时针和沿 C_r 顺时针方向盘旋, $L_{a\beta}^+$ 和 $L_{a\beta}^-$ 分别表示沿 $L_{a\beta}$ 关于 h 从小到大和从大到小移动.

令 $\rho(F(h))_{\partial D}$ 表示当 h 绕 ∂D 逆时针方向旋转一周时, 由复数 $F(h)$ 所定义的向量盘旋圈数的代数和. 我们先分别估算当 h 沿 ∂D 的每一部分移动时, 相应的 $\rho(F(h))$ 的取值, 则

$$\rho(F(h))_{C_r^-} \leq -k + \frac{1}{6}. \quad (6.28)$$

由定理 6.7 中性质(1),

$$\rho(F(h))_{C_\beta^+} \leq \max\left\{\left[\frac{n-1}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{2}{3}\right\} + \frac{1}{6}.$$

由定理 6.7 中性质(3), 当 h 沿 $L_{a\beta}^+ \cup L_{a\beta}^-$ 移动时, $\operatorname{Im} F(h)$ 至多有 $\deg f_1^*$ 个零点, 故

$$\rho(F(h))_{L_{a\beta}^+ \cup L_{a\beta}^-} \leq \deg f_1^* + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] - k.$$

综合以上各式, 得

$$\rho(F(h))_{\partial D} \leq n - 2k - \frac{1}{3}.$$

由于盘旋圈数为整数, 所以有

$$\rho(F(h))_{\partial D} \leq n - 2k - 1.$$

由辐角原理, $F(h)$ 在 D 中至多有 $n - 2k - 1$ 个零点, 从而 $F(h)$ 在 $0 \leq h < \frac{1}{6}$ 上至多有 $n - 2k - 1$ 个零点. 由定理 6.7 的性质(2),

$\varphi(h)$ 比 $F(h)$ 在 $0 \leq h < \frac{1}{6}$ 上的零点个数多 1, 故 $\varphi(h)$ 在 $0 \leq h < \frac{1}{6}$ 上至多有 $n - 2k$ 个零点. 由定理 6.3, $\varphi(h)$ 在 $0 < h < \frac{1}{6}$ 上至多有 $n - 2k - m - 1$ 个零点. 由定理 5.1, 相应系统至多有 $n - 2k - m - 1$ 个 (2) 类环.

由定理 6.3, 系统至多有 m 个 (1) 类环.

由定理 6.4, 如在展式 (6.8) 中第一个不为 0 的系数是 b_k , 则系统至多有 $2k$ 个 (3) 类环. 综上所述, 得 $B(2, n) \leq n - 1$.

如展式 (6.8) 中第一个不为 0 的系数是 a_{k+1} , 则系统至多有 $2k + 1$ 个 (3) 类环. 此时由 $\bar{\varphi}(l)$ 的展式 (6.13), 可知不等式 (6.28) 变成

$$\rho(F(h))_{C_r} \leq -k - 1 + \frac{1}{6},$$

故 $B(2, n) \leq n - 1$ 仍成立.

往下来证等号成立.

令 P_n 表示次数不大于 n 的多项式向量场空间, 即 $Y = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in P_n$, 其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 都是次数不大于 n 的 x 和 y 的实多项式. 令 $\mathcal{P}_n = \{I_Y(l)\}$, 其中

$$I_Y(l) = \int_{\Gamma(l)} Qdx - Pdy, Y \in P_n, 0 < l < \frac{1}{6}.$$

首先用 [LbZ] 中同样的论证, 在用归纳法推证等式 (6.3) 时, 可一步步地推出, 对一切可能的 n 次多项式 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 满足等式 (6.3) 中的一切多项式 $f_0(h)$ 和 $f_1(h)$ 都是可以实现的.

(1) 设 $n = 2k + 1$. 取 $I(l) = \frac{b_k}{a_0} l^k I_0(l) \in \mathcal{P}_n, b_k \neq 0$. 于是 $I(l) \sim b_k l^k$. 令

$$I(l) = \alpha_1 l^{k-1} I_0(l) + \beta_1 l^{k-1} I_1(l) + I(l) \in \mathcal{P}_n. \quad (6.29)$$

取 $l_1 = l, l_2 = 2l$, 使得

$$\begin{aligned}\alpha_1 l_1^{k-1} \bar{I}_0(l_1) + \beta_1 l_1^{k-1} \bar{I}_1(l_1) &= -I(l_1), \\ \alpha_1 l_2^{k-1} \bar{I}_0(l_2) + \beta_1 l_2^{k-1} \bar{I}_1(l_2) &= -I(l_2).\end{aligned}\quad (6.30)$$

由引理 6.6, 其系数行列式

$$\begin{aligned}W_{k-1}(l) &= \begin{vmatrix} l^{k-1} \bar{I}_0(l) & l^{k-1} \bar{I}_1(l) \\ (2l)^{k-1} \bar{I}_0(2l) & (2l)^{k-1} \bar{I}_1(2l) \end{vmatrix} \\ &= 2^{k-1} (\bar{a}_0 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_0) l^{2k-1} \ln l + o(l^{2k-1} \ln l) \\ &\neq 0, \text{ 当 } 0 < l < T \ll 1.\end{aligned}\quad (6.31)$$

故方程(6.30)有唯一解 (α_1, β_1) , 使得 $I(l_1) = I(l_2) = 0$. 可证 l_1 和 l_2 是 $I(l)$ 的简单零点, 我们将此作为习题留给读者.

由(6.30)可解得

$$\begin{aligned}\alpha_1 W_{k-1}(l) &= l^{k-1} \bar{I}_1(l) I(2l) - (2l)^{k-1} \bar{I}_1(2l) I(l) \\ &= 2^{k-1} \bar{a}_1 b_k l^{2k-1} + o(l^{2k-1}).\end{aligned}$$

将它和(6.31)右侧相比较, 由引理 6.6 便知当 $l \rightarrow 0$ 时, $\alpha_1 \rightarrow 0$. 同理可证, 当 $l \rightarrow 0$ 时, $\beta_1 \rightarrow 0$. 这样便在 $(0, \frac{1}{6})$ 中有了两个简单零点 l_1 和 l_2 , 且它们可任意小, 只要 μ 充分小.

取定了 l_1 和 l_2 后, (α_1, β_1) 也就唯一地确定了. 对于这样的 (α_1, β_1) , 有

$$I^1(l) \sim b_{k-1} l^{k-1}, \quad b_{k-1} \neq 0, \quad 0 < l \ll 1.$$

请读者验证, 此处 $b_{k-1} = -2b_k l_1 \ln 2 / \ln l_1$. 重复以上步骤, 如此继续做下去, 在 k 步以后, 可得 $I^k(l) \in \mathcal{D}_n$, 它在 $(0, \frac{1}{6})$ 中至少有 $2k$ 个互异的简单零点, 回到原变量 $h = \frac{1}{6} - l$, 则 $\varphi(h) = I^k(\frac{1}{6} - h)$ 在 $(0, \frac{1}{6})$ 中便至少有 $2k = n - 1$ 个简单零点.

(2) 设 $n = 2(k + 1)$. 由引理 6.6, 可取 $I(l) = \alpha_1 l^k \bar{I}_0(l) + \beta_1 l^k \bar{I}_1(l) \in \mathcal{D}_n$, 使得 $\alpha_1 \bar{a}_0 + \beta_1 \bar{a}_1 = 0$, $a_k = \alpha_1 \bar{b}_0 + \beta_1 \bar{b}_1 \neq 0$, 于

是 $I(l) \sim a_k l^{k+1} \ln l$, $0 < l \ll 1$. 取 $I(l)$ 在 \mathcal{P}_n 中的充分小扰动

$$I^0(l) = b_k l^k \bar{I}_0(l) + I(l)$$

$$= b_k l^k \left[\bar{a}_0 + \left[\bar{b}_0 + \frac{a_{k+1}}{b_k} \right] l \ln l \right] + o(l \ln l).$$

显然, 存在 $l_0 > 0$, 有 $I^0(l_0) = 0$, 并且当 $b_k \rightarrow 0$ 时, $l_0 \rightarrow 0$. 这样就将情形(2)化归情形(1), 即 $I^0(l) \sim \bar{a}_0 b_k l^k$. 由(1)中的讨论, 可以

构造 $I^k(l)$, 它在 $(0, \frac{1}{6})$ 中至少有 $2k$ 个简单零点, 即 $I(l)$ 在 $(0, \frac{1}{6})$

中至少有 $2k+1 = n-1$ 个简单零点. 回到原变量 $h = \frac{1}{6} - l$, 则

函数 $\varphi(h) = I^k(\frac{1}{6} - h)$ 在 $(0, \frac{1}{6})$ 中至少有 $n-1$ 个简单零点.

由定理 5.1, $\varphi(h)$ 的每个简单零点对应系统 (6.2) $_{\mu}$ 的一条闭轨, 故有 $B(2, n) \geq n-1$, 即等式 $B(2, n) = n-1$ 成立.

习题与思考题二

2.1 向量场奇点的双曲性与非退化性有什么联系, 有什么区别? 光滑向量场的双曲奇点或非退化奇点在向量场的 C^r ($r \geq 1$) 扰动下有何变化规律?

2.2 证明当 $|\mu| \ll 1$ 时, 例 5.5 中的 van der Pol 方程 (5.14) 的唯一闭轨是双曲的.

2.3 若 (2.2) 式中的向量场 X_0 是 n 次多项式系统, 试问定理 2.7 的结论 (2) 能否在 n 次多项式系统 X_{λ} 中实现?

2.4 考虑方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ax^2y + \mu(1-x^2)y,$$

其中 $a \geq 0$, $0 < |\mu| \ll 1$. 请验证定理 3.1 中的条件 (H_1) , (H_2) 和 (H_3) , 并以 $a=0$ 时的情形来说明条件 (H_3) 不能缺少, 否则 $(0,0)$ 可既不是方程组的中心, 其唯一闭轨也不收缩到 $(0,0)$, 当 $\mu \rightarrow 0$.

2.5 确定下列系统中原点作为细焦点的阶数:

$$(1) \quad \dot{x} = -y - 3x^2 + 2xy - y^2, \quad \dot{y} = x + x^2 - 2xy.$$

$$(2) \quad \dot{x} = -y + x^2 + xy, \quad \dot{y} = x + \frac{4}{5}x^2 + 3xy - y^2.$$

2.6 试证明: 当 $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ 时, 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1x - a_2y + y^2, \\ \dot{y} = b_1x + b_2y - xy + cy^2 \end{cases}$$

有两个一阶细焦点的充分必要条件是

$$b_1 = ca_1, a_1 = ca_2, -2 < c < 0.$$

2.7 证明定理 3.15.

2.8 若系统 (6.1) _{μ} 存在双曲闭轨 $L_{\bar{h}, \mu} \rightarrow \Gamma(\bar{h})$, 当 $\mu \rightarrow 0$, 其中 $h_1 < \bar{h} < h_2$, 则有 $\varphi(\bar{h}) = 0$, 试问是否必有 $\varphi'(\bar{h}) \neq 0$?

2.9 试用定理 6.3 来求方程组

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + \mu_1x + \mu_2xy + \mu_3x^2y,$$

当 $\varphi(h) \neq 0$ 时, 细焦点 $(0, 0)$ 的阶数, 其中 $\mu_i (i = 1, 2, 3)$ 是小参数.

2.10 请读者讨论 § 5 中后继函数 $G(h, \mu)$ 和一阶 Mel'nikov 函数 $\varphi(h)$ 对 h 和对 \sqrt{h} 的光滑性问题. 请读者参考引文 [HZ].

2.11 试证 (6.30) 式中的 l_1 和 l_2 都是公式 (6.29) 中 $F(l)$ 的简单零点.

2.12 试证定理 6.7 中的 $I_0(h)$ 和 l_1 除了零点 $h = 0$ 外, 在 G 上无其它零点.

2.13 对系统 (5.15), 试用 § 6 中的递推公式, 导出 $I_0(h)$ 和 $I_1(h)$ 所满足的 Picard-Fuchs 方程.

2.14 若 Hamilton 向量场为 $-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$, $Y \in P_n$, 试求其 Abel 积分零点个数的最小上界, 即求 $Z(2, n)$.

2.15 若 Hamilton 向量场为 $y \frac{\partial}{\partial x} + (-x - x^3) \frac{\partial}{\partial y}$, $Y \in P_n$, 试证 $\Omega = \{I_0, I_1, I_2\}$, 其中 $I_i(h) = \int_{\Gamma(h)} x^i y dx$, $i = 0, 1, 2$, 并用 § 6 中的递推公式求出 $I_i(h) (i = 0, 1, 2)$ 所满足的 Picard-Fuchs 方程.

2.16 考虑二维 Hamilton 向量场的扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - \delta xy^2, \\ \dot{y} = -1 + 2x - \frac{3}{4}x^2 - y^2 + \delta(\lambda_1 xy + \lambda_2 y - y^3), \end{cases}$$

其中 δ 为小参数. 假设由 Abel 积分 (5.12) 定义的一阶 Mel'nikov 函数不恒为零, 且其同宿分岔的最高阶数为 2, 利用定理 6.4 求其一阶和二阶同宿分岔曲线在 (λ_1, λ_2) 平面上的方程 (即对 δ 的一阶近似方程).

第三章 几类余维2的平面向量场分岔

在本章中,我们将综合运用第二章所介绍的几种典型的向量场分岔的理论与方法,讨论向量场在非双曲奇点附近所发生的几类余维2分岔.

考虑以 $\mu \in \mathbf{R}^m (m \geq 2)$ 为参数的向量场族

$$(X_\mu): \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \mu),$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n, f \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$. 无妨设 $x=0$ 是向量场 X_0 的非双曲奇点, 并设 X_0 在该点的线性部分矩阵具有二重退化性. 因此, $f(0,0)=0$, 且把 X_0 化到 $x=0$ 附近的中心流形后, 其线性部分矩阵可化为下列形式之一:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\omega_1, \omega_2 \neq 0, \omega_i \neq k\omega_j, i, j = 1, 2, k = 1, \dots, 5$.

若平面向量场在奇点处的线性部分矩阵有二重零特征根, 并且向量场在旋转 $\frac{2\pi}{q}$ 角度时不变, 则称它有 q 阶对称性, 或称为 $1:q$ 共振. $q=1, 2$ 时, 线性部分矩阵具有 A_1 的形式; $q \geq 3$ 时, 线性部分矩阵具有 A_2 的形式. $q \leq 4$ 称为强共振, $q \geq 5$ 称为弱共振. 除了 $q=4$ 之外, 其它情况的余维2分岔问题都已解决. 本章 §1—§3 分别介绍 $q=1, 2$, 及 $q \geq 5$ 的情形. 在高阶项的适当非退化条件下, 扰动系统 X_μ 具有双参数的普适开折. 主要参考文献

为: $q = 1$ 的余维 2 分岔见 [Bo1, 2] 和 [T], 余维 3、4 的讨论分别见 [DRS1, 2] 和 [LR1]; $q = 2$ 和 $q = 3$ 的余维 2 分岔见 [Ho], $q = 2$ 的余维 3、4 的讨论分别见 [LR2] 和 [Rc]; $q \geq 5$ 的余维 2 分岔见 [T], 对 A_3, A_4 情形的讨论见 [Zo1, 2]. 在专著 [CLW] 和 [HZ] 中有对所有情形的详细介绍.

§ 1 二重零特征根: Bogdanov-Takens 系统

在第一章 § 5 中, 我们讨论过二维 C^∞ 向量场

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(|x, y|^2), \quad (1.1)$$

它具有正规形(见第一章例 4.7)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy \end{pmatrix} + O(|x, y|^3). \quad (1.2)$$

当 $ab \neq 0$ 时, 由第一章定理 5.13, 系统 (1.2) 的任一非退化开折可转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xyQ(x, \mu) + y^2\Phi(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $Q, \Phi \in C^\infty, Q(0, 0) = \pm 1 = \operatorname{sgn}(ab), \mu \in \mathbb{R}^m, m \geq 2$. 为确定起见, 取 $Q(0, 0) = 1$. $Q(0, 0) = -1$ 的情况可类似讨论.

分岔图, 轨线的拓扑分类

下面的定理是本节的第一个主要结果.

定理 1.1 存在 \mathbb{R}^2 中 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 的邻域 Δ , 使系统 (1.3) 在 Δ 中的分岔图由原点 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 以及下列曲线组成:

$$(a) SN^{\pm} = \{\mu | \mu_1 = 0, \mu_2 > 0 \text{ 或 } \mu_2 < 0\};$$

$$(b) H = \{\mu | \mu_1 = -\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0\};$$

$$(c) HL = \left\{ \mu | \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}}), \mu_2 > 0 \right\},$$

其中 SN^{\pm}, H, HL 分别为鞍结点分岔曲线, Hopf 分岔曲线和同宿分岔曲线. 当 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta$ 时, 系统 (1.3) 在相空间原点 $(x, y) =$

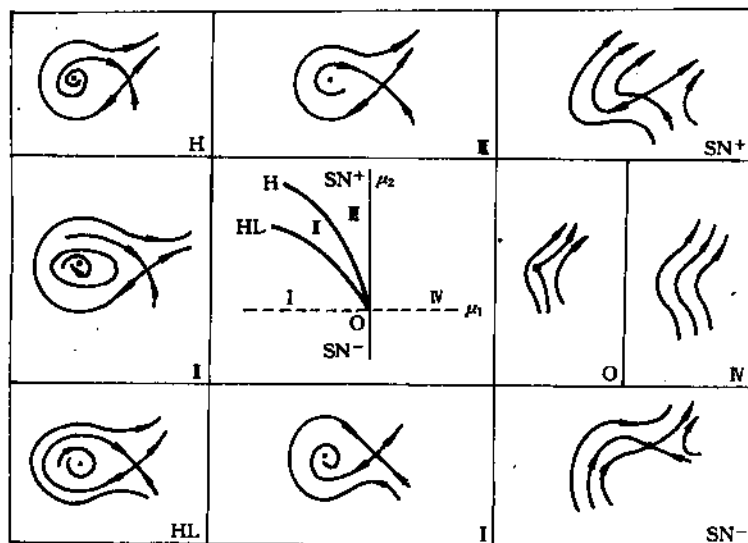


图 3-1

$(0,0)$ 附近的轨道拓扑结构见图 3-1.

为了证明定理 1.1, 注意当 $\mu_1 > 0$ 时, (1.3) 在原点附近无奇点; 而当 $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ 时, 由第二章例 1.6 知发生鞍结点分岔. 因此, 下面要考虑的只是 $\mu_1 < 0$ 的情形. 考虑参数及变量的替换:

$$\mu_1 = -\delta^4, \mu_2 = \xi\delta^2, x = \delta^2\bar{x}, y = \delta^2\bar{y}, t = \frac{\bar{t}}{\delta}, \quad (1.4)$$

其中 $\delta > 0$. 再把 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 写回 (x, y, t) , 则 (1.3) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -1 + x^2 + \delta[(x + \xi) + \delta\Psi(x, y, \delta, \xi)]y. \end{cases} \quad (1.5)_\delta$$

我们可以把 $(1.5)_\delta$ 看成 $(1.5)_0$ 的扰动系统, 后者为 Hamilton 系统, 它有鞍点 $A(1, 0)$ 的同宿轨, 以及该同宿轨所围的以点 $B(-1, 0)$ 为中心的周期环域 (见第二章例 5.6 及图 2-6), 周期环域中的闭轨族可表示为

$$\Gamma_h: \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3} \right\}, \quad (1.6)$$

其中

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}. \quad (1.7)$$

当 $h \rightarrow -\frac{2}{3} + 0$ 时, Γ_h 缩向奇点 B ; 当 $h \rightarrow \frac{2}{3} - 0$ 时, Γ_h 趋于同宿轨与鞍点 A 形成的同宿环 $\Gamma_{\frac{2}{3}}$.

注意对任意的 δ , $(1.5)_\delta$ 都以 A, B 为奇点, 且 A 为鞍点, B 为指标 $+1$ 的奇点. 因此, 若 $(1.5)_\delta$ 存在闭轨, 它必定与线段 $L = \{(x, y) \mid y = 0, -1 < x < 1\}$ 相交. 另一方面, 由于 Γ_h 与 L 的交点 p_h 在 L 上关于 h 单调排列. 因此, 可用 h 把 L 参数化:

$$L: \{p_h \mid p_h = L \cap \Gamma_h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}\}.$$

现在我们任取 $p_h \in L$, 考虑系统 $(1.5)_\delta$ 过 p_h 的轨线. 设它的正向及负向延续分别与 x 轴 (第一次) 交于点 Q_2 与 Q_1 . 记 $\gamma(h, \delta, \xi)$ 为 $(1.5)_\delta$ 从 Q_1 到 Q_2 的轨线段 (见图 3-2).

引理 1.2 当 $\delta > 0$ 时, $\gamma(h, \delta, \xi)$ 是系统 $(1.5)_\delta$ 的闭轨, 当且仅当

$$F(h, \delta, \xi) = \int_{\gamma(h, \delta, \xi)} [(\xi + x) + \delta\Psi(x, y, \delta, \xi)] y dx = 0. \quad (1.8)$$

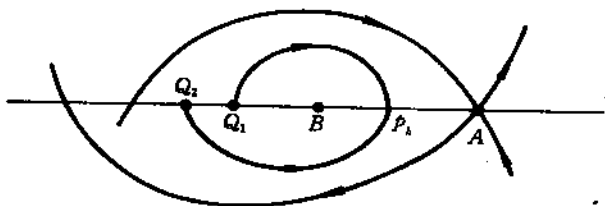


图 3-2

证明 注意当 $|x| < 1$ 时, $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = 1 - x^2 \neq 0$. 因此,

$$\gamma(h, \delta, \zeta) \text{ 为闭轨} \Leftrightarrow Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow H(Q_1) = H(Q_2).$$

另一方面, 由方程 (1.5) _{δ} 可得

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dt} \Big|_{(1.5)_{\delta}} dt &= \delta[(\zeta + x) + \delta\Psi(x, y, \delta, \zeta)]y^2 \Big|_{(1.5)_{\delta}} dt \\ &= \delta[(\zeta + x) + \delta\Psi(x, y, \delta, \zeta)]y dx. \end{aligned}$$

因此

$$H(Q_2) - H(Q_1) = \int_{t(Q_1)}^{t(Q_2)} \frac{dH(x, y)}{dt} \Big|_{(1.5)_{\delta}} dt = \delta F(h, \delta, \zeta). \quad (1.9)$$

由此引理得证. \blacksquare

我们可以用取极限的方法把 $F(h, \delta, \zeta)$ 的定义域扩大到集合

$$U = \left\{ (h, \delta, \zeta) \mid -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \delta \leq \delta_0, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2 \right\}.$$

引理 1.3 ([Bo2]) $\forall \zeta_1, \zeta_2 (\zeta_1 < \zeta_2), \exists \delta_0 > 0$, 使得函数 $F(h, \delta, \zeta)$ 在集合 U 上连续. 此外, F 关于 δ 与 ζ 在 U 上是 C^∞ 的, 关于 h 在集合

$$V = \left\{ (h, \delta, \zeta) \mid -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}, 0 \leq \delta \leq \delta_0, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2 \right\}$$

上是 C^∞ 的.

证明 利用微分方程的解对参数与初值的连续性、可微性定理, F 在 U 上为 C^0 , 在 V 上为 C^∞ . 利用 [ALGM] 关于在中心或焦点附近解对参数的光滑依赖性定理, F 在 $h = -\frac{2}{3}$ 关于 δ, ζ 为 C^∞ ; 利用 [Sh] 关于鞍点分界线对参数的光滑依赖性定理, F 在 $h = \frac{2}{3}$ 关于 δ, ζ 为 C^∞ 的. \blacksquare

从上面的两个引理可得如下推论.

引理 1.4 系统 (1.5) $_{\delta}$ ($\delta > 0$) 存在鞍点 A 的同宿轨, 当且仅当 $F\left(\frac{2}{3}, \delta, \zeta\right) = 0$. \blacksquare

下面, 我们把 $F(h, \delta, \zeta)$ 看作 $F(h, 0, \zeta)$ 的扰动, 注意

$$\begin{aligned} F(h, 0, \zeta) &= \int_{\Gamma_h} (\zeta + x) y dx = \zeta I_0(h) + I_1(h) \\ &= I_0(h)(\zeta - P(h)), \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中 $I_k(h), P(h)$ 如第二章 (5.19) 和 (5.20) 所定义.

引理 1.5 $\exists \sigma_1 > 0$ 和在 $0 \leq \delta \leq \sigma_1$ 定义的函数 $\zeta = \zeta_1(\delta)$, 使当 $\zeta = \zeta_1(\delta)$ 时, 系统 (1.5) $_{\delta}$ 存在鞍点 A 的同宿轨.

证明 由引理 1.4 可得, 系统 (1.5) $_{\delta}$ 存在同宿轨的充要条件为 $F\left(\frac{2}{3}, \delta, \zeta\right) = 0$. 再利用第二章定理 5.7 可知, $F\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{7}\right) = I_0\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{7} - P\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 0$, 并且 $\frac{\partial F}{\partial \zeta}\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{7}\right) = I_0\left(\frac{2}{3}\right) > 0$. 由隐函数定理, $\exists \sigma_1 > 0$, 和在 $0 \leq \delta \leq \sigma_1$ 上定义的函数 $\zeta = \zeta_1(\delta)$, 使 $\zeta_1(0) = \frac{5}{7}$ 并且 $F\left(\frac{2}{3}, \delta, \zeta_1(\delta)\right) = 0$. \blacksquare

引理 1.6 存在 $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \sigma_1$), $\eta_1 > 0$, 并存在 (1.5) $_0$ 的同宿环 $\Gamma_{2/3}$ 的邻域 U_1 , 使得当 $\zeta_1(\delta) < \zeta < \zeta_1(\delta) + \eta_1$, $0 < \delta \leq \delta_1$ 时, (1.5) $_{\delta}$ 在 $\Gamma_{2/3}$ 的 U_1 邻域内含有一个闭轨, 且它是不稳定的极限环; 而当 $\zeta_1(\delta) - \eta_1 < \zeta \leq \zeta_1(\delta)$, $0 < \delta \leq \delta_1$ 时, 系统 (1.5) $_{\delta}$ 在 $\Gamma_{2/3}$

的 U_1 邻域内无闭轨.

证明 由引理 1.5, 当 $\zeta = \zeta_1(\delta)$ 时, $(1.5)_\delta$ 有同宿轨 $\gamma(\delta)$. 我们需要证明同宿分岔对参数 δ 的一致性 (见第二章 §4), 即证明存在 $\delta_1 > 0$ 和 $\eta_1 > 0$, 使得对任意 δ 和 η , 只要 $0 < \delta < \delta_1$, $|\zeta - \zeta_1(\delta)| < \eta_1$, 就有

(1) 与 ζ_1 相应的同宿轨 $\gamma(\delta)$ 的稳定性与 δ 的具体取值无关, 且它在 $\Gamma_{2/3}$ 的某个 U_1 邻域内至多分岔出一个闭轨;

(2) $\gamma(\delta)$ 在扰动下其稳定流形与不稳定流形具有固定的相对位置 (与 δ 的具体取值无关).

我们把系统 $(1.5)_\delta$ 改写为第二章 (4.14) 的形式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \delta) + \delta(\zeta - \zeta_1(\delta))g(x, \zeta, \delta),$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f(x, \delta) = \begin{pmatrix} y \\ -1 + x^2 + \delta(x + \zeta_1(\delta))y \end{pmatrix},$$

$$g(x, \zeta, \delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(1 + O(|\delta| + |\zeta - \zeta_1(\delta)|)) \end{pmatrix}.$$

由于对任意的 δ , 系统的鞍点均在 $(x, y) = (1, 0)$, 而且系统在该点的发散量为

$$T(\delta) = \delta(1 + \zeta_1(\delta) + O(|\delta| + |\zeta - \zeta_1(\delta)|)).$$

注意 $\zeta_1(0) = \frac{5}{7}$, 故存在 $\delta_2 > 0$ 和 $\eta_2 > 0$, 使只要 $0 < \delta < \delta_2$, $|\zeta - \zeta_1(\delta)| < \eta_2$, 就有 $T(\delta) > 0$. 结合第二章定理 4.3 和定理 4.4 可知, 结论 (1) 成立.

重复第二章定理 4.5 的证明, 并注意以 $\zeta - \zeta_1(\delta)$ 代替那里的 μ , 则与第二章 (4.19) 式类似的经 为

$$d(\zeta, \delta) = \delta(\zeta - \zeta_1(\delta))(\bar{\Delta} + O(|\delta| + |\zeta - \zeta_1(\delta)|)),$$

其中

$$\bar{\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(1 + O(|\delta| + |\zeta - \zeta_1(\delta)|)) e^{-\delta \int_0^t (x + \zeta_1(\delta)) y dt} dt.$$

由于沿 $\Gamma_{2/3}$ 与 $\gamma(\delta)$ 都有 $ydx = dx$. 因此, 存在 $\delta_1 \in (0, \delta_2)$ 和 $\eta_1 \in (0, \eta_2)$, 使只要 $0 < \delta < \delta_1$, $|\zeta - \zeta_1(\delta)| < \eta_1$, 就有

$$\bar{\Delta} = \int_{\Gamma_{2/3}} y(1 + O(|\delta| + |\zeta - \zeta_1(\delta)|)) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{2/3}} y dx > 0.$$

所以结论(2)也成立. 引理 1.6 得证. ■

引理 1.7 存在 $\delta_2 > 0, \eta_2 > 0$ 和在 $0 \leq \delta \leq \delta_2$ 定义的函数 $\zeta = \zeta_2(\delta)$, $\zeta_2(0) = 1$, 以及奇点 $B(-1, 0)$ 的邻域 U_2 , 使得当 $\zeta(\delta) - \eta_2 < \zeta < \zeta_2(\delta)$, $0 < \delta \leq \delta_2$ 时, (1.5) _{δ} 在 B 点的 U_2 邻域内恰有一个闭轨, 它是不稳定的极限环, 而当 $\zeta_2(\delta) \leq \zeta < \zeta_2(\delta) + \eta_2$, $0 < \delta \leq \delta_2$ 时, (1.5) _{δ} 在 U_2 邻域内无闭轨.

证明 (1.5) _{δ} 在奇点 $B(-1, 0)$ 的线性部分矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \delta(\zeta - 1) + \delta^2 \Psi(-1, 0, \delta, \zeta) \end{pmatrix},$$

它有特征根 $\alpha(\delta, \zeta) \pm i\beta(\delta, \zeta)$, 其中

$$\alpha(\delta, \zeta) = \frac{1}{2} [\delta(\zeta - 1) + \delta^2 \Psi(-1, 0, \delta, \zeta)],$$

$$\beta(\delta, \zeta) = \frac{1}{2} [8 + O(\delta^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 存在 $\delta_2 > 0$ 和在 $0 \leq \delta \leq \delta_2$ 定义的函数 $\zeta = \zeta_2(\delta)$, 使当 $\zeta = \zeta_2(\delta)$ 时, $\alpha(\delta, \zeta_2(\delta)) = 0$, $\beta(\delta, \zeta_2(\delta)) \neq 0$. 即第二章 §3 中的条件 (H_1^*) 成立. 计算表明,

$$\alpha^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \alpha(\delta, \zeta)}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta = \zeta_2(\delta)} = \frac{1}{2},$$

$$c_1^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \operatorname{Re}[c_1(\delta, \zeta)] \bigg|_{\zeta = \zeta_2(\delta)} = \frac{1}{32}.$$

因此, 第二章 §3 的条件 (H_2^*) , (H_3^*) 也成立, 而引理 1.7 可由第二章推论 3.16 得到. ■

引理 1.8 对任意给定的 ζ_1, ζ_2 , $\frac{5}{7} < \zeta_1 < \zeta_2 < 1$, 存在 $\delta_3 > 0$, 使当 $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$, $0 < \delta \leq \delta_3$ 时, 系统 (1.5) _{δ} 恰有一个闭轨, 它是

不稳定的极限环.

证明 $\forall \zeta^* \in [\zeta_1, \zeta_2]$, 令 $h^* = P^{-1}(\zeta^*)$, 其中函数 $P = P(h)$ 由第二章(5.20)所定义. 由第二章定理5.7, $P'(h) < 0$. 因此, 当 $\zeta_1 < \zeta^* < \zeta_2$ 时, $-\frac{2}{3} < h_1^* \leq h^* \leq h_2^* < \frac{2}{3}$, 其中 $h_1^* = P^{-1}(\zeta_2^*)$, $h_2^* = P^{-1}(\zeta_1^*)$. 由(1.10)及 $P(h^*) = \zeta^*$ 可知

$$F(h^*, 0, \zeta^*) = I_0(h^*)(\zeta^* - P(h^*)) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial h}(h^*, 0, \zeta^*) = I_0'(h^*)(\zeta^* - P(h^*)) - I_0(h^*)P'(h^*) > 0.$$

这里要用到 $I_0'(h^*)$ 的有界性. 事实上, 由第二章(5.23)和本节(1.5)₀ 的第一个方程可知

$$I_0'(h^*) = \int_{\Gamma_{h^*}} \frac{1}{y} dx = \int_{\Gamma_{h^*}} dz = T(h^*),$$

其中 $T(h^*)$ 是 Γ_{h^*} 的周期. 当 $-\frac{2}{3} < h_1^* \leq h^* \leq h_2^* < \frac{2}{3}$ 时, $T(h^*)$ 显然是有界的.

因此, 由隐函数定理可知, 存在 $\delta^* > 0, \eta^* > 0, \sigma^* > 0$, 及在 $0 \leq \delta \leq \delta^*, |\zeta - \zeta^*| \leq \eta^*$ 定义的唯一函数 $h = \bar{h}(\delta, \zeta)$, 使得

$$F(\bar{h}(\delta, \zeta), \delta, \zeta) = 0, \text{ 当 } 0 < \delta \leq \delta^*, |\zeta - \zeta^*| \leq \eta^*.$$

以及

$$\frac{\partial F}{\partial h}(h, \delta, \zeta) > 0, \text{ 当 } 0 < \delta \leq \delta^*,$$

$$|\zeta - \zeta^*| \leq \eta^*, |h - h^*| \leq \sigma^*.$$

再利用区间 $[\zeta_1, \zeta_2]$ 的紧致性, 可找到 $\delta_3 > 0$, 及在 $0 \leq \delta \leq \delta_3, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$ 定义的唯一函数 $h = h_3(\delta, \zeta)$, 满足 $F(h_3(\delta, \zeta), \delta, \zeta) = 0$ 以及 $\frac{\partial F}{\partial h}(h, \delta, \zeta) > 0$, 当 $0 < \delta \leq \delta_3, h_1 \leq h \leq h_2, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$. 这里 $h_1 = P^{-1}(\zeta_2), h_2 = P^{-1}(\zeta_1)$.

由引理1.2知, 上述结论说明, $\forall (\delta_0, \zeta_0), 0 < \delta_0 < \delta_3, \zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2$, 系统(1.5)₀ 有唯一闭轨, 它相应于 $h_0 = h_3(\delta_0, \zeta_0)$, 即 $F(h_0, \delta_0, \zeta_0) = 0$. 为了判断此闭轨的稳定性, 我们考虑 h_0 附近的 h , 则

由(1.9)式可知.

$$H(Q_2) - H(Q_1) = \delta_0 F(h, \delta_0, \zeta_0) = \delta_0 \frac{\partial F}{\partial h}(\bar{h}, \delta_0, \zeta_0)(h - h_0),$$

其中 \bar{h} 介于 h_0 与 h 之间. 由于 $\frac{\partial F}{\partial h}(\bar{h}, \delta_0, \zeta_0) > 0$, 推知相应于 h_0 的闭轨是不稳定的极限环. ■

由引理 1.6 - 1.8 可得下面的定理.

定理 1.9 存在 (μ_1, μ_2) 平面上原点的邻域 Δ_1 , 使当 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_1$ 且介于曲线 H 与曲线 HL 之间时, 系统(1.3)有唯一闭轨, 它是不稳定的极限环. 当 (μ_1, μ_2) 趋于 H 时, 此闭轨缩向奇点 B; 当 (μ_1, μ_2) 趋于 HL 时, 此闭轨变为鞍点 A 的同宿环. 相应的轨线结构见图 3-1.

证明 由引理 1.6 和引理 1.7, 可找到满足要求的 δ_1, η_1 和 δ_2, η_2 . 现在取 $\zeta_1 \in \left(\frac{5}{7}, \frac{5}{7} + \eta_1\right)$, $\zeta_2 \in (1 - \eta_2, 1)$, 对 $[\zeta_1, \zeta_2]$ 应用引理 1.8, 可找到相应的 δ_3 . 取正数 $\delta_4 < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 且足够小, 则 $\forall \delta \in (0, \delta_4), \zeta \in (\zeta_1(\delta), \zeta_2(\delta))$, 系统(1.5) $_{\delta}$ 恰有一个闭轨, 它是不稳定的极限环, 参见图 3-3.

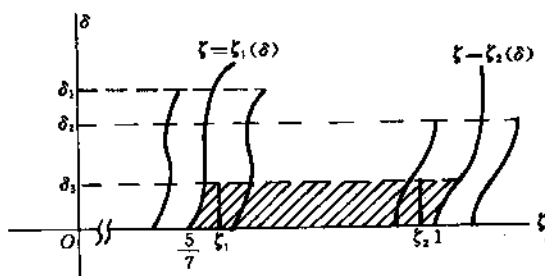


图 3-3

为了从系统(1.5) $_{\delta}$ 返回到系统(1.3), 由变换(1.4)知

$$\mu_1 = -\delta^4, \mu_2 = \zeta\delta^2.$$

因此, 区域 $0 < \delta \leq \delta_4, \zeta_1(\delta) \leq \zeta \leq \zeta_2(\delta)$ 变到 (μ_1, μ_2) 平面的尖形

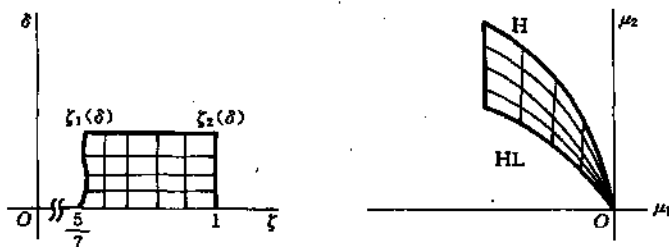


图3-4

区域 $0 > \mu_1 \geq -\delta_1^4$ 且 (μ_1, μ_2) 在曲线 H 与曲线 HL 之间, 参见图 3-4. 事实上, 由于 $\mu_2 = \zeta \delta^2$, 而 $\zeta_1(\delta) = \frac{5}{7}(1 + O(\delta))$, 所以当 $\mu_2 \rightarrow 0^+$ 时, $\delta = O(\mu_2^{1/2})$, 而且 $\zeta = \zeta_1(\delta)$ 转化为

$$\frac{\mu_1}{\mu_2^2} = -\frac{1}{\zeta_1^2(0)(1 + O(\delta))^2} = -\frac{49}{25} + O(\mu_2^{\frac{1}{2}}),$$

即 $\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}})$. 类似地, $\zeta = \zeta_2(\delta)$ 转化为 $\mu_1 = -\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}})$. ■

定理 1.10 存在 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 的邻域 Δ_2 , 使当 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$ 并且在曲线 H 上方或 HL 下方, 则系统 (1.3) 无闭轨.

证明 由定理 1.9 可知, 当 $(\mu_1, \mu_2) \in H$ (或 HL) 时, 相应系统 (1.3) 无闭轨, 而且从线段

$$L = \{(x, y) : -\sqrt{-\mu_1} < x < \sqrt{-\mu_1}, y = 0\}$$

上任一点出发的轨线均为向外 (或向内) 盘旋的螺线. 现在把系统 (1.3) 写成

$$\frac{dx}{dt} = U(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = V(x, y),$$

则当 $y \neq 0$, $|x|, |y|$ 适当小时,

$$\left| \frac{U}{\frac{\partial U}{\partial \mu_2}} \quad \frac{V}{\frac{\partial V}{\partial \mu_2}} \right| = y^2 \left(1 + x \frac{\partial Q}{\partial \mu_2} + y \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_2} \right) > 0. \quad (1.11)$$

注意向量场的奇点为 $(-\sqrt{-\mu_1}, 0)$ 与 $(\sqrt{-\mu_1}, 0)$, 且其任意闭轨(若存在)必与连接此两奇点的线段 L 相交. 因此, 在考虑闭轨的存在性时, 总可以适当选取 Δ_2 , 使 (x, y) 在 origin 附近变动, 从而 (1.11) 成立. 此时, 系统 (1.3) 关于 μ_2 形成广义旋转向量场(见 [ZDHD] 或 [Y1]). $\forall (\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$, 且位于 H 上方, 取 $(\mu_1, \bar{\mu}_2) \in$

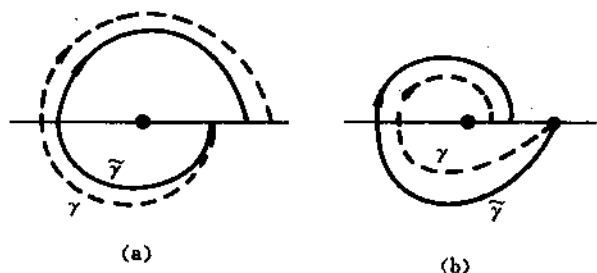


图 3-5

H , 且 $\bar{\mu}_2 < \mu_2$, 则从 L 上同一点出发的相应于 (μ_1, μ_2) 的轨线 γ 必保持在相应于 $(\mu_1, \bar{\mu}_2)$ 的轨线 $\tilde{\gamma}$ 的外侧. 但 $\tilde{\gamma}$ 是外旋的螺线, 因此 γ 不可能成为闭轨(见图 3-5(a)). 同理可证 $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$ 且在 HL 下方的情形(图 3-5(b)).

由定理 1.9, 定理 1.10 及变换 (1.4) 之前对 $\mu_1 \geq 0$ 情形的讨论, 得到定理 1.1 的结论.

普适性的讨论

由定理 1.1 知道, 两个具有 (1.3) 的形式但相应于不同的 Q 与 Φ 的向量场族有相似的分岔图和轨线拓扑分类, 其差异表现在分岔曲线 H 与 HL 的表达式的高阶项 $O(\mu_2^{\frac{5}{2}})$ 中. 这种差异为我们证明它们的等价性, 并进而证明普适性带来困难. 为此, 我们先从几

何上考虑一个较一般的问题.

设 Y_1, Y_2, Y_3 是平面上在原点相切的三条 C^2 曲线, 在适当的坐标 (x, y) 下, 它们有表达式 $y = Y_i(x), i = 1, 2, 3$, 并满足条件

$$Y_i(0) = \frac{dY_i(0)}{dx} = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

以及 $Y_1''(0), Y_2''(0), Y_3''(0)$ 彼此不等. 因此, 可以令

$$I(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{Y_3''(0) - Y_1''(0)}{Y_2''(0) - Y_1''(0)}, \quad (1.12)$$

则适当排列 Y_i 的顺序, 可使 $0 < I(Y_1, Y_2, Y_3) < 1$. 在下面的引理中, 我们对 [Bo1] 的结果作了必要的修改.

引理 1.11 设 Y_i 与 $Z_i, i = 1, 2, 3$, 是两组满足如上要求的曲线, 则 (1) 如果存在原点邻域内的 C^2 变换, 保持原点不动, 并把 Y_i 映到 $Z_i, i = 1, 2, 3$, 则

$$I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3). \quad (1.13)$$

(2) 如果 (1.13) 成立, 则存在原点邻域内的拓扑变换, 把 Y_i 映到 $Z_i, i = 1, 2, 3$.

证明 先证 (1). 设存在 C^2 变换

$$z = f(x, y), \quad u = g(x, y), \quad (1.14)$$

它把曲线 $Y_i: y = y_i(x)$ 变到 $Z_i: z = z_i(u), i = 1, 2, 3$. 因此

$$f(x, y_i(x)) = z_i(g(x, y_i(x)))$$

是对 x 的恒等式, $i = 1, 2, 3$. 把上式对 x 求导, 得到

$$f_x' + f_y' y_i' = z_i'(g_x' + g_y' y_i'), \quad (1.15)$$

再对 x 求导一次, 得到

$$\begin{aligned} f_{xx}'' + 2f_{xy}'' y_i' + f_{yy}'' y_i'^2 + f_y' y_i'' = \\ z_i''(g_x' + g_y' y_i')^2 + z_i'(g_{xx}'' + 2g_{xy}'' y_i' + g_{yy}'' y_i'^2 + g_y' y_i''). \end{aligned} \quad (1.16)$$

由于 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, 且 $y_i(0) = z_i(0) = y_i'(0) = z_i'(0) = 0$, 在 (1.15) 中取 $x = 0$ 可得 $f_x'(0, 0) = 0$. 再由 (1.14) 的非退化性得 $f_y'(0, 0) \neq 0, g_x'(0, 0) \neq 0$, 从而可由 (1.16) 得到

$$z_i''(0) = \frac{f_{xz}''(0,0)}{(g_x'(0,0))^2} + \frac{f_y'(0,0)}{(g_x'(0,0))^2} y_i''(0).$$

把上式代入(1.12) 可得 $I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3)$.

为了证(2), 只须证明在条件(1.13) 下曲线族 $\{Y_i\}$ 和 $\{Z_i\}$, 都可以经拓扑变换化为 $\{X_i\}$, $i = 1, 2, 3$. 这里 X_i 的方程为 $X_1(x) \equiv 0, X_2(x) = x^2, X_3(x) = cx^2, c = I(Y_1, Y_2, Y_3) = I(Z_1, Z_2, Z_3)$. 下面只须对 $\{Y_i\}$ 证明即可. 首先, 容易看出, C^2 变换 $(x, y) \rightarrow (x, y - Y_1(x))$ 把 $\{Y_i\}$ 变到 $\{\tilde{Y}_i\}$, $\tilde{Y}_1(x) \equiv 0, \tilde{Y}_2(x) = \alpha x^2 \xi(x), \tilde{Y}_3(x) = \beta x^2 \eta(x)$, 其中 α, β 为不等的非零常数, ξ 与 η 为 C^0 函数, 满足 $\xi(0) = \eta(0) = 1$. 由前面的结论(1), 可算出 $\frac{\beta}{\alpha} = c$. 再作一次原点附近的拓扑变换 $x \rightarrow x, \tilde{y} \rightarrow \alpha \xi(x) y$, 则 \tilde{Y}_i 变到 \bar{Y}_i , 这里 $\bar{Y}_1(x) \equiv 0, \bar{Y}_2(x) = x^2, \bar{Y}_3(x) = cx^2 \varphi(x)$, 其中 $c = \frac{\beta}{\alpha}, \varphi \in C^2, \varphi(0) = 1$. 由于 $0 < c < 1$, 我们可定义在 $x = 0$ 附近的连续函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\varphi(x)} - 1}{\sqrt{1 - c\varphi(x)}}. \quad (1.17)$$

令区域 $D_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq x^2\} \cup \{(x, y) | x \leq 0\}$, $D_2 = \{(x, y) | x > 0, 0 < y < x^2\}$, $D_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \leq 0\}$. 取 $(x, y) = (0, 0)$ 的充分小邻域 U , 定义变换

$$\begin{cases} u = x, v = y, & \text{当 } (x, y) \in D_1 \cap U; \\ u = x + \sqrt{x^2 - y} f(x), v = y, & \text{当 } (x, y) \in D_2 \cap U; \\ u = x + x f(x), v = y, & \text{当 } (x, y) \in D_3 \cap U. \end{cases} \quad (1.18)$$

此变换把曲线 $y = 0, y = x^2$ 和 $y = cx^2 \varphi(x)$ 分别变到 $v = 0, v = u^2$ 和 $v = cu^2$. 利用 $f \in C^0$ 和 $f(0) = 0$ 可知, (1.18) 在 $U \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ 是保持原点不动的拓扑变换. \square

引理 1.12 对于具有(1.3) 形式相应于不同的 Q, Φ 的两个系统族, 存在 (μ_1, μ_2) 平面上保持原点的 C^2 变换, 它把其中一个系

统族的分岔曲线分别变到另一个系统族的分岔曲线.

证明 对任一(1.3)形式的系统族,由定理 1.1,它的分岔曲线为 $\mu_1 = 0$, $\mu_1 = -\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}})$, 和 $\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + O(\mu_2^{\frac{5}{2}})$, (当 $\mu_2 \rightarrow 0^+$). 因此,由公式(1.12)得 $I(SN_i, H_i, HL_i) = \frac{49}{25}, i = 1, 2$. 由引理 1.12 的结论(2)立即推得本引理成立. \square

引理 1.13 具有(1.3)形式相应于不同 Q, Φ 的两个系统族彼此等价.

证明 设这样的两个系统族分别为

$$(X_1): \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xyQ_1(x, \mu) + y^2\Phi_1(x, y, \mu) \end{cases}$$

和

$$(X_2): \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 y + x^2 + xyQ_2(x, \lambda) + y^2\Phi_2(x, y, \lambda), \end{cases}$$

其中 $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^m, m \geq 2; Q_i, \Phi_i (i = 1, 2)$ 满足(1.3)中 Q, Φ 的条件. 根据引理 1.12, 存在 (μ_1, μ_2) 到 (λ_1, λ_2) 的拓扑变换 $\lambda = \lambda(\mu), i = 1, 2$, 满足 $\lambda_i(0) = 0$, 且把 X_1 的分岔曲线 SN_1^\pm, H_1, HL_1 分别映到 X_2 的相应分岔曲线 SN_2^\pm, H_2, HL_2 . 因此,代替 X_2 , 可考虑系统族 (X_2') :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)y + x^2 + xyQ_2(x, \lambda(\mu)) + y^2\Phi_2(x, y, \lambda(\mu)). \end{cases}$$

这里 $\lambda = \lambda(\mu)$ 表示 $\lambda_1 = \lambda_1(\mu), \lambda_2 = \lambda_2(\mu), \lambda_3 = \mu_3, \dots, \lambda_m = \mu_m$.

这样,当 μ 取遍原点的邻域 Δ 的值时, $\lambda(\mu)$ 取遍原点的邻域 Δ 中的值. $\forall \mu \in \Delta$, 我们可以利用本节前半部分的结果,先建立 X_1

在原点某邻域 $U(\mu)$ 中的极限集(奇点、闭轨、同宿轨)到 X_2' 在原点相应邻域 $U'(\mu)$ 中极限集间的同胚 $h(\mu)$, 然后把此同胚扩展到 $U(\mu)$ 中其它轨道上, 从而建立 X_1 在 $U(\mu)$ 中轨道到 X_2' 在 $U'(\mu)$ 中轨道的同胚. \square

定理 1.14 双参数族

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases} \quad (1.19)$$

是奇异向量场(1.2) ($ab > 0$) 的一个普适开折.

证明 由第一章定理 5.13 知, (1.2) 的任一开折可经过 C^∞ 变换转化为与下列系统等价的系统(指在原点的邻域内)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \varphi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon)y + x^2 + xyQ(x, \varepsilon) + y^2\Phi(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1.20)$$

其中参数 $\varepsilon \in \mathbb{R}^m, m \geq 2$, 函数 $\varphi, \psi, Q, \Phi \in C^\infty, \varphi(0) = \psi(0) = 0, Q(0, 0) = 1$. 与(1.20)相联系, 考虑含有 $m + 2$ 个参数的系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 y + x^2 + xyQ(x, \varepsilon) + y^2\Phi(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1.21)$$

其中 (λ_1, λ_2) 是独立的参数. 如果我们把(1.19)看成是含 $m + 2$ 个参数的系统(除 μ_1, μ_2 外, 另外 m 个参数 ε 不显含), 则由引理 1.13 及其证明过程可知, 存在 (μ_1, μ_2) 与 (λ_1, λ_2) 之间保持原点的拓扑变换 $\mu_1 = \mu_1(\lambda_1, \lambda_2), \mu_2 = \mu_2(\lambda_1, \lambda_2)$, 使得对每一个固定的 (λ_1, λ_2) , 系统(1.21)与系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu_1(\lambda_1, \lambda_2) + \mu_2(\lambda_1, \lambda_2)y + x^2 + xy \end{cases} \quad (1.22)$$

拓扑等价, 这里把(1.22)看成含参数 ϵ 的系统. 特别地, 在(1.21)与(1.22)中分别取 $\lambda_1 = \varphi(\epsilon)$, $\lambda_2 = \psi(\epsilon)$, 则(1.21)转化为(1.20), 而(1.22)变为(1.19)的一个导出族(见第一章定义 5.5, 此时把(1.19)看成一个双参数系统族). 这就是说, (1.2)的任一开折, 都与(1.19)的某一导出族等价. 按第一章定义 5.6, (1.19)是系统(1.2)的一个普适开折. ■

§2 二重零特征根: 1:2 共振问题

由第一章习题 1.4, 在奇点(0,0)的线性部分矩阵为幂零阵, 并且在旋转角度 π 下不变的平面向量场具有如下的三次正规形:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ax^3 + bx^2y. \quad (2.1)$$

为了陈述简洁, 我们在这里只考虑三次正规形而去掉了高阶项. 事实上, 在本节的基本假设 $ab \neq 0$ 下, 保留高阶项对整个讨论没有本质的影响(可参考 §1).

当 $ab \neq 0$ 时, 可经尺度变换, 把(2.1)化为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \pm x^3 - x^2y, \quad (2.2)^{\pm}$$

这里正负号的选取与 ab 的符号有关. 与 §1 中的方程(1.2), (1.3)不同, 这里取正号与取负号的结果是不同的.

类似于第一章定理 5.13, 有下面的结果.

引理 2.1 对于(2.2) $^{\pm}$ 的任一个旋转角度 π 不变的 C^{∞} 开折, 都可以经过 C^{∞} 变换, 在相空间与参数空间原点的小邻域内, 把此开折化成与下列向量场等价的形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \varphi(\mu)x + \psi(\mu)y \pm x^3 + x^2y\Phi(x, \mu) + y^2\Psi(x, y, \mu), \end{cases} \quad (2.3)^{\pm}$$

其中 $\varphi, \psi, \Phi, \Psi \in C^\infty, \varphi(0) = \psi(0) = 0, \Phi(0, 0) = -1$. \blacksquare

设 $\mu \in \mathbb{R}^n, m \geq 2, \varphi(\mu), \psi(\mu)$ 是独立的, 则可进一步经过参数空间的变换, 把 (2.3) $^\pm$ 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y \pm x^3 + x^2 y \Phi(x, \varepsilon) + y^2 \Psi(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.4)^\pm$$

其中 $\Phi, \Psi \in C^\infty, \Phi(0, 0) = -1$. 与 §1 类似的讨论可得, (2.4) $^\pm$ 的分岔规律及轨线拓扑分类与 Φ, Ψ 的具体取法无关. 而最简的取法为 $\Phi \equiv -1, \Psi \equiv 0$, 即

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y \pm x^3 - x^2 y. \quad (2.5)^\pm$$

本节的主要结果是

定理 2.2 ([Ho]) (1) 在旋转角度 π 下不变的开折中, 系统 (2.5) $^\pm$ 是系统 (2.2) $^\pm$ 的普适开折.

(2) (2.5) $^+$ 的分岔图由 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 平面上的原点及下列曲线组成:

pitchfork 分岔曲线 $R^+ = \{\varepsilon | \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0 \text{ 或 } \varepsilon_2 < 0\}$;

Hopf 分岔曲线 $H = \{\varepsilon | \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 < 0\}$;

异宿分岔曲线 $HL = \left\{ \varepsilon | \varepsilon_2 = -\frac{1}{5}\varepsilon_1 + O(|\varepsilon_1|^{\frac{3}{2}}), \varepsilon_1 < 0 \right\}$.

(2.5) $^+$ 的轨线拓扑分类见图 3-6.

