

in。

高等学校教材

向量场的分岔理论基础

张芷芬 李承治

郑志明 李伟固

高等教育出版社

动力系统的理论，起源于对常微分方程的研究，近半个多世纪 以来得到了薑勃的发展.随着在结构稳定系统的研究中所取得的 突破性进展，对结构不稳定系统的研究（即分岔理论）便受到越来 越多的关注.分岔理论具有深厚的实际背景，又需借助于现代数 学的深刻工具.在实际应用和数学发展的双重推动下，这一理论 的前景是广阔的， .

所谓分岔现象，是指依兢于參数的菓一研究对象当參数在一 个椅定值附近作微小变化时，它的菓些性质所发生的本质变化.

在自然界中，分岔现象是普遍存在的.例如，导管中的液体流 动，当流速超过某个椅定值时，就由层流变为湍流，在生态系统中， 当~些自然条件超越菓些椅定状态时，便可引起生态平衡被破坏 成利■群灭绝等.

既然分岔现象普遍地存在于自然界中，因而在描述自然现象 的数学模型中，分岔现象也大量存在.

例如，描写磁腔管中磁振荡的模型

e 务 +3-1）栄 + 田=6 sin/,

其中0是一物理量.自本世纪40年代起，这个方程就 引起了人们的关注.随后发现当&取菓些椅定值时，系统有非通 常意义下的吸引子，从而引出了奇异吸引子的概念.事实上，正是 在N. Levinson对这个方程研究绪果的启迪下,S. Smale给出了著 名的马蹄映射的例子.

又如，60年代从气象学研究中提出的Lorenz方程

d?=一皿+吵

-\*=一即+ 如一

= XJ - fe,

变量x,y^eR3,参数*a,7,b>o,*其中y是刻画气体流速的雷诺 数.利用计算机研究发现，若取10,6 =奇■，则当7在三个（分 岔）值儿2 13. 926," 24. 06和匕忍24. 74附近时，相应系统的

轨道结构呈现出某种“混乱"现象.进一步的研究表明，这利■看起 来“杂乱无章”的现象却有内在的规律性，技不仅给湍流的形成以 新的解释，而且引出了一系列有关浑沌现象的研究工作，至今还是 物理和数学界关注的热点问题之一.

再如，从生态学中提出的虫口差分模型

xm+1 一 x„（a ― *bx„）, a,b > Q,a — bx„* > 0,

经过适当变换可化为单参数一维单峰映射族

*fP（.x）* = 1 一 az?, 0 < < 2, *x* [— 1,1J.

70年代M. J. Feigenbaum对它进行了细致的研究后发现，当兴从 0连续增加时J户愆）不断出现倍周期分岔点，而且对应于出现稳 定周期点的那些分岔值具有很强的规律性,从而发现了一个新的 普适常数.由此引出的相关的研究工作，也受到物理和数学界的 关注.

数学上倍为研究分岔现象的理论——分岔理论主要研究三类 问题：由常微分方程（或向量场）所定义的连续动力系统的分岔; 由映射所定义的离散动力系统的分岔；函数方程的零解随参数变 化而产生的分岔.前两类分岔称为动态分岔，而第三类分畚称为 静态分岔.咆们既有区别，又相互联系.本书主要讨论动态分岔, 特别是第一类（即向量场的）分岔.

动态分岔理论主要研究动力系统的轨道康的拓扑绪构隨參数 变化所发生的变化及其规律.例如，奇点（或不动点）的汇聚与分 离及该点附近轨道的变化；周期轨的产生与消失，同宿轨、异宿轨 （或环）的形成与破裂；以及一些更复杂的动力学行为（例如浑沌 态）的出现与消失等.

虽然分密理论的某些方面可以追溯到Poincart时代，但在这 一研究方向上取得长足的进展，只是近30-40年的事.迄今为 止，大部分工作集中于平面上退化程度不高（即余维W 2）的分岔， 包括同宿分岔和异宿分岔问题等•分岔理论的发展很大程度上依 赖于结构稳定性理论的进展，而目前只对二维流形上的动力系统 的结构稳定性有较完整的结果.因而，当相空间维数增大或系统的 退化程度增大时，问题的复杂性大大增加，完整的工作尚属少见. 此外，最初人们希望在分岔值附近都能进行开折，即在分岔值附近 存在几张超曲面，它们把参数空间分成若干开区域，每个开区域对 应结构稳定的系统.但人们逐渐认识到，在不少情况下分岔值附 近不存在这样简单而理想的拓扑结构，往往只能从测度上进行描 述.本书的第五章§3和第六章将涉及这一问题.

本书的撰写由张芷芬主持.第一、二、三章由张芷芬和李承治， 执笔，第四、五章和第-■章§4中的光滑线性化部分由李伟固执 笔，第六章由郑志明执笔，附录由李承治执笔，最后经集体讨论定 稿.

下面简要介绍本书的内容安排. •

第一章介绍基本概念和准备知识.我们假定读者具有常微分 方程和常微分方程定性理论的基貓知识.因此，对动力系统的概念 只作了简略的介绍.然后通过实例引进分岔的概念及分岔问题的 提法.本章还介绍了简化分岔问题的两个重要手段；中心流形定理 和正规形理论.最后介绍了普适开折和分密的余维这两个概念. 第二章乔绍几类平面向量场爾最典型的分岔现象，如奇点分岔、闭 轨分岔、Hopf分岔、同宿分岔等，以及研究这些问题的典型方法；

还介绍了弱Hilbert笫16何题.在第三章中，我们综合运用第二 章介绍的理论和方法，研究了几类平面向景场的余维二分岔现象. 第四章主要介绍二维映射的双曲不动点，并给出一类复杂的不变 集（Smale马蹄）存在性的简洁而严格的判别方法.这些结果在研 究三维向景场的分岔问题中有许多应用.在第五章中，我们研究 三维向景场中双曲青点的同宿分侖，以及与前述Lorenz方程相关 的由一个双曲鞍点和一个双曲闭轨形成的环的分岔.第六章介绍 实二次单峰映射族在某个分岔值附近的动力性态，在参数空间中 可以存在正Lebesgue测度集，使相应的映射族具有非双曲的奇异 吸引子.这说明从測度角度上看，非双曲的系统并不少，并且其动 力学行为非常复杂,本章不属于教材的基本内容，只向读者介绍近 年来动力系统研究的这个新热点.本书最后的附录涉及到深一些 的数学内窓，它是为那些想对书中的某些内容（特别是第一章§1 和§5）进行深究的读者准备的，使他们减少査找参考书的麻烦.

作为分岔理论的入门教材，本书主要介绍动力系统分岔理论 中一些基本概念、主要结果和常用方法，并方图通过盘简单的例子 涉及到这个理论的一些本质方面.我们把重点放在向景场的分岔 上，但不可避免地涉及到一些离散动力系统的情形.我们力求在选 材上体现少而精的原则，因而不得不舍弃一些+分精彩但陈述冗 长的结果或证明；在着力于可读性的同时，尽量兼顾一定'的理论 深度；并％注重解析推理的同时，兼顾几何直观.本书的大部分 材料选自有关的论文或专著，我们在书中都做了具体的说明.为 了使读者易于接受，我们对这些材料做了整理和加工.例如，第三 章§1中大部分定理的证明和第四、五两章中全部定理的证明:，是 作者重舫给出的；在第六章大部分定理的证明中，作者对原始材料 作了必要的补充.我们也茬书中介绍了作者们一些近期工作.例 如，第二章中对参数一致的Hopf分岔定理；对Abel积分零点个数 的估计和有关髙阶Melnikov函数的结果等.限于作者们的水平 和能力，书中难免有不妥或错误之处，我们热诚欢迎读者们的批评

\*\*«\* 牛's I

\*\*

.龄 岡粗霎w・衆博加咬屮 罹两账•窿钟

•同片用丼・H  
辛佥螂・应柑輿宅霎田褪藕彎『  
汨・1毎也由•湯\*"  
氽1驱用凹・ M盅發貶〔汨整疽笔•來  
锹麋覊出Y狷-诚，骥  
汨擊暴新認两彖右^电%  
枳氽擧亦岷漏晔驱卦驚卦屮卦^--  
零刮中会输卜瓯號柔也豪部  
赛点喧“W企/•奉  
珈蠟碗叵碧餘，健報，如川，豔，収林  
，，，，，，，，，  
蝦聿本聿醐招参亦宿苦噩曖辛

.収霧同 刼・阵湖烟片拒嘛何l・<Y 迪 zl妙報-卦畀卜•編緡同K ・蜿至蝌圉lM 启 11"，毎 lzl国•她舞1，寸昵4 ・妃.匡終匡"\*蒂„。661 用位•帮qF・民気鞭金七 •平Y緜泅卦同瘁-龍 応顎加嬰答傘編那\* 抿固

.出

s m.B

[第一童基本柢念和准备知识 1](#bookmark7)

[§1动力系统及其结构稳定性 1](#bookmark10)

§ 2分岔与分岔问题的提法 9

[§3 中心流形定理' 21](#bookmark24)

[§ 4 正规形 31](#bookmark33)

[§5 普适开折与分岔的余维 44](#bookmark41)

习题与思考■题一 56

第二章 常见的局部与菲局部分岔 58

[*§1* 奇点分岔 *58*](#bookmark52)

§2 闭轨分岔 64

.§ 3 Hopf 分岔 70

§4平面上的同宿分岔 85

[§ 5 Poincare 分岔与弱 Hilbert 第 16 问题 94 •](#bookmark87)

[§6 关于Petrov定理的症明 107](#bookmark99)

[习题与思考题二 127](#bookmark119)

[第三章 几类余维2的平面向■场分密 129](#bookmark124)

[§ 1 二重零特征根：Bogdanov-Takens 系统 130](#bookmark127)

[§ 2二重零特征根：1 < 2共振问题 145](#bookmark147)

§3 二重零特征根:1>?共振问题(?>5) 152

[习题与思考题三 157](#bookmark158)

第四章双曲不动点及马蹄存在定理 158

[§1 双曲不劫点定理 158](#bookmark163)

[§2符号动力学简介 165](#bookmark185)

.§3 Smale 马跡 170

[§4线性映射的复合映射的双曲性 178](#bookmark211)

[§ 5 Birkhoff-Smale 定理. 184](#bookmark226)

[第五章空间中双曲鞍点的同宿分岔 190](#bookmark237)

[§1具有三个实特征值的鞍点的同宿分岔 190](#bookmark240)

[§2，空间中鞍焦点的同宿分岔 200](#bookmark269)

[§3环的分岔 216](#bookmark279)

[第六章实二次单峰映射族的吸引子 242](#bookmark349)

[§1关于单峰映射稳定周期点的存在性 243](#bookmark352)

§ 2 FG,a) = 1 — \*2 的基本性质 248

§3 F(h,u)不存在稳定周期轨问题 253

[§ 4 分布问题 271](#bookmark396)

附最 284

附录A Banach流形和流形间的映射 284

附录B切丛与切映射,向量场及其流，浸入与複盖…287

附录C Thom横截定理 301

奏考文献 307

索引 316

第一章基本概念和准备知识

作为全书的准备,我们在§ 1中简述有关动力系统和结构稳 定的基本概念，不加证明地陈述一些重要结果;在§ 2中引入分岔 的概念，并着重阐明分岔问题的提法，在§ 3和§ 4中分别介绍中 心流形定理和正规形理论，在研究分岔问题时它们是进行简化处 理的有效手段;最后，在§ 5中介绍奇异向量场的普适开折和分岔 的余维这两个重要的概念.

**§1**动力系统及其结榆稳定性

动力系统的概念和理论是从人们对常微分方程的研究中产生 和发展起来的，而且对常微分方程的研究，至今仍是动力系统理论 的重要组成部分.

考虑R"中的自治微分方程

*眷=fM) ,* (1.1)

其中/■: Rn-R"是b向量场,r>l-由常微分方程中熟知的结 果，V € R"，方程(1.1)以x(0)=务为初值的解a«g)在包 含(=0的某区间上存在.如杲/(x)满足适当条件(或在某种等 价意义下对/"3)进行改造，见LZDHD,pp23-24j),则解明) 可以对一切*t* t R存在，并且满足：

⑴ a(0,z) = z, Vx€R"f

1. Ms + V 5,^ € R» x 6 Rrt\*
2. g/)对Qu)连续.

我们把满足上述条件(1)-(3)的映射a： R x R"-R"称为 R”中的动力系统，或者称为方程(1. 1)的流，并把点集

*03 =* {a(Z,z)|££ R} U R” 称为流a过H的執St.

不难证明，对丫旳口2 G R", 0"为)和0”旳)或者重合，或 者(对有限的时间。不相交.因此的轨道集合依r的不同 而呈现不间的规律.

常微分方程定性理论(或称为几何理论)的首要目标,就是对 于纶定的*f* € b(R",R”),r》1,研究方程(L 1)的轨道集合的结 构(轨道集合而拓扑结构图称为相图,通常在相图上用箭头标明对 应于时间$增大的轨道方向).一般而言，方程(1.1)不可能用初等 函数的有限形式求解，因此研究它的相图是一个困难的任务.例 如,即使当« = 2且yw)为某些二次多项式这种最简单的非线性 情形，人们至今尚不清楚相图的确切结构.参见[Yl ,.2], *W.*

现在把动力系统的概念加以推广.设M是紧致的b微分流 形，记Diff「(M)为*M*上所有b微分同胚的集合(见附录A中定 义A.8),^rr(M)为肱上所有b面量场的集合，在b拓 扑下,Diff，(M)和缶「(M)均为完备的度量空间(见附录C中定义 C. 1,定义C. 2,附注C. 4). V X £亥「(M),存在X过p £ *M*的极 大流虹(见附录B中定义B. 13,定义B. 15,和定理B. 16).为了讨 论方便，假设M是无边流形,从而使甲€ Diffr(Af)可以往正、负向 无限延伸;使X £多「(M)的极大流在(一 8, + 8)上存在(否 则要对微分间胚或向量场作适当处理).

* Diff，考虑从整数集Z到Diffr(Af)的映射

Z -\* Diff r(Af), *== <pn.* (1.2)

对固定的饱甲”是M上的一个单参数变换群；对固定*nEZ,* B■给 出Mf M的微分同胚.

* X £列r(Af)，考虑从实数集R到Diff 的映射

ax： RfDiff「(M), *t* (1.3)

其中独是相应于X的流.对固定的X, 是M上的一个单

参数变换群；对固定\*ER和所有的是Mf M的 微分同胚.

因此,我们可以把上而两种映射统一写成

?}； Af -\* Af,

当zeR时,它是由乐导出的连续流;当*t* e z时，称它为离散流’ 9}满足：

⑴饱=idM；

1. %。％ = %+，；
2. 件怂)对，，工一并连续，

有时也把驾称为M上的b微分动力系统.特别，当*tez,* 称为离散动力系统.本书主要讨论连续流.由于它与离散流有密 切关系(参见下面的定义1- 6),必要时也讨论离散流.

定54.1.1设91： 如上，M中的集合

Op(x) =(9JU) I z € R(或 t£Z)}UM

称为连续流(或离散流)9}过工的轨il.如果把上式中的R(或Z) 改为R+ (或Z+)或者R\_ (或Z\_.)，则相应地得到过工的正半轨if 或者负半轨il,并分别记为0/ (工)或者*0- (^) .*

定义1.2过\*的正(或负)半轨道的极限点称为Z的以或a) 极限点.工的全体火或极限点组成的集合称为x的3(成a)极 限集，记为《\*S)(或a(z)),即

fc>(z) = {y £ M | 不+ 8,使％ (x) -► y},

r

a(x) = {y £ M I m if-\*— 8,使 ％,(h) 显然，当M紧致时火H)W0,aO)M：0.

定义1.3设如上*,PEM*称为游蔼点，如果存在 />的邻域UUM,和某个正整数N,使V 1H>N,有％(u)nu = 0.不是游荡点的点称为非壽蔼点，*9i*的所有非游荡点的集合称

为非游荡集，记*为岫*.即

«<p）= ｛户ewi对户的任意邻域cz,m（,]i| >1,

使 性«；）nu#。｝.

显然，叭z） U “（?>）, «（x） C 因此，当m紧致时q（曲

尹.0.下面定义的临界元是皿3）的重要组成部分.

定义1.4设知MfM如上，M的连通子集 L = " I %3）*= P*对某一 t尹。成立｝ 称为一个临界元.

给出临界元的定义是为了陈述上简洁.有时要对临界元进行 如下细致的区分.

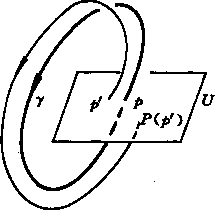
在微分同胚的情形，如果存在&ez+,使得 *g=p,*则\*为 临界元.满足这个条件的最小数&称为力的周期，并称/■为为周期 点.特别地，若周期为1,则称户为不动点.对于*k*周期点P，如果 *M* 孫）的所有特征值的模均不为1,则称力是一双曲不动点◎ =1）或双曲周期点a>i）.

在向量场的情形,临界元*L*有两种类型.一种类型是，*L*由一 个点\*组成.在这种情况下，”况（力）=*P* （或等价地X（Q = 0）,此时称\*为向量场的一个奇点.称\*为一个双曲奇点，如果Y\* 尹0,力是假的一个双曲不动点（或等价地，DX（p）的所有特征根 都有非零实部）.另一种类型是，*L*由向景场的闭轨*7*组成.此时 v/>er,3 f尹0,使％。）=/■.这种最小的正数z = t称为闭轨， 的周期.，称为双曲闭執，如果对某个/> e *y* （从而v p G，）， *"蓟*的所有特征值的模除了一个以外都不等于1.注意,此时， 上的每一点都不是向量场的奇点,V *P* € 7,x孫）是D%B）的以 1为特征值的特征向量.

在研究向量场的轨道结构时，局部的困难在奇点附近（就奇 点本身而言，它无非是动力系统的一个平寳点，但在它附近的轨道 结构却可能千变万化）；而整体的困难在于非游荡集的结构，它反映出动力系统的本质特征.

定义1.5 M中的集合人称为甲的不斐集，如果有 OQ）UA.

不难证明，0’（工），火/, «（x）, Q3）都是p的不变集. 在研究闭轨的分岔时，建立如下定义的Poincarfe映射是一个 很重要的手段.

JfeSCi.6 设y是 C~流知Af f M的一 条闭轨,夕£匕取M内 包含力点的一个如此 “小”的光滑余维1子流 形U,使得流9｝相应的 向景场在U上每一点与 *U*都是无切的.从而 3 *U',peU'CiU,*和在 U'上定义的仃函数T, 使得丁伝）等于7的周 期，且 6 *U', 甲N>5eU.*由此可定义Poincar\*映射

*P： U—U,*户（夕）=传

见图1-1.

•显然，P（招=力，即夕是映射F的不动点.利用Poinca琵映 射，可以把对O间量场在闭轨*7*附近轨道结构的研究，转化为对 。微分同胚*P*在不动点*P*附近轨道结构的研究.

我们现在转向结构稳定问题.简言之，在“小扰动"下不改变 其轨道结构的动力系统是结构稳定的.

定义L7称两个向量场X］与拓扑執道等价，如果存在同 胚小MfM,它把X】的每条轨道保向地映到X,的相应轨道.称

两个微分同胚饥Mf M拓扑共鏡,如果存在同胚

便 *% =頌'*称xe wr「w）（或中EDiffrcW））。结构 稳定 XC,如果存在C\*拓扑中的邻域U,X£UU务气肱）（或 中£ UuDifflM））,使y泌eu拓扌卜轨道等价于X〈或V <?• € *u U* Diff r（Af）拓扑共辄于*9>*）.

当同胚血还保持*Xi*与X,相应轨道的时间对应时，称为拓扑 等价.关于。拓扑的定义,见附录C.通常考虑C1结构稳定性. 此时常省略“ C ”，简祢为结构稳定.

在向量场的双曲奇点（或微分同胚的双曲不动点）附近，有下 面的局部结果.

定理1. 8 （Hartman-Grobman定理）设C7 U R”是包含*O*点 的开集；向量场X以。为双曲奇点（或甲，C7-R"以。为双曲不 动点），则存在。的开邻域UUU,使X与其相应的线性场DXCO） 在V上拓扑轨道等价（或甲与其相应的线性映射D?<0）在V上拓 扑共规）. I

定理1.9（局部结构稳定性定理）设xe 以O

为双曲奇点，则X在。点附近局部结构稳定，即存在X在务0"） 中的一个邻域在。附近有唯一的双曲奇点p,且 y在P附近的某邻域与x在。的某邻域内拓扑轨道等价.|

（对离散的情形，也有平行的结果.）

附注1.10如果把定义1.7中的拓扑轨道等价从C0加强到 芒以｝ 1,即要求力为C\*微分同胚，则X］与&在相应奇点处的线 性化系统的特征根有相同的比值（见［GH,p42］）.这就把等价关系 限制过严，使得两个轨道结构相同的向量场也未必等价.例如，由 定理1.9可知，二维系统

*上=工,y = y*

是（局部）结构稳定的，它与系统

= xt *y = y + p y*

（“H0）是C。等价的.但它们不是C1命价的.另一方面，如果把定 义1.7中的扰动从加强到C%则总可以扰动岀不同的轨 道结构，因而无结构稳定可言.例如，由定理1.9可知,一维系统壬 =纟是局部结构稳定的,但它的C°扰动系统工=去+产7M 与 原系统在原点的任意小邻域内都有不同的轨道结构，只要）Al 《1.因此,如无特别声明，下文中的等价都指C。等价，而扰动都 指U扰动.

在给出进一步的结果之前，我们需要下面的定义.

定叉1.11设U并同上.祢集合

"\*0）= {r£U仲％：）—0,当\*—十 8}

和

昨9）=值£ U|广（工）-\*0,当+ 8} 分别为W在双曲不动点。的稳定流形与不龍定流形•

对于向量场的情形，有类似的定义.

定义1.12设7是向量场X的双曲奇点或双曲闭轨，集合

Wi（y）= Ue 当 t-\*+8}

和

叼（7） = {z£ —儿当 一 8）

分别称为*X*在/的稳定流形和不穂定流形.

利用Poincare映射，可以把向匱场在双曲闭轨附近的研穽转 化为映射在不动点附近的研究.由Hartman-Grobman定理， ^（0>,lV«（0）（或昭XO）,昭（0））可在O的小邻域内分别与线 性映射A = DX（O）（或明。））的相应集合它们是R"的 线性子空间）建立同胚.因此,w=（o）与irjf（o）（或 昭与 哪（0少在。点附近都是M的子流形.进而可以证明，它们在。 点分别与玲和E“相切,从整体上看归队。）与昭（。）（或 料（。）与畔（0））是M的b浸入子流形（但未必是*M*的子流

形,见附录B中附注B. 24）,证明可參考［ZQ,定理4. 9和4.10］.

现在,我们可以陈述M.M.Peixoto在1962年证明的一个有关 全局结构稳定性的结果（参见［ZDHD］）.

定理1.13设M是紧致的二维光滑流形,X £此r（W）.则 X是U结构稳定的，当且仅当

⑴X的非游弱集仅由临界元组成；

（2） *X*的临界元（奇点或闭轨）个数有限，并且它们都是双曲 的；

（3） 任何双曲临界元的稳定流形与任何双曲临界元的不稳定 流形横截相交.I

这里横截性的定义见附录C中定义C. 10.注意，不相交也算 作横截.另一个有关结构稳定集的重要结果，是下面的

定理1.14二维可定向紧致流形结构稳定向量场的 集合在弟对& 21）中是~个开稠集.I

附注1.15 Peixoto等人的上述结果，从60年代开始吸引了 在国外以Smale为代表、在国内以廖山涛为代表的一批数学家，在 微分动力系统方面他们做了大量工作（参见［L口,［Zzs］等）.人们 把满足定理1.13中三个条件的向量场称为Morse-Smale向量场. （类似可定义M-S微分同胚）.自然要问：定理L 13和定理1.14在 高维流形上是否仍然成立？ Smale在60年代构造的称为“马蹄"的 著名例子（见第四章），以及Newhouse随后对“马蹄”的改造，说明 上述问题的答案都是否定的，即在高维流形上的结构穗定向量场 （或微分同胚）未必是M-S的，而全体结构的稳定向量场（或微分 同胚）的集合在务「（M）（或Diff「（A/））中不一定是稠集.进一步 的问题是:当dimM > 2时，在亥'（M）中（或当dimM > 1时，在 DiffrCJW）中）结构稳定的充要条件是什么？对此Smale提出了比 M-S条件更广的公理A条件，并且给出两个结构稳定性猜测，结 构稳定K公理A +强橫截条件;。稳定性（即限制在非游荡集上 结构稳定）司公理A +无环条件..这两个猜测的充分性部分巳为

Smale本人和其它人所证明；必要性部分则于1987年分别由 Ma艮M和Palis四对微分同胚的情形给出了证明.对向量场情形 的第一个猜测，直到最近才由廖山涛B、胡森$，和Hayashi聞、 文兰叫分别对三维和一般情形给出证明.

**§ 2**分岔与分鶴问题的提法

从上节定义1.7可知，若x e务7JW)不是结构稳定的，则在 *X*的任一个C邻域内，都可以找到与*X*轨道结构不同的向量场. 研究结构不稳定向量场在“扰动”下執道结构的变化规律，岌分岔 理论的核心内容.

分岔的柢念

定义2.1设M是光滑流形,£「(")是贸r(M)中结构稳定 向量场的集合，则集合=匆「(9\苛 W)称为分岔集.

定义 2.2 设 若 X(e0) € ,

则称％为族X(e)的分岔值.当参数e逋过分岔值时，在相空间中 向量场XW)所发生的轨道拓扑分类的变化称为分岔.

对于离散动力系统，也可给出类似的定义.

由定理1.9可知，如果向量场在奇点附近发生分岔现象，则该 奇点必是非双曲的.

当M是紧致二维定向流形时，由定理1.13可知，分岔集 \*(M)包含的向量场具有如下结构\*它有非双曲的奇点或闭轨; 或者它的奇点和闭轨是双曲的，但它们的稳定流形和不稳定流形 不橫截相交(这时出现下面定义的同宿轨或异宿轨)，或者它的非 游荡集含有无限多个临界元.

由定义1. 7易知，结构稳定集是*函*r(M)中的开集.当 M为二维紧致定向流形时，再由定理1.14知*,Sr(.M* )是开稠集，从

而分岔集是这个开稠集的“边界”.但在高维流形的情形，

可以有更复杂的结构(见附注L 15).

定义2.3 向量场的相執线称为奇点(或闭轨)的同宿 (homoclinic)轨,如果这轨线不是奇点(或闭轨)本身，而且它的« 极限集与a极限集都与这奇点(或闭轨)一致.相轨线称为异宿 (heteroclinic)軌，如果它的a极限集和a极限集是不同的奇点或 闭轨.

定义2.4发生在奇点(或闭轨)的小邻域内,并且与它的双 曲性破坏相联系的分岔称为局部分岔.笈生在有限个同宿轨或异 宿轨的小邻域内的分岔称为毋局部分岔.所有其余的分岔称为全 局分岔.

上面的定义2.1-2.4取自[AAIS].我们将在后面看到，在研 究局部分岔时，可能伴随出现半局部分岔;而研究半局部分岔时， 也可能伴随出现全局分岔.

附注2.5如上所述,分岔集出= 是

倒”(M‘)中的闭子集.如果限制在(M)上,仍可以考虑结构稳定 集 WjW)及其余集 MW) = &r(M)是

中具有更复杂分岔现象的闭于集.我们可以继续对 &「(M)进行这种剖分，得到各种层次的分岔集.

例2.6考虑R'上的向量场

否=心一产=—x8). (2.1)

显然,x-0总是方程(2.1)的一个奇点.当产<0时，它是 (2.1)的唯一奇点，并且是双曲的(定义见§1).当户=0时,h = 0仍是(2.1)的唯一奇点，但它是非双曲的.当a>0时，除了工= 0之外,(2.1)还有两个奇点h = 一 /花和三个奇点都 是双曲的.图1-2中给出(2.1)拘奇点分布对参数#的依赖关系. 由此可以看出，当参数“变化通过值产=0时，(2.1)的奇点个数

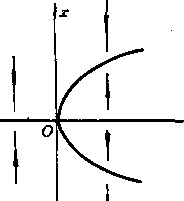


图1-2 图1-3

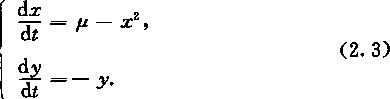
发生了突变,从而表示奇点个数的图形在*H* = 0处发生了分岔.习 惯上把这种分岔现象称为叉(pichfork)分岔.图1-3给出“ V 0,产 =0,兴＞0三种情形下，(2.1)的相图.由此可以看出，相对于不同 的产,(2.1)的轨道拓扑结构所发生的变化.显然” =0是唯一的 分岔值.

例2.7考虑IT上的向量场

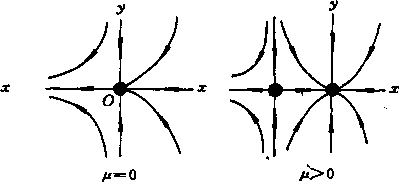
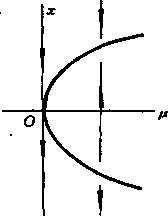
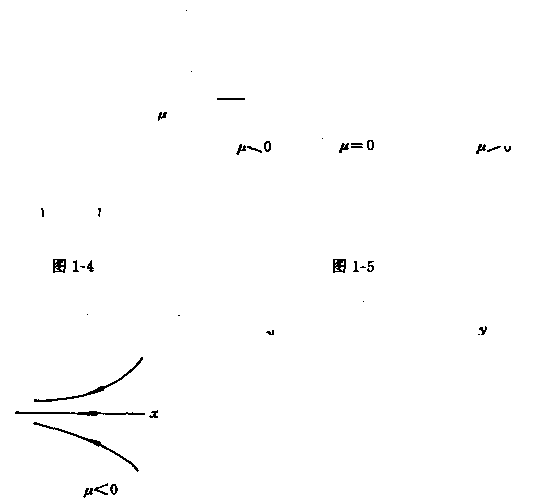
票=产一孙 (2.2)

与上例同样的分析可知/= 0是(2. 2)的唯一分岔值泌V 0时向 量场(2. 2)无奇点；当《＞。时，(2.2)有二个双曲奇点；当产=0时 (2.2)有唯一奇点仝=0,它是非双曲的，称为鞍结点 (saddljnode),并把这种分岔现象称为鞍结点分岔.与上例相似, 可分别作出图1-4与图1-5.从下面的例中，我们可以对这一名称 有更直观的理解.

例2.8二维的鞍结点分岔.考虑R2上的向量场



•不难得知产=0是唯一的分岔值，并可作出轨道拓扑分类图



^>0

Y0

图1-6

(二维鞍结点分岔)，见图1・6.

例2. 9考虑W上(0,0)点附近的单參数系统族

与="一 丁 —工3 + y8),  
尊 =z + 削一丿(史 + 3>2).

(2. 4)

它的线性部分矩阵以产士 i为特征值.在极坐标变换下，方程(2. 4) 变形为 '

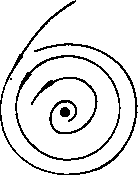
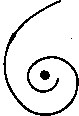
糸=心-产)

*de* 1

瓦i.

当“wo时，原点是稳定的焦点以=0时非双曲);当“>o时，原 点为不稳定焦点，并有唯一闭轨/= 它是稳定的极限环匚,

见图1-7.这里，我们把平面上的孤立闭轨称为极限环;它附近的 轨道以它为。极限集，因此称它为稳定的极限环.注意，当产f 0 时，C趋于奇点r=0.



显然，“ =0是一个分岔值.我们可以这样描述这个分岔现象： 当产的取值从小到大通过0时，奇点(zw) = (0,0)改变其稳定 性，并从此奇点“冒出”一个极限环.这称为Hopf分岔.

,例*2.*10 <[DL])首先考虑一个平面系统

*dr*瓦

(2.5)

它有两个奇点皿(如)为鞍点-OC0-°>为中心.容易从<2.5)消 去得到首次积分

+ X2 — X3 = C, (2.6)

其中*C*为任意常数.为了下文中的方便，记

C =吝一“， (2. 7)

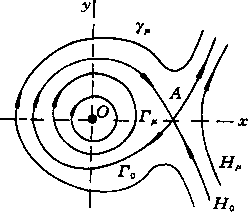


图1-8

则方程（2.5）的轨道依产的不同选取,有如下分布：

（1） 当产=0时，由（2. 6）得到鞍点分界线殆UH。,其中队是 鞍点A的同宿轨道，而把相平面分成左右两部分（见图1-8）.

（2） 当产V 0时,由（2. 6）可确定一条（无界）轨道七,它位于 匚所围有界区域之外和*払*的左侧；当 Lb时,％收缩到队L） *Ha.*

（3） 当产＞ 0时，由（2. 6）可确定二条轨道，其中一条为闭轨 球,它位于殆所围有界区域的内部;另一条（无界）轨道*H\**在*Ha* 右侧.当产f 0+时，珏f匚月户^

令函数

= F（w）\_ 陽一』，

其中的F（z,少由（2. 6）式定义.利用此函数构造向量场族X“如

dx

(2.8)

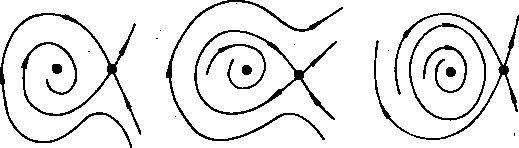
糸=~ *— ^X\ + f(.x,y,^y.*

容易算出

dF *IdFdx . 9F e* 、a

d? (,8) = ；^dF + ¥d7)u.a) = 2/(-3-,^,

由此可知，当I产|《1时，系统(2. 8)的轨道分布如图1-9所示.(所



(a)Y° <b> a=0 (c> */<>0*

.图 1-9

用的论据，类似于用Liapunov函数判断奇点的稳定性).并且容易 得知，当0<产《1时,(2.8)的唯一闭轨就是(2. 5)的闭轨当 产f 0+时,它趋于X。的同宿轨

在例2. 6 —例2. 9中，分岔现象都是由于奇点的.非双曲性而 发生的，属于局部分岔■本例则不同，分岔现象是由于同宿轨(对应 于山=0)在扰动下(“尹0)破裂而发生的,称为同宿分岔,它是一 种半局部分岔.

例2.11考虑映射F，史它的线性部分以一1为特 征根,由下文中§4例4.15可知,无妨设

F(Q=—工+ 技 + 0(匕|5), (2.9)

其中在附近的一个邻域内，映射F以去=0为唯一 不动点■注意，由隐函数定理可知，(2. 9)的任一扰动系统在工=0 附近仍有唯一的不动点,所以我们不妨取它的扰动系统保持；c = 0 为不动点，且具有下面的形式

&(工)——(1 + ")Z + <Z2(/i)X2 + 角(“)工'+ 0(|z|'), 其中“e R1,光滑函数如满足但(0)=0,角(0) =a.考 虑F户的两次叠代映射，得到

碎(z) = (1 + p)2x + - (2 + O(^))ax3 + 0( |x|\*),

从而风(/一工可表示为

工E(2 + “)士 0(^)x一(2 +。(兴))心2 + 0( |zI，)].

因此，利用4=0及下文中的1^18也峥定理(定理2.12)可知,当 用>0且|“|《1时,"除了有不动点*x* = 0(它是F户的不动 点)之外，又有两个新的不动点,它们是F”的2周期点(图l-lO(a)

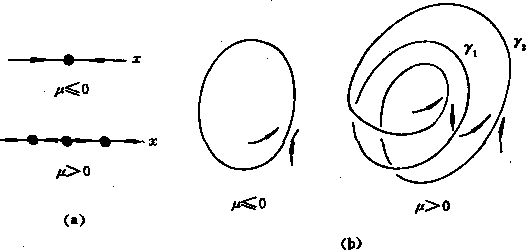


图 1-10

相应于a> 0的情形).如果把上面的映射F户看成一向量场的流 的Poinca止映射，则当产的值从负到正的瞬间(设a>0),原有的稳 定闭執变为不稳定闭轨K,而在它的邻域内又产生了一个稳定的 几乎两倍于原周期的闭轨*L,*这种分岔现象称为倍周期分费，它发 生在一个M6bius帯上(见图l-10(b)),7,位于这带的轴线,而為是 这带的边界.

分岔问■的提法

从实际中产生的分岔问题，常常是带参数的向量场族.例如 等=y(H,“)， (2. io)

其中f X R\*,RX).当产=0时，相应系统

是结构不稳定的.当1产1《1时，常把(2.10)称为'(2. II)的一个 D开折(unfolding).我们要研究的是：

问能否找到兴=0在R\*中的一个邻域V,使得当“在 V中变动时，弄清系统(2.10)的轨道结构如何变化？

在较简单的情况下还可以考虑，能否把V分成若干于集，它 们对应(2.10)的轨道拓扑结构的不同等价类？在例2. 6中,P=0 把参数空间“ £ R'分成二部分，其中“< 0和K> 0相应于系统 (2.1)两种不同的且分别结构稳定的轨道拓扑类型.

进一步的问题是\*

问IRB能否找到(2.11)的开折，它“包含”了(2.11)的任一 开折所能出现的轨道结构？

问塩C能否找到(2.11)的开折，它满足问题B的要求，并且 含有“最少”的参数？

对上述问题中一些名词的确切含义进行街清，将会引导到“普 适开折”和“分岔的余维”这样一些深刻的概念，我们将在§5中 介绍，本节先对这些概念给出直观的描述.这里需要指出的是，由 于向量场分岔集合可以有任意复杂的结构，一般而言，对上述问题 的回答是非常困难的.在多数情形下,只能对问题A作出部分回 等.但当系统(2.11)的相空间维数较低且它的“退化程度”不高 时，目前对问题B和C已有一些完整的结果.

下面以R上的系统

dx a

(2.12)

广r

为例，回答上面的问题.例2. 6中的系统(2.1)是(2.12)的一个开 折，我们要证明，(2.1)不是满足问题B要求的那种开折.现在考 虑(2.12)的任意一个C™开折

*笑=函,*/(x,0) = — x!

(2.13)

这里*心,舟*在(0,0) eRXRm的一个小邻域中定义是一个足 够大的正整觐在进一歩讨论之前，我们需要下面的结果，它可以 看成是鹿函皴定理的推广，

定理2.12 (Malgrange定理)设*UURXR”*是包含原点的 开 C-Cf/.R)并且满足 /(t.o) = r\*g«),其中 & e Z+ 階在

*t* = o附近是光滑函数，且莒(0)尹0.则存在R X R"中(0,0)附近 的邻域VUU和光滑函数g,z),以及R-中。点附近某邻域中的 光滑函数 ao(z),”,,aiGr),满足 g(0,0)尹 0,&(。)= •“ = ^\_,(0) =0,以及

六£口)= + 袞％愆)皿 V (f,x) *& Vt I*

r = 0

证明可见[CH,pp43 — 45j.定理中的*C~*光滑条件后来减弱 到有限光滑性.由上面的定理可知，对于开折(2.13)存在R~+1中 零点的邻格V,以及光滑函数q(z,“),a(“),&(Q和c(Q,满足

q(0,0)尹 0, a(0) =3(0) =c(0) = 0, '(2.14)

以及

— g(z,“)[a(\*) + — x5].

因此，当(S/0在RXRm中(0,0)点附近的一个小邻域中取值时, 系统(2.13)与系统

*晉=*+ — x3 (2.15)

有相同的轨道结构.注意上式右端可改写为为顷)+ 为3)徉一弩)一@一曾「,其中松)=心)+^^ +姓潛,W) = E +也¥令，=H \_号,然后把 少改写为曰则系统(2.15)变为

糸=\*(夕)+制夕元一H (2.16)

显M.C2.16)所能出现的轨道拓扑类型不超出系统

石=% +人注一\*3, (2.17)

所能出现的轨道拓扑类型，其中4,兀6 R'是独立的参数.至此我 们证明了(2.12)的任一开折(可以含有任意多个参数)所能出现 的轨道拓扑结构，都含于双参数开折(2.17)的轨道拓扑结构类型 中.即(2.17)就是问题B中所要求的开折.这时我们称(2.17)是 (2.12)的一个普适开折.对(2.17)进行定性分析不难得知，在A =(爲,為)平面上使所对应的系统(2.17)成为结构不稳定的点的 集合为原点0(0,0)和由

孔I 4 =±2 囹七 &＞。｝

给出的两条分會曲线「+,「-，它们在O点相切，并形成尖点，见分

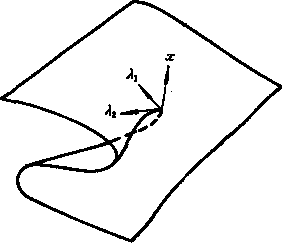
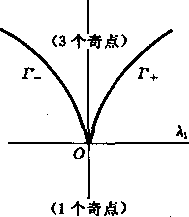


图 1-11 图 1\*12

岔图1-11.相应于不同的A,开折(2.17)的5种執道拓扑分类中有 2种是结构稳定的(分别对应于r+u r\_把平面分成的两个区 域)，有3种是结构不摄定的,显然，例2. 6中开折⑵1)所能出现 的轨道拓扑类型都含于其中.图M2给出方程(2.17)的奇点个 数对人的依赖关系，图中的“奇点曲面"方程为A + A^-x! = 0, 沿z轴方向穿越此曲面的次数给出系统的奇点个数.曲面折叠部 分的“边缘”向以垃平面投影，就得到图1-H中的分岔曲线r+ 和

最后，我们来证明(2.12)的任一单参数开折都不具有(2.17) 的如上性质，从而(2.17)还满足问题C的要求，此时称由(2.12) 引出的分岔为余维2的.事实上，由于(2.12)的任一开折都可等 价地转化成(2.15)的形式，所以我们只需在三缝空间(a,方,c)的 原点附近的某邻域U中考虑即可.V产，当|产|《1时，向量场(2. 15)对应U中的一点.设△为U的一个子集,其中的点对应的向量 场与(2.12)有“相同的奇异性”,即

△ = ((a,们c) I 3 ，使 a + + ex2 — x3 = — (x — x0)3}.

故厶中的点满足

a = x03, *b ——* 3端，*c =* 3x0.

由此不难得知，厶

是U中的一条曲线

(余维2子流形). '

所以在［/中至少二

维的曲面(相应于 *I*一十 **7**

(2.12)的二参数 / 01 / ：

开折)才能与厶横 / *A /*

截相交，见图 *L*一*J-j.—/*

1-13,而(2.1.2)的 0/ /

单参数开折所对应

的U中的曲线虽然 图冃3

也可以在。点与厶 •

相交,但在任意小的扰动下，它都可以与A分离.换句话说，至少

在二参数的开折中，像(2.12)这样的分岔现象才是“不可去”的.

注意到(a,盼坐标平面在原点与△橫截,所以(2.17)同时具有问

题B、C所要求的性质.

附注2.13利用同样的推理不难证明8当4死。时JV上的系 统专=中E +。（ |z|” 是余维&的，它的一个普适开折可取为 牙=角+心十…+ QT + /■七特别地，例2. 7中的系统 （2. 2）是*驚=—*的一个普适开折，但糸="—产则不是•

我们将在§ 5中把这里的讨论精确化、一般化.

**§ 3** 中心流形定理

在考虑一个向量场的分岔问题之前，一般要进行简化处理. 一方面,希望在不改变动力学性质的前提下把相空间维数尽可能 降低;另一方面，力求在等价意义下把微分方程的形式尽可能化 简.前者要用中心流形定理，将在本节介绍,后者要用正规形理论. 将在下节介绍.这两节中的讨论主要对R"中的向量场迸行，不难 把结果推广到微分同胚的情形（例如，参见［Wil］）.

观察上节图1-6可以发现，二维空间上的分岔现象其实主要 是由动力系统在一维不变流形A = 0上的结构变化所决定（参照 图1-5）,而在这不变流形之外的轨线，无非是向这不变流形的压 编.岀现这种规律并不是偶然的，系统（2. 3）在（0,。）点的线性部 分矩阵为

0 0 \

0 - 1J '

它分别以0和一 1为特征值,它的非双曲部分是一维的.由此猜 想，当微分方程右端在某一奇点的线性部分矩阵有羚个零实部特 征根,"2个非零实部特征根时，可以把分岔现象的研究，在奇点附 近限制在某一个吼维的不变流形上，从而使问题的难度得以降 低・

线性情形

先考虑线性方程

(3.1)

其中为\*阶实数矩阵.我们知道，方程(3.1)的解 %(z) = e\*\*\*x (3. 2)

的性态完全被矩阵A的特征值的性质所决定.

设矩阵A的特征值的集合为。)，则

。=c UU *%，*

其中

== {A G <r|ReA < 0},

*au* ~~d~~ {A G tf |ReA > 0}, (3. 3)

*ac* ~~d~~ {A G *o\*ReA = 0}.

记峦为R”中相应于人& %的那些特征值的广义特征向量所张成

的子空间;并可类似定义砂和群，则有直和分解

R" = E，由砂由群,

(3.4)

和相应的投影

旳：R" -\* £•, jrBl R" -\* £?\*, ?Tc： Iff 群.