(3) (2.5) $^-$ 的分岔图由 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 平面上的原点及下列曲线组成:

pitchfork 分岔曲线 $R^\pm = \{\varepsilon | \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0 \text{ 或 } \varepsilon_2 < 0\}$;

Hopf 分岔曲线 $H_1 = \{\varepsilon | \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 < 0\}$;

Hopf 分岔曲线 $H_2 = \{\varepsilon | \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}), \varepsilon_1 > 0\}$;

同宿分岔曲线 $HL = \left\{ \varepsilon | \varepsilon_2 = \frac{4}{5}\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}), \varepsilon_1 > 0 \right\}$;

二重闭轨分岔曲线 $B = \{\varepsilon | \varepsilon_2 = c\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}), \varepsilon_1 > 0\}$,

其中 $c \approx 0.752$. (2.5) $^-$ 的轨线拓扑分类见图 3-7.

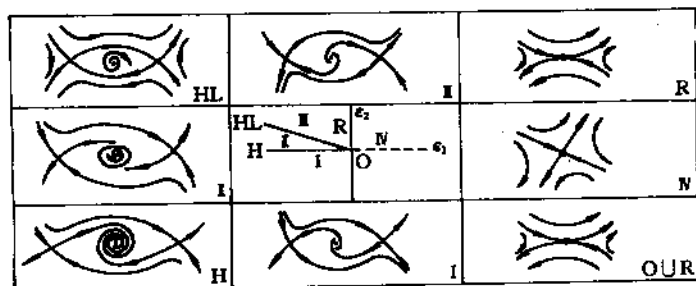


图 3-6

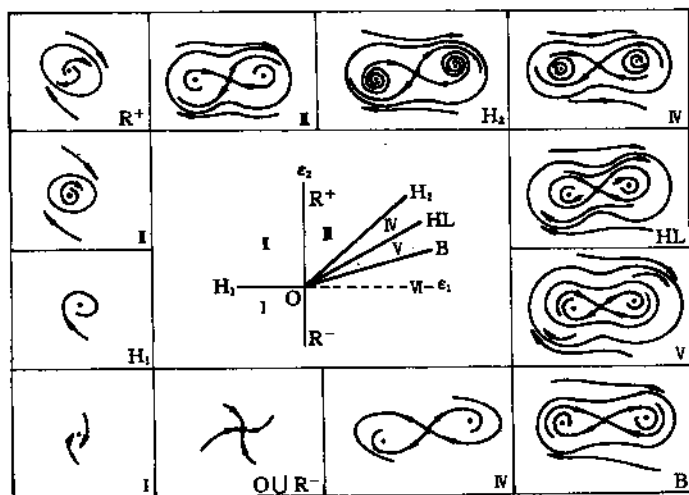


图 3-7

对 $(2.5)^+$ 的讨论与 §1 很相似, 所以下面仅对 $(2.5)^-$ 的情形

作一简要介绍,特别是要指出与 §1 的不同之处.

首先, $(2.5)^-$ 的奇点满足 $y=0$ 及 $\epsilon_1 x - x^3 = 0$. 与第一章例 2.6 对照易知,当 $\epsilon_1 = 0 (\epsilon_2 \neq 0)$ 时发生 pitchfork 分岔.

其次考察 $\epsilon_1 < 0$ 的情形. 这时 $(x, y) = (0, 0)$ 是 $(2.5)^-$ 的唯一奇点,并且在该点的线性部分矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{pmatrix}.$$

当 $\epsilon_2 = 0, \epsilon_1 < 0$ 时,作变换 $x = \bar{x}, y = \sqrt{-\epsilon_1} \bar{y}$, 则对变换后的方程应用第二章公式 (3.3) 可得, $\text{Re}(c_1) = -\frac{1}{8} < 0$. 因此,由第二章定理 3.1 知,在曲线 H_1 上发生 Hopf 分岔.

最后考察 $\epsilon_1 > 0$ 的情形. 此时进行变换

$$\epsilon_1 = \delta^2, \epsilon_2 = \delta^2 \zeta; \quad x = \delta \bar{x}, y = \delta^2 \bar{y}, t = \frac{\bar{t}}{\delta}. \quad (2.6)$$

然后记 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 为 (x, y, t) , 则 $(2.5)^-$ 转化为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3 + \delta(\zeta - x^2)y. \quad (2.7)$$

它可以看作是 Hamilton 系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3 \quad (2.8)$$

当 $0 < \delta \ll 1$ 时的扰动系统. 系统 (2.8) 有首次积分

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = h. \quad (2.9)$$

记 $\Gamma_h = \{(x, y) | H(x, y) = h\}$. 当 $-\frac{1}{4} < h < 0$ 时, Γ_h 是围绕两奇点 $(-1, 0), (1, 0)$ 的两条对称闭轨; 当 $h \rightarrow -\frac{1}{4}$ 时, 它们分别缩向这两个奇点; 当 $h \rightarrow 0^+$ 时, 它们扩大而形成鞍点 $(0, 0)$ 的对称双同宿轨 Γ_0 ; 当 $h > 0$ 时, Γ_h 是围绕三个奇点及 Γ_0 的闭轨. 以上分布见图 3-8. 若令 $L = L_1 \cup L_2$, 其中

$$L_1 = \{(x, y) | y = 0, 0 \leq x \leq 1\},$$

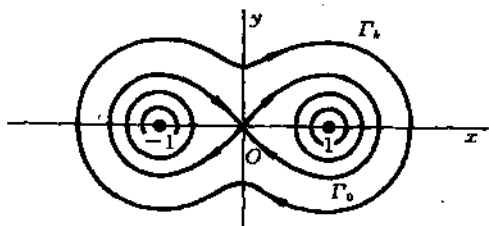


图 3-8

$$L_2 = \{(x, y) | x = 0, y > 0\},$$

则当 $-\frac{1}{4} \leq h \leq 0$ 时, Γ_h 与 L 相交于唯一的点 $p_h = (\alpha(h), 0)$; 当 $h > 0$ 时, Γ_h 与 L 相交于唯一的点 $p_h = (0, \beta(h))$. 因此 L 可被 h 参数化.

现在考虑扰动系统 (2.7). $\forall 0 < \delta \ll 1$, 点 $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ 仍是奇点. 如果对 (2.7) 的对称闭轨只考虑落在右半平面的部分, 则 (2.7) 的闭轨必然与 L 相交, 取 $p_h \in L$, 记系统 (2.7) 过 p_h 的轨线沿时间正, 负向延伸分别与正 x 轴的 (第一次) 交点为 Q_2 与 Q_1 , 再记 $\gamma(h, \delta, \zeta)$ 为从 Q_1 到 Q_2 的轨线段, 见图 3-9. 则与 §1 引理 1.2—1.4 类似可得

引理 2.3 $\forall 0 < \delta \ll 1, \gamma(h, \delta, \zeta)$ 是系统 (2.7) 的闭轨, 当且仅当

$$F(h, \delta, \zeta) = \int_{\gamma(h, \delta, \zeta)} (\zeta - x^2) y dx = 0; \quad (2.10)$$

而且 γ 成为 (2.7) 的同宿 (双同宿) 轨, 当且仅当 $F(0^-, \delta, \zeta) = 0$ (或 $F(0^+, \delta, \zeta) = 0$). \square

为了研究分岔函数 $F(h, \delta, \zeta)$ 对 h 的零点个数, 先考察函数

$$F(h, 0, \zeta) = \int_{\Gamma_h} (\zeta - x^2) y dx = \zeta I_0(h) - I_2(h), \quad (2.11)$$

其中 $I_k(h) = \int_{\Gamma_h} x^k y dx, k = 0, 2$. 与第二章中 (5.18) — (5.20) 的

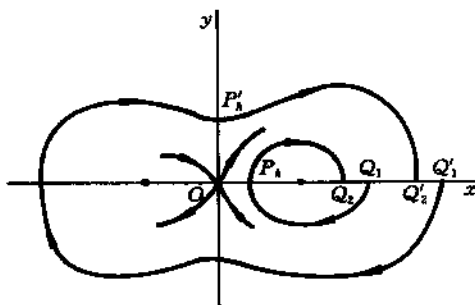


图 3-9

结果类似,容易得到

引理 2.4 (1) 当 $h > -\frac{1}{4}$ 时, $I_0(h) > 0$;

(2) $I_0\left(-\frac{1}{4}\right) = I_2\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$; $\lim_{h \rightarrow -1/4} \frac{I_2(h)}{I_0(h)} = 1$. \blacksquare

因此可定义

$$P(h) = \begin{cases} \frac{I_2(h)}{I_0(h)}, & \text{当 } h > -\frac{1}{4}, \\ 1, & \text{当 } h = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

从而(2.11)成为

$$F(h, 0, \zeta) = I_0(h)(\zeta - P(h)). \quad (2.12)$$

引理 2.5 函数 $P(h)$ 有如下性质

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} P(h) = \frac{4}{5}$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} P(h) = +\infty$;

(2) $\exists h^* > 0$, 当 $-\frac{1}{4} \leq h < h^*$ 时 $P'(h) < 0$, 而当 $h > h^*$ 时 $P'(h) > 0$;

(3) $P(h^*) > \frac{1}{2}$, $P'(h^*) = 0$, $P''(h^*) > 0$. \blacksquare

与 §1 中函数 $P(h)$ 不同的是, 这里的 $P(h)$ 不是单调的, 上面

的性质(3) 将导致二重闭轨(半稳定极限环)的存在. 我们可以从

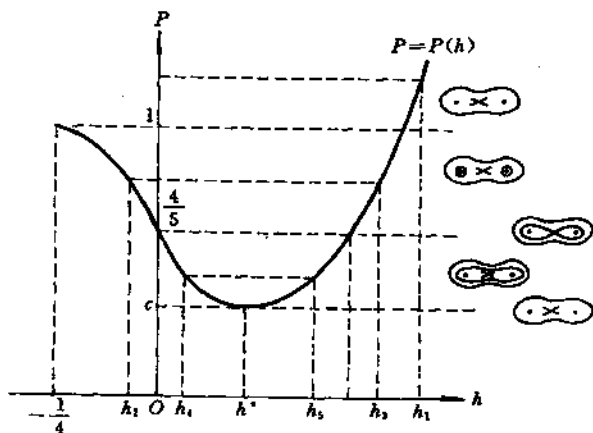


图 3-10

$P(h)$ 的图形粗略推得(2.7) 轨线的拓扑分类, 见图 3-10. 事实上, 从(2.12) 可知, 研究 $F(h, 0, \zeta)$ 的零点可用直线 $\zeta = \text{常数}$ 去截 $\zeta = P(h)$ 的图形. 当 $\zeta_0 > 1$ 时, 截得的交点相应于 $h_1 > 0$, 它对应于系统的环绕三个奇点的“大极限环”; 当 $\frac{4}{5} < \zeta_0 < 1$ 时, 截得两个交点的横坐标分别为 $-\frac{1}{4} < h_2 < 0$ 和 $h_3 > 0$, 前者相应于一对对称的“小极限环”, 后者相应于一个“大极限环”; 当 $\zeta_0 = \frac{4}{5}$ 时, 系统出现双同宿轨, 且外侧仍有一个“大极限环”; 而当 $c < \zeta_0 < \frac{4}{5}$ ($c = P(h^*)$) 时, 两个交点的横坐标 $h_4, h_5 > 0$, 系统出现两个“大极限环”; 当 $\zeta_0 \rightarrow c$ 时, 这两个“大极限环”合为一个半稳定环; 当 $\zeta_0 < c$

时,极限环消失.

以上仅从 $F(h, \delta, \zeta)$ 的一阶近似 $F(h, 0, \zeta)$ 来讨论的. 严格的数学论证要利用(对参数一致的)Hopf 分岔定理, 同宿分岔定理, 隐函数定理等等.

对于具有“8 字型”双同宿轨的平面系统(见图 3-8), 在 [Lw] 中证明: 它在一般三参数扰动下至多可出现 5 个极限环.

§ 3 二重零特征根: $1:q$ 共振问题 ($q \geq 5$)

由第一章习题 1.5, 以 $(0, 0)$ 为奇点并具有二重零特征根, 旋转 $\frac{2\pi}{q}$ ($q \geq 3$) 不变的向量场具有如下的复正规形

$$\frac{dz}{dt} = c_1 z^2 \bar{z} + c_2 z^3 \bar{z}^2 + \cdots + c_m z^{m+1} \bar{z}^m + A z^{q-1} + O(|z|^q), \quad (3.1)$$

其中 z, c_j, A 是复数, 整数 $m = [\frac{q-1}{2}]$.

若 $\operatorname{Re} c_1 \neq 0, A \neq 0$, 则 (3.1) 是余维 2 的, 它的一个普适开折为

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon z + c_1 z^2 \bar{z} + c_2 z^3 \bar{z}^2 + \cdots + c_m z^{m+1} \bar{z}^m + A z^{q-1}, \quad (3.2)$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, c_j = a_j + ib_j$. 由于 $a_1 \neq 0, A \neq 0$, 总可对 z, t 作变换化为 $A = 1, a_1 = -1$ 的情形, 再利用极坐标变换, 可把 (3.2) 化为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon_1 r - r^3 + a_2 r^5 + \cdots + a_m r^{2m+1} + r^{q-1} \cos(q\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon_2 + b_1 r^2 + b_2 r^4 + \cdots + b_m r^{2m} - r^{q-2} \sin(q\theta). \end{cases} \quad (3.3)$$

显然, 当 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0$ 时, 发生 Hopf 分岔. 若 $\varepsilon_1 < 0$, 则由 (3.3) 的第一个方程可知, 在 $r = 0$ 的小邻域内的所有轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 均趋于唯一的奇点 $r = 0$. 当 $\varepsilon_1 > 0$ 时, 作变换

$$\varepsilon_1 = \delta^2, \varepsilon_2 = \delta^2 \zeta, r = \delta \rho, t = \frac{\bar{t}}{\delta^2}, \quad (3.4)$$

其中 $\delta > 0$. 将 \bar{t} 仍写成 t . 下面假设 $q \geq 5$, 则 (3.3) 化为

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2) + \delta f(\delta, \rho, \theta) = R(\rho, \theta, \delta), \\ \frac{d\theta}{dt} = \zeta + b_1 \rho^2 + \delta g(\delta, \rho, \theta) = \Theta(\rho, \theta, \delta), \end{cases} \quad (3.5)$$

其中

$$f(\delta, \rho, \theta) = a_2 \delta \rho^2 + \dots + a_m \delta^{2m-3} \rho^{2m+1} + \delta^{q-5} \rho^{q-1} \cos(q\theta),$$

$$g(\delta, \rho, \theta) = b_2 \delta \rho^2 + \dots + b_m \delta^{2m-3} \rho^{2m} - \delta^{q-5} \rho^{q-2} \sin(q\theta).$$

当 $\delta = 0$ 时, (3.5) 成为

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = \zeta + b_1 \rho^2. \quad (3.6)$$

此系统有唯一的不变环 $\Sigma = \{(\rho, \theta) | \rho = 1\}$, 它是吸引的. 当 $\zeta + b_1 \neq 0$ 时, 它是一稳定的极限环; 当 $\zeta + b_1 = 0$ 时, 其上充满了奇点. 记 Φ_δ 为 (3.5) ($\delta > 0$) 的流的时间 1 映射, [RT] 证明了, 存在 $\bar{\delta} > 0$ (相应地, 由 (3.4), 存在 $\bar{\varepsilon}_1 > 0$) 使得对每一个 $\delta \in (0, \bar{\delta})$, (相应地 $\varepsilon_1 \in (0, \bar{\varepsilon}_1)$), 流形列 $\Phi_\delta^n(\Sigma)$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时趋于 (3.5) 的一个不变流形 Σ_δ^* , 它是 (3.5) 的一个吸引的不变环, 而系统 (3.5) 的动力学行为完全由此系统在这个不变环上的性质所决定. 记 $L = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) | \varepsilon_2 = -b_1 \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0\}$ (即 $\zeta + b_1 = 0$, 见 (3.4)), 则下面要证明: 存在曲线 SN_1 和 SN_2 , 它们从两侧与 L 在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ 相切, 并在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ 附近形成一尖状区域 Ω (见图 3-11), 当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in SN_1$ 时, (3.3) 在 Σ_δ^* 上有 q 个鞍结点; 当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 进入 Ω 后, 它们分解成 q 个鞍点和 q 个结点; 当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in SN_2$, 这 $2q$ 个奇点又组合成 q 个新的鞍结点, 但 Σ_δ^* 上的流向与 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in SN_1$ 时相反; 而当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 在 Ω 之外时, Σ_δ^* 上无奇点, 即它是 (3.3) 的极限环.

既然奇点的分岔现象发生在不变环上, 由第二章定义 1.1, 定理 1.2 和附注 1.3 可知, 对每一固定的 $\delta > 0$, 发生这种分岔的奇点

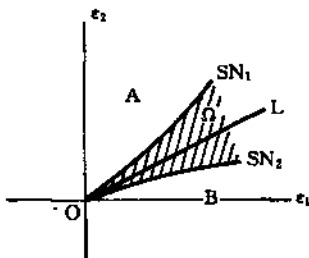


图 3-11

(ρ, θ) 必满足

$$R(\rho, \theta, \delta) = \Theta(\rho, \theta, \delta) = \det \left(\frac{\partial(R, \Theta)}{\partial(\rho, \theta)} \right) = 0, \quad (3.7)$$

其中 R, Θ 是 (3.5) 右端的函数. 由于

$$\det \left(\frac{\partial(R, \Theta)}{\partial(\rho, \theta)} \right) = q\delta^{q-4}\rho^{q-2}D(\rho, \theta, \delta),$$

其中

$$D(\rho, \theta, \delta) = (3\rho^2 - 1)\cos(q\theta) + 2b_1\rho^2\sin(q\theta) + O(\delta). \quad (3.8)$$

因此, (3.7) 可改写成

$$R(\rho, \theta, \delta) = \Theta(\rho, \theta, \delta) = D(\rho, \theta, \delta) = 0. \quad (3.9)$$

下面, 我们在 $(\rho, \theta, \zeta, \delta)$ 空间的集合

$$W = \{(\rho, \theta, \zeta, \delta) \mid \rho = 1, 0 \leq \theta < 2\pi, \zeta = -b_1, \delta = 0\}$$

附近考察 (3.9) 的解.

由 (3.5) 的第一个方程及隐函数定理易知, 在 W 附近, 集合 $\{(\rho, \theta, \zeta, \delta) \mid R = 0\}$ 有表达式 $\{\bar{\rho}(\theta, \zeta, \delta), \theta, \zeta, \delta\}$, 其中 $\bar{\rho} = 1 + O(\delta)$.

由 (3.8) 知 $D|_{\delta=0} = 0$ 在 W 附近对 θ 有 $2q$ 个根. 因此, 集合 $\{(\rho, \theta, \zeta, \delta) \mid R = 0, D = 0\}$ 在 W 附近具有以下形式:

$$\bigcup_{j=0}^{2q-1} \{\bar{\rho}_j(\zeta, \delta), \theta_j(\zeta, \delta), \zeta, \delta\},$$

其中 $\bar{\theta}_j, \bar{p}_j (j = 0, 1, \dots, 2q-1)$ 满足以下条件,

$$(1) \bar{\theta}_j(\zeta, \delta) = \beta_0 + \frac{\pi}{q}j + O(\delta), \text{ 其中 } \beta_0 \text{ 满足}$$

$$\cos(q\beta_0) + b_1 \sin(q\beta_0) = 0; \quad (3.10)$$

$$(2) \bar{p}_{j+2} = \bar{p}_j \text{ 且 } \bar{\theta}_{j+2} = \bar{\theta}_j + \frac{2\pi}{q} \text{ (方程的对称性);}$$

$$(3) \bar{p}_j = 1 + O(\delta).$$

我们先估计 $\bar{p}_1 - \bar{p}_0$. 由于 $\frac{d\rho}{d\zeta}(\bar{p}_0, \bar{\theta}_0, \zeta, \delta) = \frac{d\rho}{d\zeta}(\bar{p}_1, \bar{\theta}_1, \zeta, \delta) = 0$, 得到

$$\bar{p}_0 - \bar{p}_0^3 + \delta^{q-4} \cos(q\beta_0) =$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_1^3 + \delta^{q-4} \cos(\beta_0 q + \pi) + O(\delta^{q-3}),$$

整理得

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_0)[1 - (\bar{p}_1^2 + \bar{p}_1\bar{p}_0 + \bar{p}_0^2)] = 2\delta^{q-4} \cos(q\beta_0) + O(\delta^{q-3}),$$

从而

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_0 = -\delta^{q-4} \cos(q\beta_0) + O(\delta^{q-3}). \quad (3.11)$$

由 (3.10) 知 $\cos(q\beta_0) \neq 0$. 因此 $\bar{p}_1 - \bar{p}_0 = O(\delta^{q-4})$.

最后, 考虑集合 $\{(\rho, \theta, \zeta, \delta) | R = 0, D = 0, \Theta = 0\}$, 注意

$$\Theta|_{R=0, D=0} = \zeta + b_1 \bar{p}_j^2 + O(\delta),$$

因此, 存在函数 $M_j(\delta), j = 0, 1, \dots, 2q-1$, 使

$$\Theta(\bar{p}_j(M_j(\delta), \delta), \bar{\theta}_j(M_j(\delta), \delta), M_j(\delta), \delta) = 0. \quad (3.12)$$

由对称性知, $M_{j+2}(\delta) = M_j(\delta)$. 下面估计 $M_1(\delta) - M_0(\delta)$. 在等式 (3.12) 中取 $j = 0, 1$ 得

$$M_1(\delta) + b_1 \bar{p}_1^2(M_1(\delta), \delta) - \delta^{q-4} \sin(q\beta_0 + \pi)$$

$$= M_0(\delta) + b_1 \bar{p}_0^2(M_1(\delta), \delta) - \delta^{q-4} \sin(q\beta_0) + O(\delta^{q-3}).$$

利用 (3.12) 和 $\bar{p}_j = 1 + O(\delta)$ 整理上式可得

$$M_1(\delta) - M_0(\delta) = 2\delta^{q-4} [b_1 \cos(q\beta_0) - \sin(q\beta_0)] + O(\delta^{q-3}).$$

再由 (3.10) 知 $\sin(q\beta_0) \neq 0$, 并且

$$\xi \equiv 2[b_1 \cos(q\beta_0) - \sin(q\beta_0)] = -2(b_1^2 + 1) \sin(q\beta_0) \neq 0.$$

总结上面的讨论可得

引理 3.1 ([T]) 在 $(\rho, \theta, \zeta, \delta)$ 空间中 W 的邻域内, 集合

$$\{(\rho, \theta, \zeta, \delta) | R = \theta = D = 0\}$$

由 $2q$ 条曲线组成, 它们在 (ζ, δ) 平面上的投影由二条曲线 $\{M_j(\delta), \delta\} (j = 1, 2)$ 组成, 满足 $M_1(\delta) - M_2(\delta) = \xi \delta^{q-4} + O(\delta^{q-3})$, 其中常数 $\xi \neq 0$.

定理 3.2 系统族 (3.3) 的分岔图由 (ϵ_1, ϵ_2) 空间中的原点及下列曲线组成:

Hopf 分岔曲线 $H^\pm = \{\epsilon | \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 > 0 \text{ 或 } \epsilon_2 < 0\}$;

鞍结点分岔曲线 $SN_j = \{\epsilon | \epsilon_1 = s^2, \epsilon_2 = h_j(s), s \text{ 为参数}\}$,
 $j = 1, 2$, 其中 $h_j(s)$ 满足 $h_j(0) = 0$, 而且

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h_2(s) - h_1(s)}{s^{q-2}} \neq 0. \quad (3.13)$$

(3.3) 的轨线拓扑分类见图 3-12.

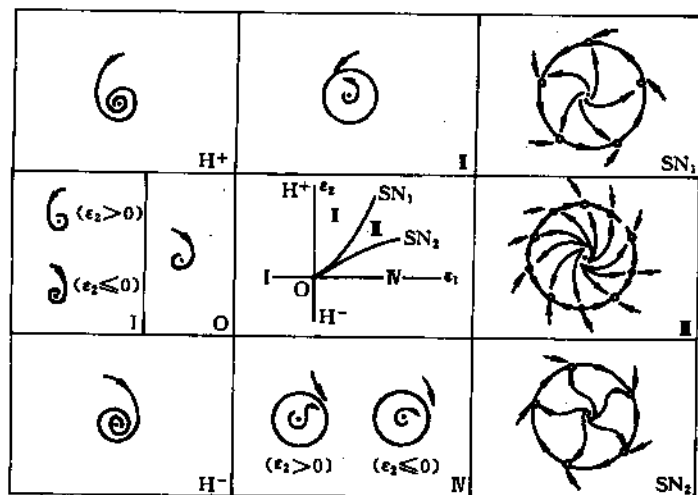


图 3-12

证明 由上面的分析, (3.5) 的分岔现象发生在 Σ_δ^* 上. 由引理 3.1, 分岔曲线在 (ζ, δ) 平面上为点 $(-b_1, 0)$ 及曲线 $(M_j(\delta), \delta)$, $j = 1, 2$ 组成, 且

$$M_1(\delta) - M_2(\delta) = \xi \delta^{q-4} + O(\delta^{q-3}), \delta \rightarrow 0^+, \xi \neq 0.$$

利用变换 (3.4) 从系统 (3.5) 返回到系统 (3.3), 从而把分岔曲线的方程从 (ζ, δ) 空间返回到 (ϵ_1, ϵ_2) 空间, 得到 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ 以及两条曲线

$$\{(\epsilon_1, \epsilon_2) \mid \epsilon_1 = \delta^2, \epsilon_2 = \delta^2 M_0(\delta)\},$$

$$\{(\epsilon_1, \epsilon_2) \mid \epsilon_1 = \delta^2, \epsilon_2 = \delta^2 M_1(\delta)\},$$

其中 δ 为参数. 令 $h_j(\delta) = \delta^2 M_{j-1}(\delta)$, $j = 1, 2$, 则

$$h_2(\delta) - h_1(\delta) = \delta^2 (M_1(\delta) - M_0(\delta)) = \xi \delta^{q-2} + O(\delta^{q-1}),$$

其中 $\xi \neq 0$. 定理 3.2 得证. \blacksquare

习题与思考题三

3.1 在引理 1.6 和引理 1.7 中, 为什么要分别利用对参数一致的同宿分岔定理和对参数一致的 Hopf 分岔定理? 这对最终得到定理 1.1 有什么作用?

3.2 证明引理 2.1.

3.3 证明引理 2.5.

3.4 对方程 (2.5)⁺ 讨论它的分岔现象, 并证明分岔图 3-6 的正确性.

3.5 考虑方程 (2.7). 试证明:

(1) 当 $|\delta|$ 充分小时, (2.7) 在双同宿环 (记为 Γ_0) 附近有极限环的

必要条件是 $|\xi - \frac{4}{5}| \ll 1$.

(2) 当 $|\delta|$ 和 $|\xi - \frac{4}{5}|$ 均充分小时, (2.7) 在 Γ_0 附近至多有一个包围三个奇点的大极限环.

(提示: 当 $\delta \neq 0$, $|\xi - \frac{4}{5}| \ll 1$ 时, (2.7) 在原点的发散量为 $\delta\xi \neq 0$.)

第四章 双曲不动点及马蹄存在定理

本章中我们将给出关于 \mathbf{R}^2 中映射的几个定理. 这些定理在第五章中是我们研究空间 \mathbf{R}^3 中鞍点同宿分岔的基础, 同时这些定理也有其自身的重要价值. 在 § 1 中我们证明一个双曲不动点定理. 在 § 2 中引进符号动力学的基本概念. 在 § 3 中给出马蹄存在定理. 在 § 4 中给出一个关于两个线性映射的复合映射的双曲性的判别引理. 在 § 5 中作为 § 2—§ 4 中诸结果的一个应用, 我们将给出 \mathbf{R}^3 中 Birkhoff-Smale 定理的证明.

本章和下一章的主要定理在 Sil'nikov 的文章 [Sil1—3] 和 Wiggins 的书 [Wi2] 中都能找到, 但此处所有定理的证明都是独立给出的. 我们力图把几何直观与数学的严密性统一起来, 并给予读者一套易于掌握的方法, 用以解决高维空间中其它类似的问题.

§ 1 双曲不动点定理

定理的陈述

首先我们引进一些基本概念. 令

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}^1, y \in \mathbf{R}^1\}.$$

定义 1.1 设 $C > 0$ 是一个常数. 平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上的一条 C 水平曲线指的是一个李氏常数为 C 的 x 的函数 $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ 的图象. 当 $-\infty < a < b < +\infty$ 时, 称点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 为该曲线的端点. 类似地, $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上一条 C 垂直曲线指的是一个李氏常数为 C 的 y 的函数 $x = g(y)$, $y \in (a, b)$ 的图象. 特别地, 当 $a = -\infty, b$

$=+\infty$ 时,则称其为无限 C 水平曲线或无限 C 垂直曲线.

定义1.2 称平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上两条不交的无限 C 水平曲线所界区域为 C 水平带域;两条不交的无限 C 垂直曲线所界区域为 C 垂直带域.

以下我们总是假设 μ_h, μ_v 是两个正常数,满足 $\mu_h \cdot \mu_v < 1$.

定义1.3 平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上的一个区域 D 称为 (μ_h, μ_v) 矩形,若它是一个 μ_h 水平带域与一个 μ_v 垂直带域的交,那组 μ_h 水平对边称为边界的水平部分,记作 $\partial_h D$;那组 μ_v 垂直对边称为边界的垂直部分,记作 $\partial_v D$.

对 $p \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$,我们记 $T_p(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ 为平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 过点 p 的切空间.令

$$K_p^+ = \{ \zeta_p = (\zeta_p^-, \zeta_p^+) \in T_p(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1) \mid |\zeta_p^+| \geq \mu_v^{-1} |\zeta_p^-| \},$$

$$K_p^- = \{ \zeta_p = (\zeta_p^-, \zeta_p^+) \in T_p(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1) \mid |\zeta_p^+| \leq \mu_h |\zeta_p^-| \},$$

见图(4-1).

定义1.4 令 $D \subset \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个区域. $f: D \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个微分同胚.称 f 在 D 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件,如果有

$$(1) Df K_p^+ \subset K_{f(p)}^+,$$

$$\forall p \in D;$$

$$(2) Df^{-1} K_p^- \subset K_{f^{-1}(p)}^-,$$

$$\forall p \in fD;$$

且存在常数 $\lambda > 1$,使得

$$(3) |(Df \zeta_p)^+| \geq \lambda |\zeta_p^+|,$$

$$\forall p \in D, \zeta_p \in K_p^+;$$

$$(4) |(Df^{-1} \zeta_p)^-| \geq \lambda |\zeta_p^-|, \quad \forall p \in fD, \zeta_p \in K_p^-.$$

直观地说,映射 f 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件指的是 f 在水平方向压缩而在垂直方向拉伸,并且它将任意 μ_v 垂直曲线变为 μ_v 垂

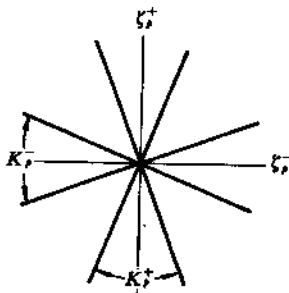


图4-1

直曲线, 而其逆 f^{-1} 将任何 μ_h 水平曲线变为 μ_h 水平曲线.

定理 1.5 (双曲不动点定理) 令 D 是平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上一个 (μ_h, μ_v) 矩形, $f: D \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个微分同胚, 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 并且有

(1) 相交条件成立: $fD \cap D \neq \emptyset$;

(2) 边界条件成立: $fD \cap \partial_v D = \emptyset$; $f\partial_h D \cap D = \emptyset$,

则 f 在 D 中有唯一双曲不动点

$$O = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i D.$$

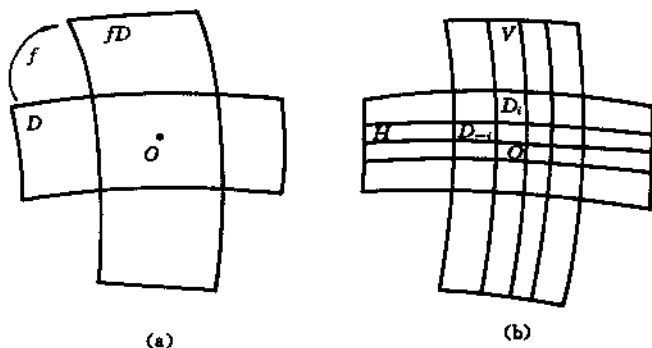


图4-2

上述定理的几何直观见图4-2(a).

证明的思路

令

$$D_0 = D, \quad D_i = f(D_{i-1}) \cap D,$$

$$D_{-i} = f^{-1}(D_{-i+1} \cap fD), \quad i \in \mathbf{N}. \quad (1.1)$$

第一步证明 $D_{\pm i}$ 是 (μ_h, μ_v) 矩形, 并满足条件

$$\partial_h D_i \subset \partial_h D, \quad \partial_v D_{-i} \subset \partial_v D,$$

$$D_i \subset D_{i-1}, \quad D_{-i} \subset D_{-i+1}, \quad i \in \mathbf{N}. \quad (1.2)$$

第二步证明 $V = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$ 和 $H = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{-i}$ 分别是端点属于 $\partial_h D$ 和 $\partial_v D$ 的 μ_v 垂直曲线和 μ_h 水平曲线.

第三步证明 $H \cap V$ 是 f 的一个双曲不动点.

见图4-2(b).

几个引理

引理1.6 平面 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上一条 μ_h 水平曲线与一条 μ_v 垂直曲线最多有一个交点.

证明 令 $h: x \mapsto y = h(x)$, $v: y \mapsto x = v(y)$ 是两个函数, 它们的图象分别为 μ_h 水平曲线 H 及 μ_v 垂直曲线 V . 再令 (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \in H \cap V$, 则

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |v \circ h(x_1) - v \circ h(x_2)| \\ &\leq \mu_v |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu_h \cdot \mu_v |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

因为 $\mu_h \mu_v < 1$, 故 $|x_1 - x_2| = 0$. 进一步 $|y_1 - y_2| = 0$. \blacksquare

引理1.7 令 $D \subset \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, $H, V \subset D$ 分别是端点集属于 $\partial_v D$ 和 $\partial_h D$ 的 μ_h 水平曲线及 μ_v 垂直曲线, 则 H 与 V 相交于唯一一点.

证明 交点的存在性可由连续性得到, 而唯一性由引理1.6保证. \blacksquare

引理1.8 令 $D_1, D_2 \subset \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是两个 (μ_h, μ_v) 矩形. 设 $f: D_1 \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个微分同胚, 并满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件及

- (1) 相交条件: $fD_1 \cap D_2 \neq \emptyset$;
- (2) 边界条件: $f\partial_h D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $fD_1 \cap \partial_v D_2 = \emptyset$,

则

1. $fD_1 \cap D_2$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足

$$\partial_h(fD_1 \cap D_2) \subset \partial_h D_2;$$
2. $f^{-1}(D_2 \cap fD_1)$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足

$$\partial_v(f^{-1}(D_2 \cap fD_1)) \subset \partial_v D_1.$$

上述引理可参见图4-3.

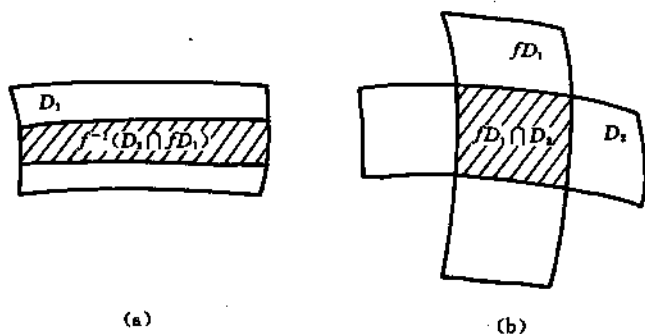


图4-3

证明 因为 f 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 故 f 将 μ_v 垂直曲线变为 μ_v 垂直曲线, 而 f^{-1} 将 μ_h 水平曲线变为 μ_h 水平曲线. 因此 f 将区域 D_1 变成一个左右两边为 μ_v 垂直曲线的曲边矩形 fD_1 . 再由相交条件及边界条件, fD_1 是上下穿过 D_2 的, 也就是说 $fD_1 \cup D_2$ 形成一个十字形. 因而 $fD_1 \cap D_2$ 也是一个曲边矩形, 其上下两边属于 D_2 的边界的水平部分, 而其左右两边属于 fD_1 的左右两边, 因而 $fD_1 \cap D_2$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足 $\partial_h(fD_1 \cap D_2) \subset \partial_h D_2$. 类似地可以证明另一个结论. \square

令 $D_{\pm i}, i \in \mathbb{N}$, 是由 (1.1) 定义的区域, 用归纳法及引理 1.8 我们有

引理 1.9 $D_{\pm i}$ 是 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足 (1.2).

(μ_h, μ_v) 矩形的高和宽

令

$$K^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid |y| \geq \mu_v^{-1}|x|\},$$

$$K^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid |y| \leq \mu_h|x|\}.$$

给定 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上两点 p, q , 我们记 $\overrightarrow{pq} \in K^\pm$, 若连结 p, q 的向量属于 K^\pm .

令 D 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形. 下面我们定义 D 的高 $h(D)$ 及 D 的宽 $w(D)$ 如下:

$$h(D) = \sup_{\substack{p, q \in D \\ \overrightarrow{pq} \in K^+}} \text{dist}(p, q),$$

$$w(D) = \sup_{\substack{p, q \in D \\ \overrightarrow{pq} \in K^-}} \text{dist}(p, q),$$

这里 $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 上两点之间的距离.

引理 1.10 令 $D \subset \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个闭区域, $f: D \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个微分同胚, 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件. 设 $\gamma \subset D$ 是一条 C^1 光滑的 μ_v 垂直 (或 μ_h 水平) 曲线. 若对某自然数 $i \in \mathbf{N}$, f^i (或 f^{-i}) 在 γ 上有定义, 则

$$|f^i \gamma| \geq A_v \lambda^i |\gamma|, \text{ (或 } |f^{-i} \gamma| \geq A_h \lambda^i |\gamma| \text{)}.$$

这里 $|\cdot|$ 代表曲线的长度, $A_v = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_v^2}}$, $A_h = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_h^2}}$, 而 λ

> 1 是定义 1.4 中的常数.

证明 我们只对 γ 是 μ_v 垂直曲线的情况证明引理, 另一种情况的证明可用类似方法得到.

首先设 $i=1$. 令曲线 γ 是一个映射 $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow D$ 的象, 令 $\xi = (\xi^-, \xi^+) = \gamma(t)$, 则 $\xi \in K^+$. 令

$$\eta(t) = (\eta^-, \eta^+) = Df\xi,$$

则

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\| &\geq |\eta^+(t)| \geq \lambda |\xi^+(t)| \\ &\geq \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mu_v^2}} \|\xi\| = \lambda A_v \|\xi\|. \end{aligned}$$

求积分, 得

$$|f\gamma| = \int_0^1 \|\eta(t)\| dt \geq \lambda A_v \int_0^1 \|\xi\| dt = A_v \lambda |\gamma|.$$

对 $i > 1$, 令 $g = f^i$, 则 g 也满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 只是其中的扩张及压缩常数 λ 变为 λ^i . 再将前面对 $i=1$ 的讨论应用到映射 g 即可证明引理. \blacksquare

引理1.11 令 $D_{\pm i}$ 是由 (1.1) 定义的 (μ_h, μ_v) 矩形, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$h(D_{-i}), w(D_i) < C\lambda^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

这里 $\lambda > 1$ 是 (μ_h, μ_v) 锥形条件中的常数.

证明 令 $p, q \in D_{-i}$ 满足 $\overrightarrow{pq} \in K^+$. 设 $\gamma \subset D_{-i}$ 是一条连结 p, q 的 C^1 光滑的 μ_v 垂直曲线. 由于 f 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, $f^i\gamma$ 是 D 中的 μ_v 垂直曲线. 令 E 是 D 中所有 C^1 光滑的 μ_v 垂直曲线长度的上界, 则由引理1.10, 有

$$E \geq |f^i\gamma| \geq A_v \lambda^i |\gamma| \geq A_v \lambda^i \text{dist}(p, q)$$

或

$$\text{dist}(p, q) \leq A_v^{-1} E \lambda^{-i}.$$

因此

$$h(D_{-i}) \leq A_v^{-1} E \lambda^{-i}.$$

故存在常数 C_1 , 使得

$$h(D_{-i}) \leq C_1 \lambda^{-i}.$$

同理可证存在常数 C_2 , 使得

$$w(D_i) \leq C_2 \lambda^{-i}. \quad \blacksquare$$

定理1.5证明的完成

由引理1.9和引理1.11立即得到

$$V = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$$

是一条 μ_v 垂直曲线, 且满足 $\partial V \subset \partial_h D$.

$$H = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{-i}$$

是一条 μ_h 水平曲线, 且满足 $\partial H \subset \partial_v D$. 由引理 1.7 $H \cap V$ 是一个点, 记为 O , 且有

$$\begin{aligned} fO &= f(H \cap V) = f\left(\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i D\right) \\ &= \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i D = H \cap V = O. \end{aligned}$$

故 O 是 f 在 D 内的唯一不动点. 因为 f 在水平方向压缩而在垂直方向拉伸, 故不动点 O 是双曲的.

§2 符号动力学简介

本节将扼要地介绍符号动力学理论, 它是研究动力系统的复杂动力行为的基础.

符号序列空间及其结构

令

$$S = \{1, 2, \dots, N\}, \quad N \geq 2.$$

在 S 上引进如下度量:

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } a = b, \\ 1, & \text{如果 } a \neq b. \end{cases} \quad (2.1)$$

则集合 S 在度量 (2.1) 下构成一个紧致的, 完全不连通的度量空间. 令

$$\Sigma^N = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S^i,$$

这里 $S^i = S \times \{i\}$, 换一句话说, Σ^N 中的每一个点是 S 的元素构成的双边无穷序列

$$\omega \in \Sigma^N,$$

则

$$\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{\dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, \dots, a_n, \dots\},$$

这里 $a_i \in S$ 是 ω 在分量 S^i 上的值. 在 Σ^N 上我们如下引进度量.

设

$$\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}},$$

则

$$d(\omega, \bar{\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_i, \bar{a}_i)}{2^{|i|}}. \quad (2.2)$$

上述定义表明 Σ^N 中两个点接近指的是它们在一个很长的中间段上一样. 下面的引理将要精确地说明这一点.

引理2.1 令 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N$.

(1) 如果 $d(\omega, \bar{\omega}) < 2^{-k}$, 则 $a_i = \bar{a}_i$, 对 $|i| \leq k$;

(2) 如果 $a_i = \bar{a}_i$, 对 $|i| \leq k$, 则 $d(\omega, \bar{\omega}) \leq 2^{-k+1}$.

证明 结论(1)用反证法证明. 设存在 $j \in \mathbb{Z}, |j| \leq k$ 使得 $a_j \neq \bar{a}_j$, 则

$$d(\omega, \bar{\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_i, \bar{a}_i)}{2^{|i|}} \geq \frac{d(a_j, \bar{a}_j)}{2^{|j|}} \geq 2^{-k}.$$

这便导出矛盾.

现在证结论(2). 如果 $a_i = \bar{a}_i$ 对 $|i| \leq k$, 则我们有

$$\begin{aligned} d(\omega, \bar{\omega}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_i, \bar{a}_i)}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-k-1} \frac{d(a_i, \bar{a}_i)}{2^{|i|}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d(a_i, \bar{a}_i)}{2^{|i|}} \leq 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

在研究 Σ^N 的结构之前让我们回忆一下有关概念. 一个点集称为完全的, 如果它是闭的且没有孤立点. 一个点集称为完全不连通的, 如果它的每一个连通分支只包含一个点. 同时具有上面两条性质的经典例子是 \mathbb{R}^1 上的 Cantor 三分集.

引理2.2 空间 Σ^N 在度量(2.2)下是

(1) 紧致的; (2) 完全不连通的; (3) 完全的.

引理2.2的三个结论恰是一般 Cantor 集合的定义.

证明 (1) 令 K 是 Σ^N 中的一个无限集, 我们证明 K 在 Σ^N

中有聚点. 因为 K 包含无穷多个点, 故存在 K 的一个无穷子集 K_0 , 使得对其中任意序列 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 有 $a_0 = \bar{a}_0$. 下面我们归纳地构造一个无穷子集列 K_i .

令 K_i 是 K 的一个无穷子集, 满足以下性质: 对任意 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in K_i$ 都有 $a_j = \bar{a}_j, |j| \leq i$. 因为 K_i 包含无穷个元素, 故存在 K_i 的一个无穷子集 K_{i+1} , 使得对 K_{i+1} 的任意元素 $\omega = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 有

$$a_j = \bar{a}_j, |j| \leq i+1.$$

这样我们得到 K 的一个无穷子集列 K_i , 满足

1. 对任意 $\omega = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in K_i$ 有 $a_j = \bar{a}_j, |j| \leq i$.
2. $K_{i+1} \subset K_i, i \geq 0$.

任意取一点 $\omega_0 \in K_0$, 现在归纳地选取一点列 $\omega_n \in K_n$ 如下: 假设 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ 已经取定, 取 $\omega_{n+1} \in K_{n+1}$ 使得 $\omega_{n+1} \neq \omega_i, i=0, 1, \dots, n$. 令 $\omega_n = \{a_i^n\}_{i \in \mathbb{Z}}$. 令 $a_i = a_i^n$ 及 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 则显然 ω_n 收敛到 ω .

(2) 因为 S 是完全不连通的, 而 Σ^N 是 S 的乘积空间, 故 Σ^N 也是完全不连通的.

(3) 因为 Σ^N 是紧的, 故它是闭的. 对任意 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N$, 下证 ω 是 Σ^N 中某点列的极限点. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, 令 $\bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N$ 是这样一个点, 使得

$$\bar{a}_i = a_i, |i| \leq n+1, \bar{a}_{n+2} \neq a_{n+2}.$$

由引理 2.1, $\bar{\omega}$ 属于 ω 的 ε 邻域且 $\bar{\omega} \neq \omega$. 因此, 我们证明了 Σ^N 的极限点集等于它自身, 即 Σ^N 是完全的. \square

移位映射

定义 Σ^N 到自身的映射 σ 如下:

$$\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N,$$

$$\sigma(\omega) = \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad b_i = a_{i+1}.$$

σ 称为移位映射.

引理 2.3 移位映射 σ 是 Σ^N 到自身的同胚.

证明 显然 σ 是一一的和映上的, 故为了证明引理, 只需证明 σ 与 σ^{-1} 是连续的.

令 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 由定义

$$\sigma(\omega) = \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad b_i = a_{i+1}, \quad \sigma(\bar{\omega}) = \{\bar{b}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \bar{b}_i = \bar{a}_{i+1},$$

$$\sigma^{-1}(\omega) = \{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad c_i = a_{i-1}, \quad \sigma^{-1}(\bar{\omega}) = \{\bar{c}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \bar{c}_i = \bar{a}_{i-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} d(\sigma(\omega), \sigma(\bar{\omega})) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(b_i, \bar{b}_i)}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_{i+1}, \bar{a}_{i+1})}{2^{|i|}} \\ &\leq 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_{i+1}, \bar{a}_{i+1})}{2^{|i+1|}} = 2d(\omega, \bar{\omega}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\sigma^{-1}(\omega), \sigma^{-1}(\bar{\omega})) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(c_i, \bar{c}_i)}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_{i-1}, \bar{a}_{i-1})}{2^{|i|}} \\ &\leq 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(a_{i-1}, \bar{a}_{i-1})}{2^{|i-1|}} = 2d(\omega, \bar{\omega}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

令 $\omega \in \Sigma^N$, 集合

$$O(\omega) = \{\sigma^n(\omega) | n \in \mathbb{Z}\}$$

称为映射 σ 过点 ω 的轨道. 当 $O(\omega)$ 是有限集时, ω 称为周期点, 而 $O(\omega)$ 称为周期轨, 此时满足 $\sigma^n(\omega) = \omega$ 的最小正数 n 称为 ω 的周期. 一个非周期点在 σ 的正向及负向迭代下, 如果趋于同一个周期轨, 则称它为该周期轨的同宿点; 如果分别趋于不同的周期轨, 则称它为该两周期轨的异宿点.

定理 2.4 对 Σ^N 中的移位映射 σ , 下列结论成立.

(1) 存在任意周期的周期点, 周期点在 Σ^N 中稠密;

(2) 任意周期轨的同宿点集在 Σ^N 中稠密, 任意两个周期轨的异宿点集在 Σ^N 中稠密;

(3) 映射 σ 在 Σ^N 中有稠密轨道.

证明 先证明(1). 首先我们引进一些记号. 我们对由 S 中的元素构成的一个周期性重复的双边无穷序列用在其重复段上加一个横线表示. 例如 $\{\dots, 1, 2, 1, 2, \dots\}$ 用 $\{\overline{12}\}$ 表示. 对左(右)向无穷的周期重复的序列用一个在其重复段上面向左(右)的箭头表示, 例如 $\{\dots, 1, 2, 1, 2, \dots\}$ 用 $\{\overleftarrow{12}\}$ 表示, $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$ 用 $\{\overrightarrow{12}\}$ 表示. 对 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N$ 我们用 $\omega(n)$ 表示 ω 的长度为 $2n+1$ 的中间段, 即 $\omega(n) = \{a_i\}_{|i| \leq n}$. 显然, Σ^N 中的一个周期性重复的序列是 σ 的周期点. 对于任意正整数 k , 点 $\omega = \{\overline{1, 1, \dots, 1, 2}\}$ (共 k 个数字) 是 σ 的周期为 k 的周期点. 现在我们来证明周期点在 Σ^N 中是处处稠密的. 对 $\forall \omega \in \Sigma^N$, 任意给定 $\varepsilon > 0$, 令 $n > 0$ 是这样一个整数, 使得 $2^{-n+1} < \varepsilon$. 由引理2.1 周期点 $\{\overline{\omega(n)}\}$ 属于 ω 的 ε 邻域, 故周期点稠密.

现在证明(2). 令 $\omega = \{\overline{a^*}\}$, $\bar{\omega} = \{\overline{b^*}\}$ 是两个周期点, 这里 a^* 与 b^* 分别是 ω 和 $\bar{\omega}$ 的周期重复部分. 对任意 $\eta \in \Sigma^N$, 任意给定 $\varepsilon > 0$, 正整数 n 满足 $2^{-n+1} < \varepsilon$, 则由引理2.1

$$\alpha = \{\overline{a^* \eta(n) b^*}\}$$

属于 η 的 ε 邻域, 而 α 在 σ 的正向及负向迭代分别趋向于 $O(\omega)$ 和 $O(\bar{\omega})$.

最后我们来证明(3), 即证明存在一个点 $\omega \in \Sigma^N$, 使得对任意 $\bar{\omega} \in \Sigma^N$ 及 $\varepsilon > 0$, 都有一个整数 n 满足 $d(\sigma^n(\omega), \bar{\omega}) < \varepsilon$. 我们将直接构造这样的点 ω . 对任意整数 k , 首先构造所有由 S 中元素构成的长度为 k 的序列. 因 S 有 N 个元素, 故这样的序列有 N^k 个:

$$\{a^{k_1}\}, \{a^{k_2}\}, \dots, \{a^{k_{N^k}}\},$$

令

$$a^k = \{a^{k_1}, a^{k_2}, \dots, a^{k_{N^k}}\},$$

则 a^k 是一个长度为 kN^k 的序列. 现在考虑下列序列

$$\omega = \{\dots, a^3, a^2, a^1, a^2, a^3, \dots\}.$$

这样 ω 包含任意给定长度的所有可能的序列. 我们断言 ω 的轨道在 Σ^N 中稠密. 事实上, 对 $\forall \bar{\omega} \in \Sigma^N, \varepsilon > 0$, 令正整数 n 满足不等式 $2^{-n+1} < \varepsilon$. 由 ω 的构造可知, 长度为 $2n+1$ 的序列 $\bar{\omega}(n)$ 必在 ω 中的某一段出现. 因此, 由引理 2.1, 存在整数 m , 使得

$$d(\sigma^m(\omega), \bar{\omega}) < \varepsilon,$$

故 ω 的轨道 $O(\omega)$ 在 Σ^N 中稠密. \blacksquare

§ 3 Smale 马蹄

本节首先将描述美国数学家 Smale 于 60 年代初给出的一个分段线性二维映射的例子. 这个例子表明一个看上去简单的映射可以拥有十分丰富的动力行为. 它在现代动力学理论的发展中起到了非常重要的作用. 然后我们将 Smale 的例子推广到一般的非线性映射的情况, 给出所谓马蹄存在定理. 最后我们将看到马蹄可以在三维向量场的 Poincaré 映射中出现.

马蹄映射的例子

考虑 \mathbf{R}^2 上的单位正方形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$. 我们引进 D 到 \mathbf{R}^2 的微分同胚 f 如下. 首先将 D 沿垂直方向拉伸 5 倍沿水平方向压缩 5 倍, 然后将所得到的细高矩形在中部弯曲得到马蹄形区域, 最后将马蹄形区域与 D 按图 4-4 的方式相交. $fD \cap D$ 是两个高度为 1 宽为 $\frac{1}{5}$ 的矩形 V_1, V_2 , 而 $f^{-1}(fD \cap D)$ 是两个高为 $\frac{1}{5}$ 宽为 1 的矩形 $H_i = f^{-1}V_i, i=1, 2$. 映射 f 在 H_1, H_2 上是线性映射, 并具有

Jacobi 矩阵 $\begin{bmatrix} \pm \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \pm 5 \end{bmatrix}$, 它在 H_1 上取正值, 在 H_2 上取负值.

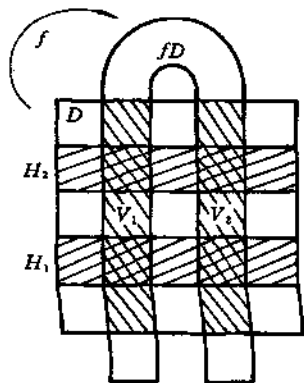


图4-4

现在我们考虑 D 中的所有在 f 的任意次迭代下都不离开 D 的点集 Λ , 即

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f^i x \in D, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

不难看出

$$\Lambda = \bigcap_{-\infty}^{\infty} f^i D$$

是 f 的一个不变集, 即 $f\Lambda = \Lambda$. 首先我们说明 Λ 非空. $f^{-1}D = H_1 \cup H_2$ 是两个宽为1高为 $\frac{1}{5}$ 的矩形. 而 $f^{-2}D = f^{-1}H_1 \cup f^{-1}H_2$ 是四个宽为1高为 $\frac{1}{5^2}$ 的矩形. 用归纳法, 一般地可得到

$$f^{-n}D \subset f^{-n+1}D, \quad n \in \mathbb{N},$$

且 $f^{-n}D$ 是 2^n 个宽为1高为 5^{-n} 的矩形. 因此, 集合 $\bigcap_0^{\infty} f^{-n}D$ 是一个 x 轴上 $[0, 1]$ 区间与 y 轴上 $[0, 1]$ 区间内的一个 Cantor 集 K_y 的积, 即

$$\bigcap_0^{\infty} f^{-n}D = [0, 1] \times K_y.$$

类似地可证明存在 x 轴上 $[0, 1]$ 区间内的一个 Cantor 集 K_x , 使得

$$\bigcap_0^{\infty} f^n D = K_x \times [0, 1].$$

因而

$$\Lambda = K_x \times K_y$$

是一个非空 Cantor 集.

下面我们描述 f 在 Λ 上的动力行为. 因为 Λ 是 f 的不变集, 故对 $\forall x \in \Lambda$

$$f^i x \in \Lambda, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

注意到 $\Lambda \subset H_1 \cup H_2$, 因此存在一个由 1, 2 组成的无限双边序列 $a_i, i \in \mathbb{Z}$, 使得

$$f^i x \in H_{a_i}.$$

这样我们定义了一个映射 $\Phi: \Lambda \rightarrow \Sigma^2$,

$$x \mapsto \Phi(x) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

令 σ 代表上节中我们定义的 Σ^2 上的右移位映射, 则根据定义有

$$\Phi \circ f = \sigma \circ \Phi|_{\Lambda}.$$

下面我们将说明 Φ 是 Λ 到 Σ^2 的胚, 即 Φ 是连续的, 一一的和映上的. 首先我们说明 Φ 是连续的. 设 H_1 与 H_2 之间的距离为 E , 则对任意两点 $a, b \in \Lambda$, 若 $d(a, b) < E$, 有 a, b 同时属于 H_1 或 H_2 . f 在 H_1 及 H_2 上是一个水平方向压缩 5 倍, 垂直方向拉伸 5 倍的线性映射, 故对 $a, b \in \Lambda$, 若

$$5^k d(a, b) < E, k \in \mathbb{N},$$

则有 $f^i a, f^i b$, 对 $|i| \leq k$ 同时属于 H_1 或 H_2 . 故序列 $\Phi(a), \Phi(b)$ 在长度为 $2k+1$ 的中间段是一样的

$$\{\Phi(a)_i\}_{|i| \leq k} = \{\Phi(b)_i\}_{|i| \leq k}.$$

只要取 $d(a, b)$ 小, k 便可以充分的大, 由引理 2.1, $\Phi(a)$ 与 $\Phi(b)$ 在 Σ^2 中的距离可以充分的小, 这便说明了 Φ 是连续的.

对一点 $u \in \Lambda$, 我们用 u_x, u_y 分别代表 u 的 x 与 y 坐标.

现在我们来证明 Φ 是一一的, 即对不同的点 $a, b \in \Lambda$,

$$\Phi(a) \neq \Phi(b).$$

用反证法. 设

$$\Phi(a) = \Phi(b) = \{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}},$$

即

$$f^i a, f^i b \in H_{c_i}, i \in \mathbb{Z},$$

故对 $i \in \mathbb{Z}$

$$1 \geq |(f^i a)_y - (f^i b)_y| = 5^i |a_y - b_y|,$$

$$1 \geq |(f^{-i} a)_x - (f^{-i} b)_x| = 5^i |a_x - b_x|,$$

因此

$$a_y = b_y, a_x = b_x,$$

这与 $a \neq b$ 矛盾.

最后为了证明 Φ 是同胚, 还需证明 Φ 是映上的, 即对任意 $\omega \in \Sigma^2$, 都有一点 $a \in \Lambda$, 使得 $\Phi(a) = \omega$.

我们将它作为练习留给读者.

通过上面的讨论我们得到 $f|_\Lambda$ 与 $\sigma|_{\Sigma^2}$ 是拓扑共轭的. 因而根据定理 2.4 我们有

定理 3.1 马蹄映射 f 在 D 中有一个不变的 Cantor 集 Λ , 满足

- (1) Λ 中有 f 的任意周期的周期点, 周期点在 Λ 中稠密;
- (2) 任意两个周期轨道的异宿点及任意周期轨道的同宿点在 Λ 中稠密;
- (3) f 在 Λ 中有稠密轨道.

马蹄存在定理

下面我们将定理 3.1 推广到非线性情形.

定理 3.2 令 μ_h, μ_v 是两个正常数满足 $\mu_h \cdot \mu_v < 1$. 令 $D_i \subset \mathbb{R}^1$

$\times \mathbf{R}^1, i=1, 2, \dots, N$ 是 N 个两两不交的 (μ_h, μ_v) 矩形, 映射 $f: D = \bigcup_{i=1}^N D_i \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 是一个微分同胚, 并且

- (1) f 在 D 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件;
- (2) 相交条件成立: $D_j \cap fD_i \neq \emptyset, i, j=1, 2, \dots, N$;
- (3) 边界条件成立: $fD_j \cap \partial_v D_i = \emptyset, f(\partial_h D_j) \cap D_i = \emptyset, i, j=1, 2, \dots, N$.

则集合

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n D$$

是一个不变的 Cantor 集. f 限制在 Λ 上的映射 $f|_{\Lambda}$ 拓扑共轭于 Σ^N 上的移位映射 σ , 即存在 Λ 到 Σ^N 的一个同胚 Φ , 满足

$$\sigma \circ \Phi = \Phi \circ f|_{\Lambda}. \quad (3.1)$$

由定理 2.4 我们有

推论 3.3 定理 3.2 中的映射 f 有一个不变的 Cantor 集 Λ , 满足

- (1) Λ 包含任意周期的周期点, 周期点在 Λ 中稠密;
- (2) 周期轨道的同宿点及异宿点在 Λ 中稠密;
- (3) f 在 Λ 中有稠密轨道.

定理 3.2 证明的思路

给定 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbf{Z}} \in \Sigma^N$. 我们定义有限或单边无限序列如下:

$$\omega_n^+ = \{a_i\}_{0 \leq i \leq n}, \quad \omega_n^- = \{a_i\}_{-n \leq i \leq 0},$$

$$\omega^+ = \{a_i\}_{i \geq 0}, \quad \omega^- = \{a_i\}_{i \leq 0}.$$

如果 $x \in D$ 满足 $f^i x \in D_{a_i}, 0 \leq i \leq n$, 则我们记作

$$\Phi_n^+(x) = \omega_n^+.$$

如果 $x \in D$ 满足 $f^{-i} x \in D_{a_{-i}}, 0 \leq i \leq n$, 则我们记作

$$\Phi_n^-(x) = \omega_n^-.$$

令

$$D(\omega_n^+) = \{x \in D \mid \Phi_n^+(x) = \omega_n^+\}, \quad (3.2)$$

$$D(\omega_n^-) = \{x \in D \mid \Phi_n^-(x) = \omega_n^-\}. \quad (3.3)$$

第一步证明 $D(\omega_n^+)$ 是 (μ_h, μ_v) 矩形, 且满足

$$D(\omega_n^+) \subset D(\omega_{n-1}^+), D(\omega_n^-) \subset D(\omega_{n-1}^-),$$

以及

$$\partial_v D(\omega_n^+) \subset \partial_v D_{a_0}, \partial_h D(\omega_n^-) \subset \partial_h D_{a_0}.$$

第二步证明

$$D(\omega^+) \xrightarrow{d} \bigcap_{n=0}^{\infty} D(\omega_n^+)$$

是一条端点属于 $\partial_v D_{a_0}$ 的 μ_h 水平曲线.

$$D(\omega^-) \xrightarrow{d} \bigcap_{n=0}^{\infty} D(\omega_n^-)$$

是一条端点属于 $\partial_h D_{a_0}$ 的 μ_v 垂直曲线.

第三步记

$$\psi(\omega) = D(\omega^+) \cap D(\omega^-).$$

证明映射

$$\phi: \Sigma^N \rightarrow \Lambda, \omega \mapsto \psi(\omega)$$

是一个同胚, 满足 $\phi \Sigma^N = \Lambda$.

第四步令 $\Phi = \phi^{-1}$, 证明等式 (3.1) 成立.

定理 3.2 的证明

令

$$A_i^n = \{x \in D \mid \Phi_{i-1}^+(x) = \{a_{n-i+1}, \dots, a_n\}\},$$

其中 $i=1, 2, \dots, n+1$. 我们断言 $A_i^n \subset D_{a_{n-i+1}}$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足

$$\partial_v A_i^n \subset \partial_v D_{a_{n-i+1}}.$$

事实上, 由 A_i^n 的定义, 我们有 $x \in A_{i+1}^n$ 当且仅当 $fx \in A_i^n$ 及 $x \in D_{a_{n-i}}$. 因此

$$A_{i+1}^n = f^{-1}(A_i^n \cap fD_{a_{n-i}}). \quad (3.4)$$

下面用归纳法证明我们的断言. 对 $i=1, A_1^n = D_{a_n}$, 断言自然成立. 现假设对 $i=j$ 断言成立, 即 $A_j^n \subset D_{a_{n-j+1}}$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足 $\partial_v A_j^n \subset \partial_v D_{a_{n-j+1}}$. 由 (3.4), 再利用引理 1.8, 我们的断言对 A_{j+1}^n 也成立.

注意到 $A_{n+1}^n = D(\omega_n^+)$, 于是我们有

引理 3.4 $D(\omega_n^+) \subset D_{a_0}$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足

$$\partial_v D(\omega_n^+) \subset \partial_v D_{a_0}.$$

类似地我们有

引理 3.5 $D(\omega_n^-) \subset D_{a_0}$ 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 满足

$$\partial_h D(\omega_n^-) \subset \partial_h D_{a_0}.$$

关于 (μ_h, μ_v) 矩形 $D(\omega_n^\pm)$ 的高和宽有

引理 3.6 存在一个正常数 C , 使得

$$h(D(\omega_n^+)) < C\lambda^{-n}, \quad w(D(\omega_n^-)) < C\lambda^{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

这里 $h(\cdot), w(\cdot)$ 分别表示 (μ_h, μ_v) 矩形的高和宽, 而 $\lambda > 1$ 是 (μ_h, μ_v) 锥形条件中的常数.

引理 3.6 的证明与引理 1.11 的证明几乎完全一样, 我们把它留给读者.

根据 $D(\omega_n^\pm)$ 的定义, 有

$$D(\omega_n^\pm) \subset D(\omega_{n-1}^\pm).$$

因而

$$D(\omega^\pm) \stackrel{d}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} D(\omega_n^\pm)$$

非空. 由引理 3.4 和引理 3.6, $D(\omega^+)$ 是一条端点属于 $\partial_v D_{a_0}$ 的 μ_h 水平曲线. 而引理 3.5 和引理 3.6 表明 $D(\omega^-)$ 是一条端点属于 $\partial_h D_{a_0}$ 的 μ_v 垂直曲线, 由引理 1.7, $D(\omega^+)$ 与 $D(\omega^-)$ 有唯一的交点, 记作

$\psi(\omega)$:

$$\psi(\omega) = D(\omega^+) \cap D(\omega^-).$$

这样我们得到一个映射 $\psi: \Sigma^N \rightarrow \Lambda, \omega \mapsto \psi(\omega)$.

下面我们证明 ψ 是一个同胚, 为此只需验证 ψ 是一一的、映上的和连续的.

1. ψ 是一一的. 这指的是对任意给定 $\omega, \bar{\omega} \in \Sigma^N$, 如果 $\omega \neq \bar{\omega}$, 则 $\psi(\omega) \neq \psi(\bar{\omega})$. 用反证法证明. 若不然, 假设 $\psi(\omega) = \psi(\bar{\omega}) = x \in \Lambda$. 设 $f^i x \in D_{a_i}, i \in \mathbb{Z}$, 则

$$\omega = \bar{\omega} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

这与 $\omega \neq \bar{\omega}$ 矛盾.

2. ψ 是映上的. 这指的是对任意给定 $x \in \Lambda$, 都存在一个点 $\omega \in \Sigma^N$, 使得 $\psi(\omega) = x$. 因为 $x \in \Lambda$, 故

$$f^i x \in D, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

假设 $f^i x \in D_{a_i}, i \in \mathbb{Z}$. 令 $\omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N$, 则由 (3.2) 和 (3.3),

$$x \in D(\omega_n^+) \cap D(\omega_n^-), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (D(\omega_n^+) \cap D(\omega_n^-)) = D(\omega^+) \cap D(\omega^-) = \psi(\omega).$$

3. ψ 是连续的. 这指的是任给 $\omega \in \Sigma^N, \epsilon > 0$, 都可找到正数 δ , 使得对任意

$$\bar{\omega} = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^N,$$

若 $d(\omega, \bar{\omega}) < \delta$, 则 $d(\psi(\omega), \psi(\bar{\omega})) < \epsilon$ 由引理 2.1, 如果 $d(\omega, \bar{\omega}) < \delta$, 则 $a_i = \bar{a}_i$, 对 $|i| \leq N(\delta)$. 这里 $N(\delta) \rightarrow +\infty$, 当 $\delta \rightarrow 0$. 故由引理 3.6 有

$$d(\psi(\omega), \psi(\bar{\omega})) < 2C\lambda^{-N(\delta)} < \epsilon, \text{ 当 } \delta \ll 1.$$

令 $\Phi = \psi^{-1}: \Lambda \rightarrow \Sigma^N$, 现在我们来证明 (3.1) 成立. 令 $x \in \Lambda$ 是一个点, 设

$$f^i x \in D_{a_i}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

则由 $\Phi = \psi^{-1}$ 得

$$\Phi(x) = \omega = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

故

$$\sigma \circ \Phi(x) = \sigma(\omega) = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \bar{a}_i = a_{i+1}.$$

另一方面, 由 (3.5) 得

$$f^i(f(x)) = f^{i+1}x \in D_{a_{i+1}}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

这意味着

$$\Phi \circ f(x) = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}},$$

因而

$$\sigma \circ \Phi = \Phi \circ f|_{\Lambda}.$$

定理证毕. \square

§ 4 线性映射的复合映射的双曲性

本节将给出关于两个线性映射的复合映射的双曲性的一个重要引理, 这一引理将在第五章中多次应用.

问题的提出

第五章将研究奇点同宿轨的分岔, 这一问题的解决是通过研究同宿轨的 Poincaré 映射得到的. 这时, Poincaré 映射一般可表示为两个映射的复合: 一个映射由奇点的邻域中的向量场决定, 另一个映射由奇点邻域外的向量场决定. 第一个映射根据正规形理论可以得到它的精确表达式. 它具有很强的双曲性; 当定义域取得充分小时, 它沿着稳定流形方向的压缩常数和沿着不稳定流形方向的扩张常数分别充分小和充分大. 我们对第二个映射除了知道它是一个微分同胚外, 几乎没有其它任何信息. 我们的目标是, 证明在一定条件下, 第一个映射的强双曲性可以保证 Poincaré 映射的双曲性. 由锥形条件可看出, 一个映射的双曲性是由其映射的导算

子体现出来的, 而由链锁法则, 两个映射的复合映射的导算子是由两个映射的导算子的积给出的. 因而本节我们将对两个线性映射的复合映射的双曲性给出一个判别引理.

锥形条件和引理的陈述

令 μ_h, μ_v 是两个正常数, 满足 $\mu_h \mu_v < 1$. 令

$$K^+ = \{(\zeta^-, \zeta^+) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \mid |\zeta^+| \geq \mu_v^{-1} |\zeta^-|\},$$

$$K^- = \{(\zeta^-, \zeta^+) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \mid |\zeta^+| \leq \mu_h |\zeta^-|\},$$

$$\tilde{K}^+ = \{(\zeta^-, \zeta^+) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \mid |\zeta^+| \geq \mu_h |\zeta^-|\}.$$

我们称一个可逆线性映射 $A: \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 如果

$$(1) A\tilde{K}^+ \subset K^+;$$

$$(2) |(A\zeta)^+| \geq \lambda |\zeta^+|, \forall \zeta = (\zeta^-, \zeta^+) \in K^+;$$

$$(3) |(A^{-1}\zeta)^-| \geq \lambda |\zeta^-|, \forall \zeta = (\zeta^-, \zeta^+) \in K^-;$$

这里 $\lambda > 1$ 是一个常数.

因为 \tilde{K}^+ 是 $K^- \setminus \{0\}$ 的余集, 故条件(1)可推出 $A^{-1}K^- \subset K^-$. 见图4-5.

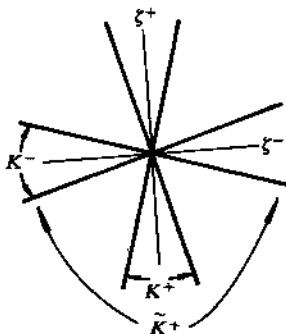


图4-5

引理4.1 考虑 $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ 到自身的两个可逆线性算子

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} A & B \\ D & M \end{pmatrix},$$

满足 $d \cdot M \neq 0$. 令 $L > 0$ 是一个常数, 使得

$$\|H\| < L, \|H^{-1}\| < L, \quad (4.1)$$

$$|d^{-1}| < L, \quad (4.2)$$

$$|BM^{-1}| < L, \quad (4.3)$$

则对任意 $0 < \mu_h < \mu_v^{-1} \ll 1$, 存在一个依赖于 L, μ_h, μ_v 的正常数 δ , 如果下列不等式

$$|M^{-1}| < \delta, \quad (4.4)$$

$$|A - BM^{-1}D| < \delta, \quad (4.5)$$

$$|AM^{-1}| < \delta, \quad (4.6)$$

$$|DM^{-1}| < \delta, \quad (4.7)$$

$$|cBM^{-1}| < \delta \quad (4.8)$$

成立, 则线性映射 $A = HJ$ 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

我们将在不等式

$$\mu_h^{-1} > \mu_v > \max\{2L^2 + 2L^3 + 1, 2(L + L^2)(L + L^3)\} \quad (4.9)$$

成立的前提下, 分三步证明引理.

不稳定锥形区域内的扩张性

令

$$\zeta = (\zeta^-, \zeta^+) \in K^+, \quad \eta = (\eta^-, \eta^+) = A\zeta.$$

对满足 (4.9) 的常数 μ_h, μ_v 我们将证明

$$|\eta^+| > \lambda |\zeta^+|, \quad \text{对 } \delta \ll 1. \quad (4.10)$$

因为

$$\eta^+ = (cA + dD)\zeta^- + (cB + dM)\zeta^+,$$

由三角不等式

$$|\eta^+| \geq |dM\zeta^+| - |cB\zeta^+| - |cA\zeta^-| - |dD\zeta^-|. \quad (4.11)$$

由(4.2)

$$|dM\zeta^+| \geq L^{-1}|M\zeta^+|. \quad (4.12)$$

由(4.8)

$$|cB\zeta^+| \leq |c||BM^{-1}| \cdot |M\zeta^+| \leq \delta|M\zeta^+|. \quad (4.13)$$

由 \tilde{K}^+ 的定义

$$|\Lambda\zeta^-| \leq \mu_h^{-1}|\Lambda| \cdot |\zeta^+| \leq \mu_h^{-1}|AM^{-1}| \cdot |M\zeta^+|,$$

$$|D\zeta^-| \leq \mu_h^{-1}|D| \cdot |\zeta^+| \leq \mu_h^{-1}|DM^{-1}| \cdot |M\zeta^+|.$$

这些不等式与(4.6)和(4.7)一起推出

$$|\Lambda\zeta^-| \leq \mu_h^{-1}\delta|M\zeta^+|, \quad (4.14)$$

$$|D\zeta^-| \leq \mu_h^{-1}\delta|M\zeta^+|. \quad (4.15)$$

由(4.1)

$$|dD\zeta^-| + |c\Lambda\zeta^-| \leq \frac{2L\delta}{\mu_h}|M\zeta^+|. \quad (4.16)$$

由(4.11), (4.12), (4.13)和(4.16)我们得

$$|\eta^+| \geq \left[L^{-1} - \delta \left(1 + \frac{2L}{\mu_h} \right) \right] \cdot |M\zeta^+| > \frac{1}{2}L^{-1}|M\zeta^+| \quad (4.17)$$

对充分小的 δ 成立. 再由(4.4)

$$|M\zeta^+| \geq \delta^{-1}|\zeta^+|,$$

这与(4.17)一起推出(4.10).

锥形区域的不变性

现在证明

$$A\tilde{K}^+ \subset K^+. \quad (4.18)$$

设 $\zeta = (\zeta^-, \zeta^+) \in \tilde{K}^+$, $\eta = (\eta^-, \eta^+) = A\zeta$, 由定义 $|\zeta^+| \geq \mu_h|\zeta^-|$. 我们将证明

$$|\eta^+| \geq \mu_h^{-1}|\eta^-|. \quad (4.19)$$

不等式(4.10)给出了 $|\eta^+|$ 的下界估计, 下面我们给出 $|\eta^-|$ 的上界

估计. 由定义

$$\eta^- = (aA + bD)\xi^- + (aB + bM)\xi^+.$$

由三角不等式

$$|\eta^-| \leq |a||A\xi^-| + |b||D\xi^-| + |a||B\xi^+| + |b||M\xi^+|. \quad (4.20)$$

由(4.1), $|a|, |b| < L$, 故由(4.14), (4.15)有

$$|a||A\xi^-| + |b||D\xi^-| \leq 2L\mu_k^{-1}\delta|M\xi^+|. \quad (4.21)$$

进一步由(4.3)

$$|B\xi^+| \leq |BM^{-1}||M\xi^+| < L|M\xi^+|.$$

因此由(4.1)

$$|a||B\xi^+| + |b||M\xi^+| \leq (L^2 + L)|M\xi^+|. \quad (4.22)$$

将(4.21)和(4.22)代入(4.20)得

$$|\eta^-| \leq (2L\mu_k^{-1}\delta + L^2 + L)|M\xi^+|.$$

这与(4.17)一起得

$$|\eta^-| \leq 2L(2L\mu_k^{-1}\delta + L^2 + L)|\eta^+|.$$

由(4.9), 上式中右边的 $|\eta^+|$ 前面的因子当 δ 充分小时小于 μ , 这便证明了(4.19), 即(4.18).

稳定锥形区域内的压缩性

令

$$\eta = (\eta^-, \eta^+) \in K^-, \quad \xi = (\xi^-, \xi^+) = A^{-1}\eta.$$

我们将证明不等式

$$|\xi^-| \geq \lambda|\eta^-|, \quad \text{对 } \delta \ll 1. \quad (4.23)$$

令

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}, J^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{D} & \bar{M} \end{pmatrix},$$

则

$$\bar{A}^{-1} = A - BM^{-1}D,$$

$$\begin{aligned}\bar{c} &= -d^{-1}c\bar{a}, \\ \bar{A}^{-1}\bar{B} &= -BM^{-1}, \\ \bar{a}^{-1} &= a - bd^{-1}c.\end{aligned}$$

由(4.5)

$$|\bar{A}^{-1}| < \delta. \quad (4.24)$$

由(4.1), (4.2)

$$|\bar{c}| \leq |d^{-1}| |c| |\bar{a}| < L^2 |c|, \quad (4.25)$$

$$|\bar{a}^{-1}| \leq |a| + |bd^{-1}c| \leq L + L^3. \quad (4.26)$$

由(4.3)

$$|\bar{A}^{-1}\bar{B}| = |BM^{-1}| < L. \quad (4.27)$$

现在我们证明(4.23). 注意到 $A^{-1} = J^{-1}H^{-1}$, 我们有

$$\xi^- = (\bar{A}\bar{a} + \bar{B}\bar{c})\eta^- + (\bar{A}\bar{b} + \bar{B}\bar{d})\eta^+.$$

因此

$$|\xi^-| \geq |\bar{A}| [|\bar{a}\eta^-| - |\bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{c}\eta^-| - |\bar{b}\eta^+| - |\bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{d}\eta^+|]. \quad (4.28)$$

由(4.26)

$$|\bar{a}\eta^-| \geq (L + L^3)^{-1} |\eta^-|. \quad (4.29)$$

由(4.27), (4.25)和(4.8), 有

$$\begin{aligned}|\bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{c}\eta^-| &\leq |\bar{A}^{-1}\bar{B}| |\bar{c}| |\bar{\eta}| \\ &\leq L^2 |BM^{-1}| |\bar{c}| |\eta^-| \\ &\leq L^2 \delta |\eta^-|.\end{aligned} \quad (4.30)$$

由(4.1)

$$|\bar{b}\eta^+| < L |\eta^+|. \quad (4.31)$$

由(4.27)和(4.1)

$$|\bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{d}\eta^+| \leq |\bar{A}^{-1}\bar{B}| |\bar{d}| |\eta^+| \leq L^2 |\eta^+|. \quad (4.32)$$

注意到 $\eta \in K^-$, 由(4.31)和(4.32)得

$$|\bar{b}\eta^+| + |\bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{d}\eta^+| < \mu^{-1}(L + L^2) |\eta^-|. \quad (4.33)$$

由(4.24), (4.29), (4.30)和(4.33)得到(4.28)右端的下界估计. 因此

$$|\xi^-| \geq \delta^{-1}[(L + L^3)^{-1} - L^2\delta - (L + L^2)\mu_0^{-1}]|\eta^-|. \quad (4.34)$$

由(4.9)

$$(L + L^3)^{-1} - (L + L^2)\mu_0^{-1} > \frac{1}{2}(L + L^3)^{-1}.$$

因此当 δ 充分小时, 由(4.34)可推出(4.23). 引理的证明完成. \square

§ 5 Birkhoff-Smale 定理

本节我们利用 § 2—§ 4 所给出的结果证明 \mathbb{R}^3 中的 Birkhoff-Smale 定理.

定理的陈述

令 $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是向量场 X 的一条双曲周期轨, 设 $\lambda, 1, \mu$ 是它的三个特征指数, 满足 $|\lambda| < 1 < |\mu|$. 这样的周期轨有二维稳定流形 $W^s(\sigma)$ 和二维不稳定流形 $W^u(\sigma)$. 向量场 X 的一条轨道 γ 称为周期轨 σ 的同宿轨, 如果 $\gamma \neq \sigma$ 且 $\gamma \subset W^s(\sigma) \cap W^u(\sigma)$. 进一步, 同宿轨 γ 称为横截的, 如果流形 $W^s(\sigma)$ 与 $W^u(\sigma)$ 沿着轨道 γ 横截相交, 见图 4-6.

定理 5.1 (Birkhoff-Smale 定理) 令 X 是 \mathbb{R}^3 上的一个 C^∞ 光滑向量场, σ 是 X 的一条双曲周期轨. 如果 γ 是周期轨 σ 的一条横截同宿轨, 则 X 在 $\sigma \cup \gamma$ 的任意邻域里有无穷多条双曲周期轨.

事实上, 我们将证明比定理 5.1 更强的结论: 在 $\sigma \cup \gamma$ 的任意邻域里都可以构造一个存在马蹄的后继映射. 我们将证明分几步进行.

周期轨道的 Poincaré 映射

令 S 是一个与 σ 横截相交于 O 点的平面, 则在 S 上 O 点的邻

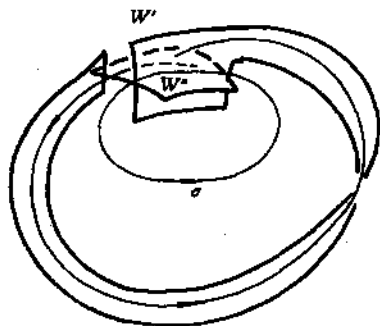


图4-6

域可以定义 Poincaré 映射. 由于 \mathbb{R}^2 上的微分同胚在它的双曲不动点处可以 C^1 线性化 (参见第一章定理 4.22), 故在 S 上 O 点的邻域可以选取一个坐标系, 使得

(1) O 点是坐标原点,

(2) Poincaré 映射 P 是线性的, $P(x, y) = (\lambda x, \mu y)$,

这里 $|\lambda| < 1 < |\mu|$. 直线 $x=0$ 和 $y=0$ 分别对应局部稳定流形和局部不稳定流形. 令两点 $p, q \in S \cap \gamma$ 分别属于局部稳定流形和局部不稳定流形, 作一个尺度变换便可假设 $p=(1, 0), q=(0, 1)$. 令

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \mid |x-1| \leq \delta_1, |y| \leq \delta_2\}, \\ \tilde{B} &= \{(x, y) \mid |x| \leq \delta_2, |y-1| \leq \delta_1\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

分别表示点 p 与 q 的一个邻域, 当 δ_1, δ_2 充分小时, 有

$$PB \cap B = \emptyset, P^{-1}\tilde{B} \cap \tilde{B} = \emptyset. \quad (5.2)$$

令 $D_n = P^{-n}\tilde{B} \cap B$ 表示 B 中所有在 P^n 作用下映到 \tilde{B} 的那些点所构成的集合, 当 n 充分大时 D_n 是 B 中一个高度很小而与 B 等宽的矩形. 由 (5.2) 有

$$D_n \cap D_m = \emptyset, \quad n \neq m. \quad (5.3)$$

再令 $\tilde{D}_n = P^n D_n$, 则 \tilde{D}_n 是 \tilde{B} 中一个宽度很小而与 \tilde{B} 等高的矩形,

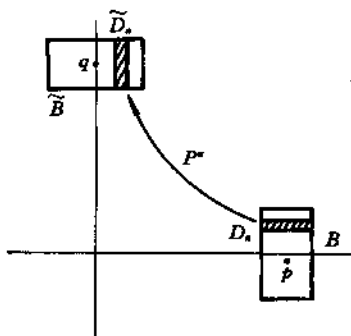


图4-7

见图4-7.

同宿轨道的后继映射

因为同宿轨 γ 连结 p, q 两点, 故当 δ_1, δ_2 充分小时, 系统 X 的每一条从 \tilde{B} 出发的正半轨将与 S 上 p 的一个邻域 U 相交于一点, 我们用 F 表示这一对应

$$F: \tilde{B} \rightarrow U. \quad (5.4)$$

由常微分方程的解对初值的光滑依赖性知, F 是 C^1 微分同胚. 令 $F(x, y) = (F_X, F_Y)$. 由于稳定流形与不稳定流形沿 γ 横截相交, 故有

$$\left. \frac{\partial F_Y}{\partial y} \right|_q \neq 0. \quad (5.5)$$

令

$$B_h = B \cap \{y = 0\}, \quad \tilde{B}_v = \tilde{B} \cap \{x = 0\}.$$

取定 δ_1 充分小, 使得

$$F\tilde{B}_v \cap B_h = \{p\}, \quad (5.6)$$

$$\left. \frac{\partial F_Y}{\partial y} \right|_{\tilde{B}_v} \neq 0, \quad (5.7)$$

$$F\tilde{B}_v \cap \partial B_h = \emptyset, \quad (5.8)$$

$$F\partial\tilde{B}_v \cap B_h = \emptyset, \quad (5.9)$$

这里 $\partial B_h = \{x=1 \pm \delta_1, y=0\}$, $\partial\tilde{B}_v = \{x=0, y=1 \pm \delta_1\}$. 由 (5.7) — (5.9) 可以取定 δ_2 充分小, 使得

$$\left. \frac{\partial F_Y}{\partial y} \right|_{\tilde{B}} \neq 0, \quad (5.10)$$

$$F\tilde{B} \cap \partial_v B = \emptyset, \quad (5.11)$$

$$F\partial_h \tilde{B} \cap B = \emptyset, \quad (5.12)$$

这里

$$\partial_v B = \{(x, y) \in B \mid x = 1 \pm \delta_1\},$$

$$\partial_h \tilde{B} = \{(x, y) \in \tilde{B} \mid y = 1 \pm \delta_1\}.$$

现在我们定义后继映射 $\Delta_n: D_n \rightarrow U$ 如下:

$$\Delta_n = F \circ P^n.$$

在集合 $\bigcup_n D_n$ 上定义后继映射 f 为

$$f|_{D_n} = \Delta_n.$$

下面将证明对所有充分大的整数 n , f 在区域 $D_n \cup D_{n+1}$ 上是一个马蹄映射. 为此, 我们将逐条验证 f 满足定理 3.2 的所有条件. D_n 是矩形. 它的边界的水平及垂直部分分别是

$$\partial_h D_n = \{(x, y) \mid |x-1| \leq \delta_1, |\mu^n y - 1| = \delta_2\}$$

和

$$\partial_v D_n = \{(x, y) \mid |x-1| = \delta_1, |\mu^n y - 1| \leq \delta_2\}.$$

引理 5.2 对任意正数 $\mu_h < \mu_v^{-1} \ll 1$, 都存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $f|_{D_n}$ 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件, 并且对 $i, j > N$ 有

(1) 边界条件成立: $f\partial_h D_i \cap D_j = \emptyset$, $fD_i \cap \partial_v D_j = \emptyset$;

(2) 相交条件成立: $fD_i \cap D_j \neq \emptyset$.

证明 首先我们利用引理 4.1 证明 f 满足锥形条件. 根据链

式法则,有

$$\begin{aligned}
 Df|_{D_n} &= DF \cdot DP^n \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_X}{\partial x} & \frac{\partial F_X}{\partial y} \\ \frac{\partial F_Y}{\partial x} & \frac{\partial F_Y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \\
 &= H \cdot J = H \begin{pmatrix} A & B \\ D & M \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

这里 $D=B=0$, $A=\lambda^n$, $M=\mu^n$, 令

$$L = \sup_{u \in B} \left\{ \|DF(u)\|, \|DF(u)^{-1}\|, \left| \frac{\partial F_Y}{\partial y} \right|^{-1} \right\}.$$

由(5.10)及 F 是一个 C^1 微分同胚, 我们有

$$L < +\infty.$$

令 δ 是引理4.1中所确定的常数, 注意到 $B=D=0$,

$$|A| = |\lambda^n| \rightarrow 0, |M^{-1}| = |\mu^{-n}| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty,$$

对充分大的 n , (4.3) — (4.8) 显然成立.

下面验证边界条件. 注意到

$$D_j \subset B, P^i D_i \subset \tilde{B}, P^i(a_h D_i) \subset a_h \tilde{B}, a_v D_j \subset a_v B$$

以及(5.11)和(5.12), 便知边界条件成立.

最后验证相交条件. 在 D_i 中有两族直线, 即所谓水平直线族和垂直直线族:

$$C_h^i(y) = B_h \times \{y\}, y \in (D_i)_v,$$

$$C_v^i(x) = \{x\} \times (D_i)_v, x \in B_h,$$

这里 $(D_i)_v = \{|\mu^i y - 1| \leq \delta_i\}$. 注意到

$$C_h^i(y) \xrightarrow{C^1} B_h, P^i C_v^i(x) \xrightarrow{C^1} \tilde{B}_v, \text{ 当 } i \rightarrow +\infty,$$

再利用(5.6)得到, 当 i, j 充分大时, 曲线 $f C_v^i(x)$ 与 $C_h^j(y)$ 在 p 点附近相交于唯一一点. 因此

$$fD_i \cap D_j \neq \emptyset.$$

引理证毕. ■

最后,由引理5.2及定理3.2可推出定理5.1.

与本章 § 1, § 3和 § 5中相应的在高维($n > 3$)情况下的结果,可参见[Wi2]和[Si1].

第五章 空间中双曲鞍点的同宿分岔

本章将考虑空间 R^3 中鞍点的同宿分岔. 在 §1 中将讨论特征根都为实数的鞍点的同宿分岔. 在 §2 中将讨论有复特征根的鞍点的同宿分岔. 在 §3 中将讨论由一个奇点和一条闭轨以及连结它们的两条异宿轨所组成的环的分岔. 通过本章的学习, 读者将会对如何利用奇点或不动点附近的线性化理论(见第一章 §4)来研究非局部分岔问题有初步的了解.

§1 具有三个实特征值的鞍点的同宿分岔

本节介绍的结果是平面上相应结果(见第二章 §4)在空间中的推广.

周期轨道的产生

假设 R^3 中一光滑向量场有一个特征值都为实数的双曲鞍点及其同宿轨. 我们考虑这样一个向量场在一般的单参数扰动下所能发生的分岔. 不失一般性, 我们总可以认为鞍点有两个负特征值和一个正特征值(否则考虑其时间反向系统). 这样的鞍点具有二维的稳定流形和一维的不稳定流形. 我们称最大的负特征值与正特征值之和为鞍点量.

定理1.1 令 X_ϵ 是 R^3 中一个一般的单参数向量场族. 设当参数 $\epsilon=0$ 时, 向量场 X_0 有一个鞍点 O , 它具有两个负特征值和一个正特征值, 并且鞍点 O 有一条同宿轨 γ , 则存在 $\gamma \cup O$ 的邻域 U 和参数空间中 $\epsilon=0$ 的邻域 V , 使得当参数 ϵ 位于 V 中零值的某一侧时, 向量场 X_ϵ 在 U 中有唯一一条双曲周期轨 $\gamma_\epsilon \rightarrow \gamma$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$. 进一步, 如果鞍点量为正, 则 γ_ϵ 有二维的稳定流形和二维的不稳定

流形. 如果鞍点量为负, 则 γ_ε 是稳定的; 而当参数 ε 位于 V 中零值另一侧时, X_ε 在 U 中没有周期轨.

一般性假设

在证明定理之前, 我们首先解释定理陈述中“一般”一词的含义, 即所给出的单参数向量场族 X_ε 应满足下面四条假设, 其中前三条是针对向量场 X_0 的, 最后一条是对族 X_ε 本身的.

(1) 鞍点 O 的特征值两两不相同且为非共振.

此假设意味着向量场 X_0 在点 O 邻域内光滑等价于向量场 X_0 . 在点 O 处的线性部分 (参见第一章定理 4.18), 故在线性化坐标系下, 稳定流形是一个平面, 而不稳定流形是一条直线. 在稳定平面上, 除了奇点 O 和一条通过 O 点的直线外, 所有轨道当 $t \rightarrow +\infty$ 时都沿着对应较大负特征值的特征方向趋于 O 点, 这一方向称为主稳定方向.

(2) 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 同宿轨沿主稳定方向趋于 O 点.

下一条假设是基于如下的事实: 对应两个较大特征值的特征向量张成一个不变平面 W , 这一不变平面沿着同宿轨延伸.

(3) 流形 W 与鞍点 O 的稳定流形沿着同宿轨横截相交, 见图 5-1.

(4) 当参数通过零值时, 同宿轨以横截方式产生和消失 (确切定义将在下面给出).

定理 1.1 证明的思路

我们将通过研究向量场在同宿轨附近定义的 Poincaré 映射来证明定理. 为此, 在鞍点邻域内可以选择两个与同宿轨横截的曲面 Γ^+ 与 Γ^- , 其中以 Γ^+ 上的点为初值的正半轨道进入邻域, 而以 Γ^- 上的点为初值的正半轨离开邻域. 首先, 定义映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$. 这一映射定义在 Γ^+ 上的某个区域, 它将 Γ^+ 上的一点映到以该点为初值的正半轨与 Γ^- 的第一个交点. 假设 (1) 使我们可以把向量场在 O 点的邻域里看成是线性的, 因而映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 可以精确地用初

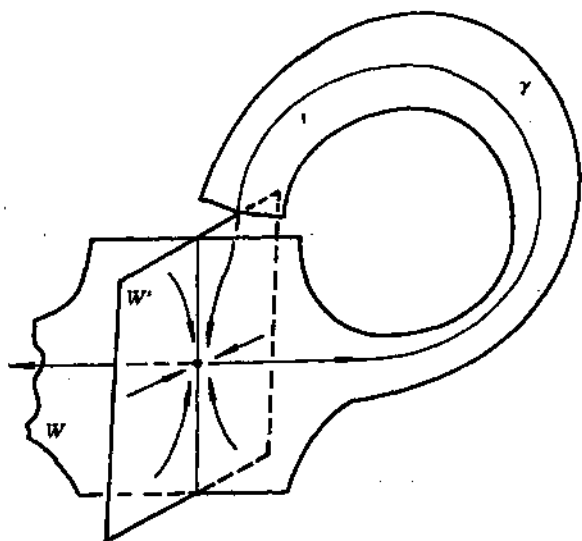


图5-1

等函数表示出来. 当鞍点量分别是正和负时, $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 分别具有强双曲性和强压缩性. 另一方面, 因为同宿轨分别与 Γ^+ 和 Γ^- 相交, 因而沿轨道我们可以定义从同宿轨与 Γ^- 的交点的邻域到同宿轨与 Γ^+ 的交点的邻域的映射, 并将它记作 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$, 见图5-2. 由解对初值及参数的依赖性定理可知, $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 是一个光滑依赖于参数 ε 的微分同胚. 于是, 同宿轨的 Poincaré 映射可定义为

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{\text{reg}} \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}.$$

最后, 我们分别利用双曲不动点定理和压缩映象原理, 讨论当鞍点量为正和为负时, 映射 Δ_ε 的不动点的存在性.

映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 的定义和性质

由假设(1), 利用第一章定理4.27, 在鞍点 O 的一个邻域里,

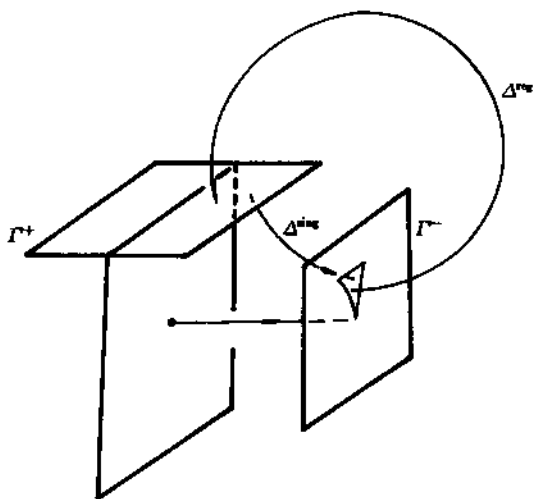


图5-2

我们可选择一坐标系,使得族 X_ε 具有形式

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1(\varepsilon)x, \\ \dot{y} = \lambda_2(\varepsilon)y, \\ \dot{z} = \mu(\varepsilon)z, \end{cases} \quad \lambda_2(0) < \lambda_1(0) < 0 < \mu(0). \quad (1.1)$$

令

$$\Gamma^+ = \{x = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\},$$

$$\Gamma^- = \{z = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

由假设(2),我们可以认为同宿轨与 Γ^+ 相交于一点 $p_0 = (1, y_0, 0)$, $|y_0| < 1$. 不失一般性,我们还可假设, O 点邻域中正 z 轴是同宿轨的一部分. 这样,同宿轨与 Γ^- 相交于点 $q_0 = (0, 0, 1)$. 下面我们来计算 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$. 系统(1.1)的以 (x, y, z) 为初值的解为

$$\begin{cases} x(t) = x \exp(\lambda_1(\epsilon)t), \\ y(t) = y \exp(\lambda_2(\epsilon)t), \\ z(t) = z \exp(\mu(\epsilon)t). \end{cases} \quad (1.2)$$

注意到在 Γ^- 上 $z=1$, 因此由等式

$$1 = z \exp(\mu(\epsilon)t)$$

可解出轨道从 $\Gamma^+ \cap \{z>0\}$ 上一点出发走到 Γ^- 所需时间

$$t = -\frac{\ln z}{\mu(\epsilon)}.$$

然后代入(1.2)中前两式,并注意到在 Γ^+ 上 $x=1$,便可得到

$$\Delta_\epsilon^{\text{sing}}: (y, z) \rightarrow (y', z') = (yz^\alpha, z^\beta), \quad (1.3)$$

这里 $\alpha = -\lambda_2(\epsilon)/\mu(\epsilon) > -\lambda_1(\epsilon)/\mu(\epsilon) = \beta$.

映射 $\Delta_\epsilon^{\text{reg}}$ 的定义和性质

因为当 $\epsilon=0$ 时,同宿轨连结 Γ^- 上的点 $q_0=(0,0,1)$ 与 Γ^+ 上的点 $p_0=(1,y_0,0)$,由解对初值与参数的依赖性可知,存在 Γ^- 上 q_0 的邻域 Q ,使得对于所有充分小的参数 ϵ , X_ϵ 从 Q 中的点出发的正半轨与 Γ^+ 交于 p_0 附近一点.我们将这一对应关系记作

$$\Delta_\epsilon^{\text{reg}}: Q \subset \Gamma^- \rightarrow \Gamma^+.$$

映射 $\Delta_\epsilon^{\text{reg}}$ 是一个光滑依赖于 ϵ 的微分同胚. 令

$$\Delta_\epsilon^{\text{reg}}(q_0) = (Y(\epsilon), Z(\epsilon)), (Y(0), Z(0)) = (y_0, 0).$$

不难看出, $(Y(\epsilon), Z(\epsilon))$ 是鞍点的不稳定流形与 Γ^+ 的交点,面 $Z(\epsilon)$ 是该交点到稳定流形的距离. 假设(4)的精确含义是

$$\frac{d}{d\epsilon} Z(\epsilon)|_{\epsilon=0} \neq 0. \quad (1.4)$$

作参数变换 $Z(\epsilon) = \mu$, 然后把 μ 和 $Y(Z^{-1}(\mu))$ 仍记为 ϵ 和 $Y(\epsilon)$, 便有

$$\Delta_\epsilon^{\text{reg}}(q_0) = (Y(\epsilon), \epsilon). \quad (1.5)$$

令

$$\Pi_h = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid 0 \leq z \leq h\},$$

由(1.3)

$$\|\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(y, z)\|_{\Pi_h} = O(1)h^\beta \rightarrow 0, \text{ 当 } h \rightarrow 0.$$

故当 h 充分小时, 对 $(y, z) \in \Pi_h$, $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(y, z)$ 必然属于 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 的定义域 Q . 这样在 Π_h 上, 我们可以定义 Poincaré 映射如下:

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{\text{reg}} \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}: \Pi_h \rightarrow \Gamma^+.$$

稳定周期轨的产生

现在我们对鞍点量为负的情况来证明定理 1.1.

因为鞍点量 $\sigma = \lambda_1(0) + \mu(0) < 0$, 所以

$$\beta = -\frac{\lambda_1(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} > 1, \quad \text{对 } |\varepsilon| \ll 1.$$

由(1.3)

$$\begin{aligned} \|D\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}\|_{\Pi_h} &= \left\| \begin{pmatrix} z^\alpha & \alpha y z^{\alpha-1} \\ 0 & \beta z^{\beta-1} \end{pmatrix} \right\|_{\Pi_h} \\ &= O(1)h^{\beta-1} \rightarrow 0, \text{ 当 } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

注意到 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 是一个光滑依赖于参数 ε 的微分同胚, 故它的导算子关于参数一致有界. 因此, (1.6) 意味着

$$\|D\Delta_\varepsilon\|_{\Pi_h} \rightarrow 0, \quad \text{当 } h \rightarrow 0.$$

特别地, 当 h 充分小, $\Delta_\varepsilon|_{\Pi_h}$ 是一个具有压缩常数 $\frac{1}{4}$ 的压缩映射. 因此, Δ_ε 在 Π_h 上至多有一个不动点. 下面我们分别对情况 $\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon \leq 0$ 来讨论映射 Δ_ε 的不动点的存在性.

(1) $\varepsilon > 0$.

对任意点 $(y, z) \in \Pi_{2\varepsilon}$, 有

$$\begin{aligned} \|\Delta_\varepsilon(y, z) - (Y(\varepsilon), \varepsilon)\| &= \|\Delta_\varepsilon(y, z) - \Delta_\varepsilon(y, 0)\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|(y, z) - (y, 0)\| = \frac{1}{4}z < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.7)$$

注意到 $Y(0) = y_0 \in (-1, 1)$, 故

$$\Delta_\epsilon \Pi_{2\epsilon} \subset \Pi_{2\epsilon}, \epsilon \ll 1.$$

由压缩映象原理可知, Δ_ϵ 在 $\Pi_{2\epsilon}$ 内有唯一吸引不动点, 又由 (1.5), $\Delta_\epsilon|_{z=0} = (Y(\epsilon), \epsilon)$, 故不动点不位于直线 $z=0$ 上. 因此, 系统 X_ϵ 过不动点的轨道是一个吸引周期轨. 而不等式 (1.7) 意味着不动点与点 $(Y(\epsilon), \epsilon)$ 的距离不超过 ϵ . 因此, 周期轨当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时趋于 X_0 的同宿轨的位置.

$$(2) \epsilon \leq 0.$$

令 $\Delta_\epsilon = (\Delta_y, \Delta_z)$. 对任意点 $(y, z) \in \Pi_h$,

$$\begin{aligned} \Delta_z(y, z) &\leq \Delta_z(y, z) - \epsilon \leq \|(\Delta_y, \Delta_z)(y, z) - (Y(\epsilon), \epsilon)\| \\ &= \|\Delta_\epsilon(y, z) - \Delta_\epsilon(y, 0)\| \leq \frac{1}{4} \|(y, z) - (y, 0)\| \\ &= \frac{1}{4} z < z. \end{aligned}$$

上边不等式中等号成立, 当且仅当

$$z = \epsilon = 0.$$

这样, 一个点的 z 坐标在映射 Δ_ϵ 的作用下减少, 因而 Δ_ϵ 在区域 $\Pi_h \setminus \{z=0\}$ 上没有周期点.

附注1.2 在上边的证明中没有用到假设 (3).

鞍类周期轨的产生

现在对鞍点量为正的情况来证明定理. 与鞍点量为负的情况不同, 我们将利用双曲不动点定理来研究映射 Δ_ϵ 不动点的存在性和唯一性. 令

$$\Delta_\epsilon^{\text{reg}}(y', x') = (\Delta_y^{\text{reg}}, \Delta_z^{\text{reg}})(y', x', \epsilon).$$

假设 (3) 意味着

$$d = \left. \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial x'} \right|_{(0,0,0)} \neq 0. \quad (1.8)$$

情况 $d > 0$ 和 $d < 0$ 分别对应所谓可定向同宿轨和不可定向同宿轨. 在区域 Π_h 上, 我们将 y 方向看成水平方向, 而把 z 方向看成垂

直方向.

引理1.3 存在正常数 $\mu_h, \mu_\varepsilon, \mu_h \mu_\varepsilon < 1$, 使得对所有 $h, |\varepsilon| \ll 1$, 映射 Δ_ε 在 Π_h 上满足 (μ_h, μ_ε) 锥形条件.

证明 我们用第四章引理4.1来证明.

令 $(y', x') = \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(y, z)$. 由链式法则,

$$\begin{aligned} D\Delta_\varepsilon(y, z) &= D\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(y', x') \cdot D\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(y, z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_y^{\text{reg}}}{\partial y'} & \frac{\partial \Delta_y^{\text{reg}}}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial y'} & \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial x'} \end{pmatrix}_{(y', x')} \cdot \begin{pmatrix} z^\alpha & \alpha y z^{\alpha-1} \\ 0 & \beta z^{\beta-1} \end{pmatrix} \\ &= H \cdot \begin{pmatrix} \Lambda & B \\ D & M \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} H &= D\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(y', z'), \quad \Lambda = z^\alpha, \quad B = \alpha y z^{\alpha-1}, \\ D &= 0, \quad M = \beta z^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

由第四章引理4.1可知, 引理1.3成立, 如果存在常数 $L > 0$, 使得

$$L > \max \left\{ \|H\|, \|H^{-1}\|, \left| \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial x'} \right|^{-1} \right\}$$

以及一个依赖于 L 的常数 $\delta(L)$, 使得

$$\max \{ |M^{-1}|, |BM^{-1}|, |\Lambda - BM^{-1}D|, |M^{-1}D|, |\Lambda M^{-1}| \} < \delta(L).$$

注意到(1.8)和 $H \rightarrow D\Delta_0^{\text{reg}}(q_0)$, 当 $h, \varepsilon \rightarrow 0$, 我们立即得到上面第一个不等式. 现在我们来验证第二个不等式. 因为鞍点量为正, 故有

$$\beta = -\frac{\lambda_1(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} < 1, \quad |\varepsilon| \ll 1.$$

因此

$$\begin{aligned} |M^{-1}| |D| &= 0, \\ |M^{-1}| &= \frac{1}{\beta} z^{1-\beta} \rightarrow 0, \quad |BM^{-1}| = \frac{\alpha}{\beta} y z^{\alpha-\beta} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$|\Lambda - BM^{-1}D| = z^\alpha \rightarrow 0$, $|\Lambda| \cdot |M^{-1}| = z^{\alpha-\beta+1} \rightarrow 0$,
第二个不等式必然成立, 引理证毕. \square

下面我们分情况讨论.

(1) $d > 0$.

对于 $(y, z) \in \Pi_h$, 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_z(y, z) &= \Delta_z^{\text{reg}} \circ \Delta_\epsilon^{\text{sing}}(y, z) - \Delta_z^{\text{reg}}(0, 0, \epsilon) + \epsilon \\ &= \Delta_z^{\text{reg}}(yz^\alpha, z^\beta, \epsilon) - \Delta_z^{\text{reg}}(0, 0, \epsilon) + \epsilon \\ &= \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial y'} yz^\alpha + \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial z'} z^\beta + \epsilon \\ &\geq \frac{d}{2} z^\beta - \left| \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial y'} \right| z^\alpha + \epsilon \\ &\geq 3z + \epsilon, \quad 0 < z < h \ll 1.\end{aligned}\tag{1.10}$$

先设 $\epsilon \geq 0$. 由 (1.10), 当 $z > 0$ 时, $\Delta_z(y, z) > z$. 这意味着 Δ_ϵ 在 $\Pi_h \setminus \{z=0\}$ 上没有周期轨.

再设 $\epsilon < 0$. 下面用双曲不动点定理来证明, Δ_ϵ 在 Π_h 内有唯一鞍类不动点. 因为 $\Delta_z(y, 0) = \epsilon < 0$, 我们可以找到这样一个依赖于 ϵ 的常数 $0 < C_\epsilon < -\epsilon$, 使得

$$\Delta_z(y, z) < 0, \quad 0 \leq z \leq C_\epsilon.\tag{1.11}$$

考虑 Γ^+ 上的矩形

$$D_\epsilon = \{(y, z) \mid C_\epsilon \leq z \leq -\epsilon, |y| \leq 1\},$$

则矩形 D_ϵ 的边界的水平部分为

$$\partial_h D_\epsilon = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid z = C_\epsilon, -\epsilon, |y| \leq 1\},$$

D_ϵ 的边界的垂直部分为

$$\partial_v D_\epsilon = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid y = \pm 1, C_\epsilon \leq z \leq -\epsilon\}.$$

对于任一点 $(y, z) \in D_\epsilon$, 我们有

$$\begin{aligned}|\Delta_\epsilon(y, z) - (y_0, 0)| &\leq |\Delta_\epsilon(y, z) - \Delta_\epsilon^{\text{reg}}(0, 0)| \\ &\quad + |\Delta_\epsilon^{\text{reg}}(0, 0) - (y_0, 0)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(yz^\alpha, z^\beta) - \Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(0, 0)| + |(Y(\varepsilon), \varepsilon) - (y_0, 0)| \\
&\leq \left| \frac{\partial \Delta_\varepsilon^{\text{reg}}}{\partial y'} \right| \cdot |yz^\alpha| + \left| \frac{\partial \Delta_\varepsilon^{\text{reg}}}{\partial x'} \right| \cdot |z^\beta| + |(Y(\varepsilon), \varepsilon) - (y_0, 0)| \\
&= O(1)|\varepsilon|^\beta.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

注意到 $|y_0| < 1$, 我们有

$$\Delta_\varepsilon D_\varepsilon \cap \partial_v D_\varepsilon = \emptyset, |\varepsilon| \ll 1. \tag{1.13}$$

由(1.10)有

$$\Delta_z(y, -\varepsilon) > -2\varepsilon > -\varepsilon. \tag{1.14}$$

(1.14)与(1.11)一起推出

$$\Delta_\varepsilon \partial_h D_\varepsilon \cap D_\varepsilon = \emptyset, \tag{1.15}$$

以及

$$\Delta_\varepsilon D_\varepsilon \cap D_\varepsilon \neq \emptyset. \tag{1.16}$$

(1.13), (1.15), (1.16)和引理1.3保证了 Poincaré 映射 Δ_ε 在区域 D_ε 上满足第四章定理1.5的所有条件. 因而 Δ_ε 在 D_ε 内有唯一双曲不动点. 进一步从(1.12)可以看出, 此不动点当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 趋于系统 X_0 的同宿轨与 Γ^+ 的交点 $(y_0, 0)$. 因而, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 通过该不动点的周期轨趋于同宿轨. 另外, (1.10)和(1.11)还保证了在 Π_h 中, 映射 Δ_ε 没有其它不动点.

(2) $d < 0$.