•这些投影映射的零空间分别为

kerOrs) = Eu,

ker(ff„) =E«丄群由 E\  
kerSQ = *Ek Es ® E\*.*

上述投影都与A可交换，故E，,E“，卧都是(3.1)的不变子空间，

当+ 8时，从非奇点出发的轨道在*E\**中是指数型“压缩”

的，而在欧中则是指数型“增长”的Qf — 8时的情况相反).所 有对f f 士 8有界的轨道(特别地，所有奇点,闭轨)都停留在群 内.由于这些性质，通常称玲为稳定子空间,玲为不稳定孑空间， 歩为中心孑空间,= ①身为双曲子空间,并记投影昭： *Eh.*轨道的动力学行为在双曲子空间内是单纯的，而复杂现象发 生在中心子空间快内.

非线性情形

现在考虑3讖性方程

= Ax + /(x), (3.5)

其中 & C\*(R",R"),点 J(0) = 0 且 D/(0) = 0.问题是:方 程(3.5)的轨道结构是否仍然具有方程(3.1)的上述规律？下面 的结果表明，线性方程(3.1)的中心子空间膏推广为非线性方程 (3.5)的中心流形"七虽然在较强条件下*Wc*可以整体存在，但通 常实用的还是在奇点工=0的局部.那些“复杂现象”(特别地，所 有奇点、闭轨、同宿轨、异宿轨等)都发生在"上;在一定条件下, 吁外的解指数型地趋于上的解$且流形胪上解的性质，可通 过对膏上诱导的方程的研究而得到,本节的内容主要参考了 [V] 和[CLW丄

我们先陈述整体的结果.

定义3.1设X,Y为Banach空间G Z\定义映射空间 cj(x,y)丄(geb(x,y)| g的 b模有界｝.

在本节中,记以£口)为(3.5)的满足初值条件敏0,H)=z的 #•并记 IQgll = supIDgCr)

定理3.2 (全局中心流形定理) 对于系统(3.5),存在与矩 阵A和数&有关的正数毎，如果須e3(R”，R")，且12刃|＜施，则 有下列结论：

⑴集合

= {x G R" | sup|ffAx(z,x)|〈8} (3.6)

ten

是(3. 5)的不变集，它是R”的C4子流形，即存在唯一的*寧*e 别)，使

叩={五+中(气)I払£ £}, (3.7)

⑵如果有少£团(硏矽)，使集合

*Mc* = {xc + 步(arc) I 气 & £}

是(3. 5)的不变集，则"=俨,且步=甲；

(3)如果*y^Wc,*令\*$) =%2(£"),则此Q)满足方程

*= Axc + ^cf(.xc + ^(xc)), xc* 6 *E^.* (3.8)

定义3.3定理3.2中的不变集硏称为(3.5)的全局中心流 形.

附注3. 4定理3. 2中有关全局中心流形唯一性的结论(2) 指出，若研在(3. 5)的流下不变，则*平*e渺)是唯一■确定 的.如果改为PEUCE1,?),则结论一般不对，见[Sij].

定理3. 2中的条件||"|| V&是很强的,它使得该定理实际上 很难应用.由于/(0) = 0,D/(0) =- 0,故在奇点\* = 0附近这个条 件却是自然成立的.因此，利用截断(cut-off)■函数从定理3. 2得出 的局部结果更自然，从而更实用，取截断函数#3) e C~(R\R)r 满足0<7UXl.且

当 IEIW1，

V X \_ Io,当 ||x||>2.  
再令

/p(x) = 言)，Y z £ R气 (3. 9)

此时,为了研究方程(3. 5)在x= 0附近的中心流形，我们可以考 虑方程

峯=曷 + /^(矿. (3.10) 显然，当IE w P时,/(X)= *fp(.x)*，•且不难证明

当 0. (3.11)

定理3.5 (局部中心流形定理)设

/(0) =0,D/(0) = 0, W3*咋砂聲、砂*)和x = 0在R\*中的开 邻域贝使得

1. 流形

%= ｛zc + pS)) | 孔 £ 峦｝ (3.12)

对(3.5〉的流局部不变，即

xa.x) e V X € W^n *U,Y t£* U), 这里冬。，工)为(3. 5)的满足7(0,工)=z的解，西G)为Z在U内 极大流相应的时间区间；

1. PC0) = 0, Dp.(0) = 0,
2. 如果 x € (7，且 Jw(x) = R,则 h & 吟

证明 设与A相关的标已经确定(见定理3. 2的条件)，则由 (3- 9)和(3.11),可取 *P >* 0,使 4危)& Cj(R"tRn),且 |]Dfp|| < &.对系统(歸10)应用定理3. 2可知,存在由(3. 7)给出的甘子痈 形吓，其中 3〈步，矽)，且 = 0,Dp(0) = 0.

另一方面，由(3. 9)可知，若取C/W-｛工| |国)<祖,则 系统(3.10)与系统(3. 5)在U中完全相同，故结论(1), (2)成立. 限制在*U*内,此处的吼■就是(3. 6)或(3. 7)式定义的*Wc.*

现设e *UMx) =* R,则 v *t €* =2/(^) *CU,*

从而sup()rj>x(r,x)| V8,由(3. 6)式，工C俨.限制在U内，也就 是故结论(3)成立. **I**

定义3. 6 如果W £ 廿(£ ,£\*)M21,0(。)= 0,卬(0) = 0, 使Uc +(S(xc) I充£膏｝在(3. 5)的流下局部不变，则称 旳 为(3. 5)的一个C\*局部中心流形.

附注3. 7显然,可以对(3. 5)取不同的截断函数，而得到不 同的局部中心流形(尽管对每一个截断函数而言,(3. 1。)的全局 中心流形是唯一的).例如，在图卜6(产=0)中的原点附近，取右 半平面上与x轴相切的任一執线,再拼接上坐标原点及负工轴，都 构成一个局部中心流形.但从定理3. 5的结论(3)可知,(3.5)保 持在U内的任何有界轨道(包括奇点、周期轨、同宿轨、异宿轨等) 都出现在(3. 5)的任一局部中心流形上.因此，对于研究分岔现象 而言,局部中心流形的不唯一性不是一个重要的问题.还要指出， 虽然/的c\*光滑性保证了叼的！光滑性，一■般来说,/■的c-光 滑性(甚至解析性)却不足以保证讨會是L的.事实上，从定理的 证明中可以看出,U是以P为半径的球形邻域，而*P*的选取要保证 IIDf』< 眼.一般来说，当时’理f 0,这可能导致Pf 0.

现在我们把局部中心流形、稳定、不稳定流形的结果合写成下 面的定理.

定理3.8 对于方程(3.5),设/' £。"11气产),六0)= °, D/(0) = 0；相对于有如上所述的子空间玲，疥和 *硏* 则在R" 中工=。附近存在开邻域U,和(7中的C\*流形和它们 的维数分别与这三个子空间相同，在n = 0点分别与E,夢和*卧* 相切,并且在(7内是方程(3. 5)的不变流形;和W"有定义1.12 所表示的形式,有表达式(3.12),其中C\*(ESE"), P(0) =0, Dp (0) = 0. I

类似于对中心流形的讨论，可以定义并讨论(3. 5)的中心稳 定流形眼涉和中心不稳定流形叶，这里不再详述.上面已经说 到，系统在奇点附近的“复杂现象”发生在它的任一局部中心流形 上.下面的两个定理说明了中心流形的其它重要作用.

定理3.9 (断近性质定理)设須£ U(R",R")J(0) = 0, D/(0) = 0,且对于矩阵='0,令 眇为(3. 5)的一个萨局部 中心流形，则可在R"中找到*O*的一个邻域V和正数匕如果X e V,且傍I i>0｝的闭包含在V内，则m to>O,M> 0和;

v,使得

*— x(t* 一 知力 | V \*2 %. (3.13)

定理3.10 (Pliss约化原理)在定理3. 9的条件下，设第& % Cl V,且｛珀G |/>0｝的闭包含于V中.则虱3)作为3 5)的 解是稳定(渐近稳定，或不稳定)的，当且仅当皿Q)作为(3. 8)的 解是稳定(渐近稳定，或不稳定)的.I

定理3. 9说

明，在一定条件下，

在奇点0的一个小

邻域V内，中心流

形外的解可以指数 V- *、 /*

型地趋于中心流形 */―~ ^^~7*

上的某一解(当£ / /

土+8,如果％= / /

0 ；或当 r f — 8, *~~L ,~~* ~~一~~ *~~J~~g:*

如果彳=0).而

定理3.10说明，在 图i\_M

类似条件下，为了

得到局部中心流形上。点附近的轨道结构，只需要对它在线性子 空间度上诱导的方程(3. 8)来研究即可.事实上，(3. 8)的轨道是 (3.5)在IT上的真实執道向*氐*的投影，见图1-14. 一般而言，从原 方程(3. 5)得到诱导方程(3. 8)不是容易的,需要先知道啊为此我 们给出下面的定理，

定理 3.11 设C\*Or,R"：M2 1,/(0) = 0,D/(0) = 0,

CYESE\*), p (0) = 0, Dp (0) = 0.则 IV?—*3 + <p* (xe)

I x<6玲)｝是(3. 5)的一个局部中心流形，当且仅当存在矽中原 点的开邻域Q使得V女e捉，有

Dp (xc)ffc(Axc + /(xe + *<p* (zQ)

*=甲* Sc) + *f3 + 乎* Sc)). (3,14)

在很多情形下，我们并不需要知道?> (女)的确切表达式，而是 利用(3.14)式算出它的Taylor展式的前几项.

为了简单，先把(3. 5)化成如下的标准形式：

专=bh +

- (3.15)

*= Cy + g(.x,y),*

其中= 的特征根实部均为零，

而

**c=[G «1,**

*[q* **cj**

上面的G与G的特征根实部分别为负数与正数.因此，卧N S, 0)},^= {(0,y)},W。= ((x,p(^))|xeRn).T面尝试寻找 jy =卩3)的展式-X 6 R". (3.14)现在成为

'Dp (z)[Bz + (z))] = *C<p* (x) + g(z,p Cr)),

即

Df + /(x,p (z))] — Cp (x) — (or)) = 0,

(3.16)

以及条件

*<p* (0) = 0, Dp (0) — 0.

利用待定系数法，可逐项计算甲Or).

例3.12考虑二维方程

dx

击=夕,

(3.17)

\* =印 + ® + *xy,*

卷过扰动在奇点(0,0)附近可能发生的分岔现象，其中*9\*.*注 意(3.17)在(0,0)点的线性部分矩阵为[:》，因此当*財0*时,

它有且只有一个零根，中心流形是一维的.我们首先设法找出方 程(3.17)在呂上诱导出的方程，由此推断在中心流形上執道的结 构.为此，先把(3.17)化为(3.15)的形式.

令

硏 7)(： 则(3.17)化为

晋=—\*(" +汾'一\*(“ +P)t>,

-. .' 1 (3.18)

\* =伽 十 彩"+ V)2 + *帯(U +'V)V.*

注意到(3.16)式下面的条件，我们可以设(3.18)的中心流形 由函数

*v = («) =<»? + &«? +*

所表达.对方程(3.18)应用(3.16)式，并把P 8)的如上表达式 代入，由待定系数法不难得到

再把上式代入(3.18)的第一个方程，得出(3.18)在£上诱■ 导的方程为

夺一\*必+…肠0.

由定理3.10,附注2.13和例2. 7可知，系经扰动在中心流形上 发生鞍结点分岔.当^<0时，它的拓扑结构与图1-6相同.

最后，我们考虑系统(3. 5)依赖于参数的情形.设

击=Az +

(3.19)

这里对矩阵A的假设同上疥和世的维数分别为”十宀和册 /et/CR" X RA,R"),r> 1, /(x,0) =。(|)毗\*).为简单起见，还设y(0m)= 0,即z = 0总是(3.19)'的一个奇点.

定理3.13在上面的假设下,(3.19)拓扑.轨道等价于如下系 统

苧=虹膈)，

\* 堂=-为 7GR"-, (3.20)

券 T, reRn+.

这个定理的证明可参考［Sh丄实际上，它的第一个方程就是 (3.的.

附注3.14为了研究(3.19)的中心流形，我们把产也视作 (空间)变量，考虑

等= 4z + \_f(z,Q, 罪=0. (3.21)

題在奇点3,兴)=(0,0)附近，稳定与不稳定子空间仍为疥与 而中心子空间为*E* X R\*.故(3. 21)的局部稳定流形与不稳定流 形IT与的结构与"三0时类似.此时中心流形(Gr“G + 9>(及,“)丨3,“)e X R\*｝,其中*乎 6,心 £* b(彦 X R\ 卧).由(3.21)的第二个方程易知，｛0,产)|产=常数｝是(3.21) 的不变集,从而对固定的产,"勺#=常数是(3. 21)第一个方程的不 变流形.注意愆/) = (0,0)是(3.21)的非双曲奇点.一般而言, 对于不同的产,"°|户=常数上的轨道结构可能不同，见下例・

例3.15 设考虑光滑系统 等=俱一J3 + ,

*=—y* + g（z，;y，Q,

（3. 22）

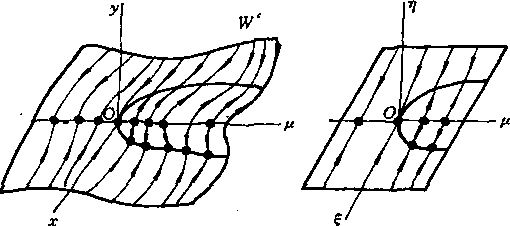


图 **1-15** 图 **1-16**

其中 /' =。（ g = 且g愆,0,Q = 0.由附注

3.14和例2.6可知，在（工设,“）=（0,0,0）的小邻域内，中心流形 归。如图1-15所示.显然，当“ W 0或产〉。时，胪常数有不同 的结构.利用定理3.13及简单计算可知，系统（3. 22）拓扑轨道等 价于

輩H轉一措2

它在（S,彳m） =（o,o,o）附近的中心流形如图1-16所示,它不过是 把图1-15中的中心流形"摊平”在（扌,产）空间而已.

在下文对局部分岔的讨论中，我们大都假定已经把问题化归 到它的中心流形上，即对所论方程的线性部分矩阵*A*而言 =化（即。3,4 = 0）. '

**§4**正规形

正规形（normal form）理论的基本思想，是在奇点（或不动点） 附近经过光潰变换把向量场（或微分同胚）化成（在一定意义下， 尽可能简单的形式,以便于研究.这是源于Poincare时代的一个课

题.由于近年来分岔理论的发展,正规形的应用更加广泛,因而重 新引起人们对它的重视,并得出若干计算正规形的新方法，

众所周知，经非退化线性变换z *= Ty,*线性微分方程

$=（LAT）

变换为

这里£ R”, A和*T为 "n*矩阵，且detT尹0.因此,在讨论 线性系统的轨道结构时,我们无妨假设A为Jordan标准形，除了 Jordan块的排列顺序外，它是唯一确定的，接下去的问题自然是： 对非线性部分是否可以作类似的简化?在一定赢义下，答案是肯定 的，但一般不再有唯一性.无论如何,这种简化对进一歩研究分岔 问题是很有用的.

微分方程在奇点附近的正规形

考虑以x = 0为奇点的C9■微分方程（r N 3）,它在x=0附近 可表示为

专=膈 +产（工）+ …+ 户-3 +0（|z|「），（4.1） 其中x€R"（或C"）,4是线性部分矩阵元m 维*k*次齐次向量多项式所成的空间*,k = 2,*…,r - 1.

先进行变换

x = > + （4.2）

其中\*2（>）g *m*待定,以使变换后的方程具有简单的形式.把变 换（4. 2）代入（4.1）,并注意

口 +以气少尸=/ ―以气少+成|计），

其中，是n X n单位矩阵,Jacobi矩阵D必（少的每一元素都是 。（旧1）,而衣風'）表示«Xn矩阵，它的每一元素都是。（|卄）， 由此把方程（4.1）化为’

尊=2 + {卢（少一飾（少2 — 础 g）j} + ?（＞）+

••• + 乒7（少+。（》1・， .（4.3）

其中*F*与（4.1）中的相同，而产是经过运算得到的新的&次齐次 多项式.

引入算于ad%：压f

= DA'GMy — A 於丫少， （4、4）

则（4.3）变成

尊=A/ + 5⑶）一敬（静3）］ +夕（少+

••• + ＞一'3）+。（|从「）， 〈4.5）

记绥2为算子a眠在而中的值域,而时是"在玷中的一个补 •空间，即

*H%* =绥

如果产3）£统％则存在*h2（y）em,*使产（少=ad\*3（；y））,即 （4.5）中的二次项可以消去;否则，只能找到静《） G部,使 产&） \_ad\*3（；y）） £ 彩 （4.6）

这样,我们把（4.1）化为

\* = 4/ + 屮（少 + 元3）+ - + ?-\*（＞）+ o（i＞io,

（4.7） 其中gp） 6*硏*

其次，再考虑变换

*y — ^ + h3*（a）, （4. 8）

其中静（言）6 *H如.*重复上面的推理，并注意这个变换不影响■线性 项与二次项，容易得知（4. 7）变为

专=Az + \*3） + ［户伝）—adW（z）］ + *f\*（.z） +*

...+ 戸-i（z）+0（|z|「）， （4.9） 其中甘七户与以」)中的相同，而元,…，戸T是经计算得到的，而 且

adj: *-\* Hn,* A3(2) I—\* Dft3(z)Ax — Aft3(z).

记绥』穿(ad%),宙a为旋，在中的补空间，即

*Hi,*=外3㊉笆；

则当戸G) e绥s时，存在*hsM,*使得经变换(4. 8)可消去(4. 7)中 的三次顼;否则，只能找到静(幻e叫,使(4. 7)变为

= Az + g，(z) + g，(z) + /'(«) +

…+戸(2)+0(|吁)，

其中廿3) £贵\*, & = 2,3.由此递推下去，就可得到

定理 4.1 设 Xe&「(R")(或艾「(C")),X(0) = 0,DX(0) =A,并且*x*有表达式(4.1),则在原点附近的邻域内存在一系列 变换

*x = y + hk(.y)t k =* 2,—,r — 1, (4. 10)

其中爪。)e h\*,经过这一系列变换(每次变换后把夕换回H),可 把(4.1)变成如下形式

糸=Az + 妒愆)+ …+ 广，(工)+ 0( |z|"), (4.11) 其中廿(Q 6宙\*，參\*是*豉=绥*3成)在*Hi*中的补空间，算子 a鸵由下式定义

ad\*. ad\*(A\*(x)) = DA\*(x)Ax -

(4.12) *k -= 2t — ,r -* 1. I

定义4, 2 微分方程(4.11)的j次截取式(2<><r- 1) 车=*Ax* + g，(z) + ― + 决(z), (4.13)

其中F(z) e宙'；i= 2,…,j,称为方程(4.1)的J次正规形.

附注4. 3上面进行的只是有限步运算.当(4.1)右端可以展 成收敛的蓦级数时，这种歩骤原则上可以无限地进行下去，问题在 于变换本身和所得到的(形式)正规形是否收敛.在一定条件下， 结论是肯定的，这就是PoincarADulac定理，见［A口，或［CLWJ.

共振与非共振

在定理4.1中，我们希望进一步确定，C4.11)式中哪些寸S) -0.也就是说,(4. 1)中哪些户S)属于烫\*?为此，我们假定4 己化成它的Jordan标准形，并引入共振的概念.

定义4.4特征值人=(為，•••,％)称为共振的，如果存在自然 数J 和整数组m 一 (»!!, — , Win),其中四NO并且|m|

==N 2,使得

^=1

d n

\* = 〈4.14)

*i=l*

正数协I称作共振的阶.

例如4 = 2&是2阶共振的;24 = 3馬不是共振的仄+為= 。是3阶共振的，因为它可以改写为A = 2A, +如

考察(4.11)中哪些驴S)不出现，就是要考察同伦方程 '

ad§("Gr)) — 厶责 G)=产3) (4.15)

对给定的户o) e *臨是否*有解住3)e*砒.*

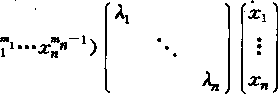
设a是对角矩阵,特征值七互不相同，勺是a相应于4的特征 向量.则构成一组基.设(气，…，角|)是相对于(«!,— > 耐的坐标，则

|说|=应 (4.16)

就是中元素某一分量中的最简形式.

令方\*Gr) = |m | =虹则D砂(z)Az中只有第s个分量非

夺，并且它等于



=(m,A)aT.

另一方面，由于勺是4的相应于4的特征向量，因此

*A^es* = V%

把上面的结果代入(4.15)的左端，得到

ad5^"e, = — As]x~e(, (4.17)

这说明ad々也是对角的，并且它的特征值具有r(«M)-妃|的形 式.由此可知，当A的特征值非共振时,adf的所有特征值均非零, 故算子ad\*可逆，同伦方程(4.15)可解.

当A有重特征倬时,A的Jordan标准形是上三角形矩阵.此时 a世也有相应的Jordan^,并且ad\*的特征值仍具有— 的形式’

定*义4.5*向量值多项式^■勺祢为共撮多项式,如果

4 = |m| > 2,

其中和|m|的意义同前.

利用上面的讨论,我们可以得到下面的

定理5 设4是上三角的Jordan标准形，则可适当选取变 换(4.10),使(4.11)右端的诸gtQ仅由共振多项式组成.|

正规形的计算

例4.7求等=服+尹S十…的二次正规形，其中\* T ；)•

解先在中取一组基

0

0

XjXa

si =



|  |  | （£”…满）乙知 |
| --- | --- | --- |
| 容易算出 |  |  |
|  | 0 0 | 0 0 0 0 |
|  | *2* 0 | 0 0 0 0 |
|  | 八 0 1 | 0 0 0 0 |
|  |  |  |
|  | 一 1 0 | 0 0 0 0\* |
|  | 0-1 | 0 2 0 0 |
|  | 0 0 | — 10 10. |

设ad%在这组基下的矩阵为M,即

(4.18)

现将空间H1与R6等同：& =命,其中勺，…,％为R8中的标准 正交基，由Fredholm定理可知

R6 =绽（以）+ " （W ）,

其中彳CM'）表示£\*\*的零空间.由（4.18）容易看出,

，） = Span（e,, *e2* + 2et},

由此得到

死=亥（8电）& 了七

其中&」Span{q32 + 2£j,由此得出二次正规形为

*'2x1*

d与

或化成等价形式

%=叼+ 2&弱，  
亨*=a xl + b* 与4

注意,Span国,旦}同样构成*風*（ad£）的一个补空间.事实上, 取％ =跖& = & + 2勺，»1 = Ei,w2 =电，则内积

/ \ \_ a \_ '当'=九

0,当，\*j.

因此，可取Span{£"与}为亥(ad%)的另一个补空间，而相应的二 次正规形为

dT = x-

(4.19)

(4. 20)

d^2 g -,  
瓦• = OX： +如口 2.

用类似方法，可以算出*k*次。＞ 2)正规形为

d£i \_ *At ~*

互，

警=心：(1 + PU0) + 如肉(1 + Q(zD),

其中P(m)与Q(©)是氣的*k-2*次多项式，并且P(0) = Q(0) =0.当沥关0时，可经过尺度变换把(4. 20)化为

(4.21)

亨=X?(l + *P(m)*+ 7 ^2<1 + QGq))，

其中 *q* = sign(oA) (+ 1 或一1).

附注4. 8由于薩(adl)的补空间不唯一，因此正规形也不是 唯一的，从上面的例子中已经看出了这一点.但当取定了一个补 空间后，正规形中的系数就唯一确定了.在例4. 7中，求正规形的 ” —I- *k —* 1 \

方法称为矩阵表示法.由于dimAg = n 「，矩阵表示法

n — 1 /

的计算量将随兀或火的增大而迅速増大•近年来又发现了计算正规 形的共辄算子法和群表示论法等，见王铎的综述文章［Wd］及其 所引的文献.

例4.9 考虑复方程

£；卜福+。**5**

其中

/ito 0

Af \_ia, ' \*。,

即4有一对共辄纯虚特征根,求它的(形式)正规形.

鮮 我们用共振原理求解.记A=ia,&=\_ia,则共振条件 是

爲=@ + 1)A1 + 虬，*k ——*

(或& =想+。+1)为，应=1,2.…)

由定理4. 6可知，复正规形为

= iwz + *Ci* [z|2z + ― + *ck\z\ikz + —* (4. 22)

(第二个方程与之共辗，故略去不写).

映射在不动点附近的正规形

考虑以工=0为不动点的(Z映射F(r > 3),它在h = 0附近 可表示为

F(z) = Ac + 产(工)+ …+ 户t(z) + 0( |z |，), (4, 23) 其中H e R1\*(或C«) *,A*是线性映射(我们把它在某组基下的矩阵 仍记为A)，户3)乍*H\*,H\**为”元4维左次齐次向量多项式所成 的空间*,k = 2,-,r-l.*

考虑变换

z = H(y) 丿+ #(»), (4.24)

其中於GO e *H、*/ + «(.)在原点附近可逆，则(奴24)有如下的 逆变换

*x —* + O(|z|\*+‘)， |z|《1.

令

G(’)= 。*F*。*H(y),*

则可把(4. 23)化为

GJ) = \* + 户(刃 + …+ 尸-’3)+

[A少-—础\*0))]+O(b|E), |y|《L因此,与定理4.1平行,可得到

定理4.10 设F e DiffrCR")(或Dif£「(C")),并且有表达式 (4.23)，则在原点附近的邻城内存在一系列变换

*^ = y + hk(y'), k = 2, — ,r-* 1, (4.25)

其中林(少e叫，经过这一系列变换(每次变换后把了换回以,可 把(4. 23)变成如下形式

G(z) *=Ax +* ^(x) + - + 厂(£)+ O(|x|9, (4. 26) 其中『(Q e 补是饱知=庭(％打在中的补空间，算子M 由下式定义

M： *歸* = "(Ar)-*球歎,*

*k — 2, — ,r* — 1. |

定义4.11映射(4.26)的j次截取式(2M jMr— 1) *Ax* + g2(z) + — + 尸(工)， 其中厦(工)6*审七i=2,“ •，厶*称为映射(4. 23)的J次正规形.

定5(.4.12 Jordan形矩阵A的特征值A=3lA)UC"称 为其振的，如果存在s(l MsM”)和整数组用=S1,…，Win), *m；* d n

> o, |m| = > 2,使得

<=1

A, = AM Aj •••寸. (4.27)

正数g I称作共振的阶.

定义4.13向量值多项式称为共振多项式，如果«和s 满足共振条件(4.27),其中｛勺，…,％｝是C"的一组基，S,…， 办)为相对于这组基的坐标，并且矩阵A在此基下的Jordan标准形 以仇,…人｝为对角元素.

-类似于定理4. 6,可以得到下面的

定理4.14设A = Diag｛爲，…,则可以选取适当的变换 （4.25）,使（4.26）右端的诸事O）仅由共振多项式组成.|

例4.15 求以z = 0为不动点的一维映射F（z）=-h+… 的六次正规形.

解A=-l是唯一的特征值，所以共振条件为

A\* — A — 0, &N2,

也就是

（一 1）1 = 1, 4 >2.

所以共振多项式为工',史,#，…由定理4.14,六次正规形为 G（Z）=—"<«：3+狩，

其中“，&为常数.

光滑线性化

定义4.16设志N2是一个自然数.称光滑向畳场（或微分同 胚）的双曲奇点（或双曲不动点）为*k*阶非共振的,如果它的特征 根不满足所有阶的共振关系.如果一个奇点（或不动点）是任 意有限阶非共振的，则称它为无穷阶非共振的，或简称非共振.

从前面的讨论可以看出，一个応阶非共振奇点（或不动点）的月 次正规形是线性的.换句话说,在奇点（或不动点）的邻域里可以 找到一个多项式的坐标变换,使得在新坐标系下系统可以表示为 一个线性部分加上一个&阶小量.一个自然的问题是，进一步可以 通过什么样的坐标变换能把这个&阶小量去掉.

定义4.17设龙是一个自然数或A = oo.称R”上的光滑向 量场（或微分同胚）在它的奇点（或不动点）0处可以廿线性化，如 果存在点*0*的邻域*U*和C\*微分同胚*HiU* f R",W（O） = O,使得 经过坐标变换纟f HGr）后,系统在。点邻域内变为线性的.

定理4.18 （［IY］）设&是一个自然数或及=8』是一个孙 阶实方阵，则存在一个依赖于点和4的数,满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | £ Z，当Y 8,  〔8, 当 *k = oa,* |  |
| 使得如果原点是b微分方程 | |  |
|  | 糸=〈+..• X & R", | (4.28) |
| 或微分同胚 | X p\* *Ax* + …X G Rrt | (4.29) |
| 的片阶非共振双曲奇点（或非共振双曲不动点），则系统（4.  28）（或系统（4.29））可以C\*线性化.| | | |
| 附注4.19 | 由于£ =&，@,A）的表达式比较复杂，此处没有 | |
| 给出.当4 - + | 8时,世线性地依赖于应的增长. |  |

例4. 20 考虑R1上的C"光滑微分方程

& 、

瓦• = or +… @尹0;

或微分同胚

x I " 4■… |产| 尹 0,1.

因为特征根A =赤或A =产）不满足任意阶共振关系,故宙定 理4.18,系统在原点处可以C"线性化.即R\*上的C~向量场（或 微分同胚）在它们的双曲奇点（或双曲不动点丿处可以C"线性化.

例4.21由于辭上的向量场在双曲焦点的特征根为A士油, A尹0,3尹0.它不满足任意阶共振关系，故軒上的C"向量场在 它的双曲焦点处可以C"线性化.

在考虑分岔问吒时，我们常常只需要C线性化.对此,有下面 较为简单的结果.

定S4. *22*设点。是时中一个C~光滑向量场（或微分同 胚）X的双曲奇点（或双曲不动点）.如果X在点。的线性部分算 孑的特征根％,&,•••，▲满足下列不等式

Re". ?S：R 叫十 Re%,（或乏 MJ , ）&丨），（4.30） V *i,j,W* {1,2,•••/},则系统在点。处可以仃线性化.[

上述定理的证明对向量场和映射的情况分别由［Be］和［Go］ 给出.

例4.23平面上的C"光滑向量场（或微分同胚）在它的双曲 鞍点（或双曲鞍不动点）处可以C\*线性化.

例4.24 如果R'中的向量场的一个双曲奇点有一对复特征 根<1士云和一个实根产，满足3尹0,孕<0,则称奇点为鞍篤点.鞍 焦点的特征根显然满足（4. 30）.故Y中C~向量场在它的鞍焦点 处可以C1线性化.

例4.25如果It，中b向量场在它的奇点。处的特征根满足 < A < 0 < ^,并且

兀 +产尹兀， ％ 尹2爲，

则它在该点可以C\*线性化.

在第五章讨论非局部分岔时，遇到的向量场都是依赖于参数 的.因此，下面我们讨论带参数的向量场或映射的线性化问题.

定义4.26设左是一个自然数或A = oo,Xe（e&Rm）是R” 上的一个依赖于参数的向量场（或微分同胚）族.设£ = %时*X%* 有一个双曲奇点（或双曲不动点）*O.*称族在点附近可 以C\*线性化，如果存在参数空间中£ = %的邻域V,相空间R"中 点。的邻域U,以及一个淨映射H ： U X V - R”,满足

（1） 釈林）=0；

（2） 对每一个参数tZ-R"是一个微分同胚， 使得通过依赖于参数e的坐标变换尘后,系统在。点的 邻域变成一个线性系统，

定理4. 27 （DY3）设X\*是R"中的C"向量场（或微分同 腫）族，且£=蛤时点。是系统X、的非共振双曲奇点（或双曲不动 点），则对任意自然数加族X。可以在点（。浦）附近C\*线性化.

附注4.28由上述定理的结论并不能推出族X$.可以在点 （O,£0）附近C"线性化.因为随着*k*的增加，可以实现线性化的点

*0*的邻域17和&的邻域V可能不断缩小.

本小节给出的定理是我们在第四章和第五章中讨论问题的基 *础.*

§5普适开折与分岔的余维

现在，我in把§2后半部分中讨论的一些概念严密化.初次. 接触分岔理论的读者可以略过本节的内容，只需承认定理5.13的 结果，而不影响对随后章节的学习.

番适开折的定义

*定*义5.1设向量场X,y（或映射儿g）都在*PEM*的邻域内 有定义.称X与丫（或/■与吾）在》点有同一芽（germ）,如果存在邻 域*u,peuczM,*使 xiu = y|u （或*f\v = g\u>.*

附注5.2向量场（或映射）在》点的芽，是向量场（或映射） 的一个等价类.我们把这个等价类中的任一无素称为这个芽的表 示.在考慮局部问题时，利用芽的说法可使陈述简明.附录C中定 义的財式空间或*J\M,Ny*都可以在映射芽的意义下 给出.

现在考慮向量场族蹟'8（整）.在局部情形下，无妨设M =R七兴e R\*.此时，常把X#与其主部状\*,产）等同（参见附录B 中附注B. 17 ）,而X户的流由微分方程

dx

所决定，其中C"（R" X R\*, R"）.在上述等同意义下，也把"称 为向量场・

定义5.3《开折，局部族）对于向量场族讯並/）,当把y视 为从参数空间产£R\*在原点的小邻域到向量场空间的映射时,我 们把v（z,“）称为u（z,O）的一个点会数开折（unfolding）,或称为彩

3?（deformation）,当把视为直积空间RmXR\*中在（布＞,出）点的 映射芽时，称它为一■个局部族，记为3;皿,险）.

定义5. 4 （局部族的等价）称两个向量场局部族（巧互，佝） 与3玖,妇等价,如果存在映射*h,y* =五（t,Q,在（知险）的映 射芽，对于每一个固定的*儿心仍*给出上面两个向量场（在相应 定义域内）觥道间的保向同胚，并且无（五,险）=外.

定义5.5 （导出族）称局部族（旳知，勺）是从局部族（巧册， 及）导出的，如果存在连续映射八产=”戦,在导的映射芽，使得 «（x,e） = （€））,且卩（勺）=佝.

定义5. 6 （普适开折）向量场的局部族3;女，佝）称为向量 场外 =讽♦，妇 的芽在气的普适开折（veraal unfolding）,如果任 何一个包含为的局部族都与（PT。,险）的一个导出族等价.

附注5.7注意两个向量场族的等价性要求它们含有相同维 数的参数，而导出族的引进使得同一个退化向量场的普适开折可 以含有不同维数的参数，从而可以进一步考虑含参数最少的普适 开折.

附注5.8定义5. 4 - 5. 6都取自Arnold的书［Al,p267］.定 义5. 4中不要求近5成）对产的连续性，称这种等价为員等价，而定 义5. 6中的普适性，一般是在弱等价意义下给出的.若 *岖点* 对 产连续，则称这种等价为强等价，并可得到强等价意义下的普适 性.在［R1］中有例子表明，弱等价意义下的普适开折可以不是强 等价意义下的普适开折.

附注5.9 一般而言，对一个给定的奇异（即结构不稳定）向 景场（芽它的普适开折的存在性并不是明显的，只有在周密的 讨论之后,才能得出结论，参见第三章§1.

读者可以用本节的观点重新考察§2的讨论，在那里利用 Malgrange定理证明了，奇异向量场（2.12）任取的开折（么13）都 与一个形如（2.16）的开折按定义5.4等价.另一方面，（2.16）显 然是（2.17）的一个导出族，按定义5. 6,（2.17）是（2.12）的一个 普适开折.从这里可以看出导出族的作用.

分岔的余维，几何考虑

我们现在对向量场局部族的分岔问题考虑它的余维.在全体 向量场所成的空间*宓*中，奇异（即结构不稳定）向量场％表示一 个“点”，仍记为功，它落入分岔集厶（见定义2,1）,A在外附近可能 具有非常复杂的结构.但如果限于考虑A中％邻近的点，它具有与 % “完全相同的奇异性"，则这样的点集可能具有规则的结枸.例 如，形成务的一个余维，的子流形&,因此在亥中一个至少&维 的流形K才能在巩点与川横截相交,而这个K可用外的至少&参 数开折来实现（图1-17和图1-18中分别对应*k=\*和& = 2的情 形）.由于横截相交性在小扰动下保持，所以*K*扰为*K'*后仍与川 相交于机或其近旁的（见图1-17）.换句话说*,K*所具有的％这

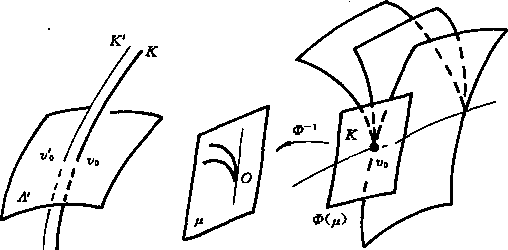


图 1-17 以=1） 图 1-18 0 = 2）

样的奇异性是扰不掉的.一个维数小于为的开折所代表的流形, 虽然也能在务中的％点与出相交,但在小扰动下，它就可能与A 分离（这种相支不是横截的）.这说明，像％这样的奇异性，至少在 *k*参数的开折中才是“不可去”的.而这个数点，就是外的余维.由 Ttiom橫截定理(见附录C中定理C. 15),满足横截条件的向景场 族的集合在绥的全体向量场族中构成一个稠密子集，称其中的任 一族为一个通有(generic)族，或一般族.因此，可以粗略地说，那 种在至少点参数通有族中“不可去”的分岔现象是余维灸的.当然， 在空间亥中的％点附近，除了 A'之外，还可能有余维低于左的奇 异向量场的集合(即AV).在较简单(较“理想”)的情形，它们形 成在％点附近的余维小于龙的各层次的子流形&\*，如果我们恰当 选择*k*参数族K,使得它在外点与各层次的都橫截，価这个*K* 就是一个普适开折.此时，如果把定义开折*k*的映射记为

多，则*K*与各分岔曲面的截痕在下的象，就形成了参数空间 R\*中的分岔图(见图1-18).这种几何的考虑:有时是方便的.

一个余维2分岔的例子(Bogdanov-Takens系统)

考虑一个向量场芽,限制在奇点处的中心流形上，其线性部分 矩阵相似于一个二阶纂零矩阵，它有如下的表示

专=u0(x) *~ Ax + ―* (I 1)

其中*工= ,Vo* G C°°(R\Re),tjo(0) = 0, Dvo(O) = 4 =

0牛

0 0/

这是一个有二重零特征根的奇异向量场.我们关心的问题是： 它在H = 0附近是否存在普适开折?分岔的余维是多少?它的分岔 图如何?其开折的拓扑结构有哪些不同的类型?它们怎样随参数的 变动从一种类型变成另一种类型?这些问题的解决不是轻而易举 的.事实上，这是由Bogdanov网㈤和Takens^在70年代中期分别 独立解决的一个难题,并且成为推动分岔理论进一步发展的一个 著名工作.因此，我们将在本节和第三章§ 1中详细讨论这个例 子，借以介绍向量场分岔的一些基本理论与方法.本节主要研究

这个奇异向資场的余维.

由例4. 7的(4.19)式可知，方程(5.1)具有正规形

J况=皿+ 0(国3),

1 成=讶 + *bx^Xt* +O(|x|3). "

为了对它的奇异性加以限制，这里假设湖K 0.

设。为R2内包含x = O的一个开邻域,XGr)为x点的全体 C™向量场芽的集合，并记

齿=｛(S,tO|a£X(g),

与(£,初相应的是在£点的向量场芽.记 W)为e的一个小邻城, 则(E,初可以表示为

栄= \*), x e v(e. (5.2)

因此(5.1)可以简单表示为(0,%).我们称(匕初具有与(0,臨〉相 同的奇异性,是指它满足如下两个条件；

(Hl) P(f)=0,且gc)在的线性部分矩阵以也)相似

(凤)把(5. 2)在x = f化为正规形(5.1)'后有沥关0. 现在可以把与(5.1)有相同奇异性的向量场表示成：

*s=* ｛（&,〃）e 名 I （&u）满足（HD 和（瓦）｝. （5.3） 记S+= ｛（&t＞）£S| 条件（H，）中沥＞0｝和S-= ｛（£,。＞ £S| 条 件（瓦）中*ab＜Q｝.*显然,S+ U S-= S U 亥.

附注5.10 这里函数空间列的取法与上面谈的精有不同. 务中的每个“点”，是R2中的一个点附着一个在该点附近的切向 量场.这符合流形上向量场的一般定义.(见附录B中附注B.14), 由于在欧中的每一点,切空间就是R"自身,所以常把向景场与其 主部等同(见附录B中附注B. 17).我们此处的取法，对描述上面 的集合*3*并研究它在亥中的余维有很大方便;并使得下文中从橫

截性定义非退化族符合定义5. 3的原则（局部族要在相空间与参 数空间的乘积空间中考虑）.要注意的是，如果S在亥中构成余 维为&的子流形，且与$横截的子流形有参数表示｛（S,%）｝，则&的 维数的最小值不再是為而是\* 一”,其中>1是扌所在相空间的维数， 此例中H = 2.

下面证明S在房■中的（0,%）点附近构成一个（局部）余维4 子流形.记

户丄｛（&加）丨応。）£亥｝,

其中为f在f的农jet,见附录C.从&到尸有自然投影

爲--> *Jk,* I—\* ,,- ,D^p）（

从尸'到尸S2”）有自然投*影j*尸f尸： ，

*i （^,v,6v, — ,D"v）,*

其中坐标*v*是»（x）在x = f点的值（它是2维的），而跃（# > 1） 是状工）在m f点为阶导数的一种坐标表示.例如，取加为 在z = S点的Jacobi矩阵（它是4维的），取页为v（x）在x = f点 的Hesse矩阵（它是6维的）.

定3 5.11当& 2 2时,W在*J\**中的每（0,外）点附近形成 余维4光滑子流形，且S在务中的（0,诳）点附近形成余维4光滑 子流形.

证明 由S的定义（5.3）式和条件〈HD易知

ff（5 = （（$,vfDt»） I % =希:=det Dv = tr *Dv* = 0,Dv \* 0｝ ♦ 其中希和布表示*v*的两个分量,det缶和tr崩分别表示矩阵炭的 行列式彌迹.注意括号内右侧4个条件是彼此独立的，故沔S在 旧（0,外）附近是尸中的余维4子流形.

下面设&N2.注意投影叫是b浸盖，由附录B中定理B.

27,购i（%S）是户中的光滑子流形;再由定理C.16,痂igS）在尸 中的余维等于电S在尸中的余维，即等于4.另一方面，由S的定 义可知，砍S =吋(两，|咛.注意条件(HQ由不等式泌＞ 0给 出，其中的a和&是经过相空间的C"变换得到的.因此，麻S是 响在w\*(。,边)点附近的开子集,从而它是户中砾2,边)点 附近的局部余维4光滑子流形.

注意*Sfpg),*重复如上推理(用定理B. 27和定理C. 16) 可知,S在务中(0,%)附近,构成局部的余维4光滑子流形.| 现在设

((f,V£) | e E 2} C *3^* (5.4)

是亥中的向量场族(参见附注5. 10)，且%就是原来的奇异向量 场(5.1)在工=0的向量场芽.因此，又把(5. 4)称为(0,%)的一个 开折;与它相应的微分方程是

等= t/Gr,e),工£卩($). (5.5)

*定义5.12*称(5.1)的开折(£,%)是非退化的，如果R，X R™ 到*J2*的映射

(?,£)f 句(&,%).

在(&e) = (0,0)点与空间尸中的子流形舟S(在邑(0,外)点)横 截相交.

下面要证明的主要结果是：

定理5.13

(D &中的全体非退化开折构成它的一个稠密集.

(2)对于(0,%)的任一开折(5.4),在Gr,e) = (0,0)的小邻 域内存在C"变换工=玳丁,£),满足x(0,0) = 0,并且把(5. 5)化 为

*yz* =沛(e) + 0(e)叫 *+ yl +* 少队Q(M，矽 + 招(必,e),

(5. 6)

其中

*8、Q,佥冲仲* € C~,p(O) =。(0) = 0,Q(0,0)=打,0(0,0) = 1.

(5.7) 这里〃 =±1,取决于(0,%)£S+或SL在(z,&)= (0,0)的小邻 域内，(5. 6)轨道等价于如下的标准形

*J* — ^2 •

〔务=中(e)+ *MM\** + z： + 工的Q3i ,£)+ ji®(x,e),

(5. 8) 其中同上.若(5. 4)还是非退化的，则存在参数空间的 6变换e = e(^),e(0) = 0,把(5. 8)进一步化为

册=心，

.叡 =Qi + 必气 + 犬 + 山以& 愆1，“)+工莎,

(5.9) 其中©，前满足与Q,◎相同的条件.

定理的结论(1)是定义5.12和定理C.15(Thom定理的jet形 式)的直接推论.结论(2)由下面的几个引理得出.虽然这个定理 尚未回答47页所提出的问题，但我们将以此定理为基础，分以下 两步解决这些问题.为了确定起见，只考虑(0,瓦)e s+的情形.

1. 在标准形(5. 9)3= 1)中,取0 (z.Q = 1,5(工,“)= 0,即讨论向量场族

*\ x = y,*

仁 , ,,, (5. 10)

I 丁 =内 + “2, + 廿 + 的分岔图和轨道拓扑分类图，这里e R1.

1. 对任意的&和c»,Q(o,o)= 1),来证明开折 (5.9〉都与(5.10)的一个导出族等价，即(5.10)是(0,臨)& *S+* 的一个普适开折，并且是余维2的.

在作第(一)步讨论时，除了运用微分方程定性理论的知识和 方法外，还要碰到几种常见的分岔现象.所以，我们首先在第二章 中介绍几种基本类型的分岔，然后在第三章中继续解决本节的问 *题.*

定理5.13中结论(2)的证明

引理5.14设(5. 4)是(0,%)的一个开折,则存在C~变换小 =，火0,0)=。，它把方程(5. 5)化为

(5 11)

其中F,G,雪FC~,并且

9K\* a2 J?

F(0,0) = = 0, = 2, G(0,0) = %

Wi(so) *°yi* (0.Q)

这里彳= sign3),a与&是把矽60)化为正规形(5.1)，后的二次 项系数.

证明 由例4. 7可知，无妨假定(5. 5)具有如下形式

f 上1 =叼 + Wi(X,E),

< . , (5.12)

I 命=技 + ? + g(Z[) + W2(x,£),

其中函数 C~,且g = O(|x|3),w((x,0) 0,1 = 1,2.

令

“ =\*1， p x2 4- w,(x,e),

则(5.12)变成

3 = u,

< .~ ~ ~ (5.13)

• 3 = F (“,e) *+ vG* («,e) + (m,v,e),

其中F.G.V-eC",并且

云(0,0) *=0，¥ =0,碧* =2,

™ (0.0) ™ (0.0)

*G* (0,0) = 0, = 7. (5.14)

™ (OF0>

利用上面的条件，可由隐函数方程G(a(e),c) = 0确定C~函

数a=a(e),再经过变换

Ji = u — a(e), *y2 = v,*

把方程(5.13)变为(5.11)的形式，并满足引理的要求.I

引理 5.15 存在 C~ 变换 *x* = z&,e),z(O,O) = 0,在。,e) =(0,0)的小邻域内，它把方程(5,11)变成(5. 6)形式.

证明 对(5.11)中的函数F3，e)应用Malgrange定理(定

理2.12)可得

F(m，e) = 3 (e) +。伝頌 + y?) g3i,e),-

其中*甲£C°°怦*(0) =。(0) = 0,9(0,0) = 1.因此，在(\_y,e)= (0,0)的小邻域内，(5.11)可以改写成

$1 = 乂，

A k隹)+扒+贵+ 漑+畿爲诚\*(为,£).

(5.15) 令

*Jq(yg*

811(5.15)转化成

*u — v* -/y,

6 u (兌(E)+ ©(e)化 + / + + 寸)*-Tq*

I V *n 2q 彳 q \*

(5. 16)

其中 *q* = gCtt,e) *,G =* G(«gQ ,W — W(ig Rpq、且



因此，(5.16)可以写成

*u — vS(.ute},*

£ = 3 (e) +。隹加 + 必 + «vQ(U,e) +

其中0= Q = 为,史=雪\_法愛,而且网0 Q和史满 足条件(5. 7).

下面再迸行一次变换，把(5.17)第二式中的步隹)“变成扒e)v 的形式.令

Xj = a 4- *2~>* 处=*V,*

则(5.17)化成

上> =互。(而，$),

壬z= W (e) +。(e)处 + 此 + XjXjQ (电，©) + z；①(z,e)}& (x^e),

(5.18) 其中

& (zi，e) = 03 — ”^，号)，

*甲 g = @* (e) — +#(©),

5(e)=-§©(£)Q+S(Q),

*Q* (z】,Q = QGz) — ,€)— 叽

~ 1

\*&(X,£)= <P(X! — 处，e),

而函数He)和“跖,e)由下式确定

Q(Z1 — -|-(i(E),€)= 1 + f(e) +。(而,河・

把*S,<p,^,Q*和&换回*8,中,W,Q*和①的形式后，方程(5.18)成为 (5. 6),而条件(5. 7)仍成立.引理证完.I

附注5.16 显然,局部族(5. 6)(在3,e) = (0,0)附近的一 个邻域内)等价于(5. 6)右端除以0(队圧)所得的局部族，并且在 定义5.4中的映射中与方都可取为相应空间中的恒同映射,在这个 意义下，我们可以把向量场(5. 6)与(5. 8)视为等同.

引理5.17 (5. 4)成为(0,珏)的非退化开折,当且仅当*H i,j*

S为e的维数)，使行列式

3,

(5.19)

e.=e.=o

其中<{> (e) "(e)是把(5. 5)化为(5. 6)的形式中所出现的函数，而 e=(勺,

证明 根据定义5.12,(5.4)的非退化性由映射

(S,e) (5.20)

在(扌,e) = (0,0)点与空间*J\**中的子流形心S(在吨(0,如)点)横 截相交来定义.注意的坐标表示分别是£,及％及其对\* 的前两阶导数在f的值，从而可代替(5. *20)*，考虑映射

(M,e) i Gr,uGr,£),Dt>(z,e),D\*v(；r,e))

在S,e) = (0,0)点与空间尸中的子流形旳S的横截相交性.由附 录C可知,向量场(5. 5)经过(把m = £ = 0固定的)微分同胚作用 后，在x = £= 0点与某一子流形的横截相交性不改变.利用引理 5.14,引理5. 15和附注5.16,我们可适当选取坐标系，对(5.5)在 (5.8)的形式下讨论(直接在(5. 6)的形式下讨论，可得同样结果， 但计算稍繁).

另一方面，在尸中心(0,%)点附近％S可由如下方程确定(见 条件皿)和冋))

fi(x,E)== 0, q(z,e) = 0,

det^^ = 0,tr^^ = Q.

*dx dx*

因此，由定理c. 13可知，(5.8)在(Z,£)= (0. 0)点的非退化性等 价于

rank

| 1 | 0 | 0 | •- 0 |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 |  | *迎* | ...虫 |  |
|  |  | 次2 |  | —4, |
| \_ 7 | 0 | 0 | … 0 |  |
| 泌 | 亜 | 理 | ...亜 |  |
|  | \*1 |  |  | X—6=0 |

0

0

-2

而它显然等价于条件(5.19)对某iWiVjWm成立• I 引理5.18设(5. 4)是非退化的开折,则存在C"变换产=

产◎),产(0) = 0,它在e= 0附近非退化，并把(5. 8)变到(5. 9). 证明 无妨设引理5.17中的i = 1J = 2.令“=“怎)由下 式给出：

“1 =伊(矽，的=。(£)，“3 = & =牝，

则由条件(5. 7)知“(0) = 0.又由于(5. 8)是非退化的，则由引理

5. 17可知,“ ="(e)在e = 0是非退化的，引理得证.方程(5. 9)中 的 Q (力,产)==QCyMO)), © (丿,“)=①(’,£(“))，而 e = e(“) 是产=产隹)在e = 0附近的逆变换.I

利用以上诸引理，可得定理5,13的结论(2).

习题与息考間\_

1.1考虑R'上的动力系统質，设它的轨线分别具有图1-6,图1-8或图1-9 的7种分布.对每一种分布，取平面上不同区域的点工,讨论极限集a(z)和 aGr).并研究系统的非游荡集对哪一种分布，你可以断言系统不是结 构稳定的？

1.2利用对(2.13)的讨论方法，证明R1上的系统(2. 2)是C"系统

音=一/ + 0(|邳)

的一个普适开折.

1. 3对7•列杀统，求出与中心流形相应的诱导方程(3. 8).并由此作出原 方程在原点附近的相图(草图).

(1) *X = y ^=— y —* 3日

(2) ± = 2# \_，气项='—® .

1.4考虑糸=& + 0(|邛)，其中h£RM=(： J.假设向量场 在旋转角度M下保持不变，求其在原点附近的三次正规形.

1. 5设R，上的向村场以(0,0)为奇点，其线性都分在(0,0)的矩阵具有 二重等特征根，而且向量场在旋转角度号下保持不变，其中Q为正整数，并且 满足9^3.证明向量场在(0,0)点附近的正规形为

糸=cN + qz 好 + ... +』《"+片 + A^\_1 4-O(|z|»), 其中z,c"A为复数,m = [号:|.

1.6考虑三维系统

0 I 0

糸=-1 0 .0 z + O(0「).

0 0 0.

求其在原点附近的三次正规形.

1. 7考虑L映射*F>* R，f R\它以一1 + e为特征«,|e|《1.证明对 给定的正偶数\*,存在*8>0,*使当|e] 时,F可以经过L变换化为

F(h) =(— 1 + e)H + <2j(e)x3 4- *a5(.six5 + •••*

+ dW-L + O(|^|\*+i).

利用此结果对例2.11的结论给出简单的证明.

1-8利用上题的结果,讨论以一 1为待征根的一维映射

F(z) =—h + or5 +。(女卜)，a = 0

在小扰动下的分岔规律.

第二章常见的局部与非局部分岔

本章介绍一些當见的分岔现象，其中包括奇点分岔、闭轨分 岔、Hopf分岔、同宿分岔、Poincare分岔等，其中前三种为局部分岔 问题，后两种分别为半局部分岔和全局分岔问题,除了奇点分岔 外，本章的大部分讨论都限制在相空间为二维的情形.

§ 1奇点分岔

考虑一个光滑地依赖于参数并且具有奇点的向量场.当参数 变动时，我们关心奇点个数及其附近的轨道结构如何变化.这种 分岔现象称为奇点分岔.

般理论

定义1.1向量场X的奇点*PEM*称为非退化的，如果它在 ?点的线性部分算子是非奇异的，即它的所有特征根均非零.否则 称为退化的.

定理L2光滑地依赖于变量和参数的向量场，如果它的奇 点是非退化的，则奇点本身也光滑地依飄于参数.

证明设向量场由微分方程

*堂—*Cl. 1) 给出，其中 VG (/(R" X R\*,R"), rNl/Nl.设当“=岡时,z =血为(1.1)的非退化奇点，即叽女，佝)=0,型糾 非

奇异.由隐函数定理，在(血,佝)附近存在光滑函数z =八产)，使

/(ft) =xot且吹7以)\*)三0.定理得证.|

附注L3定理1.2说明，当奇点非退化时，奇点的个数在参 数的微小变化下不变，它的位置也光滑地依赖于参数的变化.需 要注意，奇点的非退化性与双曲性是不同的概念.例如，一个向量 场在奇点处的线性部分矩阵有一对纯虚特征根时，接定义1.1，它 是非退化的，但它是非双曲的.此时在扰动下，虽然奇点个数(在 小邻域内)不发生变化，但其附近的轨道结构可能变化，出现Hopf 分岔，或Poinca龙分岔，我们将在§3与§5申分别予以讨论.

定理L4设M是龙维紧致 则\*中仅有非

退化奇点(它们必是孤立奇点)或无奇点的向量场集合形成一个 开稠子集.

证明 设XW"(M)相应于微分方程 -

*笑=心,*非以)，.

其中中S点的邻域，如同第一章§5的 讨论，考虑投影.

//： 名，(M) — *X* I-\* (f, *f),*

其中7= /(?),具有奇点的向量场集合在空间中有表 示式

5 - {^,7)1?= 0}.

它是中的光滑闭子流形(因为*M*是紧空间).设向量场 fS)在f点非退化，即監专非奇异，从而由附录C中定理C. 13知， 与孑流形S橫截相交.注意，不相交也是横截,再利用定理 C. 15,得知仅有非退化奇点或无奇点的向量场在盛"(M)中形成 开稠子集. 1

这个定理说明.向量场的一个退化奇点可以经过任意小的扰 动转化为(多个)非退化奇点,或经扰动使奇点消失.但如枭我们 考虑向量场族gq,则奇点的退化性往往是不可避免的.事实 上，虽然小扰动可以把对应于“ =他的退化奇点*x = xt*扰为非退 化的，但在叼附近的為点,相应于%附近的ft却可能是新的退化 奇点.对一个具体的奇点分岔问题，通常有两种处理方法:一种是 利用中心流形定理，把问题归结到中心流形上，见第一章例3. 12. 另一种称为Liapunov-Schmidt方法，或称为更替法(alternative method),为了说明这个方法的基本思想,我们先看一种特殊情 形.设变量.工=梭,霁)，在\* = 0附近微分方程具有下列形式

*= Ay +* /(y,z,A), 糸=Bz + (1. 2)

其中*A*的特征根均为零，而*B*的特征根均不为零,*f ,g* e > 2i /(0,0,0) = 0,g(0,0,0) = 0, *f,g* =O(|j>,z|s).为了研究奇 点的分布，在工=0和A = 0附近考虑方程

*Ay* + y(y,z,A) =0, *Bz* + g(y,z,X) = 0. (1. 3)

由隐函数定理，存在。,A) =(0,。)的邻域U和(7■函数*N =* 人),使得

*B<p* +gg0,A),gO, V CM) 6 *U.*

把函数*言=甲*G，A)代入(1. 3)的第一个方程左端，可得*頒*函数

G(3>,A) *=~Ay + f(.y，V* (>,A) ,A). (1. 4)

记

*S* = {g) G UIGCM) = 0}, Sa = S n {Af},

则对不同的A, |A|《1,S,结构的变化反映了奇点个数的变化规 律.这样就把对(1.3)的讨论转化为对G(y,A) = 0的讨论，使空 间维数得到降低.通常称(1. 4)为方程(1. 2)的分岔函數.

为了应用上的便利,下面在更一般的框架下讨论这个问题.

**Liapunov-Schmidt** 方法

设X,Z和A为实Banach空间,U和W分别为X和A中零点 的邻域.。映射M2XWUXX A—Z,满足M(0,0) = 0.我

们要研究方程

A/愆？)= 0 (1. 5)

在UX"中(0,0)点的某邻域内解的结构.为此，设4 = D■小(0, 0),并记，(A)和饲(A)分别为A在X中的零空间和A在Z中 的值域空间.本节的一个基本假设是

CH) /"(A)在X中存在补空间；绥(A)是Z中的闭集，并且 在Z中存在补空间.(当A为Fydhdm算子时，这个假设总是成立 的.在下文的应用中，经常是这种情形,)1 .

因此，在*X*上存在投影尸，在Z上存在投影Q,使得

竇(P) = "Q4),處(Q) = ^(A). (1.6)

V z € C7,可写成 z = “ + v,其中 u *= Px* €，(A) = *XP,v =* GT *一 P” E W* (P) = *Xj* 这里；是恒同映射,Xp和Xf 表示 投影P和*I-P*的值域.显然，方程(1.5)等价于.

*QM(u +* w,A) = 0, (1.7a)

(7 — Q)M(“+u,A) = 0. (1.7b)

定义映射例XpXXjpX A-＞處(4),

= QM(u + *v,X).*

则 Mo,O,o)= 0,且Dv机0,0,。〉= A|女P)是 w (P〉与使(A)间 的同构.由隐函数定理，存在*X?*在原点的邻域*Uo ,Xt\_P*在原点的 邻域K,A在原点的邻域叽,以及*C'*映射扩，夂X叭f哓，使 *ua* x 吼 uumuw,且

*QM(u +* (w＞A),A) = 0, V (”,人)€ S X Wo,

并且＜(0,0) =0, D” (0,0) = 0.利用甘，定义b映射z\* : *U°* X *W.^u,*和 C1 映射 G：U°X 吼f 彳(Q),

*x\** (w,A) = a + v\* (a1A) , (1. 8)

G(",Q *— (J —* Q)M(“ + *v\** (a,A),A). (1. 9)

容易验证，x\*(0,0) = 0, D『\*(0,0) = *I^Ar* G(0,0) = 0,

D“G(0,0) = 0.

总结上面的讨论，我们有下面的结果.

定S1.5 如果条件(H)成立如上,则V«6 *ua,xeua* x v°ux,和人e 如下两组结论等价

1. *Ph u,* Af(x,A) 0；
2. *x = x\** (w,A), G(w,A) — 0,

其中z\*与G分别由(1.8)和(L9)定义.I

定理1. 5说明,原来的奇点分岔问题M(礼A)=。转化为求解 其分岔方程= o.注意*x e x,* ms,A)e z,而 ” e Xp = "(A), G(”,Q £Z,\_q= "(Q),因而使问题的定义 域及值域都作了显著的约化.这就是Liapunov-Schmidt方法的核 心思想.

现在我们把上面的一般理论用于R"上的向量场奇点分岔问 题.考虑依赖于参数人的向量场

牙=/〈戒)， (1.10)

其中 *f* R\ R”)，r>2; /(0,0) = 0,D/(0,0) = A.

考虑奇点分岔问题，就是要在R” X R\*的原点附近考察方程 feg = — N(z,A) = 0, (1.11)

其中 NEC^ITXR七 RD, N(0,0) = 0,DcN(0,0)nO.与前 面的一般情况对比，此时有X = Z = R", A = R\*.假设又有 dim"(A) =codim烫(A) = 1,则存在投影 P,Q>Ra->Rn,满足 (1. 6).从面存在 ” (A ),叫,£ ” (Q),使

”(A ) = Span{“()}, (Q) — Span(w0}.

从上面的一般理论知道，存在*8>0,a>*。和(7■函数v - v\* (a,A) 6X,\_P,满足 w\*(0,0) = 0, Dfl^-(0,0)-0,使当 ia|<E, |A| Vb时

*Qf(.au0 + v\** (a,A), A) = 0.

由定理1.5,工= a«o + v, 是(1.11)的解，当且仅当0 =

>(。,人)且念,A)满足分岔方程

g(<j,A) = 0,

这里分岔函數g由下式定义：

g(a,A)w0 *= (.1 — Q)f(.au0 + v\* (a,^,* A). (1.12)

例L 6 用Liapunov-Schmidt方法重新考虑第一章例3.12. 我们考虑R'中一类更广泛的微分方程

dx

击=夕,

\* (1.13)

g =陟 + 廿十 x>(i + 喚工))+

其中夕尹0,啊坦顿0) = 0.考虑它的奇点(0,0)在扰动下的 分岔问题.此时线性部分矩阵为》，din/G4) = codirr应(A) = 1.取满足。.6)的投影 P>QtRa-\*R2.令’

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **11** | 0 |  | 01 |
| «0 — | 」n |  | ，Wo = | 」，&=［」， |
|  | 0/ | u |  | 1/ \fi! |

彳(A ) = Xp = Span(tt0}, X/\_p — Span{u0},

(A )=我(Q)= Span{sQ}-

取 彳(Q) = Span{w0}\_ 函数 v v\* (a) = ° 1 g 由方程 %/

Qf(a«o + \* (Q) = 0 确定，HP

0 = Q{叩 o + [茅 + 码(1 + 9<a)) + y0(a,^2)]wo} = Wo. 因此1> =尹。)空0.把它代入(L12),得到

g(<z)玖=(Z — *Q)f<,au0* + v\* (a))

=(J — q)z ：) =(7 — Q\*。J h a%°・

从面分岔函数g(a)=次.

如果我们考虑方程(1.13)的S扰动，扰动参数为為则扰动后 方程的分岔函数g(a,A)满足g(a,O)=次 利用隐函数定理易 知，存在 3>0和C0 函数a = a(A),使得a(0) = O.D^CaCA) ,A)= 0, D訪(a(A),A)尹0, V *\A\<8.*利用Taylor公式可得，当|A|《 1, *\a-aW\*《1,有

g(aj) =#(A) +I^g(a(A),Q(a — e(A))2 +。(|。一 d(A)|z), 其中 ju(A) = g(a(A),A).因此，在(a,Q = (0,0)附近，方程 g(a, A) = 0 当 ju(A)D^(0,0) < 0 时有两个零点，当 MAJD^CO.O) >0 时 无零点;当产(Q = 0时有一个(二重)零点.应用定理L 5可知，原 系统(1.13)在扰动下发生鞍结点分岔.注意，当扰动方程为C" 时,最后的讨论可从第一章定理2.12直接得到.

附注1.7本节中讨论的奇点分岔问题，主要着重于奇点个 数随参数的变动而发生变化的规律.实际上，在奇点个数发生变 化的同时(甚至在奇点个-数不变时，见附注1. 3),轨道结构还可能 发生其它变化.例如闭轨、同宿轨、异宿轨等的产生或消失.这些 情形在下章中将会看到.

**§ 2**闭轨分會

考虑微分方程族

(XQ： § = (2.1)

其中“ W <Z(Rn X R\* ,Rn), 设X。有一条孤立闭執

/.当a尹0,国《1时，我们关心X\*在y的邻域内是否还有闭執？ 有几条闭轨?这就是爾轨分岔问题.当y为双曲闭執时，问题是平 凡的(见第一章§1).因此，我们要找到一些方法,来判别，的双 曲性,以及当，非双曲时如何研究闭轨的分岔问题.至于，为方程 (2.1)的非孤立闭轨的情形，我们留待§ 5中讨论.

从原则上说，可把闭轨分岔问题转化为它的Poincar色映射的

不动点的分岔问题，从而可利用上节的方法.事实上，任取力&匕 存在过夕的m — 1维“无切截面”U U,按第一章定义L 6所述, 可定义Poincare映射*U'XW^U,*它是U的,其中W是时中 原点的邻域，满足FQ>,0) =». X\*的闭轨相应于3/U,A) — FGr,A) — h在Cr,A) *EU' XW*内的零点.因此，§ 1中的方法都 是适用的.注意，如果把坐标原点平移到\*点，就会满足§1中 M(0,0) =0的条件.

在解决具体问题时,困难在于如何实施上述原则.下面，我们 就平面向量场的情形作进一步的讨论，顺便介绍曲线坐标方法和 某些重要结论.

考虑平面上的微分方程族

(X》 等= 0(z,A), (2.2)

其中w W X R\*,R2), 设X。有闭轨匕它有如

下的参数表示

**r«**

£ = #（£）=

缺)

设/以T为周期,并且为负定向，即当\*大时，中《)沿，顺时针方 向旋转.取/在夜点沿外法向的单位向量

b = ；：；牛 23)

由 f(O±P,(z)及 |並)| =1 易知,V 0<z<T,

〈。《) *,<P'*Q)〉m 0, <f(O，广(D> w 0, (2. 4)

其中《•，•)表示R'中的内积.取坐标变换

■r = p(s) + 渔)”， (2. 5)

其中工在，附近(0<sCT,|n|^l,坐标(s,Q可以这样理解，从 *T* (0)沿，轻过时间*s*到达p (j)，再从p (s)点沿*7*的外法向?(s)移 动长度”到达z点(当”V0时,表示向内法向移动)，见图2- 1(a). 注意,3 =常数｝与｛$ =常数｝在平面上形成蛛网形坐标曲线(见

图2・l(b)),称(心矽为曲线坐标.

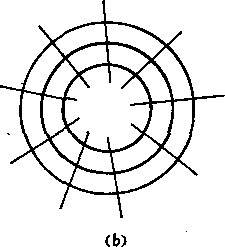
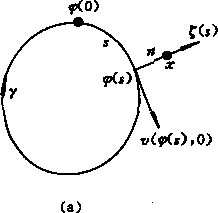


图2-1

我们先把方程(2.2)转换成曲线坐标系下的方程，然后建立 Poincare映射.把(2.5)对，求导,并应用(2.2)得

B(s) + 其0")=牙=(\*) +"(s)”)糸 + 照)零.

(2. 6) 分别以推)及时⑴对上式作内积，利用(2. 4)及|，(s)| = 1得 *华=*g(s), U(甲(s) + r(s)")〉，

虫=《V :G) *9* P(W ($) + 了(s)行，久)》 di - B(s)|2 + ”w),尸(s)〉'

消去\*機

dn\_ (g'(s)|'+”3'(s),，‘(s)〉)〈，(s), u3(s) + "s)”,Q> ds " 〈p'(s), t>(爭(s) + f(s)n,A))

—^=FXn,j,A), (2. 7)

由于= 9>(J)为X。的僻，故

*^p'(s) =* 0)t (2.8)

利用(2. 8)和(2. 4),可从(2. 7)算得

F(O,s,O) = 0,

〈r(s),票3 ($) ,o\*(s)〉3 = H(5). (2. 9)

*3F*

伽 h=0t A=0

从而(2.7)可写成

玉=(H(s) + 丄

(2.10)

其中尤 J = O(W).因此，(2.10)满足初值条件«|J=0=a的 解可表示为



+ F](九(£,小侦

(2.11) 现在，取x°的闭轨y上的点工。=*甲*(0),过边以法线«(o)为 方向取一截线匕,建立(2.11)的Poincar卷映射(见第一章定义L 6, 但此时与参数A有关)ROM) iw(T,a,A),这里的函数g", A)由(2.11)定义.显然,n(T,0,0) = 0.定义后继歯數

GCa.A) = *n(T*,a,A) ― *a,* (2.12)

则对每个A,|A| Cl ,G(a,A)关于a的零点与％在7附近的闭轨 相对应.注意(2. 2)中a 法2,F关于叭人为b的,关于s为

L 的，故(2.11)中的仃，从而(2.12)中的函数G £*矿* 定义2.1 若存在*e>0,*使V4£(0,e)都有*G(")<。*

(> 0),则称7为外側稳定(外側不稳定)的樋限环.若存在e > 0, 便VaE (-£,0),都有G(a,A)>0«0),则称，为内侧糠定(内 侧不稳定)的极限环.双侧均稳定(均不稳定)的极限环称为稳定 (不謹定)极限环;双侧稳定性不同时，称/为半稳定极限环.

从上述定义可知，稳定(不稳定)极限环必为孤立闭轨•下面 定义中的y为非孤立闭轨.

定义 2.2 若 V £>0,3 e (0,e)使得 G(aj,Q = 0,但. g®，a)尹o,则称，为外fllU型极限环.若存在e>o,使v«e (0,矽,都有G(a,Q = 0,则称丫为外侧周期环域.

类似可定义内側复型极限环与内侧周期环域.

定理2.3 解析向量场不存在复重极限环.

证明 由于在X。的闭轨y，｛\* = "$)iomwT｝上无奇点， 利用方程(2. 8)和，的紧致性可知存在*6>0,*使得当*\n\<3,\M* <3 时,〈"(s), u(w(s)+2)")〉,但正.因此，方程(2. 7)的右 端函数F(”,A)解析,从而GGM)话析.由于解析函数的非孤立 零点必存在一个邻域,使函数在其中怛为零.因此定理得证.I

定义2.4 若*3 e>* Q和正整数使当|a|Ve时， 有

G(a,O) +o(|a|\*), % = (2.13)

则称y为名的&童极限环.当龙=1时称为单童极限环，当&>1 时称为參重椽限环.

显然,当&为奇数时.^<o表明，为稳定的极限环,而c\*>0 表明*y*为不稳定的极限环;当*k*为偶数时，为半稳定的极限环. 注意，这里说的稳定性为轨道稳定性,而不是结构稳定性.事实 上，与第一章§1的定义相对照可知，单重环是结构稳定(双曲) 的，而多重环都是结构不稳定(非双曲)的.为了判别，是否为单 重的,我们记

。=ftr 敦卩(s),0)ds, (2.14)

定理2. 5若。#0,则7为X。的单重极限环.当^<0时， 为稳定的，当。> 0时，为不稳定的.

证明 由(2.115,(2.12)*得到*

G<a,0) =a(exp匚［HG) + *F,(n(s,a,Q)* ,s ,O)3ds — 1" 故由 Fi(n,s,0) = 0( |n|)和 n(T,0,0) = 0,可得

G„- (0,0) = Ifan ~~泡~~一~~。)芸(0,0)~~=吋口7($汕 一 1.

a-\*o *a* Jo

另一方面，把(2. 9)式的内积按分量展开，并利用(2. 3),(2. 8)可 得

H(s)=加)，票 =\*金何3),0)-祖\*汗史 =切票33>,0)~成£3,敦〉 =tr 書3(s),0)—監的。|，

其中 *v =* v(中($),0),

①=殺(如)2 + |>'姒+鹳时"+参(时)七 注意到，以T为周期，因此

『*H(,s~)ds* — j^tr 禀3 (s) ,0)dj = *a,*

代入(2.15)得

GJ(0,0) =e。一 1.

当0时，得到G(0,0) = 0,GL(0,0)*丰*0.故7是单重极限环. 它的稳定性与。的符号之间的关系是显然的.定理得证.I 推论2. 6当X。的团轨7为多重极限环、复型极限环或，附 近为周期环域时，必有«= 0.

$3 2.7设，为X。的\*重极限环@21),则对于丛

1. 存在y的(环形)邻域£7和正数8,使只要|用*<S,XA*在 U内至多有为个极限环.
2. v 5>o,对任给的y的(环形)邻域vet/,

3 X。的扰动系统xa,|A| <$,使x爲在y内恰有，个极限环.当応 为偶数时，上述结论可扩充至< =0.

⑶ 当&为奇数时,V VCt/,3 *8>0,*使当|A| 时,Xa在

V内至少有一个极限环.

证明 当扰动系统X)对应的(2.2)中的D £ b时，可由 Malgrange定理(第一章定理2.12)直接推得以上结论.当v G tT 时,可利用隐函数定理和中值定理证明.详细推导从略.I

例2. 8考虑R，上的系统

专=3S 糸=4 +小+技+*如寸,*

其中参数为尹0.设存在闭轨，，周期为T,则

ff =匚tr di =*+ 2bxy~)* di =狂*丰* 0,

这里利用系统的第一个方程得到2巧& = 2点工=d(廿).因此，这 闭轨是双曲的’

附注*2. 9* 上例表明，在一些具体问题中，,利用(2.14)计算。 时，可以不必知道甲3)的表达式，这就给利用定理2.5判别闭轨 的双曲性提供了方便.当。=0时，需要从(2.12)进一步计算(2. 13)式中第一个不为零的会,以便按定义2. 4判断7的重次.这时 一般来说计算量较大.

**§3 Hopf**分岔

当向量场在奇点的线性部分矩阵有一对复特征根，并且随参 数变化而穿越虚轴时，在奇点附近的一个W维中心流形上，奇点的 稳定性发生翻转，从而在奇点附近产生闭轨的现象，称为Hopf分 岔，第一章例2. 9就是一个典型的实例.既然Hopf分岔发生在二 维中心流形上，为了简单,下面都讨论二维方程.

经典的Hopf分岔定理

考虑向量场

其中 z=(X1(X2) e R2,“ 6 R1,F(O,O) = 0,D^(0,0) = 0.设 线性部分矩阵*A* (兴)有特征值*叭心*±道(閃,满足条件

(HQ «<0) = 0,^(0) = & 尹 0;

(H2) a，(0)尹 0;

(Ha) Recj 尹 0,

其中*h*为向量场X。的如下复正规形中的系数〔见第一章例 4 9), -

*柴=*+ c； |w|!w + ― + *ck\w\2iu> +* O(|w|M+3).

(3.2) 定理3.1 (Hopf分抡定理)设条件(HD和(HQ成立，则日。

>0和x = 0的邻域U,使得当|司Vb时，方程(3.1)在U内至 多有一个闭轨(从而是极限环).如果条件(HQ也成立，则3 ff> 0 和在0<电V。上定义的函数兴=“GD,满足“(0) = 0,而且

1. 当产=产(志)，OVziW。时，系统(3.1)过点(心,0)的轨 道是它的唯一闭轨.当Req < 0时，它是稳定的，当Req > 0时, 它是不稳定的，
2. 当 *fia ' WRec, < Q* 时,0愆1)>必 当所，(0)Reci>0 时0 (功V 0.

在下文中，我们先证明一个更广泛的定理，再证明定理3.1. 附注3. 2 Hopf分岔定理有多种形式和多种证法.例如可參

考[FLLL].实际应用定理3.1时,董要的是计算Rec”对某些常 见的方程，导出计算公式将为应用带来方便.下面给出一个例子.

例3.3 (CGH])如果二缝系统X，具有如下形式

件叫

其中 /(OtO) = g(0,0) = 0,D/(0,0) = Dg(0,0) *f,伉砖*。，则 有如下计算公式<

Re。】=島｛(Zzzx + /?.%• + *g.y + 思\*)*

*+ .xx + f* p — *gH$，gHH* + g”）

*ffgf* + /yjgy ] } I H = J»=O， （3.3）

遇化**Hopf**分岔定理

当条件(死)与(H，)至少有一个不成立时，仍有可能出现 Hopf分岔,这就是所谓退化Hopf分岔问题.

考虑二维淅参数向量场

(XQ； 糸=顶0,丿,“)，^ = g(z,/,“)， (3.4)

其中e Rl,/«e R“,/,g e c~,/(o,o,o)=g(o,o,o)= o.

引理3.4设在奇点愆,少=(0,0)系统(3. 4)的线性部分矩 阵有一对复特征根虹产)±推(产)，满足条件(HQ,则对任意自然数 如存在*S>0*和光滑依赖于参数产的多项式变换，当\^\<&时, 可以把(3. 4)化为

票=[a(“)+ i£(")]w + +

at (3.5)

…+水“)『伊+。(|如”+'),

其中a(0) = 0,£(0) =£o,g(O) =c"f = 1,2,・“盘，这里c,是把X。 化为(3. 2)后的系数.

证明 记A(Q = *<W，W>,*其中 *W* 和制产)为复特 征根a(G 土 i£(")； *m* =(四,风),其中皿,屿为自然数,*Mk^=* {m|2 + »h W 2i + 2};并且

(»»,人(“))=wiAf/i) +»»A.

由条件(H】)知丄(0) = 给出M 2艮+ 2阶的共振条件,

当且仅当 »i f Af \* —*(m\mi =* + l,ma = 1, — ,4} UAf\*.由

于M产)是光滑函数(j= 1,2),故存在$> 0,使当*\^\ <8*时 為(“)尹 S,A(G), 当》i £ .

因地,用第一章定理4. 6和例4. 9同样的推理可得引理的结论.I 定义3. 5稼X。以3,少= (0,0)为左阶细魚点(応法1),如

果条件(HQ成立，并且把X,化成正规形(3. 2)后，満足条件

Req — ― = Req\_i = 0,Rec\* 尹 0. (3. 6)

定理3.6设向量场X’以(0,0)点为&阶细焦点，则X。在扰 动下可发生&阶Hopf分岔,即

⑴对它的任一开折系统X”存在和(工成)=(0,0)点 的邻域U,使得当山O时，厘在U内至多有左个极限环；

(2)对任意整数任意常数。”，0＜站〈孔以及 (工,少=(0,0)的任意邻域u\* UU,存在一个开折系统X；，使得 X；在b内恰有j个极限环，其中siv(r.

证明([RS])由引理3. 4,系统(3. 4)可经光滑依赖于参数 的多项式变换化为(3, 5),对(3. 5)及其共辗方程引入极坐标，注 意产=切矛，。2衍=帰-七可得到

r= a(Gr + Re(C|("))W + ••• + Re(Q(G)#+' + 0(严+，), $=£(“)+0(产).

(3.7) 由于版。)尹0,所以当时，可从(3.7)得到 东=&(产” +禹何,产)尹+ - + *g 財 \** + 0(户+3), (3.8)

其中r《l,并且

方o(“)=

a(产) 版“)'

知(P”)=

Re(4(G)

—+7i>1Re(c1(/«)) +"()<»(“).(为 N 2),

这里们=们SQ是we [o,2k]和户(在0附近)的光滑函数. 当兴=。时,(3.8)成为

爵譬 9+1+0(户+3). (3.9)

在x,轴上建立方程(3. 8)的Poincarfi映射,并令

— (3.10)

显然，

V(zi/) = V(r,A),当 > 0. (3.11)

卩(电,户)在电> o的零点个数对应于方程(3.8)非零周期辭的个 数.

令函数

*R(r,乎,ft) =* + “2(會,")产 + ― + 产+1 + •••

是(3. 8)满足R(r,0/) =r的解;而函数°(7■瑚)是方程(3. 9)满足 択「,0) =「的解，则有

『愆1,0) = W(r,2O = fi(r,2«,0).

由此可知，当气法0时

赛(脸=C(°，0)-1 =敎。加)- 1,

*-mp -fx,* (3.12)

护0,0)=宓(0,0)=部,2Q, 他> 1.

由于択r挿)是方程(3. 9)的解,我们有

0, 当 1 <m<24 + l,

[(2，+ 1)门警，当 *m = 2k + l.*

r=0

因此

为(奪心

1,

0,

当 = 1» 当 1 V^V 以+ 1,

Re Ct

2就(2»+1)!］邛广乂0,当

m = 2^ + L

由(3.12)和(3.13)可得

0, 当 1 岳+ 1,

Rec.

2«2\* + 1)11 当 m = 2i + 1.

(3.14)

注意方程(3. 8)与(3. 9)右端的函数当r = 0时恒为零，并可 以光滑地开拓到r V D.因此,= P(nm) — *Xi*在Si/) =(0,0)的邻域内是光滑函数，由条件(3.14),利用Malgrange定 理(第一章定理2.12),在(热,“)=(0,0)附近存在光滑函数 hgQ，以。,。)尹。，以及对芯的M+1阶多项式函数Q6成)， 使

另一方面，丫(0,司=。，且丫包|/)对心的正根与负根成对出现 (这里要用到，当在(0,0)附近的一个小邻域内时，方程(3.

7)中。>0).因此，在(石/) = (0,0)附近的一个邻域内 对电至多有&个正根，短理的结论(1)得证.

为了证明结论(2),我们假设X。以工=0为龙阶细焦点，即它 具有如下的正规形

z = i炼名 + c」z|电 +。( |z|"+3)= , Re々*丰* 0.

取它的扰动系统

£ = F⑴+产為项斗遷-七+ - +叫t房严I上，

1. 其中*应一 jMmWk一侦*固定(1 W/MD化为极坐标 方程

*r* = "I•户 I\* + + 构 + Rec\*r2i+l + O(rM+s)

W-G(急

为了使系统(3.15)存在*j*个闭轨，我m按下述方式依次选取 处T,…，勺\_广设Rec\* > 0(当Re々V。时，讨论是类似的)，则可

选取OV“V1使

G(0,.••,()；小 >0.

选任—1 V0,以 \_1I《Rec\*,及 G (0,r\*),使得

G(0,仪\_i；々)> 0, G(0,•••,(),任\_[,々\_]) V 0.

类似地,可选分\_2，"\_2，"・，“i，以\_尸使得 具有交善的符号，并且0V "\*\_】《•••《以\_11《|Rect|,O< 门\_『<”・0£\_1<1,使得

r> 0,当 r = *rk,rk\_2,—*

rVO, 当广=广1，々一3,…

由Poincaifc-Bendixson环域定理，扰动系统(3.15)至少存在*j*个极 限环.

这里门的选取使产生的极限环都在U”内，而产的选取满足 |川 我们断言,能得到这样的系统(3.15),它在内恰有j

个极限环.若不然，则对任意的ff>0和r = 0的邻域U,(3.15)在 *U*内有多于*j*个极限环，则我们可以仿照上面的方法选取*既十\,*

1,…必，七以及七閃从而在。内再获得另外的& — j个极限 环(Ml〈。)，使扰动系统在U内的极限环总数大于如这与结论 〈1)矛盾•至此，定理3\*证毕、I

定理3.1的证明 当& = 1时，可从定理3.6得到定理3.1. 事实上，从定理3.1的条件(HQ和(HQ得知電=0是方程(3. 2)的 一阶细焦点，因此定理3.1的前一部分结论成立.再设条件(H，) 也成立，由(3. 8)•— (3.11)可知，后继函数

VO1/) — *X1V* 3,产)， (3.16)

其中

*V* 愆1，产)=[exp( 2It —】]+ “2(2咒/)工1 + O(X12),

(3.17) 再由(3.14)可知

*V* (^,0) = 2“響工

(3-18)

由(3.17)和条件(HQ可知

部。)=新⑹尊 <3.19)

利用隐函数定理，存在b> 0和在定义的光滑函数兴= 产5),满足“(0)=0和

VGr"(Zi)) = 0. (3.20)

至此，定理3.1的结论⑴得证.为了证明结论⑵，从(3. 20)求导 得到

S + 2 務"3)+ 麝 33))2 + *紀 g* = 0.

(3.21)

利用(3.18)及条件(H,)可得

*^C0\*0) = 0\* 齢0，。)= 4璧尹 °，*

,把上面的结果及(3.19)代入(3. 21)得到

“(0) = 0 你0)一 2 熱.

由此得定理的结论(2). I

从以上证明立得以下推论.

推论3. 7 设条件(HQ, (HJ和(H,)成立，则存在。> 0和電 =0的邻域U,使得

1. 当I闵Recd(O)产V。时，系统(3.1)在U内拾有一 个极限环，当Reci <0 (>0)时，它是稳定(不稳定)的;并且当点 f。时，它缩向奇点z = 0；
2. 当|产| <ff, RecG(0)“N。时，系统(3.1)在U内没有极

限环.I

附注3,8在应用定理3. 6时，需要首先判断未扰动系统X， 以*0*为细焦点的阶数,也就是确定满足条件(3.5)的*k.*在实际计 算时,经常应用下面介绍的Liapunov系数法，细节请见[ZDHD]. 设X。具有如下的形式

f 任=一崗夕 + p(\_r,y),

1 ■ a . , 、 (3.22)

*｛ y = Pox + q(x,y),*

其中z以ER,力归=。(惊,刃，)，禺尹0.我们利用待定系数法， 寻找虬£R,j=I,2,…和函数

F(w)=辱3+寸)+0(|工,刃“)，

使得

J p m

翌 + (3.23)

w《3.22)

满足上式的｛匕｝称为(3. 16)的Liapunov系数.在下面定理的意义 下，它与Hopf分岔系数｛Re(罗｝是等价的.

定理3. 9 匕 Ui=0,K>0(或V0),当且仅当

Req =…=Req\_i = 0,Rea>0(或 VO). I

定理的证明见[BL],下文中，我们把"｝或｛Re(c,)｝称为系 统的焦点量.

应用

例3.10 考虑二维系统

x — Ji,

, (3.24)

夕=—1 + 产 + 内 A + *!h,xy* + 仙史 y + *^x'y.*

此系统有两个奇点(土 1,0),而(1,0)是鞍点.所以只须考虑奇点 (-1,0)附近发生Hopf分岔的可能性.令S = z + 1,系统(3. 24) 变为

i,

$ = — 2$ + —冊一产3 + 内)+ F + (松 + 3产3 — 4贝)布

+ (— 3凶 + 6仙湾，+ 3 ~~ 4四)净’ + *四土.* (3. 25)

这个系统在(0,0)的线性部分矩阵有一对纯虚特征根的条件为

'% —円—产3 + “4 = 0・ (3. 26)

令丿=一 /万久则在条件(3. 26)下,方程(3.25)变成

f 一 /T%

■ 7 = ZTf - -^zf2 +(X + 3产3 *— 4心訶 +*

(一 3产s + 6"$)伽+ (版 4“,)尸？ +四的.

应用Liapunov系数法，可以得到

=寿 S — 3ft + 8內)，

S志标-g当S。,

預=亏仪，当咯=K = 0.

由此应用定理3M,可得下列结论：

1. 若必=両=0，冊尹0,则当“1 =出时发生一阶Hopf分 岔,并且系统〈3.24)在原点附近存在雎一极限环的参数区域是

ft (ft 一 所) V 0, 0 < IjUj — "zl《|%|《1.

1. 若內=0,“3关。，则当“1 = 4阮必=3%时发生二阶 Hopf分岔，(3. 24)在原点附近存在二个极限环的参数区域是

产3(“2 — 3内)V 0, “3(凶一冊一 %) > 0,  
。V Ml —門—妇《伏2 — 3観《I妇《1.

1. *若*ft 7^0,则三阶Hopf分岔发生的条件是

11 2 14

Mi = yft, *th =* 亏产4，*氏—*亏兴"

乂(5代—14Q < 0,㈤(出一 3出 + 8仪)> 0,

版(“1 — 出—出 + 向)V °，

0 < 1仏一 ％ -内+両丨《 0 — 3代+ 8代丨

《|5内一14四|《|饱|《1.

Bautin对右端是二次多项式的平面微分系统(简称二次系统) 的一种标准形式导出了著名的焦点量公式(见[Ba]),并证明了二 次系统细焦点的阶数至多为3 (他的第三个焦点量公式在符号及 数值上都有误，在[QL],及[TLLL]中得到纠正).下面介绍的结 果是把他的公式推广到一般形式的二次系统上,应用校方便.

例3.11 ([Lc])设

*/ x y* + «2o^a + *+ aaly2, @ 泻*

I 力=z + *biri3? + b^xy + ,*

记

*A* dgo 十 角 2,3 缶0 + tin + 2如2,8 =缶 1 + Zdjo,

7 ——*bltlA3 —* (aao — 6n)A2B + *(,bm —* <z„)AB! *a^B3,*

$ = a歯 + 槎 o + a0JA + *biaB,* 则(不计正数因子)

*Vj^Aa- Bg,*

V2 = U?(54 — #) + a(5B — a)卩，如果匕=0,

*V3 = (Aa* + 80)",如果 Vi = V2 = 0,

*Vt =* 0,当 *k>3,*如果 V1 = V2 = V3 = 0 .

(3.28) 在最后一种情形下，系统可积,(0,0)为中心点.