对于 $(y, z) \in \Pi_h$, 有

$$\begin{aligned}
\Delta_z(y, z) &= \Delta_z^{\text{reg}}(y', x', \varepsilon) \\
&= \Delta_z^{\text{reg}}(yz^\alpha, z^\beta, \varepsilon) - \Delta_z^{\text{reg}}(0, 0, \varepsilon) + \varepsilon \\
&= \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial y'} yz^\alpha + \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial x'} z^\beta + \varepsilon \\
&< \frac{d}{2} z^\beta + \left| \frac{\partial \Delta_z^{\text{reg}}}{\partial y'} \right| z^\alpha + \varepsilon \\
&< -3z + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

先设 $\epsilon \leq 0$. 由 (1.17) 得

$$\Delta_z(y, z) < 0, \text{ 当 } (y, z) \in \Pi_h \setminus \{z = 0\},$$

故映射 Δ_ϵ 在 $\Pi_h / \{z = 0\}$ 上没有周期点.

再设 $\epsilon > 0$. 因为 $\Delta_z(y, 0) = \epsilon$, 故存在一个依赖于参数 ϵ 的常数 $0 < C_\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$, 使得

$$\Delta_z(y, z) > \frac{\epsilon}{2}, \text{ 对 } 0 \leq z \leq C_\epsilon. \quad (1.18)$$

由 (1.17) 得

$$\Delta_z(y, \frac{\epsilon}{2}) < -\frac{\epsilon}{2} < 0. \quad (1.19)$$

现在考虑 Γ^+ 上的矩形 $D_\epsilon = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid C_\epsilon \leq z \leq \frac{\epsilon}{2}, |y| \leq 1\}$. 矩形 D_ϵ 的边界的水平部分和垂直部分分别是

$$\partial_h D_\epsilon = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid z = C_\epsilon, \epsilon/2, |y| \leq 1\}$$

和

$$\partial_v D_\epsilon = \{(y, z) \in \Gamma^+ \mid C_\epsilon \leq z \leq \epsilon/2, y = \pm 1\}.$$

不难验证, 不等式 (1.12) 仍成立, 因而 (1.13) 也成立. 进一步由 (1.18) 和 (1.19) 可推出 (1.15) 和 (1.16). 与情况 $d > 0$ 时完全类似, 我们可以证明映射在 D_ϵ 内有唯一双曲不动点. 定理证毕. \square

§2 空间中鞍焦点的同宿分岔

我们将 \mathbf{R}^3 中具有一对复特征值和一实特征值的双曲鞍点称为鞍焦点. 本节将考虑鞍焦点的同宿分岔. 不失一般性, 我们可以假设鞍焦点的一对复特征值具有负实部, 而它的实特征值为正数, 否则可通过时间反向而转化为上述情况. 实特征值与复特征值的实部的和称作鞍点量. 鞍点量为正或为负的鞍焦点所对应的同宿分岔有着本质的不同. 当鞍点量为负时, 分岔与本章 §1 中相应的情况类似; 而当鞍点量为正时, 在鞍焦点的同宿轨的任意邻域中定

义的 Poincaré 映射都存在“马蹄”. 这样一类向量场在单参数扰动下的分岔现象, 迄今为至还没有完全研究清楚.

具有负鞍点量的鞍焦点的同宿分岔

本节第一个主要结果如下:

定理2.1 令 X_ϵ 是 \mathbb{R}^3 中一个一般的单参数向量场族. 假设当 $\epsilon=0$ 时, X_0 有一条具有负鞍点量且不稳定流形为一维的鞍焦点 O 的同宿轨 γ , 则存在 $\gamma \cup O$ 的邻域 U 和参数空间中零值的邻域 V 使得当参数 ϵ 位于 V 中零值某一侧时, X_ϵ 在 U 中有唯一周期轨, 此周期轨是稳定的, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时趋于 γ ; 而当 ϵ 位于 V 中零值另一侧时, X_ϵ 在 U 内没有周期轨.

在定理2.1的陈述中, “一般”一词的含义是

(1) 向量场 X_0 的鞍焦点的特征值非共振;

(2) 当参数通过零值时, 系统 X_ϵ 的同宿轨以横截方式产生和消失(确切含义见(2.10)).

定理2.1证明的直观含义

在给出严格证明以前, 为便于读者理解, 我们先给出证明的直观描述, 为此我们将尽量把问题简化. 首先我们假设, 在鞍焦点的邻域里向量场可由下面线性微分方程组给出

$$\begin{cases} \dot{w} = (\lambda + i\omega)w, \\ \dot{z} = \mu z, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $w = x + iy = r \exp(i\theta)$, $z \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0 < \mu$, $\omega \neq 0$. 令

$$\Gamma^+ = \{r = 1\}, \Gamma^- = \{z = 1\}. \quad (2.2)$$

不失一般性, 我们假设同宿轨 γ 与 Γ^+ 和 Γ^- 的交点分别为

$$\begin{aligned} p &= \gamma \cap \Gamma^+ : \{(\theta, z) = (0, 0)\}, \\ q &= \gamma \cap \Gamma^- : (x, y, z) = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

令

$$\Pi_h = \{(\theta, z) \in \Gamma^+ \mid 0 \leq z \leq h, |\theta| \leq 1\}. \quad (2.4)$$

注意到(2.1)是变量分离的. 换句话说, 它是分别定义在稳定流形与不稳定流形上的两子系统的积. 因此, (2.1)的任何轨道沿 z 轴方向向 (x, y) 平面的投影是方程 $\dot{w} = (\lambda + i\omega)w$ 的轨道. 这样, 所有以 Π_h 上的点为初值的正半轨位于一个平行于 z 轴的柱形区域里, 这一柱形区域的底是一个“粗螺线” T_0 , 其中 T_0 是由区域 $\Pi_h \cap \{z=0\}$ 上出发的正半轨线的并组成. 我们用 Δ^{sing} 表示沿系统(2.1)的轨道从 Π_h 到 Γ^- 的映射, 即 Π_h 上每一点映到从该点出发的正半轨与 Γ^- 的第一个交点. 为了描述区域 Π_h 在 Δ^{sing} 作用下的象, 只需将 T_0 沿 z 轴方向提升到平面 Γ^- , 然后再去掉其在圆周 C :

$r = H = h^V, V = -\frac{\lambda}{\mu}$ 之外的部分. 有两种情况需要考虑

(1) 鞍点量为负: $\sigma = \lambda + \mu < 0$. 此时 $V > 1$, 故 $H = h^V \ll h$.

(2) 鞍点量为正: $\sigma = \lambda + \mu > 0$, 此时 $V < 1$, 故 $H = h^V \gg h$.

见图5-3.

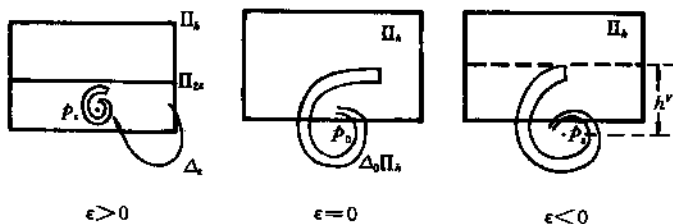


图5-3

在定理2.1中只考虑第一种情况. 根据假设同宿轨连结 Γ^+ 的点 p 与 Γ^- 上的点 q . 由解对初值及参数的依赖性, 对于所有充分小的参数, Γ^- 上 q 点附近出发的正半轨道将与 Γ^+ 交于 p 点附近的一点, 我们用 $\Delta_\epsilon^{\text{reg}}$ 表示这一对应关系. 为了简单起见, 我们假设 $\Delta_\epsilon^{\text{reg}}$ 是一个平移:

$$\Delta_\epsilon^{\text{reg}}: (x, y) \mapsto (\theta, z) = \Delta_\epsilon^{\text{reg}}(x, y) = (x, y + \epsilon).$$

记 $p_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(0,0) = (0,\varepsilon)$ 是鞍焦点的不稳定流形与 Γ^+ 的交. 不难看出, Π_h 在 Poincaré 映射 $\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{\text{reg}} \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 的作用下的象是一个以点 p_ε 为极点的“粗螺线”, 并且它位于圆周 $C_H^\varepsilon: |(\theta, z) - p_\varepsilon| = H = h^\nu$ 的内部. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 因为集合 $\Delta_\varepsilon \Pi_{2\varepsilon}$ 位于 $C_H^\varepsilon, H = (2\varepsilon)^\nu$ 的内部, 因而 Δ_ε 是 $\Pi_{2\varepsilon}$ 到自身的压缩映射, 故有唯一吸引不动点. 当 $\varepsilon < 0$ 时, 圆周 $C_H^\varepsilon, H = h^\nu$ 内部的点的 z 坐标小于 h , 这意味着映射 Δ_ε 象的 z 坐标比其原象的 z 坐标小, 故 Δ_ε 没有周期点.

定理2.1的证明

我们将证明分成几步

(1) 映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 的定义及性质

由假设1, 应用第一章定理4.27, 在鞍焦点的一个邻域 \tilde{U} 里存在一个坐标系 (x, y, z) , 使得 X_ε 在 \tilde{U} 内是线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda(\varepsilon)x - \omega(\varepsilon)y, \\ \dot{y} = \omega(\varepsilon)x + \lambda(\varepsilon)y, \\ \dot{z} = \mu(\varepsilon)z, \end{cases} \quad (2.5)$$

这里 $\lambda(0) < 0 < \mu(0), \sigma = \lambda(0) + \mu(0) < 0$. 如果必要的话, 可对 (2.5) 做尺度变换, 故我们总可假设 $\{(x, y, z) \mid |x|, |y|, |z| \leq 1\} \subset \tilde{U}$. 不失一般性, 我们还可进一步假设, 当 $\varepsilon = 0$ 时, \tilde{U} 中正 z 轴是同宿轨的一部分. 令

$$\Gamma^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\},$$

$$\Gamma_h^+ = \{(x, y, z) \in \Gamma^+ \mid 0 \leq z \leq h\},$$

$$\Gamma^- = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$

方程(2.2)的以点 $(x, y, z) \in \Gamma_h^+$ 为初值的解有下列形式

$$x(t) = \exp(\lambda(\varepsilon)t) [\cos(\omega(\varepsilon)t)x - \sin(\omega(\varepsilon)t)y],$$

$$y(t) = \exp(\lambda(\varepsilon)t) [\sin(\omega(\varepsilon)t)x + \cos(\omega(\varepsilon)t)y],$$

$$z(t) = \exp(\mu(\varepsilon)t)z.$$

从上面第三个等式解得轨道到达 Γ^- 所需时间为 $t = -\mu(\varepsilon)^{-1} \ln z$.

将其代入前两个等式,得到轨道与 Γ^- 的交点坐标 $(x', y', 1)$ 满足

$$(x', y') = (x^{-\alpha}(x \cos \beta - y \sin \beta), x^{-\alpha}(x \sin \beta + y \cos \beta)),$$

这里 $\alpha = \lambda(\varepsilon)/\mu(\varepsilon) < 0, \beta = -\frac{\omega(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} \ln x$. 我们用 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 代表系统 (2.5) 的沿轨道从 Γ_h^+ 到 Γ^- 的映射. 如果我们在 Γ^+ 上引进坐标 $(\theta, z), \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, 则 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}$ 可表示成一个二维映射

$$(x', y') = \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(\theta, z) = (x^{-\alpha} \cos(\theta + \beta), x^{-\alpha} \sin(\theta + \beta)). \quad (2.6)$$

微分上式得到

$$D\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(\theta, z) = x^{-\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} M, \quad (2.7)$$

此处

$$M = \begin{pmatrix} -z \sin \theta & -\frac{1}{\mu(\varepsilon)}(\lambda(\varepsilon) \cos \theta - \omega(\varepsilon) \sin \theta) \\ z \cos \theta & -\frac{1}{\mu(\varepsilon)}(\lambda(\varepsilon) \sin \theta + \omega(\varepsilon) \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

因为鞍点量 $\sigma = \lambda(0) + \mu(0) < 0$, 故

$$-\alpha - 1 = -\frac{\lambda(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} - 1 > 0, \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

因此

$$\|D\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(\theta, z)\|_{\Gamma_h^+} \leq O(1)h^{-\alpha-1} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

这意味着当 h 充分小时, $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}|_{\Gamma_h^+}$ 是强压缩的.

(2) 映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 的定义及性质

用 p, q 分别表示同宿轨 γ 与 Γ^+ 和 Γ^- 的交点. 将坐标系做一个绕 z 轴的旋转, 我们可以假设 p 点位于 x 轴上 ($\theta=0$). 令

$$\Gamma_{h,\delta}^+ = \{(\theta, z) \in \Gamma_h^+ \mid |\theta| \leq \delta\}, \quad (2.9)$$

这里 $\delta < \pi$ 是常数. 当 $\varepsilon=0$ 时, 同宿轨 γ 连结 Γ^- 上的点 $q(x', y') = (0, 0)$ 与点 p . 由解对初值与参数的依赖性定理, 存在 Γ^- 上 q 点邻域 Q , 当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 每条从 Q 中一点出发的正半轨都与 Γ^+ 交

于 p 点附近一点, 这种对应关系我们用 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 表示. $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}: Q \rightarrow \Gamma^+$, 是一个微分同胚. 令

$$\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(q) = (\theta(\varepsilon), z(\varepsilon)), \quad (\theta(0), z(0)) = (0, 0),$$

则假设(2)的确切含义为

$$\frac{d}{d\varepsilon} z(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \neq 0. \quad (2.10)$$

做参数变换 $z(\varepsilon) \mapsto \varepsilon$, 我们可假设

$$\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}(q) = (\theta(\varepsilon), \varepsilon),$$

即不稳定流形和 Γ^+ 的交点与稳定流形 $\{z=0\}$ 的距离为 $|\varepsilon|$.

(3) Poincaré 映射和它的不动点

由(2.6), 当 h 充分小时, 象 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}} \Gamma_{h,\delta}^+$ 包含在 $\Delta_\varepsilon^{\text{reg}}$ 的定义域 Q 里, 故在 $\Gamma_{h,\delta}^+$ 上可定义 Poincaré 映射如下

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{\text{reg}} \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}.$$

由(2.8), 当 h 充分小时, Δ_ε 是一个压缩常数小于 $\frac{1}{4}$ 的压缩映射. 接下去对 Δ_ε 的不动点的存在性的讨论与 §1 中关于鞍点量为负情况的讨论类似, 我们在这里从略.

定理2.1证毕. \blacksquare

鞍点量为正的鞍焦点的同宿分岔: 马蹄的存在性

定理2.2 设空间中一个光滑向量场有一条具有二维稳定流形的鞍焦点的同宿轨. 若鞍焦点的鞍点量为正, 则在同宿轨的任意邻域里都有无穷多条双曲周期轨.

定理2.2证明的思路 我们将通过验证同宿轨的 Poincaré 映射存在“马蹄”来证明定理. 下面我们仍然利用公式(2.2), (2.3)和(2.4)中的记号. 问题的关键是要证明 Poincaré 映射 Δ 在 Γ^+ 的某个子集上满足第四章的马蹄存在定理的条件. 正如我们前面所说, 象 $\Delta \Pi_h$ 是一个以 p 为极点的粗螺线, 粗螺线距点 p 的最大距离约为 $O(1)h^\nu$, 集合 $\Delta \Pi_h \setminus \{z=0\}$ 有可数个连通分岔. 我们考虑那些位

于 $\{z=0\}$ 上方的连通分岔的原象,这些原象都是曲边矩形,映射 Δ 在每一个曲边矩形上都是一个马蹄映射,见图5-4.

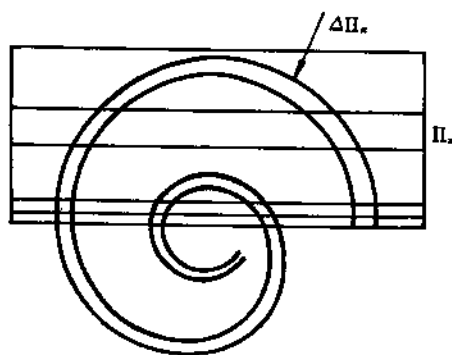


图5-4

定理2.2的证明 由第一章定理4.22,我们可以在鞍焦点的邻域里取一个 C^1 卡,使得向量场在这个卡下是线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \lambda y, \\ \dot{z} = \mu z, \end{cases} \quad (2.11)$$

这里 $\lambda < 0 < \mu, \lambda + \mu > 0$.

Γ^+, Γ^- 如(2.2)所定义, $\Delta^{\text{sing}}: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$ 代表沿(2.11)的轨道定义的映射. 由(2.6), Δ^{sing} 有表达式

$$\Delta^{\text{sing}}(\theta, z) = (z^{-\alpha} \cos(\theta + \beta), z^{-\alpha} \sin(\theta + \beta)), \quad (2.12)$$

这里 $\beta = -\frac{\omega}{\mu} \ln z, -1 < \alpha = \lambda/\mu < 0$. 令

$$I_{\theta_0}^+ = \{(\theta, z) \in \Gamma^+ \mid \theta = \theta_0 \in [-\delta, \delta], 0 < z < h\}.$$

由(2.12), 象 $\Delta^{\text{sing}} I_{\theta_0}^+$ 是 Γ^- 上的以 $(0, 0)$ 为极点的对数螺线. 注意到 Δ^{reg} 是一个微分同胚, 故象 $\Delta I_{\theta_0}^+ = \Delta^{\text{reg}} \circ \Delta^{\text{sing}} I_{\theta_0}^+$ 是 Γ^+ 上以点 p

为极点的螺线. 令 $\Gamma_{\delta,h}^+$ 如 (2.9) 定义, 则象 $\Delta\Gamma_{\delta,h}^+$ 是介于两条螺线 $\Delta\Gamma_{\pm\delta}^+$ 之间的区域. 它在直线 $\{z=0\}$ 上方有可数个连通分支, 其中每个连通分支都绕 p 点半圈. 我们给这些分支由外向里给定序号, 令 Π_n 表示第 n 个连通分支在 Δ 作用下的原象, 见图 (5-4), 则 Π_n 是一个曲边矩形. 它的上下边属于直线 $\{z=0\}$ 的原象, 我们断言, 存在不依赖于 n 的常数 $C_1 > 1$, 使得下面不等式成立

$$C_1^{-1} \exp\left(-\frac{2\mu n\pi}{|\omega|}\right) \leq |z|_{(\theta,z) \in \Pi_n} \leq C_1 \exp\left(-\frac{2\mu n\pi}{|\omega|}\right), \quad (2.13).$$

$$C_1^{-1} \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right) \leq \|(\theta, z)\|_{\Delta\Pi_n} \leq C_1 \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right), \quad (2.14)$$

这里 $\|(\theta, z)\|$ 表示点 (θ, z) 到点 $p=(0,0)$ 之间的距离. 为了证明上述两不等式, 在 (θ, z) 平面上对点 $(\theta, z) \in \Pi_n$ 我们如此定义其象点 $\Delta(\theta, z)$ 的辐角 $\arg \Delta(\theta, z)$, 使得这个辐角连续地依赖 (θ, z) , 并且 $\arg \Delta(\theta, z)|_{\Pi_n} \in [0, \pi]$, 这样便有

$$|\arg \Delta^{\text{sing}}(\theta, z)|_{(\theta,z) \in \Pi_n} \in [(2n-2)\pi, (2n-1)\pi]. \quad (2.15)$$

由 (2.12), 有

$$|\arg \Delta^{\text{sing}}(\theta, z)| = \left| \frac{\omega}{\mu} \ln z \right| + O(1).$$

注意到辐角 $\arg \Delta^{\text{sing}}(\theta, z)$ 在微分同胚 Δ^{reg} 作用下只能改变有限量, 故

$$|\arg \Delta(\theta, z)| = \left| \frac{\omega}{\mu} \ln z \right| + O(1). \quad (2.16)$$

比较 (2.15) 和 (2.16), 得

$$\left| \frac{\omega}{\mu} \ln z \right|_{(\theta,z) \in \Pi_n} = 2n\pi + O(1).$$

由上式便推出 (2.13). 注意到

$$\|\Delta(\theta, z)\| = O(1)\|\Delta^{\text{sing}}(\theta, z)\| = O(1)|z|^{-\alpha},$$

再利用(2.13)便可推出(2.14). 区域 Π_n 的另一个重要性质由下面引理给出.

引理2.3 对任意给定常数 $\mu_h^{-1} > \mu_v > 0$, 当 n 充分大时, 区域 Π_n 是 (μ_h, μ_v) 矩形.

证明 Π_n 是一个曲边矩形. 它的左右两边是直线 $\{\theta = \pm \delta\}$. 这样, 为证明引理, 只需证明 Π_n 的上下边是 μ_h 水平曲线, 即一个李氏常数为 μ_h 关于 θ 的函数的图象.

令 W 表示直线 $z=0$ 在映射 Δ^{reg} 作用下的原象, 则 W 是 Γ^- 上的一条通过点 $q=(0,0)$ 的 C^1 曲线. 曲线 W 在 q 点的切线或不与 y 轴平行或不与 x 轴平行. 下面我们只讨论不与 y 轴平行的情况, 不与 x 轴平行的情况可类似地论证.

令 W 是 C^1 函数 $y=f(x)$ 的图象

$$W = \{(x, y) \in \Gamma^- \mid y = f(x), x \in (\mathbf{R}, 0)\},$$

这里 $f(0)=0$, 则 Π_n 的上下边中的点的坐标 (θ, z) 满足方程

$$f(x) = y, \quad (2.17)$$

这里 $x = z^{-\alpha} \cos(\theta + \beta)$, $y = z^{-\alpha} \sin(\theta + \beta)$. 等式(2.17)两边对 θ 求导, 得

$$\begin{aligned} f'(x) \left[-\frac{\alpha}{z} \frac{dz}{d\theta} x - y \left(1 - \frac{\omega}{\mu} \frac{1}{z} \frac{dz}{d\theta} \right) \right] \\ = -\frac{\alpha y}{z} \frac{dz}{d\theta} + x \left(1 - \frac{\omega}{\mu} \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{d\theta} \right) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} \left(-\alpha x f'(x) + \frac{\omega}{\mu} y f'(x) + \alpha y + \frac{\omega}{\mu} x \right) \\ = xz + yz f'(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

将(2.18)除以 x , 得

$$\frac{dz}{d\theta} \left(-\alpha f'(x) + \alpha \frac{y}{x} + \frac{\omega}{\mu} \frac{y}{x} f'(x) + \frac{\omega}{\mu} \right)$$

$$= z \left(1 + \frac{y}{x} f'(x) \right). \quad (2.19)$$

注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{y}{x} \rightarrow f'(0)$. 因此, (2.19) 的等号右边括号内的值趋于非零常数, 故

$$\frac{dz}{d\theta} = O(1)z.$$

再由 (2.13), 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $x \rightarrow 0$. 引理证毕. \blacksquare

令

$$D_n = \left\{ (\theta, z) \in \Pi_n \mid |\theta| \leq 2C_1 \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right) \right\}.$$

由引理 2.3 可知, D_n 是一个 (μ_h, μ_v) 矩形, 它的水平边界属于原象 $\Delta^{-1}\{z=0\}$. 因为鞍点量 $\sigma = \lambda + \mu > 0$, 故当 $n \gg 1$ 时

$$C_1 \exp\left(-\frac{2\mu n\pi}{|\omega|}\right) \ll C_1^{-1} \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right).$$

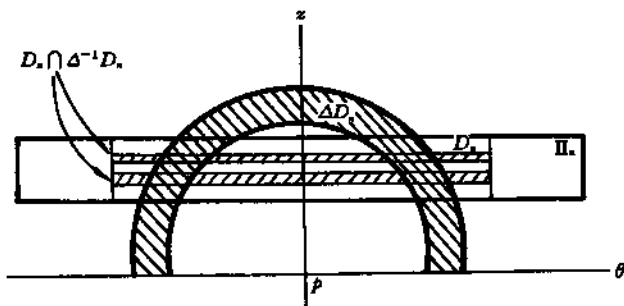


图5-5

由不等式 (2.13) 和 (2.14), Poincaré 映射 Δ 限制在区域 D_n 上类似一个马蹄映射, 参见图 5-5. 下面证明 $D_n \cap \Delta D_n$ 确实包含了一个马蹄. 为此, 我们将验证映射 Δ 在区域 $D_n \cap \Delta^{-1}D_n$ 上满足第四章定理 3.2 的所有条件. 首先, 我们证明映射 Δ 在区域 $D_n \cap \Delta^{-1}D_n$ 上

满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

引理2.4 对任意给定常数 $\mu_h^{-1} > \mu_v \gg 1$, 都存在依赖于 μ_h, μ_v 的常数 N , 使得当 $n > N$, 映射 Δ 在区域 $D_n \cap \Delta^{-1}D_n$ 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

证明 我们将利用第四章引理4.1来证明.

令 β_0 是向量 $D\Delta^{\text{reg}}(q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的辐角, 令

$$D\Delta^{\text{reg}}(q) \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & -\sin\beta_0 \\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \tilde{H}.$$

因为向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是矩阵 \tilde{H} 的特征向量, 故

$$\bar{c} = 0, \bar{d} \neq 0. \quad (2.20)$$

我们断言, 对于 $(\theta, z) \in D_n \cap \Delta^{-1}D_n$ 有

$$\theta \rightarrow 0, \beta = -\frac{\omega}{\mu} \ln z \rightarrow \beta_0 \pmod{\pi}, n \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

由区域 D_n 的定义, (2.21)中第一个极限是显然的. 现在我们证明第二个极限. 因为 $(\theta, z) \in D_n \cap \Delta^{-1}D_n$, 故 $\Delta(\theta, z) \in \Pi_n \cap \Delta\Pi_n$. 由(2.13)和(2.14)有

$$\arg\Delta(\theta, z) \rightarrow 0 \pmod{\pi}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\arg\Delta^{\text{sing}}(\theta, z) \rightarrow \beta_0 \pmod{\pi}$. 由(2.12)可知, $\arg\Delta^{\text{sing}}(\theta, z) = \theta + \beta$, 这意味着当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\beta \rightarrow \beta_0 \pmod{\pi}$.

现在我们来计算雅可比阵 $D\Delta$. 对(2.12)求微分得

$$D\Delta^{\text{sing}}(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} A,$$

其中矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -z^{-\sigma} \sin\theta & -\mu^{-1} z^{-\sigma-1} (\lambda \cos\theta - \omega \sin\theta) \\ z^{-\sigma} \cos\theta & -\mu^{-1} z^{-\sigma-1} (\lambda \sin\theta + \omega \cos\theta) \end{pmatrix}.$$

因此, 由链式法则有

$$D\Delta(\theta, z) = D\Delta^{\text{reg}}(\Delta^{\text{sing}}(\theta, z)) \cdot D\Delta^{\text{sing}}(\theta, z)$$

$$= HJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ D & M \end{pmatrix},$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = D\Delta^{\text{reg}}(\Delta^{\text{sing}}(\theta, z)) \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ D & M \end{pmatrix},$$

$$A = -z^{-\alpha}\sin\theta, B = -\mu^{-1}z^{-\alpha-1}(\lambda\cos\theta - \omega\sin\theta),$$

$$D = z^{-\alpha}\cos\theta, M = -\mu^{-1}z^{-\alpha-1}(\lambda\sin\theta + \omega\cos\theta).$$

现在我们来验证第四章引理4.1的条件,即存在常数 L ,以及由引理4.1所确定的依赖于 L 的常数 δ ,使得不等式

$$L > \max\{\|H\|, \|H^{-1}\|, |d^{-1}|, |BM^{-1}|\} \quad (2.22)$$

以及

$$\begin{aligned} \max\{|M^{-1}|, |M^{-1}| \cdot |D|, |\Lambda| \cdot |M^{-1}|, \\ |\Lambda - BM^{-1}D|, |c| \cdot |BM^{-1}|\} < \delta \end{aligned} \quad (2.23)$$

成立.由(2.21),对 $(\theta, z) \in \Pi_n$,当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $H \rightarrow \tilde{H}$ 或 $-\tilde{H}$. 故由(2.20)有

$$c \rightarrow 0, \quad |d| \rightarrow |\tilde{d}| \neq 0. \quad (2.24)$$

注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\theta \rightarrow 0$,我们有

$$|BM^{-1}| = \left| \frac{\lambda\cos\theta - \sin\theta}{\lambda\sin\theta + \omega\cos\theta} \right| < \frac{2|\lambda|}{|\omega|}, \quad n \gg 1, \quad (2.25)$$

因此(2.22)成立.由(2.13),当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$|M^{-1}| = O(1)z^{\alpha+1} \rightarrow 0,$$

$$|M^{-1}| |D| = O(1)z \rightarrow 0,$$

$$|\Lambda| |M^{-1}| = O(1)z \rightarrow 0,$$

$$|\Lambda - BM^{-1}D| = O(1)z^{-\alpha} \rightarrow 0.$$

另一方面,由(2.24)和(2.25)推出, $|c| \cdot |BM^{-1}| \rightarrow 0$,当 $n \rightarrow +\infty$. 故(2.23)成立.引理证毕. |

最后来验证, Δ 在 $D_n \cap \Delta^{-1}D_n$ 上满足边界条件和相交条件.

首先 $D_n \cap \Delta D_n$ 包含两个连通分支, 故 $D_n \cap \Delta^{-1} D_n$ 有两个连通分支 H_1^n 与 H_2^n . 因为它们当中的每一个都是一个曲边矩形. 它们的上下两边属于 D_n 的水平边界 $\partial_h D_n$ 的原象 $\Delta^{-1} \partial_h D_n$, 因而 H_1^n, H_2^n 都是 (μ_h, μ_v) 矩形, 且满足

$$(H_1^n \cup H_2^n) \cap \partial_h D_n = \emptyset, \partial_v H_i^n \subset \partial_v D_n. \quad (2.26)$$

注意到 $\Delta \partial_h H_i^n \subset \partial_h D_n$, 由 (2.26) 有 $\Delta \partial_h H_i^n \cap (H_1^n \cup H_2^n) = \emptyset$. 由不等式 (2.14) 与 D_n 的定义推出 $\Delta H_i^n \cap \partial_v D_n = \emptyset$, 故 $\Delta H_i^n \cap \partial_v H_j^n = \emptyset, i, j = 1, 2$. 由连续性, 相交条件 $\Delta H_i^n \cap H_j^n \neq \emptyset$ 显然成立.

上面的论证表明, 对所有充分大的自然数 n , 映射 Δ 在区域 $D_n \cap \Delta^{-1} D_n$ 上有一个不变集 Λ_n , 使得 $\Delta|_{\Lambda_n}$ 与 Σ^2 上的右平移映射 σ 拓扑共轭. 因而 Δ 在 Λ_n 上有无穷多个周期点. 因而向量场在同宿轨附近有无多条双曲周期轨.

定理证毕. \square

轨道等价不变量的存在性

令 M 是一个紧致光滑流形, $\mathcal{X}^r(M)$ 代表 M 上的所有 C^r 向量场在 C^r 拓扑下所构成的 Banach 空间. 在 $\mathcal{X}^r(M)$ 上定义一种等价关系 “ \sim ”. 对 $X \in \mathcal{X}^r(M)$, 令

$$\tilde{X} = \{Y \in \mathcal{X}^r(M) | Y \sim X\}$$

表示与 X 等价的向量场的集合. 称 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ (关于等价关系 “ \sim ”) 结构稳定, 如果 X 属于集合 \tilde{X} 的内点.

定义 2.5 一个复数 C 称为向量场 $X \in \mathcal{X}^r(M)$ 的模, 如果对 X 的任意邻域 U , 存在一个包含 X 的连通集合 $A \subset U$ 和定义在 A 上的一个非常值连续函数 f 满足

1. $f(X) = C$;
2. $\forall Y, Z \in A$, 若 $Y \sim Z$, 则 $f(Y) = f(Z)$.

由定义2.5可以看出,任何有模的系统都不是结构稳定的.例如,如果等价关系“ \sim ”取为 C^1 等价,则孤立奇点处的任意两个特征根的比值即为模.因而,任意有孤立奇点的向量场都不是结构稳定的.再如,如果我们在拓扑轨道等价中要求相应同胚保持时间,则向量场的孤立周期轨的周期便是模.因而,任意有孤立周期轨的向量场不是结构稳定的.显然,上述两种等价关系过于“严格”,使“过多”的系统不是结构稳定的.于是,我们通常是在更弱的拓扑轨道等价(见第一章定义1.7)下,研究结构稳定问题和分岔问题.寻找有模的系统是分岔理论中一个很有意义的问题.

定理2.6 ([AAIS]) 设 X 是 \mathbb{R}^3 中一个具有鞍焦点 σ_0 的同宿轨的光滑向量场,则鞍焦点 σ_0 的复特征根的实部与它的实特征根的比值是系统 X 的模.

设奇点 σ_0 的特征根为 $\lambda \pm i\omega, \mu$, 为了证明定理2.6,我们只需证明, λ/μ 是轨道等价不变量.在下面的讨论中,我们仍利用前面的记号和概念.我们仍然假设, $\lambda < 0 < \mu$.

若 $\lambda + \mu \leq 0$, 我们定义

$$k(n) = \min \{k \in \mathbb{N}, \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset\};$$

若 $\lambda + \mu > 0$, 我们定义

$$n(k) = \max \{n \in \mathbb{N}, \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset\}.$$

引理2.7 序列 $k(n), n(k)$ 有下列性质

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n)}{n} = -\frac{\lambda}{\mu}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n(k)}{k} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

证明 如果

$$\max |z| |_{\Pi_k} \leq \max |z| |_{\Delta \Pi_n}, \quad (2.27)$$

则显然

$$\Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset,$$

如果

$$\min |z| |_{\Pi_k} > \max |z| |_{\Delta \Pi_n}, \quad (2.28)$$

则显然

$$\Pi_k \cap \Delta \Pi_n = \emptyset.$$

由(2.13)和(2.14)易知,如果

$$C_1 \exp\left(-\frac{2\mu k\pi}{|\omega|}\right) \leq C_1^{-1} \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right),$$

则(2.27)成立. 换言之, 如果 $\frac{|\omega|\ln C_1}{\pi} \leq \mu k + \lambda n$, 则

$$\Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset. \quad (2.29)$$

同理, 如果

$$C_1^{-1} \exp\left(-\frac{2\mu k\pi}{|\omega|}\right) > C_1 \exp\left(\frac{2\lambda n\pi}{|\omega|}\right),$$

则(2.28)成立. 换言之, 如果 $-\frac{|\omega|\ln C_1}{\pi} > \mu k + \lambda n$, 则

$$\Pi_k \cap \Delta \Pi_n = \emptyset. \quad (2.30)$$

由(2.29)得

$$k(n) \leq \frac{|\omega|\ln C_1}{\mu\pi} - \frac{\lambda}{\mu}n, \quad n(k) \geq \frac{|\omega|\ln C_1}{\lambda\pi} - \frac{\mu}{\lambda}k.$$

由(2.30)得

$$k(n) \geq -\frac{|\omega|\ln C_1}{\mu\pi} - \frac{\lambda}{\mu}n, \quad n(k) \leq -\frac{|\omega|\ln C_1}{\lambda\pi} - \frac{\mu}{\lambda}k.$$

因此

$$\left| \frac{k(n)}{n} + \frac{\lambda}{\mu} \right| \leq \left| \frac{\omega \ln C_1}{n\mu\pi} \right|, \quad \left| \frac{n(k)}{k} + \frac{\mu}{\lambda} \right| \leq \left| \frac{\omega \ln C_1}{k\lambda\pi} \right|.$$

引理证毕. \square

定理2.6的证明 令 X_1 和 X_2 是 \mathbb{R}^3 中分别具有鞍焦点 σ_1 和 σ_2 的同宿轨的两个光滑向量场. 设 $\lambda_j \pm i\omega_j$, μ_j 是 σ_j 的特征值. 假设 X_1 和 X_2 是轨道等价的, 即存在一个同胚 $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得 H 将 X_1 的轨道保向地映成 X_2 的轨道. 正如前面考虑的那样, 我们可以假设 X_j 在 σ_j 的某个邻域 U_j 中是线性的

$$X_j: \begin{cases} \dot{x} = \lambda_j x - \omega_j y, \\ \dot{y} = \omega_j x + \lambda_j y, & \lambda_j < 0 < \mu_j, \omega_j \neq 0. \\ \dot{z} = \mu_j z, \end{cases}$$

通过一个线性变换,我们可使 U_1 中的点 $p_1 = (1, 0, 0)$ 属于 σ_1 的同宿轨. 我们取

$$\Gamma_1^+ = \{(x, y, z) \in U_1 | x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}.$$

在 U_2 中做一个线性变换, 可使点 $p_2 = H(p_1)$ 的坐标成为 $(1, 0, 0)$. 取

$$\Gamma_2^+ = \{(x, y, z) \in U_2 | x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}.$$

在 Γ_j^+ 的某个子区域上, 我们定义 Poincaré 映射 Δ_j . 我们断言, 映射 Δ_1 与 Δ_2 是拓扑共轭的, 即存在一个从 Γ_1^+ 上点 p_1 的邻域到 Γ_2^+ 上点 p_2 的邻域的一个同胚 G , 使得对 Δ_1 的定义域上的任意点 p , 有

$$G \circ \Delta_1(p) = \Delta_2 \circ G(p).$$

事实上, 同胚 G 可以用公式

$$G = \pi_2 \circ H$$

给出, 这里 π_2 定义为点 p_2 在 \mathbb{R}^3 中的邻域沿 X_2 的轨道向 Γ_2^+ 的投影映射. 显然, 同胚 G 将 Γ_1^+ 上的曲线 $\{z=0\}$ 映到 Γ_2^+ 上的曲线 $\{z=0\}$. 如前所述, 映射 Δ_j 的定义域是一族曲边矩形 Π_n^j 的并. 因为 Π_n^j 的上下两边属于原象 $\Delta_j^{-1}\{z=0\}$, 故 G 一定将 Π_n^2 的上下边映成某个曲边矩形 Π_m^1 的上下边. 因此对所有 $n \gg 1$, 存在一个不依赖于 n 的整数 m , 使得

$$G\Pi_n^2 = \Pi_{n+m}^1.$$

因此

$$k_1(n) = k_2(n+m) - m, \text{ 当鞍点量非正;}$$

$$n_1(k) = n_2(k+m) - m, \text{ 当鞍点量为正.}$$

由引理 2.17, 这意味着

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

定理证毕. \square

§3 环的分岔

有限个奇点和闭轨 $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k = \sigma_0$ 以及连结它们的轨道 γ_i , 满足 $\alpha(\gamma_i) = \sigma_i$ 和 $\omega(\gamma_i) = \sigma_{i+1}, i=0, 1, \dots, k-1$, 所构成的轨道集合称作环. 我们在 §1, §2 中所考虑的奇点的同宿轨是一类特殊的环, 即 $k=1$ 及 σ_0 是一个双曲奇点. 本节我们考虑 \mathbb{R}^3 中由一个双曲奇点和一条双曲闭轨以及两条连结它们的轨道所构成的环. 值得指出的是, 在著名的 Lorenz 方程中, 对某些参数值上述环是存在的, 而且环附近的分岔现象非常复杂, 迄今为止尚未彻底研究清楚.

环的分类

设 \mathbb{R}^3 中一个光滑向量场 X 有一个包含奇点 σ_0 和闭轨 σ_1 的环 Λ , 满足下列四条假设

(1) σ_0 是一个双曲奇点, 它有二维稳定流形 $W^s(\sigma_0)$ 和一维不稳定流形 $W^u(\sigma_0)$.

(2) σ_1 是一个具有二维稳定流形 $W^s(\sigma_1)$ 和二维不稳定流形 $W^u(\sigma_1)$ 的双曲闭轨, 它的特征指数为正.

(3) 令 $\gamma_i \subset W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_{i+1}), i=0, 1$ 表示 Λ 中连结 σ_i 和 σ_{i+1} 的轨道, 则流形 $W^u(\sigma_1)$ 与 $W^s(\sigma_0)$ 沿曲线 γ_1 横截相交.

(4) 如果奇点 σ_0 的特征值都为实数 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \mu$, 则 σ_0 是 2 阶非共振, 即 $\mu \neq \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 \neq 2\lambda_1$, 且

(a) 设 W 是向量场 X 的二维不变曲面, 它在 σ_0 处与特征值 λ_1, μ 相对应的特征向量所张成的平面相切, 则 W 与稳定流形 $W^s(\sigma_1)$ 沿曲线 γ_0 横截相交.

(b) 轨道 γ_1 沿着奇点 σ_0 的主稳定方向趋于 σ_0 .

满足上面四条假设的环 Λ 有三种不同的类型:

1. 奇点 σ_0 是鞍焦点, 这时 Λ 称为鞍焦环.

2. 奇点 σ_0 特征值都为实数, 且 $\gamma_1 \subset \Omega(X|_U)$, 这里 $\Omega(X|_U)$ 表示向量场 X 限制在 Δ 的某个邻域 U 内的非游荡集, 这时 Δ 称为非游荡环.

3. 奇点 σ_0 所有特征值均为实数, 且 $\gamma_1 \not\subset \Omega(X|_U)$, 这时 Δ 称为游荡环.

上面三种类型的环可参见图5-6. 下面我们首先证明鞍焦环和非游荡环的任意邻域里都有无穷多条双曲闭轨, 具有这样环的向量场在一般的单参数扰动下的分岔, 还没有被研究清楚. 本节的最后将讨论游荡环在一般的单参数扰动下的分岔问题.

鞍焦环

定理3.1 设光滑向量场 X 有一个鞍焦环 Δ , 满足假设(1)–(3), 则双曲周期轨 σ_1 有横截同宿轨.

证明 定理结论的几何意义可参见图5-7.

令 S 是一个与 σ_1 横截相交于 O 点的平面, 在 S 上 O 点的邻域取一坐标系 (u, v) , 使得 O 点是坐标原点, 并且

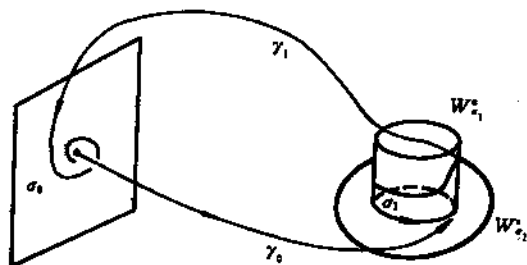
- (1) $\{(u, v) \mid |u|, |v| \leq 2\}$ 有意义;
- (2) $\{(u, 0) \mid |u| \leq 2\} \subset W^s(\sigma_1)$;
- (3) $\{(0, v) \mid |v| \leq 2\} \subset W^u(\sigma_1)$;
- (4) $q_0 = (1, 0) \in \gamma_0 \cap S, p_0 = (0, 1) \in \gamma_1 \cap S$.

因为 σ_0 是一个鞍焦点, 故向量场在它的邻域里可以 C^1 线性化, 即在 σ_0 的邻域里存在一个 C^1 卡使得 X 在该邻域里可由下面线性微分方程组表示

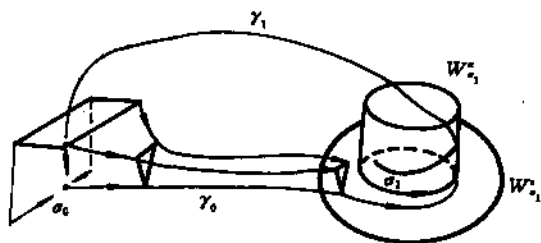
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \lambda y, \\ \dot{z} = \mu z, \end{cases} \quad \lambda < 0 < \mu, \omega \neq 0. \quad (3.1)$$

不妨假设正 z 轴对应轨道 γ_0 , 像在 §2 中那样, 我们引进无切截面 Γ^+, Γ_-^+ 如下:

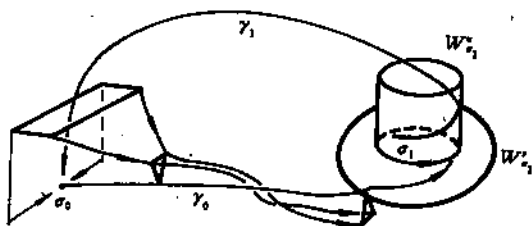
$$\Gamma^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\},$$



(a) 鞍焦环



(b) 非振荡环



(c) 振荡环

图5-6

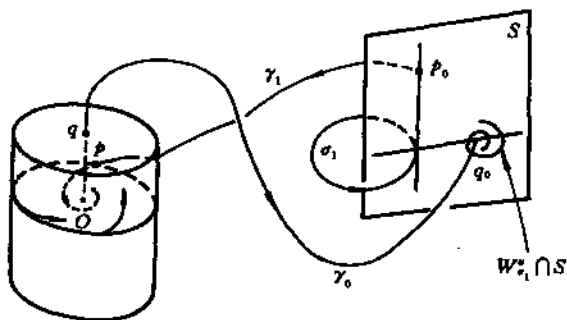


图5-7

$$\Gamma^- = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, |z| = 1\},$$

$$\Gamma_h^+ = \{(x, y, z) \in \Gamma^+ | 0 \leq z \leq h\}.$$

(3.1)所导出的从 Γ_h^+ 到 Γ^- 的沿轨道所定义的映射仍用 Δ^{sing} 表示. 由 (2.6), Δ^{sing} 有形式

$$\Delta^{\text{sing}}(\theta, z) = (z^{-a} \cos(\theta + \beta), z^{-a} \sin(\theta + \beta)) \\ \stackrel{d}{=} (X(\theta, z), Y(\theta, z)),$$

这里 $a = \lambda/\mu < 0$, $\beta = -\frac{\omega}{\mu} \ln z$. 令点 q 为 $(x, y, z) = (0, 0, 1) \in \Gamma^- \cap \gamma_0$, 点 p 为 $(\theta, z) = (0, 0) \in \Gamma^+ \cap \gamma_1$. 因为轨道 γ_0 连结点 q 与点 q_0 , 轨道 γ_1 连结点 p_0 与点 p , 由方程的解对初值的依赖性定理, 每一条从 Γ^- 上点 q 邻域及 S 上点 p_0 邻域出发的正半轨必然分别与 S 及 Γ^+ 交于 q_0 及 p 的邻域内一点. 我们分别用 F 和 G 代表这一对应, 则 F, G 都是微分同胚. 因为流形 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^s(\sigma_0)$ 沿着轨道 γ_1 横截相交, 故曲线 $W^s(\sigma_1) \cap \Gamma^+$ 可以表示成

$$\theta = \theta(z), \quad z \in (\mathbb{R}, 0),$$

这里 $\theta(z) \in C^1$. 因此象 $\Delta^{\text{sing}}(W^s(\sigma_1) \cap \Gamma^+)$ 是 Γ^- 上的以 q 点为极

点的螺线. 这样象 $F \cdot \Delta^{\text{sing}}(W^s(\sigma_1) \cap \Gamma^+)$ 是 S 上以 q_0 点为极点的螺线

$$(u, v) = F \cdot \Delta^{\text{sing}}(\theta(z), z), \quad z \in (\mathbb{R}, 0). \quad (3.2)$$

上述曲线属于闭轨 σ_1 的不稳定流形 $W^u(\sigma_1)$ 与平面 S 的交. 下面将通过验证曲线 (3.2) 与曲线 $W^s(\sigma_1) \cap S: \{v=0\}$ 有横截相交点来证明定理 3.1. 令 $F=(F_U, F_V)$, 则我们只需证明方程

$$F_V(X(\theta(z), z), Y(\theta(z), z)) = 0 \quad (3.3)$$

有简单零点. 令

$$a = \left. \frac{\partial F_V}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad b = \left. \frac{\partial F_V}{\partial y} \right|_{(0,0)},$$

那么 (3.3) 可写成

$$V(z) = aX(\theta(z), z) + bY(\theta(z), z) + O(X^2 + Y^2) = 0,$$

或

$$V(z) = a \cos(\theta + \beta) + b \sin(\theta + \beta) + O(z^{-\alpha}) = 0. \quad (3.4)$$

注意, 当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $V(z)$ 是一个在 $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ 之间无穷振荡的函数加上一个小量. 因此 (3.4) 有无穷多个根 $z_k \rightarrow 0$. 下面证明 z_k 是 (3.4) 的单根. 由 $V(z_k) = 0$,

$$|a \sin(\theta + \beta) - b \cos(\theta + \beta)| \Big|_{z=z_k} = \sqrt{a^2 + b^2}(1 + o(1)), \quad (3.5)$$

这里当 $k \rightarrow \infty$ 时, $o(1) \rightarrow 0$. 另一方面

$$\begin{aligned} |V'(z_k)| &= \left| \frac{\partial F_V}{\partial x} \frac{dX(\theta(z), z)}{dz} + \frac{\partial F_V}{\partial y} \frac{dY(\theta(z), z)}{dz} \right|_{z=z_k} \\ &= \left| (a + O(z^{-\alpha}))[-\alpha z^{-\alpha-1} \cos(\theta(z) + \beta) - z^{-\alpha} \sin(\theta(z) + \beta) \cdot \right. \\ &\quad \left. (\theta'(z) + \frac{\omega}{\mu z})] + (b + O(z^{-\alpha}))[-\alpha z^{-\alpha-1} \sin(\theta(z) + \beta) + \right. \\ &\quad \left. z^{-\alpha} \cos(\theta(z) + \beta) (\theta'(z) + \frac{\omega}{\mu z})] \right|_{z=z_k} \end{aligned}$$

$$= \frac{|\omega|}{\mu} z_k^{-s-1} (\sqrt{a^2 + b^2} + o(1)) \neq 0.$$

上面最后一个等式是由(3.4)和(3.5)推出的. 定理证毕. \square

非游荡环

定理 3.2 设 \mathbb{R}^3 中光滑向量场 X 有一个非游荡环 Λ , 满足假设(1)–(4), 则在 Λ 的任意邻域里 X 有无穷多条双曲周期轨.

证明 实际上, 我们将证明一个更强的结论: 在 Λ 的任意邻域里都可以定义场 X 的一个具有马蹄的后继映射. 我们将分成几步来证明定理.

A 周期轨的 Poincaré 映射

令 S 是一个与周期轨 σ_1 横截相交于 Q 点的平面. 在 S 上 Q 点邻域可以定义闭轨 σ_1 的 Poincaré 映射 P . 因为 Q 点是二维映射 P 的双曲不动点, 故在 Q 点的某个邻域 $U(Q)$ 内, 可以选取一个 C^1 卡 (u, v) 使得

- (1) Q 点是坐标原点 $(0, 0)$,
- (2) $\{(u, v) \mid |u|, |v| < 2\} \subset U(Q)$,
- (3) $q_0 = (1, 0) \in \gamma_0 \cap S$, $p_0 = (0, 1) \in \gamma_1 \cap S$,
- (4) Poincaré 映射 P 在 $U(Q)$ 内是线性的

$$(u, v) \mapsto P(u, v) = (\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v), \quad (3.6)$$

这里 $0 < \bar{\lambda} < 1 < \bar{\mu}$. 令

$$D_0 = \{(u, v) \in U(Q), |u - 1| \leq \delta, 0 \leq v \leq \delta\},$$

$$D_1 = \{(u, v) \in U(Q), |u| \leq \delta, |v - 1| \leq \delta\}.$$

取 S 充分小, 则有

$$PD_0 \cap D_0 = \emptyset, P^{-1}D_1 \cap D_1 = \emptyset.$$

令

$$H_n = P^{-n}D_1 \cap D_0,$$

则由(3.6), 有

$$H_n = \{(u, v) \in D_0,$$

$$|u - 1| \leq \delta, \bar{\mu}^{-n}(1 - \delta) \leq v \leq \bar{\mu}^{-n}(1 + \delta)\}.$$

令 $H_n^1 = P^n H_n$, 则有

$$H_n^1 = \{(u, v) \in D_1,$$

$$\bar{\lambda}^n(1 - \delta) \leq u \leq \bar{\lambda}^n(1 + \delta), |v - 1| \leq \delta\}.$$

B 鞍点附近的映射.

由假设(4), 我们可以在鞍点 σ_0 的一个邻域 \tilde{V} 中选取一个 C^1 卡 (x, y, z) , 使得下列条件成立

$$(1) \{(x, y, z): |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\} \subset \tilde{V}.$$

(2) 向量场 X 由下列线性系统给出

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x, \\ \dot{y} = \lambda_2 y, \\ \dot{z} = \mu z, \end{cases} (x, y, z) \in \tilde{V}, \quad (3.7)$$

这里 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \mu$ 是 σ_0 的特征值. 令

$$\Gamma^+ = \{(x, y, z): x = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\},$$

$$\Gamma^- = \{(x, y, z): |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| = 1\},$$

$$\Pi_h = \{(x, y, z) \in \Gamma^+ : 0 \leq z \leq h\}.$$

由假设(4)的(b), 我们不妨设轨道 γ_1 与 Γ^+ 相交于 p 点:

$$p = \gamma_1 \cap \Gamma^+ = \{(x, y, z) = (1, y_0, 0), y_0 \in (-1, 1)\}.$$

沿系统(3.7)的轨道所定义的从 Π_h 到 Γ^- 的映射 Δ^{sing} 根据(1.30)有形式

$$(y', x') = \Delta^{\text{sing}}(y, z) = (yz^\beta, z^\beta),$$

这里 $0 < \beta = -\lambda_1/\mu < -\lambda_2/\mu = \alpha$.

C D_1 到 Γ^+ 的映射

因为轨道 γ_1 连结点 p_0 和点 $p = \gamma_1 \cap \Gamma^+$, 故当 δ 取得充分小时, 系统 X 的每一条从 D_1 上的任一点出发的正半轨将与 Γ^+ 交于 p

附近一点. 我们用 G 表示这一映射:

$$G: D_1 \rightarrow \Gamma^+, (u, v) \mapsto (y, z) = G(u, v) = (G_Y(u, v), G_Z(u, v)).$$

由假设(3)流形 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^s(\sigma_0)$ 沿 γ_1 横截相交, 故有

$$\left. \frac{\partial G_Z}{\partial v} \right|_{(0,1)} \neq 0.$$

因此, 可选取 δ 充分小, 使得

$$\frac{\partial G_Z}{\partial v}(u, v) \neq 0, (u, v) \in D_1. \quad (3.8)$$

D Γ^- 到 D_0 的映射.

因为轨道 γ_0 连结 Γ^- 上的点 $q: (y, x) = (0, 0)$ 与 S 上的 q_0 点, 故从 Γ^- 上 q 附近的点出发的正半轨必与 S 交于 q_0 附近一点. 我们用 F 表示这一映射:

$$F: (y, x) \rightarrow (u, v) = F(y, x) = (F_U(y, x), F_V(y, x)).$$

假设(4)的(a)意味着

$$d_0 = \frac{\partial F_V(0, 0)}{\partial x} \neq 0, \quad (3.9)$$

因此有

$$d = \frac{\partial F_V(y, x)}{\partial x} \neq 0, |x|, |y| \ll 1. \quad (3.10)$$

$d_0 > 0$ 和 $d_0 < 0$ 分别对应非游荡环和游荡环.

E 环的 Poincaré 映射和它的双曲性

令

$$K_n^1 = G^{-1} \Pi_h \cap H_n^1, K_n = P^{-n} K_n^1 \subset H_n.$$

在区域 K_n 上定义环 Λ 的 Poincaré 映射为

$$\Delta|_{K_n} = F \circ \Delta^{\text{sing}} \circ G \circ P^n.$$

令

$$Q_n = \{(u, v) \in D_0 | \bar{\mu}^{-n}(1 + \delta) \leq v \leq \bar{\mu}^{-n+3}(1 - \delta)\},$$

则有

$$Q_n \supset H_{n-1} \cup H_{n-2}.$$

令

$$D_1^n = \Delta^{-1}Q_{n+2} \cap K_n, D_2^n = \Delta^{-1}Q_{n+2} \cap K_{n+1}.$$

则映射 Δ 在区域 $D_1^n \cup D_2^n$ 上是马蹄映射, 见图 5-8.