附注3.12从原则上说，当X。以0为细焦点时，总可以通过 有限步运算确定细焦点的阶数*k.*但是当*k*较大时，对一般系统想 用(3. 28)的方式来表达焦点量公式,计算量非常大.例如，当把方 程E3.2?〉右端关于工,丿的另二IgA商芳三状適时,\*®•篇树h 最高阶数为5 (见[Si])；但如果在(3. 27)右端补充上三次项，则它

的焦点量公式十分复杂，•即使利用计算机，目前也仅推导出前几个 焦点量公式.确定细焦点阶数和求焦点量公式，与区分中心与焦 点这个困难问题紧密相关.在这里我们仅列举我国学者在这方面 的一些新近工作：蔡燧林、马晖©C给出了判别广义Lenard方程 中心和焦点的较一般方法；杜乃林、曾宪武皿］给出了计算焦点量 的递推公式；黄启昌等网w］研究了泛函微分方程的Hopf分岔问 题；沈家齐、井竹君'叫给出了判别存在Hopf分岔的一种新方法； 黄文灶证明，当非线性方程零点的拓扑度变号时，会产生连通 的分岔曲线,等等.

附注3.13若梧条件(H，)换成

(H) FGr,“)£ X (—。,。)，叫)，

其中V是酔中原点的一个开集，则当条件和(H)成 立时，或者系统(3,1)当产=0时以原点为中心，或者当产e (—七 0)或(0,。)时(3,1)在U内的奇点外围有唯一闭轨,并且当兴f 0 时，此闭轨缩向奇点.这是Hopf分岔定理的另一种形式,证明可 参考⑵］.注意，此处F(z,“)的条件不能减弱为F(工,“)6 请看下例.

例 3.14

dr

在=zsin" + ^08戸 + (— zcos/z + ysin“)tan *At*

糸=—xcos点 + 河快 + (— xsin/i — jpcos/iitan *A,*

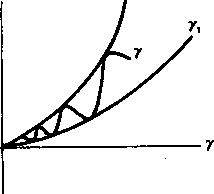
(3.29)戸 其中A = el(2 +血T), r=山+尹,0</z<y.容易验 证,对此系统而言，条件(HD,(Hz)满足,且右端函数是b的，但 不解析.所以(H)不满足.由于

拿 a — rcosju^tan (e(2 + sinr-^ ) — tan/i］,

出(3.29)^其中0 <r<l,故原点是<3. 29）。的渐近稳定焦点.

考虑5"）平面上由下式定义的曲线

*卩=*e\_r（2 + sinrT）. （3. 31）



*o*

*7t*

图2-2

它显然界于曲线％，lei与曲线？点=3eT之间（见图

*2-2）.*由于

糸=广\*厂可瘁（2 +血广\*） cosrF）

在r = 0的任意小邻域内都改变其符号，所以对任意小的产>0,存 在门（产）尹疽产）,冗（产）-\* 0当*叶0,*使得r =小产）均满足方程

（3.31） Q = l,2）.从而由（3. 30）和（3. 31）得到 这说

明对任意小的声，系统（3.29）#在原点附近都至少有两条闭轨.因 此，上述结论的条件F3,G w b不能减弱为e c~.

请读者验算,此例中对一切正整数払都有Rec\* = O.因此，对 6系统而言，当对一切正整数虹Rec\* = O时，奇点不见得是中心.

对彖数一致的**Hopf**分會定理

考虑C~平面系统

一京+次3，心)，

(3. 32)

*=瑩 + Sg(.x,y,!i,3),*

其中函数h = h(z戒)，参数amWR',且$为小参数.设系统有 奇点\*= 0,而且在该点的线性部分疤阵有特征根心产,。)士*诺3,* »若存在。> 0及在0 V $ O定义的函数产=*呻*,满足条件 (Hf) aO(5),5)=0,伙兴(5)0)尹 0,

则在一定的附加条件下，当产=产3), dW (0,b)时，系统(3.32) 可在x = 0点发生Hopf分岔.对每一固定的(0,。),利用推论 3.7可知，存在e($) > 0,使得当|兴一兴(5)| < £(S)且兴〉 狀心(或 时，系统有极限环.问题是:当df 0时可能有

\* 0.我们希望找到系统满足的条件，以保证存在正数*30*和 略,使得对所有的dW (。,出),都有e(3) > e0.这就是所谓对参数 一致的Hopf分岔问题，见图2-3.

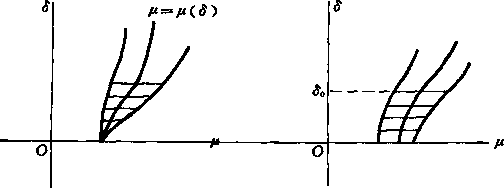


图2-3

代替定理3.1中的条件(H，)和(HD,下文需要的条件是

(H； ) «■ = lim *丰* 0,

(H/ ) = lim 4rRe[ci ("(3) ,$)]*丰* 0.

J—0 O

定S3.15 设系统(3. 32)有奇点(布,北)，系统在此奇点的 线性部分矩阵有特征根a璀,d) ±诉璀,$).又设存在爲>0和在 *0<8<8,*定义的函数产=产3),使条件(或)，(电)和(H# )成 立.则存在& > 0(晶 W 曷)，。> 0 和在xo<x^xo + <;,0<5 < 上定义的唯一函数兴=Zi(z,S),满足方(女,0) = 0,而且

(1)当兴=*h5)* ,x0<x<xo + ff,0<5<^ 时，(3. 32) 过工丿平面上的点(工,0)的轨道是它的唯一团轨乌.当廿<0时， 玲是稳定的极限环;当>0时,七是不稳定的极限环；

⑵当ay V0时，g(x,5)>0(当宀；>0时，五GM) <0.

证明 不妨取愆。，如)=(0,0).与定理3.1的证明类似，所 不同的是以产-产3)代替那里的产，而以$为参数，则那里的后继 函数V(h”)变为*V(.x,fi -*兴(8),3)的形式.注意到*3 = 0*时， (3.32)为 Hamilton 系统，因此 VGr/ —兴(0),0) = 0.代替 (3.16),我们有

*V(.x,ft —*产(3),S) = &V\* (工,兴—兴(5),3).

从条件(H；),(H；)可得

*気■(0,0,0)砖0,* 冢(0,0,0)尹 0.

对广(礼“一兴(5),3)在=(0,0,0)点用隐函数 定理即可,其它推理与定理3.1的证明相同.I

推论3.16在定理3.15的条件下，存在&>0(&M曷 。和(如必)的邻域U,使得

1. 当 0 V6V，，伏一兴($)丨〈"且a七：(兴一兴(S)) V0 时，系统(3. 32)在U内恰有一个团轨.*当c： V* 00 0)时,它是稳 定(不稳定)的极限环.
2. 当 0 <$<晶，1“一兴($)1 V。，且 a'C：以一“0))>0 时，系统(3. 32)在U内无闭轨.|

在第三章§ 1中，我们将看到这种对参数一致的Hopf分岔定 理的作用.

**§4**平面上的同宿分岔

由二维流形上的结构稳定性定理(见第一章定理L 13)知道, 当存夜鞍点的同宿轨(或异宿轨)时,系统是结构不稳定的.事实 上，这种连接鞍点的轨线在扰动下可能破裂，从而改变系统的拓扑 结构.第一章例2.10就是一个典型的实例.在本节里，我们要进 一步讨论，当这种分岔发生时产生闭轨的规律.

我们先从凡何上考虑，以获得一些启示.设平面上的单参数向 量场族X户对应于如下的方程

等= M"), (4.1)

其中@ £ C~(R2 x R,R\*),设X。的轨线结构如第一章图1 -9(b)所 示;它有一条初等鞍点的同宿轨*r,r*内部是稳定焦点的吸引域. 当产n。时，「可能破裂为两条分界线(鞍点的稳定流形与不稳定 流形),见图1-9的(a)与(c).

显然，在图1-9©的情形，分界线破裂的方向与破裂前F的稳 定性相配合,就构成了一个Poincarfi-Bendixson环域，从而系统X户 存在闭轨.当1川充分小时，可以使这个环域充分靠近原来的同宿 轨线.因此，我们可以认为闭轨是从F经扰动破裂而产生的(或反 过来说，当 时，闭轨趋向于「而成为同宿轨).这种分岔现象

称为同宿轨的分笛,或简称为同宿分岔.

考虑向量场族

(XQ: 糸=/\工,心 (4.2)

其中 /■ E ^(R2 X R,R!),/(0,0) = 0, Xo 以 h = 0 为双曲鞍点 (即det莹(0,0) V0),并且具有同宿轨匚，如图2-4(a)所示(对情 形(b)可类似讨论).

QQ xo

(a) <b)

ffl 2-4 图 2-5

从前面的讨论中可以看出，在研究同宿分岔时，下面两个问题 是重要的，

1. 如何判断X。的同宿轨匚在其内侧的稳定性?(在第一章 例2.10中，这是利用r0内的焦点的稳定性得出来的.我们希望从 向量场在鞍点和n的特性来获得这个信息.)
2. 如何判断x户的稳定流形与不稳定流形的相互位置？

为了解决问题(1),我们先对X。在r0内侧引入Poincar®映射 (见第一章定义1.6).取*勿 b"* 为过h点与兀正交的无切线 (向内为正).则在如附近存在一个邻域U,使得*peu(\L+,*从 *P*出发的轨线甲(£,0)经过£ = T5)将再次与L交于一点『3)= P 33)“)(见图2-5).令Mo为沿着*Lt*的单位向量，则V /■ e U Cl乙才，它有如下的坐标表示

*/> = fla + o ng,* (4. 3)

其中«>0.相应地,P5)有坐标表示

P3)= 0CT3)，P)= 6+ R(a)«o, (4.4)

其中供a) eC\*,H要o<a《l(因为X。是的).定义函数  
*d(a) =* £(a) — *a,* a > 0.

定义4.1 X。的同宿轨匚称为是渐近稳定(或不穂定)的，如

果存在7>o,使得d（。）V 0 （或>0）对所有的0 成立」

附注4・2 注意limdM） = 0,因此A的穂定性由极限

= limg'（a） — 1

ff-\*0 a-\*0

所决定:当lim#（a） <0 （或>0）,也就是iim伊（a） <1 （或>1） \*t-\*0 ft-\*。

时是渐近稳定（或不稳定）的.

引入记号

% = tr 監（0,0）.

定理4.3设X。具有双曲鞍点O及同宿轨儿，如果％尹0, 则当1 < 0时，匚是渐近稳定的，而当叫> 0时儿是不稳定的.

证明（［CH］）如上所述，取*poera,*可建立X。在A,邻域的 Poincare 映射

*p：* u n 说-灼，尸3）=

并且?,?（?）分别有表示式（4. 3）和（4. 4）.把（4. 4）式对«求导, 得到

伊（心° =［翱（7'3）,初~~气絆~~”0 +宴 »o

*™ vp op* i-T（M

f 3T3） 丄亜 八u、

*=§8* ~~由~~ ”。+ 敦 «o, （4.5）

*°P 3P* <=-T<fl

其中/'« = ■/"（皿 o + ^0,0） , « € R,而 \_/"# = *fy* 注意心是沿' 的方向，当a足够小时，内积〈毋,就尹0,在（4.5）式两端以门 作内积，得到

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *S驀* | %〉 |  |
| 如果记 | *〈什，q ■* | |  |
|  | *些*  *3P* | *% = wn* + 例 °, | | (4.6) |

其中，则

*，3 =*品 (4. 7)

下面，我们设法把iim?与1建立联系.首先，由的连续性， a-\*0

可以把互表示为

= (1 + §)兀 + 取如 (4. 8)

其中勻舟-\* 0当«-> 0.另一方面，由于

*9* (T(/>),力)\* U n 命 f Lo"o + 嘔 ipo + 夕(a)%,  
它的导映射宴 把洌+嘔处的切向量见映到/>。+ 83版

*dp*

处的切向量刀,即

柔<4.9) *dp t-n.fi)*

由(4.8),(4. 9)和(4.6)得出

*票* /■# =(1 + 勺 + *e\*)fp* + qg (4.10) *°P E3>*

(4.10)和(4. 6)给出卖 在基向量S0 下的矩阵为

*dp* ■丁S)

1 4- E1 + && f

5 』'

从而

det 绑 =(1 + &)% (4.11)

*°P* I

其次，我们来计算上式左端的行列式(它与坐标系的选股无关).注

意斜/)是变分方程

\* =苦(心,》0)“

的基本解矩阵，并且果

是单位矩阵，由Liouville公式可知

，=0

det(豪(3)) = exp fti•务/(卩*(4.12)*

”(a) = ] 匚3氏黑/"3«,力)，0)山.C4.13) 条件％ = tr £^°，°)V 0 (或〉0),保证存在0(0,0)的邻 域V，使得当般卩时，有tr^/(x,0)<^<0(或>号>0). 当*0<a<S,B*足够小时,T3)=孔+ *TitT,*是流? *{t,p)*停留 在V中的时间.当a-0时7\~+8,而" 是有

界的.因此，由〈4.13)式容易推得

lim夕，(a) = 0 (或 + 8),当％ < 0 (或 >0),

由附注4.2立得定理的结论.|

定理4.4设向量场X户由(4. 2)给定.假设X。以。为双曲戟 点，有同宿轨匸，并且％ =比基/(0,0)共0.则存在8 A 0和彳〉 0,使得当<8时，如果X户在匚的寸邻域内有闭轨「户,那么马 是唯一的闭執3并且当％ V 0 (> 0)时,「户是渐近稳定(不稳定) 的.

证明 我们只须考虑这样的闭轨「户，当兴~0时，它趋于马. 取据€ 并取乙和为同前，则当I川足够小时，「户必与巩横 截相交，记*% = 5* 玲对于*也*点附近的*P^Lb,*引入坐标表 示 0 = 00 + *呢,*(a| <S.蚂有 0户=角 + %no, ]a“| V。，当 I以 足够小时.对于任意固定的产，可在乙上％点附近建立X户的 Poincar色映射％

0 =做。+ 力0 匕。)=§户(a)”o + 久，|a —%|《1, 并且&(%)=财则八的稳定性由[£/(%) -1]的符号决定.重 复定理4.3的证明方法，并注意当兴〜。时，球f八，气〜0,因 此

炽g={：8,如負

这说明当% < 0时，弓，渐近稳定；当％ > 0时,「户不稳定.

另一方面，两个具有相同稳定性的闭轨不可能并列共存，因此 「户是X\*的唯一闭轨.E

现在，剩下要解决的就是我们在前面所提的问题(2),即X。的 同宿轨孔经扰动破裂后，如何判断X兴的稳定流形与不稳定流 形*w：*的相对位置？ Medikov函数就是用以描述和昭之间 “有向缝隙”的判定量,从而解决这个问题.

先把方程(4. 2)改写为

(XQ： 糸= ■/"(•!)+点gGr,Q, (4.14)

其中 & 仃(史,R2),g ee(RJXR,m,r>2.设X。以 x0为双 曲鞍点，有同宿轨设匚有表达式

roi *工=<p 0) , -\*xa,*当 Z-\*±8.

a. *b,*

对于平面上的向址4= @=.，定义

的丿 1皈

。丄= *,a l\ b =* <a,»〉.

容易验证，对于任意二阶方阵A ,有

(如)A 6 + a A (Ah) = trA (a A ft). (4.15) 过匚上的中(0)点取截线E,使它沿法向»(0) = (P,(0))1 = (9=(0)).当I " I《1时,X\*有双曲鞍点七，及其稳定流形吧与 不稳定流形这里珏…互，当产…0.利用［Sh］关于鞍点分界 线光滑依赖于参数的定理，当|川《1技｝0(或tMO)时,X户有唯 一有界解卬;($)(或 町W)),它与充分靠近，且当*t〜* + 8(或一8)时,"汐)(或昭(少f邛.为了描述"；与"; 的相互位置，我们引进下面的定义,它可以看成是吧与 昭间'■缝 隙”沿汉0)的投影(相差一个非零常数倍).

dO) =〈W；(0) — W%(C)),尸(p(0))>. (4.16)

D(J) =g(p(e),O) A y(P(z))=

*J\(旳))*

**(Q)**

(4. 17)

ff(t) = £tr 莹(j?(f))dz.

(4.18)

(4.19)

(4. 20)

(4.21)

定理4.5设/増£仃彳22,乂。有同宿于双曲鞍点瓦的轨 线几，则对扰动系统X”有

泌(Q = M +。(1“卩)，

其中

*J —8*

而 D(Q 9。)由(4.17)和(4.18)定义.

证明记

辭照)匚=冲5,  
沖)匚=5 V。，  
zls(t) = ?(O A /(^(/)), r>0,

孕《)= /(£)人 /■(?(，))，£ W0.

注意应】《)是(4.14)的解GN0),把它代入(4.14),对“求导后取 “ =0,得到

耳戸=堂整以政 r)+g33),0), (4.22) 因此，把(4. 21)对，求导，再利用(4. 22)和(4.15)得

£厶七)=^2 A +^(O A *£心。))*

~~=可鷲以~~如)A /(P(i)) +^(P(O,0) A

+ 打f) A ~~”鷲地~~(M)) 利用常数变易公式可得

骨$)=萨)何(0) +jym(gg),O) A

(4. 23) 另一方面，因为 f f8 时 p«)—互,所以 /(<p (()) -\*/(x0) = 0, 且趋于零的衰减率为？七这里4 A为X。在双曲極点钊的线性部 分矩阵茎S。)的特征根島< 0 < A2.再次利用［Sh］关于鞍点分 界线光滑依赖于参数的定理可知，当时营(Q有界.从而由 (4. 21)知"->8时△sq)〜eV — 0.记％ = tr茎(女)，则易知 AV%〈為,故当*t-g*时厂艸)〜e-财，因此有 limeF\*\*(t)= 0,

(-\*QQ

从而由(4. 23)式及上式得到

^s(0) =-|+™D(z)e\_<,<,)dt. 同理可得

空(0) =一 J-" ZJ(0e\_O<I,d/.

从(4.16), (4. 20)和(4. 21)易知：d(0) = 0, d，(0)=泌(0)- ^(0) =4.定理得证.|

由定理*4.* 3,定理4. 4和定理4.5立即得到

定34.6设X#由(4.14)给定,X0以*处*为双曲鞍点,且有顺 (或逆)时针定向的同宿執兀，并且％尹0,则存在3>0和7>0, 使得当I产|〈呑时

(1)若*。花'>* 0 (或〈0),则X#在匚的牛邻城内恰有一个 从r0分岔出的极限环.当tf„<0时,它是稳定的；当<70 >0时，它 是不稳的.

（2）若女心＜0（或＞0）,则X“在匚的化邻域内不存在极 限环"

注意在4的表达式中含有*9* （0，这使应用定理4. 6受到限制. 但在某些情形下无须求P （O便知DQ）是定号的，从而厶与*D（t）* 有相同符号，参见下而的例子.

例4. 7设*x,y* € K,平面系统

I x = P（z,y）,

I *y* = Q（3）,

以原点为双曲鞍点，有顺时针定向的同宿轨匚，并且翌（。，0） + ^（0,0）尹0,则对充分小的|产|,当啊＞ 0时，投动系统

/ 土 = ，少一产 Q3,y）, （4 24）

I *y = Q（x,y）* 4- *ft* P（x,y） '

在珏的小邻域内恰有一个极限环（其稳定性由％的符号决定）；而 当^＜0时,（4. 24）在匚附近没有极限环.

事实上，

-M）=de% 二（尸+ Qz）|g門）RO, 并且等号仅在个别点上成立，因此^＞0.利用定理4. 6,上而的结 论立即可得.

附注4.8在上面的定理4.4和定理4.6中菴有条件％尹0. % = 0称为临界情形，此时称鞍点为细®点,这就出现了退化同宿 JJ-a.RoussarieM和化殉貫分别讨论了从（退化的）同宿轨分岔 出多个闭轨的问题.他们的基本思想是在奇点附近利用鞍点性质， 与大范围的微分同胚相结合，得出PoincarE映射的表达式，从而在 退化程度较高时，可以经过逐次适当的扰动，反复改变同宿轨内侧 的稳是性，产生多个闭轨,并在最后一次扰动时，使同宿轨破裂面 产生最后一个闭轨.此时，系统（4.14）右端的扰动项g中除了产 外还含有其它参数.由于介绍退化情形的同宿分岔需要较大篇

幅，此处从略.但对于Hamilton向量场的扰动系统，我们将在§6 定理6.4中介绍一个常用的结果.

罗定军、韩茂安和朱德明在［LHZ］和［HLZ］中，对孤立和非 孤立同宿轨在扰动下产生极限环的唯一性作了详细的讨论；冯贝 叶E得出了在临界情形下判别同宿轨或异宿轨的稳定性的方法; MourtadaMJ对含两个鞍点的异宿环的分岔问题进行了深入的研 究.

对参數一致的同宿分岔

类似于对参数一致的Hopf分岔问题，现在考虑含双参数凯产 的平面Hamilton扰动系统

dr 击=

诚+次3,心）,

\* =瑩+法（3,心）,

(4.25)

其中&为小参数;H = *H^x,y）*为Hamilton函数;而且*H,f,g*有 足够的光滑性.设当0为时，系统有双曲鞍点（叼，无），而且 存在函数“=产。），使当“=产（"时，系统（4. 25）有鞍点 的同宿.轨门.则在适当的条件下，对每一个固定的*6>0,*存在 e（5）>0,使当g 一产0）| Ve（"时,在乌的邻域内有定理4. 6 的两条结论.我们关心的是:当0时，如何保证e⑹不趋于零, 参见图2-3.

我们不在此给出一般的定理，只在第三章引理丄6中对一类 特殊的系统介绍这种对参数一致的同宿分岔的结果.

**§ 5 Poincare**分岔与弱**Hilbert**篥**16**问题

本节考虑平面向量场族

（XQ： *¥ = m + 探3,产）,* （5.1） 其中 *f* 6 (7(R\R0 *,g* e <^(R2 X R ,Ra) ,r > 2.设 X。具有周期 环域，即存在一系列团轨

rA> {” h(z)*= h,* hi <ft <ftj},

其中函数he *c+'.*我们关心的问题是,x°的哪些闭轨马，(加< *損6* 经就动(階l《i)能成为x“的极限环知(即当“f 0时, *Ll 3?*并且究竟能从rAo扰动出X户的几个极限环1这就是 Poincare分岔问题.

Poincare 分為

本节的■'个基本假设是,闭轨族*rh*关于砍在統附近)单调排 列(当X。为Hamilton系统，且*H*为相应的Hamilton函数时，,这个 假设总是成立的).因此过「标上任意一点的无切线可用为参数 化设

马| *x — <p , 0 W t WTh，* (5.2)

其中*孔*是*rh*的周期.为了考察当“尹o时x户过"om)的解能 否成为闭轨,我们沿马在會co,ft)点的法线方向尸3 (0M))取 无切线乙 *设H = Mt,hg*是系统(5. 1)的解，满足初值条件式0’ *3=甲3*设此解当£ = *T{h*，产)时再次与乙相交，则由微分 方程初值问题的解的唯一性知

x(i,A,0) = p(t,A), *= Th.* (5.3)

定义后继函数

G0\*) = — z(0,h,“)，*fL* (p(0,h))>,

(5.4) 则显然当0时,关于我的零点对应于X户的闭轨， 且 Geer.

由于X，在马。附近均为闭轨，故利用(5. 3)和马以与为周 期,可以从(5. 4)搭到

G(A,0) = <x(Tk,A,0) — x(0,A,0), X1 (?>(0,A))> s 0,

忻一知|《1.因此

GS,“)= “(@(方)+ \*(方,“)). (5. 5)

定理5.1 (1)若A = A,O< |“|《1时，衣撬,产)为X“的 闭轨，则必有①(万)=0,

(2)若存在自然数加1 使

<P(A) = 小1>(万)=0, <5a)(A) = 0,(5. 6)

则存在<7>0,5>0,使当0V |川O时,X户在的呑邻域内至 多有左个闭轨，它们是X“的极限环.特别，若@(兀)=0,^(1)= 0,则当。V |"| O 时,X#在孑的$邻域内恰有一个极限环.

证明 ⑴若@6)尹0,则存在$>0,使当*\h-h\<s^,* |@6)| > ~~性N~~ >0.由(5. 5)可知存在 <T>0,当 0 V |产| V。 且|A-A|< $时*,G渾函*无零点，即X户在马的呑邻域无闭轨.

(2)反证.设(5. 6)成立，但V <7>0,不存在$>0,使当*\u\<* b时,X»在马的$邻域内至多有&个闭轨.因此，存在佐，和正数 满足当^f+8时土f0,$„,->(),并且X%在马的么邻 域内至少有&+1个闭執，即GS,%)对我在*\h-E\* V、内至 少有\* + 1个零点.利用Rolle定理可知,存在妇，満足*\em-K\<* 而且

的)(妇+心多晳(妇，丄)=。・

令mf+8,得磴=0,这与已知条件矛盾.I

为了实际应福的方便，下面的定理给出从4的表达式与原方 程来计算(5. 5)式中的<P(A)的公式.

定理5. 2 对于方程(5.1)和马的表达式(5.2),有

@(五)=丄气-虹‘满七以"德)，0) A *f(.<p* (t,A)))dt, (5.7) 其中

*o(t,h) =* j tr 莹(甲(浦))df.

证明 从(5. 5)和(5. 4)知

臥五)=家?(矿户) =  
叩 夕・0

階钏+劉|〃广豢。，"，尸皿5»， 其中寄与篆在工=\*箫，0)取值.由于x = x(i,A,O)是X。的 解，利用(5. 3)及马为*琮*的周期可得 鬃 =/(x(Tft,A,O)) =/(?<Ta,A)) =/(p (O,AJ),

i=x<TvA,O)

故

旳)=<^(Ta,A,O) 一 寄(强,0),尸(p(0,A))>. 若令

△(5=〈制，五,0),产(g,五))〉

=孚(赫,0) A

则

@5) = &7\仇)一厶(0,五). (5.8)

与§ 4中(4. 23)式的推导相类似，可得AQM)的表达式如下 ""△(0,丸)+ j；e-心%何(璀)，0) A /(?(i,A))d().

. (5・9)

由推论2. 6知，当g—研《1时,<7(T\*,A) = 0,因此，由(5. 8)和 (5. 9)得到(5.7). |

附注5.3 当©(五)三0时，(5. 5)成为

G6,“)= a?(3(五)+ “攻(知 Q).

此时称饱(五)为高阶MelMkov函数,从它的零点分布可研究扰动 系统闭轨的个数.另外，在应用定理5.1讨坨分岔问题时，系统 (5.1)中的右端除了依赖于扰动参数兴外，还可能依赖于其它参数 A € R\*,从而@6)转化为®(A,A)，由此研究对A的不同取值史(如 Q相对于方的零点个数的变化.

**Hamilton**系统的扰动与將**Hilbert**第**16**向通

在实际应用中，经常出现(5.1)的一种特殊形式，即Hamilton 向量场的扰动系统；

糸=-當+心嵐丸小)，

-, \_ (5.10)

这里变量参数产£R,AWR七映射Heb+'F'QEtr, r>2.设当“ =0时,未搅动系统有闭轨族，并有表达式

{(科少 IHCz,/) = *h,h\ < h* < 知}.

假设rA关于*h*单调排列.对于系统(5.10),公式(5. 7)成为 心)=-赤」襄P+费加. (5.11)

注意当产=0时,沿马有

dx *dH* dy \_ *dH dt 3y 9 dt 3x \**

因此，可把(5.11)改写为

QCc、勿O,A)dx — 冷dy・(5.12)

*h*

JLC. mnwrWS,张芷芬(见[N])和陈翔炎©最先对系统 (5.10)给出了相应于定理5.1的结果.

附注**5. 4**当*为jy*的” + 1次多项式，巳**Q**为工， *3*的次数不大于孙的多项式时，<5.12)是〜个**Abel**积分，寻求它对 *h*的零点个数问题称为弱Hilbert第16问题.由于这个问题是V. I. Arnolds^】首先提出来的，有时也称为Hilbert-Arnold问题.1900

年,D. Hilbert™在第二届国际数学家大会上提出了 23个数学问 题,其中第16个问题的后半部分是:右端为\*次多项式的平面系统 极限环的最小上界H00是多少?可能出现的极限环相对位置如 何？近一个世纪以来，特别是最近几十年来，出现了大量的工作. 例如,史松龄S和陈兰茹、王明淑也WJ最先分别举例证明H(2) > 4;李继彬、黄其明队如举例证明H<3) > 11;叶彦谦、陈兰茹和杨信 安(见［CY］和CYY］)利用［Zzfl,2］中关于极限环的唯一性定理， 证明二次多项式系统中按叶彦谦分类的< I )类方程至多有一个 极限环，等等.在叶彦谦等的专著［Yl,23,蔡燧林和蔡燧林、张平 光的综述文章［Cs］和［CZ］,马知恩的专著［Mz］,梁肇军的专著 ［Lz］,以及Dumortier等人的系列文章［DRR1,2］和［DER］中，读 者可发现大量有趣的结果.经过nyashenko™和Ecalle顷修补证 明后的Dulac關有限性定理指出'一个给定的”次多项式系统的极 限环个数有限.但是,对全体”次多项式系统而言，其极限环个数 的一致上界如何估计(哪怕是否有限),即使对&=2这种最简单的 非线性情形，仍是一个未知的问题.S. Smal/w认为，对H(”)的 研究可能是Hilb\*问题中最困难的一个问题，可见这是对数学工 作者的\_个重大挑战.

由(5.5)式可知,Abel积分(5.12)是系統(5.10)在儿附近后 继函数的一阶近似.因此，积分(5.12)的零点个数与系统(5.10) 的极限环个数密切相关.当H是» + 1次多项式，户和Q为刀次多 项式时,(5.10)是一类特殊的/次系统，即Hamilton向量场的扰动 系统，所以把研究Abel积分(5.12)零点个数的问题称为弱Hilbert 第16问题,还应指出的是，当所考虑的多项式系统接近可积而非 Hamilton系统时，需要先乘上一个积分因子，才能把它化为(5.10) 的形式.此时*H,PtQ*可能不再是多项式.习愦上仍把(5.12)祢为 Abel积分，把求其零点个数的问题称为弱Hilbert第16问题.

例5 考•虑van der Pol方程

而+产(？一1)击+工=0,

(5.13)

其中0 V I产I《1.可把它改写为如下的等价形式 dx 否=外

V 糸=-H + "(1 — X2)^.

(5.14)

当J« = O时,(5.14)*为*Hanulton系统，它的闭轨族可表示为

*rks* (/Z(x,y) -^―x2 + y = Aa, A > 0), 或写成参数方程

*r^t x — hcost, y* — ftsini.

代入(5.11)式，得到

*歌h) =* — 2 J A2sin2f(l — ft2cos2/)dt 2成』］—*牛).*

显然儿=2是它的唯一正零点，样且是简单零点.由建理5丄当 供|《1时，系统(5.14)有唯一的闭轨匕当兴f 0时,y趋于半径 为2的圆周.

在这个例中，由于*鱼g* 可以积分为显式，使问题很快获解. 但在多数憎况下问题并不如此轻而易举，请看下例.

例5.6考慮平面系统X”如下：

专=好。(|冲)，

(5.15) =— 1 +X2 + "(a + *x~)y* + 0( I芹卩)，

其中变量h J W R,参数产,aWR成为小参数.显然,X°为 Hamilton系统,它有首次积分

*H{x,y)* = 3 + z —旨=九. (5.16)

容易得知的轨线分布如图2-6所示,环绕中心点B(— 1,0)为 同期环域，它以奇点3和鞍点4(1,0)及其同宿机(称为同有环)

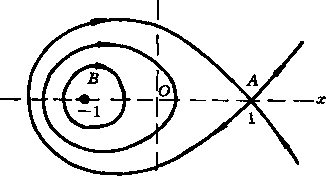


图2-6

为边界.闭轨族为

｛（工“）回3）=丄一号〈龙V ■卜 当A—|时，马缩向奇点旦当A-\*-|时必扩大为同宿环.

利用定理5.1,定理5. 2和（5.12）,为了研究当0 V M|《l时 X户是否有闭轨,需要对不同的«研究积分

©（方,a） = § （a + （5.17）

关于作|-f 4）的零点分布规律.虽然（5.17）形式上很简 单，但它不能积分为初等函数的有限形式，研究它的零点规律并不 容易.本节主要介绍两种研究Abel积分的方法，文献中常见的 Picard-Fuchs方程法（例如，见［CS］）,和我们最近得到的直接方 法.

**Picard-Fuchs** 方程法

首先把（5.17）改写为

= «I0（A） *+h（.h）,* （5.18）

这里设

孔(九)=6 xSdx = 2「

(5.19)

Jr4 JfCA)

其中人= 0,l,2,・・・SS)V代力)是马与工轴的交点的横坐标应=

满足(5.16).注意

■7(A) *xydx*

lim 踪=lim

I-2/S丿 \*-\*-2/3

1W 1

*g) \_ Lr* 壮

J加

故可定义

*P3)=*

端，当

(5. 20)

*1,*

当 *h=-%*

又由于、件所围成的紧区域的面 积.所以当A>-y时，

旳,a)=O 0 *F(fi,a)* a - *P(h)* = 0. (5. 21)

定理5.7 ⑴当一^-<A<y时，奇VP(方)VI;且 limF(A) = g.

Z2/3 *t*

⑵当一M V九V M时『(曷< 0)K iim PS)=-吝, lim?(Q=-8. .

12/3

由定理5.1,定理5.7和(5.21)可知，当5/7 VaV 1且|川《 1时,X#存在唯一闭轨,在证明定理5. 7之前，先证一个引理・ 引理5.8 *P0)满*足如下的Riccati方程

(9A2 - *4)f — 7Pl + 3hP -* 5. (5. 22)

证明 将(5.16)对*h*求导，其中y =火")，得到榮=§ 再利用*,h)*=夕3以)，五)=0,可从(5.19)得到

竹(力)/

(A) = *2* —dx.

(5.23)

Jf(A) 了

因此，由(5、16),(5.19)和(5. 23)可得

*W* = 2 亨& = *2hlk'(h) -* 24+1，⑶ + 争砰3«).

(5. 24)

另一方面，利用分部积分可得

*I")*=龙]](4+F 0)—九+須，"))。

(5. 25).

从(5.24)和(5.25)中消去匕+3‘以),得到

(2A + 5)Z/h) = 一 4孔+1，伝)+ 6W/ 0).

特别地，

J 5爲=—*Mi + ,*

(5.26)

1 *71> —* - 4" +6柘

由(5. 16)*有* dH =园夕 + (1 — #)&,从而(1 — *= ydH*

*-y2dy.*沿积分此式得=/„(\*).在(5. 26)中以L代 ，，并反解出A/和看‘，最终得到

("—4)时=\*爲 + 7A,

*-w* =踞+ *訓*把(5. 27)代入尸="'£/\*'，即得(5. 22). |

(5.27)

定理5.7的证明 把(5. 22)改写为系统

=- 7P2 *-3hP + Z.* 果=\_M?+4. (5.28)

由于在*h*轴上向量场(5. 28)的方向指向上方，且上面定义的函数 P(A) -1,当因此/ = P(\*)的图形是从系统(5. 28)的. 鞍点(一 |,lj到结的分界线，见图2-7.向量场(5. 28).

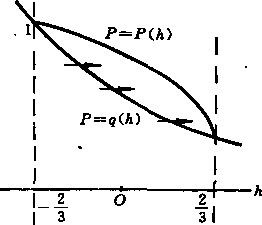


图2-7

的水平等斜线由方程7产+ 3AF - 5 = 0给出，它的图形为双曲 线,在上半平面的一支为

*3/i* + 79A2 + 1401 (5. 29)

显然*,P=P<fi)*的图形与*P = q(h)*的图形除了两奇点外不可能相 交;再由(5. *22)*和(5. 29)可以分别算出

lim ?(方)=-丄

*H3 O*

勻=一丄

g'

3丿 4- 因此，当~y<A<|时,F = F(A)的图形整个落在卩=9(A) 的图形上方,从而沿P = P6)有P (五)VO. lim ?(方)=-8可 U/3

从(5. 22)得到.I

直接方法

为了判断Abel积分的零点个数,目前使用的方法大都要经过 曲折的推导.下面介绍一个可在一定条件下从原方程判别的宜接 方法.

设(5.10)中的Hamilton函數有如下形式

= 6(z) + 世(少， (5. 30)

其中 @ £ *C^a,A3,*啾 e *设*

(日)(1) 3 «e *(a,A),*使得W(z)Gr~a)>0 (或者<0), 怎,A)\｛a｝；

*(2)3* 使得*H!H(y)(y-^>0(*或者<0),

*Vye* 0,B)財｝.

此条件说明V儿£ (岛也),x°的闭轨马=｛愆,少旧愆,少=如｝ 是凸的，其上点的横坐标的最小值*a(h)*与最大值A傘)满足a w a说)*WaW A(.h)* < A；其上点的纵坐标的最小值63)与最大值 *8(h)*满足 6 W *Xh) < 8W* B(A) W *B；*且(a6)危)与(A(/O ,£)分 别为马i的最左点与最右点,(«,\*(\*))与伝,86))分别为以的最 低点与最高点.在条件(HQ下,Q(幻,a),存在唯一的7 = m(z) e *(a,AW),*使臥z)=叡泌;V *y* e。(/0/),存在嗜一的 歹=93 6 (们B3)),使理愆)=晳&).由条件(同)易知,y \* 6 *(a(h)9a)ty y* 6 (6(方),R)有

dx <P(x) <0, *dy ~* ^(5)V 0-

(5.31)

(5.32)

(5.33)

现在考虑两个Abel积分之比

*PfL\* \_ 4")

- 脾)~顽’ 其中

孔(五)=f *fk(.X)g(.y)dx,*

「A

这里兀e *k* = i,2, *g* e *河,玲,*并满足

(Hz) (l)/1(x)/1(x)>o, V r e (a(Q,a)；

(2)(刃 >0, v > e

现在定义两个我别函数

\_ /'2 0)0 9)一尤(王)a (z)

一 £ (z)W 愆)一£ (幻a G)'

*w 、* （g。）一g3））世（切 0（力

(5. 34)

3 ~ g。）”）-g3营⑴’  
其中克=X（x）,x 6 （<2（方）,a）,和 *y* =歹（》）,丿 £ （6（A）,^9）.

定理*5. 9* （ELZJ）设H（x,y）具有（5. 30）的形式，并且条件 （HQ与（瓦）成立；当（a,a）,y£。洛）时，有 *E）g）>* 0（或v0）,则尸以）ao （或vo）对兀e 5\* 成立.I

有时所考虑的Hamilton函数具有如下形式

HCr<y） =S=U）y+ <5（x）, （5.35）

其中的@ e eEa.A],且¥ Gc）定号（为确定起见，设s=（X）> 0）. 考虑Abel积分之比

Q以）=-p f

(5.36)

<P /i（x）jdx

", 其中力6 *C'[a,A],k* = 1,2.类似地，当史愆）满足条件（HQ的 （1）时,V x & （a以）,a）可定义玄=xU） 6 （七&方））,使@（z）== ⑦G）.定义判别函数

,3） = E）质誕⑴ 一 £（於 石可g）

\* 一£（工）丿反（羚\_九（立）/F旬争G?

(5. 37)

定S 5.10 （[LZ]）设*H（x,y）*具有（5.35）的形式，条件 （H|）⑴ 与（乩）（1）成立,又若当工€怎,a）时L（Z）>。（或V 0）,则 *&W <* 0（或 >0）对 知）成立.|

例**5. 6**的第二种解法

（5.16）具有（5. 35）的形式，且甲（Q 品■，収z） =x-yx3. 取a =— 1,则条件（HQ⑴成立.另一方面,（5. 20）定义的PCA） 具有（5.36）的形式，且为= 1,故条件（H，）（l） 成立.代入（5.37）得

方、\_ — H(1 —另)+ 之(1 一 J?) \_ — (1 + 屹) b \_ (1一另)一(1 一廿) \_ ~~. 由(5. 31)知若V0,且由图2-6知“V- IV立VI,从而 ‘3 = 昂亦1 —另)+(1一釦對 由定理5.10立刻可得尸(方)<0.

附注5.11上面介绍的方法主要用于Abel积分具有如下的 形式'

7(A) = *alffCh) + blikhy* = 70(ft)(a + ftP(A)),

其中“和&为常数,A1<A<A2,P(A) 而且％(五)>0,当

*h >*奶.如果能证明P (A)尹0,仏 < 儿〈如则*1(h)*在*0\** 的 零点个数至多为L当Abel积分具有形式

7(A) =aZ0(A) +yL(ft) +rZ2(ft),

其中*a,b,c为*常数*,h.<h<hz,*而且当*h>hx*时厶6)>0,则可 把，(如)改写为

*1(h) = L(h)(a + bP(ft)* +cQ0)), 其中FS)= 鰐，QS)= 端.若能证明PS)与Q6)之一 单调，例如P (；)尹0,炳 <五则7(A)的零点个数间题转化为 a +妒+ &CP)对P的零点个数问题，其中Q(P)=QSCP)),而 *h* = A(P)是P = *P(h)*的反函数.由于*a + bP*是P的线性函数, 所以当曲线Q = a(P)无变曲点(或有&个变曲点)时,/以)在(农， *M*的零点个数至多为2(或*k* + 2).对于研究某些向量场的分岔 问题，这是一个有效的方法,可参见［DLZ］.此外,与研究Abel积 分相关，一些作者研究平面上与闭轨族相应的周期函数的单调性 问题，读者可参考曾宪武和井竹君最近的工作［ZJ］及其引文.

*§ 6* 关于**Petrov**定理的证明

当Abel积分有多个零点时，用§5中介绍的方法讨论有较大 困难.因此，我们在本节中介绍另一神方法，却化到复域中用嶺角 原理估算零点的个数.另一方面，为了研究Hamilton向量场的扰 动系统所具有的极限环个数的上界，我们需要把相应的Abel积分 零点个数的估计，与Hopf分岔、同宿分岔、异宿分岔等所能出现的 极限环个数相联系,这是本节将要介绍的另一个问题.

考虑Hamilton向量场的扰动系统

夺察 ++。3），

' .（&1）“ 常=票+心（3）+心），

其中*n*是小参数,H（z,少,FS,少和QG,少都是\*和】的实多 项式,degH = « + l,degP,degQCn.

设Hamilton向量场（6.1）。有闭轨族

r（ft） — （3,少）*\H（.x,y'） = h,^* < feE）,

*其中H = h,^H = hl*分别对应系统（6. D”的中心型奇点和奇闭 轨.设。是奇闭轨*H = h，*所围成的区域的紧致邻域，则当产充分 小时，系统（6.1\在*V*中的极限环个数的最小上界与下 面Abe!积分（也叫一阶MeFhikov函数，參宥（5.12）式）

= [ QGr,/）/— P（工,$）d»而 V/iV 五z,

J F3〉

的孤立零点个数（计重次）的最小上界*ZS,册*有如下关系，

（1） 如果伊（矽=0,时（兀）尹0,其中*ht<7i<h2,*则系统 （6.1）户有双曲闭*凱ys,*当产f。;反之，如果系统有闭執 乙矶卢-\*以兀），当则有。（兀）= 0.

（2） *Z（m,n｝*不小于系统（6.1）^的闭轨0,户的个数的总和，此 处*心=叽*当产-\*0.

1984 年 A. G. Khovansky〔幻和 A. N. Varchenko^ 独立地证 明了 Z〈m,n） V+8,即对一切工和'的实多项式

y）和 QS,，），其中 degH = m + l,d军W n.Abel 积分

¥= (A)的零点个数有一致的上界. Z(m/)应是m和”的函数.但除 个别情形外,迄今未得到其表达式，对一些特殊的二次或三次 Hamilton向量场在；i = 2,3或4的情况下来估算Z(m, ”)，巳有一些有趣的结果，见LDGZ], [DRS2], [GaHo]等.但即 使对于辫=” =2的一般情形，问题也远没有彻底解决.

当 =写 + 3 —与时，即对 Bogdanov-Takens 系统, G. S. Petrov^m 证明 Z(2m) = n — 1;当 g)芸 0 时,QBol ,2]中 证明BC2.2) = 1,[DRS1J 中证明5(2,3) = 2,[LR1J 中证明3(2, 4) = 3, P.Mardesic^证明= »-!＞李宝毅、张芷芬“心 证明，当fOO三0而二阶Mel侦kov函数不恒为零时,B(2,n) = 2» 一 2(或*tn*-3),当”为偶(或奇)数.这是在弱Hilbert第16问题 的研究中少有的完整结果.本节主要介绍Petrov和Mardesic的思 氤我们将9 3)扩充到复域,然后对Petrov的方法作一点改迸，用 福角原理来直接估算见[LbZ]).这种手法可用来研究其 它类似问题.

**.Abd**积分的构造

当Abel积分卯6)在积分号下的项数较寥时，为了估算*V* (A) 的零点个数，必须先研究它的构造.由Green公式，有

P(A) = [ Qdx — *Pdy =* f Qi&,

*Jrw Jrw*

其中Qy也是工和y的务项式.