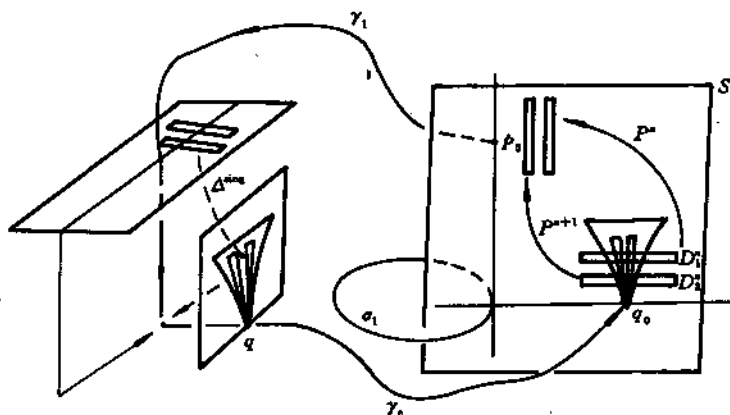


图 5-8

引理 3.3 存在正常数 $\mu_h, \mu_v, \mu_h \mu_v < 1$, 使得当 n 充分大时, 映射 Δ 在 $D_1^n \cup D_2^n$ 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

证明 对 $(u, v) \in D_1^n \cup D_2^n$, 令

$$(y, z) = G \circ P^m(u, v), \quad m = \begin{cases} n, & \text{若 } (u, v) \in D_1^n; \\ n+1, & \text{若 } (u, v) \in D_2^n, \end{cases}$$

$$(y', x') = \Delta^{\text{sing}}(y, z), \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \Delta(u, v).$$

因为 $(\bar{u}, \bar{v}) \in Q_{n+2}$, 故

$$\bar{\mu}^{-n-2}(1+\delta) \leq \bar{v} \leq \bar{\mu}^{-n+1}(1-\delta). \quad (3.11)$$

由定义

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= F_v(y', x') = \frac{\partial F_v}{\partial y'} y' + \frac{\partial F_v}{\partial x'} x' \\
 &= \frac{\partial F_v}{\partial y'} y z^a + \frac{\partial F_v}{\partial x'} z^\beta \\
 &= \frac{\partial F_v}{\partial x'} z^\beta \left(1 + \left(\frac{\partial F_v}{\partial x'} \right)^{-1} \frac{\partial F_v}{\partial y'} y z^{a-\beta} \right),
 \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{d_0}{2} z^\beta < \bar{v} < 2d_0 z^\beta, \text{ 对 } h \ll 1.$$

这与(3.11)一起推出

$$\left(\frac{1+\delta}{2d_0} \right)^{\frac{1}{\beta} - \frac{n+2}{\beta}} < z < \left(\frac{2-2\delta}{d_0} \right)^{\frac{1}{\beta} - \frac{n+1}{\beta}}. \quad (3.12)$$

现在我们计算雅可比阵 $D\Delta$. 由链式法则有

$$\begin{aligned}
 D\Delta &= DF(y', x') \cdot D\Delta^{\text{sing}}(y, z) \cdot DG \cdot DP^m \\
 &= DF(y', x') \begin{pmatrix} z^a & \alpha y z^{a-1} \\ 0 & \beta z^{\beta-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G_Y}{\partial u} & \frac{\partial G_Y}{\partial v} \\ \frac{\partial G_Z}{\partial u} & \frac{\partial G_Z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^m & 0 \\ 0 & \bar{\mu}^m \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ D & M \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= DF(y', x'), \\
 A &= \bar{\lambda}^m z^{a-1} \left(z \frac{\partial G_Y}{\partial u} + \alpha y \frac{\partial G_Z}{\partial u} \right), \\
 B &= \bar{\mu}^m z^{a-1} \left(z \frac{\partial G_Y}{\partial v} + \alpha y \frac{\partial G_Z}{\partial v} \right), \\
 D &= \beta \bar{\lambda}^m z^{\beta-1} \frac{\partial G_Z}{\partial u}, \\
 M &= \beta \bar{\mu}^m z^{\beta-1} \frac{\partial G_Z}{\partial v}.
 \end{aligned}$$

由第四章引理4.1 如果存在一个正常数 L , 使得

$$\max\{\|DF\|, \|DF^{-1}\|, |d^{-1}|, |BM^{-1}|\} < L, \quad (3.13)$$

则对任意给定正常数 $\mu_h, \mu_v, \mu_h < \mu_v^{-1} \ll 1$, 都存在一个依赖于 L, μ_h, μ_v 的常数 $\tilde{\delta}$, 使得如果不等式

$$\begin{aligned} \max\{|\Lambda| \cdot |M^{-1}|, |M^{-1}| \cdot |D|, |\Lambda - BM^{-1}D|, \\ |BM^{-1}|, |M^{-1}|\} < \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.14)$$

成立, 则映射 Δ 满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

由(3.12), 当 $n \rightarrow \infty$ 有 $z \rightarrow 0$, 因此 $(y', x') \rightarrow (0, 0)$, 故

$$|BM^{-1}| = \frac{1}{\beta} z^{\alpha-\beta} (\frac{\partial G_z}{\partial v})^{-1} \left(x \frac{\partial G_y}{\partial v} + \alpha y \frac{\partial G_z}{\partial v} \right) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

注意到 $DF(y', x') \rightarrow DF(0, 0)$, 由(3.9)和(3.15), 只要取

$$L = 2\max\{\|DF(0, 0)\|, \|DF(0, 0)^{-1}\|, |d_0^{-1}|\},$$

则对充分大的 n , (3.13) 成立. 现在证明(3.14). 当 $z \rightarrow 0$ 时, 有

$$|\Lambda| \cdot |M^{-1}| = \frac{1}{\beta} \bar{\lambda}^m \bar{\mu}^{-m} z^{\alpha-\beta} \left(x \frac{\partial G_y}{\partial v} + \alpha y \frac{\partial G_z}{\partial v} \right) \rightarrow 0,$$

$$|M^{-1}| \cdot |D| = \bar{\lambda}^m \bar{\mu}^{-m} \left| \left(\frac{\partial G_z}{\partial v} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G_z}{\partial u} \right) \right| \rightarrow 0.$$

因此, 为了证明(3.14)只需证明

$$|M^{-1}| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty.$$

而这等价于

$$\bar{\mu}^{-n} z^{1-\beta} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty. \quad (3.16)$$

对于 $\beta \leq 1$, (3.16) 是显然的; 对于 $\beta > 1$, 由(3.12)

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^{-n} z^{1-\beta} &< \bar{\mu}^{-n} \left(\frac{1+\delta}{2d_0} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \cdot \bar{\mu}^{-\frac{1-\beta}{\beta}(n+2)} \\ &= \left(\frac{1+\delta}{2d_0} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \bar{\mu}^{-\frac{n+2(1-\beta)}{\beta}} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

引理3.3证毕. \blacksquare

F 马蹄的存在性

下面我们将利用第四章的马蹄存在定理来证明, 映射 Δ 在区域 $D_1^n \cup D_2^n$ 上有马蹄构造. 引理 3.3 保证了映射 Δ 满足锥形条件. 因此, 为了证明定理, 我们只需验证下列条件:

- (1) D_1^n, D_2^n 是 (μ_h, μ_v) 矩形;
- (2) 相交条件: $\Delta D_i^n \cap D_j^n \neq \emptyset, i, j=1, 2$;
- (3) 边界条件: $\Delta \partial_h D_i^n \cap D_j^n = \emptyset, \Delta D_i^n \cap \partial_v D_j^n = \emptyset, i, j=1, 2$.

首先, 区域 D_i^n 是曲边矩形, 它的左右两边是垂直线段 $u=1 \pm \delta$ 的一部分, 而它的上下两边分别是 Q_{n+2} 上下边在映射 Δ 下的原象, 因而是 μ_h 水平曲线, 故条件 (1) 成立. 其次, 相交条件不难由连续性推出, 参见图 5-8. 最后, 我们来验证边界条件. 因为象 $\Delta \partial_h D_i^n$ 属于矩形 Q_{n+2} 上下边, 而由 Q_{n+2} 的定义它的上下边不与 D_j^n 相交, 故 $\Delta \partial_h D_i^n \cap D_j^n = \emptyset$. 另一方面, 注意到

$(\bar{\mu}, \bar{v}) = \Delta(u, v) \rightarrow (1, 0)$, 对 $(u, v) \in D_1^n \cup D_2^n, n \rightarrow +\infty$, 并且曲线 $\partial_v D_j^n$ 属于垂直直线 $\bar{u}=1 \pm \delta$, 因此

$$\Delta D_i^n \cap \partial_v D_j^n = \emptyset, \text{ 对 } n \gg 1.$$

定理 3.2 证毕. \square

游荡环

下面我们考虑具有游荡环的向量场, 在一个单参数族扰动下所发生的分岔. 设光滑向量场 X 有一个游荡环 Λ , 满足假设 (1)–(4). 令 X_ε 是一个光滑单参数向量场族, 满足 $X_0 = X$. 因为奇点 σ_0 和闭轨 σ_1 是双曲的, 故向量场 X_ε 在 σ_0, σ_1 及轨道 Λ 附近有双曲奇点 $\sigma_0(\varepsilon)$, 双曲闭轨 $\sigma_1(\varepsilon)$ 和轨道 $\gamma_0(\varepsilon) \subset W^u(\sigma_0(\varepsilon))$, 满足 $\sigma_0(0) = \sigma_0, \sigma_1(0) = \sigma_1, \gamma_0(0) = \gamma_0$.

定义 3.4 称参数值 ε_0 为向量场族 X_ε 的同宿分岔值 (环分岔

值), 如果 $\gamma_0(\epsilon_0) \subset W'(\sigma_0(\epsilon_0))$ ($W'(\sigma_1(\epsilon_0))$). 进一步, 分岔值称为正规的, 如果当参数值 ϵ 通过 ϵ_0 时, 轨道 $\gamma_0(\epsilon)$ 以非零速度接近及离开流形 $W^s(\sigma_0(\epsilon))$ ($W^s(\sigma_1(\epsilon))$).

下面我们用 B_H 和 B_C 分别表示正规同宿分岔值集和环分岔值集.

定理3.5 令 X_ϵ 是 \mathbf{R}^3 中一个典型的单参数光滑向量场族, 设当 $\epsilon=0$ 时, 场 X_0 有一个游荡环 Δ , 满足假设(1)–(4), 则存在 Δ 的一个邻域 U 和参数空间中零值的邻域 V , 使得对于所有位于 V 中零值某一侧的参数值 (不妨设 $\epsilon < 0$), 系统 X_ϵ 限制在 U 中的非游荡集 $\Omega(X_\epsilon|_U)$ 只包含两条轨道 $\sigma_0(\epsilon)$ 和 $\sigma_1(\epsilon)$. 对于 V 中零值另一侧的参数值 ($\epsilon > 0$), 下述结论成立.

(1) 双曲周期轨 $\sigma_1(\epsilon)$ 有一条横截同宿轨;

(2) 集合 B_C 的闭包 \bar{B}_C 是一个包含 $\epsilon=0$ 的 Cantor 集, 且满足 $\bar{B}_C \subset B'_H$, 这里 B'_H 代表集合 B_H 的导集;

(3) 令 $V_H = \{\epsilon > 0 \mid \Omega(X_\epsilon|_U) \text{ 是奇点 } \sigma_0(\epsilon) \text{ 加上一个有稠密轨道的双曲不变集}\}$,

则存在一个常数 $\delta > 1$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^\delta} m(\{0 < \epsilon < t \mid \epsilon \in V_H\}) = 0,$$

这里 $m(\cdot)$ 表示 \mathbf{R}^1 上的集合 (\cdot) 的 Lebesgue 测度.

附注3.6 结论(1)表明, 当参数通过游荡环分岔值 ($\epsilon=0$) 时, X_ϵ 发生 Ω 爆炸, 即非游荡集的规模突然大量增加. 结论(2)表明, 在 $\epsilon > 0$ 附近有不可数个分岔值. 结论(3)表明, 当参数 ϵ 通过 0 附近的绝大部分值时, X_ϵ 在 Δ 附近不会发生分岔现象.

X_ϵ 是典型族的含义 定理3.5中的向量场族 X_ϵ 除了满足第216页的假设(1)–(4)外还要满足下面两条假设.

(5) 向量场 X_0 的奇点 σ_0 和闭轨 σ_1 都是非共振的;

(6) $\{\epsilon=0\} \in B_C$.

定理3.5的证明

证明将分成几步进行

A 周期轨道 σ_1 的 Poincaré 映射

令 S 是一个与 σ_1 横截相交于某一点 Q 的平面, 因为 σ_1 的特征指数非共振, 故在 S 上 Q 点的一个邻域 $U(Q)$ 内存在一个依赖于参数 ε 的有限光滑坐标卡 (u, v) , 使得

$$(1) \sigma_1(\varepsilon) \cap S = \{(u, v) = (0, 0)\};$$

(2) $\{(u, v) \mid |u|, |v| \leq 2\} \subset U(Q)$, 闭轨 $\sigma_1(\varepsilon)$ 的 Poincaré 映射在 $U(Q)$ 上有形式

$$(u, v) \rightarrow P(u, v) = (\bar{\lambda}(\varepsilon)u, \bar{\mu}(\varepsilon)v),$$

这里 $0 < \bar{\lambda}(\varepsilon) < 1 < \bar{\mu}(\varepsilon)$;

$$(3) q_0 = (1, 0) \in \gamma_0 \cap S, p_0 = (0, 1) \in \gamma_1 \cap S.$$

令

$$D_0 = \{(u, v) \in U(Q) \mid |u - 1| \leq \delta, |v| \leq \delta\}$$

和

$$D_1 = \{(u, v) \in U(Q) \mid |u| \leq \delta, |v - 1| \leq \delta\}$$

分别表示 q_0 与 p_0 的邻域. 取 δ 充分小, 使得

$$PD_0 \cap D_0 = \emptyset, P^{-1}D_1 \cap D_1 = \emptyset.$$

B 鞍点附近的映射

因为鞍点 σ_0 非共振, 故在 σ_0 的一个邻域 \tilde{V} 中, 可以取一个依赖于参数 ε 的有限光滑卡 (x, y, z) , 使得

$$\{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\} \subset \tilde{V},$$

并且向量场族 X_ε 有形式

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1(\varepsilon)x, \\ \dot{y} = \lambda_2(\varepsilon)y, \\ \dot{z} = \mu(\varepsilon)z, \end{cases}$$

其中 $\lambda_2(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) < 0 < \mu(\varepsilon)$. 令

$$\Gamma^+ = \{(x, y, z) \mid x = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\},$$

$$\Gamma^- = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = 1\}.$$

不妨假设轨道 γ_0 在 \tilde{V} 中与正 z 轴重合, 即

$$q = \gamma_0 \cap \Gamma^- = \{(x, y) = (0, 0)\},$$

而轨道 γ_1 与 Γ^+ 相交于 p 点

$$p: \gamma_1 \cap \Gamma^+ = \{(y, z) = (y_0, 0), |y_0| < 1\}.$$

由 §1 中的结果, 沿 X_ε 的轨道所定义的对映射 $\Delta_\varepsilon^{\text{sing}}, \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$ 有形式

$$(y, z) \mapsto (y', x') = \Delta_\varepsilon^{\text{sing}}(y, z) = (yz^\alpha, z^\beta),$$

其中

$$0 < \beta = -\frac{\lambda_1(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} < -\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)} = \alpha.$$

C 沿轨道定义的 D_1 到 Γ^+ 的映射

因为轨道 γ_1 连结点 p_0 和 p , 故对充分小 δ 和 $|\varepsilon|$, 沿轨道我们可以定义一个从 p_0 邻域 D_1 到 p 的邻域的一个映射, 记作

$$G: (u, v) \rightarrow (y, z) = G(u, v) = (G_Y(u, v, \varepsilon), G_Z(u, v, \varepsilon)).$$

由假设(3), 不稳定流形 $W^u(\sigma_1)$ 与稳定流形 $W^s(\sigma_0)$ 沿 γ_1 横截相交, 故有

$$a = \frac{\partial G_Z}{\partial v} \Big|_{(0,1,0)} \neq 0. \quad (3.17)$$

D 沿轨道定义的 Γ^- 到 S 的对应映射

因为轨道 γ_0 连结点 q 和 q_0 , 故对 $|\varepsilon| \ll 1$, 沿轨道可以定义一个从 Γ^- 上 q 邻域到 S 上 q_0 的邻域的一个映射, 记作

$$\begin{aligned} F: (y', x') &\rightarrow (u, v) = F(y', x', \varepsilon) \\ &= (F_U(y', x', \varepsilon), F_V(y', x', \varepsilon)). \end{aligned}$$

假设(4)意味着

$$d_0 = \frac{\partial F_V}{\partial x'} \Big|_{(0,0,0)} \neq 0.$$

游荡环对应情况 $d_0 < 0$.

E 假设(6)的确切含意

假设(6)的确切含意是

$$\left. \frac{\partial F_V}{\partial \varepsilon} \right|_{(0,0,0)} \neq 0. \quad (3.18)$$

通过引进参数变换 $F_V(0,0,\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$, 可以假设

$$F(0,0,\varepsilon) = (u(\varepsilon), \varepsilon) \xrightarrow{d} q_\varepsilon.$$

F $\varepsilon < 0$ 时结论的证明

对 $\varepsilon < 0$, 我们有

$$\begin{aligned} F_V(y', x', \varepsilon) &= \varepsilon + \frac{\partial F_V}{\partial y'} y' + \frac{\partial F_V}{\partial x'} x' \\ &= \varepsilon + \frac{\partial F_V}{\partial y'} y x^\alpha + \frac{\partial F_V}{\partial x'} x^\beta = \varepsilon + x^\beta d_0 (1 + o(1)) < 0. \end{aligned}$$

因此, 系统 X_ε 在 Δ 附近的轨道的结构非常简单: 除了奇点 $\sigma_0(\varepsilon)$, 闭轨 $\sigma_1(\varepsilon)$ 以及连结它们的轨道 $\gamma_1(\varepsilon)$ 以外, 当 $t \rightarrow +\infty$ 或 $-\infty$ 时, 所有的轨道都将离开 Δ 的邻域.

G 结论(1)的证明

现在证明, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 闭轨 $\sigma_1(\varepsilon)$ 有横截同宿轨. 这一结论从图 5-9 容易看出. 事实上, 由假设(3), 流形 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^s(\sigma_0)$ 沿 γ_1 横截相交, 而 γ_1 是沿着主稳定方向趋于 σ_0 . 因此, 流形 $W^s(\sigma_0)$ 属于流形 $W^s(\sigma_1)$ 的边界, 并且有边流形 $W^s(\sigma_1) \cup W^s(\sigma_0)$ 与流形 W (系统 X_0 的在 σ_0 处与 λ_1, μ 的特征方向相切的不变流形) 在 γ_0 上的任意一点处相切, 故由假设(4)的(a), 它与流形 $W^s(\sigma_1)$ 沿 γ_0 横截相交. 另一方面, 上述所有的流形光滑依赖于参数 ε , 故当 $\varepsilon > 0$ 时, 流形 $W^s(\sigma_1(\varepsilon))$ 与 $W^s(\sigma_0(\varepsilon))$ 将沿着在 $\gamma_0 \cup \gamma_1$ 附近的一条曲线横截相交.

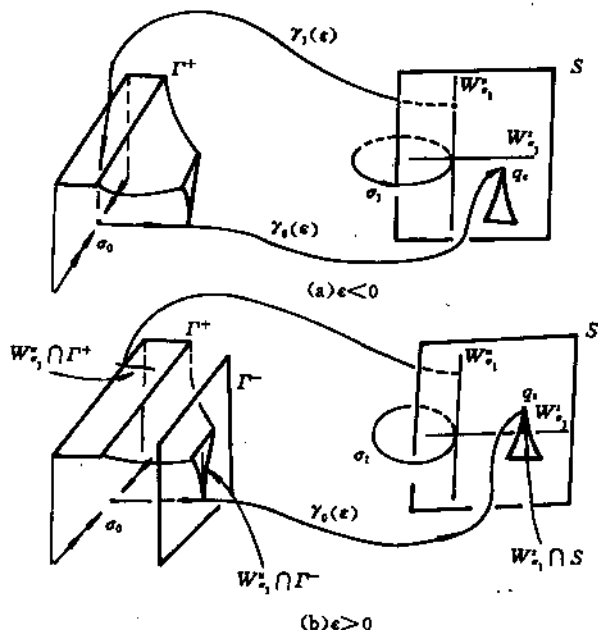


图5-9

H 正规同宿分岔值序列及正规环分岔值序列的存在性

为了证明结论(2),我们需要下面的

引理3.7 存在正规同宿分岔值序列 ϵ_n^H 和正规环分岔值序列 ϵ_n^C , 它们具有渐近表达式 $(1 + o(1))\bar{\mu}(0)^{-n}$.

证明

1. 正规同宿分岔值序列的存在性 由假设(3), 奇点 $\sigma_0(\epsilon)$ 的稳定流形 $W^s(\sigma_0(\epsilon))$ 与 S 的交包含一条曲线 C_1^{ϵ} , 它与闭轨 $\sigma_1(\epsilon)$ 的不稳定流形 $\{u=0\}$ 横截相交, 并且当 $\epsilon=0$ 时通过点 $p_0=(0,1)$. 因

此, 曲线 C_1^* 可表示为

$$C_1^*: v = V_1(u, \varepsilon), (u, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^2, 0), \quad (3.19)$$

这里 V_1 是一个 C^1 函数, 满足 $V_1(0, 0) = 1$. 曲线 C_1^* 在映射 P^{-n} 的作用下的象 $C_{1,n}^*$ 为

$$v = \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} V_1(\bar{\lambda}(\varepsilon)^n u, \varepsilon). \quad (3.20)$$

因此, 如果

$$q_\varepsilon = F(0, 0, \varepsilon) = (u(\varepsilon), \varepsilon) \in C_{1,n}^*,$$

则鞍点 $\sigma_0(\varepsilon)$ 有同宿轨. $q_\varepsilon \in C_{1,n}^*$, 当且仅当参数 ε 满足方程

$$H_1^n(\varepsilon) \stackrel{\text{d}}{=} \varepsilon - V_1^n(\varepsilon) = 0, V_1^n(\varepsilon) = \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} V_1(\bar{\lambda}(\varepsilon)^n u(\varepsilon), \varepsilon). \quad (3.21)$$

对任意给定小常数 $\tilde{\delta} > 0$, 有

$$H_1^n(0) = -V_1^n(0) < 0, H_1^n(\tilde{\delta}) > 0, n \gg 1,$$

故方程 (3.21) 在区间 $(0, \tilde{\delta})$ 中有根. 下证它是单根.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} H_1^n(\varepsilon) &= 1 - \frac{d}{d\varepsilon} V_1^n(\varepsilon) \\ &= 1 - \left[-n \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n-1} \bar{\mu}'(\varepsilon) V_1(\bar{\lambda}(\varepsilon)^n u(\varepsilon), \varepsilon) + \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial V_1}{\partial u} n \bar{\lambda}(\varepsilon)^{n-1} \bar{\lambda}'(\varepsilon) u(\varepsilon) + \frac{\partial V_1}{\partial u} \bar{\lambda}(\varepsilon)^n u'(\varepsilon) + \frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} \right) \right] \\ &= 1 + o(1), \end{aligned} \quad (3.22)$$

故 $\forall n \gg 1$, (3.21) 在区间 $(0, \tilde{\delta})$ 上有唯一单根, 记作 ε_n^H . 因为

$$\varepsilon_n^H = V_1^n(\varepsilon_n^H) = \bar{\mu}(\varepsilon_n^H)^{-n} (1 + o(1)) < \lambda^n$$

对某个常数 $\lambda < 1$ 成立, 我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^H &= (\bar{\mu}(0) + \mu'(\theta_n) \varepsilon_n^H)^{-n} (1 + o(1)) \\ &= \bar{\mu}(0)^{-n} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

在证明正规环分岔值序列的存在性之前, 让我们先给出下面的重要附注.

附注3.8 令 $\gamma_0(\varepsilon)$ 表示过 q_ε 的那条轨道. 事实上, 我们在上

面已证明了下述结果: 设 $W_\varepsilon (\neq W^s(\sigma_1(\varepsilon)))$ 是一个光滑依赖于参数 ε 的二维 C^1 不变流形, 如果 W_0 与 $W^u(\sigma_1)$ 横截相交, 则存在一序列 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 当 $\varepsilon = \varepsilon_n$ 时, $\gamma_0(\varepsilon_n) \subset W_{\varepsilon_n}$, 并且当 ε 通过 ε_n 时, 点 q_ε 以非零速度接近及离开曲线 $W_\varepsilon \cap S$.

2. 正规环分岔值序列的存在性 由假设(3)稳定流形 $W^s(\sigma_1)$ 与不变流形 $W: \{y=0\}$ 沿轨道 γ_0 横截相交. 因此, $W^s(\sigma_1(\varepsilon)) \cap \Gamma^-$ 可由下面方程表示

$$x' = h(y', \varepsilon), \quad (y', \varepsilon) \in (\mathbb{R}^2, 0), \quad (3.24)$$

这里 $h(0, 0) = 0$, $\left. \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right|_{(0,0)} > 0$. 因此曲线 $(\Delta_\varepsilon^{\text{sing}})^{-1}(W^s(\sigma_1(\varepsilon)) \cap \Gamma^-)$, 即 $W^s(\sigma_1(\varepsilon)) \cap \Gamma^+$ 上的点的坐标 (y, z) 满足方程

$$z^\beta = h(yz^\alpha, \varepsilon). \quad (3.25)$$

令 $z^\beta = s$, 则(3.25)变为

$$s = h(y s^{\frac{\alpha}{\beta}}, \varepsilon). \quad (3.26)$$

令 $(y_0, 0)$ 是点 $\gamma_1 \cap \Gamma^+$ 的坐标, 我们对方程(3.26)在点 $(y, s, \varepsilon) = (y_0, 0, 0)$ 应用隐函数定理可解得 $s = \bar{h}(y, \varepsilon)$, 或

$$z = \bar{h}(y, \varepsilon)^{\frac{1}{\beta}} \stackrel{d}{=} \bar{h}(y, \varepsilon). \quad (3.27)$$

我们断言, 函数 \bar{h} 有下面的性质

$$\bar{h} = O(\varepsilon^{\frac{1}{\beta}}), \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = O(\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}), \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varepsilon} = O(\varepsilon^{\frac{1-\beta}{\beta}}). \quad (3.28)$$

由(3.25)有

$$z^\beta = \frac{\partial h}{\partial y'} y z^\alpha + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \varepsilon,$$

或

$$z^\beta = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \varepsilon \left(1 - \frac{\partial h}{\partial y'} y z^{\alpha-\beta} \right) = O(\varepsilon).$$

这意味着

$$z = O(\varepsilon^{\frac{1}{\beta}}). \quad (3.29)$$

为了得到(3.28)中后两个估计,我们对(3.25)分别关于 y 和 ϵ 求导数,得

$$\beta z^{\beta-1} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y'} (z^{\alpha} + \alpha y z^{\alpha-1} \frac{\partial z}{\partial y}), \quad (3.30)$$

$$\beta z^{\beta-1} \frac{\partial z}{\partial \epsilon} + \frac{d\beta}{d\epsilon} z^{\beta} \ln z = \frac{\partial h}{\partial y'} (\alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial z}{\partial \epsilon} + \frac{d\alpha}{d\epsilon} z^{\alpha} \ln z) y + \frac{\partial h}{\partial \epsilon}. \quad (3.31)$$

由(3.30),

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y'} z^{\alpha-\beta+1}}{\beta - \alpha y z^{\alpha-\beta} \frac{\partial h}{\partial y'}} = O(z^{\alpha-\beta+1}) = O(\epsilon^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}).$$

由(3.31),

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \epsilon} &= \frac{\frac{\partial h}{\partial \epsilon} z^{1-\beta} - \frac{d\beta}{d\epsilon} z \ln z + y \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{d\alpha}{d\epsilon} z^{\alpha-\beta+1} \ln z}{\beta - \alpha y z^{\alpha-\beta} \frac{\partial h}{\partial y'}} \\ &= O(z^{1-\beta}) = O(\epsilon^{\frac{1-\beta}{\beta}}). \end{aligned}$$

令 C_2^{ϵ} 表示曲线 $G^{-1} \circ (\Delta_{\epsilon}^{\text{sing}})^{-1} (\Gamma \cap W^s(\sigma_1(\epsilon)))$, 设点 $(u, v) \in C_2^{\epsilon}$, 则 u, v 满足方程

$$G_Z(u, v, \epsilon) = \bar{h}(G_Y(u, v, \epsilon), \epsilon). \quad (3.32)$$

由(3.17), 对(3.32)在点 $(u, v, \epsilon) = (0, 1, 0)$ 用隐函数定理, 可得

$$v = V_2(u, \epsilon), V_2(0, 0) = 1, u \in (\mathbf{R}, 0), \epsilon \geq 0.$$

对(3.32)求微分, 可得

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} = O(1), \quad \frac{\partial V_2}{\partial \epsilon} = \begin{cases} O(1), & \beta \geq 1; \\ O(\epsilon^{\frac{1-\beta}{\beta}}), & \beta \leq 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

令 $C_{2,n}^{\epsilon} = P^{-n} C_2^{\epsilon}$, 则曲线 $C_{2,n}^{\epsilon}$ 上的点 (u, v) 满足

$$v = \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} V_2(\bar{\lambda}(\epsilon)^n u, \epsilon). \quad (3.34)$$

因为曲线 $C_{2,n}^{\epsilon}$ 属于闭轨 $\sigma_1(\epsilon)$ 的稳定流形 $W^s(\sigma_1(\epsilon))$, 故若点 $q_{\epsilon} = (u(\epsilon), \epsilon) \in C_{2,n}^{\epsilon}$, 则在 Λ 附近存在包含奇点 $\sigma_0(\epsilon)$ 及闭轨 $\sigma_1(\epsilon)$

的环, 而 $q_\epsilon \in C_{2,n}^6$, 当且仅当参数 ϵ 满足方程

$$\begin{cases} H_2^n(\epsilon) \stackrel{d}{=} \epsilon - V_2^n(\epsilon) = 0, \\ V_2^n(\epsilon) = \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} V_2(\bar{\lambda}(\epsilon)^n u(\epsilon), \epsilon). \end{cases} \quad (3.35)$$

令 $\tilde{\delta} < 1$ 是一个小正数, 满足

$$\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta} > 1, \quad \frac{(\bar{\mu}(0) + \tilde{\delta})^{1-\frac{1}{\beta}}}{\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta}} < 1.$$

令 $\alpha_n = \left[\frac{1}{\bar{\mu}(0) + \tilde{\delta}} \right]^n (1 - \tilde{\delta})$, $\beta_n = \left[\frac{1}{\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta}} \right]^n (1 + \tilde{\delta})$, 则当 n 充分大时有

$$H_2^n(\beta_n) > 0 > H_2^n(\alpha_n). \quad (3.36)$$

因此, 在区间 (α_n, β_n) 上方程 (3.35) 存在一个根, 记作 ϵ_n . 下面我们证明 ϵ_n 是单根, 即

$$\left. \frac{dH_2^n}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_n} \neq 0. \quad (3.37)$$

由 (3.35)

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_2^n}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_n} &= 1 - \left. \frac{dV_2^n}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_n} = 1 + \\ &\left[n \bar{\mu}(\epsilon)^{-n-1} \frac{d\bar{\mu}(\epsilon)}{d\epsilon} V_2(u, \epsilon) - \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \frac{\partial V_2}{\partial u} \left(n \bar{\lambda}(\epsilon)^{n-1} \frac{d\bar{\lambda}(\epsilon)}{d\epsilon} u(\epsilon) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\lambda}(\epsilon)^n \frac{du(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \right] - \left. \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \frac{\partial V_2}{\partial \epsilon}(u, \epsilon) \right|_{u=\bar{\lambda}(\epsilon)^n u(\epsilon), \epsilon=\epsilon_n} \\ &= 1 + o(1) - \left. \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \frac{\partial V_2}{\partial \epsilon}(u, \epsilon) \right|_{u=\bar{\lambda}(\epsilon)^n u(\epsilon), \epsilon=\epsilon_n}. \end{aligned}$$

由 (3.33) 可知, 如果 $\beta \leq 1$, 则有

$$\left| \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \frac{\partial V_2(u, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{u=\bar{\lambda}(\epsilon)^n u(\epsilon), \epsilon=\epsilon_n} = O(1) |\bar{\mu}(\epsilon)|^{-n} \rightarrow 0;$$

如果 $\beta > 1$, 则有

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \frac{\partial V_2}{\partial \epsilon} \right|_{u=\bar{\lambda}(\epsilon)^n u(\epsilon), \epsilon=\epsilon_n^c} = O(1) \left| \bar{\mu}(\epsilon)^{-n} \epsilon^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right|_{\epsilon=\epsilon_n^c} \\
& \leq O(1) \left(\frac{1}{\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta}} \right)^n a_n^{\frac{1-\beta}{\beta}} \\
& = O(1) \left(\frac{1}{\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta}} \right)^n (1 - \tilde{\delta})^{\frac{1-\beta}{\beta}} (\bar{\mu}(0) + \tilde{\delta})^{(1-\frac{1}{\beta})n} \\
& = O(1) \left[\frac{(\bar{\mu}(0) + \tilde{\delta})^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{\bar{\mu}(0) - \tilde{\delta}} \right]^n \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

因此(3.37)成立. 为了得到 ϵ_n^H 的渐近表达式, 我们计算差 $\epsilon_n^H - \epsilon_n^c$. 首先由(3.29), 曲线 C_1^H 与 C_2^c 之间的距离是 $O(1)\epsilon_n^{\frac{1}{\beta}}$, 即

$$|V_1 - V_2| = O(1)\epsilon_n^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.38)$$

因为 $\epsilon_n^H - \epsilon_n^c$ 分别是(3.21)和(3.35)的根, 故

$$\begin{aligned}
\epsilon_n^H - \epsilon_n^c &= V_n^1(\epsilon_n^H) - V_n^2(\epsilon_n^c) \\
&= V_n^1(\epsilon_n^H) - V_n^1(\epsilon_n^c) + V_n^1(\epsilon_n^c) - V_n^2(\epsilon_n^c) \\
&= (V_n^1)'(\theta)(\epsilon_n^H - \epsilon_n^c) + \bar{\mu}(\epsilon_n^c)^{-n} \\
&\quad [V_1(\bar{\lambda}(\epsilon_n^c)u(\epsilon_n^c), \epsilon_n^c) - V_2(\bar{\lambda}(\epsilon_n^c)u(\epsilon_n^c), \epsilon_n^c)] \\
&= o(1)(\epsilon_n^H - \epsilon_n^c) + O(1)\bar{\mu}(\epsilon_n^c)^{-n}(\epsilon_n^c)^{\frac{1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
|\epsilon_n^H - \epsilon_n^c| &= O(1)\bar{\mu}(\epsilon_n^c)^{-n}(\epsilon_n^c)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= O(1)\bar{\mu}(\epsilon_n^c)^{-(1+\frac{1}{\beta})n} \\
&= O(1)\bar{\mu}(\epsilon_n^c)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})n} \\
&= O(1)\bar{\mu}(0)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})n},
\end{aligned} \quad (3.39)$$

这里 $\beta_0 = \beta|_{\epsilon=0}$. 故由(3.23)有 $\epsilon_n^c = (1 + o(1))\bar{\mu}(0)^{-n}$. 引理证毕. \square

I 结论(2)的证明

由引理3.7, 集合 B_H 和 B_C 非空. 对任意 $\epsilon_0 \in B_C \setminus \{0\}$ 由假设(3)和结论(1), 流形 $W^s(\sigma_0(\epsilon_0))$ 和 $W^s(\sigma_1(\epsilon_0))$ 与流形 $W^u(\sigma_1(\epsilon_0))$ 横截相交. 因此, ϵ_0 是集合 B_H 和 B_C 的聚点(参见附注3.8). 故集合 B_C 的闭包 \bar{B}_C 是完全集并且是 B_H 的导集 B'_H 的一个子集. 下面证明 \bar{B}_C 是 Cantor 集. 为此只需证明它不含任何开区间. 令 $\epsilon_0 \in B_H$, 则系统 X_{ϵ_0} 的奇点 $\sigma_0(\epsilon_0)$ 有一条同宿轨. 因此, 对 ϵ_0 的某一侧 ϵ_0 附近的所有参数值 ϵ , 轨道 $\gamma_0(\epsilon)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 离开 Δ 的邻域, 这意味着 $\epsilon \notin B_H$. 因此 B_H 的闭包 \bar{B}_H 不能包含任何开区间. 另一方面 $\bar{B}_C \subset \bar{B}_H$, 故 \bar{B}_C 不包含任意开区间, 因而是 Cantor 集.

J 结论(3)的证明

由(3.17),

$$a = \left. \frac{\partial G_Z}{\partial v} \right|_{(0,1,0)} \neq 0.$$

我们设 $a < 0$, 对于情况 $a > 0$, 讨论是类似的. 因为 $a < 0$, 曲线 C_1^ϵ 位于 C_2^ϵ 的上方. 显然, 只有那些通过 C_1^ϵ 与 C_2^ϵ 之间的点的轨道才能回到区域 D_0 . 令 K_0 表示 C_1^ϵ 与 C_2^ϵ 之间的区域,

$$K_0 = \{(u, v) | V_2(u, \epsilon) \leq v < V_1(u, \epsilon), \quad 0 \leq u \leq \delta\}.$$

令

$$\bar{D} = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1 + \delta, \quad 0 \leq v \leq 1 + \delta\},$$

$$K_n = P^{-n} K_0 \cap \bar{D},$$

$$L_n = \{(u, v) | 0 \leq v \leq \bar{\mu}(\epsilon)^{-1-n} V_1(\bar{\lambda}(\epsilon)^{n+1} u, \epsilon), \\ 0 \leq u \leq 1 + \delta\}.$$

令 $\epsilon_n^H, \epsilon_n^L$ 是引理3.7所确定的参数值序列, 则 $\epsilon_{n+1}^H < \epsilon_n^L < \epsilon_n^H$. 令

$$\delta_n = \epsilon_{n+1}^H + \mu(0)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})n}, \quad \beta_0 = \beta|_{\epsilon=0},$$

则由 $\epsilon_n^L, \epsilon_n^H$ 的渐近表达式可得 $\delta_n < \epsilon_n^L$. 令 U_n 表示区间 (δ_n, ϵ_n^L) . 对

于 $\varepsilon \in U_{n-1}$, 我们定义由 $\tilde{D} = K_n \cup L_n$ 到 \bar{D} 的映射如下:

$$\Delta_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} P(u, v) = (\bar{\lambda}(\varepsilon)u, \bar{\mu}(\varepsilon)v), & (u, v) \in L_n; \\ F \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}} \circ G \circ P^n(u, v), & (u, v) \in K_n. \end{cases}$$

令

$$L'_n = \Delta_\varepsilon^{-1} L_{n-1} \cap K_n,$$

则 Δ_ε 在 $L'_n \cup L_n$ 上看上去像一个马蹄映射. 参见图5-10.

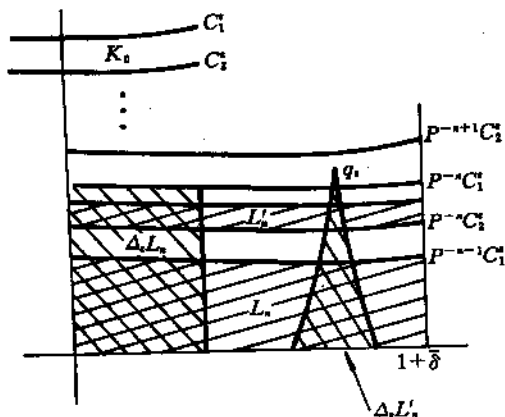


图5-10

引理3.9 存在正常数 $\mu_h, \mu_v, \mu_h \mu_v < 1$, 使得当 n 充分大, 并且 $\varepsilon \in U_{n-1}$ 时, 映射 Δ_ε 在区域 $L'_n \cup L_n$ 上满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件.

证明 因为 $\Delta_\varepsilon|_{L_n}$ 是线性映射 P , 故对任意常数 μ_h, μ_v , 只要 $\mu_h \mu_v < 1$, 它就满足 (μ_h, μ_v) 锥形条件. 对于 $(u, v) \in L'_n$, 有

$$\Delta_\varepsilon(u, v) = F \circ \Delta_\varepsilon^{\text{sing}} \circ G \circ P^n(u, v).$$

在利用第四章引理4.1来验证 Δ_ε 满足锥形条件时, 所有运算与引理3.3的证明中完全一样, 从那里可以看出我们只需验证

$$\bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} z^{1-\beta} \rightarrow 0, \text{ 对 } \varepsilon \in U_{n-1}, n \rightarrow +\infty, \quad (3.40)$$

这里 z 是点 $G \circ P^n(u, v)$ 的 z 坐标. 对于 $\beta \leq 1$, (3.40) 的成立是显然的. 下面假设 $\beta > 1$. 因为 $\varepsilon \in U_{n-1}$, 故点 $q_\varepsilon = (u(\varepsilon), \varepsilon)$ 与点 $(\bar{u}, \bar{v}) = \Delta_\varepsilon(u, v) \in L_{n-1}$ 的距离大于 $\frac{1}{2}(\delta_{n-1} - \varepsilon_n^H)$. 这样, 存在正常数 C , 使得点 $(0, 0) \in \Gamma^-$ 和点 $F^{-1}(\bar{u}, \bar{v})$ 的距离大于 $2C(\delta_{n-1} - \varepsilon_n^H)$.

因此

$$z^\beta > C(\delta_{n-1} - \varepsilon_n^H),$$

或

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} z^{1-\beta} &< \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} C^{\frac{1}{\beta}-1} (\delta_{n-1} - \varepsilon_n^H)^{\frac{1}{\beta}-1} \\ &= C^{\frac{1}{\beta}-1} \bar{\mu}(\varepsilon)^{-n} [\bar{\mu}(0)^{(1-\frac{1}{\beta})(1+\frac{1}{\beta_0})}]^{-1} \\ &= C^{\frac{1}{\beta}-1} r(\varepsilon)^{n-1} \bar{\mu}(\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

这里 $r(\varepsilon) = \bar{\mu}(0)^{(1-\frac{1}{\beta})(1+\frac{1}{\beta_0})} / \bar{\mu}(\varepsilon)$. 注意到

$$r(0) = \bar{\mu}(0)^{-\frac{1}{\beta_0}} < 1,$$

故 (3.40) 成立. 引理证毕. \blacksquare

由引理 3.9, 当 $\varepsilon \in U_{n-1}$, 映射 Δ_ε 在集合 $L'_n \cup L_n$ 上存在马蹄. 因而集合 $\Pi_n(\varepsilon) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_\varepsilon^i(L'_n \cup L_n)$ 是一个马蹄, Δ_ε 在 $\Pi_n(\varepsilon)$ 上有稠密轨道. 由区间 U_{n-1} 的定义可知, 当 $\varepsilon \in U_{n-1}$, 奇点的不稳定流形 $\gamma_0(\varepsilon)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 时离开 Λ 的邻域, 因而是游荡的. 另一方面, 不难看出 Λ 附近除了奇点 $\sigma_0(\varepsilon)$ 以外的所有非游荡轨必定与 S 相交于 $\Pi_n(\varepsilon)$ 中某一点. 因此, 集合 $\Omega(X_\varepsilon|_U)$ 是 $\sigma_0(\varepsilon)$ 加上一个具有稠密轨道的双曲不变集. 这意味着 $U_{n-1} \subset V_H$, $n \gg 1$. 令

$$U_0^H = \bigcup_{n \gg 1} U_n,$$

则

$$U_0^H \subset V_H. \quad (3.41)$$

最后我们来证明极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{1+\frac{1}{2\beta_0}}} m(\{0 < \varepsilon < t \mid \varepsilon \in U_0^H\}) = 0. \quad (3.42)$$

令 $I_n = (\varepsilon_{n+1}^H, \varepsilon_n^H)$, $R_1^n = (\varepsilon_{n+1}^H, \delta_n)$, $R_2^n = (\varepsilon_n^H, \varepsilon_n^H)$, 则

$$m(R_1^n) = \delta_n - \varepsilon_{n+1}^H = \bar{\mu}(0)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})n},$$

由(3.39),

$$m(R_2^n) = O(1)\bar{\mu}(0)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})n},$$

故

$$\sum_{n=k}^{\infty} m(R_1^n \cup R_2^n) = O(1)\bar{\mu}(0)^{-(1+\frac{1}{\beta_0})k}.$$

另一方面

$$\sum_{n=k}^{\infty} m(I_n) = \varepsilon_k^H = (1 + o(1))\bar{\mu}(0)^{-k},$$

因而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=k}^{\infty} m(R_1^n \cup R_2^n)}{\left(\sum_{n=k}^{\infty} m(I_n)\right)^{1+\frac{1}{2\beta_0}}} = 0. \quad (3.43)$$

由(3.43)不难导出(3.42). 定理证毕. \square

推论3.10 设向量场族 X_ε 满足定理3.5的条件, 并且奇点 σ_0 的鞍点量为负, 则使系统 X_ε 具有稳定周期轨的参数值集是一个边界包含原点的开集.

证明 对每一个 $\varepsilon_0 \in B_H$, 由定理1.1可知, 存在 ε_0 的一个单侧邻域 $U(\varepsilon_0)$, 使得对 $\varepsilon \in U(\varepsilon_0) \setminus \{\varepsilon_0\}$, X_ε 有一个稳定周期轨. 另一方面, 由引理3.7, B_H 中的点是可以逼近 $\varepsilon=0$, 故推论成立. \square

在一般高维情况下, 本章的定理1.1、定理2.1和定理2.2的结论也成立, 读者可参见[Sil2, 3]和[IL].

第六章 实二次单峰映射族的吸引子

从 60 年代兴起的动力系统的现代研究,其中心课题之一是双曲理论. 一个系统(流,微分同胚,映射)是双曲的,如果它的极限集是双曲的,即极限集中所有轨道的 Liapunov 指数一致非 0(在讨论流的双曲性时,不考虑沿流方向的 Liapunov 指数,它为 0). 从那时起,以 Peixoto, Smale 和我国的廖山涛教授等人为代表对双曲系统做了大量深入的研究,人们对它已逐渐有了比较完整的理解. 另外,当时人们曾相信动力系统基本上是由双曲系统构成的. 这一看法的根本转变是由于在 70 年代受到物理、天文学等领域的一些重要动力系统模型的影响. Feigenbaum, Ruelle, Hénon 和 Lorenz(他们的工作在 70 年代开始才受到数学家的重视)等人对这些模型的大量计算工作表明,这些模型具有极其复杂的动力学行为,它们似乎不具有双曲结构,相反它们应当属于非双曲范畴.

对非双曲系统的研究,理论方面的第一次实质突破是 Jakobson^[Ja] 在 80 年代初取得的,他证明了对实二次映射族的一个正 Lebesgue 测度的参数集合,相应系统具有关于 Lebesgue 测度绝对连续的不变概率测度. 这表明,在测度意义下,具有复杂的动力学行为的非双曲系统并不太少. Benedicks 和 Carleson^[BC1,2] 完善了 Jakobson 的结果和方法,并在此基础上,讨论了 Hénon 映射在具有非退化同宿相切的参数值附近的动力学性质. 继而 Mora 和 Viana^[MV] 将此结果推广到对某参数值具有非退化同宿相切的曲而微分同胚族. 与已取得的结果相呼应,Palis^[PT] 猜测具有同宿相切(在高维情况,同宿分支)的系统应该在全体非双曲系统中稠密. Yoccoz^[Yoc] 认为当前讨论此类问题的有效方法应该是,首先要对某个系统有很好的了解(例如,Logistic 映射族在 $a = 2$ 时, Hénon

映射在 $a=2, b=0$ 时), 然后考虑对此(全局)分支值的开折. 我国学者在此领域也有一些值得提到的工作, 例如 [Cy1, 2], [W1], [Z], [EZ]. 在本章中, 我们只介绍 [BC1] 关于二次映射族的结果和证明方法. 应当指出, 这里介绍的证明思想在当前这一方向的研究中是十分重要的.

§1 关于单峰映射稳定周期点的存在性

本节我们要讨论单峰映射 $f: I \rightarrow I$, 其中 $I = [-1, 1]$, 的稳定周期点的存在性问题.

定义 1.1 称一个映射 $f: I \rightarrow I$ 是单峰的, 如果它满足下列三个条件:

(U₁) f 是连续的;

(U₂) $f(0) = 1$;

(U₃) f 在 $[0, 1]$ 严格下降, 而在 $[-1, 0]$ 严格上升.

称 f 是 C^1 单峰映射, 如果 f 满足上面三个条件外, 并有

(U₄) f 是 C^1 的, 且 $f'(x) \neq 0$, 当 $x \neq 0$ 时.

令 f 是 C^1 单峰的, 并令 P 是 f 的周期为 p 的轨道. 我们称 P 是稳定周期轨, 如果 $x \in P$, $|Df^p(x)| \leq 1$, 称 P 是超稳定的, 如果 $0 \in P$. 由稳定性定义, 如果 P 是 f 的一条稳定周期轨, 那么对 $x \in P$, 有一个邻域 U , 使得对一切 $y \in U$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{np}(y) \rightarrow x$ (除了可能的 $|Df^p(x)| = 1$ 外).

现在我们要讨论的问题: 一个单峰映射可以有多少条稳定的周期轨道? 1918 年 Julia 证明了某类单峰映射至多有一条稳定的周期轨道. 1978 年 Singer^[3] 做了实质性推进, 下面我们介绍他的一些工作.

设 f 是 C^3 映射, f 的 Schwartz 导数 $Sf(x)$ 定义为

$$Sf(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

定义 1.2 称 f 是 S 单峰映射, 如果

(S₁) f 是 C^1 单峰映射;

(S₂) f 是 C^3 映射;

(S₃) $Sf(x) < 0, x \in I$, 并允许 $Sf(x) = -\infty$;

(S₄) f 映 $J(f) = [f(1), 1]$ 到自身;

(S₅) $f''(0) < 0$.

定理 1.3 如果 f 满足 (S₁), (S₂) 和 (S₃), 那么每条稳定周期轨至少吸引 $x = -1, 0$ 和 1 中的一点.

证明 由简单计算和归纳法, 下面前两个性质是容易得到的, 此处不再赘述.

1. 如果 $f, g \in C^3$, 那么 $S(f \cdot g)(x) = (Sf)(g(x))g'(x)^2 + Sg(x)$.

2. 如果 $f \in C^3$ 且 $Sf(x) < 0, \forall x \in I$, 那么 $S(f^n)(x) < 0, \forall x \in I$.

3. $|f'|$ 在 $(-1, 1)$ 中没有正的局部最小.

如若不然, 设 $|f'|$ 在 $y \in (-1, 1)$ 中有正极小. 不妨设 $f'(y) > 0$, 那么 $f''(y) = 0$. 注意到 f 是 C^3 的, 以及 $Sf(y) < 0, f'(y)$ 必与 $f''(y)$ 反号, 这与 $f'(y)$ 为极小值相矛盾. 特别, 上述事实也说明, 如果 $|f'(y)| = 1$, 那么至少在 y 的一边, $|f'| < 1$. 如果 $y (\neq \pm 1)$ 是 f 的不动点并且 $|f'(y)| = 1$, 那么这个不动点至少在一边是稳定的.

4. 如果 f 有有限多个临界点 (x 称为 f 的临界点, 如果 $f'(x) = 0$), 那么对每个整数 $n \geq 1, f$ 的周期为 n 的点是有限个. 更明确地讲, 对每个 $n \geq 1, f$ 的周期为 n 的点是可分隔的.

如若不然, 令 $g = f^n$ 并设有无穷多 $x \in I$, 满足 $g(x) = x$. 由中值公式, 便有无穷多 $x \in I$, 使 $g'(x) = 1$. 由性质 2 和 3, $|g'|$ 没有正的局部最小. 因此有无穷多 $x, g'(x) = 0$. 这与 f (因此与 g) 有有限多个临界点相矛盾.

5. 如果 $a < b < c$ 是 $g = f^n$ 的相邻不动点, 并且在区间 $[a, c]$

中不含 g 的临界点, 那么 $g'(b) > 1$.

事实上, 由中值公式, 存在 $u, v, a < u < b < v < c$, 使得 $g'(u) = g'(v) = 1$. 因为 g 在 $[a, c]$ 没有临界点, $g'(x) > 0, x \in [a, c]$. 于是由性质 3, $g'(b) > 1$.

6. 如果 $x \in (-1, 1)$ 是 g 的稳定不动点且 $|g'(x)| < 1$, 那么定理结论成立.

因为 x 是 g 的稳定不动点, 所以它的吸引域中包含 x 的连通分支具有形式 $(r, s), [-1, s)$ 或者 $(r, 1] \cap [-1, 1]$ 是平凡情况). 首先我们考虑 (r, s) 情况. g 将此连通分支映到自身, 但 r, s 不在 x 的稳定流形内, 于是 r, s 不会映入 x 的连通分支内. 因此, 只有以下三种情况之一出现.

- (i) $g(r) = g(s) (= r \text{ 或 } s)$;
- (ii) $g(r) = r$ 并且 $g(s) = s$;
- (iii) $g(r) = s$ 并且 $g(s) = r$.

如果情况 (i) 出现, 那么由 Rolle 定理, g 在 (r, s) 中有一个临界点 p , 它被吸引到 x . 但是 $g = f^n$, 那么存在 $i < n$, 使得 f^i 将 p 映到 f 的临界点. 从而定理得证.

对情况 (ii) (或 (iii)), 类似于 (i), 我们不妨设在 (r, s) 中无临界点. 那么由性质 5, 这两种情况都可排除 (在情况 (iii) 时, 考虑 g^2).

现在我们考虑连通分支为 $[-1, s)$ 的情形. 此时 -1 被吸引到 x , 类似的结论对 $(r, 1]$ 也成立. 于是, 对 $|g'(x)| < 1, x \in (-1, 1)$ 时, 定理得证. 如果 $x = \pm 1$, 定理的结论显然.

7. 如果 $g(x) = x, |g'(x)| = 1$, 那么定理的结论成立.

不失一般性, 我们设 $g'(x) = 1$. 如果 $x = \pm 1$, 那么无需证明. 如果 $x \in (-1, 1)$, 由性质 4, 有一个 x 的邻域 (r, s) 不包含 g 的其它不动点. 于是 $g(y) > y, y \in (r, x)$ 或 $g(y) < y, y \in (x, s)$. 否则, 在 x 两边有点 y , 使得 $g'(y) > 1$, 因此 g' 有一个正的极小点. 为了确定, 假设 $g(y) > y, y \in (r, x)$. 令 d 是 $y < x$ 中包含 (r, x) 的使得 $g(y) > y$ 的最大连通分支的最小值. 那么 $g(d) = d$ (或者 d

$= -1$ 并由此 x 吸引 -1). 显然 $g'(d) \geq 1$, 由此有一个点 $\omega \in (d, x)$, 使得 $g'(\omega) = 1$. 如果有 $y \in (d, x)$, 使得 $g'(y) = 0$, 则利用性质 6, 否则由情况 (iii), 我们完成了性质 7 的证明, 并因此证明了定理. \square

定理 1.3 有以下几个推论.

推论 1.4 如果 f 是 S 单峰映射, 那么它至多有一个稳定的周期点, 加上在区间 $[-1, f(1)]$ 中的一个可能的稳定不动点.

证明 因为 $f(0) = 1$, 点 $x = 0$ 和 1 被吸引到同一条稳定周期轨. 由于 $J(f)$ 是关于 f 不变的, 如果一条周期轨道有一个点属于 $J(f)$, 那么这条轨道便落入 $J(f)$. 如果这条周期轨是一个稳定不动点 x 并且 $x > 0$, 由情形 3, $|f'|_{[0, x]} \leq 1$ 或者 $|f'|_{[x, 1]} \leq 1$. 如果是第一种情况, x 吸引 $[0, x]$ 并因此吸引 0 点; 如果是第二种情况, f 吸引 $[x, 1]$ 并因此吸引 1 和 $0 = f^{-1}(1)$. 对 $x < 0$ 可类似地论证.

如果有一个周期 $p \geq 2$ 的稳定周期轨, 那么用完全类似的讨论可以说明, f^p 的最右边的不动点或者吸引 f^p 的临界点, 由此吸引 0 点或者它吸引 1 . 于是, 我们证明了 f 在 $J(f)$ 中至多有一条稳定周期轨. 另外, 从上面的证明我们也可以看到, 在 $J(f)$ 中没有稳定周期轨, 它仅仅吸引 -1 .

现在我们考虑 f 的稳定周期轨, 它不吸引 0 或 1 . 由定理 1.3, 它一定吸引 -1 , 并由此至多有一条这样的稳定周期轨.

下面我们证明, 这样的稳定周期轨是 $J(f)^\perp = (-1, f(1))$ 中的一个稳定不动点. 如同我们已经看到的, 如果这条轨道有一个点在 $J(f)$ 中, 那么整条轨道在 $J(f)$ 中并吸引 0 和 1 . 因此, 这样的轨道必在 $J(f)^\perp$ 中. 由性质 3, f 在 $J(f)^\perp$ 中至多有两个不动点, 因为 f 在 $[-1, 0]$ 中至多有两个不动点. 如果 f 在 $J(f)^\perp$ 中没有不动点, 那么 $f(y) > y, y \in J(f)^\perp$. 因此, f 在 $J(f)^\perp$ 中没有不动点也没有周期点; 如果 f 在 $J(f)^\perp$ 中只有一个不动点, 当 $f'(x) > 1$ 时, 我们有 $x = -1$, 因为 $f(y) < y$, 当 $y < x$. 由此, f 在 $J(f)^\perp$ 中没

有其它的稳定周期轨. 当 $0 < f'(x) \leq 1$ 时, 由定理 1.3, x 吸引 -1 , 因此 $J(f)^\perp$ 中没有其它的稳定周期轨. 最后, 假设 f 在 $J(f)^\perp$ 中有两个不动点, 那么有一个不动点 x 使得 $0 < f'(x) \leq 1$. 由定理 1.3, f 吸引 -1 点且在 $J(f)^\perp$ 中, f 无其它稳定周期点. ■

推论 1.5 设 f 是 S 单峰映射. 如果 $f'(-1) > 1$, 则在 $J(f)^\perp$ 中没有稳定周期点.

证明 如果 $f'(-1) > 1$, 那么由 3, $f(x) > x, x \in (-1, 0)$. 因此, 在 $J(f)^\perp$ 中没有稳定周期轨. ■

推论 1.5 可以看成是推论 1.4 的部分证明过程, 用它可以断定 $J(f)^\perp$ 中不含稳定周期点.

推论 1.6 存在没有稳定周期轨的 S 单峰映射.

证明 一个经典的例子: $f(x) = 1 - 2x^2$. 它是 Ulam 和 V. Neumann 在 1947 年给出的. 容易验证, f 是 S 单峰映射. 经 0 点的轨道为 $0, 1, -1, \dots$ 由定理 1.3 它至多有一条稳定周期轨, 并且吸引三点 $-1, 0, 1$ 之一. 但是 $f(-1) = -1$ 是不动点并且吸引这三个点. 因此, 它们不能被其它周期轨道吸引. 但是, 由于 $f'(-1) = 4 > 1$ 它不是稳定不动点, 所以 f 没有稳定周期轨. ■

附注 1.7 在本节我们讨论了 S 单峰映射的稳定周期点的存在性问题. 把定理 1.3 和它的推论应用到映射族 $F(x, a) = f_a(x) = 1 - ax^2$ 上时我们看到, 如果 a 靠近 2, 那么判定 f_a 是否有稳定周期轨的问题转化为讨论临界点轨道的性质 (在 §3 定理 3.1 的证明中, 要用到这一性质). 我们将看到, 映射族 $f_a(x), a \in [a_0, 2]$, a_0 靠近 2, 在参数区间中有一个开稠的参数集, 相应的映射有稳定周期轨. 这意味着其动力学行为是简单的. 不仅如此, 更有意义的是, 在该参数区间中也存在一个正 Lebesgue 测度的参数集, 相应的映射没有稳定周期轨, 并且其动力学行为是复杂的. 由此结果, 我们讨论清楚了分支值 $a = 2$ 附近的部分情况.

§ 2 $F(x, a) = 1 - ax^2$ 的基本性质

我们将讨论 $\xi_\nu(a) = F^\nu(0, a)$ 返回到一个固定的小区间 $I^* = (-\delta, \delta)$ 的方式, 其中 $\delta = \exp(-\sqrt{a})$. 特别要讨论它们是怎样靠近原点的, 以及靠近原点的速度. 而 $F(x, a)$ 的迭代的一些基本性质对于理解这些问题起着重要作用. 应当指出, 尽管我们只对这一特殊映射展开讨论, 但是这种以 Jakobson 开始, Benedicks 和 Carleson 发展的理论是解决一系列此类问题的关键所在.

首先我们将 I^* 分成一系列不相交的小区间的并: $I^* = \bigcup_{|\mu| > a} I_\mu$, 其中 $I_\mu = [c_\mu, c_{\mu-1})$, $c_\mu = \exp(-\sqrt{\mu})$, $\mu > 0$, 而当 $\mu < 0$ 时, $I_\mu = (-c_{-\mu}, -c_{-\mu-1}]$, 并记为 $I_\mu = -I_{-\mu}$.

引理 2.1 对充分小 $\delta > 0$, 存在 $a_0 < 2$, 使得对 $a \in [a_0, 2]$, 如果 $\eta_0 \in [-1, 1]$ 和 k 满足

$$|F^j(\eta_0, a)| \geq \delta, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

并且

$$|F^k(\eta_0, a)| < \delta,$$

那么

$$|\partial_x F^k(\eta_0, a)| \geq (1.9)^k. \quad (2.1)$$

证明 令 $x = \varphi(\theta) = \sin \frac{\pi}{2} \theta$. 在此变换下, $F(x, a)$ 可以表示为

$$\tilde{F}(\theta, a) = \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - a \sin^2 \frac{\pi}{2} \theta).$$

$$\partial_\theta \tilde{F}(\theta, a) = -\sqrt{2a} \operatorname{sgn}(\theta) \frac{\cos \frac{\theta}{2} \pi}{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{2} \theta + \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \theta\right) \left(1 - \frac{a}{2}\right)}}.$$

令 $\eta_\nu = F^\nu(\eta_0, a)$, $Q_\nu = \tilde{F}^\nu(Q_0, a)$, 其中 $Q_0 = \varphi^{-1}(\eta_0)$. 假设 $|\eta_\nu| \geq$

$1 - 2\delta^2, \nu = 0, 1, \dots, j-1$, 但是 $|\eta_j| \leq 1 - 2\delta^2$. 记 $F^k = \varphi \tilde{F}^{k-j} \varphi^{-1} \cdot F^j$. 那么我们有

$$\partial_x F^k = \varphi'(\theta_k) \prod_{\nu=j}^{k-1} \partial_\theta \tilde{F}(\theta_\nu, a) \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(\eta_j) \prod_{\nu=0}^{j-1} (-2a\eta_\nu). \quad (2.2)$$

假设 a_0 充分靠近 2, 用归纳法容易证明 $|\eta_\nu| \leq 1 - a\delta^2, \nu = j, \dots, k$. 因此 $\cos \frac{\pi}{2} \theta_\nu \neq 0$. 于是 $|\partial_\theta \tilde{F}(\theta_\nu, a)| > 1.9$. 另外, 我们有 $\varphi'(\theta_k) = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \eta_k^2}, |\eta_k| \leq \delta$ 以及 $\left| \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(\eta_j) \right| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_j^2}}$. 当 $a \in [a_0, 2]$ 时, 立得

$$|\partial_x F^k(\eta_0, a)| \geq (1.9)^k. \quad \blacksquare$$

引理 2.2 存在常数 $\gamma > 0$ 和 $k(\delta) > 0$, 当 a_0 充分靠近 2 时, 对所有 $a \in [a_0, 2]$ 和所有 $|x| \geq c_{a-1}$, 存在 $l = l(x, a) \leq k$, 使得下面的不等式成立.

$$(1) |F^i(x, a)| \geq \delta, i = 1, \dots, l-1,$$

$$(2) \log |\partial_x F^l(x, a)| \geq \gamma l.$$

证明 记 $\eta_\nu = F^\nu(x, a)$. 注意到如果 $\sqrt{\frac{2-a}{a}} < \varepsilon < \frac{1}{\delta}$, 而且 $\xi = -1 + \varepsilon$, 那么 $\xi < F(\xi, a) \leq -1 + 4\varepsilon$. 设 $|\eta_0| > c_{a-1}$. 如果 $|\eta_0| \geq \frac{1}{2}$, 那么 $|\partial_x F(\eta_0, a)| = |2a\eta_0| \geq a$. 如果 $2^{-l+1} \geq \eta_0 \geq 2^{-l}$, $l \geq 2$, 那么

$$\begin{aligned} |\partial_x F^l(\eta_0, a)| &\geq |2a\eta_0| \cdot |2a\eta_1| \cdots |2a\eta_{l-1}| \\ &\geq 2a2^{-l} \cdot 2a(1 - 2 \cdot 2^{-2l+2}) \cdots 2a(1 - 4^{l-2} \cdot 2 \cdot 2^{-2l+2}) \\ &= (2a)^l 2^{-l} (1 - 2 \cdot 2^{-2l+2}) (1 - 4 \cdot 2 \cdot 2^{-2l+2}) \cdots (1 - 2^{-1}) \\ &= a^l (1 - \frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{2^3}) \cdots (1 - \frac{1}{2^{2l-3}}). \end{aligned}$$

因为 a_0 充分靠近 2, 取 $\gamma = \frac{1}{2} \ln 2$, 那么 $\log |\partial_x F^l(\eta_0, a)| \geq \gamma l$. 从上面的证明过程可知, 对 $i = 1, \dots, l-1, |F^i(\eta_0, a)| \geq 1 - \frac{1}{2} > \delta$.

最后,取 $k(\delta) = (\log 2)^{-1} \sqrt{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^2 - 1}$, $2^{-l} \geq c_{a-1}$, 得 $l \leq k$. \square

下面的引理 2.3 要证明, 当 δ 非常小并且 m_1 充分大时, 在参数区间 $(a_0, 2)$ 中存在一个小区间 Δ_0 , 使得映射 $\xi_{m_1}: \Delta_0 \rightarrow I^*$ 是一一对应的, 并且保持指数扩张.

引理 2.3 对任意充分小 $\delta > 0$, 任意正整数 N 和任意 $a_0 < 2$, 存在 $m_1 \geq N$ 和一个参数小区间 $\Delta_0 \subset (a_0, 2)$, 使得

- (1) 对任意 $a \in \Delta_0$, $\xi_\nu(a) \leq -\frac{1}{2}$, $2 \leq \nu \leq m_1 - 1$;
- (2) $a \mapsto \xi_{m_1}(a)$ 是 Δ_0 到 I^* 的一一映射且是映上的;
- (3) $|\partial_x F^j(1, a)| \geq (1.9)^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, m_1 - 1$.

证明 因为

$$\begin{aligned} (1 + \xi_{\nu+1}) - (1 + \xi_\nu) &= \xi_{\nu+1} - \xi_\nu \\ &= 2 - a + a(1 + \xi_\nu)\left(1 - \frac{1}{a} - \xi_\nu\right), \end{aligned}$$

当 $\xi_\nu \leq -\frac{1}{2}$ 时, 我们有 $1 + \xi_{\nu+1} \geq \frac{3}{2}(1 + \xi_\nu)$.

即 $1 + \xi_\nu$ 是指数增长的. 另外, 如果 $\xi_\nu \leq 0$, $2 \leq \nu \leq j$, 那么从不等式

$$\frac{d\xi_{j+1}}{da} = -\xi_j^2 - 2a\xi_j \frac{d\xi_j}{da} < -\xi_j^2,$$

可归纳地证明 $a \mapsto \xi_{j+1}(a)$ 是单调下降的. 由这些事实, 结论 (1) 和 (2) 得证. 这是因为对上述的 δ 和 N , 我们选出包含 2 的小参数区间 $\Delta'_0 \subset [a_0, 2]$. 由于 $1 + \xi_\nu$ 是按指数增长, 只要 Δ'_0 充分小, 总有 $m_1 > N$, 使得 $\xi_\nu(a) \leq -\frac{1}{2}$, $2 \leq \nu \leq m_1 - 1$, $a \in \Delta'_0$. 但是 $\xi_{m_1}(b_0) > \delta$, 其中 b_0 是 Δ'_0 的左端点. 注意到 $\xi_{m_1}(a)$, $a \in \Delta'_0$ 是单调下降的, 所以存在 $\Delta_0 \subset \Delta'_0$, 得当 $a \in \Delta_0$ 时, $\xi_{m_1}: \Delta_0 \rightarrow I^*$ 是一一映射. 最后我们证明指数扩张性. 因为

$$|\partial_x F^j(1, a)| = \prod_{\nu=1}^j (-2a\xi_\nu),$$

其中 $\xi_1 = 1$ 并且 $-1 \leq \xi_\nu \leq \frac{-1}{2}$, $\nu = 2, \dots, j, j \leq m_1 - 1$. 从而结论(3)得证. \square

下面的引理 2.4 说明 $\partial_x F^\nu$ 和 $\partial_a F^\nu$ 是可以比较的. 更确切地讲, $\partial_x F^\nu$ 和 $\partial_a F^\nu$ 的增长速度是相同的. 我们已经知道,

$$\partial_x F^{\nu+1} = -2aF^\nu \partial_x F^\nu, \quad \partial_x F^0 = 1$$

和

$$\partial_a F^{\nu+1} = -2aF^\nu \partial_a F^\nu - (F^\nu)^2, \quad \partial_a F^0 = 0.$$

因此

$$\partial_x F^\nu = \prod_{i=0}^{\nu-1} (-2aF^i), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

并归纳地得到

$$\partial_a F^\nu = \partial_x F^\nu \frac{x}{2a} \prod_{i=1}^{\nu-1} \left(1 + \frac{F^i}{2a\partial_a F^i}\right), \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

显然有

$$\partial_a F = -x^2.$$

引理 2.4 存在充分小的 $\delta > 0$ 和 $a_0 < 2, a_0$ 靠近 2, 如果

- (1) $1 - 2\delta^2 \leq \eta_1 \leq 1$,
- (2) $a_0 \leq a \leq 2$,
- (3) $|\partial_x F^{j-1}(\eta_1, a)| \geq \exp j^{2/3}, j = 8, 9, \dots, k$,

那么

$$\frac{1}{16} \leq \frac{|\partial_a F^{k-1}(\eta_1, a)|}{|\partial_x F^{k-1}(\eta_1, a)|} \leq 16.$$

证明 由连续性, 如果 δ 充分小, a_0 靠近 2, 那么对任意 η_1 和 a 满足条件(1)和(2), 容易证明

$$\frac{\eta_1}{2a} \prod_{i=1}^7 \left(1 - \frac{|F^i(\eta_1, a)|}{|2a\partial_a F^i(\eta_1, a)|}\right) \geq \frac{1}{8} \quad (2.5)$$

和

$$\frac{\eta_1}{2a} \prod_{i=1}^7 \left(1 + \frac{|F^i(\eta_1, a)|}{|2a\partial_a F^i(\eta_1, a)|} \right) \leq 8. \quad (2.6)$$

另外,也不难得到

$$\prod_{i=8}^{\infty} \left(1 - \frac{8}{\exp i^{2/3}} \right) \geq \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

和

$$\prod_{i=8}^{\infty} \left(1 + \frac{8}{\exp i^{2/3}} \right) \leq 2. \quad (2.8)$$

下面我们证明,当 $\frac{1}{16} < \left| \frac{\partial_a F^i}{\partial_x F^i} \right| < 16$ 时,

$$1 - \frac{8}{\exp i^{2/3}} \leq \left| 1 + \frac{F^i}{2a\partial_a F^i} \right| \leq 1 + \frac{8}{\exp i^{2/3}}. \quad (2.9)$$

我们仅证第一个不等号,并只就 $F^i \geq 0, \frac{\partial_a F^i}{\partial_x F^i} > 0$ 情况给以证明,其它情况可类似证明.

$F^i \geq 0, \frac{\partial_a F^i}{\partial_x F^i} > 0$. 如果 $\partial_a F^i > 0$, 那么 $\frac{F^i}{2a\partial_a F^i} \geq 0$. 所以 $1 + \frac{F^i}{2a\partial_a F^i} \geq 1 - \frac{8}{\exp i^{2/3}}$. 如果 $\partial_a F^i < 0$, 那么 $\partial_x F^i < 0$. 而 $|\partial_x F^i| \geq \exp i^{2/3}$. 于是 $\partial_x F^i < -\exp i^{2/3}$. 因为 $\partial_a F^i < \frac{1}{16} \partial_x F^i < \frac{-1}{16} \exp i^{2/3}$. 因此

$$1 + \frac{F^i}{2a\partial_a F^i} \geq 1 - \frac{8}{\exp i^{2/3}}.$$

最后,我们来归纳地证明引理结论. $j = 7$ 时无需证明, 设 $7 \leq i \leq j$ 时,有

$$\frac{1}{16} \leq \frac{|\partial_a F^i(\eta_1, a)|}{|\partial_x F^i(\eta_1, a)|} < 16.$$

因为

$$\frac{|\partial_a F^{j+1}(\eta_1, a)|}{|\partial_x F^{j+1}(\eta_1, a)|} = \frac{|\eta_1|}{2a} \prod_{i=1}^j \left| 1 + \frac{F^i}{2a \partial_a F^i} \right|$$

$$= \frac{\eta_1}{2a} \prod_{i=1}^7 \left| 1 + \frac{F^i(\eta_1, a)}{2a \partial_a F^i(\eta_1, a)} \right| \prod_{i=8}^j \left| 1 + \frac{F^i(\eta_1, a)}{2a \partial_a F^i(\eta_1, a)} \right|,$$

因此由 (2.5) - (2.9) 可证

$$\frac{1}{16} \leq \frac{|\partial_a F^{j+1}(\eta_1, a)|}{|\partial_x F^{j+1}(\eta_1, a)|} \leq 16. \quad \blacksquare$$

附注 2.5 我们简要地说明一下引理 2.1 - 引理 2.4 的意义. 在 §3 主要结果的证明中我们可以看到, 轨道 $\{f_a^n(0)\}_{n=1}^\infty$ 将会反复地进入临界点的小邻域 I^* 中. 粗略地讲, 引理 2.1 和引理 2.2 根据 f_a 的迭代的这种特性, 分别讨论了当参数靠近 2 时, f_a 进入 I^* 前和走出 I^* 后, 在 I^* 外的扩张性质. 引理 2.3 将作为我们归纳地得到正 Lebesgue 参数集 Δ_∞ 的基础. 我们将 $F(x, a)$ 看成二元函数, 引理 2.4 说明 $F(x, a)$ 的迭代对 x 和 a 是等度增长的. 这一结果的好处在于对参数或对变量的估算可以相互转化. 在 §3 定理 3.1 的证明中, 我们将看到这些性质所起的重要作用. 这些看似简单的引理的意义还不仅仅如此. 对于一般的映射族 $F(x, a)$, 我们可以提出与上面基本性质类似的假设. 如果 $F(x, a)$ 满足这些假设, 那么 $F(x, a)$ 也具有类似于 $1 - ax^2$ 的重要结果, 细节将在本章的小结中阐述.

§3 $F(x, a)$ 不存在稳定周期轨问题

在本节里, 我们要证明下面的定理:

定理 3.1 存在具有正 Lebesgue 测度的集合 $\Delta_\infty \subset (0, 2)$, 使得对所有 $a \in \Delta_\infty$, 映射 $F(\cdot, a): x \mapsto 1 - ax^2, x \in I$ 没有稳定的周期轨.

显然, $F(x, a), a \in (0, 2)$, 是 S 单峰映射. 特别, 由 Singer 理论, 当 $a \in (a_0, 2), a_0$ 靠近 2 时, $F(x, a)$ 在 $J(F)^\perp$ 中无稳定不动点

而在 $[F(1, a), 1]$ 中至多有一条稳定周期轨, 并且假如 $x = 0$ 没有被吸引到一条周期轨, 那么 $F(x, a)$ 没有稳定周期轨. 于是, 定理 3.1 可以从下面的定理 3.2 得到.

定理 3.2 存在 $\Delta_\infty \subset (0, 2)$, Δ_∞ 具有正 Lebesgue 测度, 以及一个正整数 ν_0 , 使得对所有 $a \in \Delta_\infty$,

$$|\partial_x F^\nu(1, a)| \geq \exp(\nu^{2/3}), \quad \nu \geq \nu_0.$$

证明 这个定理的证明比较长. 因此, 我们将它分成下面三个部分.

A 我们根据 $F^\nu(0, a)$ 不断返回到 I^* 的特点, 讨论返回的形式. 与此同时用自由返回概念, 归纳地将参数区间 Δ_0 分类.

由引理 2.3, 存在一个最小整数 $m_1 (> N)$, 使得

$$f_1: a \mapsto F^{m_1}(0, a)$$

是 Δ_0 到 I^* 上的 1-1 映射. 称 m_1 是映射的首次自由返回的指标, 相应的参数首次分类为

$$\Delta_1 = f_1^{-1}(I_{-(a+1)} \cup f_1^{-1}(I_{a+1})).$$

在下一步的讨论中, 参数集合 $E_1 = \Delta_0 / \Delta_1$ 不再考虑, 从 Δ_0 中排除 E_1 是基于如下事实: 因为 $F^{m_1}(0, \Delta_0) = I^*$, 因此存在参数 $a_0 \in \Delta_0$, 使得 0 点是 $F(x, a_0)$ 的周期为 m_1 的超稳定周期点. 为了保证定理结论成立, 将 a_0 连同 a_0 的一个邻域 E_1 排除掉. 请注意, 实际上在参数区间 Δ_0 中, 我们全部排除了使 f_a 可能有小于等于 m_1 的稳定周期轨的参数.

设 ω 是第 k 次分类的任意一个构成区间, $k \geq 1$. 下面我们定义第 $k+1$ 次自由返回以及相应的分类.

设 $F^{m_k}(0, \omega) = I_\mu$, $\omega = [a_1, a_2]$, $|\mu| > 0$. 我们要讨论 ω 在 F 下的进一步划分, 定义非负整数 $p = p(\omega)$, 它是使

$$|\xi_j(a) - F^j(\eta, a)| \leq \frac{|\xi_j(a)|}{10j^2}$$

成立的最大值. 更确切地讲, 对所有 $a \in \omega$ 和所有 $\eta \in (0, c_{\mu-1})$,

$$|\xi_j(a) - F^j(\eta, a)| \leq \frac{\xi_j(a)}{10^j}, j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.1)$$

但是存在 $a \in \omega$ 和 $\eta \in (0, c_{p-1})$,

$$|\xi_{p+1}(a) - F^{p+1}(\eta, a)| > \frac{|\xi_{p+1}(a)|}{10(p+1)^2}. \quad (3.2)$$

应当注意, 对某些 $j, 1 \leq j \leq p, \xi_{m_k+j}(a)$ 可能返回到 I^* , 我们将它们记为 $\{y_k\}_{i=1}^{Y_k}$, 并被称为有界返回.

令 i 是最小整数 $i \geq p+1$, 使得 $F^{m_k+i}(0, \omega) \cap I^* = J_i \neq \emptyset$. 下面要做的工作是, 在 Δ_k 基础上, 进一步从 Δ_k 中排除一些参数集合, 使得在 Δ_k 的剩余集中, 不含使 f_a 有小于等于 m_{k+1} 的稳定周期轨的参数. 不仅如此, 相应于剩余集中的参数 a , 映射 f_a 至少在 $\nu_0 \leq \nu \leq m_{k+1}$ 时是指数扩张的.

令 S_i 是小区间 I_γ 的指标集, 满足 (i) $I_\gamma \subset J_i$ 和 (ii) $|\gamma| \leq \alpha + k$. 但是我们在 ω 中排除掉满足条件 $\xi_{m_k+i}(a) \in I_\gamma, |\gamma| \geq \alpha + k + 1$ 的所有参数 (记作 $E_{i,\gamma}$).

(a) 如果 $S_i = \emptyset$, 那么我们不分类而是继续迭代下去. 用 $n_k = m_k + i$ 表示第一次非本质自由返回的指标, 在 n_k 之后, 重复上述过程, 令 p_1 表示可能的有界返回指标, q_1 是最小的正整数使得它重新返回到 I^* . 此时 (a) 可能再一次出现. 此时用 $n_{k_2} = n_{k_1} + p_1 + q_1$ 表示第二次非本质自由返回的时刻, 并继续这一过程. 由后面证明中可以得到的映射的指数扩张性, 这一过程将在有限步后停止 (也参见 [TTY]). 在 m_k 与 m_{k+1} 之间的所有非本质自由返回我们用 $\{Z_k\}_{i=1}^{Z_k}$ 表示.

(b) 若 $S_i \neq \emptyset$, 令 $\omega_{i,\gamma}$ 表示 ω 中映到 I_γ 上的子区间, $\gamma \in S_i$. 那么 $|\gamma| > \alpha$. 此时, $F^{m_k+i}(0, \omega)$ 未必可以严格地表为区间 I_γ 的并. 令

$$K = F^{m_k+i}(0, \omega) \setminus \left(\left(\bigcup_{\gamma \in S_i} I_\gamma \right) \cup (-c_{\alpha+k+1}, c_{\alpha+k+1}) \right).$$

K 可能由 0, 1 或 2 个区间构成.

(1) 如果对某些 $I_\gamma, K \subset I_\gamma'$, 由于每个 I_γ' 毗邻于一个已选定的 I_γ , 此时我们只要稍稍扩展相应的参数区间 $\omega_{i,\gamma}$, 使得 $F^{m_k+i}(0, \omega_{i,\gamma}) = I_\gamma \cup K$. 这样的构造意味着对恰当的 γ 和符号 \pm 有

$$I_\gamma \subset F^{m_k+i}(0, \omega_{i,\gamma}) \subset I_\gamma \cup I_{\gamma \pm 1}. \quad (3.3)$$

由此, 我们可以定义第 $k+1$ 次自由返回.

(2) 如果 K 中含有区间 J , 满足 $I_\mu \subset J, |\mu| = \alpha$, 记 $F^{m_k+i}(0, \omega') = J, \omega' \subset \omega$, 并考虑它的进一步迭代直至与 I^* 相交. 在此基础上重复上面的构造. 用此方法我们得到 $\omega \subset \Delta_k$ 的一个分类 $P_0(\omega, m_k) = \{\omega_{i,\gamma}\}$. 记 $\omega_{k+1}(\omega) = \bigcup \omega_{i,\gamma}$ 并定义 Δ_{k+1} 为

$$\Delta_{k+1} = \bigcup_{\omega \in \Delta_k} \omega_{k+1}(\omega).$$

附注 3.3 在构造分类 P_0 的过程中, 每个参数的小区间 $\omega \in P_0$, 都与 I^* 中的一个区间关联. 这样的区间分成两类, 一类区间是 I_μ , 而另一类区间除包含形如 I_μ 的区间外, 它的端点落入 I_μ 毗邻的区间内 (见公式 (3.3)). 为了避免引入复杂的记号, 在下面的讨论中, 我们只就第一类区间展开讨论, 而不考虑第二类区间存在的可能性. 读者可以仿照证明思想, 对第二类区间得到同样的结论.

B 我们用归纳方法证明, 对第 k 次自由返回和所有 $a \in \Delta_k$, 下面的事实成立.

(i) 如果 $m_k = m_k(a)$ 是第 k 次返回的指标, $k \geq 1$, 那么

$$|\partial_x F^{m_k-1}(1, a)| \geq \exp(2m_k^{1/3});$$

(ii) 如果 $1 \leq i \leq m_k(a)$, 那么

$$|\partial_x F^i(1, a)| \geq \exp i^{2/3};$$

(iii) $|\xi_j(a)| \geq \exp(-\sqrt{j}), 1 \leq j \leq m_k$.

我们注意到对 $k=1$, 由引理 2.3 和 m_1 的定义, 显然上面的 (i), (ii) 和 (iii) 都成立.

下面我们对 $k+1$ 证明 (i), (ii) 和 (iii) 成立. 令 ω 是 Δ_k 中一个

小参数区间, 并令 $p = p(\omega)$, m_k 和 μ 如 A 中所定义. 我们也假定 Δ_k 中的小区间 ω 映到区间 I_ν , $|\nu| < \mu$ 时, 归纳步骤成立. 下面我们首先估计 p 的上界. 由中值公式

$$\begin{aligned}\xi_p(a) - F^p(\eta, a) &= F^{p-1}(1, a) - F^{p-1}(1 - a\eta^2, a) \\ &= a\eta^2 \partial_x F^{p-1}(1 - a\eta^2, a),\end{aligned}\quad (3.4)$$

其中 $0 < \eta' < \eta < c_{p-1}$. 由 (2.3) 和 (3.1) 对 $\nu = 1, 2, \dots, p-1$, 我们有

$$\frac{|\partial_x F^\nu(1 - a\eta^2, a)|}{|\partial_x F^\nu(1, a)|} = \prod_{i=0}^{\nu-1} \frac{|F^i(1 - a\eta^2, a)|}{|F^i(1, a)|} \leq c \leq 2, \quad (3.5)$$

其中 $c = \exp\left(\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$. 同理可证

$$\frac{|\partial_x F^\nu(1 - a\eta^2, a)|}{|\partial_x F^\nu(1, a)|} \geq c^{-1} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

容易看到, (3.5) 和 (3.6) 对 $0 < \eta' < \eta$ 也成立. 因此, 由 (3.1), (3.4) 和 (3.6) 我们得到

$$\begin{aligned}|\partial_x F^{j-1}(1, a)| &\leq \frac{2}{a\eta^2} |\xi_j(a) - F^j(\eta, a)| \leq \\ &\frac{2}{10aj^2\eta^2} \leq \frac{2}{10aj^2} \exp(2\sqrt{\mu}) \leq \exp(2\sqrt{\mu}).\end{aligned}$$

只要 $j-1 \leq m_k$, 那么由 (ii), $\exp(2\sqrt{\mu}) \geq \exp(j^{2/3})$. 但是由引理 2.3 和不等式 (3.1), 当 δ 充分小和 a_0 充分靠近 2 时, 我们有

$$\begin{aligned}j &\leq 2^{\frac{3}{2}} \mu^{\frac{3}{4}} \leq 2^{\frac{3}{2}} (\alpha + k)^{\frac{3}{4}} \leq 2^{\frac{3}{2}} (\alpha^{\frac{3}{4}} + k^{\frac{3}{4}}) \\ &\leq 15^{-1} \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_k\right) \leq 15^{-3} m_k < m_k.\end{aligned}\quad (3.7)$$

此式也说明, 当 j 增加时不等式 $j \leq 2^{\frac{3}{2}} \mu^{\frac{3}{4}}$ 在 $j = m_k$ 之前就破坏掉了. 因此

$$p \leq 2^{\frac{3}{2}} \mu^{\frac{3}{4}}. \quad (3.8)$$

令 $\omega = (a, b)$. 我们讨论 $\Omega = F^{m_k+p+1}(0, \omega)$ 的长度的下界. Ω 可以表为

$$\begin{aligned} |\Omega| &= |F^{m_k+p+1}(0, a) - F^{m_k+p+1}(0, b)| \\ &= |F^{p+1}(\xi_{m_k}(a), a) - F^{p+1}(\xi_{m_k}(b), b)|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

因为

$$\begin{aligned} |\xi_{m_k}(a) - \xi_{m_k}(b)| &= |a - b| |\partial_a F^{m_k}(0, a')| \\ &\geq |a - b| \cdot \frac{1}{16} \exp m_k^{2/3}, \quad a < a' < b, \end{aligned}$$

并注意到 F_a^p 对 x 和 a 的导数是同阶的, 而从上式可见 $|a - b|$ 与 $|\xi_{m_k}(a) - \xi_{m_k}(b)|$ 比较是微不足道的(也可参考[TTY]). 因此

$$\begin{aligned} |\Omega| &\geq \frac{2}{3} 2a |\xi_{m_k}(a)| |\xi_{m_k}(b) - \xi_{m_k}(a)| |\partial_x F^p(\theta, a)| \\ &\geq \frac{4}{3} ac_\mu \cdot |I_\mu| |\partial_x F^p(\theta, a)|, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $1 - a\delta^2 \leq \theta \leq 1$.

由(3.2)和(3.4), 存在 $\eta, \eta'', 0 < \eta'' < \eta < c_{\mu-1}$, 使得

$$a\eta^2 |\partial_x F^p(1 - a\eta'^2, a)| \geq \frac{1}{10} \frac{|\xi_{p+1}(a)|}{(p+1)^2}. \quad (3.11)$$

利用一致估计(3.5)和(3.6)我们有

$$|\partial_x F^p(\theta, a)| \geq \frac{1}{4} |\partial_x F^p(1 - a\eta'^2, a)|.$$

将(3.11)和上式代入(3.10)

$$|\Omega| \geq \frac{1}{30} \frac{c_\mu}{c_{\mu-1}^2} |I_\mu| \frac{|\xi_{p+1}(a)|}{(p+1)^2}. \quad (3.12)$$

我们要进一步证明 $|\Omega| \geq \exp(-2\mu^{3/8})$. 事实上, 由假设(iii), $|\xi_{p+1}(a)| \geq \exp(-\sqrt{p+1})$. 利用(3.8)并注意到 $\mu \geq a = \log^2\left(\frac{1}{\delta}\right)$, 那么当 δ 充分小,

$$|I_\mu| = \exp(-\sqrt{\mu-1}) - \exp(-\sqrt{\mu}) \geq c_{\mu-1} \frac{1}{2\sqrt{\mu}},$$

$$|\xi_{p+1}(a)| \geq \exp\left[-\left(1 + 2^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\frac{c_\mu}{c_{\mu-1}} = \frac{\exp \sqrt{\mu-1}}{\exp \sqrt{\mu}} \geq \exp\left(-\frac{1}{2\sqrt{\mu-1}}\right),$$

$$|\Omega| \geq \frac{1}{60\sqrt{\mu}}(1 + 2^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{3}{4}})^{-2} \exp G(\mu) \geq e^{-2\mu^{\frac{3}{8}}}, \quad (3.13)$$

其中 $G(\mu) = -\left((1 + 2^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\mu-1}}\right)$.

下面我们对 $k+1$ 证明(i) 成立. 首先证明对 $\forall a \in \Delta_k$,

$$|\partial_x F^{m_k+p}(1, a)| \geq \exp\left(2(m_k + p)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{10}p^{\frac{2}{3}}\right). \quad (3.14)$$

由微分链式法则

$$\begin{aligned} \partial_x F^{m_k+p}(1, a) &= \partial_x F^{m_k-1}(1, a)(-2a\xi_{m_k}(a)) \cdot \\ &\partial_x F^p(\xi_{m_k+1}(a), a) | 2a\xi_{m_k}(a) \partial_x F^p(\xi_{m_k+1}(a), a) | \\ &\geq 2a \exp(-\sqrt{\mu}) \cdot \frac{1}{a} \exp(2\sqrt{\mu-1}) \cdot \frac{|\xi_{p+1}(a)|}{(p+1)^2} \cdot \frac{1}{40} \\ &\geq \frac{1}{20} \exp(-\sqrt{\mu} + 2\sqrt{\mu-1}) \cdot \frac{|\xi_{p+1}(a)|}{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

因为 $\mu^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}p^{\frac{2}{3}}$, 并且 $|\xi_{p+1}(a)| \geq \exp(-\sqrt{p+1})$, 上式可表为

$$\begin{aligned} |2a\xi_{m_k}(a) \partial_x F^p(\xi_{m_k+1}(a), a)| &\geq \frac{1}{20} \frac{1}{(p+1)^2} \cdot \\ \exp(2\sqrt{\mu-1} - \sqrt{\mu} - \sqrt{p+1}) &\geq \exp\left(\frac{1}{4}p^{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

由(3.7), $m_k \geq 15^3 p$. 从而对所有 $a \in \omega$,

$$\begin{aligned} |\partial_x F^{m_k+p}(1, a)| &\geq \exp\left(2m_k^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}p^{\frac{2}{3}}\right) \\ &\geq \exp\left(2(m_k + p)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{10}p^{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned}$$

这是因为 $(m_k^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{40}p^{\frac{2}{3}})^3 \geq (m_k + p)^2$.

由分类定义, 设对 $i = i_1, F^{m_k+p+i_1}(0, a)$ 与 I^* 相交. 那么

$$|\partial_x F^{m_k+p+i_1-1}(1, a)| \geq \exp(2(m_k + p + i_1)^{\frac{2}{3}}).$$

事实上, 由于 $|F^{m_k+p+i_1-1}(1, a)| < \delta$, 并且 $|F^j(\eta_0, a)| \geq \delta, j = 0, 1, \dots, i_1 - 2$, 其中 $\eta_0 = F^{m_k+p}(1, a)$, 所以由引理 2.1

$$|\partial_x F^{i_1-1}(\eta_0)| \geq (1.9)^{i_1-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} |\partial_x F^{m_k+p+i_1-1}(1, a)| &\geq (1.9)^{i_1-1} \exp\left(2(m_k + p)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{10}p^{\frac{2}{3}}\right) \\ &\geq \exp(2(m_k + p + i_1)^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

如果 $\xi_{m_k+p+i_1}(a)$ 是自由返回, 那么记 $m_{k+1} = m_k + p + i_1$, 并且对 $k+1$, 我们证明了(i), 如果是非本质自由返回, 由(3.13), $F^{m_k+p+i_1}(0, \omega)$ 与 $I_v, |\nu| < \mu$ 相交. 重复前面的讨论, 并在下一次返回时, 我们有

$$|\partial_x F^{n_k-1}(1, a)| \geq \exp(2n_k^{\frac{2}{3}}).$$

如此继续下去直至到 n_k 时, 返回是自由的时候为止. 自由返回在有限次非本质自由返回后必会出现, 这是因为 ω 的象的长度, 如同我们在 A 中看到的一样, 在返回时是非常快地增长的. 我们完成了(i)'的证明.

当 $k+1$ 时关于(ii)的证明, 我们只对 $m_k \leq i < n_k$ 给出证明. 而对时间段 $n_{k_j} \leq i < n_{k_{j+1}}$ 的证明是类似的.

如果 $i - m_k \leq p_k < m_k$, 其中 $p = p_k$ 如(3.1)和(3.2)定义, 那么我们有

$$\begin{aligned} &|\partial_x F^{i-1}(1, a)| \\ &= |\partial_x F^{i-1-m_k}(\xi_{m_k+1}(a), a) \cdot 2a\xi_{m_k}(a)\partial_x F^{m_k-1}(1, a)| \\ &\geq \exp(2m_k^{2/3}) \cdot 2a\exp(-\sqrt{\mu})|\partial_x F^{i-1-m_k}(\xi_{m_k+1}(a), a)|. \end{aligned}$$

由一致估计(3.5)和(3.6), 归纳假设(ii)和 $m_k > \mu$,

$$\begin{aligned} & |\partial_x F^{i-1}(1, a)| \\ & \geq \exp(2m_k^{\frac{2}{3}} - \sqrt{\mu} + (i-1-m_k)^{\frac{2}{3}}) \geq \exp i^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

如果 $i > p_k + m_k$, 由(3.14)

$$\begin{aligned} & |\partial_x F^{i-1}(1, a)| \\ & = |\partial_x F^{m_k+p_k}(1, a) \cdot \partial_x F^{i-m_k-p_k-1}(\xi_{m_k+p_k+1}(a), a)| \\ & \geq \exp(2(m_k+p_k)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{10}p_k^{\frac{2}{3}}) |\partial_x F^{i-m_k-p_k-1}(\xi_{m_k+p_k+1}(a), a)|. \end{aligned}$$

由引理 2.2, 我们得到

$$|\partial_x F^{i-m_k-p_k-1}(\xi_{m_k+p_k+1}(a), a)| \geq \delta \exp(\gamma(i-m_k-p_k-1)).$$

注意到

$$2(m_k+p_k)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{10}p_k^{\frac{2}{3}} + \gamma(i-1-p_k-m_k) - \log \frac{1}{\delta} \geq i^{\frac{2}{3}}.$$

从而(ii)得证.

(iii) 的证明. 要证当 $m_k \leq j \leq m_{k+1}$ 时, $|\xi_j(a)| \geq \exp(-\sqrt{j})$. 由引理 2.3, 只要 a_0 充分靠近 2, 总可适当选取 m_1 , 使得 $m_1 \geq 2\alpha$. 注意到 $m_k \geq m_1, k \geq 1$, 我们有

$$m_k \geq \frac{1}{2}m_k + \frac{1}{2}m_1 \geq k+1+\alpha.$$

因此, 当 $m_k \leq j \leq m_{k+1}$ 时

$$|\xi_j| \geq \exp(-\sqrt{\alpha+k+1}) \geq \exp(-\sqrt{m_k}) \geq \exp(-\sqrt{j}).$$

C 最后我们来估计, 在构造 Δ_{k+1} 时, 从 Δ_k 中排除的参数集的测度. 更确切地讲, 我们要证明

$$|\Delta_{k+1}| \geq |\Delta_k|(1-\alpha_k), \quad (3.16)$$

其中 $0 \leq \alpha_k < 1$ 且 $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k) > 0$. 如果(3.16)得以证明, 那么由归纳过程我们有

$$|\Delta_n| \geq |1 - a_{n-1}| |\Delta_{n-1}| \geq \cdots \geq \prod_{i=1}^{n-1} (1 - a_i) |\Delta_1|.$$

注意到 $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, 我们有

$$|\Delta_\infty| = \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k \right| > 0.$$

并完成了定理 3.2 的证明. 在证明 (3.16) 之前, 我们暂时假设对所有 $a_1, a_2 \in \omega \subset \Delta_k$, 存在与 k 无关的常数 c , 使得

$$c^{-1} \leq \frac{|\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a_1)|}{|\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a_2)|} \leq c. \quad (3.17)$$

令 $\omega = (a, b) \subset \Delta_k$, $F^{m_{k+1}}(0, \omega)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} |F^{m_{k+1}}(0, \omega)| &= |F^{m_{k+1}}(0, a) - F^{m_{k+1}}(0, b)| \\ &= |F^{m_{k+1}-m_k-p-1}(\xi_{m_k+p+1}(a), a) - \\ &\quad F^{m_{k+1}-m_k-p-1}(\xi_{m_k+p+1}(b), b)|. \end{aligned}$$

与推导 (3.10) 相似, 我们得到

$$\begin{aligned} &|F^{m_{k+1}}(0, \omega)| \\ &\geq \frac{2}{3} |\partial_x F^{m_{k+1}-m_k-p-1}(\theta, a)| |\xi_{m_k+p+1}(a) - \xi_{m_k+p+1}(b)|, \end{aligned}$$

其中 θ 在 $\xi_{m_k+p+1}(a)$ 和 $\xi_{m_k+p+1}(b)$ 之间. 因此得

$$(1) |F^j(\theta, a)| \geq \delta, j = 0, 1, 2, \dots, m_{k+1} - m_k - p - 2;$$

$$(2) |F^{m_{k+1}-m_k-p-1}(\theta, a)| < \delta.$$

利用引理 2.1

$$\begin{aligned} &|F^{m_{k+1}}(0, \omega)| \\ &\geq \frac{2}{3} (1.9)^{m_{k+1}-m_k-p-1} |\xi_{m_k+p+1}(a) - \xi_{m_k+p+1}(b)| \\ &= \frac{2}{3} (1.9)^{m_{k+1}-m_k-p-1} |\Omega| \geq \exp(-2\mu^{\frac{3}{8}}). \end{aligned}$$

我们也有

$$|F^{m_{k+1}}(0, \omega)| = |\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a')| |\omega|,$$

其中 $a' \in \omega$. 于是, 我们得到了 ω 长度的一个下界

$$|\omega| \geq \frac{\exp(-2\mu^{\frac{3}{8}})}{|\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a')|}.$$

另一方面, 令 ω' 表示 ω 中可以包含于 Δ_{k+1} 的小区间全体. 根据 Δ_{k+1} 定义, 记 $\tilde{\omega}_{k+1} = \omega \setminus \omega'$, 则

$$|F^{m_{k+1}}(0, \tilde{\omega}_{k+1})| \leq \exp(-\sqrt{a+k+1}).$$

而

$$|F^{m_{k+1}}(0, \tilde{\omega}_{k+1})| = |\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a'')| |\tilde{\omega}_{k+1}|,$$

其中 $a'' \in \tilde{\omega}_{k+1}$, 因此

$$|\tilde{\omega}_{k+1}| \leq \frac{\exp(-\sqrt{a+k+1})}{|\partial_a F^{m_{k+1}}(0, a'')|}.$$

利用 (3.17), 我们可以估计从 Δ_k 中排除的参数集的测度

$$\frac{|\omega| - |\omega'|}{|\omega|} = \frac{|\tilde{\omega}_{k+1}|}{|\omega|} \leq \text{const} \frac{\exp(-\sqrt{a+k+1})}{\exp(-2\mu^{\frac{3}{8}})}$$

因此, 有

$$\frac{|\Delta_k| - |\Delta_{k+1}|}{|\Delta_k|} \leq \text{const} \frac{\exp(-\sqrt{a+k+1})}{\exp(-2\mu^{\frac{3}{8}})} = \alpha_k$$

和

$$|\Delta_{k+1}| \geq (1 - \alpha_k) |\Delta_k|.$$

因为 $|\mu| < a + k$, 所以 $\alpha_k \leq \beta_k$, 其中

$$\beta_k = \text{const} \exp(2(\alpha + k)^{\frac{3}{8}} - \sqrt{a+k+1}).$$

容易验证 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \beta_k) > 0$, 因此 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k) > 0$.

附注 3.4 读者可以看到, 在证明 (3.16) 时, 我们仅考虑了从 k 次自由返回到 $k+1$ 次自由返回的过程中, 没有非本质自由返回. 更明确地说, 我们仅考虑了 $n_{k_1} = m_{k+1}$ 情况. 对于一般情况, 读者可仿照上述过程证明同样的结果.

下面证明 (3.17) 成立. 我们将给出一个形式上更一般的结

论.

引理 3.5 设 $F^{m_k}(0, \omega) \subseteq I_\mu, \omega \in \Delta_k$, 那么有常数 c_1 和 c_2 , 使得对任意 $a, b \in \omega$ 和 $j < m_{k+1}$, 下列不等式成立

$$\frac{|\partial_x F^j(1, b)|}{|\partial_x F^j(1, a)|} \leq c_1 \quad (3.18)$$

和

$$\frac{|\partial_a F^j(1, b)|}{|\partial_a F^j(1, a)|} \leq c_2. \quad (3.19)$$

证明 显然, 我们只需证明 (3.18) 成立. (3.19) 式的结果可从 (3.18) 和引理 2.4 推得. (3.18) 式等价于

$$\left(\frac{b}{a}\right)^j \prod_{\nu=1}^j \frac{|\xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} \leq c_1.$$

由归纳的结论 (i), 得

$$2 \geq |F^{m_k-1}(1, \omega)| = |\partial_a F^{m_k-1}(1, a')| |\omega|.$$

因此, 利用引理 2.4, 得

$$|\omega| \leq c' \exp(-2m_k^{\frac{2}{p}}).$$

因为 $m \gg 1$,

$$\left|\frac{b}{a}\right|^j \leq \left(1 + \frac{|\omega|}{|a|}\right)^j \leq (1 + c'' \exp(-m_k^{\frac{2}{p}}))^j \leq 2,$$

于是 $\left(\frac{b}{a}\right)^j$ 在对参数的一致性估计中是不重要的因素. 为了证明

(3.18), 我们只要估计 $\prod_{\nu=1}^j \frac{|\xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|}$. 因为

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^j \frac{|\xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} &= \exp\left(\sum_{\nu=1}^j \ln\left(1 + \frac{|\xi_\nu(b) - \xi_\nu(a)|}{|\xi_\nu(a)|}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(\sum_{\nu=1}^j \frac{|\xi_\nu(b) - \xi_\nu(a)|}{|\xi_\nu(a)|}\right). \end{aligned}$$

所以我们只要估计

$$S = \sum_{\nu=1}^{m_{k+1}-1} \frac{|\xi_\nu(b) - \xi_\nu(a)|}{|\xi_\nu(a)|}.$$

令 $\{t_j\}_{j=1}^{N_k}$ 为自由返回或非本质自由返回的指标, 并且 $t_i < t_j$, 如果 $i < j$, 那么 S 可分段表示为

$$S = \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{\nu=t_j}^{t_{j+1}-1} \frac{|\xi_\nu(b) - \xi_\nu(a)|}{|\xi_\nu(a)|} = \sum_{j=1}^{N_k} S_j.$$

由 t_j 的定义, $\xi_{t_j} \in I_{\mu_j}$, 并且 $\sigma_j = (\xi_{t_j}(a), \xi_{t_j}(b)) \subset I_{\mu_j}$. 我们将 S_j 分成两部分

$$S_j = \sum_{\nu=t_j}^{t_j+p_j} \frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} + \sum_{\nu=t_j+p_j+1}^{t_{j+1}-1} \frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|}.$$

首先估计第一个和式, 当 $\nu = t_j$ 时, $\frac{|\xi_{t_j}(a) - \xi_{t_j}(b)|}{|\xi_{t_j}(a)|} \leq \frac{|\sigma_j|}{c_{\mu_j}}$, 当 $t_j < \nu \leq t_j + p_j$ 时, 记 $s = \nu - t_j$. 显然, $s = 1, 2, \dots, p_j$, 此时

$$\begin{aligned} |\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)| &= |F^s(\xi_{t_j}(a), a) - F^s(\xi_{t_j}(b), b)| \\ &\leq c_0 |\partial_x F^{s-1}(1, a)| |c_{\mu_j}| |\sigma_j|. \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} |\xi_\nu(a)| &= |F^s(\xi_{t_j}(a), a)| \\ &\geq |F^s(0, a)| - |F^s(\xi_{t_j}(a), a) - F^s(0, a)|. \end{aligned}$$

记 $\xi_{t_j}(a) = \eta$, 则 $0 < \eta < c_{\mu_{j-1}}$. 因此由 (3.1) 式,

$$|\xi_\nu(a)| \geq |\xi_s(a)| - \frac{1}{10s^2} |\xi_s(a)| \geq \frac{1}{2} |\xi_s(a)|.$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=t_j}^{t_j+p_j} \frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} \\ &\leq \frac{|\sigma_j|}{c_{\mu_j}} + 2c_0 \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \sum_{s=1}^{p_j} \frac{|c_{\mu_j}| |I_{\mu_j}| |\partial_x F^{s-1}(1, a)|}{|\xi_s(a)|} \end{aligned}$$

$$\leq C_0' \left[\frac{|\sigma_j|}{|c_{\mu_j}|} + \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \sum_{s=1}^{p_j} \frac{|c_{\nu_j}| |I_{\nu_j}| |\partial_x F^{s-1}(1, a)|}{|\xi_s(a)|} \right]. \quad (3.20)$$

我们把不等式右边的和式分成两部分

$$\sum_{s=1}^{p_j} = \sum_{s=1}^{p_j'} + \sum_{s=p_j'+1}^{p_j},$$

其中 $p_j' = \frac{1}{4} \sqrt{\mu_j}$. 第一部分我们用基本估计

$$\begin{cases} |\partial_x F^s| \leq 4^s, \\ |\xi_s(a)| \geq e^{-\sqrt{s}}. \end{cases}$$

第二部分我们利用 (3.1), (3.4) 和 (3.5) 推导出

$$|\partial_x F^{s-1}(1, a)| \leq \frac{c}{a\eta^2} |\xi_s(a) - F^s(\eta, a)| \leq \frac{c}{a\eta^2} \frac{1}{10s^2} |\xi_s(a)|,$$

其中 $\eta \in [c_{\mu_j}, c_{\mu_{j-1}})$. 于是

$$\frac{c_{\mu_j} |I_{\mu_j}| |\partial_x F^{s-1}(1, a)|}{|\xi_s(a)|} \leq c \frac{|I_{\mu_j}|}{c_{\mu_j} s^2}.$$

因此

$$\sum_{s=1}^{p_j} = \sum_{s=1}^{p_j'} + \sum_{s=p_j'+1}^{p_j} \leq \left[4^{p_j'} c_{\mu_j} |I_{\mu_j}| \sum_{s=1}^{p_j'} e^{\sqrt{s}} + \frac{c |I_{\mu_j}|}{c_{\mu_j}} \sum_{s=p_j'+1}^{p_j} \frac{1}{s^2} \right].$$

注意到 $p_j' = \frac{1}{4} \sqrt{\mu_j}$ 和 $|I_{\mu_j}| \sqrt{\mu_j} \leq c_{\mu_j}$, 我们有

$$\sum_{\nu=t_j}^{t_j+p_j} \frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} \leq \text{const} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}| \sqrt{\mu_j}}.$$

因为当 $t_j + p_j < \nu < t_{j+1}$ 时, $\xi_\nu(a) \cap I^* = \emptyset$ 以及

$$|\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)| \geq \frac{2}{3} |\partial_x F^{t_{j+1}-\nu}(\theta, a)| |\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|,$$

其中 θ 在 $\xi_\nu(a)$ 与 $\xi_\nu(b)$ 之间, 我们有

$$\frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{10}{19} \right)^{t_{j+1}-\nu} \frac{|\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)|}{|\xi_{t_{j+1}}(a)|}.$$

事实上, $|\xi_\nu(a)| \geq |\xi_{t_{j+1}}(a)|$, 并由引理 2.1

$$|\partial_x F^{t_{j+1}-\nu}(\theta, a)| \geq (1.9)^{t_{j+1}-\nu},$$

于是

$$|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)| \leq \frac{3}{2} \left(\frac{10}{19} \right)^{t_{j+1}-\nu} |\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)|.$$

因此, 第二部分可以估计如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=t_j+p_j+1}^{t_{j+1}-1} \frac{|\xi_\nu(a) - \xi_\nu(b)|}{|\xi_\nu(a)|} \\ & \leq \frac{3}{2} \sum_{\nu=t_j+p_j+1}^{t_{j+1}-1} \left(\frac{10}{19} \right)^{t_{j+1}-\nu} \frac{|\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)|}{|\xi_{t_{j+1}}(a)|} \\ & \leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{10}{19} \right)^j \frac{|\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)|}{|\xi_{t_{j+1}}(a)|} \\ & \leq \text{const} \frac{|\xi_{t_{j+1}}(a) - \xi_{t_{j+1}}(b)|}{|\xi_{t_{j+1}}(a)|}. \end{aligned}$$

上述的估计表明, 第二部分和可以被吸收到 $\sum_{t_{j+1}}^{t_{j+1}-1}$ 中, 所以

$$S \leq \text{const} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|}.$$

为完成 (3.18) 的估计, 我们只要估计上面不等式右边和式的界. 完全类似于 (3.13) 的估计, 我们有

$$|F^{p_j+1}(I_{\mu_j}, a')| \geq \exp(-2\mu_j^{\frac{3}{5}}), \quad (3.21)$$

其中 $a' \in [a, b]$, $I_{\mu_j} = (c_{\mu_j}, c_{\mu_{j-1}})$. 下面我们要证明 $|\sigma_{j+1}| >$

$5|\sigma_j|$. 为此, 先证明在有限的时间段 $1 \leq i \leq p_j$ 中, $\frac{|\partial_x F^i(x_1, a_1)|}{|\partial_x F^i(x_2, a_2)|}$

的一致有界性, 其中 $x_1, x_2 \in I_{\mu_j}, a_1, a_2 \in \omega$.