令= Qjdr.cu； = Qda:,两个多项式微分1-形式约和《\*8称 为有关系“〜"，即纯~此，如果

, JfW Jr(A)

I此式成立的一个充分条件是

— tdj — Ad方 + dg ,

其中A和B都是k和"的多项式.显然“〜”是等价关系.令

{心〜=/J = {3〕），

其中3〕表示包含o＞的等价类.。对运算

GW。+〔线〕N〔的 + 线〕

而言是一交换静;另外还有

/（A）M = CX（H）办

即

/（A） [ ^ = [ /（77）w,

J p（b） J rw

其中rs）是儿的多项式，即皿可在多项式环浪上进行乘法运算，且 对£s）,/2（q e e下列分配律和结合律成立：

（1） £（方）（〔纳〕+〔纱〕）=九3）〔纳〕+ 人以）32、

（2） （儿（五）+£以））〔糾〕=九（/03|〕+/20）SD；

（3） £（方）/：（五）〔为〕= £（QC/2（H）3Q.

故。是衣上的模（module）.当Hamilton函数*H{x,y）*=尸+ 于危）,其中/Xh）是左的多项式时，较易证明口有有限生成元，即口 可表为有限个生成元的线性组合,其系数是頁中的元素，即是五的 多项式•请读者注意，生成元的构造取决于Hamilton函数,而不受 扰动项P愆反）和QGc,y）的影响，后者只决定在线性组合中系数 多项式的次数和形式.

定理 6. 1 （[P1]） 考虑 Bogdanov-Takens 系统

牙=y + */iP（.x,y）* +。（舟,

- （6.2）“

=— x + + eoa + o（/\*）,

其中户愆点）和Q（z,y）是m和了的多项式,deg巳degQ V 则有 Q= {"）丄（幻},且

P（A） =/o（A）70（A） （6.3）

0

其中 *L（h） = [ ydjrri* = 0,1,而 6 R,deg 兀（五）

M [与^腿人⑶(也―**i.**

我们将证明作为习题留给读者.只要对«做归纳法即可证得.

**Picard-Fuchs** 方程

为了估算？'G)在(0,§)上的零点个数，除了知道甲6)的构 造(6. 3)外，还必须知道厶3)和&6)的性质，下面我们要证明

定理6. 2考虑系统(6.2)〃此时定理6.1中的LG)和7,6). 满足以下的Picard-Fuchs方程

5

7

36

石’

(6.4) 证明 方程(6. 4)中蕴含着I0(A)和*IS* 的许多重要性质. 在§5中我们已经对Bogdanov-Takens系统的另一种等价形式 (5.15)推导出了 /0(A)和*L0)*所满足的Picardgichs方程 (5. 27).由于Picard-Fuchs方程在研究弱Hilbert笋16何题中的重 要性，此处我们将介绍另一种递推公式匚归幻.由于

= 3 + 芸—守=*h,Q* < A < y .

故沿H(d)="有

垫=丄，  
*dh y 1*

并且

(娉+ z—) =0.

dr

利用分部积分得

- [ ^4廿一3戸+2心 + f x"Ty»dz -

说十Z Jf(a)

xVdz = 0.

Jr（A）

特别地，

E.t : — 2 [ *xydx* + f ^dx — f 三dz = 0f

Jr<ft） Jr（A> A Jf（a）A

&li： \_ [ *yd^+* f 7；dx— [ ^-dx = 0;

Jr（A> Jr（ft> *y* J®）*y*

*E2* 一“ [ *—dx —* f *—dx* = 0・

' Jrw y Jr（A）y

另一方面，

%燃L产『底〉等血

=（强+c 3-[孕边  
Jrcft） 2 Jr（A> *2y* Jr（A） 3y

因此，

-f Jf（a）3r

*-dx*

*y*

=j fdx+[ Jr（A）Z J.

,声dz

r（A）2夕  
*xyAx + £ [  
rw* 6 *Jrw*z；ydx + \* f  
r（A） 6

7

—

6

7

—dx 4 vdj：

*y 6* Jr（A）

（由 &.T）

+ W £ f *xydx,* r（A> *b on j* r（A）

（由瓦,・1）

6

H〈产+訂

由此得到

一 =— §爲3） + *%L0）,*

（6.5）

其中0VhV\*.类似地•

*Fg* 五 £ I\* •ydz

dA Jr(A)

=f fdx.+ f *fdx* \_ f gdx

J TH) Z Jr(A)2, Jr(A)3>

=¥L 必+#1 Vdx (由 Elt，E"-i) b Jr⑶ 6 Jt(a)*y*

=g [ gr + 夺 £ I\* *xydx,*

6 Jr(A) 6 *ah* Jr(ft)

由此得到

*心*(A) = -~/0(A) + *(h),* (& 6)

其中 0〈五 V\*.由(6.5),(6.6 )得

方("一费L«)=(訓—+ 寿Q), (6. 7) 其中 0 *Chv\*.*由(6.5),(6. 7)便得(6.4). |

几个预备定理

当产充分小时，为了估算方程(6. 2)户在U中的极限环个数，除 了知道*平*⑶在开区间(0,§)上的零点个数外，还要知道当产f 0 时怦6)趋于奇点「(0)和趋于同宿轨「(§)的极限环个数.为此 我们需要引入下面的定理.为了避免行文冗长，我们不引证明，有 兴趣的读者可参看引文.

定理 6.3 ([LbZ],[X],[ALGM])考虑方程(6.2)“.如果 机五)=a•頒+1 +。(杖+1), 0, 0〈兀《1,

则(6. 2)户至多存在*m*个极限环，当产f 0时它们趋于奇点(0,0).

请读者注意，此定理对一般形式的方程(6.1)户也成立，只要 下列条件满足：

*Hcx,y)*= 7 + 7 + 心 + y)*ecr,*

pg)=。(伝| + 仞)*ec~,*

• QU,v) = og| + I刃)& *c~.*

韩茂安和朱德明在专著［HZ］中对非Hamilton系统的线性中 心也证得与定理6. 3完全类似的结论.

定理 6.4 (［R2］)考虑方程(6.1)户.设 rAi{(x,>)| *H(x, 少=h, hI<h<hl}*是紧致的，且「(也)对应于(6.1)。的双曲鞍 点薜，刃的同宿轨，则(6. 1)户在同宿執广鶴2〉邻域的一阶Melnikov 函数*V* (A)有以下展式

p (A) = &0 + 句(方2 — A)ln(As —方)+ 缶(検一五)+

*az(.h2 —* A)aln(A2 — A) + *b2*(A2 — A)a + ••• (6. 8)

其中0<ft2-A<l,而且由［HI］和LHm］可知

*ba = plh^,*

”修+斜 E頒是非零常数'

& =齢3) L = 士 j修+誹当向=0， z a

其中积分式前符号的选择，取决于闭轨「以)的定向和当*h*增加时 r(A)是扩大或缩小.

如果\*+1(或如)是展式(6.8)中第一个不为0的系数，则至 多有r = 2& + 1(或r *= W)*个极限环，当产f 0时,E们趋于 「(处).

定理6. 4是研究同宿分岔的主要依据.对于异宿轨而言，韩 茂安和江其保推得了类似的渐近展式，只是展式中的系数与极限 环的个数之间的联系尚待进一步探索.朱德明^1'2'33最近发展了 指数二分性和三分性理论,深化了不变流形的表示理论，用统一的 方法研究了各类系统(高维或低维，可积或不可积)的同宿轨、异 宿轨的存在性和横截性等问题.

定理6.5 考虑方程(6. 2)仃如果屐式(6. 8)中第一个不为

0的系数是印+1或％，则(6. 3)式可改写成如下形式：

P(ft)= (§ 刊(ZTSS +77S)LS)), o<ft<-|-, 其中 deW (A) < [号加 deg/? (A) C 传]—*k -* 1.

这个定理的直观含义是,如果当0时，有+ 1或2么个极 限环趋于同宿轨「(§),则甲(A)在开区间(0,§)上的零点个数将 减少応个’下面我们先证一个引理，然后推证此定理.

作变换*h =* 得

H(w)=夸 十蔘一夸=§ T, 0 v y \*

r(o = r(-i--A) (0<Z<号)对应系统(6.2)户的闭執族，而 和尸(0)分别对应(6.2)。的中心型奇点和同宿轨.在上述变 换下，展式(6. 8)变为

*甲*(y 一 /)=爲 + fli/lnZ + *b,l + atP\rd + bzP* + ••- (6. 9) 其中0 VZ《1.

引理6.6 ([Ma])对方程组(&2)户,有

L(/)= I- *yd^c* =爲 + 爲Zln2 + o(Z InZ),

Jrco

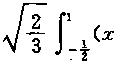
Zi(Z) = [- *xydx* = a + 砲InZ + *o(J* InZ), Jr(/)

其中0 V /《1,并且爲瓦# 0,衍扁一*a.b.*乏0 .

证明r(o)的方程为

，=土停工一1\* + §「' 一$<\*】.

因此



爲(0) = 2

-i)L + |)2dx

甬=亳(。)=2 J音『Tx(x — l)Cr + -|-)^dx =— • 驾丨=亟 =1, *3y!* I(1.0) *3y* <i.o)

驾 =奨| =1

*3yl (im 3y* |a,o>

直接运算便可证明引理.

定理6.5的证明 令

*了0* =九(£ *— D =*勺5(1 +O(Z)),勺尹 0, *7^1)= £(§ — /)= d,r^i* + o(z)),*心* o, 故

*布)=*顿 § — £) = 7oA +

=御屿(1 +。(1)) + 祐『(1 +。(1)) =0凿)，O<Z<1.

往下分两种情形来证*> k.*

第一种情形I *m】*W斜.

由等式(6.10)立刻得min(mltm2)日*虹*

第二种情形：码=皿.

假设*m^ = mz=m<*知则由等式(6.10),有

祐+ Mi = 0・

由引理6.6,有

L ■盈 + 歸成 + *o(l* ln2),

L = 4 + *b±l* InZ + *o(l* Ini).

把它们代入等式(6.10),并利用等式(6.11),便得

祀)=0(3高I - &而)肿+1成(1 + 0(1))

=。0), 0 V2《1.

(6.10)

(6.12)

(6.13)

从而》»貝知得到矛盾，故nHn(mltm2)

若有minSi ,ma) >如可把等式(6.10)中的为换成点+ 1,同 理可证> A + 1，从而最终可证minGn】 ,ms)=应.回 到原变量&一，定理6. 5得证.I

扩充到复域

定理6. 7 '定理6.1中的爲以)和/1 (ft)都可单值解析地扩充 到复域

G = C\(A€R|A>-|-},

并且具有以下性质：

1. *Ia(.h)〜*V, ?!(A) ~ 五、当九一► 8 .
2. L(o)= 0, *U* (0)尹 OMCO) = &' (0) = 0, L"(0)尹 0；

尹 0,当 \* £ G,无尹 0.

1. Irn 端尹0,当*heR,h>* ■(沿上下边界).

定理6.8考虑方程

r(A) + *+ q(hN(h)* = 0. (6.14)

*h* =知是正则奇点的充要条件是待=*hB*分别是？以)和*q(h)*的次 数不大于】和2的极点，即(6’ 14)可写成

*1心+令吳3十犬%心=确*(6.15) 其中如6)和91(A)在*h = h»*解析’ ’

对无穷远奇点作变换+ =、则有

d . d cP 如"-3 d

而=一『五，诲=『很+ 2\*瓦*，*

而方程(6.14)变为

『器+ (#\_%+)愣+ 9忏卩=0 ,

其中Z(0=/(7)-如果彳+卜心日日〜母七则由定理6-8- r = 0是上面方程的正则奇点,即无穷远奇点是舌程(6.14)的正则. 奇点.

定义*6-* **9** 方程(6.14)称为Fuchs型方程，如果它只有正则 奇点《有穷，无穷).

定理6.10 ([Gw]) 设九=加是方程(6.14)的正则奇点，则 对充分小正数在0<|A-Aol</±.(6.14)的基本解组有以 下形式：

8

紿(力)=*(h* 一 加泪(龙 ~~ 2、 (6.16)

*1-0*

*心h)=* (A —人c)P\*、如(五—Ao)\* + «a»iln(A — *h»)*, (6.17) 其中*a,ak*和*bk*是常数册和ft是下列判定方程的两个根，

*P(.P* — 1) + + 们(臨)=0,

ReR = 1.令*m = » —如、*如果0尹。，则方c = L令

z+表示非负整数集，如果m e Z+,则知=0,如果m & Z+,则q =0.其它*即*和*bk*的确定可参看高维新的解析理论讲义「攻】.

由Picard-Fuchs方程(6. 4)可推得

L(方)=*島Mg - ,*

(6.18)

(6.19)

(6. 20)

(6. 21)

化)=影顷)+亲(5\_財林 及

L' 3)= 一 *6W(K) + 如'0),* L'0) =- 6g(7i) + 6W(Q . 最后推得

")+ |占-制杯)=。，  
眦)+ (狷当-詞时) = ».

由定理6. 8,/i = 0和九=£都是(6. 20)和(6. 21)的正则奇点.作 0

变换五=+,得

『零^ + 2?当F +4备+…卩0 = 0, (6.22)

『玲集+ 驾普+ 4票十“，如)=0, (6. 23) 其中 椅)=厶囹，如)='』｝)•由定理6-8,( = 0是方程 (6. 22)和(6. 23)的正Sil奇点,故无穷远奇点是方程(6. 20)和方程 (6. 21)鮒1E则奇点，由定义6.9,(6. 20)和(6. 21)都是Fuchs型方 程.

下面我们来证明定理6.7.为此先利用定理6.10来讨论 *W* 和*I,W* 在奇点*h* = 0及无穷远处的渐近展式.

方程(6. 20)—(6. 23)在0 V ” 一么| V r上的通解可写成

/(A) = Cjiu； + (6. 24)

其中G和*C\**是任意常数,5和线由(6.16)和(6.17)给出.

对方程(6.22),奇点(=0的判定方程是

心一1) + 20 + 余=衫 + 0 + 爲=0,  
解得。1=一§”2=一亨.因師=0J佝=号■冬Z+，故展式  
(6.17)中的q = 0. 〜，或厂，，当Z f 0$即&以)〜侑或

A\*,当札一＞ 8.

同理，对方程(6.23),奇点*t* = 0的判定方程是

p(p — 1) + 3p + II = J + 即 + 兼=0,

郷得 *P\ =* »|°2 .因 m = /Jj — A = y & *Z"故展式*

(6-17)中的c = 0.匕(£)〜厂甘或厂彳，当即/i(A) ~侑 或

力当儿f + 8.

'由方程(6.18)便知，应取套以)〜糖和匕5)〜吊，当Z> f + 8.定理6. 7中的性质(1)得证.

为求在龙=0附近的展式，先对方程(6. 20)求奇点儿= 0的判定方程PS- 1) = 0的根，得4 = 1和0 = 0.因m = R — ft = 1 G Z+，由定理6.10,约(0) = 0,此(0) = 6。= 1.如果通解 (6. 24)中的 C2^0,便有髦(0) = (7［纳(0)+。2從(0)=。她尹0, 但此处L(0) = f *ydx* = 0,故必有G = 0.即得L6)= *C"h) = C、h* +…〜(0)尹0丄0)在*h = 0*解析.由于 (6. 20)除*h = 0,k = ^*外无其它有穷奇点，故厶(方)可单值解析 地扩充到G.

为求亳(幻在兀=0附近的展式，先对方程(6.21)求奇点*h = 。的判定方程p(p — 1) 一 p =寸一舞=*0的根，*得&* = 2,松= 0.因 m R = 2 £ Z十，由定理 6. 10,^(0> = 0, ^2(0> —*指*

=1.如果通解(6.24)中的G关0,便有L(0) = G糾(0) + G的(0)*=以逐0,*但此处】1(0) = i = 0,故必有C2 = 0.即得 A(A)— G纳(力)=*c\** + …〜岸 Ji(o)—厶/(0)= 0, 査”(0) 乂 0,LS)在九=0解析.由于(6. 21)除A = 0,ft = -i-外无 其它有穷奇点，故L3)可单值解析地扩充到G.

下面证明性质(2)中关于A6G,A^0时％(方)查6)尹0.

令\*= {A6R |方>§}分别表示区域G的从上下两侧逼 近的水平边界.我们断言下列不等式成立\*

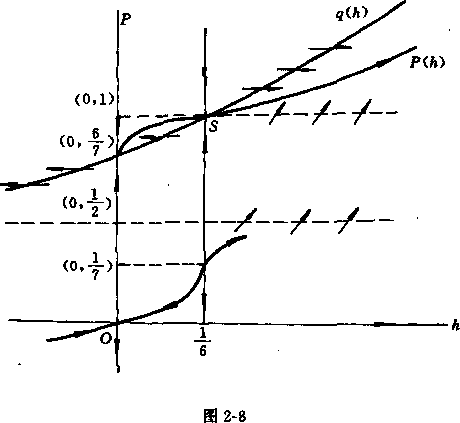
ImZo(A)弄 0, Im/j(A) 0, A G 乙\*・ (6. 25)

由于当*h* e乙士时，方程(6.4)是一个实解析系统，故CWoJmA) 是方程(6.4)当*h5±*时的一个解.令？(方)=齡务，与§5中讨论的情况类似,PS)满足下列Riccati方程

小—訓+仔1专户一払(6.26) 考虑(6. 26)的等价系统

罪“寿"洁I费JS

(6. 27)





系统(&27)的相图如图2-8所示.其中点& (A,P) = (§,1｝是 蔬点,由方程

6方 + 3 + 3 J 4冷—*%h* + 1

*P =* g(A) *% 。*

麻决定的双曲线是过点S的水平等倾线.利用L6)和 *W* 在A

=\*附近的渐近展式，不难算出当*he*乙士时

r Im/】(五)\_

A^6Im70(A) *一瓦一'*

故P(A)是鞍点S在一侧的不稳定流形.由于P@)介于双 曲线9統)与直线P = 1之间，故有

1 VFS) <8, A e L\*,

因此断言(6.25)得证.

由于金3)是复共辄的，即 *W =W,i-l,2,*故若它们 在G中还有其它零点,必成对出现.这样再加上断宣(6. 25)和性 质(1),不难用辐角原理来证明 当& W *G,腭。.*

我们将此作为习题.

往下证性质(3) :Im什釆W 0,当方£ *R,h >*

用反证法•设

Tm AW-)

=0,其中"e R,五\* >§.

Imw)

卽

Re(L0；)) 】m0(V)) -Re0(/T))】m(L。\*)) = 0.  
即向#(Ini70(A) Jm/i(A))和向> (Re/0(A),Re/,(A))在 *h — h\**

成比例.由于这两个向量函数当*h* e R,A > I时都是实线性方程 (6.18)的解，如果它们在一点*h = h-*时成比例，则它们将在一切孔 GR.A>|上成比例，即端在五>§上取实值.令*1 = 宀* 代 入等式(6.12),经计算得

lm( ) ~ c(5o6:—疝I)紀，0 <； r \*$； 1,

其中c为非零常数，即虚部不为零,回到原变量& 此结论

仍成立，即Im［端)走0,当0 得矛盾.故反证法 的前题不成立，性质(3)得证.定理6. 7证毕.|

**Petrov**定理的证明

定理 6.11 ([Pl],[P2L[Ma],[LbZ])考虑系统(6.2)^. 如果degP(w), degQ(")Q,则对同宿轨「(普)所围成区 域的任意紧致邻域U,存在£>0,当|产|<£时,<7中极限环个数 的最小上界8(2,n) = n — 1.

证明 我们将U中的极限环也/分成三类：

1. —。(0,0),当 #-\*0；
2. 瓦,户\*「6)，。〈五 <§，当

⑶*乙％* 当 “f Q.

由定理6.1,

p(A) *= KhWh) + G<h<~,*

0 «

其中*代W)*和*fs* 是*h*的多项式，且deg /0(A) M [专旦L deg/;6)M [芸]一 1.

由定理6.7,L@)和L6)可单值解析地扩充到复域G,故 也可单值解析地扩充到G

由定理6.5,有

P(A) = (^■一 *h)\f； (h}I0(h) + f^hyi^h)),* AEG, D

其中 &g J7(h) < [号^一 *h,* deg *f；* W< [3] — 1 - *k.*此处 不妨假设当*heG*时,yj⑶ 和*拭*統)无公共零点.

令

由定理6. 7的性质(2) ,F(五)在*G*上解析.取区域*D* U G,其边界 那满足下列条件：

*3D — C卞* U *L~p* IJ *C；* U *L如'*

其中

Cg= {Aec| *\h\ =*

*cr= {he* **Cl m - §|=r, OVYl}, .**

*L^= {heR\ § +* 血 WF}.

而今和C；分别表示沿C#逆时针和沿％顺时针方向盘旋,乙糸和 *临*分别表示沿*Lap*关于*h*从小到大和从大到示移动，

令P(F6))aD表示当*h*绕3D逆时针方向旋转一周时，由复数 F3)所定义的向量盘旋圈数的代数和.我们先分别估算当九沿*3D* 的每一部分移动时,相应的KF(&))的取值，则

p(F(A))c- W —点 + \*, (6. 28)

由定理6. 7中性质(1),

以⑴丄；Mmax{［十］,［罚一{(+4-

由定理6. 7中性质(3),当h沿匕亲U互＞ 移动时,侦F(A)至多有 deg/?个零点,故

队卩⑴九扣垢deg /； + 1 =［芸］一 k-

综合以上各式，得

移(F(五也彫W ” 一 2&—.

由于盘旋圈数为整数，所以有

移(F(幻)彫V ” 一 2爲一1.

由辐角原理,F(Q在D中至多有&一2左一1个零点，从而F0)在 0 M血V \*上至多有*2k* — 1个零点.由定理6. 7的性质(2), pCA)比F0)在0£&<§上的零点个数多1,故會(&)在0M& < §上至多有”一2&个零点.由定理6. 3,甲(&)在0 V h <号上 至多有*n-2k-m-l^* 点.由定理5.1,相应系统至多有n — *2k-m-* 1 个(2)类环.

由定理6. 3,系统至多有m个(D类环.

.由定理6. 4,如在展式(6. 8)中第一个不为。的系数是丄则系 统至多有狄个(3)类环.综上所述，得

如展式(6.8)中第一个不为0的系数是％+i,则系统至多有 *2k* + 1个(3)类环.此时由*祁*的展式(6.13)，可知不等式(6. 28) 变成

故一 1仍成立.

往下来证等号成立.

令3表示次数不大于”的多项式向量场空间，即丫 =户£ + Q务£3,其中戶(3)和Q(W)蕭是次数不大于”的m和/的 实多项式.令*^>n=* (Zr(Z)},其中

/>•(/)= ( Qdx-Pd^, y e pn, o<z<4--

Jr«) 6

，首先用［LbZ］中同样的论证，在用归纳法推证等式(6. 3)时， 可一步步地推出，对一切可能的&次多项式P(x,y)和QU.j)，满 足等式(& 3)中的一切多项式兀6)和/,(A)都是可以实现的.

(1)设 n = 24 + 1.取 7(/) = 2产L(Z) € St,如尹 0.于是 I(Z)〜*bklk.*令

r(Z) = +R/-】La)+7(/) e 啊.(6.29)

取*th ~ 21,*使得

5-叽(Q + 向井=— 70)*，*

(6.30) 旳1切)+卽尸如2)=-以)■

由引理& 6,其系数行列式

”财) ”择)

心-<)= \ ,

(2/)\*-呪(2，)(”)\*-飞(2。

=2\*一1(爲么-&損)尸-1应 + o(/2i\_1lnZ)

壬 0,当 0 <Z<T^1. (6.31)

故方程(6. 30)有唯一解(％电)，使得=「0)= 0 .可证Z, 和4是的简单零点，我们将此作为习题留给读者・

由(6. 30)可解得

=?-17lU)7(2Z) — (2/)\*-吼(22)7(2)

=2\*t 反血淬-1 +。(沔一1).

将它和(6.31)右侧相比较，由引理6. 6便知当时,％-().同 理可证，当Zf 0时，&f 0.这样便在(0,§)中有了两个简单零点 4和上且它们可任意小，只要产充分小.

取定了 4和上后，(务国)也就唯一地确定了 ,对于这样的W, &)，有

「0)〜虹\_/T,虹\_1 尹 0,0 V 2《1 .

请读者验证,此处虹\_1 =- 26仏In 2/lnA.重复以上歩骤，如此继 续做下去，在，步以后,可得产Q)e多&，它在(0,i)中至少有2A 个互异的简单零点，回到原变量&=| - 5咐)=y 一 A) 在(0,|)中便至少有2A - n - 1个简单零点.

(2)设门=2Q+ 1).由引理6. 6,可取為(Z) + *B『La)*G 夕”，使得 4- *= 0, at = atba + 瓯* W 0,于 是殉)〜漆\*+1血，0<ZCl.取在象"中的充分小扰动 尸(/)=虹/打。(/)十/<7)

=外产爲 + io + ^j/lnZ +o(ZlnZ).

显然，存在*k >* 0,有= 0,并且当虹f 0时山f 0.这样就 将情形(2)化归情形(1),即 *g 〜御.*由(1)中的讨论，可以• 构造*&，*它在(0,$)中至少有跃个简单零点，即JQ)在(0,§) 中至少有2命+ 1 =從一 1个简单零点.回到原变量兀=- 一 ％，则

Q

函数5P (A)=产空一A)在(0,§)中至少有« 一 1个简单零点.

由定理5. 的每个简单零点对应系统(6. 2)#的一条闭

轨，故有*B(2,n)^n-* 1,即等式8(2,”)=從一 1成立.

习题与思耆题二

2.1向量场奇点的双曲性与非退化性有什么联系，有什么区别？光滑向 暈场的双曲奇点或非退化奇点在向量场的C7r>l)扰动下有何变化规律？

2.2证明当g|《1时，例5. 5中的van der Pol方程(5.14)的唯一闭轨 是双曲的.

2.3若(2. 2)式中的向量场X。是*n*次多项式系统，试问定理2.7的结论 i(2)能否在"次多项式系统X\*中实现？

2. 4考怎方程组

*x = y,* ^ =■— x + oaray + “(1 — f，

其中aN0,0< I川《1.请验证定理3.1中的条件(H,),(H2)fn(H3),并以 a = 0时的情形来说明条件(HD不能缺少.否则(0,0)可既不是方程组的中 心，其唯一闭轨也不收缩到(0,0),当点~0.

2. 5确定下列系统中原点作为细焦点的阶数：

1. £ =一，一 3® + *2xy* — y, j •= z + z，一 2ry.
2. 扌=一 > + h' + xj，, *y = x+* -j-x2 + 3zy — y.

2. 6试证明：当妃— ％缶>0时，蔡飽

*I* a,x — *aty + y!,*

I *y- “ + b2y* \_ 玲 + *cy1*

有两个一阶细焦点的充分必要条件是

*by* = €0(, at = *calr* — 2 < c < 0.

2. 7证明定理3. 15.

2.8若系统(6.1),存在双曲闭轨々俨■\*「('),当其中/>,<A< 丄，则有P(X) = 0,试问是否必有尹0?

2. 9试用定理6.3来求方程组

Z = *y,y* =— Z — *+ P1X + i^xy + Pi^y,*

当?(A)^0时,细焦点(0,。)的阶数，其中1,2,3)是小参数.

2.10请读者讨论§ 5中后继度数G%,“)和一阶Melhikov函*财(h)*对 人和对/T的光滑性问题.清读者参考引文[HZ].

2.11试证(6. 30)式中的4和4都是公式(6. 29)中/'(/)的简单零点.

2.12试证定理6. *7*中的/„«)和匕除了零点A = 0外，在G上无其它零 点.

2.13对系统(5・15)・试用§6中的姓推公式，导出L(X)和丄侬)所满足 的 Picard-Fuchs 方程.

2.14*若*Hamilton向量场为一蝮 +工务，丫£ R•，试求其Abel积分 零点个敬的最小上界，即求Z(2.«).

2.15若Hamilton向量场为丿备+ (-工一釦务,Y 6 丄试证”= {L』％},其中*I.W* == L⑴物,心，*i =* 0,1,2.并用§ 6中的递推公式求 出 4(»)« = 0,1,2)所满足的 Picard-Fuchs方程.

2.16考虑二维Hamilton向蠹场的扰动系统

*x = 2xy* —如 y19

j = — 1 + 2工一— )2 + 8(爲4- %)- J3),

其中&为小参数.假设由Abel积分(5.12)定义的一阶Melnikov函数不恒为 零,且其同宿分岔的最高阶数为2,利用定理6. 4求其一阶和二阶同宿分畲 曲线在(％,%)平面上的方程(即对*3*的一阶近似方程).

第三章几类余维2的平面向量场分岔

在本章中,我们将综合运用第二章所介绍的几种典型的向量 场分岔的理论与方法，讨论向量场在非双曲奇点附近所发生的几 类余维2分岔.

考虑以产£ R"(«>2)为参数的向景场族

(X\*)' ¥ =

其中工£ Rn./6C™(RnX R-,Rn).无妨设工=0是向量场X。的 非双曲奇点，并设X。在该点的线性部分矩阵具有二重退化性.因 此，/〈0,0) = 0,且把X。化到工=0附近的中心流形后,其线性部 分矩阵可化为下列形式之一：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ° S | **.** |  | **& =** | 0 0] | *r* |  |  |
| 0 0/ |  |  |  | 0 o| |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 | 糾 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |  | -糾 | 0 | 0 | 0 |
| —[ | 0 | 0 | ,& = |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | .0 | 0 | \_糾 | 0 |

**A,=**

其中 sg H 0,的=她，=】，23 = 1,…，5.

若平面向量场在奇点处的线性部分矩阵有二重零特征根，并 且向量场在旋转響角度时不变，则称它有*q*阶对称性，或称为"g 共臉厂=1,2时，线性部分矩阵具有&的形式項*法*3时,线性部 分矩阵具有去的形式.称为强共振.«>5称为弱共振.除 *Tl* 4之外，其它情况的余维2分岔问臨都已解决.本章 §1一 §3分别介绍冬=1,2,及冬法5的情形.在高阶项的适当非退 化条件下，扰动系统X“具有双参数的普适开折.主要参考文献

为:q= 1的余维2分岔见［Bol,2］和［T］,余维3、4的讨论分别见 ［DRS1,2］和ELR1］河=2和g = 3的余维2分岔见［Ho］, q = 2的 余维3、4的讨论分别见［LR2］和［Re］； 9 > 5的余维2分岔见［T丄 对*A3*情形的讨论见［Zol, 2］.在专著［CLW］和［HZ］中有对所 有情形的详细介绍.

**§ 1**二重琴特征根3 **Bogdanov-Takens**系统

在第一章§5中，我们讨论过二维b向量场

嚣H：摧I + 8W)， Q.D 它具有正规形(见第一章例4. 7)

当湖尹0时,由第一章定理5.13,系统(L 2)的任一非退化开折可 转化为

=夕，

=出 + “2丁 十十 *xyQ<.x,ti)* + 寸顽，“)，

(1.3) 其中Q仲£6,。(0,0)=±1 =幫11(沥),六£呻,後22.为确定 起见，取0(0,0) = 1. Q(0,0) =- 1的情况可类似讨论.

分岔图，轨线的拓扑分类

下面的定理是本节的第一个主要结果.

定理1.1 存在R，中(凶心)=(0,0)的邻域△，使系统 Q. 3)在△中的分岔图由原点(岡/2)= (0,0)以及下列曲线组 .成： -

（a） SN士= {"|内一0必> 0 或 < 0 }）

（b） H = 3% =-妃 +。（出¥）必>0};

（c） HL = {川产1 = 一 舞妃 +0（版3）,冊 >oj,

其中SN士,H,HL分别为鞍结点分岔曲线,Hopf分岔曲线和同宿 分岔曲线.当6 △时，系统（1. 3）在相空间原点愆,少=

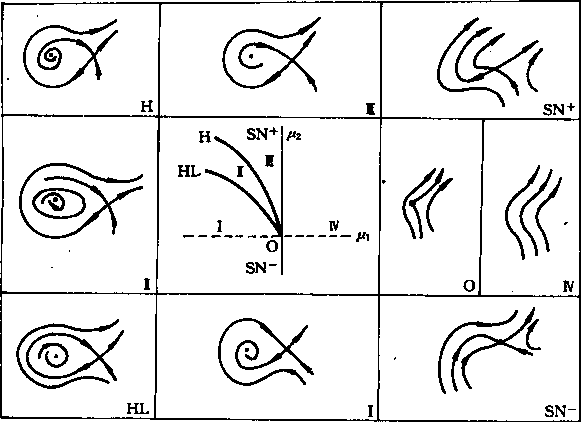


图3-1

（0,0）附近的轨道拓扑结构见图3-1.

为了证明定理1.1,注意当^,>0时，（1. 3）在原点附近无奇 点;而当M = 0,出尹0时，由第二章例1.6知发生鞍结点分岔.因 此,下面要考虑的只是内< 0的情形.考慮参数及变量的替换：

*樵=—§、出h = y =*罗 =号,（1. 4） 其中*S>o.*再把（5,5』）写回则（1.3）化为

石=弘

■

, \* =—1 + 工'+ +，）+ 州（^”,凯 QB.

（1.5 為 我们可以把（L 5為看成（1.5）0的扰动系统，后者为Hamilton系 统，它有鞍点A（l,0）的同宿轨，以及该同宿轨所围的以点B（-l, 0）为中心的周期环域（见第二章例5. 6及图2-6）,周期环域中的闭 轨族可表示为

\* = A, —（1.6）

其中

孤3：,少=专+工—号. Q.7）

当方〜一等+。时心缩向奇点岛当…号一6时可趋于同 宿轨与鞍点A形成的同宿环「勇

注意对任意的8,（1. 5為都以*A,B*为奇点，且*A*为鞍点为 指标+ 1的奇点.因此，若（1. 5爲存在闭轨，它必定与线段*L =* ｛SoO W =。，一 1 < \* < 1｝相交.另一方面，由于与X•的交 点处在乙上关于*h*单调排列.国此，可用h把Z,参数化：

*L'* ｛用也=5死，一号<兀<号｝.

现在我们任取*Ph* 6 %,考虑系统（1. 5"过*ph*的轨綫.设它的 正向及负向延续分别与工轴（第一次）交于点Q与Q.记，（如8,了） 为（L 5為从*Q、*到Q的轨綫段（见图3-2）.

引理L2当3>0时是系统（1.5爲的闭轨，当且 仗当

*F（足8Q m* f ［（? + ⑦）+ 冲= 0.

（1.8）

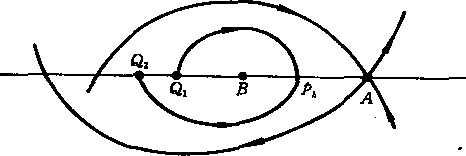


图3・2

证明 注意当|以<1时~~严£")~~=1 —充尹0、因此,  
*"h,a,G* 为闭轨 G Q| = Q Q H(Q|) = *H0.*

另一方面,由方程(1.5”可得

AH(ht)

de =苑（了 + z） + 冲（MU，MCly2、.5&&

*o*

=3［（了 + x） + N（z,；y,3,CJydz.

*At*

因此

**H（QQ - H（Qi）**=片**P**~~dH（3~~

**J"Q）**

di

ck = 3FS,材）.

(1. 9) 由此引理得证.I

我们可以用取极限的方法把F(如8,了)的定义域扩大到集合

*U =*件,标)

引理 1. 3 ([Bo2]) Vf1,^(f1<r2),3^>0,使得函数 F(方,凯。)在集合U上连续.此外,F关于3与。在U上是C~的，关 于儿在集合

丫=件,标)

上是L的.

证明利用微分方程的解对参数与初值的连续性、可微性定 理,F在U上为C。,在卩上为利用［ALGM］关于在中心或焦 点附近解对参数的光滑依赖性定理,F在儿=一 ■!■关于草为C-； 利用【Sh］关于鞍点分界綫对参数的光滑依赖性定理,F在 关于凯了为b的.I

从上面的两个引理可得如下推论.

引理1. 4系统(1. 5"(8＞ 0)存在鞍点*A*的同宿轨，当且仅 当 F 停,8,q = 0. I

下面,我们把F6,凯，)看作F6,0,G的扰动，注意

*Jrh* (1.10)

=矽)(—旳))，

其中 *g,P(h)*如第二章(5.19)和(5. 20)所定义.

引理1.5 3 \*＞0和在円定义的函数。=岩($),使 当。=%($)时，系统(1.5)$存在鞍点*A*的同宿轨.

证明 由引理L4可得，系统(1.5爲存在同宿轨的充要条件 为F(号，明=0.再利用第二章定理5.7可知』号,0,弔= L囹传-?囹)="并且款方号=4囹＞0.由隐 函数定理洱叫＞ 0,和在0 W8 W %上定义的函数了 = \*($),使 fi(0) = |并且F停,杯(叫三0・I

引31.6存在曷＞0 (& W务)，折＞0,并存在(1.5)。的同 宿环 E 的邻域山,使得当看(S) V 了 ＜X⑶+ %, 0 V 8 M备时, (1. 5為在r2/3的*U,*邻域内含有一个闭轨，且它是不稳定的极限 环;而当灯(力一丸咼时，系统(1.5)a在「必 的邻域内无闭轨.

证明 由引理1.5,当\* =看3)时,(1.5姦有同宿轨，($).我 们需要证明同宿分岔对参数3的一致性(见第二章§4),即证明 存在& > 0和％ > 0,使得对任意#和>?,只要0 V 8 V也，|4 一 宗8)1<%,就有

1. 与灯相应的同宿轨汽8)的稳定性与d的具钵取值无关, 且它在「涵的某个*U,*邻域内至多分岔出一个闭轨；
2. y(3)在扰动下其稳定流形与不稳定流形具有固定的相对 位置(与$的具体取值无关).

我们把系统(1.5)3改写为第二章(4.14)的形式 牙=*f<z,8) +* - g))g(>,以)，

其中

1+^ + 註 + 牌)"

"m’e=L(i+o(i5i + 1了一洒)1丄

由于对任意的凯系统的鞍点均在愆,少=(1,0),而且系统在该点 的发散量为

7(3) = $(1 + ^(3)+0( 0| + 化一匕(“丨). 注意匕(0)=辛,故存在&>0和宛>0,使只要。V3<&,|' — fiWI <弛,就有T(5) > 0.结合第二章定理4. 3和定理4. 4可 知，结论(1)成立.

重复第二章定理4.F乾证明,并注意以了 一 &⑦)代替那里的 ,产,则与第二章(4. 19)责癸似的紅 *为*

I 妃,8)= T- 0([5| + I，T&W),

其中

z=广火1+。(|8| + ir-g)|)eT 腿+印》%.

*J —8*

由于沿「旳与，（冷都有帅=&.因此,存在為e（0,舄）和执e （0,如）,使只要0<，<&,1了一，3）丨〈払，就有 25= [ 3-（1+0（|5| + |了一畠（3）|））迫法! I" ydz>0.

J% *L \*3*

所以结论〈2）也成立.引理1.6得证.I

引理L7存在^>0,%> 0和至定义的函数了 =匕（为,&（。）= 1,以及奇点方（一 1.0）的邻域S,使得当％（8） -兔畐时,（1.5為在B点的S邻域内恰有 一个闭轨，它是不稳定的极限环;而当匕（8）WU<&（8）+%, 0< 8 W &时,（1. 5）$在S邻域内无闭轨.

证明（1.5）a在奇点8（ — 1,0）的线性部分矩阵为

*I 0* L |

丨一2 3（，一 1） + （- 1,0,#£）丿'

它有特征根a（S,G 土谄（凯§）,其中 ^

心,，）=1） + 冲（一 1,0,

1 1

阳,c =权8七。（序）界

因此，存在禺>0和在0W3W&定义的函数：=孔⑹，使当了 = 匕3）时点（3,最3））=。伊3,匕。））尹0.即第二章§ 3中的条件 （Hj）成立.计算表明,

1

a\*

歹'

=]

aw 32

*ci* M lim4Re[ci（<J,。）]

f—V O

因此,第二章§3的条件（H：）,（HJ）也成立，而引理1.7可由第二 章推论3.16得到.I

引理L 8对任意给定的旨&，号V & V导< 1,存在晶〉

0,使当看晶时，系统（1.5為恰有一个闭轨，它是

不稳定的极限环.

证明 vreid令”=pT（r）,其中函数卩= *P{h）*由第二章（5. 20）所定义.由第二章定理5.7, T^CAXO.因 此，当?!＜r〈匕时，一号＜妃 gy 財 ＜音，其中蚌= 厂（成），妨（盘）.由（1,10）及P（h，）= #可知

F6\*,0,O） =7。6\*）（尸-PCA"）） = 0,

*aF*

剥矽,0,广）=Z„,（A\*）（r -P（AO） -4（\*）8（v）＞0. 这里要用到玲（&）的有界性.事实上，由第二章（5. 23）和本节 （1.5\*的第一个方程可知

L'（妒）=[ 丄 dH=f dt-T（A-）,

其中T（ft-）是r（-的周期.当-1 ＜ Ar C A' ＜ A； ＜ I-时, *W）*显然是有界的.

因此，由隐函数定理可知，存在广＞0,7' ＞0,0\* ＞0,及在 |＜7\*定义的唯一函数*h =* 使得

F（狱 = 当 0 V3W^,K 一广丨 w矿

以及

aF

瓷 SM）＞o.当。*vaw&,*

ir 一广I g 矿，M —妒 |M＜r.

再利用区间传,X]的紧致性,可找到舄＞0 ,及在

壹定义的唯一函数hfg，满足*F（丄眾）眾）* OL'

云0以及鈴SM〉＞0,当0V3W，,如 W久 这里岛=*p-wwy）.*

由引理L 2知,上述结论说明，丫（禺,G，0＜畐〈爲,旨 ＜匕，系统（1. 5）a有唯一闭轨，它相应于五。=即F（岛, y） = o.为了判断此闭轨的稳定性，我们考虑Ao附近的*h,*则

由(1.9)式可知・

H(Q) - H(Q) = *&F(h,y)="*务-五。)，  
其中*h*介于如与*h*之间.由于*霊僞,&,微＞* 0,推知相应于知的  
闭轨是不稳定的权限环.I -

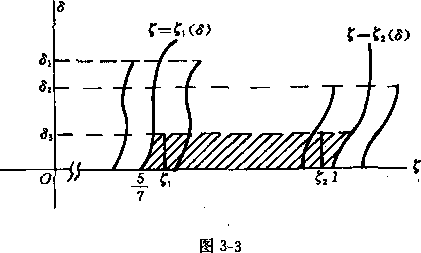
由引理1. 6 - 1. 8可得下面的定理.

定理L9存在g,心平面•上原点的邻域冬，使当*3,饱)* €4且介于曲线H与曲线HL之间时，系统(1. 3)有唯一闭轨，它 是不稳定的极限环.当(尚，色)趋于H时,此闭轨缩向奇点鬲当 S必〉趋于HL时，此闭執变为鞍点*A*的同宿环.相应的轨线结 枸见图3-1.

证明 由引理L 6和引理1.7,可找到满足要求的曷办和頻 阳现在取€ [I，y + 71] (1-%,1),对&，食]应用

理1. 8,可找到相应的晶.取正数爲＜ ,為，禺)且足够小，则

V3e(o,^),?e(§(心,靠3)),系统Q.5為恰有一个闭轨，它为 不稳定的极限环,参见图3-3.



为了从系统(1. 5爲返回到系统(1. 3),由变换(1. 4)知

納=—尸，兴2 =

因此，区域0 豈(必变到S 必)平面的尖形

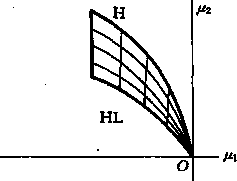
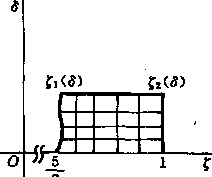


图3・4

区域0 >内 *A M*且（为必）在曲线H与曲线HL之间，参见图

3-4.事实上，由于炬=涉,而灯（$） = y（l+。⑹），所以当凶f 时时,8=。（冰〃）,而且了 =京$）转化为

代\_ ] 49丄八,八

曲2 \_ 择（6）（1 +O3））Z 25 + *顷&*），

即尚=一保尻+os\*'类似地，，=龄）*转化为*M =—蘇+ *0（.^）. |*

定理Lio存在（巧，出）=（0,0）的邻域4,使当（由，凹）e &并且在曲线H上方或HL下方,则系统（1. 3）无闭轨.

证明 由定理1.9可知，当Crt，ft）eH（或HL）时，相应系统

（1.3）无闭轨，而且从线段

乙={（工,$），*—』—*m < x < V— *Px ,y* = o}

上任一点岀发的轨线均为向外（或向内）盘旋的螺线.现在把系统 （L3）写成

等=贝3）,尊=丫（工十），

则当*yj^o,* |x|, |j>|适当小时,

*U* V \_

*迎* 亟"Q + z誤+丁務)w. (lid *3f>2* 3ft

注意向量场的奇点为(一丿二;,。)与(丿二,。)，且其任意闭 轨(若存在)必与连接此两奇点的线段*L*相交.因此，在考虑闭轨 的存在性时，总可以适当选取A,使少在原点附近变动，从而 (1.11)成立.此时，系统(L 3)关于的形成广叉旋转向量场(见 ［ZDHD］或［Y1J).V e勺，且位于H上方，取(由回)G

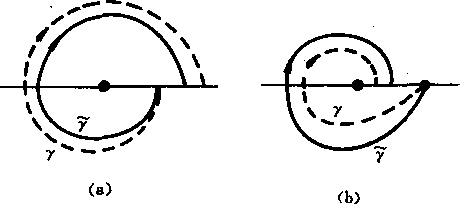


图3-5

H,且总<化,则从乙上同一点出发的相应于(内,％)的轨线，必保 持在相应于的轨线尸的外侧.但尸是外旅的螺线，因此7不 可能成为闭轨(见图3-5(a)).同理可证(咼心)e A且在HL下方 的焙形(图3-5(b)). I

由定理1. 9,定理1.10及变换(1. 4)之前对情形的讨 论，得到定理L1的结论’

普适性的讨论

由定理1.1知道，两个具有(1. 3)的形式但相应于不同的Q与 ①的向量场族有相似的分岔图和轨线拓扑分类，其差异表现在分 岔曲线H与HL的表达式的高阶项0(^1)中.这种差异为我们证 明它们的等价性,并进而证明普适性带来困难.为此，我们先从几何上考虑一个较一般的问题.

设匕,巴,丫3是平面上在原点相切的三条C，曲线，在适当的坐 标(工十)下，它们有表达式夕=%(",£ = 1,2,3,并满足条件 匕(0)——~~。七?)~~0, *i =* 1,2,3；

以及匕”(0) ,v2w(0),為"(0)彼此不等.因此，可以令 *KY Y Y)-*巴"(°)一 匕”(°)

(1.12)

y ,3 \_匕〃(0) \_Y\*0)，

则适当排列匕•的顺序，可使0 < *KY,* ,y2，為)< 1.在下面的引理 中,我们对［Bo□的结果作了必要的修改.

引理1.11设为与乙,£=1,2,3,是两组满足如上要求的曲 线，则⑴如果存在原点邻域内的C2变换,保持原点不动，并把匕. 映到1,2,3,则

*Yz,Y3)* =7(Z1,Z2,Z3). (1. 13)

(2)如果(1.13)成立，则存在原点邻城内的拓扑变换，把与 映到奏”=1,2,3.

证明先证(1).设存在宓变换

(1.14)

因此

z — *u =*

它把曲线 *Yi;y = y;(.x)*变到命 3 =召(“)，*i=* 1,2,3.

/"(z，M(z)) = %(g(z 商・(z)))

是对H的恒等式J= 1,2,3.把上式对;r求导，得到

*fz + fr'yi* =矽(居 + *gy'y'),*

(1. 15)

再对m求导一次，得到

*U + fj'yr + 3 =*

*X9 + gjy/y + + gy'y">-*

(1.16) 由于/<0,0) 一 g(0,0) = 0,且 j,(0) = %(0) = m'(0) = z/(0)= 0,在(1.15)中取x = 0可得77(0,0) = 0.再由(1.14)的非退化 性得/7(0,0)尹0,g」(0,0)尹0,从而可由(1.16)得到

矽'(0)=

把上式代入(1.12)可得 7(匕,丫2,丫3)= *KZ^z^z,).*

为了证(2),只须证明在条件(1.13)下曲线族｛匕｝和｛Z,｝,都 可以经拓扑变换化为｛X,｝盘=1,2,3,这里X,.的方程为XJr)三 0,X2(Z)=宀乂3愆)=澎9=/(匕,匕，匕)=/(Z|ZZ).下 面只须对｛匕｝证明即可.首先，容易看出Q变换愆，少-> *(x,y -*

把｛匕｝变到 &,｝,R(z) = 0,五(z)=妃£(z)，W(z)= *坤6,*其中*%3*为不等的非零常数，扌与彳为C0函数，满足f(0) =7(0) = 1.由前面的结论(1),可算出£ = *c.*再作一次原点附近

的拓扑变换z-\*z, 则Z变到 五这里无3)三0,

丫2愆)=护,丫3愆)=chW(z),其中 *c =* C2,"。)= 1.由于

o<c< 1,我们可定义在Z = 0附近的连续函数r(z)如下：

*心=~~尸 \_~~* (1.17)

*■J*1 — *eg)*

令区域玖=｛(Z,少 IzNOuNx3｝ u ｛Gr,R)HW。｝,玖=｛(礼 ^)|x>0,0<j<^),A- ｛(x,y)[x>0^<0).取Gr,» = (0,0)的充分小邻域U,定义变换

'« =z, *y,* 当(z,丿)£ 以 n S

-"=z + Zr? — y/O) , u =夕, 当*(.x,y) Q D2 C\Ui*

.u + ”(z) , *v = y,* 当(z,丿)6 D3 Q U.

(1.18) 此变换把曲线3 = #'和；y =由孩z)分另[|变到v = o,u =

“z和。=点.利用/eC°和/(0) = 0可知,(1.18)在U fl (玖U D2 U D3)是保持原点不动的拓扑变换, I

引理1.12对于具有(L 3)形式相应于不同的*Q,^*的两个 系统族，存在(内/2)平面上保持原点的U变换，它把其中一个系统族的分岔曲线分别变到另一个系统族的分岔曲线.

证明 对任一CL3）形式的系统族，由定理1.1,它的分岔曲

线为 “I = 0,“1 =—必 +。（“丿）,和 *Hl* =—聂妃 +O（AsT）t（当 ft f o+）,因此「由公式（L 12）得 J（SN,,H"HL,） = i = 1,2, 由引理1.12的结论（2）立即推得本引理成立.I

引理L13 具有（1.3）形式相应于不同Q,◎的两个系统族 彼此等价.

证明 设这样的两个系统族分别为

dr

击=夕'

(XD： -

栄=“1 + 陌 + / + *xyQi* (x,^) + 奶JwQ

zc%-

=4 + AjR +工'+ H列z(Z,Q +夕2电(们)，心,

其中 a,A6 R",»i>2（Q,^（i= 1,2）W^（1,3） 的条件. 根据引理1.12,存在（佝,役）到（4,过的拓扑变换A *= 脸，i =*

1,2,满足HO） =0,且把X】的分岔曲窪SN产,H|,HL|分别映到 *X%*的相应分岔曲线SN?,Ha,HL2.因此，代替X”可考虑系统族 （X/）"

—了，

一 Aj（u） +涙点）夕+ z： + Z列2愆,2（产））+夕2孔3,夕,2（产））.

这里人=人（产）表示A =嵐（产），“=为（“），为=产3,“•，丄=四. 这样，当产取遍原点的邻域△的值时,取遍原点的邻域云- 中的值.V ^6 △，我们可以利用本节前半部分的结果,先建立X

在原点某邻城U(Q中的极限集(奇点、闭執、同宿轨)到X/在原 点相应邻域*U'* (Q中极限集间的同胚砍Q,然后把此同胚扩展到 中其它轨道上，从而建立*Xi*在中轨道到X/在*V* (兴) 中轨道的同胚,I

定理1.14双参数族

ir -

否=义

(1.19)

\* =祖 + 如 + # + 时

是奇异向量场(1.2)(沥＞0)的一个普适开折，

证明 由第一章定理5.13知•,(1.2)的任一开折可经过b

变换转化为与下列系统等价的系统(指在原点的邻域内)

dz

在=贝

• (1.20)

浆=p(e) + a(e)\_y *+ x2 +* xjQ(x,e) + N(礼 W), 其中参数 e 6 R\*,m N 2,函数*甲仲,Q,6* & C~,p(O) =(6(0) = 0, Q(0,0) = 1.与(1. 20)相联系，考虑含有m + 2个参数的系统

*=y,*

(1.21)

=1 *+ / + xyQ(.X,£)*+ y^(x,v,e),

其中3, A)是独立的参数.如果我们把(1. 19)看成是含成+ 2个 参数的系统(除内,牌外，另外推个参数e不显含)，则由引理1.13 及其证明过程可知，存在与UA)之间保持原点的拓扑 ,变换巧=出(方，&),凹使得对每一个固定的3 A), 系统(1.21)与系统

dx

d (1.22)

盅=MA A)+ “2(4,為》+ # + *xy*拓扑等价，这里把(1.22)看成含参数e的系统.特别地，在(1.21) 与(1. 22)中分别取4 =祁)，兀=*炒*，则(1. 21)转化为(L 20), 而(1. 22)变为(1.19)的一个导岀族(见第一章定义5. 5,此时把 (1-19)看成一个双参数系统族).这就是说，(1. 2)的任一开折， 都与(1.19)的某一导出族等价,按第一章定义5. 6, (1.19)是系 统(1.2)的一个普适开折.I

§2二重専特征根：1：2共振间题

由第一章习题1. 4,在奇点(0,0)的线性部分矩阵为籍零阵, 并且在旋转角度*K*下不变的平面向量场具有如下的三次正规形:

¥ = = ar3 + *bx2y.* (2. 1)

为了陈述简洁，我们在这里只考虑三次正规形而去掉了高阶项.事 实上，在本节的基本假设泌尹。下，保留高阶项对整个讨论没有本 质的影响(可参考§1).

当沥尹0时,可经尺度变换，把(2.1)化为

*¥ =丸*尊=±充—为,

(2. 2)土

这里正负号的选取与沥的符号有关.与§ 1中的方程(1. 2), (1.3) 不同，这里取正号与取负号的结果是不同的.

类似于第一章定理5.13,有下面的结果.

引理2.1对于(2. 2)士的任一个旋转角度n不变的C"开折, 都可以经过C"变换，在相空间与参数空间原点的小邻域内，把此 开折化成与下列向景场等价的形式

*dx*

栄=*叭启H* + a(g 士史+工\*愆,产)+J\*(3，G,

(2. 3)士

其中夕仲,@,攻 £ b,衣0)=扒0)= 0,B(o,o)=— 1. |

设^eR-,m>2，衣岡*冲*是独立的，则可进一歩经过参数 空间的变换，把<2. 3)士化为

dx

否=义

§ =有工 + *S2y* ±x3 +x2j^(x,e) +y!'5'(x,3-,£),

(2. 4)士 其中6 C~,<5(0,0) =一 1.与§ 1类似的讨论可得，(2. 4)土 的分岔规律及轨线拓扑分类与@，亚的具体取法无关.而最简的取 法为0 = -1,^ = 0,即

牙=丿，糸=砧+3±刀3-4 (2.5)\*

本占的主要结果是

定理2.2([Ho]) Q)在旋转角度>r下不变的开折中，系统 <2. 5)士是系统(2. 2)士的普适开折.

1. (2’5)+的分岔图由(勻,弓)平面上的原点及下列曲线组成： pichfork 分岔曲线 R±=⑴勻=0,& > 0 或 e2 < 0)( Hopf分岔曲线11=住旧=0国V0},

异宿分岔曲线HL="旧=—+0(旧什)疤<o}. (2. 5)+的轨线拓扑分类见图3-6.

1. (2.5)-的分岔图由(勻,&)平面上的原点及下列曲线组成， pichfork分岔曲线R±= {司取=0,& > 0或勺V 0} ?

Hopf分岔曲线巨={€& = 0舟<0}¥

Hopf 分岔曲线 H2 = (£(£； = e, + O(W),£i > 0}t 同宿分岔曲线HL = "|弓=+ 0(e#)E > 0 j f ' 二重闭轨分岔曲线B= (e|e2 =«, +0( J),弓>0 }, 其中ex 0. 752. (2. 5)一的轨线拓扑分类见图3-7.

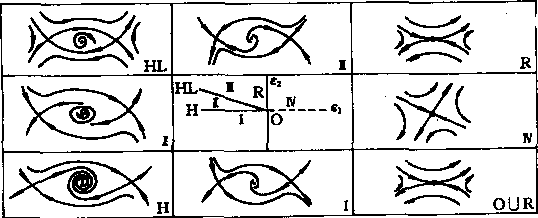


图3-6

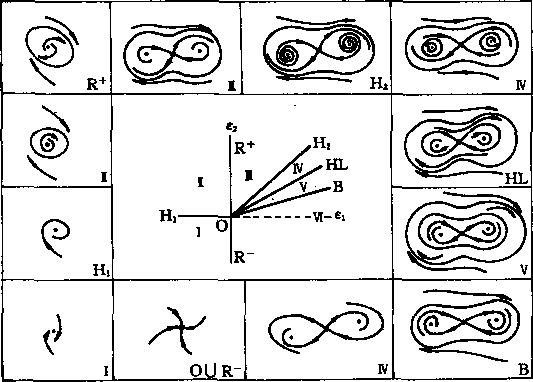


图3-7

对(2. 5)+的讨论与§ 1很相似，所以下面仅对(2.5广的情形 作一简要介绍，特别是要指出与§1的不同之处.

首先,(2.5) 一的奇点满足y=0及—^ = 0.与第一•章例 2. 6对照易知，当勻=0(些尹0)时发生pichfork分岔.

其次考察< 0的情形.这时(z,y) = (0,0)是(2.5)-的唯 一奇点，并且在该点的线性部分矩阵为

(°牛

住1色/

当嶋=0,与 <。时，作变换工=则对变换后的方 程应用第二章公式(3. 3)可得,Re(%) =-|<0.因此，由第二章 定理3.1知,在曲线H,上发生Hopf分岔.

最后考察勻> 0的情形.此时进行变换

*=淨，电=*邳 *x* =应，*y* =巧，Z =号.(2. 6) 然后记G,§,£)为*(.x,y,t),*则(2.5广转化为

等=丿，尊=^ —书+席―f. (2. 7) 它可以看作是Hamilton系统

d,r dv ,

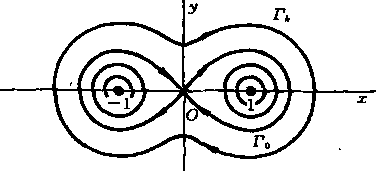
五=队-£ = x~x (幻8)

当*0<3«* 1时的扰动系统.系统(2. 8)有首次积分

H(w)=扌一苏+ 十=九 (2.9)

记「x = {(日力旧(吋)=幻.当一-i-<A<0时必是围绕两 奇点(-1,0),(1,0)的两条对称闭轨;当五f—j时，它们分别缩 向这两个奇点；当A-\*0+时,它们扩大而形成鞍点(0,0)的对称双 同宿轨匚;当兀>0时，马是围绕三个奇点及匚的闭轨.以上分布 见图3-8.若令£ =丄UA,其中

乙 1 = Ir=0,0WhW1},



囹3-8

2/2 = {|x = 0,夕 > 0),

则当一时，匕与Z相交于唯一的点处=(«(A),0)f当 A>0时，马与乙相交于唯一的点么=(。丿(邳)).因此上可被五参 数化.

现在考虑扰动系统(2.7).y 0 Vd《1,点(一1,0), (0,0), (1,0)仍是奇点.如果对以.7)的对称团轨只考虑落在右半平面的 部分，则(2. *7)*的闭轨必然与乙相支，取為6乙,记系统(2. 7)过么 的轨线沿时间正,负向延伸分别与正z轴的(第一次)交点为Qz与 Q,再记，(方04)为从Q到Qz的轨线段，见图3-9.则与§1引理 L2—1.4类似可得

引理2.3 V 0<5<l,7(A,5,f)是系统(2. 7)的闭轨，当且 仅当

*F(h,S,^)* = f (了一工，奸=0； (2.10)

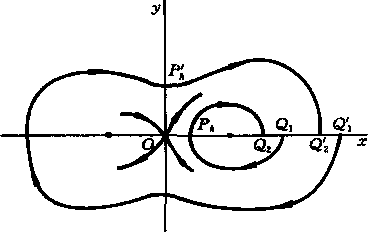
而且，成为(2. 7)的同宿(双同宿)轨，当且仅当F(0-,8,C = 0 (或 F(0+，M)= 0). **1**

为了研究分岔函数*F(h0©*对*h*的零点个数，先考察函数

F(A,0，r)- f (，一 (曷一匕3),(2.11)

J气

其中 *IkW* =丄 *x\*ydx, k* = 0,2.与第二章中(5.18) - (5. 20)的



|  |  |
| --- | --- |
|  | 图3、9 |

结果类似，容易得到

1

引理2.4 ⑴当*h>\_ 土*时,/心）>0,

|  |  |
| --- | --- |
| <2)/0(-|| = A(-  因此可定义 | 11 c ..【3 ,  刃=。「咀顽=L |
| P(ft)=- | ’2（五）少厶、 L  11 当 a=\_t |

从而(2.11)成为

= Z0(A)<f - *P〈h». (2. 12)*

引理2.5函数FS)有如下性质

1. limF(A)=纟，lim F(A) =+ oo；

*hf。* U *h-~ + aa*

1. a A\* >0,当一十 Q vr 时尸 3) VO,而当 *k>h-* 时 F(A)>0；
2. P(A\* ) > *j,P'* (ft- ) = 0, W ) > 0. I

与§1中函数P(Q不同的是,这里的PS)不是单调的，上面

的性质（3）将导致二重闭轨（半稳定极限环）•的存在.我们可以从

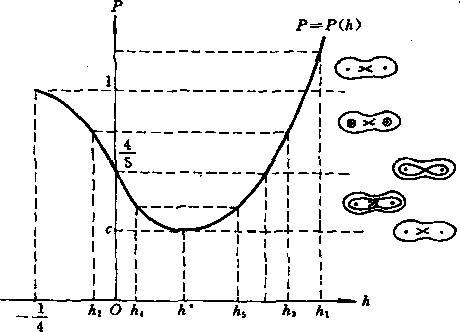


图 3-10

P（盼的图形粗略推得（2. 7）轨线的拓扑分类，见图3-10.事实上， 从（2.12）可知，研究F6,O,Q的零点可用直线，=常数么去截& =PS）的图形•当n＞ 1时，截得的交点相应于如 ＞它对应于 系统的环绕三个奇点的“大极限环"；当|＜?0＜ 1时，截得两个交 点的橫坐标分别为和瓦，＞。,前者相应于一对对称 的“小柢限环"，后者相应于一个“大极限环”:当& = §时，系统出 3双同宿轨，且外侧仍有一个"大极限环七而当c ＜爲V \*（c =

））时，两个交点的橫坐标&也＞ 0,系统出现两个“大极限 形;当土 f c时,这两个“大极限环”合为一个半稳定环;当協V C

时,极限环消失.

以上仅从F(奴3占)的一阶近似F%,0,；)来讨论的.严格的 数学论证要利用(对参数一致的)HqM分岔定理，同宿分岔定理, 隐函数定理等等.

对于具有％字型，，双同宿轨的平面系统(见图3-8)，在［Lw］ 中证明:它在一般三參数扰动下至多可出现5个极限环.

**§3**二童零特征根：**1W**共振问题**3 2 5)**

由第一章习题1.5,以(0,0)为奇点并具有二重零特征根，旋 转号(g > 3)不变的向量场具有如下的复正规形

糸=5+ 以打 + ••■ + C„z"+'z" + *A^~l* +。( |z|q), (3.1) 其中*zfc,；A*是复数，整数*m* =［写^丄

若Re $尹0,A尹0,则(3. 1)是余维2的，它的十个普适开折 为

糸=& + 勺土 + c# + ... + W+它 + *A^-1,* (3.2) 其中e =勻+ i&，G = q +耕.由于％尹0M尹0,总可对作 变换化为*A* = l.a, =- 1的情形，再利用极坐标变换，可把(3. 2) 化为

£ = M —尸 + *a2r5 + •••* + 0„户+1 + 卢 Tcos(g。)， £ =勺 + 缶r2 + *bzr\* + ― +* - ^~zsin(g5).

(3.3) 显然，当勺=0為尹。时，发生Hopf分岔.若£,<0,则由3 3)的 第一个方程可知，在r = 0的小邻域内的所有轨线当+8均趋 于唯一的奇点*r = Q.*当％ >0时,作变换

弓=萨，成 =州，尸=Sp, £ =普， （3.4）

其中$>0.将f仍写成£.下面假设?>5,则（3.3）化为 等=成1 一尸）+况趴"=R（p,章），

*■，0* （3.5）

茅=，+ M + *Sgts,P，8｝* = &頒,脆），

其中

*f^,p,ey* = a』裆 + …+ ^-^-+1 + *39~5^~1cos（.qe'）,*g（凯p,8） = *btSf?* + …+ 60-7产-*字-5广Sg"*当3=0时,（3.5）成为

£ = p（l — Q,黑=亍 + *b#.* <3. 6）

此系统有唯一的不变环£= ｛頒,&）侬=1｝,它是吸引的.当女+ 虹R0时，它是一稳定的极限环t当§ + & = 0时,其上充满了奇 点.记勤为（3. 5）3 A 0）的流的时间1映射,[RT]证明了，存在 $>0（相应地,由（3. 4）,存在&>0）使得对每一个（0,孑）,（相 应地& € （0,百））,流形列玛以）当”-»+ 8时趋于（3. 5）的一个 不变流形d，它是（3. 5）的一个吸引的不变环，而系统（3. 5）的动 力学行为完全由此系统在这个不变环上的性质所决定.记L = ｛（司,取）晶>0｝（即& =。，见（3. 4））,则下面要 证明:存在曲线SM和S1%,它们从两侧与L在勻=蓟=。相切， 并在珏=叼=0附近形成一尖狀区域XX见图3-11），当（牝勻）e 验|时,（3.3）在耳上有Q个鞍结点；当（勻,&）进入。后,它们分 解成*q*个鞍点和*q*个结点；当（与，M £ SNz,这匆个奇点又组合成 g个新的鞍结点,但&上的流向与色,9£SN,时相反;而当3, 弓）在。之外时，耳上无奇点,即它是（3. 3）的极限环.

既然奇点的分岔现象发生在不变环上，由第二章定义1.1,定 理1.2和附注1.3可知,对每一固定的^>0,发生这种分岔的奇点

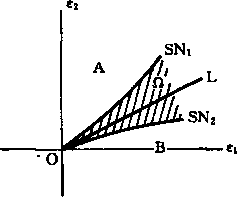


图 3-11

U/)必满足

R頒,8,6) = 0。,们3) = det( = 0, (3. *7)*

其中R,曲是(3.5)右端的函数.由于

d《醫剧=

其中

*D〈p,8,a)*= (3尸—l)cos(g0) + 2 缶衫sin(g0) + 0(3).

(3.8) 因此，(3.7)可改写成

R(p/,3)=包(°,们＜J) = *Dg。)* = 0. (3. 9)

下面,我们在3,们“$)空间的集合

*W* = {(p,们。,3) Ip 1,0 = 0}

附近考察(3. 9)的解.

由(3. 5)的第一个方程及隐函数定理易知，在IV附近，集合 {(F，8,“6)|R= 0}有表达式印(0,§,8),歹4濟},其中戸工1 + 如.

由(3. 8)知D Ixi = 0在归附近对＜?有匆个根.因此，集合 {(p,0,“8)*\R* = 0,D = 0}在IV附近具有以下形式： 勺'"酒0(洒,。,心，

J-0

其中*歸再(j* = 0,l,・・・,2g — 1)满足以下条件｝

1. 9•以0)= A + *+ Og*其中馬満足'

cos(ggo)+ fiisin (^0)= 0； (3.10)

1. ft+2 =再且为2 *=们\**籍(方程的对称性)；

*q*

1. 两=1 + 0(6).

我们先估计A - *K*由于糸髙,瓦，以)=务:再,&,E = 0,得到

爲一祝 + ^^4cos(9^!i)=

内一裨+ /\_%OS(用g+卩)+ gf , '

整理得

(A 一 时口 一(府 + *两禹* + 离］=2跑TcosWV + 0(跟一3), 从而

崗一禹=一户一 AssCgg。)+0(觀一 3). (3.11)

由(3. 10〉知 cos(gg°)尹 0.因此两-ft =O(/T).

最后，考虑集合｛3，。占,》|R = *0,D* = 0,8 = 0)，注意

创R=0,£>~0 *= 了 +* K衫 +。(6),

因此，存在函数= 0,1,-,2? - 1,使

©(两(Mj3),Q0(Mg),a),机⑹ 渺)=0. (3.12)

由对称性知,M,+2(8) - M/5).下面估计MJS) - 在等

式(3.12)中取j= 0,1得

M0)+ - f-Gin包& + nJ

= M°(S) + 加禅Wj⑹ 0) - 觀一站认(点)+。(浇-3). 利用(3.12)和為=1 + 03)整理上式可得

Mi(8) - M。⑴=2fi5~J1Cfe,cos(9^) 一 sinC"。)］十 O(S一3). 再由(3.10)知sin(g&,)*尹*0,并且

f = 20cos(g烏)—sin®。。］ = — 20 + l)sin(”(,)尹 0.

总结上面的讨论可得

引理3.1 <m)在空间中w的邻域内，集合 {3，0,，a)|R = 8 = D = O}

由2?条曲线组成，它们在応,$)平面上的投影由二条曲线 = 1,2)组成，满足 M(S) - \*0)=勢T +

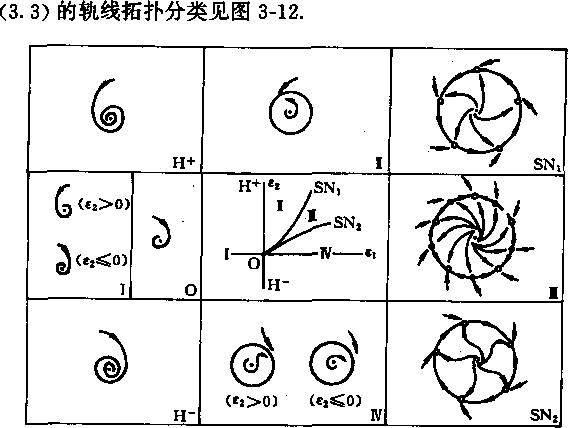
O(8~3),其中常数$尹o.

定理3.2系统族(3.3 )的分岔图由空间中的原点及 下列曲线组成：

Hopf 分岔曲线 H±= {e|勻=0,e2 > 0 或 ej<O}'f

鞍结点分岔曲线SN,=怔低=Cq = Q(s),s为参数}, j= 1,2,其中*心)滝*足为(0) = 0,而且

(3.13)

图 3-12

lim s-\*0+

五2(s)—加G)尹°

证明 由上面的分析,(3.5)的分岔现象发生在席上.由引 理3.1,分岔曲线在平面上为点(一知0)及曲线⑴，的， j = l，2组成，且

一 =澎一4 +。(序一3)*况圭* 0.

利用变换(3. 4)从系统(3. 5)返回到系统(3. 3),从而把分岔曲线 的方程从(O 空间返回到魚,&)空间，得到习=& = 0以及两条 曲线

〈(J弓)丨％.=翳,勺=孕虹⑹｝,

｛(勻，勻)1勺=序,& =孕肱⑹｝,

其中 8为参数.令 A/^ = <J2^1(<J),；=1.2,则

如(3) — *he* =序(M3) - Af0(5))=*財\_2* 0(^-1),

其中£尹。.定理3.2得证.|

习题与思考■三

3.1在引理1. 6和引理1. 7中,为什么要分别利用对参数一致的同宿分 岔定理和对参数二致的Hopf分岔定理？这对最终得到定理1.1有什么作用？

3. 2证明引理2.1.

3. 3证明引理2. 5.

3. 4对方程(2. 5)+讨论它的分岔现象,并证明分岔图3-6的正确性. 3.5考虑方程<2.7).试证明：

1. 当 ⑷充分小时,(2.7)在双同宿环(记为兀)附i£有极限环的 必要条件是|£一号丨《1.
2. 当均充分小时,(2.7)在匚附近至多有一个包 围三个奇点的大彼限环.

(提示，当 \*0山一新《1时，(2. 7)在原点的发散量为aeo.)

第四章双曲不动点及马蹄存在定理

本章中我们将给出关于R'中映射的几个定理.这些定理在第 五章中是我们研究空间R'中鞍点同宿分岔的基础，同时这些定理 也有其自身的重要价值.在§ 1中我们证明一个双曲不动点定理. 在§沖引进符号动力学的基本概念.在§ 3中给出马蹄存在定理. 在§ 4中给出一个关于两个线性映射的复合映射的双曲性的判别 引理.在§ 5中作为§2- § 4中诸结果的一个应用，我们将给出R3 中Birkhoff-Smale定理的证明.

本章和下一章的主要定理在Sizikov的文章［Sill-3］和 Wiggins的书［Wi2］中都能找到，但此处所有定理的证明都是独立 给出的.我们力图把几何直观与数学的严密性统~起来,并给予 读者一套易于掌握的方法，用以解决高维空间中其它类似的问题.

**§1**双曲不动点定理

定理的舔述

首先我们引进一些基本概念.令

r1 x r1 = {（3）k e R1, e R1}.

定义LI设是一个常数.平面RXR1上的一条C水平 曲线指的是一个李氏常数为C的K的函数伝0）的 图象.当一 8VaV^V+8时，称点为该曲线 的端点.类似地,R，XRi上一条C垂直曲线指的是一个李氏常数 为C的了的函数^=g（y）,ye（a,b）的图象.特别地，当a=-8,3

=+8时,则称其为无限*C*水平曲线或无限C耋直曲线.

*定义1.2*称平面RiXK上两条不交的无限C水平曲线所界 区域为*C*水平带域;两条不交的无限C垂直曲线所界区域为*C*毒 宜带域.

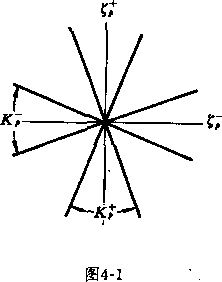
以下我们总是假设内是两个正常数，满足*说*

定义1.3平面RIXRL上的一个区域D称为（埃,E）矩形,若 它是一个内水平带域与一个阳垂直带域的交，那组*林*水平对边 称为边界的水平部分，记作也那组冉，垂直对边称为边界的整 直部分，记作為D

对*pE^XR1,*我们记^（R'XR1）为平面R'XR'过点巾的切 空间.令

*K,* = ｛孩=（?；居）e T/R1 X RD I 班丨 a kH頒丨｝，

*K~* = &=（頒，或）& T^CR' XRD| 吟丨 £妇頒|｝, 见图（4-1）-

定义 1.4 令 DCR'XR' 是一个区域./；!>—R'XN是 一个微分同胚.称/在D上满 足（如％）锥形条件,如果有

⑴ *DfK；* U K必）， vyen,

（2） *Df-^K-*

*y pefDt*

且存在常数41,瘻得

（3） l（D驾>）+ |3A|#|,

*Y Z DA/ K；；*

（4） |（n/-'Q- I

v/■ e/B,?b e X-

直观地说,映射/■满足（払,知）锥形条件指的是r在水平方 向压缩而在垂直方向拉伸,并且它将任意*匕*垂直曲线奏为*孔*垂

直曲线，而其逆須T将任何内水平曲线变为内水平曲线.

定理1.S (双曲不动点定理)令D是平面RiXRi上一个 (&,%)定形，儿DfIVXRi是一个微分同胚，满足(物，为)锥形条 件,并且有

1. 相交条件成立
2. 边界条件成立,為Z)fl\_D=0,

则\_/■在D中有唯一双曲不动点

*O* =但8如

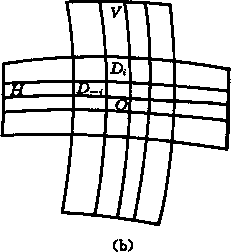
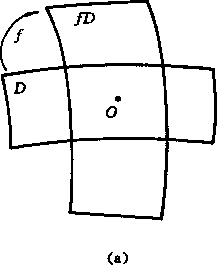


图4-2 上述定理的几何直观见图4-2(a).

证明的思路

令 ’

*D0 = D,* D,. = /(/)；\_!)CID,

D\_f = /-1(Z)T+1 n 知)， *i* e N, (1.1) 第一步证明D土，是(用，片)矩形，并满足条件

3g・U沪 *為J U*沪

以 UD-i， DtUQt+i， ie N. (1.2)

8 OO

第二步证明V =Q以和*H* 分别是端点属于*akD*和

初的冉垂直曲线和*B*水平曲线，

第三步证明*H（\V*是*f*的一个双曲不动点.

见图 4-2（b）.

几个引理

引理1.6平面WXIV上一条内水平曲线与一条㈤垂直曲 线最多有一个交点•

证明 令 *\->~y—h（.x）, v；y* |-\*x—z）（j）是两个函数，它 们的图象分别为内水平曲线H及片垂直曲线V.再令（血,少）， （X2,^）ewnv,则

\_ 务丨 一 |» ° A（X,） — *v -* I

W 從g（zi）—儿6）| W0 • %|屯一处|.

因为知％<1，故思一志I =0.进一步I乂一队I = o. **I**

引31.7令DCRlXR'是一个（3,%）矩形,H,VUD分别 是端点集属于*3VD*和*dkD*的％水平曲线及％垂直曲线，则*H* 与卩相交于唯一一点・

证明 交点的存在性可由连续性得到，而唯一性由引理】• 6保 证.**I**

引理1. 8令,Z）2URi Xie是两个（内,％）矩珍 设*f,Dt* fRiXW是一个微分同胚,并满足（内，队）锥形条件及

（1） 相交条件,/z）, n o2 y： 0 ；

（2） 边界条件：*fD,* n *3^2* = 0, 则

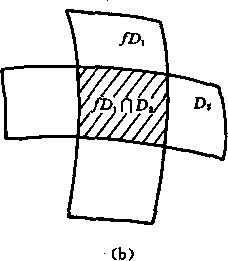
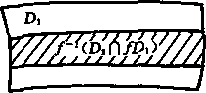
*i-fDi* n风是一个（何,％）矩形，满足

毎（/■以 n d2）czaAD2,

2.广（玖n rd是一个Sb）矩形，满足

礼（广YQn/A））u 礼a

上述引理可參见图4-3.



(a)

图 4-3 ,

证明 因为f满足（㈣\_，%）锥形条件，故尹将％垂直曲线变 为％垂直曲线，而fT将用水平曲线变为内水平曲线.因此f将 区域以变成一个左右两边为%垂直曲线的曲边矩形*fDt.*再由相 交条件及边界条件,月\是上下穿过玖的，也就是说*fD^D.*形成 一个十字形,因而*fD^D,*也是一个曲边矩形，其上下两边属于 0的边界的水平部分，而其左右两边属于的左右两边，因而 加||"|玖是一个（内，氏,）矩形，满足无（/A 0玖）匸布玖.类似地可 以证明另一个结论.I

令D土,.，沱N,是由（L1）定义的区域，用归纳法及引理1.8我 们有

引理1.9 Q土渥（用,Q矩形，满足（1.2）.

国P/Q矩形的高和宽

令

K+= {（石少€R' XR屮刃质妇牛|}, *K-=* {愆,刃 € R' X Ri| 牧I W"z| }.

给定R\*XR'±两点户点,我们记讶€K± ,若连结*p,q*的向量属于 *K士.*

令*D*是一个3\*,%）矩形.下而我们定义*D*的高及*D* 的宽3（D）如下；

*h（.D） —* sup dist（/>,g）,

*>q* GD

泰K\*

*w（D） —* sup dist（p.g）,

洪K-

这里dist（・，•）表示R'XR1上两点之间的距离.

引理1. 10令DUfTXRt是一个闭区域,/iD^R'XR1是一 个饑分同胚，满足（用，气）锥形条件.设是一条g光滑的*也* 垂直（或险水平）曲线.若对某自然数i&N,r（或 广'）在/上有 定义，则

1/^1 质&/|，1，（或 I厂叫 *>AkX\7\}.*

这里|,1代表曲线的长度（ , A = -—1——,而A

a/1 + 成 -V1 + *队*

>1是定义1.4中的常数.

证明 我们只对，是％垂直曲线的情况证明引理，另一种情 况的证明可用类似方法得到•

首先设» = 1.令曲线/是一个映射項）丄0, 口—D的象，令。

=<r.r+）=Ko,则 rwK+.令

?（«）=（广，时）=D/?,

im（以121?+ a>i ^A）r si

2\*卜

we

求积分，得

*m* = j：ng）忡 > = 4/阳. 对£>1,令*g=f,*则g也满足（内，气）锥形条件，只是其中的扩张 及压缩常数A变为兒再将前面对£=1的讨论应用到映射&即可 证明引理. I

引理1.11令Q土,.是由（1.1）定义的（用,％）矩形，则存在 常数00,使得

< CA-\*, *i* GN,

这里是（厄,％）锥形条件中的常数.

证明 令少，亦Z>t满足苟£K+ .设是一条连结 的。光滑的公垂直曲线.由于/■满足（母,㈤）锥形条件,戸7是Q 中的%垂直曲线.令£是Q中所有光滑的％垂直曲线长度的 上界，则由弓F理1.10,有

E 濠 |/>| 质4旳"£&Xdist3，g）

或

distg） w&ieL.

因此

方酚 t.

故存在常数G,使得

同理可证存在常数C2,使得

w（D,） CSA-. I

定理1.5证明的完成

由引理1.9和引理1.11立即得到

V = ".

i = 0

是一条角垂直曲线,且满足*avu^hD.*

是一条内水平曲线,且满足由引理1.7 WAV是一个 点，记为0,且有

*fo= fw* nv)= A.\_nm/z>>

=n *戸 d = h n v = o.*

i" —8

故。是>■在D内的唯一不动点.因为尸在水平方向压缩而在垂直 方向拉伸，故不动点*O*是双曲的.

**§2**符号动力学简介

本节将扼要地介绍符号动力学理论，它是研究动力系统的复 杂动力行为的基础.

符号序列空间及其结构

令

S = {1,2，…,N}, NN2.

在S上引进如下度量，

如果"=如 (21)

如果*ag ( 5*

则集合S在度量(2.1)下构成一个紧致的,完全不连通的度量空 间•令

这里§=SX⑴，换一句话说,\*中的每一个点是*S*的元素构成 的双边无穷序列

3 3,

则

3= <aihez = a\_i，Oo,-

这里*a^S*是s在分量S'上的值.在上我们如下引进度量.

设

3={w，€z， 函={%}此2，

则

f, d(a；,布 d(s,5J) = 2 — . (2.2)

—oo 2

上述定义表明*梦*中两个点接近指的是它们在一个很长的中间段

上一样.下面的引理将要精确地说明这一点.

弓［理2.1 令 «(=(«i}feZ'Si^{aihez^-sJV-'

1. 如果 d(sa>)<2T,则傳•=%,对
2. 如果 «,=«,,对 HI W点,则 d3,a>)W2T+i.

证明结论(1)用反证法证明.设存在花使得勺尹 夺则

这便导出矛盾.

现在证结论(2).如果煲=瓦对*\i\^k,*则我们有

,,一、m d(a：,q)  
火 3,S)=〉 —

—«o *b*



W

+ S

H-1

在研究*玲*的结构之前让我们回忆一下有关概念.一个点彙 称为完全的，如果它是闭的且没有孤立点.一个点集称为完全不连 通的，如果它的每一个连通分支只包含一个点.同时具有上面两条 性质的经典例子是Ri上的Cantor三分集.

引理2.2空间玲 在度量(2. 2)下是

(1)紧致的N2)完全不连通的；(3)完全的.

引理2. 2的三个结论恰是一般Cantor集合的定义.

证明(1)令K是中的一个无限集，我们证明K在\* 中有聚点.因为*K*包含无穷多个点,故存在*K*的一个无穷子集 K),使得对其中任意序列《＞= ｛%｝強z，55 =伉｝旭2,有％ =&。•下 面我们归纳地构造一个无穷子集列*Kf*

令弟是K的一个无穷子集，满足以下性质:对任意0 = ｛妇旭z，函k ｛弓尾z€K,.都有％=初仔|@.因为Y包含无穷个 元素，故存在岛的一个无穷子集Kf+i，使得对Kf+i的任意元素 3= (fljJyez-有

■勺=弓，|刃+ 1.

这样我们得到*K*的一个无穷子集死K,.,满足

1-对任意 3= ｛a＞(^€Z,a5=(ay｝j€Z6K,-有勺=弓，|丿| V.

2A+iUK,.,。。.

任意取一点緬6 K，,现在归纳地选取一点列％ E 如下:假 设此，纳，…，総已经取定，取＜wn+1eKn+1使得％+济叫.』=。,1, •••,&.令%=(a"｝；ez.令 «,=«；,及 3= 0.｝，wz，则显然 ％ 收敛到

(2)因为*S*是完全不连通的，而fN是S的乘积空间，故酣 也是完全不连通的.

⑶因为*SN*是紧的，故它是闭的.对任意《•= ｛%.｝心£ V, 下证a是梦中某点列的极限点.对V 3,取。一盤，令囱= (砧ez£梦是这样一个点，使得

4=a；，VI W 兀 + 1,弓+2 尹 ％+2・

由引理2. 1,奇属于3的£邻域且防d.因此，我们证明了*梦*的极 限点集等于它自身，即梦是完全的.I -

移位映射

定义\*到自身的映射。如下：

3=伉｝心£潛，

=也雇z，6 = %+i.

a称为事位映射.

引理2.3移位映射b是甘^到自身的同胚.

证明 显然。是一一的和映上的，故为了证明引理，只需证明 。与矿】是连续的.

令《»= {%槌z，a= {^hez\*由定义

。3）= 饱},wz，缶=%+i，b（方）={4"gz，4 = si+i\*

。-1（3）= {q'ez，*ci =* i，<ri（a）= （cf}iez, = q\_i. 因此

,,,、一、、m d（4,矽 再+i）

d（久 3）mO））= > S 771

e= —cc *£i* f *— oa Li*

Q觉牛\* =収3，粉，

E» —CC g

dSW）,广㈤）=力警=力竺号徉

Q玄竺\*° = 2如林I

—a> *L*

令蛇梦，集合

0（«t） = G *Z）*

称为映射。过点*s mat.*当*。（砂是有限集时，仞称为周期点，而* 。（《0称为周期執，此时满足『3=3的最小正数\*称为财的周 期.一个非周期点在。的正向及负向迭代下，如果趋于同一个周期 轨，则称它为该周期轨的同宿点;如果分别趋于不同的周期轨，则 称它为该两周期執的异宿点.

定理2.4对■^中的移位映射。，下列结论成立.

（1）存在任意周期的周期点，周期点在\*中柄密；.

'(2)任意同期轨的同宿点集在K中稠密，任意两个周期執 的异宿点集在中稠密；

(3)映射。在fN中有.稠密轨道.

证明 先证明(1).首先我们引进一些记号.我们对由S中 的元素枸成的一个周期性重复的双边无穷序列用在其重复段上加 一个横线表示.例如｛•••,1,2,1,2,…｝用｛飪｝表示.对左(右)向无 穷的周期重复的序列用一个在其重复段上面向左(右)的箭头表 示，例如(-.1.2,1,2｝用(如｝表示，｛1,2,1,2，…｝用( 12)^.对 w= ｛佝｝此\*孕我们用表示也的长度为2«+1的中间段，即 虹小=｛四｝ EW”显然,中的一个周期性重复的序列是*a*的周 期点.对于任意正整数知点3= (共*k*个数字)是<7

的周期为*k*的周期点.现在我们来证明周期点在中是处处稠 密的,对V*关梦,*任意绐定e>0,令死>0是这样一个整数，使得 2~n+1<E.由引理2.1周期点｛E｝属于s的e邻域，故周期点稠 密.

现在征明(2).令«<= ｛苛｝,S= ｛矿｝是两个周期点，这里a\*与 U分别是©和而的周期重复部分.对任意*咋奕*任意给定eAO, 正整数“满足2一”+1 Ve,则由引理2.1

*a* = ｛a-»;(«)&■｝

属于寸的e邻域，而a在。的正向及负向迭代分别趋向于O(s)和 。㈣.

最后我们来证明⑶，脚证明存在一个点岐\*，使得对任意 吒寸 及e>0,都有一个整数”满足我们将直接 构造这样的点皿对任意整数如首先构造所有由*S*中元素构成的 长度为*k*的序列.因*S有N*个元素，故这样的序列有*州*个：

｛/｝,｛M｝,…,｛如｝,

则?是一个长度为*kNk*的序列.现在考虑下列序列

3 = {・・・次，次，<?.•・・}・

这样S包含任意给定长度的所有可能的序列.我们断言8的轨道 在式中稠密事实上，对V 5J£#,w>0,令正整数”满足不等式 2\_n+1<£.由3的构造可知,长度为2&+1的序列洌:”）必在3中的 某一段出现.因此，由引理2.1,存在整数/，使得

出产（《0,函）V&, 故a的轨道03）在\_gN中稠密.|

**§ 3 Smale** 马蹄

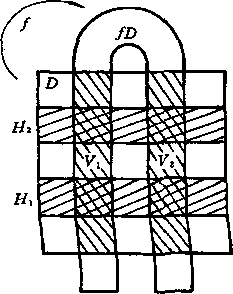
本节首先将描述美国数学家Smale于60年代初给出的一个分 段线性二维映射的例子.这个例子表明一个看上去简单的映射可 以拥有十分丰富的动力行为.它在现代动力学理论的发展•中起到 了非常重要的作用.然后我们将Smale的例子推广到一般的非线 性映射的情况，给出所谓马蹄存在定理.最后我们将看到马蹄可以 在三维向量场的Poincart映射中出现•

马蹄映射的例子

考虑If上的单位正方形D=[0,1]X[0, 口.我们引进D到 **R'**的微分同胚*f*如下.貫先将*D*沿垂直方向拉伸5倍沿水平方向 压缩5倍,然后将所得到的细高矩形在中部弯曲得到马蹄形区域, 最后将马蹄形区域与*D*按图4-4的方式相交*.fDQ£>*是两个高度 为1宽为§的矩形而是两个高为\*宽为1的 矩形*死=厂'Vi，t=*1,2.映射y在上是线性映射，并具有 [±1 0

Jacobi矩阵 5 ，它在Hi上取正值，在上取负值.