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_x F^i(x_1, a_1)|}{|\partial_x F^i(x_2, a_2)|} &= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^i \frac{\prod_{\nu=0}^{i-1} |F^\nu(x_1, a_1)|}{\prod_{\nu=0}^{i-1} |F^\nu(x_2, a_2)|} \\ &\leq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^i \exp\left(\sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{|F^\nu(x_1, a_1) - F^\nu(x_2, a_2)|}{|F^\nu(x_2, a_2)|}\right). \end{aligned}$$

由(3.1), 当 $\nu \leq p_j$ 时

$$|F^\nu(x, a) - \xi_\nu(a)| \leq \frac{|\xi_\nu(a)|}{10\nu^2}, \quad x \in I_j, \quad a \in \omega,$$

我们得到

$$\begin{aligned} &|F^\nu(x_1, a_1) - F^\nu(x_2, a_2)| \\ &\leq \frac{1}{10\nu^2} (|\xi_\nu(a_1)| + |\xi_\nu(a_2)| + |\xi_\nu(a_1) - \xi_\nu(a_2)|), \end{aligned}$$

和

$$|F^\nu(x_2, a_2)| \geq \frac{1}{2} |F^\nu(0, a_2)|.$$

于是

$$\begin{aligned} &\frac{|F^\nu(x_1, a_1) - F^\nu(x_2, a_2)|}{|F^\nu(x_2, a_2)|} \\ &\leq \text{const} \left(\frac{1}{10\nu^2} \left(2 + \frac{|\xi_\nu(a_1) - \xi_\nu(a_2)|}{|\xi_\nu(a_2)|} \right) + \frac{|\xi_\nu(a_1) - \xi_\nu(a_2)|}{|\xi_\nu(a_2)|} \right). \end{aligned}$$

由归纳的结论(ii), 引理 2.4, (3.5) 和 (3.6)

$$\begin{aligned} |\partial_x F^{\nu-1}(1, a)| &\leq \exp(2\sqrt{\mu_j}), \\ |\partial_x F_j^{\nu-1}(1, a)| &\geq \exp(2t_j^{2/3}). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |\xi_\nu(a_1) - \xi_\nu(a_2)| &= \text{const} |\partial_a F^{\nu-1}(1, a')| |a_1 - a_2| \\ &\leq \text{const} |\partial_x F^{\nu-1}(1, a')| |a_1 - a_2| \end{aligned}$$

$$\leq \text{const} \exp(2\sqrt{\mu_j})|a_1 - a_2|,$$

以及

$$|a - b| \frac{|\xi_{i_j}(a) - \xi_{i_j}(b)|}{|\partial_a F_{i_j}^{i_j-1}(1, a')|} \leq \text{const} \exp(-2t_j^{2/3}).$$

注意到 $|\xi_{i_j}(a_2)| \geq \exp(-\sqrt{\nu})$ 和 $p_j \leq 2^{3/2} \mu_j^{3/4}$, 立得

$$\sum_{v=0}^{i-1} \frac{|F^v(x_1, a_1) - F^v(x_2, a_2)|}{|F^v(x_2, a_2)|} \leq \text{const}.$$

因为 $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^i$ 是一个有界数, 所以

$$\frac{|\partial_x F^i(x_1, a_1)|}{|\partial_x F^i(x_2, a_2)|} \leq \text{const},$$

其中 $x_i \in I_{\mu_j}$, $a_i \in \omega$.

由引理 2.1 和上述估计, 我们得到

$$\begin{aligned} |\sigma_{j+1}| &= |F_{j+1}^{i_j}(0, a) - F_{j+1}^{i_j}(0, b)| \\ &= |F_{j+1}^{i_j-(i_j+p_j+1)}(\xi_{i_j+p_j+1}(a), a) - \\ &\quad F_{j+1}^{i_j-(i_j+p_j+1)}(\xi_{i_j+p_j+1}(b), b)| \\ &\geq \text{const} |\xi_{i_j+p_j+1}(a) - \xi_{i_j+p_j+1}(b)| \\ &\geq \text{const} \frac{|F_{j+1}^{i_j}(I_{\mu_j}, a)|}{|I_{\mu_j}|} |\sigma_j| \\ &\geq \text{const} |\sigma_j| \exp(\sqrt{\mu_j}) \exp(-2\mu_j^{3/2}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

因为 δ 很小, 所以 (3.22) 意味着 $|\sigma_{j+1}| \geq 5|\sigma_j|$. 最后, 我们估计和式

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|}. \quad (3.23).$$

要注意, 某些 σ_j 可能同时位于某个区间 I_s 中. 当此情况发生时, 由于 $|\sigma_{j+1}| \geq 5|\sigma_j|$, 我们有 $|\sigma_j| \leq |\sigma_{J(s)}|$, $J(s)$ 表示这些 $\sigma_j \in I_s$ 的

最大下标, 由此有

$$\sum_{\mu_j=s} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{I_{\mu_j}} \leq \text{const} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{|\sigma_{J(s)}|}{|I_s|}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} &= \sum_{s \in \{\mu_j\}} \sum_{\mu_j=s} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \\ &\leq \text{const} \sum_{s \in \{\mu_j\}} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{|\sigma_{J(s)}|}{|I_s|}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

不等式(3.24)表明和式中的 μ_j 不妨是不同的. 将和式

$$\sum_{\mu_j} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|}$$

分成两部分, 令 J_1 是使得

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \leq \mu_j^{-2}$$

的指标集, 而 J_2 是剩余指标集. 那么

$$\sum_{j \in J_1} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \leq \text{const},$$

即上式左端是一致有界的. 如果 $j \in J_2$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \geq \frac{1}{\mu_j^2}.$$

由(3.22), 如果 $k > j$

$$\begin{aligned} |\sigma_k| &\geq \text{const} |\sigma_j| \exp(\sqrt{\mu_j}) \exp\left(-2\mu_j^{\frac{3}{8}}\right) \\ &\geq \text{const} \sqrt{\mu_j} \frac{1}{\mu_j^2} |I_{\mu_j}| \exp(\sqrt{\mu_j}) \exp\left(-2\mu_j^{\frac{3}{8}}\right) \\ &\geq \exp\left(-3\mu_j^{\frac{3}{8}}\right). \end{aligned}$$

但 $\sigma_k \subset I_{\mu_k}$. 由 I_{μ_k} 的定义立得 $\mu_k \leq 9\mu_j^{\frac{3}{4}}$. 此不等式说明 $\{\mu_j\}_{j \in J_2}$ 有

限. 因此

$$\sum_{j \in J_2} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \frac{|\sigma_j|}{|I_{\mu_j}|} \leq \sum_{j \in J_2} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}}$$

是一致有界的. 于是, 我们证明了引理 3.5, 从而定理 3.2 证毕. ■

§ 4 分布问题

我们仍用 $\xi_\nu(a)$ 表示点 $x = 0$ 的 ν 次迭代, 并且令

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \delta_{\xi_\nu}. \quad (4.1)$$

在本节中, 我们讨论 μ_n 的渐近性质. 更确切地讲, 我们将证明下面的基本定理.

定理 4.1 对于前面定义的 Δ_∞ 中几乎所有的参数, 序列 $\{\mu_n\}_1^\infty$ 的 W^* -极限 μ 是绝对连续的: $d\mu = gdx$, 其中 $g \in L^p$, 对所有 $p < 2$ 成立.

附注 4.2 这个定理表明, 测度 μ 不是很特殊的, 并且临界点的轨道关于测度 μ 遍历. 为证明这一定理, 我们将依照 § 3 中所得到的 $\{\xi_\nu(a)\}_1^\infty$ 的基本性质分步进行讨论. 我们首先讨论在 I^* 上的分布, 然后讨论在 $[-1, 1] \setminus I^*$ 上的分布, 由后面的讨论我们知道, $[-1, 1] \setminus I^*$ 上的分布不难从 I^* 上的分布得到. 因此, 讨论清楚 I^* 上的性质是重要的.

我们已经知道, $\xi_\nu(a)$, $a \in \Delta_\infty$ 以三种形式返回到 I^* : 自由返回, 非本质自由返回和有界返回. 我们首先证明在 I^* 上自由返回 $x_n (= \xi_{m_n})$ 的分布具有有界密度. 其次, 用类似的方法可以证明非本质返回 $\{z_{n_j}\}$ 的分布具有有界密度. 我们最后证明有界返回 $\{y_{n_j}\}$ 的分布具有密度 $g \in L^p$, $p < 2$.

定理 4.1 的证明

1. 自由返回的分布问题的讨论.

记 $A = \Delta_\infty$, 不妨设 A 的 Lebesgue 测度为 1, 即 $mA = 1$. 这样, 我们可以把它看成概率测度. 在此基础上, 我们可以引入期望 E 和条件概率等概念.

取定 $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_l \leq n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$, 定义

$$\mathcal{A} = \{a \in \Delta_n \mid x_{\nu_j} \in I_{\mu_j}, j = 1, 2, \dots, l\},$$

或者 $\mathcal{A} = A$. 由前面的讨论我们知道, 这种形式的参数集合可以分成一系列子集 $\mathcal{A}(i)$, 其中每个 $\mathcal{A}(i)$ 相应于一条不同的“路径” i , 该路径在第 ν_j 次自由返回时, 通过区间 I_{μ_j} . 我们定义

$$A_\nu = \{a \in \mathcal{A} \mid x_n(a) \in I_\nu\},$$

$$A_{\nu\mu}(i) = \{a \in \mathcal{A} \mid x_n(a) \in I_\nu, x_{n+1}(a) \in I_\mu, \text{路径 } i\},$$

$$A'_\mu = \bigcup_{\nu, i} A_{\nu\mu}(i).$$

对每个路径 i , 由 (3.13), I_ν 可扩增为一个区间 $\Omega_\nu(i)$, 其中

$$|\Omega_\nu(i)| = L(\nu, i) \geq \varphi(\nu) = \exp(-2\nu^{\frac{3}{8}}). \quad (4.2)$$

由分类的意义, 我们知道 $\Omega_\nu(i)$ 可以分成一些区间 I_μ 的并, 由前面的引理 3.5, 我们得到

$$mA_{\nu\mu}(i) \leq \text{const} \frac{|I_\mu|}{L(\nu, i)} \sum_k mA_{\nu k}(i). \quad (4.3)$$

为完成情形 1 的证明, 我们首先给出两个事实, 并把它们归纳为下面两个引理.

引理 4.3 给定 $\mathcal{A} = \bigcup_\nu A_\nu \subset A$ 或 $\subset \Delta_n$. 有一个与 \mathcal{A} 无关的常数 c_0 , 使得如果对某常数 $Q > c_0$, 下式

$$mA_\nu \leq 2Q|I_\nu|mA$$

对所有的 ν 成立. 那么, 对所有 μ 我们有

$$mA'_\mu \leq Q|I_\mu|mA.$$

证明 由 (4.3) 我们有

$$mA'_\mu = \sum_{\nu, i} mA_{\nu\mu}(i) \sum_{i(1 \leq \nu \leq q)} mA_{\nu\mu}(i) +$$

$$c|I_\mu| \sum_{i(\nu > q)} \frac{1}{L(\nu, i)} \sum_k mA_{\nu k}(i).$$

因为

$$\sum_{\nu > q} \frac{1}{\varphi(\nu)} \sum_{i,k} m A_{\nu k}(i) \leq 2Q \sum_{\nu > q} \frac{|I_\nu| m_{\mathcal{A}}}{\varphi(\nu)},$$

并注意到 $\sum |I_\nu|/\varphi(\nu) < +\infty$, 所以适当选择 q , 我们有

$$\sum_{\nu > q} \frac{1}{\varphi(\nu)} \sum_{i,k} m A_{\nu k}(i) \leq \frac{Q}{2c} m_{\mathcal{A}}.$$

对 $\nu \leq q$, 存在一个常数 L_0 , 使得 $L(\nu, i) \geq L_0$. 于是

$$\sum_{i(\nu \leq q)} m A_{\nu \mu}(i) \leq \frac{c}{L_0} |I_\mu| \sum_{i,\nu,k} m A_{\nu k}(i) \leq \frac{c_0}{2} |I_\mu| m_{\mathcal{A}},$$

其中 $c_0 \geq (2c/L_0)$. 于是

$$m A'_\mu \leq \left(\frac{Q}{2} + \frac{c_0}{2} \right) |I_\mu| m_{\mathcal{A}} \leq Q |I_\mu| m_{\mathcal{A}}. \quad |$$

附注 4.4 引理 4.3 给出从 ν 到 μ 的“转移概率”的一个估计.

引理 4.3 的一种特殊情况为

引理 4.5 假如

$$A_{\nu n} = \{a \in \Delta_n | x_n(a) \in I_\nu\}, n = 1, 2, \dots$$

那么对所有的 n ,

$$m A_{\nu n} \leq c_0 |I_\nu|.$$

证明 我们用归纳法来证明这个引理. 当 $n = 1$ 时, 由引理 2.3 可得

$$m A_{\nu 1} \leq c_0 |I_\nu|.$$

如果上述不等式对 n 时成立, 下面证明

$$m A_{\nu n+1} \leq c_0 |I_\nu|.$$

事实上, 如果我们记 $\mathcal{A} = \bigcup_\mu A_{\mu n}$, 那么

$$A_{\nu n+1} = A'_\nu = \bigcup_{\mu, i} A_{\mu \nu}(i).$$

由归纳法假设,

$$m A_{\nu n} \leq c_0 |I_\nu| \leq Q c_0 |I_\nu| m_{\mathcal{A}},$$

其中 $Q = (m_{\mathcal{A}})^{-1}$. 于是, 由引理 4.3, 我们立得

$$mA_{\nu, n+1} = mA'_{\nu} \leq \frac{1}{2} Qc_0 |I_{\nu}| m_{\mathcal{A}} \leq c_0 |I_{\nu}|. \quad \blacksquare$$

下面我们开始估计 $\{x_n\}$ 的分布函数. 令 ω (不含 0) 是长度为 ϵ 的任意固定区间, 取 $\mathcal{A} = A$, 并考虑

$$E(\chi_{\omega}(x_n)) = \frac{d}{d\nu} \int_{A_{\nu}} \chi_{\omega}(x_n(a)) d\nu,$$

其中 χ_{ω} 是示性函数, A_{ν} 可以依照不同的路径分解为 $A_{\nu} = \bigcup_i A_{\nu}(i)$. 对每个 i , 由引理 3.5, $x_n(a)$ 在 I_{ν} 中的分布有一致有界密度. 因此

$$E(\chi_{\omega}(x_n)) \leq \text{const } mA_{\nu} \cdot \frac{\epsilon}{|I_{\nu}|} \leq \text{const } \epsilon, \quad (4.4)$$

其中第二个不等式由引理 4.5 得到. 因此, 如果定义

$$F_N(a) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_{\omega}(x_j),$$

那么

$$E(F_N) \leq \text{const } \epsilon. \quad (4.5)$$

下面我们任意取定一个充分大的正整数 h , 并考虑

$$E(F_N^h) = \sum_{j_1, \dots, j_h \leq N} N^{-h} \int_A \chi_{\omega}(x_{j_1}) \cdots \chi_{\omega}(x_{j_h}) d\nu. \quad (4.6)$$

我们要证明

$$E(F_N^h) \leq (\text{const } \epsilon)^h + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

$E(F_N^h)$ 可依下标数组 (j_1, \dots, j_h) 分成两部分. 因为

$$\text{Card}\{(j_1, \dots, j_h) \mid \min_{k,l} |j_k - j_l| < \sqrt{N}\} \leq C(h) N^{h-\frac{1}{2}},$$

并注意到

$$\int_A \chi_{\omega}(x_{j_1}) \cdots \chi_{\omega}(x_{j_h}) d\nu \leq 1,$$

因此, 在 (4.6) 中相应的这些项全体为 $O(N^{-\frac{1}{2}})$. $E(F_N^h)$ 中剩余的项可做如下估计. 取 $j_1 < j_2 < \cdots < j_h \leq N$, 满足 $j_{k+1} - j_k \geq$

\sqrt{N} , $k=1, \dots, h-1$. 并考虑一个区间 $\omega \subset I_\nu$. 假设 $x_{j_s} \in \omega, s \leq l$, 那么我们在引理 4.3 中选择 $n = j_l$ 以及 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_l = \{a \in A | x_{j_s} \in I_\nu, s \leq l\}$. 对这样的取法, 引理 4.3 中的假设条件显然成立. 此时, 我们在该引理中取 $2Q = |I_\nu|^{-1}$, 令

$$A_\mu^{(k)} = \{a \in \mathcal{A}_l | x_{j_l+k}(a) \in I_\mu\}.$$

由引理 4.3, 我们有

$$mA_\mu^{(1)} \leq Q m_{\mathcal{A}_l} |I_\mu|.$$

归纳地应用引理 4.3, 在 $k = j_{l+1} - j_l$ 次迭代后, 只要 N 充分大, 使得 $|I_\mu| > c_0^{-1} 2^{-\sqrt{N}}$, 我们推得

$$mA_\mu^{(k)} \leq 2^{-k+1} \cdot Q \cdot m_{\mathcal{A}_l} \cdot |I_\mu| \leq c_0 |I_\mu| m_{\mathcal{A}_l}.$$

因此

$$m_{\mathcal{A}_{l+1}} \leq c_0 |I_\nu| m_{\mathcal{A}_l}.$$

于是

$$m_{\mathcal{A}_h} \leq (c_0 |I_\nu|)^h.$$

如果我们进一步要求, 对每个 $j_s, x_{j_s} \in \omega \subset I_\nu, s = 1, \dots, h$, 那么由引理 3.5, 上述测度的下降比例为 $c^h \left| \frac{\omega}{I_\nu} \right|^h$ (参考 (4.4)). 因此, 当 N 充分大时,

$$E(F_N^h) \leq (c_0 \varepsilon)^h + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

于是, 对几乎所有 $a \in A$,

$$\| \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} F_N \|_\infty \leq c_0 \varepsilon. \quad (4.7)$$

(4.7) 式意味着自由返回的极限分布在 $x=0$ 外有有界密度 (界为 c_0). 由于在 $x \neq 0$ 处密度一致有界, 以及对所有的 $n, x_n \neq 0$, 所以 $x=0$ 处的情况可以不必考虑.

利用非本质返回的定义和性质, 类似地可以证明, 非本质返回的极限分布具有有界密度.

2. 有界返回的分布问题的讨论.

我们要讨论有界返回 $\{y_n\}$, $n=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots$ 的分布问题. 这个问题的讨论可以分成二步进行, 我们首先讨论对 $j \leq J$ (J 固定) 的分布, 然后对所有 $j > J$ 进行分析.

对 $j \leq J$, 令 q_j 表示 $x=0$ 点第 j 次返回的时刻, 并且记 $u_j(a) = \xi_{q_j}$. 称此返回是奇(偶)的, 如果相应的揉序列 (Kneading sequence) 是奇(偶)的. 任给定 ρ 和 $l > 0$, 并令 $\omega(a)$ 是区间, 定义为

$$\omega(a) = \begin{cases} (u_j - \rho - l, u_j - \rho), & \text{奇返回,} \\ (u_j + \rho, u_j + \rho + l), & \text{偶返回.} \end{cases}$$

我们考虑

$$H_N^{(j)} = H_N(a) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{\omega(a)}(y_n(a)).$$

令 U 是 $\{a \in \Delta_0 | x_n(a) \in I_\mu\}$ 中的一个参数区间. 假设 $\mu_j(a)$ 是 0 点的 q_j 次迭代, 对 $a \in U$, 我们考虑 $\sigma_j(a) = F^{q_j}(\sigma, a)$, 其中 $\sigma = (0, \pm c_{|p|-1}) \supset I_\mu$. 由中值定理和 (3.5) 式, 我们有

$$|\sigma_j| \geq \text{const } |\sigma(a)|^2 \exp q_j^{\frac{2}{3}} \geq \text{const } |\sigma(a)|^2 \exp j^{\frac{2}{3}}. \quad (4.8)$$

这里我们要特别指出, 如果 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个奇(偶)揉序列, 那么 σ_j 的右(左)端点为 u_j , 如图 6-1 所示.

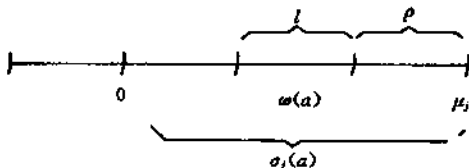


图 6-1

因此, 一个点 $x_n \in I_\mu$ 的第 j 次有界返回属于 $\omega(a)$ 的“条件概率”, 由引理 3.5, 满足下面的不等式:

$$p \leq \begin{cases} \text{const } \frac{l}{|\sigma_j|}, & |\sigma_j| \geq \rho, \\ 0, & |\sigma_j| < \rho. \end{cases}$$

于是,由(4.8)式以及 $x_n \in I_\mu$, 立得

$$E(\chi_{\omega(a)}(y_{n_j}(a))) \leq \text{const } l e^{-j^{\frac{2}{3}}} \sum_{\mu \in M} \frac{|I_\mu|}{c_\mu^2},$$

其中

$$M = \left\{ \mu | c_\mu^2 \geq \text{const } \rho e^{-j^{\frac{2}{3}}} \right\}.$$

显然 $\{\mu | |\sigma_j| > \rho\} \subset M$. 因此

$$E(\chi_{\omega(a)}(y_{n_j}(a))) \leq \text{const } \rho^{-\frac{1}{2}} l e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}}.$$

从而得

$$E(H_N^j(a)) \leq \text{const } \rho^{-\frac{1}{2}} l e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}}.$$

我们考虑 $(H_N^j(a))^h$ 的期望 $E((H_N^j(a))^h)$. 它可以表为下面和的形式

$$N^{-h} \sum_{n_1, \dots, n_h \leq N} E(\chi_{\omega(a)}(y_{n_1 j}(a)) \cdots \chi_{\omega(a)}(y_{n_h j}(a))).$$

如同对自由返回情况的分析,我们将上述和式依照 $\min_s |n_{s+1} - n_s| \leq \sqrt{N}$ 和 $|n_{s+1} - n_s| > \sqrt{N}$ 分成两部分. 由一个类似的讨论得到,对充分大的 h ,我们有

$$E((H_N^j(a))^h) \leq (\text{const } l e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}} \rho^{-\frac{1}{2}})^h + O(N^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.9)$$

由(4.9)式我们得到,相应于 y_{n_j} , 极限分布对几乎所有的 $a \in A$ 有密度 g_j , 它满足

$$\int_{\omega(a)} g_j(a) ds \leq \text{const } l e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

对 $j > J$, 我们要证明相应 $j > J$ 的全体有界返回的数目(分布)是小的, 记

$$T_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_n,$$

其中 $\theta_n = \sum_{j=J+1}^{\infty} \theta_{n_j}$, 而 $\theta_{n_j}(a)$ 定义为

$$\theta_{n_j}(a) = \begin{cases} 1, & y_{n_j}(a) \text{ 存在,} \\ 0, & y_{n_j}(a) \text{ 不存在.} \end{cases}$$

如果 $x_n \in I_\mu, \mu \geq \alpha$, 由 (3.8) 中有关 p 的估计推得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta_{n_j} \leq 2^{\frac{3}{2}} |\mu|^{\frac{3}{4}} \leq |\mu|.$$

因此 $\theta_n \leq |\mu|$. 由上式还可以得到, 只有 $|\mu| \geq J+1$ 时, θ_n 才可能不为 0, 从而立得

$$E(\theta_n) \leq \text{const} \sum_{\mu=J+1}^{\infty} \mu e^{-\sqrt{\mu}} \leq e^{-\frac{1}{2}\sqrt{J}}.$$

因此 $E(T_N) \leq e^{-\frac{1}{2}\sqrt{J}}$. 与前面对自由返回情况的讨论相同, 我们考虑 $E(T_N^h)$ 时分两种情况: $\min_s |n_{s+1} - n_s| \leq \sqrt{N}$ 和 $|n_{s+1} - n_s| > \sqrt{N}$. 并由此容易证明, 对几乎所有的 $a \in A$,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} T_N(a) \leq e^{-\frac{1}{2}\sqrt{J}}.$$

总结上述的结论, 我们可以将 I^* 上的分布情况写成下面的定理.

定理 4.6 对几乎所有的 $a \in A$, 自由返回和非本质自由返回的极限分布具有一致有界的密度, 而有界返回极限分布具有密度 $g(x)$. $g(x)$ 满足不等式

$$g(x) \leq \text{const} \left[\sum_{u_j \text{ odd}} e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}} \varphi(u_j - x) + \sum_{u_j \text{ even}} e^{-\frac{1}{2}j^{\frac{2}{3}}} \varphi(x - u_j) \right], \quad (4.11)$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ \infty, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

3. 在 I^* 外的分布问题的讨论.

到目前为止, 我们仅在 I^* 内讨论了分布问题. 令 $\{\mu_\nu(a)\}_{\nu=1}^M$ 表示轨道 $\{\xi_\nu(a)\}_{\nu=1}^n$ 回到 I^* 的点. 那么 (4.1) 的 μ_n 可以表示为

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \delta_{\xi_\nu(a)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^M \delta_{u_\nu} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sum_{\nu}' \delta_{F^k(u_\nu)} = \sum_{k=0}^n \mu_n^{(k)}, \quad (4.12)$$

其中求和号 \sum' 表示: 如果 $F^j(u_\nu) \in I^*, j = 1, 2, \dots, k$, 那么 $\delta_{F^k(u_\nu)}$ 属于该和式.

令 μ 表示 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ 的 W^* -极限. 我们已经证明

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_n^{(j)} = \mu|_{I^*} \in L^p, \quad p < 2.$$

下面我们讨论 $\{\mu_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$. 由于 $u_\nu \in I^*, \nu = 1, \dots, M$, 所以

$$\text{supp } \mu_n^{(1)} \subset [1 - a\delta^2, 1].$$

给定小区间 $\omega \subset [1 - a\delta^2, 1]$, 那么 $F^{-1}\omega$ 由 I^* 中两个对称小区间 Ω 和 $-\Omega$ 组成. 由 (4.12) 我们有

$$\mu_n(\omega) = \mu_n^{(1)}(\omega) = \mu_n^{(0)}(\Omega \cup (-\Omega)).$$

因此

$$\mu(\omega) \leq \int_{\Omega \cup (-\Omega)} h(x) \, ds,$$

其中 $h(x) = \text{const} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2\right)}{|u_\nu - x|^{\frac{1}{2}}}$. 做变量替换 $y = F(x)$, 那么上式的右端具形式

$$\int_{\Omega \cup (-\Omega)} h(x) \, dx = \int_{\omega} \sum_{i=1}^2 h(F_i^{-1}(x)) (F_i^{-1})' \, dx,$$

其中 $\{F_i^{-1}\}_{i=1}^2$ 是 F^{-1} 的两个分支, 我们证明

$$\sum_{i=1}^2 h(F_i^{-1}(x)) (F_i^{-1})'(x) \in L^p, \quad p < 2.$$

事实上

$$\begin{aligned} \int_{1-a\delta^2}^1 |h(F^{-1}(x))|^p |F^{-1}(x)'|^p dx &= \int_0^\delta |h(x)|^p \frac{1}{|F'(x)|^p} dx \\ &\leq \text{const} \int_0^\delta |h(x)|^p \frac{1}{x^{p-1}} dx \leq \text{const} \sum_{\mu=\alpha}^{\infty} \int_{I_\mu} |h(x)|^p \frac{1}{x^{p-1}} dx \\ &\leq \text{const} \sum_{\mu=\alpha}^{\infty} e^{(p-1)\sqrt{\mu}} \int_{I_\mu} |h(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

因为

$$\left(\int_{I_\mu} |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \sum_{\nu=1}^{[\mu^{\frac{7}{8}}]} \left(\int_{I_\mu} \frac{e^{-\frac{p}{2}\nu^{\frac{2}{3}}}}{|x-\mu_\nu|^{\frac{p}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + C_2 \sum_{\nu=[\mu^{\frac{7}{8}}]+1}^{\infty},$$

其中 C_1 和 C_2 为常数. 记上式右端的两项为 S_1 和 S_2 . 为证明 (4.13)

的收敛性, 我们只要估计 S_1 和 S_2 的阶. 利用 $|u_\nu| \geq e^{-\sqrt{\nu}}$, 我们

有 $|x - u_\nu| \geq \frac{1}{2} e^{-\mu^{\frac{7}{16}}}, \nu \leq [\mu^{\frac{7}{8}}], x \in I_\mu$. 因此得 S_1 的估计式

$$S_1 \leq \text{const} \left(\sum_{\nu=1}^{[\mu^{\frac{7}{8}}]} e^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{2}{3}}} \right) |I_\mu|^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\mu^{\frac{7}{16}}} \leq \text{const} e^{\left(\mu^{\frac{7}{16}} - \frac{1}{p}\mu^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

用积分估计式, 我们容易证明

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \text{const} \sum_{\nu=[\mu^{\frac{7}{8}}]+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{2}{3}}} \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x-\mu_\nu|^{\frac{p}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \text{const} (1 + \mu^{\frac{7}{24}}) e^{-\frac{1}{2}\mu^{\frac{7}{12}}}. \end{aligned}$$

由上述对 S_1 和 S_2 的估计立得 (4.13) 的收敛性. 因此, $\forall p < 2$,

$$\mu|_{(1-a\delta^2, 1)} \in L^p. \quad (4.14)$$

现在令 ω 是 $(-1, 1 - a\delta^2) \setminus I^*$ 中的一个区间, 那么

$$\mu_n(\omega) = \sum_{k=2}^n \mu_n^{(k)}(\omega). \quad (4.15)$$

我们已经知道对于 $x \in (1 - a\delta^2, 1)$, 如果 $F^\nu(x) \in I^*$, $\nu = 1, 2, \dots, k-1$, 那么存在 $\lambda > 1$, 使得

$$|\partial_x F^k(x)| \geq \lambda^k. \quad (4.16)$$

用此事实以及完全类似前面的方法, 我们有下面的估计

$$\mu^{(k)}(\omega) \leq \int_{\omega} g_k(x) dx, \quad k = 2, 3, \dots$$

其中 $\|g_k\|_p \leq \text{const } \lambda^{-k}$, $p < 2$, 由此推得

$$\mu(\omega) \leq \int_{\omega} \sum_{k=2}^{\infty} g_k(x) dx,$$

其中 $\sum_{k=2}^{\infty} g_k \in L^p$. 由此我们证明了定理 4.1. \square

小结 4.7 以上我们已经详细地讨论了 $F(x, a) = 1 - ax^2$ 在 $a = 2$ 附近的动力学行为. 证明过程也说明, [Yo] 中阐述的关于当前如何研究非双曲系统的看法的实用性. 下面我们简单地介绍, 关于一般单峰映射族 $f_a(x)$ 的新结果, 以此作为对上面特例的总结.

定义 4.8 设 \mathcal{A} 是一个参数空间. $\forall a \in \mathcal{A}$, 设 $f_a(x)$ 是区间 $I = [-1, 1]$ 上的映射. 称 $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ 是正则映射族, 如果

(i) $(x, a) \mapsto f_a(x)$ 是关于 (x, a) 的 C^2 映射;

(ii) $c_0 = 0$ 是 f_a 的唯一临界点, f_a 在 $[-1, 0)$ 单调上升而在 $(0, 1]$ 单调下降, $f_a^2(0) < 0 < f_a(0)$, $f_a^2(0) \leq f_a^2(0)$, 并且对所有 $x \in (-1, 0)$, $f_a(x) > x$;

(iii) 存在正数 A_1^*, A_2^*, C^* 和 $\tau \geq 2$, 使得对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和所有 $(x, y) \in I$

$$A_1^* |x|^{\tau-1} \leq |\partial_x f_a(x)| \leq A_2^* |x|^{\tau-1},$$

以及

$$\frac{|\partial_x f_a(x)|}{|\partial_x f_a(y)|} \leq \exp\left(C^* \left|\frac{x}{y} - 1\right|\right).$$

附注 4.9 请读者分析 $F(x, a)$ 是否是正则映射族.

记 $\{c_n(a)\}_{n=1}^\infty$ 表示临界点 $c_0 = 0$ 的轨道, 下面我们定义可扰动参数的概念.

定义 4.10 设 $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ 是正则映射族. 一个参数 a_* 称为可扰动参数, 如果它满足如下条件:

(M) 存在 $\varepsilon^* > 0, \forall n \geq 1, |c_n(a_*)| \geq \varepsilon^*$ 并且 f_{a_*} 没有稳定周期轨;

(CE₀) 存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得对每个 $\delta \in (0, \varepsilon^*)$ 和 $n \geq 1$, 如果 $x \in I$ 满足 $f_{a_*}^i(x) \in (-\delta, \delta)$, 并且 $f_{a_*}^n(x) \in (-\delta, \delta), i = 0, 1, \dots, n-1$, 那么 $|\partial_x f_{a_*}^n(x)| \geq \varepsilon^*$;

$$(T) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial_a f_{a_*}^n(c_0(a_*))}{\partial_x f_{a_*}^{n-1}(c_1(a_*))} = Q^* \neq 0.$$

附注 4.11 (M) 条件即通常所说的 Misiurewicz 条件, 它要求临界点 $c_0 = 0$ 是非回复的; 而 f_{a_*} 没有稳定周期轨可以保证在临界点的任意邻域外的任何足够长的轨道段的指数增长. (CE₀) 条件是证明过程中技术上的要求, 它保证轨道的增长指数(比方说 λ)与临界点邻域的选取无关. (T) 条件是横截条件, 它保证 f_a 横截地穿过 f_{a_*} . 对 $f_a(x) = 1 - ax^2$ 而言, $a_* = 2$ 是可扰的. 可以证明对此映射, $Q^* = -\frac{1}{3}$.

定义 4.12 参数 a_* 称为一个 Borel 集 $\Omega \subseteq \mathcal{A}$ 的 Lebesgue 正稠点, 如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\Omega \cap (a_* - \varepsilon, a_* + \varepsilon)|}{|\mathcal{A} \cap (a_* - \varepsilon, a_* + \varepsilon)|} > 0,$$

其中 $|\Omega|$ 表示集合 Ω 的 Lebesgue 测度. 特别, 如果该极限值为 1, 则称 a_* 为 Lebesgue 全稠点.

附注 4.13 显然全稠性意味着正稠性. 在对 $f_a = 1 - ax^2$ 的

讨论中,我们仅证明了 $a_* = 2$ 是正稠点.实际上将证明稍加改动,可以证明 $a_* = 2$ 是全稠点.

对一般的具可扰参数 a_* 的正则族 $\{f_a\}_{a \in A}$ 我们有

定理 4.14 令 $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ 是正则族.对每一个可扰参数 $a_* \in \mathcal{A}$,存在正常数 k, ε, α 和 λ ,使得 a_* 是满足以下诸条件的参数 a 构成的集合 Ω 的全稠点.

(NS) f_a 无稳定周期轨;

(ER) $\forall n \geq 1, |f_a^n(0)| \geq \varepsilon \exp(-n\alpha);$

(CE1) $\forall n \geq 0, |\partial_x f_a^n(f_a(0))| \geq k \exp(n\lambda);$

(CE2) 对 $\forall n \geq 1$,如果 $x \in [-1, 1]$ 满足 $f_a^k(x) \neq 0$ 对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 成立,并且 $f_a^n(x) = 0$,那么 $|Df_a^n(x)| \geq k \exp(n\lambda)$.

由于对每个 $a \in \Omega$, f_a 满足条件(NS), (CE1) 和 (CE2), 利用 [NS] 的结果, 立得对 f_a 存在一个关于 Lebesgue 测度绝对连续的不变概率测度 μ .

近年来,在非双曲系统研究中不断有较深刻的结果出现.我们本章中不准备介绍了.但有一点要指出,我们在这里介绍的 Benedicks 和 Carleson 的证明思想(简称 BC 方法),近几年来在这个方向的研究中起着十分关键的作用.事实上,无论是对一般区间映射族还是对平面间宿相切(例如 Hénon 映射),鞍结分岔甚至高维的同宿分岔现象所得到的主要结果的证明方法,基本上是 BC 方法,或者是从这一方法中派生出来的.

附 录

即使我们只考虑 \mathbf{R}^n 上的向量场,在讨论分岔的余维数时,也需要在全体光滑向量场所成的(无穷维)空间中考虑某些子流形的余维数,以及光滑映射与这个子流形的横截相交性等.为此,我们在附录 A—C 中介绍一些有关微分流形与微分拓扑的概念、名词和重要结果,以便使读者减少查找参考书的麻烦.对这些结果本身感兴趣的读者,可以参考有关的文献,例如 [AMR], [Hir], [A1], 和 [Zg] 等.

附录 A Banach 流形和流形间的映射

微分流形是欧氏空间中光滑曲面概念的抽象和推广.它的基本思想是,先在这个对象的局部通过与 Banach 空间的一个开集建立微分同胚而引进相应的代数和拓扑结构,然后再把这些局部结构光滑地粘接起来.因此,我们可以把 Banach 空间中的运算推广到微分流形上.

微分流形的定义

定义 A.1 设 M 是一个连通的 Hausdorff 空间, B 是一个 Banach 空间.假设 U 是 M 的开子集, φ 是从 U 到 B 中开子集 $\varphi(U)$ 的同胚映射,则称 (U, φ) 是 M 的一个坐标卡.

M 的两个坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 称为是 C^r 相容的,如果当 $U \cap V \neq \emptyset$ 时,映射

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

是 B 上的 C^r 微分同胚.

M 的坐标卡集 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ (Λ 是一个指标集) 称为一个 C^r 坐标系, 如果

- (1) $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 M 的一个开覆盖;
- (2) \mathcal{A} 中的任意两个坐标卡都是 C^r 相容的.

M 的两个 C^r 坐标系 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 称为等价的, 如果 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 还是 M 的 C^r 坐标系. M 上 C^r 坐标系的一个等价类 Σ 称作 M 的一个 C^r 微分结构. Σ 内所有坐标系的并集 $\mathcal{M} = \bigcup \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \Sigma\}$ 称作 M 的一个极大 C^r 坐标系, 而 $(U, \varphi) \in \mathcal{M}$ 称作一个容许坐标卡.

如果在 M 上给定了一个 C^r 微分结构 Σ , 则称 $\xi = (M, \Sigma)$ 是一个 C^r 微分流形. 一般常把 M 与 ξ 等同, 简称 M 为微分流形. 为了标明卡映射 φ 的取值空间 B , 可称 M 为装备在 B 上的 Banach 流形 (注意, 由 M 的连通性和坐标卡的相容性易知, B 与坐标卡的选取无关). 特别, 当 B 为 Hilbert 空间时, 称 M 为 Hilbert 流形; 而当 B 为有限维空间 (例如 \mathbb{R}^n) 时, 称 M 为 (n 维) 微分流形.

附注 A.2 应该指出, 一旦给定了 M 的一个坐标系 \mathcal{A} , 就可以把与 \mathcal{A} 等价的全部坐标系合起来而得到一个极大坐标系, 从而生成 M 上的一个微分结构. 因此, 只须给定 M 上一个特定的坐标系, 就可以决定这个微分流形.

附注 A.3 如果把定义 A.1 中的 C^r 全部换成 C^∞ , 则我们相应地得到 C^∞ 微分流形. C^∞ 微分流形也称为光滑流形.

例 A.4 (1) 设 B 是一个 Banach 空间, 则可取坐标卡 (B, id) , (id 是 B 的恒同映射), 这个坐标卡显然就构成 B 上的一个 C^∞ 坐标系. 因此, 任何 Banach 空间都是装备在它自身上的一个光滑 Banach 流形.

(2) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$ 是一个 n 维流形. 事实上, 记 $N = \{1, 0, \dots, 0\}$, $S = \{-1, 0, \dots, 0\}$ 分别是 S^n 的北极与南极, 取坐标卡 $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_1)$, $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_2)$, 其中

$$\varphi_1: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1-x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_1} \right),$$

$$\varphi_2: S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1+x_1} \right).$$

容易得出

$$\varphi_2 \varphi_1^{-1}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi_2 \varphi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

是 C^∞ 微分同胚.

流形间的映射

定义 A.5 设 M, N 分别是装备在 Banach 空间 A, B 上的 C^r 流形. $f: M \rightarrow N$ 称为是 C^r 映射, 如果 $\forall x \in M$, 及 N 上任一容许坐标卡 (V, ψ) , $f(x) \in V$, $\exists M$ 中的容许坐标卡 (U, φ) , $x \in U$, $f(U) \subset V$, 使得映射 (叫作 f 的局部表示)

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset A \rightarrow \psi(V) \subset B$$

是 C^r 的.

容易证明下面的两个定理.

定理 A.6 设 $f: M \rightarrow N$ 是流形间的连续映射, 则 f 是 C^r 的, 当且仅当对 M 与 N 上任意取定的坐标系而言, 相关的局部表示都是 C^r 的. |

定理 A.7 设 M, N, P 都是 C^r 流形, $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$ 都是 C^r 映射, 则复合映射 $g \circ f: M \rightarrow P$ 也是 C^r 的. |

定义 A.8 设 M, N 是 C^r 微分流形, 称 $f: M \rightarrow N$ 为 C^r 微分同胚, 如果它是一一的 C^r 映射, 并且其逆映射 $f^{-1}: N \rightarrow M$ 也是 C^r 的. 如果两个流形间存在一个 C^r 微分同胚, 则称这两个流形 C^r 微分同胚.

子流形与积流形

类似于向量空间的子空间与乘积空间, 微分流形也存在子流

形与积流形.

设 N 是微分流形 M 的一个开子集, 则把 M 上的微分结构限制到 N 上, 就自然得到 N 上的一个微分结构, 从而使 N 成为一个与 M 同维数的流形. 这时, 称 N 是 M 的一个开子流形. 但是 M 的一个闭子集, 例如 \mathbb{R}^{n+1} 中的闭子集 S^n 也可以成为一个流形 (见例 A. 4). 注意, 此时在 \mathbb{R}^{n+1} 中存在坐标卡 (U, φ) , 使 $\varphi(U \cap S^n)$ 成为 \mathbb{R}^n 的子集. 这引出如下的一般定义

定义 A. 9 设 M 是装备在 Banach 流形 B 上的微分流形. M 的一个子集 N 称为 M 的子流形. 如果 $\forall p \in N, \exists M$ 的容许坐标卡 (U, φ) , 和 B 的直和分解 $B = B_1 \oplus B_2$, 使得 $p \in U$, 并且

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (B_1 \times \{0\}). \quad (\text{A. 1})$$

可对这个定义给出直观的几何解释: $\forall p \in N, \exists$ 容许坐标卡 (U, φ) , 使邻域 $U \cap N$ 经 φ 作用展平在 B 的子空间 B_1 上.

定理 A. 10 设 N 是微分流形 M 的子流形, 则 N 自身也是一个微分流形, 并且它的微分结构可由下面的坐标系生成:

$$\{(U \cap N, \varphi|_{U \cap N}) : (U, \varphi) \text{ 是 } M \text{ 的容许坐标卡,} \\ \text{它满足条件 (A. 1)}\}. \quad \blacksquare$$

在附录 B 中, 我们将介绍通过浸入或浸盖来构造 (或鉴别) 子流形的方法.

定义 A. 11 设 M, N 是微分流形, 它们分别有坐标系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ 和 $\{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\}$, 则集合 $M \times N$ 在由坐标卡 $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) | \alpha \in A, \beta \in B\}$ 生成的微分结构下作成微分流形, 称它为 M 与 N 的积流形, 仍记为 $M \times N$.

附录 B 切丛与切映射, 向量场及其流, 浸入与浸盖

向量丛是积流形的推广, 而流形上的向量场, 则是作为一个特殊的向量丛 (即切丛的截面) 而定义的. 利用切映射, 我们可以把

Banach 空间中的隐函数(反函数)定理以及局部浸入和浸盖定理推广到流形上,从而得到判断(构造)子流形的有效手段.下面先定义向量丛.

向量丛

定义 B.1 设 M 是 C^r 微分流形, B 是 Banach 空间, $U \subset M$ 是开集, 称 $U \times B$ 为局部向量丛, 并称 U 为底空间, 它可以等同于 $U \times \{0\}$, 后者称为局部向量丛的零截面. $\forall u \in U$, 称 $\{u\} \times B$ 为过 u 的纤维, 它可以从 B 获取 Banach 结构. $\forall u \in U, b \in B$, 由 $\pi(u, b) = u$ 所定义的映射 $\pi: U \times B \rightarrow U$ 称为投影.

注意, 过 u 的纤维就是 $\pi^{-1}(u)$. 而 $U \times B$ 为积流形 $M \times B$ 的一个开子流形.

定义 B.2 设 $U \times B$ 和 $U' \times B'$ 都是局部向量丛. 如果映射 $\varphi_1: U \rightarrow U'$ 和 $\varphi_2: U \rightarrow \mathcal{L}(B, B')$ 都是 C^r 的, 则由

$$\varphi(u, b) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot b)$$

所定义的映射 $\varphi: U \times B \rightarrow U' \times B'$ 称为 C^r 局部向量丛映射. 如果这个映射还是一一的, 则称它为 C^r 局部向量丛同构.

注意, 一个局部向量丛映射把纤维 $\{u\} \times B$ 线性地映到纤维 $\{\varphi_1(u)\} \times B'$. 一个局部的向量丛映射是局部向量丛同构, 当且仅当 $\forall u \in U$, $\varphi_2(u)$ 是 Banach 空间 B 与 B' 之间的同构映射.

类似于微分流形的定义, 我们可以把局部向量丛粘接起来, 得出整体的向量丛结构.

定义 B.3 设 S 是集合. 称 (W, φ) 是 S 的一个局部向量丛卡, 如果 $W \subset S$, φ 是从 W 到一个 C^r 局部向量丛 $U \times B$ 的一一映射 (U, B 可能与 φ 有关). 称这样的卡集 $\mathcal{B} = \{(W_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ 是 S 的 C^r 向量丛坐标系, 如果

(1) $\{W_\alpha | \alpha \in A\}$ 覆盖 S ;

(2) 若 $(W_\alpha, \varphi_\alpha), (W_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{B}$, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$, 则 $\varphi_\alpha(W_\alpha \cap$

W_p) 是局部向量丛, 且 $\varphi_p \circ \varphi_a^{-1}|_{\varphi_a(W_a \cap W_p)}$ 是 C^r 局部向量丛同构.

称 S 的两个向量丛坐标系 \mathcal{B}_1 与 \mathcal{B}_2 等价, 如果 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 还是一个向量丛坐标系. 向量丛坐标系的一个等价类称为 S 上的一个 C^r 向量丛结构. 称 $E = (S, \mathcal{V})$ 是一个 C^r 向量丛, 这里 S 是一个集合, \mathcal{V} 是 S 上的一个 C^r 向量丛结构. 与微分流形类似, 通常也把 E 与 S 等同, 并把 \mathcal{V} 中的任意局部向量丛卡称为一个容许向量丛卡.

向量丛有如下性质:

(1) C^r 向量丛 E 是一个 C^r 微分流形.

(2) 对向量丛 E , 定义其零截面 (或称为 E 的底空间)

$M = \{p \in E \mid \exists \text{ 容许向量丛卡 } (W, \varphi), \text{ 使 } p = \varphi^{-1}(u, 0)\},$
它是 E 的子流形.

(3) 设 (W, φ) 是一个容许向量丛卡, $\varphi: W \rightarrow U \times B_\varphi$, 设 $p \in W$, 满足 $\varphi(p) = (u, 0)$, 令集合

$$E_{p, \varphi} = \varphi^{-1}(\{u\} \times B_\varphi),$$

它可以通过 φ 从 B 诱导 Banach 结构, 并以 p 为零元素. 如果 (W_1, φ_1) 和 (W_2, φ_2) 是两个容许向量丛卡, $p \in W_1 \cap W_2$, 则 E_{p, φ_1} 与 E_{p, φ_2} 线性拓扑同构 (作为线性空间是同构的, 作为拓扑空间是同胚的). 在这个意义下, 可以认为 $E_{p, \varphi}$ 与 φ 无关, 可记为 E_p .

(4) $\forall e \in E, \exists$ 唯一的 $p \in M$ (底空间), 使得 $e \in E_p$. 由此, 可定义投影

$$\pi: E \rightarrow M, \quad \pi(e) = p.$$

它是 C^r 的满映射, 并且 $\pi^{-1}(p) = E_p$ 称为过 $p \in M$ 的纤维, 它具有的 Banach 结构称为纤维型. 在有些书上, 把上面的性质作为向量丛的定义. 我们有时也把向量丛记为 (E, π, M) 或 $\pi: E \rightarrow M$, 以标明投影映射 π 和底空间 M .

从几何上粗略地说, 以流形 M 为底空间的向量丛, 就是在 M 上的每一点“附着”一个以该点为零元素的 Banach 空间, 而不同点上附着的 Banach 空间是彼此同构的. 例如, 在 S^2 上, 我们可以用下

列两种方式构造出不同的向量丛: $\forall p \in S^2$, 取过 p 的法线为纤维 E_p ; 或取过 p 的切平面为 E_p . 前者的纤维型是 \mathbf{R}^1 , 而后者是 \mathbf{R}^2 .

切空间与切丛

我们可以通过坐标卡把 Banach 空间中曲线相切的概念诱导到流形上, 从而建立切空间与切丛.

定义 B.4 设 M 是 C^r 微分流形 ($r \geq 1$). 设 $\delta > 0$, 开区间 $I = (-\delta, \delta)$. 称 C^1 映射 $c: I \rightarrow M$ 为 M 上的一条曲线. 如果 $c(0) = p$, 则称曲线以 p 为基点. 设 c_1, c_2 是以 p 为基点的两条曲线, 并且 (U, φ) 是一容许坐标卡, $p \in U$. 如果

$$D(\varphi \circ c_1)(0) = D(\varphi \circ c_2)(0)$$

(即 Banach 空间中的曲线 $\varphi \circ c_1$ 与 $\varphi \circ c_2$ 在 0 点相切), 则称 M 上的曲线 c_1 与 c_2 在 p 点相切.

注意, 利用流形 M 上坐标卡的相容性, c_1 与 c_2 在 p 点的相切性与容许坐标卡的选取无关. 事实上, 设 $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ 是两个坐标卡, $p \in U_1 \cap U_2$. 设 $D(\varphi_1 \circ c_1)(0) = D(\varphi_2 \circ c_2)(0)$. 由于

$$\psi \circ c_i = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_i), \quad i = 1, 2,$$

所以

$$\begin{aligned} D(\psi \circ c_1)(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot D(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot D(\varphi \circ c_2)(0) = D(\psi \circ c_2)(0). \end{aligned}$$

这样, 我们在同基点的曲线之间规定了一个等价关系: $c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_2$ 与 c_1 在 p 点相切. 记 c 在 p 的等价类为 $[c]_p$, 称它为流形 M 在 p 点的一个切向量.

定义 B.5 设 M 是 C^r 微分流形 ($r \geq 1$), $p \in M$. 在 p 点的全体切向量之集合

$$T_p(M) = \{[c]_p | c \text{ 是 } M \text{ 上以 } p \text{ 为基点的曲线}\}$$

称为流形 M 在 p 点的切空间. 并称 M 上全体切空间的集合

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

为 M 的切丛.

定理 B. 6 切空间 $T_p(M)$ 是一个 Banach 空间, 而切丛 TM 在投影

$$\pi: TM \rightarrow M \quad (\pi[c]_p = p)$$

之下作成一个向量丛 (TM, π, M) .

证明 先证明 $T_p(M)$ 是一个 Banach 空间. 取包含 p 点的一个坐标卡 (U, φ) , 则以 p 为基点的曲线 c 有局部表示 $D(\varphi \circ c)(0) \in \mathcal{L}(R, \text{Span} \varphi(U))$. 记 $B_p = \mathcal{L}(R, \text{Span} \varphi(U))$, 它是一个 Banach 空间. 这样, $\forall [c]_p \in T_p(M)$, 有 $v = D(\varphi \circ c)(0) \in B_p$ 与之对应. 反之, $\forall v \in B_p$, 令 $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + vt)$, 则 $\varphi \circ c(t) = \varphi(p) + vt$, 从而 $D(\varphi \circ c)(0) = v$, 从 c 可得 $[c]_p$. 于是, 得到 $T_p(M)$ 到 B_p 的一一对应. 这样, 就可把 B_p 的 Banach 空间结构通过局部表示 $D(\varphi \circ c)(0)$ 而迁移到 $T_p(M)$ 上.

再来证明 (TM, π, M) 是向量丛, 其中投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 通过 $\pi([c]_p) = p$ 规定. 取 C^r 微分流形 M 的一个坐标系 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$, 则由下文的定理 B. 10 可知, $\mathcal{B} = \{(TU_\alpha, T\varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ 就构成了 TM 上一个 C^{r-1} 向量丛坐标系, 其中 $TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p(M)$, 而 $T\varphi_\alpha: TU_\alpha \rightarrow T(\varphi(U_\alpha))$ 是如下定义的切映射.

切映射

设 M, N 是微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射 ($r \geq 1$). 设 c_1, c_2 是 M 上在 p 点相切的两条曲线, 则 $f \circ c_1$ 和 $f \circ c_2$ 是 N 上在 $f(p)$ 点相切的曲线. 事实上, 设 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 分别是 M, N 上的容许坐标卡, $p \in U, f(p) \in V, f(U) \subset V$, 则 $D(\varphi \circ c_1)(0) = D(\varphi \circ c_2)(0)$. 注意

$$\psi \circ f \circ c_i = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_i), \quad i = 1, 2,$$

则由 Banach 空间中导算子的链式法则可得

$$D(\psi \circ f \circ c_i)(0) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot D(\varphi \circ c_i)(0), \quad (\text{B. 1})$$

从而

$$D(\psi \circ f \circ c_1)(0) = D(\psi \circ f \circ c_2)(0).$$

由此, 我们给出如下定义

定义 B.7 如果 $f: M \rightarrow N$ 是流形间的 C^1 映射, 则称映射

$$Tf: TM \rightarrow TN, \quad Tf([c]_p) = [f \circ c]_{f(p)}$$

为 f 的切映射. 有时也把 Tf 记为 df 或 f_* .

如果 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 是上面所说的坐标卡, 则由 (B.1) 式可知, Tf 有如下表示式

$$Tf: (p, v) \mapsto (f(p), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot v), \quad (\text{B.2})$$

其中 v 表示 $D(\varphi \circ c)(0)$. 由此, 可从 Banach 空间中导算子的性质, 得出切映射的如下性质:

(1) 若 $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 的, 则 $Tf: TM \rightarrow TN$ 是 C^{r-1} 的.

(2) $Tf|_{T_p(M)}: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ 是线性的.

(3) 若 $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow K$ 是流形间的 C^r 映射, 则

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

是 $TM \rightarrow TK$ 的 C^{r-1} 映射.

(4) 若 $h: M \rightarrow M$ 是恒同映射, 则 $Th: TM \rightarrow TM$ 也是恒同映射.

(5) 若 $f: M \rightarrow N$ 是微分同胚, 则 $Tf: TM \rightarrow TN$ 是单、满映射, 且

$$(Tf)^{-1} = T(f^{-1}).$$

引理 B.8 设 W 是 Banach 空间 B 的开子集 (从而 W 是 C^∞ Banach 流形 B 的开子流形), 则 TW 同构于局部向量丛 $W \times B$ (因此, 我们在下文中把 TW 与 $W \times B$ 等同).