.0 ±5.



4-4

现在我们考虑*D*中的所有在*f*的任意次迭代下都不离开*D* 的点集，即

A= {次 R2 l/x 6 i € Z}.

不难看出

*A = hfD*

—8

是*f*的一个不变集，即*fA=A.*首先我们说明A非空.

U珞是两个宽为1高为"I■的矩形.而广叨=广|刷U广'払是四 个宽为1高为\*的矩形.用归纳法,一般地可得到

厂也（=/■-"+”， «e n,

且*rnD*是2•个宽为1高为5一”的矩形.因此，集合5厂"0是一 0

个工轴上［0,1］区间与力轴上［0,1］区间内的一个Cantor集K,的 积，即

P/--D = [0,1] X K

类似地可证明存在z袖上［0.1］区间内的一个Cantor集K”使得

*^\fnD = Kx* X ［0,11

因而

*A = KxXKy*

是一个非空Cantor集.

下面我们描述7■在厶上的动力行为.因为4是7■的不变集， 故对丫 *z&A*

*fx* € A, V « e Z.

注意SfMUHi UH”因此存在一个由1,2组成的无限双边序列*项* EZ,使得

*Hq.*

*i*

这样我们定义了一个映射

z I-\* @（z） = （«；｝iez.

令*。*代表上节中我们定义的习上的右移位映射，则根据定义有

*鱼。f ■= G。*@辰

下面我们将说明企是厶到习的间胚,即企是连续的，一一的和映 上的.首先我们说明企是连续的.设Hi与之间的距离为E,则 对任意两点*a,b€：A,*若d（a』）VE,有*a,b*同时属于反i或*H2. f* 在及Hz上是一个水平方向压缩5倍,垂直方向拉伸5倍的线性 映射，故对*a,b^A,*若

5妇心）VE/&N,

则有*fa,fb^\i\^k*同时属于Hi或故序列在 长度为24+1的中间段是一样的

｛臥办｝卩心=仲0），w

只要取*d5）*小/便可以充分的大，由引理2.1,企食）与企⑶在 呂中的距离可以充分的小，这便说明了企是连续的.

对一点uGA,我们用呛分别代表“的c与；y坐标.

现在我但来证明@是一一的,即对不同的点*a,b&A,* ©(a)尹 @(6).

用反证法,设

@(a) = @(&) = ｛勺｝话Z，

即

*.fatfb € HCi, i* € Z,

故对芷Z ■

1 > I*-顔吼* I = 5”％ -妇，

1 > I—(厂'糾I = 5'厄一妃，

因此

勾=勺，=如，

这与*a#b*矛盾，

最后为了证明企是同胚,还需证明企是映上的，即对任意

都有一点*a€：A,*使得@伝)=纵

我们将它作为练习留给读者.

通过上面的讨论我们得到*f\A*与。序是拓扑共辄的.因而根 据定理2. 4我们有

定理3.1马蹄映射/■在D中有一个不变的Cantor集4,满 足 ,

1. A中有尸的任意周期的周期点;周期点在厶中稠密；
2. 任意两个周期轨道的异宿点及任意周期轨道的同宿点在 人中稠密，
3. /在4中有稠密轨道.

马蹄存在定理

下而我们将定理3.1推广到非线性情形.

定理3. 2令所,%是两个正常数满足所•光VL令以UR】

XR项=1,2,…,N是N个两两不交的(物,佐)矩形，映射/：D= UD.--R]XR]是一个微分同胚，并且

i=i

1. /在D上满足(的,％)锥形条件，
2. 相交条件成立,7)/0巾;老0，，…,N；
3. 边界条件成31 *zfDj*Q3.^=0,/OADp Q*D~*0, *i,j=*

1,2，…,M 则集合

*OQ*

s n尸d

*X= —8*

是一个不变的Cantor\*./限制在A上的映射f |丄拓扑共辄于 *沙*上的移位映射°,即存在厶到寸的一个同胚金，满足

。。。刃4. (3-1)

由定理2.4我们有

推论3.3定理3. 2中的映射*f*有一个不变的Cantor巢A,满 足

1. 厶包含任意周期的周期点,周期点在厶中稠密，
2. 周期轨道的同宿点及异宿点在A中稠密？
3. /在A中有稠密轨道.

定理3. 2证明的思路

给定3= ｛%｝心我们定义有限或单边无限序列如下：  
=仏｝0W" = ｛aJ\_\*W。，

s+= 区｝爲0， 虹=｛%｝《0・

如果*xED*满足 Aenfl, 则我们记作

I

遂(z)= <.

如果xenw则我们记作

—I

也愆)=练・

D（<） = U e = <}, （3.2）

*DCa>~）* = {工 e *= to~}.* （3. 3）

第一步证明IX诺）是〈隔，爲）矩形，且满足

DO：） UD（蜡一1）,

以及

財海）u aR&g） u*衲“*

第二步证明

p（it»+）-I— nD（s：）

是一条端点属于泣么的内水平ai ^

是一条端点届于初%的％垂直备线，

第三步记

。（《>） = D（a»+） （1 *D（a>~）.*

证明映射

*<p:SN -\*■* A,a> H\* （&（O>）

是一个同胚，满足*时=A.*

第四步令◎=<}>"证明等式（3. D成立.

定理3. 2的证明 令

笑={h £ = {%T+1，・・,％} },

其中f="2L・M+l.我们断言*左s* 是一个（处，气）矩形,

—i+l

满足

U—<+1

事实上，由为的定义，我们有xe^+1当且仅当处£驾及 £>a ,因此

乌+1=广1（乌0/^1.）. （3-4）

下面用归纳法证明我们的断言.对*i=ltA^=Da*，断言自然成立.

H

现假设对*i=j*断言成立，即A：U以1+1是一个（用,％）矩形，满足 材;匸初皿心.由（3.4）,再利用引理L 8,我们的断言对A；+I也 成立.

注意到尤+1=1）（磅）,于是我们有

引理3. 4。（虹匸气是一个^砂心矩形,满足 村（虹）次％.

类似地我们有

引S3. 5 D3QUD%是一个（珞,珞）矩形，满足

*apgua*

关于（件，阳）矩形o<<）的高和宽有 引理3.6存在一个正常数C,使得

A（D（a»+）） <CA-"（ w（D（a>；）） VGT", ” £ N,

这里艇•）,&（•）分别表示（险，阳）矩形的高和宽，*而心>1是（位,* 從）锥形条件中的當数•

引理3. 6的证明与引理L II的证明几乎完全一样，我们把它留 给读者•

根据D（妒）的定义，有

D（咁）UD（屹I）.

因而

£）（好）亠初（坤）

U=O

非空•由引理3. 4和引理3. 6,D（s+）是一条端点属于神％的内水 平曲线.而引理3. 5和引理$ 6表明以『）是一条端点属于*和气* 的件垂直曲线，由引理1. 7,D（«>+）与D（«T）有唯一的交点，记作

D D(«r)・

这样我们得到一个映射pW-Aa i扒oO.

下面我们证明©是一个同胚，为此只需验证。是一一的、映上 的和连续的.

1. 0是一一的.这指的是对任意给定如果s尹瓦 则*中3)我C* 用反证法证明.若不然，假设*瞄=坤)=屿* 4.设 Aeofl,iez,w

I

*3 = &=* {㈤}fez・

这与4U尹而矛盾.

1. 。是映上的.这指的是对任意给定xEA,都存在一个点@ 使得步3)=#.因为xEA,故

A e *d,* v *i e* z.

假设 *fx&Dai*,»ez.令 3= {q辰由(3. 2)和(3. 3),

*x* e n(<)n d(%), VYN.

因此

8

xeno(D<<> n d3：))= d(s+)n *d〈c = <pg*

1. 步是连续的.这指的是任*给蛇梦，40,*都可找到正数d, 使得对任意

商={q.ez e £“，

若*d(.a>,^<3,*则 d(Q(s)仲(a))O 由引理2.1,如果 d(w,a»)<5, 则4=为,对|f|WN(S).这里N(S)—+8，当6—0.故由引理3. 6 有

d") \*)) < 2CA\* V e,当 S《1.

令 ，现在我们来证明(3.1)成立.令xEA是一

个点，设

*fx* e *Da , i* e z, (3.5)

则由©T'得 ，

B（Z）=3= ｛%｝沱 \*

故

°。叡” =b（＜u）=㈤此z，q = a；+i・

另一方面，由（3. 5）得

**MZ,**

这意味着

①。/（x） = ｛爲｝心，

因而

° ® = （P ° /1 A- 定理证毕, I

**§4**线性映射的箋合映射的双曲性

本节将给岀关于两个线性映射的复合映射的双曲性的一个重 要引理，这一引理将在第五章中多次应用.

问题的提出

第五章将斯究奇点同宿轨的分岔，这一问题的解决是通过研 究同宿軌的Poincare映射得到的.这时,Poincart映射一般可表示 为两个映射的复合，一个映射由奇点的邻域中的向量场决定，另一 个映射由奇点邻域外的向量场决定,第L个映射根据正规形理论 可以得到它的精确表达式.它具有很强的双曲性浩定义域取得充 分小时，它沿着稳定流形方向的压缩常数和沿着不稳定流形方向 的扩张常数分别充分小和充分大,我们对第二个映射除了知道它 是一个微分同胚外，凡乎没有其它任何信息.我们的目标是，证明 在一定条件下，第一个映射的强双曲性可以保证Poincare映射的 双曲性.由锥形条件可看出,一个映射的双曲性是由其映射的导算

子体现出来的，而由链锁法则,两个映射的复合映射的导算子是由 两个映射的导算子的积给出的.因而本节我们将对两个线性映射 的复合映射的双曲性给出一个判别引理.

锥形条件和引理的陈述

令处，％是两个正常数，满足内缶VI.令

K+=（（广，C+）ER|><R】|欧丨法必|厂丨},  
*K* = （（广，广）6 R' XR屮尸丨M见广I},  
*靜=*（（广4+） e R' X R屮广丨法用广| }.

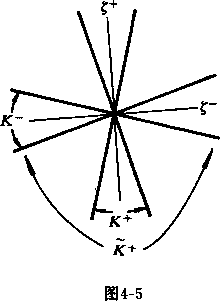
我们称一个可逆线性映射A'ItXRifRiXIt满足（由，知）锥形条 件，如果

（1） *A^+UK+;*

⑵ l（4C+|NA|u+|,y。=（广4+）&K+,

（3）. i（A-'?）-|>Air i,v 了 =（，-,r•沱 K\ 这里尤>1是一个常数.

因为\*是*K~\W*的余集，故条件（1）可推出4-\*-UK-.



见图4-5.

引理4.1考虑R，XRL到自身的两个可逆线性算子

**H=[： }** *J=[d m]*

満足*d・M也*令乙>0是一个常数，使得

||H||V 乙，||矿却 V 乙， (4.1)

*\d~'\<L,* (4.2)

(4.3) 则对任意存在一个依赖于£，内,％的正常数凯 如果下列不等式

IM-1! *<S,* (4.4)

*\A-BM^D\ <8,* (4.5)

*\AM~' \ <3,* (4.6)

IDA/-11 <5, (4.7)

IcBM-1! *<3* (4.8)

成立,则线性映射A=町满足(払,％)锥形条件.

我们将在不等式

応'> % > max{2L2 + 22? + 1,2<L + £2)(L + £3)}

(4. 9)

成立的前题下,分三步证明引理.

不稳定備形区域内的扩张性

令

C=(L4+)€K+, 〃=(阳，时)

对满足(4. 9)的常数旳,％我们将证明

|?+ I >A|f+ I， 对 (4-10)

因为

?+ = (M + *dD)Z~ + (.cB + ,*

由三角不等式

I俨 I n *\dMz+*1 一 |csr | - w | — *\diK~* I.

(4.11)

由(4. 2) '■

*\dM^+* <4.12)

由(4.8)

丨 < |c||\_BAfT| . *\M^* I 广 |. (4.13)

由R+的定义

I 依-I £ 百1 ⑷• ir I w外1| 仙 T| • IMO I,

I m应”di • ir • iA/r i.

这些不等式与(4. 6)和(4. 7) 一起推出

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | |頌丨5听网+ |, | .(4.14)  (4.15) |
| 由(4.1) | SI + 賀俱+ | (4. 16) |
| 由(4.111,(4.12),(4.13)和(4.16)我们得 | |  |
| 1旷◎ | 『-队1 +制.g )>\*"|姓+ 1 | |
|  |  | (4-17) |

对充分小的*3*成立.再由(4. 4)

|Mr 丨2矿％+.[,

这与(4.17)一起推出(4.10).

锥形区城的不变性

现在证明

▲X+UK+. (4.18)

设£=(广，尸沱民+,咛3「，时)=鸟，由定义欧IN如广I.我 们将证明

1?+ I I- (4-19)

不等式(4.10)给出了 |旷|的下界估计,下面我们给出|厂|的上界

估计.由定义

i?-= (M + &D)厂 + *(aB + bM)^+.*

由三角不等式

|7- | CI^IIAT I + *\bm~* I + |a| |B§+ I + *\b\\M^+*

(4.20) 由(4.1), |a|,|3| VZ ,故由(4.14),(4.15)有

|^||<- I + |6||Df\* *\ ^2L^'6\M^+ \.* (4.21)

进一步由(4. 3)

|战+ 丨 M IBM-1! [A/r I *<L\M^ \.*

因此由(4.1)

lall-Sr I + *\b\\M^* I < *(Ll+L)IM^+* I， (4.22) 将(4. 21)和(4. 22)代入(4. 20)得

IT |M〈2“a + Z?+\_L)g |.

这与(4.17)-起得

I厂I ^2乙(2乙成蜕+ 〃 +心|旷|.

由(4. 9),上式中右边的|俨|前面的因子当d充分小时小于心，这

便证明 了 (4.19),即(4.18).

稳定锥形区域内的压缩性

令

*?=（旷，旷）£ K-,* ? =（r<r）= a-'?.

我们将证明不等式

(4. 23)

ir u 对■?<!.

令 \_ \_

则.

*A-1 = A -*

*c = — d~'c a,* A-'B =- *BM~',* 矿'*=a — bd~1c.*

由(4. 5)

|A-'| <5.

(4. 24)

|可W did同V》凶,

(4. 25)

*\a~' \* < |a| + *\bd~'c{* < L + L1. (4. 26)

由(4.3) '

= |BM-\* I *<LL.* (4.27)

现在我们证明〈4. 23).注意到我们有

，-=(及 + *Sc)r +* <a5 + S3)时.

因此

ir I > |才|[|矿I \_ ik网-1 \_ im I \_ |玲孩时门.

(4. 28)

由(4.26)

*\ar* |>(L + Ls)-')?- ]. (4. 29)

由(4. 27),(4. 25)和(4.8),有

*[A-'Bcr* I才t剧团团

<L2|BM-1]|c||7- I *a.* 30) £乙％I厂j.

由(4.1)

]^+ I <L[?+ |. (4.31)

由(4.27)和(4.1)

*[A-^Bd^* 丨 M |3-'B| *\3\*|7+ 丨 |. (4.32)

注意到 *代K\*由(4. 31)和(4. 32)得

|切+ ] + 0753时 | VkCL + \*)/ |. (4. 33)

由（4. 24）,（4. 29）,（4. 30）和（4. 33）得到（4. 28）右端的下界估计. 因此

|厂 |法尸+ + 叮 1广 I.

（4. 34） 由（4.9）

*（L +* 乙3）t *-CL +* **+ "）T.**

因\*当*6*充分小时，由（4. 34）可推出（4. 23）.引理的证明完成.I

**§ 5 Birkhoff-Smale** 定理

本节我们利用§ 2- § 4所给出的结果证明R，中的Birkhoff- Smale 定理.

定理的陈述

令bUR，是向量场*X*的一条双曲周期轨，设人,1"是它的三 个特征指数，满足|A|<Klp|.这样的周期轨有二维稳定流形 巧，（。）和二维不稳定流形*W-M.*向量场*X*的一条轨道y称为周 期轨b的同宿轨，如果万&且7UM3） 1吁5）・进一步，同宿 轨y称为植截的，如果流形与*w«w*沿着轨道/横截相交， 见图4-6.

定理5.1 （Birkhoff-Smale定理）令X是R，上的一个C°°光 滑向量场，。是X的一条双曲周期轨.如果，是周期轨b的一条 横截同宿轨，则X在出，的任意邻域里有无穷多条双曲周期轨.

事实上，我们将证明比定理5.1更强的结论:在的任意邻 域里都可以构造一个存在马蹄的后继映射.我们将证明分几步进 行. • .

周期轨道的**Poincart**映射

令*S*是一个与。横截相交于0点的平面，则在S上0点的邻

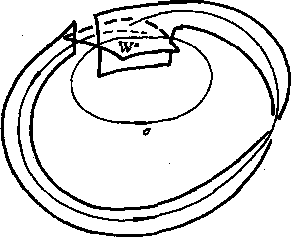


图4-6

域可以定义Poincart映射.由于RZ上的微分同胚在它的双画不动 点处可以U线性化(参见第一章定理4. 22),故在S上O点的邻域 可以选取一■个坐标系，使得

(1)0点是坐标原点，

⑵ PoincarS 映射 P 是线性的，*P(.x,y) = (.kx，ny'),*

这M|A)<1< I产I.直线去=0和分别对应局部稳定流形和局 部不稳定流形.令两点分别属于局部稳定流形和局部 不稳定流形，作一个尺度变换便可假设/>=(1,0)四=(0,1),令

B = {9,少卩0■ —11 V|刃 M 禺},

菖={(工,丫)}闵 MM "

分别表示点夕与q的一个邻域,当畐，毎充分小时，有

P8r)B = 0,P-'AnA=0. (5.2)

令pn=p-"snB表示*b*中所有在*p"*作用下映到2的那些点所 构成的集合，当n充分大时以是B中一个高度很小而与*B*等宽 的矩形.由(5. 2)有

0 = 0. *n^m.* (5. 3)

再令是百中一个宽度很小而与S等高的矩形,

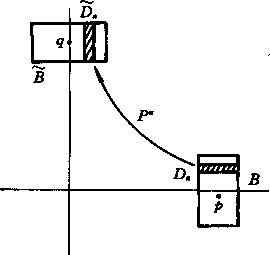


图4-7

见图4-7. ■

同宿轨at的后继映射

因为同宿轨y连结P，g两点,故当畐，易充分小时，系统X的 每一条从S出发的正半轨将与S上力的一个邻域*U*相交于一点, 我们用F表示这一对应

*F.* (5.4)

由常微分方程的解对初值的光滑依赖性知,F是b微分同胚.令 F(Z,少= (Px，Fy).由于稳定流形与不稳定流形沿y横截相交, 故有

*3Fv*

—乂 0. (5. 5)

*3y ,*

令

*Bh = B [)* 3 = 0},瓦=3 n(X = 0}. 取定为充分小，使得

*F珥* D Sft = *{p}f* (5.6)

凱攻 <5-7)

F^riaBL。， （5.8）

唤昭=0， （5.9）

这里 *aB尸{^—l±Sl,y=0}* ,3乱={z=0,y = l士&}.由（5. 7）— （5. 9）可以取定毎充分小，使得

賈L尹。, （5.10）

*FE n 為B = 0,* （5.11）

*, FdhS* n B = 0, （5.12）

这里

*3VB = € B\x* = 1 ± 昂},

祝骑={（工,夕）e舌|\_y = 1 ±&}.

现在我们定义后继映射厶：£）「\*[/如下：

*A” = F。已*

在集合卩玖,上定义后继映射/■为

月％ = 1

下面将证明对所有充分大的整数在区域玖,UQ+i上是一个 马蹄映射.为此，我们将逐条验证/满足定理3. 2的所有条件.*D„* 是矩形.它的边界的水平及垂直部分分别是

電以=｛愆,丿）丨B — 1丨V - 1| =晶｝ 和

*3vDa* = ｛（x，3-） | |x — 11 = & , I心一 11 M "

引理5. 2对任意正数岡都存在正整数N,使得当 &>N时J-满足（払,％）锥形条件,并且对*i,j>N*有

*n*

（1） 边界条件成立:為以nq=。，/D,n^=0f

（2） 相交条件成立!/D,.no>^0.

证明 首先我们利用引理4.1证明满足锥形条件.根据链

式法则，有

*Df\D =DF-DP"*

|  | Sx | *ay* | |  | A" 0 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *3Fy* | *dFy* | |  | 0 9 |
|  | Sr |  |  |  |  |
| *=H* | | *=H* | *A*  *D* | | J |

(5.13)

这里 D=B=O, A-A", *M=f,*令



||DF(“)||,||DF(“)T||,

由(5-10)及*F*是一个b微分同胚,我们有

*L* V+ 8.

令。是引理4.1中所确定的常数,注意到*B=D=0,*

|厶| = W| f 0,成7| = |厂”| 〜0,当 ”~+8, 对充分大的(4. 3)—(4. 8)显然成立.

下面验证边界条件.注意到

*DjUB,* PquE,戸(次 Z>f) uaq,*礼Dj U 礼B* 以及(5.11)和(5.12),便知边界条件成立.

最后验证相交条件.在以•中有两族直线，即所谓水平直线族 和垂直直线族：

«(\_>) = BA X ⑶},r G (R)。，  
q(z) = {苗 X (£>A，z G *Bk.*

这里(玖)，={ |止y—l |M&}.注意到

G.3)— — 及，当Z—+8,

再利用(5. 6)得到，当*i,j*充分大时，曲线 与C£(j>)在*p*点

附近相交于唯一一点.因此

*fDj* n Dj 尹 0.

引理证毕.I

最后，由引理5. 2及定理3. 2可推出定理5.1.

与本章§1, §3和§ 5中相应的在高维（“ > 3）情况下的结 果，可.参见［Wi2］和［Sill］.

第五章空间中双曲鞍点的同宿分岔

本章将考虑空间R'中鞍点的同宿分岔.在§ 1中将讨论特征 根都为实数的鞍点的同宿分岔•在§ 2中将讨论有复特征根的鞍点 的同宿分岔.在§ 3中将讨论由一个奇点和一条闭轨以及连结它们 的两条异循轨所组成的环的分岔.通过本章的学习,读者将会对如 何利用奇&或不动点附近的线性化理论（见第一章§ 4）来研究非 同部分岔问题有初步的了解.

**§ 1**具有三个实特征值的鞍点的同宿分岔

本节介绍的结果是平面上相应结果（见第二章§4）在空间中 的推广.

周期软at的产生

假设R3中一光滑向量场有~个特征值都为实数的双曲鞍点 及其同宿孰.我们考虑这样一个向量场在一般的单参数扰动下所 能发生的分岔.不失一般性,我们总可以认为鞍点有两个负特征值 和一个正特征值（否则考虑其时间反向系统）.这样的鞍点具有二 维的稳定流形和一维的不稳定流形.我们称最大的负特征值与正 特征值之和为粽点量.

定理L1令Xe是R3中一个一般的单参数向量场族.设当参 数e=o时,向量场X。有一个鞍点0,它具有两个负特征值和一个 正特征值，并且鞍点*0*有一条同宿轨则存在7U0的邻域*U*和 参数空间中e=0的邻域V,使得当参数e位于V中零值的某一侧 时,向量场Xe在。中有唯丁f条双曲周期轨，当L0.进 一步，如果鞍点量为正，则乙有二維的稳定流形和二维的不稳定

流形.如果鞍点量为负，则4是稳定的;而当参数£位于*V*中零值 另一侧时,X°在U中没有周期轨.

一般性假设

在证明定理之前，我们首先解释定理陈述中“一般”一词的含 义，即所给出的单参数向量场族Xe应满足下面四条假设,其中前 三条是针对向量场X。的，最后一条是对族*Xe*本身的.

（1）鞍点。的特征值两两不相同且为非共振.

此假设意味着向量场X。在点*0*邻域内光滑等价于向量场*x«* 在点*o*处的线性部分（参见第一章定理4. 18），故在线性化坐标系 下，稳定流形是一个平面,而不稳定流形是一条直线.在稳定平面 上，除了奇点*0*和一条通过O点的直线外，所有轨道当1+8时 都沿着对应较大负特征值的特征方向趋于*O*点，这一方向称为主 稳定方向.

以）当$f + 8时，同宿轨沿主稳定方向趋于。点.

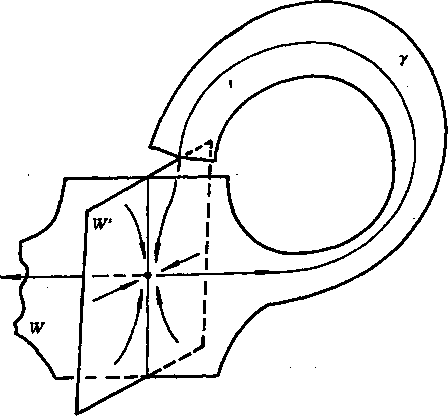
下一条假设是基于如下的事实:对应两个较大特征值的特征 向量张成一个不变平面",这一不变平面沿着同宿轨延伸.

（3） 流形归与鞍点。的稳定流形沿着同宿轨横截相交，见图 .5-1.

（4） 当参数通过零值时，同宿轨以横截方式产生和消失（确切 定义将在下面给出）.

定理**L1**证明的愚路

我们将通过研究向量场在同宿轨附近定义的Poincare跳射来 证明定理.为此，在鞍点邻域内可以选择两个与同宿轨横截的曲面 「+与其中以「+上的点为初值的正半轨道进入邻域，而以*r~* 上的点为初值的正半轨离开邻域.首先，定义映射厶 这一映射定义在「+上的某个区域，它将尸上的一点映到以该点 为初值的正半轨与「一的第一个交点,假设（D使我们可以把向量 场在。点的邻域里看成是线性的，因而映射厶'舛可以精确地用初



,B05-1

等函数表示出来.当鞍点量分别是正和负时，厶:皿分别具有强双 曲性和强压缩性.另一方面，因为同宿轨分别与「+和「「相交，因 而沿轨道我们可以定义从同宿轨与的交点的邻域到同宿轨与 L的交点的邻域的映射，并将它记作厶普，见图5-2,由解对初值及 参数的依赖性定理可知，厶尸是一个光滑依赖于参数e的微分同 胚・于是，同宿轨的Poincart映射可定义为

4 = △罕。兮.

最后，我们分别利用双曲不动点定理和压缩映象原理，讨论当鞍点 量为正和为负时,映射厶的不动点的存在性.

映射厶普的定义和性质

由假设(1),利用第一章定理4. 27,在鞍点*0*的一个邻域里，

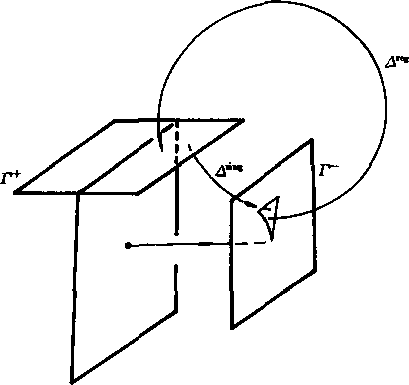


图5-2

我们可选择一个坐标系，使得族X.具有形式

*x =*

*' y* 为(0) VAJO) VOV#(0). (1-1)

*z* == ju(£)z,

令

r+= u = 1, |yl < 1, < 1},

*r~=* = 1,1钊 <i,|>| M i}.

由假设(2),我们可以认为同宿轨与L相交于一点色=0,外,0), |由<1.不失一般性，我们还可假设,0点邻域中正z轴是同宿轨 的一部分,这样，同宿轨与广相交于点如=S,O,1).下面我们来 计算笙叫系统(1.1)的以为初值的解为

= x exp(A] (e)z),

・贝，)=*y* expQ(€)£), (1. 2)

z(£) = *z* exp(jU(£)f),

注意到在r±^=h因此由等式

*1 = z* exp (声(QQ

可解出轨道从r+ n {z>0}上一点出发走到「-所需时间

ln«

—而

然后代入(L 2)中前两式，并注意到在「+上z=l,便可得到 攵％O,Z)f <y ,z，)= (\*,\*, (1-3)

这里 a=—A(e)/产(e) = /S.

映射*骨*的定义和性质

因为当e=0时，同宿轨连结上的点条=(0,0,1)与「+上的 点勤=(1,少,0),由解对初值与参数的依赖性可知，存在r-±9o 的邻域Q,使得对于所有充分小的参数e,Xc从Q中的点出发的正 半轨与L交于戊附近一点・我们将这一对应关系记作

骨：QU

映射A尸是一个光滑依赖于e的微分同胚.令

w(g。)= (Y(e)，Z(e)),(Y(0),Z(0))=(丸，0).

不难看出,(y(e),z(e))是鞍点的不稳定流形与「+的交点，面 Z(e)是该交点到稳定流形的距离.假设(4)的精确含义是

£z(e)|g。#：。. (1.4)

作参数变换Z(e)=产,然后把“和y(Z-r頒))仍记为£和y(e),便 有

=(Y(e),§). (1.5)

由(1.3)

gg(\_y,z)l 稣=0(1 湖 f 0,当 *hf、*

故当*h*充分小时，对必然属于 e 的定义 域Q.这样在*nh*上,我们可以定义Poincare映射如下：

浦定周期轨的产生

现在我们对鞍点量为负的情况来证明定理L 1.

因为鞍点量<7=馬(0)+"(0)VO,所以 #=-芸^ >1，对 l«d《L

由(1.3)

浏板 (1.6)

= 0(1)尸 T —0,当五 f 0.

注意到 缨 是一个光滑依赖于参数=的微分同眨,故它的导算子 关于参数一致有界.因此,(1.6)意味着

II以当 A-0.

特别地，当h充分小,41%是一个具有压缩常数+的耳缩映射. 因此,4在*血*上至多有一个不动点.下面我们分别对情况e>0和 6<0来讨论映射&的不动点的存在性.

(1) e>0.

对任意点*(y,z)en2tf*有

hd(yx)— = E 冬(y/)—冬。,0冲

1 1 (1. 7)

Walley/) — C^,o)|| = —-z<£.

注意到 y(o)=y0e(-ia),故

M2eU 丑2” Y1.

由压缩映象原理可知厶在丑2e内有唯一吸引不动点，又由(1.5), 4L=Q = (Y(e),e),故不动点不也于直线言=0上.因此，系统兀 过不动点的轨道是一个吸引周期轨.而不等式(1. 7)意味着不动点 与点(Y。),矽的距离不超过e.因此，周期轨当L0时趋于X。的同 宿轨的位置.

(2) Q.

令△=(&,&).对任意点*(.y,^enh,* △z(y,£)WAzG，z) — & w ||(4,Az)(y,z) — (Y(e),&)||

=114。浦)—冬⑶,o)|| —。，。)11

=丄 < z.

4

上边不等式中等号成立，当且仅当

2 — € = 0.

这样，一个点的M坐标在映射&的作用下减少，因而&在区域 风'2=0｝上没有周期点.

附注1.2在上边的证明中没有用到假设(3).

鞍类周期執的产生

现在对鞍点量为正的情况来证明定理.与鞍点量为负的情况 不同，我们将利用双曲不动点定理来研究映射4不动点的存在性 和唯一性.令

WW 卍)=(骨，頌旳(时，e). 假设(3)意味着

京=碧3 尹°, (1.8)

*如* I(0,0,0)

情况d > 0和*d<0*分别对应所谓可定向同宿轨和不可定向同宿 轨.在区域丑月上,我们将y方向看成水平方向，而把z方向看成垂直方向.

引H13存在正常数*土&、盹向0*使得对所有矿|时《 1,映射任在瓦上满足（网，化）锥形条件.

证明我们用第四章引理4.1来证明・

令,x,）=4T8（^tZ）.由链式法则，

D“,£）= D骨（寸，”）・ 心p,z）



fz° *aya^~^*

[o "T

其中

ff = D^（y ,/）, A =『，*B = ay^-l,*

a （1.9）

D=O, *M =此L*

由第四章引理4.1可知，引理1. 3成立,如果存在常数£>0,使得

以及一个依毯于£的常数*SCL1,*使得

max{ |AfT I，照*t\,\A-BM~lD\,\M~'D\,\AM~' \* }< 5（£）. 注意到（1.8）和友~吨尸（条），当如LO,我们立即得到上面 第一个不等式.现在我们来验证第二个不等式.因为鞍点量为正, 故有

夕=-端<1，园《L

因此

IM-'HDI =0,

|M\_11 —十事―，-\* 0, |BAf\_11 =*专*

0,

|A- - z°-\* 0> *\A\*，|M-'| =x«T+l-\*O,

第二个不等式必然成立，引理证毕.I

下面我们分情况讨论.

(1)泌>0.

对于。,/£耳，我们有

△z(B=頌8。輩f 比)-豹0,0“)+ £ =頌《(泌,那,e)-胥(0,0,e) + £ 等宀掌… (1.10)

2 3z + e, OOVYL

先设eNO.由(1-10),当z>0时*My,^>z-*这意味着&*在* 页\仏=0}上没有周期轨.

再设Y0.下面用双曲不动点定理来证明，&在内有唯一 鞍类不动点.因为&3,0) = e<0,我们可以找到这样一个依赖于 &的常数0<G<一e,使得

*^(y,z) <* 0, OWzVCe. (1. 11)

考虑r+上的矩形

*Dt* = {(y,g) |Ce<zC—e.hl < 1),

则矩形*Dc*的边界的水平部分为

狗色=g,M)£|z = Co — £, |y| < 1},

*Dt*的边界的垂直部分为

*^De = {(y,z)* € F+ *\y* =± l,CeC«^— £}.

对于任一点(y,z)WZ\,我们有

I3,o)丨 M ME -骨(0,0) I

+ ]-^(0,0)— 3,o))

=心03) — 骨(0,0)丨 + |(珀),©) — 3,0)|



• "I +

• |另 + KY(e),e) - 3,0)|

注意到I必|<1,我们*有*

Mng = 0,)e《L

(1.13)

(1.14)

(1.15)

由(1-10)有

为(R, — e) >— 2e>— e.

(L 14)与(1.11) 一起推出

冬策玖n玖=0,

以及

(1.16) (1.13),(1.15),(1.16)和引理1. 3保证了 Poincare映射冬在区域 *以*上满足第四章定理1. 5的所有条件.因而&在内有唯一双 曲不动点.进一步从(L 12)可以看出，此不动点当『-0时,趋于系 统X，的同宿轨与E的交点3,0).因而，当L0时，通过该不动 点的周期轨趋于同宿轨.另外,(1-10)和(1.11)还保证了在 中，映射&没有其它不动点•

以no.

(2) d<0.

对于有

=頌sg宀e) - △羿(0,0,e) + £

3骨八坤疽丄

先设 Y0•由(L17)得

矽 V 0,当。产)€ 瓦\伝=。},

故映射A在""3=0}上没有周期点.

再设£>0.因为d(”0)=弓故存在一个依籁于參数£的常 数0<C£<|,使得

△zG，z)>$,对OWzWCe. (1-18)

由*(1-17)*得

鸟⑶，专)<一爵<0. (1.19)

现在考虑「+上的矩形*De={*(X)EL ICeWY爵，侦I Ml }.矩 形De的边界的水平部分和垂直部分分别是

aA-DE =((>.«)€ r+u = Ce,c/2, |j>| <1}

电玖={(" e「+ IGW Ye/2, *y=± 1}.*

不驚验证,不等式(1-12)仍成立，因而(1.13)也成立.进一步由 (1.18)和(1.19)可推出(1.15)和(1.16).与情况d>0时完全类 似,我们可以证明映射在*Dt*内有唯一双曲不动点.定理证毕.|

**§2**空间中鞍焦点的同宿分岔

我们将R'中具有一对宴特征值和一实特征值的双曲鞍点称 为鞍焦点•本节将考虑鞍焦点的同宿分岔•不失一般性，我们可以 假设鞍焦点的一对复特征值具有负实部，而它的实特征值为正数, 否则可通过时间反向而转化为上述情况•实特征值与复特征值的 实部的和称作鞍点■•鞍点量为正或为负的鞍焦点所对应的同宿 分岔有着本质的不同,当鞍点量为负时，分岔与本章§ 1中相应的 情况类似;而当鞍点量为正时,在鞍焦点的同宿轨的任意邻域中定

义的Poincarfe映射都存在“马蹄”.这样一类向量场在单參数扰动 下的分岔现象，迄今为至还没有完全研究清楚.

具有负鞍点■的鞍焦点的同宿分岔

本节第一个主要结果如下：

定理2.1令Xe是R3中一个一般的单参数向量场族.假设当 e=0时,X。有一条具有负鞍点量且不稳定流形为一维的鞍焦点0 的同宿轨4则存在 *W0*的邻域U和参数空间中零值的邻域*V* 使得当参数e位于V中零值某一侧时,Xe在*U*中有唯一周期轨, 此周期轨是稳定的，当时趋于七而当e位于V中零值另一侧 时,Xe在U内没有周期轨.

在定理2.1的陈述中，“一■般”一词的含义是

CD向量场X。的鞍焦点的特征值非共振；

(2)当参数通过零值时，系统Xe的同宿轨以橫截方式产生和 消失(确切含义见(2.10)).

定理2.1证明的1：现倉义

在给出严格证明以前，为便于读者理解,我们先给出证明的直 观描述，为此我们将尽量把问题简化•首先我们假设，在鞍焦点的 邻域里向量场可由下面线性微分方程组给出

*(tii =* (A + *ia>)w,*

. C2-1)

岳=*fiZ,*

其中 i = -/—If *iv=x-\-iy=r* exp(W), «CR, XVOV”，3尹0.令 r+= = i},r-= *{z =* i}. <2.2)

不失一般性，我们假设同宿轨y与r+和r-的交点分别为

/> = yn「+：{(们z)=(o,o)}, (2 3)

q =，n r-*i(.x,y,z) =* (0,0,1).

*nh=* (W.z) G r+ <1). (2.4)

注意到（2. 1）是变量分离的.换句话说，它是分别定义在稳定流形 与不稳定流形上的两子系统的积.因此,（2、1）的任何轨道希z轴 方向向（#,少平面的投影是方程&= + i«»）w的轨道.这样，所 有以*nh*上的点为初值的正半轨位于一个平行于z轴的柱形区域 里，这一柱形区域的底是一个“粗螺线”匸，其中匸是由区域瓦n 蒔=0｝上出发的正半轨线的并组成.我们用厶畅表示沿系统 （2.1）的轨道从*nh*到的映射，即*nk*上每一点映到从该点出发 的正半轨与「~的第一个交点、为了描述区域*ah*在哲喩作用下的 象，只需将匸沿%轴方向提升到平面然后再去掉其在圆周c： r = H =砂,V = 一 $之外的部分.有两种情况需要考虑

（1） 鞍点量为负：a=A+^<0.此时V>1,*椒HTF*

（2） 鞍点量为正2=人+心>。,此时V<1,*故H=\*》h* 见图5-3..

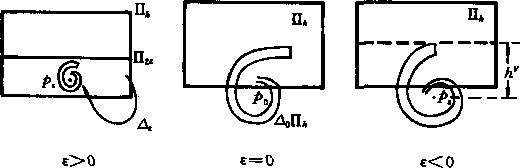


图5-3

在定理2.1中只考虑第一种情况.根据假设同宿轨连结「+的点*p 与*L上的点*Q.*由解对初值及参数的依赖性，对于所有充分小的 参数,r-±9点附近出发的正半轨道将与「+交于*p*点附近的一 点,我们用中表示这一对应关系.为了简单起见，我们假设骨 是一个平移，

肖：愆,力 f （0,z） = W«（z,力=（z$ + e）. 记A = ^g(0,0) = (0,e)是鞍焦点的不稳定流形与「+的交.不 难看出在Poincare映射&=杰弟„杰姑的作用下的象是一个 以点处为极点的“粗螺线”，并且它位于圆周耳：|(们言)一如1 = *m* 的内部.当£>o时，因为集合位于C^,H=(2C的 内部，因而&是丑”到自身的压缩映射，故有唯一吸引不动点.当 Y0时，圆周内部的点的m坐标小于无,这意味着映射 &象的z坐标比其原象的%坐标小，故&没有周期点，

定理2. 1的证明

我们将证明分成几步

<1)映射夔8的定义及性质

由假设1,应用第一章定理4. 27,在鞍焦点的一个邻域*0*里存 在一个坐标系S,y,z),使得Xe在。内是线性系统

*i* = A(e)x — tu(e»,

*■ y =* + A(e)；y, (2.5)

*z* =产(e)z,

这里H0)V0V产(0),a = A(0)+产(0)V0.如果必要的话，可对 <2. 5)做尺度变换，故我们总可假设{(z,加时| E|, |y|, |z| < 1) U0.不失一般性，我们还可进一步假设，当『0时屛中正z轴是 同宿轨的一部分.令

i^2 + y = 1,*\z\* i}t

戏={愆成,歎e r\* |0WzV五}, r~= {Czj,z)I/ + y w \* i}・

方程(2. 2)的以点愆①,QEZV为初值的解有下列形式 工(£) = exp(A(£)i)Ccos(tu(€)f)x —如(火以) 火 Q = exp(A(e)r) [sin(w(E)f)x + 00»3(£)\*»丄 z(£)= exp(产(矽

从上面第三个等式解得凱道到达「■所需时间为产(。71眼、

将其代入前两个等式，得到轨道与的交点坐标(#*，矿*,1)满足

(”，护)—W Czcos/? — win#) fx\_a(xsin^ + *ycosR)),*这里a =人(矽加(c) < 0,夕*=一* gglnz.我们用笙哗代表系统  
(2.5)的沿轨道从；V到r-的映射.如果我们在"上引进坐标  
(0,z),0=tanT，则梦8可表示成一个二维映射

«x

*3 ,y'*)=茂'理但幻=(2-‘008(0 + 戶)，厂‘血(。+ j3».

(2. 6)

微分上式得到

(2.7)

*cosB* — sin^j sin/? cos/9 *j \**

D普g(0,z)

此处

I

*—zsinS*

——&(€)(A(。弘。—o)(e)5i'n0)

*zcosQ*

*—0 怎)血。*+ 3〈e)c<»0)

因为鞍点資a-A(O)+M0)<0,故

—a — 1 =— — 1 > 0, |d《L

因此

P)M蜘(0/)辰 VO(1 W 〜03—。.

*n*

这意味着当*h*充分小时，建叫寸是强压缩的.

(2.8)

(2)映射骨的定义及性质

用》戒分别表示同宿轨，与计和「-的交点.将坐标系做一 个绕%轴的旋转,我们可以假设*P*点位于H轴上(0=。).令 性3= wqe/l 冏 (2.9)

这里SO是常数.当£=。时,同宿轨y建结「一上的点 *m ,y')* =(0,0)与点*p.*由解对初值与参数的依赖性定理，存在r-±q点 邻域Q,当I时充分小时,每条从*Q*中一点出发的正半執都与r+交 于*P*点附近一点,这种对应关系我们用 骨 表示.「+，是 一个微分同胚■令

笙％) = g),z(e)), (0(0),z(0)) = (0,0),

馳假设的确切含义为

亲z(e)|5 尹 0. (2.10)

做参数变换z(矽Ze,我们可假设

骨 0) =g,£),

即不稳定流形和「+的交点与稳定流形伝=0｝的距离为|e|.

(3) P晚ncart峡射和它的不动点

由(2.6),当兀充分小时，象星118「办包含在出\*\*的定义域Q 里，故在「払上可定义Poincare映射如下

& =斷。史

由(2.8),当五充分小时，&是丄个压缩常数小于f的压缩映射. 接下去对d的不动点的存在性的讨论与§ 1中关于戰点量为负情 况的讨论类似，我们在这里从略.

定理2.1证毕，|

鞍点■为正的鞍焦点的同宿分岔:马蹄的存在性

定理2. 2设空间中一个光滑向量场有一条具有二维稳定流 形的鞍焦点的同宿轨.若鞍焦点的鞍点量为正，则在同宿轨的任意 邻域里都有无穷多条双曲周期轨.

定理2. 2证明的思路 我们将通过验证同宿轨的Poincare映 射存在“马蹄”来证明定理,下面我们仍然利用公式(2. 2) ,(2. 3)和 (2.4)中的记号.问题的关键是要证明Poincare映射厶在「+的某 个子集上满足第四章的马蹄存在定理的条件.正如我们前面所说， 象*皿*是一个以*p*为极点的粗螺线，粗螺线距点*p*的最大距离约 为0(1)尸,集合皿'3=0)有可数个连通分岔.我们考虑那些位

于（^=0}±方的连通分岔的原象，这些原象都是曲边矩形，映射△ 在每一个曲边矩形上都是一个马蹄映射，见图5-4.