证明 设 c 是 W 上以 p 为基点的曲线, 则存在唯一的 $b \in B$, 使得由

$$C_{p,b}(t) = p + tb$$

所定义的曲线在 p 点与 c 相切. 事实上, $Dc(0)$ 是 $\mathcal{L}(R, B)$ 中唯一的线性映射, 使得与曲线 c 在 p 点相切的另一曲线 $g: R \rightarrow B$ 具有形式

$$g(t) = p + Dc(0) \cdot t.$$

令 $g = C_{p,b}$, 则 $b = DC(0) \cdot 1$ 是唯一存在的. 定义映射

$$h: W \times B \rightarrow TW, \quad h(p, b) = [C_{p,b}]_p,$$

则上面的结论表明 h 是一一的. 我们可以在 TW 上建立局部向量丛结构. 例如, 取 $h(\{p\} \times B)$ 为过 $p \in W$ 的纤维, 则 h 恰是 TW 与 $W \times B$ 的局部向量丛同构映射. \square

引理 B. 9 设 W 和 W' 分别是 Banach 空间 B 和 B' 的开子集, $f: W \rightarrow W'$ 是 C^r 微分同胚, 则 $Tf: W \times B \rightarrow W' \times B'$ 是局部向量丛同构映射.

证明 因为

$$Tf(p, b) = (f(p), Df(p) \cdot b)$$

(见 (B. 2) 式, 取 φ, ψ 为恒同映射), 所以 Tf 是 C^{r-1} 局部向量丛映射 (见定义 B. 2). 又因为 f 是 C^r 微分同胚, 因此 $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$ 也是一个 C^{r-1} 局部向量丛映射, 从而 Tf 是一向量丛同构映射. \square

现在可以证明

定理 B. 10 设 M 是 C^r 微分流形 ($r \geq 1$), $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ 是 M 的一个 C^r 坐标系, 则 $T\mathcal{A} = \{(T(U_\alpha), T(\varphi_\alpha)) | \alpha \in \Lambda\}$ 是切丛 TM 的 C^{r-1} 向量丛坐标系, 从而 TM 是 C^{r-1} 向量丛. 此外, 如果 M 是 n 维流形, 则 TM 是 $2n$ 维流形.

证明 显然 $\{\cup T(U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\} \supset TM$. 设 $T(U_\alpha) \cap T(U_\beta) \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \in \Lambda$. 则由引理 B. 8,

$$T\varphi_\alpha(T(U_\alpha) \cap T(U_\beta)) = T(\varphi(U_\alpha)) \cap T(\varphi(U_\beta))$$

是局部向量丛, 并且

$$T\varphi_\beta \circ (T\varphi_\alpha)^{-1}|_{T\varphi_\alpha(T(U_\alpha) \cap T(U_\beta))} = T(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})|_{T\varphi_\alpha(T(U_\alpha) \cap T(U_\beta))}$$

(见定义 B. 7 下的性质 (3) 和 (5)). 注意 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 所在的

Banach 空间 B 中的开子集 $\varphi_\alpha(T(U_\alpha) \cap T(U_\beta))$ 到自身的 C^r 映射. 由引理 B.9 立得, $(T\varphi_\beta) \circ (T\varphi_\alpha)^{-1}$ 是 C^{r-1} 向量丛同构映射. 因此, 定义 B.3 中的条件 (1) 和 (2) 均成立. 有关维数的论断, 是引理 B.8 的自然推论 (注意 $\varphi(U_\alpha)$ 是它所在 Banach 空间的开子集). \square

附注 B.11 前面已经提到, 流形间的切映射是 Banach 空间中导算子的推广. 因此, 有时把它称为导映射. 设 M 和 N 是充分光滑的微分流形, 则定理 B.10 说明, TM 和 TN 是向量丛, 从而是微分流形 (见向量丛的性质 (1)), 并且 $Tf: TM \rightarrow TN$. 因此, 可以继续求二阶导映射 $T(Tf) = T^2f: T(TM) \rightarrow T(TN)$, 并可递推地定义高阶导映射.

向量场及其流

定义 B.12 设 (E, π, M) 是一个向量丛. 如果映射 $\xi: M \rightarrow E$ 满足 $\pi \circ \xi = \text{id}_M$, 则称它为向量丛的一个截面. ξ 称为是 C^r 连续的, 如果它作为 Banach 流形间的映射 $M \rightarrow E$ 是 C^r 的.

定义 B.13 设 M 是一个 C^r 微分流形, 其切丛 (TM, π, M) 上的一个 C^r ($r \leq s \leq \infty$) 截面 $X: M \rightarrow TM$, 称为 M 上的一个 C^r 向量场. M 上一切 C^r 向量场的集合记为 $\mathcal{X}^r(M)$.

附注 B.14 设 $X: M \rightarrow TM$ 为一向量场, 按定义 $\pi \circ X = \text{id}_M$, 即 $\forall p \in M$, 有 $X(p) \in T_p M$. 换句话说, M 上的向量场就是把 M 上的每一点赋予一个 (在该点切空间内的) 切向量, 从而形成一个 M 上的切向量场.

现在设 $\alpha: I = (-1, 1) \rightarrow M$ 是 M 上的一条 C^r 曲线 ($s \leq r$), 我们要规定曲线上每一点的切向量. 注意由映射 $\alpha: I \rightarrow M$ 可得切映射

$$T\alpha: TI = I \times \mathbb{R}^1 \rightarrow TM.$$

取切丛 TI 的一个截面 $\lambda: I \rightarrow TI$, $\lambda(t) = (t, 1)$, $\forall t \in I$, 则复合映射

$$T\alpha \circ \lambda: I \rightarrow TM$$

是 TM 上的一条 C^{r-1} 曲线. 记 $\alpha' = T\alpha \circ \lambda$, 称 $\alpha'(t) \in TM$ 是 M 上的曲线 α 在 p 点的切向量. 如果取 I 上的坐标卡 (W, id) 和 M 上的坐标卡 (U, φ) ($t \in W, \alpha(t) \in U$), 则由公式 (B. 2) 可知, 映射 α' 有局部表示

$$\alpha'(t) = T\alpha(t, 1) = (\alpha(t), D(\varphi \circ \alpha)(t)). \quad (\text{B. 3})$$

注意, 上面的 1 是 \mathbb{R}^1 中的单位映射.

定义 B. 15 设 $\xi \in \mathcal{X}^r(M)$, $I \subset \mathbb{R}^1$ 是开区间, $0 \in I$. 称 $\alpha: I \rightarrow M$ 是 ξ 的过 $p_0 \in M$ 的积分曲线或流, 如果 $\forall t \in I$,

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \xi(\alpha(t)), \\ \alpha(0) = p_0. \end{cases}$$

称上述流是极大的, 如果 ξ 过 p_0 的任一流 $\beta: J \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow M$ (J 是包含 0 的开区间), 都有 $J \subset I$, 且 $\alpha|_J = \beta$.

取 M 上的坐标卡 (U, φ) , $p_0 \in U$; 设向量场 $\xi: M \rightarrow TM$ 有局部表示 $(p, v(p))$, 其中 $v: U \rightarrow B$ (B 是 Banach 空间). 与上面 $\alpha'(t)$ 的局部表示相对照, 就得到 Banach 空间中关于 $(\varphi \circ \alpha)$ 的微分方程初值问题

$$\begin{cases} D(\varphi \circ \alpha)(t) = v(\alpha(t)) = v \circ \varphi^{-1}((\varphi \circ \alpha)(t)), \\ (\varphi \circ \alpha)(0) = \varphi(p_0). \end{cases}$$

利用坐标卡的 C^r 相容性, 此方程与坐标卡的选取无关. 就是说, 如果取另一坐标卡 (V, ψ) , $p_0 \in V$, 则只须把上面微分方程和初值条件中的 $\varphi \circ \alpha$ 换成 $\psi \circ \alpha$ 即可.

利用 Banach 空间中微分方程初值问题解的存在和唯一性定理, 可以得到

定理 B. 16 设 $\xi \in \mathcal{X}^r(M)$, $r \geq 1$, 则 ξ 过 $p \in M$ 的极大流是存在且唯一的. \square

由附注 B. 14 可知, 求 $\xi \in \mathcal{X}^r(M)$ 过 $p \in M$ 的流, 就是在 M 上找一条过 p 的曲线, 使它在每一点的切向量刚好与 ξ 在该点给出的切向量相吻合, 这与欧氏空间中向量场的流的概念相一致.

附注 B. 17 如果 $M = U$ 是 Banach 空间 B 的一个开子集, 则

域到 $f(x_0)$ 的某邻域之间的微分同胚. 如果 $Df(x_0)$ 仅是单射 (设 $m < n$), 则存在 \mathbb{R}^n 中 $f(x_0)$ 附近的局部微分同胚 g , 使得在 x_0 点附近有

$$g \circ f: (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

这在微分几何中称为 (局部) 正则浸入. 另一方面, 若 $Df(x_0)$ 仅是一个满射 (设 $m > n$), 则存在 \mathbb{R}^n 中 x_0 点附近的局部微分同胚 h , 使得在 x_0 点附近有

$$f \circ h: (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

这称为 (局部) 正则浸盖 (投影).

容易把隐函数定理推广到 Banach 空间. 现在我们把上面有关浸入和浸盖的结果就 Banach 空间的一般情形给出证明, 然后再通过坐标卡推广到微分流形上, 并由此得到构造 (或判断) 子流形的方法. 对于无穷维的 Banach 空间, 仅有 $Df(x)$ 的单射 (或满射) 条件是不够的, 要附加适当的可裂性条件. 首先给出下面的

定义 B. 18 设 E 是 Banach 空间, E_1 是 E 的闭子空间. 如果存在 E 的闭子空间 E_2 , 使 $E = E_1 \oplus E_2$, 则称 E_1 是可裂的 (split).

附注 B. 19 如果 E 是有限维的, 则它的任何子空间都是闭且可裂的; 如果 B 是 Hilbert 空间, $G \subset E$ 是闭子空间, 则 $E = G \oplus G^\perp$, 因此 Hilbert 空间的闭子空间都是可裂的. 但存在无限维 Banach 空间, 它有不可裂的闭子空间. 一般而言, E 的闭子空间 F 可裂的充要条件是: $\exists P \in \mathcal{L}(E, E)$, 使 $P \circ P = P$, 且 $F = \{e \in E \mid Pe = e\}$.

定理 B. 20 (局部浸入定理) 设 E, F 是 Banach 空间, $f: U \subset E \rightarrow F$ 是 C^r 映射, $r \geq 1$, $u_0 \in U$. 设 $Df(u_0): E \rightarrow F$ 是单射, 并且 $Df(u_0)$ 的值域 $F_1 = \mathcal{R}(Df(u_0))$ 是闭且可裂的. 从而存在闭子空间 $F_2 \subset F$, $F = F_1 \oplus F_2$. (当 $E = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}^n$ 时, 只须设 $\text{rank}(Df(u_0)) = m$.) 则存在开集 $V \subset F$ ($f(u_0) \in V$) 和 $W \subset E \oplus F_2$, 以及 C^r 微分同胚 $\varphi: V \rightarrow W$, 使得 $(\varphi \circ f)(e) = (e, 0), \forall e$

$$\in V \cap (E \times \{0\}) \subset E.$$

证明 由条件可知, 线性映射 $Df(u_0)$ 是 E 到 $F_1 = \mathcal{R}(Df(u_0)) \subset F$ 的代数与拓扑同构. 令

$g: U \times F_2 \subset E \times F_2 \rightarrow F = F_1 \oplus F_2$, $g(u, v) = f(u) + v$, 其中 $u \in U, v \in F_2$. 注意

$$Dg(u_0, 0) = \begin{bmatrix} Df(u_0) & 0 \\ 0 & I_{F_2} \end{bmatrix}$$

是 $U \times F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2 = F$ 的 C^r 微分同胚. 由隐函数定理, 存在开集 V, W , 使 $(u_0, 0) \in W \subset E \oplus F_2$, $f(u_0) \in V \subset F$, 以及 C^r 微分同胚 $\varphi: V \rightarrow W$, $\varphi^{-1} = g|_W$. 因此, $\forall (e, 0) \in V$, $(\varphi \circ f)(e) = (\varphi \circ g)(e, 0) = (e, 0)$. \square

定理 B. 21 (局部浸盖定理) 设 E, F 为 Banach 空间, $f: U \subset E \rightarrow F$ 为 C^r 映射, $r \geq 1, u_0 \in U$. 设 $Df(u_0)$ 是满射, 并且 $E_2 = \ker(Df(u_0))$ 是可裂的, $E = E_1 \oplus E_2$ (当 $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^n$ 时, 只须设 $\text{rank}(Df(u_0)) = n$), 则存在开子集 U' 和 $V, u_0 \in U' \subset U, V \subset F \oplus E_2$ 以及 C^r 微分同胚 $\psi: V \rightarrow U'$ 使得 $(f \circ \psi)(u, v) = u, \forall (u, v) \in V$.

证明 定义映射

$$g: U \subset E_1 \oplus E_2 \rightarrow F \oplus E_2, g(u_1, u_2) = (f(u_1, u_2), u_2).$$

因此

$$Dg(u_0, 0) = \begin{bmatrix} D_1 f(u_0) & D_2 f(u_0) \\ 0 & I_{E_2} \end{bmatrix},$$

故 $Dg(u_0, 0) \in GL(E, F \oplus E_2)$. 由隐函数定理, 存在开集 $U', V, u_0 \in U' \subset U, V \subset F \oplus E_2$, 以及 C^r 微分同胚 $\psi: V \rightarrow U'$, 使得 $\psi^{-1} = g|_V$. 因此

$$(u, v) = (g \circ \psi)(u, v) = (f(\psi(u, v)), \psi_2(u, v)),$$

其中 $\psi = \psi_1 \times \psi_2$, 即 $\psi_2(u, v) = v, (f \circ \psi)(u, v) = u$. \square

现在把上面的结果推广到微分流形之间的映射 $f: M \rightarrow N$. 注意, $T_p(M)$ 及 $T_{f(p)}(N)$ 都是 Banach 空间, 因此下面的可裂性条件是合理的.

定义 B. 22 设 M 和 N 是 Banach 流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射. 称 f 在 $p \in M$ 是 C^r 局部浸入, 如果 $T_p f$ 是单射, 而且它的象集在 $T_{f(p)}N$ 中是闭的可裂集. 称 f 在 $p \in M$ 是 C^r 局部浸盖, 如果 $T_p f$ 是满射, 而且 $\ker(T_p f)$ 作为 $T_p M$ 的闭子空间是可裂的. 在流形 M 上每一点都是 C^r 局部浸入(局部浸盖)的映射称为 C^r 浸入(浸盖).

定理 B. 23 设 M, N 是 Banach 流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射 ($r \geq 1$), 则下列三种陈述是等价的:

- (1) f 在 $p \in M$ 是局部浸入;
- (2) 存在坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi), p \in U, f(U) \subset V, \varphi: U \rightarrow U', \psi: V \rightarrow U' \times V'$, 且 $f(p) = 0$, 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U' \rightarrow U' \times V'$ 是包含映射 $p \mapsto (p, 0)$;
- (3) 存在 p 的邻域 U , 使得 $f(U)$ 是 N 中的子流形, 且 $f|_U$ 是 U 到 $f(U)$ 的微分同胚.

证明 (1) 与 (2) 的等价性可由定理 B. 20 得到. (2) 与 (3) 的等价性可由子流形定义 A. 9 得到, 注意 V 是 N 中的开集. \square

附注 B. 24 定理 B. 23 说明, 若 f 在 p 是局部浸入, 则存在 p 的邻域 U , 使 $f(U)$ 是 N 中的子流形. 要特别注意这个结论的局部性. 即使 f 在 M 的每一点都是局部浸入, 也不能断言 $f(M)$ 是 N 的子流形. 事实上, 浸入的局部单射性不能保证整体的单射性. 例如, 由平面极坐标方程 $r = \cos 2\varphi$ 定义的映射 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个浸入, 但不是单射, 且 $f(S^1)$ 不是 \mathbb{R}^2 的子流形(见图 1). 即使浸入 $f: M \rightarrow N$ 在整体上是单射, 仍不足以保证 $f(M)$ 是 N 的子流形. 一个反例是由极坐标方程 $r = \sin \varphi$ 定义的映射 $f: (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (见图 2). 上面两例中的问题都出在 \mathbb{R}^2 原点附近的邻域内.

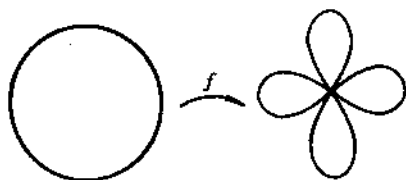


图 1

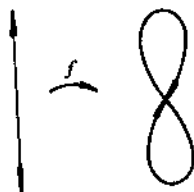


图 2

$f(M)$ 利用 f 从 M 诱导的拓扑与 $f(M)$ 作为 \mathbf{R}^2 的子集而获得的拓扑是不同的. 在前一种拓扑下, $f(M)$ 作成一微分流形, 因而有时称单射浸入的象集 $f(M)$ 是一个浸入子流形; 但是在后一种拓扑下, 它可能不是 N 的子流形. 此时 M 与 $f(M)$ (作为 N 的子空间) 不同胚. 这就引出了下面的

定义 B. 25 设 $f: M \rightarrow N$ 是浸入, 并且是 M 到 $f(M)$ (在 N 的相关拓扑下) 的同胚, 则称它是一个嵌入. 此时, 称 $f(M)$ 是 N 的嵌入子流形.

容易证明下面的

定理 B. 26 设 $f: M \rightarrow N$ 是单值的浸入, 若它是 M 到 $f(M)$ 开映射 (或闭映射), 则 f 是一个嵌入. |

定理 B. 27 设 M, N 是微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射, $q \in N, S = f^{-1}(q)$. 若 f 在 S 上每一点都是局部浸盖, 则 S 是 M 中的一个 C^r 子流形.

证明 由定理 B. 21 及子流形的定义即得. |

附注 B. 28 设 $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射. 点 $q \in N$ 称为 f 的正则值, 如果 $\forall p \in f^{-1}(q), T_p f$ 是满射且其核在 $T_p M$ 中是可裂的. 记 R_f 为 f 的一切正则值的集合, 则定理 B. 27 有如下等价的陈述:

定理 B. 29 若 $q \in R_f$, 则 $f^{-1}(q)$ 是 M 中的子流形. |

在讨论一个映射的水平集时,这种说法是方便的.

附录 C Thom 横截定理

在寻找结构不稳定向量场的普适开折时,有时要确定开折中的通有族(generic family),或称为一般族,非退化族.为此,需要利用 Thom 横截定理(它是从著名的 Sard 定理导出的).事实上,为了把无穷维问题简化到有穷维,我们需要的是 jet 形式的 Thom 横截定理.因此,我们先建立映射空间中的拓扑,再引进 jet 流形,最后介绍 Thom 横截定理.

映射空间的拓扑

记 $C^r(M, N)$ 为 C^r 微分流形 M 与 N 之间的 C^r 映射所成的集合.我们在 $C^r(M, N)$ 中引进拓扑,使它成为拓扑空间.

定义 C.1 (弱拓扑,即 compact-open 拓扑) 设 $f \in C^r(M, N)$, (U, φ) 和 (V, ψ) 分别是 M 和 N 的容许坐标卡;令 $K \subset U$ 是紧集,使 $f(K) \subset V$;令 ϵ 为正实数.定义弱子基邻域

$$\mathcal{N}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon) = \{g \in C^r(M, N) \mid g(K) \subset V,$$

$$\sup_{x \in \varphi(K), i=0,1,\dots,r} \|D^i(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^i(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon\}.$$

$C^r(M, N)$ 中的 C^r 弱拓扑就是由这种形式的集合所生成的.任何包含有限个这种集合交集的集合都是 f 的一个邻域.所得的拓扑空间记为 $C_w^r(M, N)$.

定义 C.2 (强拓扑,或 fine 拓扑,Whitney 拓扑). 令 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ 是 M 的一个局部有限坐标系,即 M 的每一点都有一个邻域,它只与有限个 U_α 相交;记 $\mathcal{K} = \{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $K_\alpha \subset U_\alpha$ 是 M 上的紧集; $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ 是 N 的坐标系.对任一正数集合 $\mathcal{E} = \{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in A\}$,定义

$$\mathcal{N}(f; \mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{B}, \varepsilon) = \{g \in C^r(M, N) \mid g(K_\alpha) \subset V_{\beta(\alpha)}, \\ \sup_{x \in \varphi_\alpha^{-1}(K_\alpha), i=0,1,\dots,r} \|D^i(\phi_{\beta(\alpha)} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) \\ - D^i(\phi_{\beta(\alpha)} \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)\| < \varepsilon_\alpha, \forall \alpha \in A\}.$$

$C^r(M, N)$ 上的 C^r 强拓扑就是以上面类型的集合为拓扑基(开集)所生成的. 记所得的拓扑空间为 $C_S^r(M, N)$.

附注 C.3 上面我们假设 $r < \infty$. 为了定义 $C_W^\infty(M, N)$ (或 $C_S^\infty(M, N)$), 只须把包含映射 $C^\infty(M, N) \rightarrow C_W^r(M, N)$ (或 $C_S^r(M, N)$) 诱导的拓扑对所有有限的 r 合起来即得.

附注 C.4 $C_W^r(M, N)$ 有很好的性质. 例如, 它可以赋予完备的度量, 并有可数基. 当 M 为紧流形时, $C_W^r(M, N)$ 与 $C_S^r(M, N)$ 一致, 它们是 Banach 空间. 当 M 不紧时, 弱拓扑不能很好地控制 C^r 映射在“无穷远”的性质, 强拓扑就成为需要的了. 注意, 在 M 非紧时, 强拓扑在任一点都没有可数基, 因而它不可度量化. 但是, 在强拓扑下 $C_S^r(M, N)$ 的任一弱闭子空间都是 Baire 空间(剩余集在其中稠密). 这对研究通有性质是很重要的. 如无特别声明, 下文中都取强拓扑, 并把 $C_S^r(M, N)$ 简记为 $C^r(M, N)$.

下面几个定理反映了 $C^r(M, N)$ 中函数类的性质.

定理 C.5 设 M, N 为 C^s 微分流形, $1 \leq s \leq +\infty$, $1 \leq r \leq s$, $\dim M < +\infty$. 则 $G^s(M, N)$ 在 $C^r(M, N)$ 中稠密, 其中 $G^s(M, N) \subset C^s(M, N)$ 表示如下任何一个映射类:

微分同胚、嵌入、闭嵌入、浸入、浸盖、真映射(即紧集的原象是紧集). \blacksquare

定理 C.6 (1) 设 $1 \leq r < \infty$, 则任何 C^r 微分流形 C^r 微分同胚于一个 C^∞ 微分流形.

(2) 设 $1 \leq r < s \leq +\infty$, 若两个 C^s 微分流形 C^r 微分同胚, 则它们 C^r 微分同胚. \blacksquare

定理 C.7 (Whitney 定理) 设 $1 \leq r \leq +\infty$, 则任何 n 维的 C^r

微分流形都 C^r 微分同胚于 \mathbf{R}^{2n+1} 的一个闭子流形. |

附注 C.8 从定理 C.6 可知,如果把所论流形的光滑性提高到 C^∞ ,并不是一个很严重的事情.今后我们将经常作这样的假定.虽然 n 维微分流形是 n 维欧氏空间非常一般的推广,但定理 C.7 说明,它反过来又可作为嵌入子流形放到 \mathbf{R}^{2n+1} 维欧氏空间中.

射式(jet)流形

设 M, N 是 C^r 微分流形.我们把三元组 (x, f, U) 的等价类 $[x, f, U]$ 称为从 M 到 N 的一个 r -jet, 其中 $U \subset M$ 是开集, $x \in U, f \in C^r(U, N)$; 等价关系 $(x, f, U)_r \sim (x', f', U')_r$ 是指: $x = x'$, 并存在 M 与 N 中的容许坐标卡 (W, φ) 和 (V, ψ) , 使 $x \in W \subset U \cap U', f(W) \subset V, f'(W) \subset V$, 并且局部表示

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \quad \text{与} \quad \psi \circ f' \circ \varphi'^{-1}: W \rightarrow f(W) \cap f'(W)$$

在 x 的前 r 阶(包括 0 阶)导数均相同.

显然,上面的定义与坐标卡的选取无关,从而也与 U 的选取无关.因此记

$$[x, f, U]_r = j_x f = j^r f(x).$$

称 $j_x f$ 为映射 f 在 x 点的 r -jet, 并称 x 为起点, $f(x)$ 为终点.

记 $J^r(M, N)$ 为全体从 M 到 N 的 r -jet 之集合. 我们把 $J^r(M, N)$ 中起点在 x 的子集记为 $J_x^r(M, N)$, 终点在 y 的子集记为 $J_y^r(M, N)$; 而把 $J_x^r(M, N)$ 与 $J_y^r(M, N)$ 的交集记为 $J_{x,y}^r(M, N)$.

现在考虑一个特殊情形, $M = \mathbf{R}^m, N = \mathbf{R}^n$. 此时简记

$$J(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n) = J(m, n).$$

设 $U \subset \mathbf{R}^m$ 是开集, $f \in C^r(U, \mathbf{R}^n)$, 则 f 在 x 点的 r 阶 Taylor 多项式就给出 f 在 x 点的 r -jet 一种自然的表示. 这个从 \mathbf{R}^m 到 \mathbf{R}^n 的多项式映射可由 f 在 x 点直到 r 阶(包括 0 阶)导算子所唯一决定. 这些导算子合起来, 属于向量空间

$$P^r(m, n) = \mathbf{R}^n \times \prod_{k=1}^r \mathcal{L}^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n),$$

其中 $\mathcal{L}^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ 表示从 \mathbf{R}^m 到 \mathbf{R}^n 的 k 重对称线性映射所成的向量空间. 这说明, 对 $P^r(m, n)$ 中的每一个元素, 都有且仅有一个 $J_x^r(m, n)$ 中的元素与之对应, 从而有下面的等同关系:

$$J_x^r(m, n) = P^r(m, n),$$

$$J^r(m, n) = \mathbf{R}^m \times P^r(m, n).$$

因此, 当 r 有限时, $J^r(m, n)$ 是有限维的向量空间. 如果 $U \subset \mathbf{R}^m, V \subset \mathbf{R}^n$ 都是开集, 则 $J^r(U, V)$ 是 $J^r(m, n)$ 的开子集.

现在设 M, N 分别是 m 维和 n 维流形. 若 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 分别是 M, N 上的容许坐标卡, 则

$$\xi: j_x f \mapsto jf(x)(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

就给出了 $J^r(U, V) \rightarrow J^r(\varphi(U), \psi(V))$ 的单、满映射. 从上面的讨论中得知, $J(\varphi(U), \psi(V))$ 是 $J^r(m, n)$ 中的开集, 而 $J^r(m, n)$ 与欧氏空间同构. 所以 $(\xi, J^r(U, V))$ 就是 $J^r(M, N)$ 的一个坐标卡. 这样, 就可以从 M, N 的 C^r 坐标系导出 $J^r(M, N)$ 的 C^0 坐标系. 当 M, N 是 C^{r+s} 流形时, $J^r(M, N)$ 是一个 C^s 微分流形, 称为从 M 到 N 的射式 (jet) 流形.

Thom 横截定理

定义 C. 9 线性空间 L 的两个线性子空间 X 与 Y 称为是横截的, 如果它们之和是整个空间: $L = X + Y$.

由于微分流形的切空间是线性空间, 而切映射是切空间之间的映射, 所以可以定义两个子流形的横截性和流形间的映射与象空间中某子流形的横截性.

定义 C. 10 设 A, B 是光滑 Banach 流形 M 的两个光滑子流形. 称子流形 A 与 B 横截, 如果 $A \cap B = \emptyset$, 或者 $\forall p \in A \cap B$, $T_p A$ 与 $T_p B$ 在 $T_p M$ 中 (在定义 C. 9 的意义下) 横截.

定义 C. 11 设 M, N 是光滑的 Banach 流形, A 是 N 的光滑子流形. 称 $C^r (r \geq 1)$ 映射 $f: M \rightarrow N$ 在点 $p \in M$ 与 A 横截, 如果 $f(p) \notin A$, 或者 $f(p) \in A$, 并且满足下面的条件

(1) $(T_p f)(T_p M) + T_{f(p)} A = T_{f(p)} N$, 而且

(2) $T_{f(p)} A$ 的原象 $(T_p f)^{-1} \cdot (T_{f(p)} A)$ 在 $T_p M$ 中可裂.

在每一点 $p \in M$ 都与 A 横截的映射 f , 称为与子流形 A 横截.

注意, 当 M 是 Hilbert 流形 (特别地, 是有限维流形) 时, 可裂性条件 (2) 是自然成立的 (见附注 B. 20).

例 C. 12 (1) 如果定义 C. 11 中子流形 A 上的每一点都是 f 的正则值 (见附注 B. 28), 则 f 与 A 横截.

(2) 如果 M, N 是有穷维的, 且 $\dim(M) + \dim(A) < \dim N$, 则 f 与 A 横截意味着 $f(M) \cap A = \emptyset$. 例如, 把 \mathbf{R}^1 嵌入 \mathbf{R}^3 的映射与 \mathbf{R}^3 中的曲线 γ 横截 \Leftrightarrow 嵌入曲线与 γ 在 \mathbf{R}^3 中无公共点.

由于横截相交性与坐标卡的选取无关, 所以当 M 与 N 都为有穷维流形时, 下面的结果显然成立.

定理 C. 13 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的 C^∞ 微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是可微映射, A 是 N 的余维为 s 的 C^∞ 子流形. 设 M 在 x_0 点附近有局部坐标 x^1, \dots, x^m , N 在 $f(x_0)$ 点附近有局部坐标 y^1, \dots, y^n . 如果在 $f(x_0)$ 的某邻域 U 内, 点集 $A \cap U$ 有表达式 $y^1 = \dots = y^s = 0$, 则映射 f 与子流形 A 横截的充分必要条件是

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{i=1, \dots, s, j=1, \dots, m} \text{ 在 } x_0 \text{ 点的秩为 } s. \quad \blacksquare$$

下面设 M 和 N 是有限维光滑微分流形, 且是第二可数的, A 是 N 的光滑子流形, 记

$$\mathcal{A}^r(M, N; A) = \{f \in C^r(M, N) \mid r \geq 1, f \text{ 与 } A \text{ 横截}\},$$

由 Sard 定理和附注 C. 4, 可以推出下面的结果.

定理 C. 14 (Thom 横截定理) $\mathcal{A}^r(M, N; A)$ 是 $C^r(M, N)$ 中的剩余集 (即可数个开稠集的交集), 从而在 $C^r(M, N)$ 中稠密. 如

果 A 是闭子流形, 则它还是开的. \blacksquare

证明可参考[Hir, pp74 - 77]. 这个定理说明, 若 A 是 M 的闭子流形, 则 $C^r(M, N)$ 中与 A 不横截的映射可以在任意小扰动下成为横截, 而原来横截的映射仍可保持横截. 因此, 利用横截性可以得出 $C^r(M, N)$ 中的通有族, 又称为一般族.

Thom 横截定理可以推广到 jet 形式. 这样就可把无限维空间 $C^r(M, N)$ 中的通有性问题, 转化到有限维空间 $J^r(M, N)$ 中的横截问题.

定理 C. 15 (Thom 横截定理的 jet 形式) 设 M, N 是无边界的有限维光滑流形, A 是 $J^r(M, N)$ 的 C^∞ 子流形, $1 \leq r < s \leq \infty$, 则映射集合

$$\mathcal{S} = \{f \in C^s(M, N) \mid f^*f \text{ 与 } A \text{ 横截}\}$$

在 $C^s(M, N)$ 中是剩余集, 从而是稠密集. 如果 A 是闭的, 则 \mathcal{S} 在 $C^s(M, N)$ 中还是开的. \blacksquare

证明可见[Hir, pp80 - 81]. 下面的定理对于确定子流形的余维数是重要的.

定理 C. 16 设 $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射, A 是 N 的子流形. 如果 f 与 A 横截, 则 $f^{-1}(A)$ 是 M 的子流形. 如果 A 在 N 中有有限余维, 则

$$\text{codim}(f^{-1}(A)) = \text{codim}(A). \quad \blacksquare$$

特别地, 当 $f: M \rightarrow N$ 是浸盖时, 条件“ f 与 A 横截”总是满足的, 而投影是特殊的浸盖.

参考文献

- [A1] Arnold V I. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1983
- [A2] Arnold V I. Ten problems. Adv. in Sov. Math. 1990(1): 1—8; 数学译林, 1993(4): 257—261
- [AAIS] Afraimovich V S, Arnold V I, Il'yashenko Yu S, Sil'nikov L P. Bifurcation Theory; Dynamical Systems V. New York: Springer-Verlag, 1988
- [ALGM] Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I I, Maier A G. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane. New York, Israel Program for Sci. Transl., Wiley, 1973
- [AMR] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. London Amsterdam Tokyo: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1983
- [Ba] Bautin N N. On the number of limit cycles which appear with variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type. Math. Sb. 1952, 30: 181—196 (in Russian); AMS Trans. Series 1962, 5: 396—413 (in English)
- [BC1] Benedicks M, Carleson L. On iteration of $1 - \alpha x^2$ on $(-1, 1)$. Ann. Math. 1985, 122: 1—25
- [BC2] ——. The dynamics of the Hénon map. Ann Math. 1991, 133: 73—169
- [Be] Белинский Г Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев, Наукова думка, 1979
- [BL] Bonin G, Legault J. Comparision de la methode des constantes de Liapunov et la bifurcation de Hopf. Canad. Math. Bull. 1988, 31(2): 200—209
- [Bo1] Bogdanov R I. Versal deformations of a singular point of a vector field

- on the plane in the case of zero eigenvalues. Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2: 37—65 (in Russian); Sel. Math. Sov. 1981, 1: 389—421 (in English)
- [Bo2] ——. Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields. Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2: 23—35 (in Russian); Sel. Math. Sov. 1981, 1: 373—387 (in English)
- [C] 陈翔炎. 含参数微分方程的周期解与极限环. 数学学报, 1963, 13(4): 607—609
- [Cy1] 曹永罗. 关于非双曲奇异吸引子. 北京大学博士论文, 1994
- [Cy2] Cao Yongluo. Strange attractor of Hénon map and its basin. Scientia Sinica (Series A), 1995, 38: 29—35
- [CH] Chow Shui-Nee, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1982
- [CLW] Chow Shui-Nee, Li Chengzhi, Wang Duo. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. New York: Cambridge University Press, 1994
- [CM] 蔡燧林, 马晖. 广义 Liénard 方程的奇点的中心焦点判定问题. 浙江大学学报. 1991, 25(4): 562—589
- [Cs] 蔡燧林. 二次系统研究近况. 数学进展, 1989, 18(1): 5—21
- [CS] Cushman R, Sanders J. A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation. J. Diff. Eq. 1985, 59: 243—256
- [CW] 陈兰荪, 王明淑. 二次微分系统极限环的相对位置和数目. 数学学报, 1979, 22(6): 751—758
- [CY] 陈兰荪, 叶彦谦. 方程组 $\frac{dx}{dt} = -y + dx + lx^2 + xy + ny^2$, $\frac{dy}{dt} = x$ 的极限环的唯一性. 数学学报, 1975, 18: 219—222
- [CZ] 蔡燧林, 张平光. 二次系统极限环的唯一性. 高校应用数学学报, 1991, 6(3): 450—461
- [D] Dulac H. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. Fr. 1923, 51: 45—188
- [DER] Dumortier F, El Morsalani M, Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics, to appear in

Nonlinearity

- [DGZ] Drachman B, van Gils S A, Zhang Zhi-Fen. Abelian integrals for quadratic vector fields. *J. Reine Angew. Math.* 1987, 382: 165—180
- [DL] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程. 北京: 高等教育出版社, 1991
- [DLZ] Dumortier F, Li Chengzhi, Zhang Zhi-Fen. Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded hetroclinic loops. Preprint, 1996
- [DRR1] Dumortier F, Roussarie R, Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields, *J. Diff. Eq.* 1994, 110: 86—133
- [DRR2] ——. Elementary graphics of cyclicity one and two, *Nonlinearity*, 1994, 7: 86—133
- [DRS1] Dumortier F, Roussarie R, Sotomayor J. Generic 3-parameter family of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 1987, 7: 375—413
- [DRS2] ——. Generic 3-parameter family of planar vector fields, unfolding of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts. *Lecture Notes in Math.* 1991, 1480: 1—164
- [DZ] 杜乃林, 曾宪武. 计算焦点量的一类递推公式. *科学通报*, 1994, 39 (19): 1742—1744
- [E] Ecalle E J. Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'application de retour. *Lecture Notes in Math.* 1990, 1455: 74—159
- [EZ] Edmunds D E, Zheng Z. On the stable periodic orbits of regular maps on a completely ordered invariant set. Preprint
- [F] 冯贝叶. 临界情况下奇环的稳定性. *数学学报*, 1990, 33(1): 113—134
- [FLLL] Farr W W, Li Chengzhi, Labouriau I S, Langford W F. Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th problem. *SIAM Math. Anal.* 1989, 20: 13—30
- [GH] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983
- [GaHo] Gavrilov L, Horozov E. Limit cycles and zero of Abelian integrals satisfying third order Picard-Fuchs equations. *Lecture Notes in*

- Math. 1990, 1455: 160—196
- [Go] Гомовов Е П. Эквивалентность семейств диффеоморфизмов конечного класса гладкости. Вестн. Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат. 1976, 134(41): 95—104
- [Gw] 高维新. 解析理论讲义(北京大学数学系用).
- [H] Hilbert H D. Mathematische Probleme (lecture). The second International Congress of Mathematicians, Paris 1900. Göttinger Nachrichten, 1900: 253—297
- [Ha] Hayashi S. On the solution of C^1 stability conjecture for flows. Preprint.
- [HI] Horozov E, Iliev I D. On saddle-loop bifurcations of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems. J. Diff. Eq. 1994, 113 (1): 84—105
- [Hir] Hirsch M W. Differential Topology. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1976
- [HLZ] 韩茂安, 罗定军, 朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性(I), (II). 数学学报, 1992, 35(4): 541—548, 35(5): 673—684
- [Hm] 韩茂安. 周期扰动系统的不变环面与亚调和解的分支. 中国科学(A辑), 1994(11): 1152—1160
- [Ho] Horozov E. Versal deformations of equivariant vector fields in the case of symmetry of order 2 and 3. Trans. of Petrovski Seminar 1979, 5: 163—192 (in Russian)
- [Hw] Huang Wenzao. The bifurcation theory for nonlinear equations. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 109, New York, Marcel Dekker, INC, 1987, 249—260.
- [HWW] Huang Qichang, Wei Junjie, Wu Jianghong. Hopf bifurcations of some second-order FDEs with infinite delay and their applications. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(4):
- [Hu] Hu Sen. A proof of the C^1 stability conjecture for 3-dimensional flows. Trans. AMS, 1994.
- [HZ] 韩茂安, 朱德明. 微分方程分支理论. 北京: 煤炭工业出版社, 1994
- [I] Il'yashenko Yu S. Finiteness theorems for limit cycles. Russian Math. Surveys 1990, 40: 143—200

- [IL] Il'yashenko Yu S, Li Weigu. Nolocal Bifurcation, to be published by AMS
- [IY] Il'yashenko Yu S, Yakovenko S. Finitely smooth normal forms of local families diffeomorphisms and vector fields. Russian Math. Surveys 1991, 46: 1—43
- [Ja] Jakobson M V. Absolutely continuous invariant measure for one-parameter family of one-dimensional map. Comm. Math. Phys. 1981, 81: 39—88
- [Jo] Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual generalized homoclinic bifurcation. SIAM J. Math. 1988, 48: 481—496
- [K] Khovansky A G. Real analytic manifolds with finiteness properties and complex Abelian integrals. Funct. Anal. Appl. 1984, 18: 119—128
- [L1] 廖山涛. 微分动力系统的定性理论. 北京: 科学出版社, 1992
- [L2] Liao Shantao. Obstruction sets, Minimal rambling sets and their applications. In: Chinese Mathematics into 21st Century. Peking University Press, 1992.
- [Lc] 李承治. 关于平面二次系统的两个问题. 中国科学(A 辑), 1982(12): 1087—1096
- [LbZ] Li Bao-Yi, Zhang Zhi-Fen. A note on a result of G. S. Petrov about the weakened 16th Hilbert problem. JMAA 1995, 190: 489—516
- [LH] 李继彬, 黄其明. 平面三次微分系统的极限环复眼分支. 数学年刊(B 辑), 1987, 8: 391—403
- [LHZ] 罗定军, 韩茂安, 朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性(I). 数学学报, 1992, 35(3): 407—417
- [LR1] Li Chengzhi, Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation, the cusp of order 4. J. Diff. Eq. 1989, 79: 132—167
- [LR2] ——. Codimension 2 symmetric homoclinic bifurcation. Can. J. Math. 1990, 42: 191—212
- [Lw] Li Weigu. The bifurcation of "eight figure" of separatrix of saddle with zero saddle value in the plane. Preprint of Peking University, Research Report, No 46, 1995

- [Lz] 梁肇军. 多项式微分系统全局分析导引. 武汉: 华中师范大学出版社, 1989
- [LZ] Li Chengzhi, Zhang Zhi-Fen. A criterion for determining the monotonicity of the ratio of two Abelian integrals. *J. Diff. Eq.*, 1996, 124: 407—424
- [M] Mañé R. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes. Sci. Publ. Math.* 1987, 66: 161—210
- [Ma] Mardesic P. The Number of limit cycles of polynomial deformations of a Hamiltonian vector field. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 1990, 10: 523—529
- [Mo] Mourtada A. Degenerate and non-trivial hyperbolic polycycles with two vertices, *J. Diff. Eq.*, 1994, 113: 68—83
- [MV] Mora L, Viana L. Abundance of strange attractor. *Acta. Math.* 1993, 170: 1—63
- [Ma] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥: 安徽教育出版社, 1996
- [NS] Nowicki T, Strien V S. Absolutely continuous invariant measures for C^2 unimodal maps satisfying the Collet-Eckmann condition. *Inv. Math.* 1988, 93: 619—635
- [P1] Petrov G S. Number of zeros of complete elliptic integrals. *Funct. Anal. Appl.* 1988, 18: 148—149
- [P2] ——. The Chebyshev property of elliptic integrals. *Funct. Anal. Appl.* 1988, 22: 72—73
- [Pa] Palis J. A proof of the Ω -stability conjecture. *Inst. Hautes. Sci. Publ. Math.* 1987, 66: 211—218
- [Пол.] Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1934, 4: 883—885
- [PT] Palis J, Takens F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge University Press, 1992
- [Q] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线, 上、下册. 北京: 科学出版社, 1956, 1959
- [QL] 秦元勋, 刘尊全. 微分方程公式的机器推导(Ⅲ). 科学通报, 1981, 7: 388—391

- [R1] Roussarie R. Weak and continuous equivalences for families of line diffeomorphisms. In "Dynamical Systems and Bifurcation Theory", Camacho, Pacifico ed., Longman, Scientific and Technical, Pitman Research Notes in Math. Series 160, 1987, 377—385
- [R2] ——. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. Bol. Soc. Bras. Mat. 1986, 17: 67—101.
- [Rc] Rousseau C. Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field with 7-jet C^∞ -equivalent to $y \frac{\partial}{\partial x} + (\pm x^3 \pm x^5 y) \frac{\partial}{\partial y}$. Lecture Notes in Math. 1989, 1455, 334—354
- [RS] Rousseau C.; Schlomiuk D. Generalized Hopf bifurcations and applications to planar quadratic systems. Ann. Polon. Math. 1988, 49: 1—16
- [RT] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 1971, 20: 167—192
- [S] Singer D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. SIAM Appl. Math. 1978, 35: 260—267
- [Sh] Shoshitaishvili A N. Bifurcation of topological type of singular points of parameterized vector fields. Funct. Anal. Appl. 1972(2): 169—170
- [Si] Sibirskii K S. On the number of limit cycles in a neighborhood of singular points. Diff. Eq. 1965, 1: 36—47 (in Russian)
- [Sij] Sijbrand J. Properties of center manifolds. Trans. AMS 1985, 289: 431—469
- [Sil1] Sil'nikov L P. On a Poincaré-Birkhoff problem. Math USSR Sb. 3, 353—371
- [Sil2] ——. On the generation of a periodic motion from a trajectory doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type. Math USSR Sb 1968, 6: 428—438
- [Sil3] ——. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type. Math USSR Sb 1970, 10: 91—102
- [SJ] Shen Jaji, Jing Zujun. A new detecting method of conditions for the ex-

- istence of Hopf bifurcation. In "Dynamical Systems", Nankai Series in Pure, Apl. Math. and Theor. Phys., Vol 4, eds. S-T Liao, T-R Ding and Y-Q Ye, World Scientific Publishing, Singapore, 1993; 188—203
- [Sm] Smale S. Dynamics retrospective, great problems, attempts that failed. Nonlinear Science, The Next Decade. 见“数学译林”, 动力系统学的回顾: 重大问题, 失败的尝试. 1993(4); 262—269,.
- [Se] 史松龄. 平面二次系统存在四个极限环的具体例子. 中国科学, 1979(11); 1051—1056
- [T] Takens F. Forced oscillations and bifurcations: Applications of global analysis I. In Commun. Math. Vol 3 Inst. Rijksuniv. Utrecht., 1974
- [TTY] Thieullen P, Tresser C, Young L-S. Positive Liapunov exponent for gereric one-parameter families of unimodal maps. Preprint
- [V] Vanderbauwhede A. Center manifolds, normal forms and elementary bifurcations. In Dynamics Reported, Vol 2, eds. U. Kirchgraber and O. Walther, New York, Wiley, 1989, 89—169
- [Va] Varchenko A N. Estimate of the number of zeros of an Abelian integral depending on a parameter and limit cycles. Funct. Anal. Appl. 1984, 18; 98—108
- [W] Wen Lan. On the C^1 stability conjecture for flows. J. Diff. Eq. 1996, 129(2); 334—357
- [Wd] Wang Duo. An introduction to the normal form theory of ordinary differential equations. Advances in Math. 1990, 19(1); 38—71
- [Wi1] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York Berlin Heidelberg; Springer-Verlag, 1990
- [Wi2] ——. Global Bifurcations and Chaos; Analytical Methods. New York Berlin Heidelberg; Springer-Verlag, 1988
- [Wl] 王兰宇. 多峰映射的动力学. 北京大学博士论文. 1996
- [X] 肖冬梅. 一类余维3鞍点型平面向量场的分支, 中国科学(A 辑), 1993(3); 252—262
- [Y1] 叶彦谦等. 极限环论, 第二版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984
- [Y2] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1995
- [Yo] Yoccoz J C. Recent developments in dynamics. Plenary Address of the

ICM 94

- [YY] 杨信安, 叶彦谦. 方程 $\frac{dx}{dt} = -y + dx + lx^2 + xy + ny^2$, $\frac{dy}{dt} = x$ 的极限环的唯一性. 福州大学学报, 1978(2): 122—127
- [Z] Zheng Zhiming. On the abundance of chaotic behavior for generic one-parameter families of maps. Acta Math. Sinica, 1996(12): 398—412
- [Zd1] Zhu Deming. Melnikov vector and heteroclinic manifolds. Science in China, Ser. A, 1994, 37(6): 673—682.
- [Zd2] ——. Melnikov-type vectors and principal normals. Science in China, Ser. A, 1994, 37(7): 814—822.
- [Zd3] ——. Transversal hetroclinic orbits in general degenerate cases. Science in China, Ser. A, 1996, 39(2): 112—121.
- [ZDHD] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985
- [Zg] 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1986
- [Zj] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题(修订本). 北京: 北京大学出版社, 1987
- [ZJ] Zeng Xianwu, Jing Zujun. Monotonicity and critical points of period. Progress in Natural Science, 1996, 6(4): 401—407
- [ZQ] 张锦炎, 钱敏. 微分动力系统导引. 北京: 北京大学出版社, 1991
- [Zol] Zoladek H. On the versality of certain family of vector fields on the plane. Math. USSR Sb. 1984, 48: 463—492
- [Zo2] ——. Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes. J. Diff. Eq. 1987, 67: 1—55
- [N] 涅梅斯基 B B. 四十年来的苏联数学(1917—1957), 常微分方程部分, 饶生忠译. 北京: 科学出版社, 1960
- [Zzf1] Zhang Zhi-fen. On the uniqueness of the limit cycles of some nonlinear oscillation equations. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1958, 119: 659—662 (in Russian)
- [Zzf2] ——. Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized Liénard equations. Applicable Analysis, 1986, 23: 63—67.
- [Zzs] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987

索引

中文词条按首字的笔画排列,西文开头的词条按字母顺序排列.

三 画

子流形	7,46-50,286
马蹄映射	170
马蹄存在定理	173

四 画

双曲奇点	4
双曲闭轨	4
双曲不动点定理	160
分岔	9
分岔集	9
分岔值	9
分岔图	19,47
分岔曲线	19
分岔方程	62,63
分岔函数	60,63
分岔的余维	46
无穷阶非共振	41
无限 C 水平曲线	159
无限 C 垂直曲线	159
开折	44
不稳定流形	7
切向量	290
切空间	290
切丛	290
切映射	291,292

五 画

正规形	34,40
正则奇点	117,118
正则映射族	281
对参数一致的 Hopf 分岔定理	82
可扰动参数	282
可裂	297
边界的水平部分	159,198,200
边界的垂直部分	159,198,200
边界条件	160
主稳定方向	191

六 画

轨道	2,3,168
同宿轨	10
同宿点	168
同宿分岔	15,85
异宿轨	10,23,114
异宿点	168
异宿分岔	146
共振	35,40
共振多项式	36,40
闭轨分岔	64
曲线坐标	66
多重极限环	68
后继函数	67,76,95

自由返回	254	典型族	228
有界返回	255	九 画	
全局中心流形	24	结构稳定	6,8
全局中心流形定理	23	矩阵表示法	38
全局分岔	10	相交条件	160
向量丛	288,289	复合映射的双曲性	178
纤维型	289	十 画	
七 画		弱 Hilbert 第16问题	98—100,109
局部分岔	10	弱等价	45
局部中心流形	25	通有族	47
局部中心流形定理	25	倍周期分岔	16
局部族	44	高阶 Melnikov 函数	97
局部表示	286	积流形	287
更替法	60	浸入	7,297
投影	288,289	浸盖	49,297
极限环	13,67	十一画	
芽	44	移位映射	167
坐标卡	284	符号动力系统	165
八 画		十二画	
周期点	4,168	普适开折	19,45
周期轨	168	焦点量	78
拓扑轨道等价	5	游荡环	217,227
环	216	超稳定周期轨道	243
非游荡集	4	遍历	271
非游荡环	217	揉序列	276
非共振	41	嵌入	300
非本质自由返回	255	十三画	
单重极限环	68	临界元	4
单峰映射	243	强等价	45
奇点分岔	58,64	稠密轨道	169
细焦点	73	辐角原理	124
细鞍点	93		

微分流形	285	j 次正规形	34
微分结构	285	k -jet	49
微分同胚	286	k 阶非共振	41
零截面	288, 289	k 参数开折	44
十四画		k 阶 Hopf 分岔	73
稳定流形	7	k 阶细焦点	73
稳定周期轨道	243	Lebesgue 测度	242
端点	158	Lebesgue 正稠点	282
十五画		Lebesgue 全稠点	282
鞍结点分岔	11	Liapunov 系数法	78, 79
鞍点量	190, 200	Liapunov-Schmidt 方法	60, 62, 63
鞍焦点	43	Malgrange 定理	18
鞍焦环	216	Melnikov 函数	90, 97, 109
横截	46, 304	Misiurewicz 条件	282
		Morse-Smale 向量场	8
Abel 积分	99, 101, 106—109	Pichfork 分岔	11
Banach 流形	284	Picard-Fuchs 方程	111
Bogdanov-Takens 系统	47, 109, 130	Pioncaré 映射	5
Birkhoff-Smale 定理	184	Pioncaré 分岔	94
C 水平曲线	158	Pliss 约化原理	27
C 垂直曲线	158	S-单峰映射	244
C 水平带域	159	Smale 马蹄	170
C 垂直带域	159	Schwartz 导数	243
C^k 线性化	41, 43	Thom 横截定理	305, 306
germ	44	(μ_h, μ_v) 矩形	159
Fuchs 型方程	118	(μ_h, μ_v) 矩形的高	162, 163
Hartman-Grobman 定理	6	(μ_h, μ_v) 矩形的宽	162, 163
Hilbert 第16问题	99	(μ_h, μ_v) 锥形条件	159
Hilbert-Arnold 问题	98	Ω 爆炸	228
Hopf 分岔	13		

责任编辑
封面设计
责任绘图
版式设计
责任校对
责任印制

杨芝馨
季思九
郝林
李承治
郑志明
王彦

李伟固

(京)112号

全书分为六章,各章内容分别是:基本概念和准备知识,常见的局部与非局部分岔,几类余维2的平面向量场分岔,双曲不动点及马蹄存在定理,空间中双曲鞍点的同宿分岔,实二次单峰映射族的吸引子.在前三章的每章之后,都配备了一定数量的习题.

本书可作为高等学校数学专业高年级本科生的选修课教材,或相关专业研究生的基础课教材;也可供希望了解分岔理论这门学科的学生、教师或科技人员作为参考书.

图书在版编目(CIP)数据

向量场的分岔理论基础/张芷芬等编. -北京:高等教育出版社,1997

ISBN 7-04-006216-X

I. 向… II. 张… III. 矢量场 IV. 0413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 22634 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.375 字数 250 000

1997 年 10 月第 1 版 1997 年 10 月第 1 次印刷

印数 0 001 - 1 715

定价 10.20 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换



版权所有,不得翻印



阅读此文的还阅读了:

- [1. 《成人教育基础理论》](#)
- [2. 2.基础理论](#)
- [3. 基于分岔理论的ERP系统实施研究](#)
- [4. 2. 基础理论](#)
- [5. 论档案利用的理论基础](#)
- [6. 2. 基础理论](#)
- [7. 2.基础理论](#)
- [8. 一类平面五次向量场的奇点分岔](#)
- [9. 2.基础理论](#)
- [10. 太极拳的理论基础](#)
- [11. 论无因管理的理论基础](#)
- [12. 浅论PBL的理论基础](#)
- [13. 2. 基础理论](#)
- [14. 大跨分岔隧道分岔段施工方法研究](#)
- [15. 色彩基础理论研究](#)
- [16. 造林的理论基础探究](#)
- [17. 具有二重零特征根的平面向量场分岔分析](#)
- [18. 2.基础理论](#)
- [19. 论审计的理论基础](#)
- [20. 医事刑法的基础理论](#)
- [21. 论目录基础理论\(下\)](#)
- [22. 2.基础理论](#)
- [23. 时间永远分岔 通向无数的将来——《小径分岔的花园》导读](#)
- [24. 法学基础理论](#)
- [25. 2.基础理论](#)
- [26. 治脾法的理论基础](#)
- [27. 单一税的理论基础](#)
- [28. 浅析法治的理论基础](#)
- [29. 推进实践基础上的理论创新](#)
- [30. 论刑罚的理论基础](#)
- [31. 林业碳汇基础理论](#)

[32. 2.基础理论](#)

[33. 2.基础理论](#)

[34. 2.基础理论](#)

[35. 五说中医基础理论](#)

[36. 基于分岔理论的大型并网光伏模型探究](#)

[37. 时间:分岔与循环——读《小径分岔的花园》](#)

[38. 司法审查的理论基础](#)

[39. 股权激励的理论基础](#)

[40. 2.基础理论](#)

[41. 压合基础理论](#)

[42. 论审判监督的理论基础](#)

[43. 计税基础的理论分析](#)

[44. 2.基础理论](#)

[45. 现场管理的理论基础](#)

[46. 论快易网球的理论基础](#)

[47. 分层教学的理论基础](#)

[48. 一维向量场合时变参数的非完全分岔](#)

[49. 具有二重零特征根的平面向量场的分岔分析](#)

[50. 电子证据的基础理论](#)