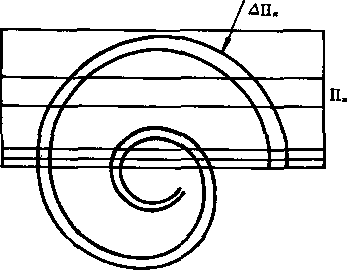


图5-4

定理2. 2的证明 由第一章定理4. 22,我们可以在鞍焦点的邻 域里取一个U卡,使得向量场在这个卡下是线性系统

s = Az — ay,

*■ y = cuz + Ay,* （2.11）

2 =

这里人 V0V#,2+m>0.

r+,r-如（2.2）所定义,厶蛔 代表沿（2.U）的轨道

定义的映射.由（2. 6）,厶血8有表达式

厶蛔 0/）=（厂％08（。+ 8）,旷《血（。+ 0））, （2.12） 这里8= 一 ?1心,一10=対产<0.令

瓦={（们功 *er+ \e = e»e* e-53J,o<2<a}.

由（2.12）,象濟昭气是「-上的以3，°）为极点的对数螺线•注意 到厶财是一个微分同胚，故象&£=厶哦。△血8駅是尹上以点p 为极点的螺线.令「力兀如(2. 9)定义，则象AT\*五是介于两条螺线 应主d之间的区域•它在直线3=0｝上方有可数个连通分支，其中 每个连通分支都绕*P*点半圈.我们给这些分支由外向里给定序 号，令瓦,表示第«个连通分支在4作用下的原象，见图(5-4),则 丑\*是一个曲边矩形.它的上下边属于直线｛言=0｝的原象，我们断 言,存在不依赖于*n*的常数G>1,使得下面不等式成立

Up"嗇K \*1 g\*. W G exp(-*粽),*

(2.13)-

Cr1 exp(窗)w II 0,£)I匝 W G exp(舒)，(2.14) 这里表示点(H,z)到点步=〈0,0)之间的距离•为了证明上 述两不等式，在(们Q平面上对点(8,z)£瓦，我们如此定义其象点 △(。点)的辐角arg ，使得这个辐角连续地依義Sz),并且

arg *A(3,z)* |叫£[0,0,这样便有

|arg 苛理(°,2)|渉\*)€” e [(2” 一 2侦，(2”一 1)<|.

(2.15) 由(2.12),有

|arg 潛W,z)| = 誹\* +0(1).

注意到辐角arg厶如在微分同胚厶也作用下只能改变有限 量，故

|argA(H,z)| = + 0(1), (2.16)

比较(2.15)和(2.16),得

—Ina =2\* +。(1)・

“冲

由上式便推出(2.13),注意到

|| 厶（们z）|| 厶蛔（们"| =O（l）|z|f,

再利用（2.13）便可推出（2.14）.区域丑\*的另一个重要性质由下 面引理给出，

引理2.3对任鳶给定當数席所＞0,当”充分大时，区域 *L是*S，所）矩形.

证明瓦，是一个曲边矩形.它的左右两边是直线佰=士8｝. 这样，为证明引理，只需证明*an*的上下边是w水平曲线,即一个 李氏常数为任关于0的函数的图象.

令*w*表示直线z=o在映射厶呻作用下的原象，则*w*是r-± 的一条通过点g=（o,o）的u曲线.曲线"在卩点的切线或不与》 轴平行或不与x轴平行.下面我们只讨论不与3-轴平行的情况， 不与x轴平行的情况可类似地论证.

令中是C1函数的图象

*w =* ｛（z,了）£6 （R.o）｝, SM/（o）=ot则*n„*的上下边中的点的坐标（仇/满足方程 /愆）=夕， （2.17）

这里 cos（8+/3）,丿=厂。sin（0+§）.等式（2.17）两边对 *9* 求导，得

条一中苓+凱

=1亙而+ 41 一万云,而）

或

割\_ 3, （x） +*訶*3） +中+誹）⑵18） *=xz+ yzf'* （x）.

将（2.18）除以工，得

飢-寸5+唯+辭3） +方

=\*1 + +户(。). (2.19)

注意到当工f。时，主f尸(0).因此,(2.19)的等号右边括号内的 值趋于非零常数，故

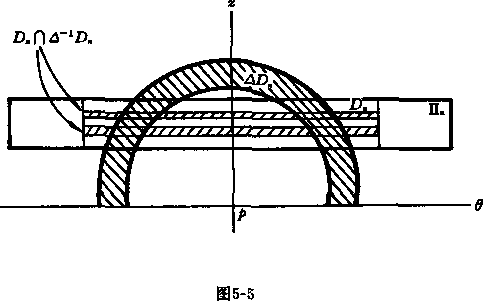
务=。⑴

再由(2.13),当厂\*8时有 lO.引理证毕.|

令

玖,={(。,釘€瓦 |8| M2C】exp{標)}. 由引理2. 3可知,ZV是一个(处，所)矩形，它的水平边界属于原象 厶顼{\*=()}•因为鞍点量b=A+产＞0,故当时

G F(- 符＞《G-1 exp(帶')•



由不等式(2.13)和(2.14),Poincare映射△限制在区域*Dn*上类似 一个马歸映射,参见图5-5.下面证明*D„r\^DB*确实包含了一■个马 蹄•为此，我们将验证映射△在区域*D„nA-'Dn*上满足第四章定 理3.2的所有条件.首先，我们证明映射△在区域an"玖上

满足S,向)锥形条件，

引理2. 4对任意给定常数您出》1,都存在依赖于故， 代的常数N,使得当*n>N,*映射厶在区域上满足 (冲，為)锥形条件・

证明我们将利用第四章引理4.1来证明.

；)的辐角，令 *cos%* — sin .sin爲 *cosg。*

令爲是向量曲呻(q)T

Dg(g)

因为向量［J是矩阵片的特征向量，故

(2.20)

我们断言，对于*C0,^eD„^-'D„*有

0, *P* ^Inz f go(mod it), *n -\*+ <x>.* (2. 21)

由区域2.的定义,(2.21)中第一个极限是显然的•现在我们证明 第二个极限.因为(丄■?)€/)“ ，故厶(们由

(2.13)和(2.14)有

argA(0,z) f 0 (mod ”)， *n f + 8.*

因此'当 8 时 arg不-傷god k).由(2.12)可知, arg△血们z)=8+/3,这意味着当8时，戶―禺(mod “).

现在我们来计算雅可比阵D△.对(2.12)求微分得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 脳")=驚 | cos/? *I* |
| 其中矩阵 |  |  |
| 4 = | ‘一厂侦泌-- | 1 (Acos^ —如in。) |

Z\_"costf ——“TgfT (Asin。+ *a/cosff)* 因此,由链式法则有

D/i0,z)=。厶哼(厶血。(们戒)•

*=HJ =*

*a b\ A B c dj* D *M*

其中

*I a b \_ i* cosg — sing}

ff= 」=D次Kg)).： :,

*c d* \ sin夕 cos0 *I*

*A B \*

*/= D M]'*

*A —* — — — osin。),

*D ——z^cosfffM ——*——/(\_12\_a\_1(Asin5 + *okosG').*

现在我们来验证第四章引理4.1的条件，即存在常数L,以及由引

理4.1所确定的依赖于乙的常数乩使得不等式

*L >* max{ |回|, ||H-'|| *,\d~' \ \}* (2. 22)

以及

max(|MT|,|MT| • |D|,|A| • (? 23)

成立.由(2. 21),对(8,2)£口》,当&->8时有H—点或一角.故由

(2. 20)有

c-\* 0, *\d\* f 位| 尹 0. (2.24)

注意到当”f8时,10,我们有

〈鼎，5, (2.25)

因此(2. 22)成立.由(2.13),当 L8时有

|AfT|=O(lW+J0,

|MT| |Q|=0(1)lO,

⑷|心|=0⑴lO,

*\A-BM^D* I =0( WJ 0.

另一方面，由(2.24)和(2. 25)推出，|c| • IBM'11 - 0,当

&f+8,故(2. 23)成立.引理证毕.**I**

最后来验证,4在上满足边界条件和相交条件• 首先ang 包含两个连通分支，故aru-%”有两个连通分 支团与H：.因为它们当中的每一个都是一个曲边矩形,它们的 上下两边属于*Dn*的水平边界*dhD„*的原象A-】眾如因而*勇H* 都是（陶，所）矩形，且满足

（活 U 卅）Cl 氟叫=（2.26） 注意到 缽死U氟玖,，由（2. 26）有皿研0（研11死）=0・由 不等式（2.14）与d„的定义推出 g n毒以.=。，故&理n %玛=0盘」=1,2.由连续性，相交条件朝n码尹0显然 航.

上面的论证表明，对所有充分大的自然数\*，映射△在区域 *DHn^D„*上有一个不变集4,使得与a上的右平移映射*。* 拓扑共辄,因而△在4上有无穷多个周上点.因而向量场在同宿 轨附近有无穷多条双曲周期轨.

定理证毕.I

轨道等价不变■的存在性

令*M*是一个紧致光滑流形，幽代表*M*上的所有C向 量场在C拓扑下所构成的Banach空间.在缶'（M）上定义一种 等价关系“〜”•对X£缶「（M）,令

X =（Y e *\My\Y - X}*

表示与x等价的向量场的集合.称xe缶Pw）（关于等价关系 1•〜”）结构稳定，如果*x*属于集合玄的内点.

定X2-5 一个复数c称为向量场X£缶'（M）的模，如果对 *X*的任意邻域U,存在一个包含*X*的连通集合*A（=u*和定义在*A* 上的一个非常值连续函数f满足

1. /（X）=C>
2. v Y,zeA,若 y 〜z,则/'（59=六2）.

由定义2. 5可以看出,任何有模的系统都不是结构稳定的.例 如，如果等价关系“〜”取为U等价,则孤立奇点处的任意两个特 征根的比值即为模.因而，任意有孤立奇点的向量场都不是结构稳 定的.再如，如果我们在拓扑轨道等价中要求相应同睡保持时间, 则向量场的孤立周期轨的周期便是模.因而，任意有孤立周期轨的 向量场不是结构稳定的.显然，上述两种等价关系过于\*严格”，使 “过多”的系统不是结构稳定的.于是，我们通常是在更弱的拓扑轨 道等价(见第一章定义1. 7)下，研究结构稳定问题和分岔问题.寻 找有模的系统是分岔理论中一个很有意义的问题.

定理2. *6* (EAAIS3)设X是IT中一个具有鞍焦点外的同宿 轨的光滑向量场，则鞍焦点％的复特征根的实部与它的实特征根 的比值是系统X的模.

设奇点京的特征根为A士国,产,为了证明定理2. 6,我们只需证 明,〃产是轨道等价不变量.在下而的讨论中，我们仍利用前面的 记号和概念.我们仍然假设,〈产.

若A+"MO,我们定义

店(“)=min” € *0}f*

若人+40,我们定义

”(&) = max{n £ N,氏 0 心”*手* 0}.

引理2.7序列\*(»),««)有下列性质

71 产 4-\* + ™ « 人

证明如果

maxfzllo\* Wmax|z||、，

(2. 27)

则显然

*以*n皿!*手*01

如果

min|z| 1% >max|z| |业，

(2. 28)

则屜然

*风*n徵舞=*0・*

由(2,13)和(2・14)易知，如果

(-當RUP(符)， 则(2. 27)成立.换言之，如果也骅而，则

mn&T逐。. (2,29)

同理，如果

Up(-符)> G exp(窗)‘ 则(2. 28)成立.换言之，如果一也竺 >网+糸，则

耳 n 斗=*0.* (2. 30)

由(2.29)得

岫亀哨-分顶“宇-令.

由(2.30)得

kw A 企肾-7n, n(A) W-企蜉-f\*- 因此

陪柴|,酵+普同齧!. 引理证毕.I

定理2.6的证萌 令X］和Xz是R，中分别具有鞍焦点。雨。2 的同宿轨的两个光滑向畳场•设4•士讪,,曲是勺的特征值•假设 %和尤是轨道等价的，即存在一个同旺H,R—R3，使得H将X| 的轨道保向地映成X，的轨道.正如前面考虑的那样，我们可以假 设*粕在勺*的某个邻域3中是线性的.

x = AjX — *a>jy,*

X,= 3产 + 人疗，A,. V 0 V 的,s,•尹 0.

通过一个线性变换，我们可使Ui中的点6=(1,0,0)属于q的同 宿轨.我们取

lYnUHCsQElASz + y = 1,⑵ Ml}.

在S中做一个线性变换,可使点a=h<a)的坐标成为(1,0,0). 取

n = {o,外 z) € + y = i,|z|< 1}.

在町 的某个子区域上，我们定*X* Poincare映射乌.我们断 言，映射厶与&是拓扑共純的,即存在一个从上点队的邻域到 IV上点為的邻域的一个同胚G,使得对&的定义域上的任意点 有

G - A3)= 4, - G3).

事实上，同胚G可以用公式

*G = .。H*

给■出，这里玲定义为点所在R冲的邻域沿X面轨道向Z7的投影 映射.显然洞胚G将Z7上的曲线住=0}映到有上的曲线修=0} .如前所述，映射4的定义域是一族曲边矩形疋的并•因为昭i 的上下两边属于原象午％=0},故G 一定将*m,*的上下边映成某 个曲边矩形*吗*的上下边.因此对所有4》1,存在一个不依赖于« 的整数m,使得

*GK = %.*

因此

碇》)=如(舛*+ m) —m,*当鞍点量非正；

= »2(4 + *m) — m,*当戰点量为正.

由引理2.17,这意味着

太=至

*% th*

定理证毕.I

**§3**环的分岔

有限个奇点和闭轨tfo.Oi，—.<?4-1^\* = <70以及连结它们的轨 道乙•，满足和弘为)=鸟+1并=0,1,“財一1,所构成的轨 道集合称作环.我们在§ 1, § 2中所考虑的奇点的同宿轨是一类特 殊的环，邮及色是一个双曲奇点.本节我们考虑R\*中由一个 双曲奇点和一条双曲闭轨以及两条连结它们的轨道所构成的环. 值得指出的是，在著名的Lorenz方程中，对某些参数值上述环是 存在的，而且环附近的分岔现象非常复杂，迄今为止尚未彻底研究 清楚•

环的分类

设R3中一个光滑向量场*X*有一个包含奇点6和闭轨电的环 A,满足下列四条假设

1. C是一个双曲奇点，它有二维稳定流形"'3。)和一维不 稳定流形
2. <7,是一个具有二维稳定流形“飞凤)和二维不稳定流形 於“(公)的双曲闭轨,它的特征指数为正.
3. 令"UW(为)n”'(a,+D并=0,1表示*A*中连结«,和缶+1 的執道，则流形胪3D与^3。)沿曲线儿横截相交・

⑷如果奇点％的特征值都为实数爲<0〈产,则以是2阶 非共振，即“尹％ Aj, AjK2人1，且

1. 设"是向量场*X*的二维不变曲面，它在。。处与特征值 4，产相对应的特征向量所张成的平面相切，则*W*与稳定流形IV\* (急沿曲线7。橫截相交.
2. 轨道么沿着奇点c的主稳定方向趋于%.

满足上面四条假设的环*A*有三种不同的*类型:*

1-奇点。。是鞍焦点，这时人称为鞍魚环.

1. 奇点勺特征值都为实数.且右UQ(X Z),这里Q(X |u)表 示向量场*X*限制在A的某个邻域*U*内的非游荡集，这时*A*称为 非游蕩环.
2. 奇点凤所有特征值均为实数，且*7^£i(.X\v),*这时厶称为 游蔼环.

上面三种类型的环可参见图5-6.下面我们首先证明鞍焦环和 非游荡环的任意邻域里都有无穷多条双曲闭執，具有这样环的向 量场在一般的单参数扰动下的分岔，还没有被研究清楚.本节的最 后将讨论游荡环在一般的单參数扰动下的分岔问题.

炒环

定理3.1设光滑向量场,X有一个鞍焦环A,满足假设(1) —

1. ，则双曲周期轨。I有横截同宿轨.

证明定理结论的几何意义可参见图5-7.

令*S*是一个与队横截相交于*O*点的平面，在S上*0*点的邻域 取一坐标系3,V),使得*Q*点是坐标原点，并且

1. {(W,W)| l«|,k)<2)有意义,
2. ((“,0)| miW2}UW，(s)；
3. ((0,0)] |0|W2}UTV(s);
4. 9o=(i,o)e/0ns,A=(o,i)e/1ns.

因为bo是一个鞍焦点，故向量场在它的邻域里可以U线性 化,即在％的邻域里存在一个C1卡使得X在该邻域里可由下面线 性微分方程组表示

X = Ax J *a)yt*

*y = atx + Xyt* A< 0 < *住”*弄 0・ (3・ 1)

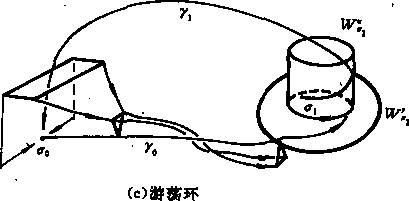
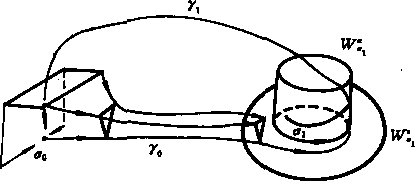
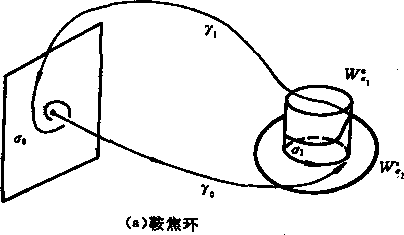
*z — ^z9*

不妨假设正m轴对应轨道像在§ 2中那样，我们引进无切截面 「士,rj如下：

「+== ((x,.y,z) |x2 + y = 1, |z| <1},

(b)罪\*善拜

图5・6



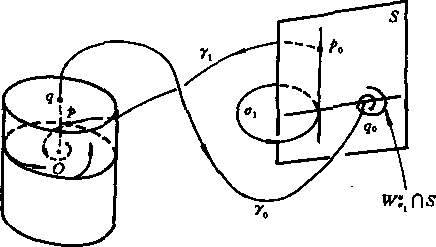


图5・7

广-={愆,丸 Qlx2 + '\* W 1, |划=1},

*- {(x,ytz)* £尸+ |OWnW 五}.

(3.1)所导曲的从n到的沿執道所定义的映射仍用厶财表 示.由(2. 6),濟《有形式

厶林(们•？)= *(z-cos(.S + B)* ,z-smC<? + R))

—=(X(0,z),y(8,z)),

这里a=A/^<0, £=—芸屜.令点 g 为(x,3>,z) = (0t0,l)er- n 儿,点/■为(们/=(0,0)£「+0九因为轨道儿连结点g与点知, 轨道万连结点公与点由方程的解对初值的依赖性定理,每一条 从「-上点*q*邻域及*S*上点戊邻域出发的正半轨必然分别与*S*及 「+交于如及*p*的邻域内一点,我们分别用F和G代表这一对应, 则*F,G*都是微分同胚.因为流形胪(色)与IP(c)沿着轨道为横 截相交，故曲线 可以表示成

。=03), (R,0),

这里。⑴ec1.因此象厶林(w"s)nF)是上的以q点为极 点的螺线,这样象*F*。厶畅(WS) C1F+)是S上以知点为扱点的 螺线

(",吋=「。政(。&)/)”£皿,0). (3.2)

上述曲线属于闭執乾的不稳定流形1¥"(此)与平面S的交.下面将 通过验证曲线(3. 2)与曲线貯0) flS, 3=0｝有横截相交点来证 明定理3.1.令*F=* (Fu,Fv),则我们只需证明方程

Fv(X(0O),z),y(0O),z)) = 0 (3.3)

有简单零点.令

。=票|＜待& =割“,提

那么(3. 3)可写成

*V(z) = aX(心*,z) + 成(@(z) *,z)* + O(X! + Y2) = Q, 或

V(z) *= a* cos(i? *+ ^+b* sin(ff + j9) + O(z-) = 0.

1. 注意，当0时，函数V(g)是一个在士 “T夢之间无穷振荡 的函数加上一个小量.因此(3. 4)有无穷多个根处f 0.下面证明 砲是(3. 4)的单根.由V(zt) =0,

*\a* sin(0 + g) — 8 cos(0 + £) | 勺=& 十罗(1 + o(l)),

1. 这里当4—8时,o(l)-\*0.另一方面

[V 6)I = j 亟 京X(g(z) ,z) + *dFv* 史w) =I (a + 0(广°))[— ok\_"\_1cos(^(k) *+ g) — z~a^n(0(z')* + j3) ♦ (伊(x) + 浄]十。+ O(D)[- «—\_1sin((?(2)+ /?) + zTcos(8(z) + g)(伊(z) + ?)]|

=号瑚7(，"" +。⑴)X0.

上面最后一个等式是由(3.4)和(3.5)推出的.定理证毕. I

非游蕩环

定理3. 2设R'中光滑向量场X有一个非游荡环A,満足假 设(1)-(4),则在*A*的任意邻城里*X*有无穷多条双曲周期轨.

证明实际上，我们将证明一个更强的结论:在厶的任意邻 域里都可以定义场X的一个具有马蹄的后继映射•我们将分成几 步来证明定理.

**A**周期執的**Poincare**映射

令S是一个与周期轨气横截相交于Q点的平面.在s上Q点 邻域可以定义闭轨％的Poinca推映射R因为Q点是二维映射F的 双曲不动点，故在*Q*点的某个邻城*U(Q)*内，可以选取一个C1卡 (",u)使得

(DQ点是坐标原点(0,0),.

1. |“|，W| V2} Ut7(Q),
2. *qj=* (1,0) £ 為 C| S,例=(0,1) & 7)PI S,
3. Poincare映射F在U(Q)内是线性的

(3- 6) 这里OV^Vl V元.令

*D,, —* G *U* (Q), |iz —

■玖=((u,u) £ U(Q), |“| 1| Wd}.

取S充分小，则有

m n a = 0, n Di = 0.:

令

则由(3.6),有

H” = {(«,») 6 Do,

m-11 -»)員寸員穴\*(1 + 3)}.

令叫=尸払,则有

H： = {(“0 6 *Dlr*

x(i —。)w \* w 尸(1 + 3), m -11 *^s}.*

**B**鞍点附近的映射.

由假设(4),我们可以在鞍点％的一个邻域V中选取一个C 卡Gr,y,z),使得下列条件成立

1. {(z,>i,z)，|z|Wi,I^IWi,|z|Wi}uV.
2. 向量场X由下列线性系统给岀

*'x —*

*-y* =危了，*<,x,y,z~)* 6 V, (3. 7)

.£ =四，

这里兀v爲vov兴是。。的特征值.令

r+= {(x,>,z)： x = i,[j| <i,[«! ^i}, 「-= *{(x,y,z)t* |h|M1,|3i|W1,|k|=1}, *Uh — {(x,y,z~) £*： 0 WzW/i}. '

由假设(4)的(b),我们不妨设轨道％与「+相交于*p*点:

P = 4 n「+= {O,丿，Z)= (1,jo(O),jo 6 (— 1,1)}. 沿系统(3.7)的轨道所定义的从*nh*到「二的映射厶血8根据(L 30) 有形式

<y，/)=曲1g&,z)=(沱,事)， 这里0 V伊=一 4/产V一危/兴=*a.*

**C 4**到尸的映射

因为轨道儿连结点仑和点》=y】D「+，故当*a*取得充分小时， 系统*x*的每一条从s上的任一点岀发的正半轨将与「+交于*p*

附近一点・我们用*G*表示这一映射:

*G\*DI f* , (w,w) H\* *(.y,z)* — G(u,v> - (Gy(a,®) ,Gz(",v)). 由假设⑶流形)与W，(g沿人横截相交，故有

*dGz  
9u*

乂 0.

C0U)

因此，可选取3充分小，使得

3Gz

*dv*

*（.u,v）* 乂。，（“,初 € A-

(3.8)

**D**广到巩的映射•

因为轨道连结「-上的点g： Gt） = （0,0）与*S*上的如点， 故从r-± *q*附近的点岀发的正半轨必与s交于争附近一点.我们 用F表示这一映射：

*F'* G,Z）f（K,K）= *F（.y,X）*=（玲（》,工），&（＞,2））. 假设（4）的3）意味着

,晒（0,0），“

(3, 9)

(3-10)

*曲* 釘-乂。・

因此有

*d =*~~押，獸力~~*丰*。，国,|丁|《1. 必＞0和必V0分别对应非游荡环和游荡环.

**E** 环的**PoincaM**映射和它的双曲性

令

府=*G~'nh* 0 也，*K„ =* P-»K' U *Hn.* 在区域*K„*上定义环*A*的Poincart映射为 厶 Ik = F。厶血「GoL.

ft

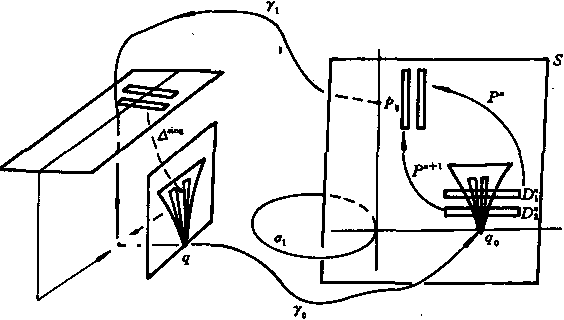
Q, = {3汐）6 以伊一”（1 + s）一 $）},

则有

Q Z) *Hi* U 払\_2・

令

叫=21-U+2 A *K„,D^ =* △tq“+2 n K”+1. 则映射厶在区域玖■ U理上是马歸映射,见图5-8.



图A8

引理3. 3存在正常数*叭心踞向0*使得当&充分大时，映 射A在畠U理上满足（出,S）锥形条件・

证明对令

fn. 若(“,!>) 6 Gw) = *G -* P"(r,u)，tn = <

In + 1,若&伏，

(歹，z')=厶蛔(了,2, Q,5)=厶(@,0).

因为(W,V)&Qn+2,故

石一 \*-2(i+$)w板 w 万f+i(i — 3). (3. id

由定义

矛.心，心=齢,+井\*  
专宀财

因此有

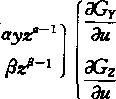
亨/VBV2O,对九《1.

这与（3.11） —起推出

（碧阡甲〈Y（导”\* （3,2）

现在我们计算雅可比阵DA.由链式法则有

DU DF（y ） • Dg（y,z） • DG • DP»



=DF （护，”）

y

o

*3Gy ~S)* 仔

*dGz* 0 *du*

*a b\IA* Bl  
*c d]\D M]*

其中

:卜dfw旧），  
QE-P 萼+ a,登〉,



*D= 8E\_1* 芸，

*M=陀"孩\_1*

OT?

由第四章引理4.1如果存在一个正常数乙，使得

max{||DF||, ||DFT|| *,\d~J |,\BM~'\}<L,* (3.13)

则对任意给定正常数网曲V巧【《I,都存在一个依赖于*L,* 尚,为的常数勇使得如果不等式

max(|A| • lAf-'JAf-'l • *\D\,\A~* 网T|,jMT|}v/ (3.14)

成立，则映射厶满足(闻，勤)锥形条件.

由(3.12),当” —8有 « -\*0,因此⑶，，/ )—(0,0),故  
|®/t| =\*-"晉广屮登\*中登}\* °,当一+冲

(3.15) .注意到 DF(y' \* )—DF(0,0)，由(3. 9)和(3.15),R要取

乙=2max{||DF(0,0)||,||DF(0,0)T||,|ak|),

则对充分大的n,(3.13)成立.现在证明(3.14).当 L0时，有 ⑷• =身妝方\*"驴一書+呵警)f 0,

成T| .四=貯-I聋)T聲)|f o.

因此，为了证明(3.14)只需证明

|Af\_11 -\* 0,当如-\*■+ oo.

而这等价于

石-”事”—。，当 n—+8. (3.16)

对于 聞1,(3.16)是显然的;对于,8>1,由(3.12) 广宀< 啰•泞s

=(墙d “ 一^^。，当…+8・

引理3. 3证毕.|

**F**马蹄的存在性

下面我们将利用第四章的马蹄存在定理来证明，映射厶在区 域昌U珏上有马蹄构造.引理3. 3保证了映射厶满足锥形条件. 因此,为了证明定理，我们只需验证下列条件：

⑴昌，功是(用必)矩形；

(2)相交条件:△身n功乂

C3)边界条件:M席n巧=0,朝1為玲=0.3=1，2.

首先，区域叫是曲边矩形，它的左右两边是垂直线段电=1士 *3*的一部分，而它的上卞两边分别是Q+2上下边在映射△下的原 象，因而是网水平曲线，故条件(1)成立.其次，相交条件不难由连 续性推出，参见图5-8.最后，我们来验证边界条件.因为象*国淄* 属于矩形Q+2上下边，而由Q+2的定义它的上下边不与*巧*相 *交，故* 勞mn勇=0.另一方面,注意到

(禹3) = *A(u,v)* f (1,0),对*(u,v)* G -D? U D?,n-►+ 8, 并且曲线*椚*属于垂直直线»=1±3,因此

*叫 n &巧=0,*对n»l.

定理3. 2证毕.|

游荡环

下面我们考虑具有游荡环的向量场，在一个单参数族扰动下 所发生的分岔.设光滑向量场*X*有一个游荡环A,满足假设(1)一

1. .令Xe是一个光滑单参数向量场族，满足*XT.*因为奇点％ 和闭轨为是双曲的，故向量场*Xt*在队,％及轨道*A*附近有双曲奇 点&(。，双曲闭*轨g*和轨道4(e)UW\*S>(e)),满足％(0)= % — <7, =/0.

定义3. 4称参数值％为向量场旗Xe的同宿分岔值(环分岔

值)，如果 WGUTWoCQ) (TT(Meo)).进一步，分岔值称为 正规的，如果当參数值e通过勺时，轨道^怎)以非零速度接近及 离开流形叩(角①))(胪5心)).

下面我们用分别表示正规同宿分岔價集和环分岔 值集.

定理3.5令Xe是R3中一个典型的单参数光滑向量场族，设 当£=0时，场X。有一个游荡环A,满足假设(1)一(4)，则存在*A*的 一个邻域*U*和参数空间中零值的邻域V,使得对于所有位于*V*中 零值某一侧的参数值(不妨设£<0),系统Xe限制在*U*中的非游 荡集c(xm)只包含两条轨道以(矽和扣矽.对于*V*中零值另一 側的参数值3>0),下述结论成立.

(1)双曲周期轨％(e)有一条横截同宿執,

⑵集合氏的闭包庇是一个包含g=o的Cantor集,且满足 BcC=B«,这里*B'h*代表集合*Bh*的导集»

(3)令Vw=(e>Olfl(Xtk)是奇点。°(s)加上一个有稠密轨 道的双曲不变集},

则存在一个常数使得

lim ^mGO< e< t|e $ Vh)) = 0,

这里m(・)表示R1上的集合(♦)的Lebesgue测度. 附注3.6结论⑴表明，当参数通过游荡环分岔值8=0)时,

X,发生*Q*爆炸,即非游荡集的规模突然大量増加.结论(2)表明, 在心>0附近有不可数个分岔值.结论(3)表明,当參数e通过。附近 的绝大部分值时,Xe在*A*附近不会发生分岔现象.

乙是典型族的含义 定理3.5中的向量场旗Xe除了满足第 216页的假设⑴一⑷外还要满足下面两条假设.

1. 向量场X。的奇点％和闭執气都是非共振的；
2. (£=0}eBc.

证明将分成几步进行

**A**周期轨的**Poincar£**映射

令S是一个与。I横截相交于某一点Q的平面，因为乾的特征 指数非共振，故在S上Q点的一•个邻域U(Q)内存在一个依赖于 参数£的有限光滑坐标卡使得

1. ffi(E)n s = ((”,v)=(o,o)}；
2. {(",〃)11"I，回 M2} UU(Q),闭轨<11 (e)的 Poincare映 射在U(Q)上有形式

(a,u) -> F<«,p) = (A(e)tt,/j(e)u),

这里 0VK(e)VlV 石 h)；

1. *% =(1,0)*e 為 n *s,fi0* =(0,1)*er, ns.*

令

*d„* = ((“,#)e u(Q)11“ 一 11M 団 w #}

和

*D, = {(“,◎)* 1丨 M 科

分别表示争与例的邻域.取$充分小，使得

*PDa* D 玖=0,FT" 0 玖=0.

**B**鞍点附近的映射

因为鞍点吹非共振，故在％的一个邻域卩中，可以取一个依 赖于参数e的有限光滑卡愆切岸),使得

并且向量场族Xe有形式

x = A,(e)x,

*-y* =杯加  
三=“(e)z,

其中为(e)V&Q)V0<>(e).令

「+= {(工商,刃工=1,切 WL寥Ml),

不妨假设轨道7。在V中与正z轴重合，即

g = 4 0 广={(W)= (o,o)}.

而轨道为与「+相交于0点

n「+= {(丁,言)=3,0),烫| < 1).

由§ 1中的结果，沿*xc*的轨道所定义的对应映射萨 「一有形式

6,吋1 =屛照愆/)=(对,法),

其中

E—潟〈-潟\*

c沿執at定义的小到尸的映射

因为轨道匕连结点决和P，故对充分小S利|e|,沿轨道我们 可以定义一个从例邻域玖到*p*的邻域的一个映射，记作

G： (a,w) -> <y,g) = *G(.u,v) —* (Gy(\*,u,e),Gz3,se)). 由假设⑶，不稳定流形"°(s)与稳定流形盼0)沿4横截相交, 故有

@ =孕 尹 0. (3.17)

D 沿軌道定义的广到S的对应映射

因为轨道7,连结点*q*和％，故对|€|<1,沿轨道可以定义一个 从r-± *q*邻域到S上価的邻域的一个映射，记作

F： 3 ,xf) f 3她)=F(y H ,£)

*=(Fu3*，工'»e) *>Fv(y'* M (e)).

假设(4)意味着

*aFv\* 忿'3・0»0》

^0.

游荡环对应情况doVO.

E僵设（6）的瑞切含憲

假设（6）的确切含意是

*实* 尹 0. （3.18）

™ （0,。,0）

通过引透参数变换Fv（O,O,ele,可以假设

F（O,O,e） — （«（€）,£）—^=?£.

F £<。时结论的证明

对Y0,我们有

Fr（y *,x'* ,e） = e + 静+ *碧h,*

=e + 警k + 碧孫=e +'按或（1 + °⑴）< 0.

因此，系统Xe在4附近的轨道的结枸非常简单:除了奇点％（€）, 闭轨皿3）以及连结它们的轨道/,（£）以外，当L十8或一8时, 所有的轨道都将离开A的邻域.

G结论⑴的证明

现在证明，当e>0时,闭轨乾3）有横截同宿轨.这一结论从图 5-9容易看出.事实上，由假设（3）,流形卬-（%）与沿为横截 相交，而匕是沿着主稳定方向趋于晚因此，流形W飞如）属于流形 "\*（6）的边界，并且有边流形与流形IV（系统X。 的在相处与山，产的特征方向相切的不变流形）在，。上的任意一点 处相切，故由假设（4）的（a）,它与流形IVYs）沿儿横截相交.另一 方面，上述所有的流形光滑依赖于参数e,故当e>0时，流形 町（Me））与俨（％ （Q）将沿着在附近的一条曲线横截相 交.

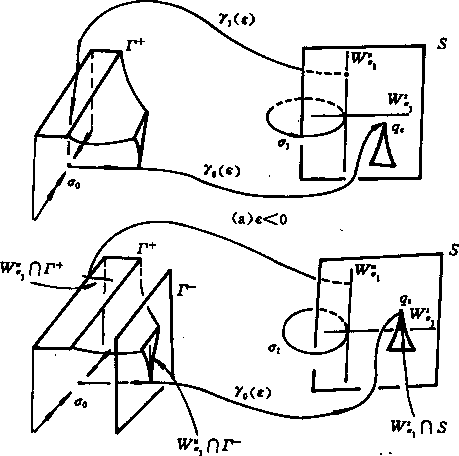


图5-9

H正规同宿分岔值序列及正规环分岔值序列的存在性

为了证明结论(2),我们需要下面的

引理3. 7存在正规同宿分岔值序列玲和正规环分岔值序列 盾,它们具有浙近表达式(1 +。(1)斤(0)f.

证明

L正规同宿分岔值序列的存在性 由假设(3),奇点席(e)的 稳定流形叩(风(。)与S的交包含〜条曲线弗它与闭轨。心)的 不稳定流形｛“=0)横截相交,并且当e=0时通过点贝=(0,1).因

此，曲线0可表示为

Cj： v = Vi(iM),(u,e) £ (Rz,O), (3.19)

这里Vi>-个C'函数，满足Vi(O,0) = l.曲线C：在映射卩一"的作 用下的象U,”为

u =沁)(3.20) 因此，如果

& = F(0,0,e) = (a(6),e) £ %,»，  
则鞍点有同宿轨.g\*CL■，当且杈当参数£满足方程  
閃(e)丄£一")= o,vj,(e) = Z(QfK(m)W),e).

(3.21)

对任意给定小常数3>0,有

甜(0)=- 昨(0) vo, H?(5)>0,n»l, 故方程(3. 21)在区间(0,/)中有根,下证它是单根.

会如沪1-A\*)

=1-3)ViQ(e)%(Q,矽+Z定)f"'

(翠以5十隹)蛇)+勢(g，隹)+登日. =1+。(1), , (3.22)

故V n»l,(3. 21)在区间(0,9)上有唯一单根，记作e.因为

碍=吗(玲)=*以教-飞1 +*。⑴)< A"

对某个常数A<1成立,我们有 '

$=(而))+ “(例)一如(1 +。⑴) ，…、

Zo ) d(0L(l +。(1)).

在证明正规环分岔值序列的存在性之前，让我们先给出下面 的重要附注.

附注3.8令"(Q表示过Q的那条轨道.事实上，我们在上 面已证明了下述结果:设We(尹中，(方(矽)是一个光滑依赖于参数 e的二维U不变流形，如果W。与『(乾)横截相交,则存在一序列 方f 0,当*代f* 时,：M%)u叽■，并且当e通过&时，点％以非零 速度接近及离开曲线*wens.*

*2.*正规环分岔值序列的存在性由假设(3)稳定流形『3) 与不变流形叽h=o｝沿轨道横截相交.因此，叩(b】s)mr- 可由下面方程表示

#=W，6), (V ,e) £ (R2,0), (3.24)

这里方(0,0) = 0. - >0.因此曲线(茂网广(叩0(e))n

™ (0,0〉

r-),即护0(e))nr\*上的点的坐标・，z)满足方程

*= h(ynf,,E').* (3. 25)

令*法=s,*则(3. 25)变为

*s = Kys9 ,e~).* (3.26)

令(国。)是点/.nr+的坐标，我们对方程(3.26)^点(),財)= (辨,0,0)应用隐函数定理可解得$ =*队S*,s),或

*z =* (3- 27)

我们断言，函数S有下面的性质

口 = 0(1),孺=。5十),票=O(»). (3.28) 由(3. 25)有

"宀制

或

*法=*臺 e/ (1 —*备滤-B)* = 0(e).

这意味着

g = O(J).

(3. 29)

为了得到(3. 28)中后两个估计，我们对(3-25)分别关于乡和£求 导数，得

"T寿=券3+紗宀叙， go)

*"7隼*+耕1出=霸(宀皇+耕皿+瓮

(3.31)

由(3.30),

由(3. 31),

畝 条I 一黑血*+ 囁*挥T+ll心

=辱-。)=。(»).

令価表示曲线G-i。砂(的\*)),设点(“仲沱以, 则“，”满足方程

Gz(M,\*£)— A(Gy(W,V,€),€). (3. 32)

由(3.17),对(3. 32)在点(",sQ = (0,l,0)用隐函数定理，可得

*v —* V2(«f€)"(0,0) = 1 ,w € (R.O)» eN 0・

对(3. 32)求微:分，可得

= 0(1),

払丿。⑴， /3>1;

\* = b皆),Nl

令= P一”S，则曲线Ge上的点伝成)满足

*V* =沁)一”匕(足)％,©).

(3.33)

(3. 34)

因为曲线5,”属于闭轨"矽的稳定流形胪("Q)，故若点

条=(小),e沱匀m则在*A*附近存在包含奇点”(©)及闭轨ffi (e)的环，而g定6,”,当且仅当参数£满足方程

—e-V\*（e） = 0,

<

(3.35)

令#V1是一个小正数，満足

丽\_/>],业豆呉<1.  
云(0) - *s*

令*如=*

分大时有

万(0)+9

(D,

*队=*

1 '

元(0) —云

(1 十 5),

则当”充

（3. 36） 因此,在区间上方程（3、35）存在一个根，记作硫.下面我们 证明耳是单根，即

研（黑）>0>H；（o„）.

(3. 37)

由（3.35）

響L

[疝(e)fT -沁)-"鲁^^u(e)

+碓尸噂）］一殓）-

=1 +。(1)-沁)-噂

*d£*

h=J(e/«(€)—£C

*n*

由（3. 33）可知,如果RW1,则有

沁）

iE矽”厂。⑴EL7

*o€*

如果成>1,则有

■ 'p .

風沪嘰。⑴回L吊J：

■

<0(1)

= 0(1)

(1 - 9)春顷0) + 砂1一\*>"

= 0(1)

（^（o）+ hW

0.

L 次0）-呑」

因此（3. 37）成立.为了得到&的渐近表达式，我们计算差W

一诳・首先由（3. 29），曲线G与6之间的距离是0（1）6?,即

I匕一％ I =0（1）弗. I

因为*玲\_孩*分别是（3. 21）和（3. 35）的根，故

碍一球=吟（平）一肝（战）

=紹（球）-v=g）+吗（球）-吟（尊

=（巴）'（加碧一畠）+，（弋厂"

[vqegg）,。jyq（4）“0）4）]

(3.38)

因此

。（1）（理一隽）+。（1 冲

I玲一隽i = o⑴石（隽）一”（隽頂

=O⑴从0）一"十方”，

这里*BU* 故由（3.23）有砍=（1 +。⑴）次0广”.引理证

(3.39)

I结论(2)的证明

由引理3. 7,集合*Bh*和Be非空,对任意％ £ *Bc\{0}*由假设 (3)和结论(1),流形 护(％。))和W,(乾(％))与流形 昧(们(彘)) 横截相交.因此内是集合B"和氏的聚点(参见附注3. 8).故集合 *Bc*的闭包*Sc*是完全集并且是*Bh*的导集*B'h*的一个子集.下面证 *明&是*Cantor集.为此只需证明它不含任何开区间.令*众Bh,* 则系统X%的奇点心(公)有一条同宿軌.因此，对3的某一侧位附近 的所有参数值e,轨道4(e)当+8离开A的邻域，这意味着& 氏Bh.因此Ek的闭包瓦,不能包含任何开区间.另一方面EcU *B'hUEh,*故Zc不包含任意开区间,因而是Cantor集.

*J*结论⑶的证明

由(3.17),

*dGz*

我们设«<0,对于情况a>0,讨论是类似的.因为a<0,曲线Ct位 于以的上方.显然，只有那些通过U与6之间的点的轨道才能回 到区域6.令K。表示U与C1之间的区域，

*K„ =* ((a,v) |Va(w,£)It < 7i(w,e), 0 W “ W舌). 令

Z5= {(",v)|0WkW 1 十 +句，

*K„=* n *D,*

*Ln=* {(afv) |0 AC®)-1-" V1(A(e)b+1w,e),

0W Y1 +3}.

令硝，球是引理3. 7所确定的参数值序列,则球+1*〈耳〈喋* 令  
*K =碧+1* + 产(0)Tl+”n,*禺*=gle\*,

则由玲总 的渐近表达式可得力 令S表示区间(旗,《)•对

于我们定义由*b=K„{jL„*到Z＞的映射如下‘

*PCu.v'）* = （A（£）W,/t（€）T＞）,

*€ Lni*

*(UrV)* 6 *K„.*

尸。梦《七。尸（3）,

*^■n* = 4’乙n—1 n K»,

则4在*以UJ*上看上去像一个马蹄映射.参见图5-10.

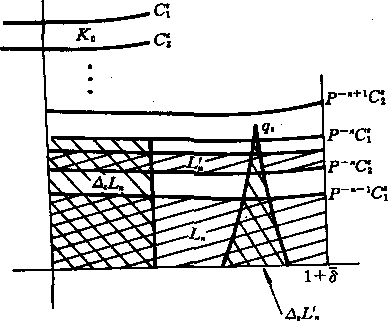


图 5-10

引理3.9存在正常数旭,使得当n充分大，并 且GES—i时，映射&在区域以U厶,上满足（任，任）锥形条件・

证明因为&1七是线性映射F,故对任意常数用，阡，只要 W^＜1,它就满足*g心*锥形条件.对于3,3 e巩，有

冬（u,u） = *F*。.中。*G*。尸（“，0）.

在利用第四章引理4.1来验证4满足锥形条件时，所有运算 与引理3. 3的证明中完全一样，从那里可以看出我们只需验证

万(QfgiTf 0,对 e £ *U„\_lt* ；!—+8, (3.40) 这里z是点G。尸(“,3的m坐标.对于*心*,(3. 40)的成立是显 然的.下面假设j8>l-因为，故点器=35) ,e)*与点(3)* =&M)WL„—1的距离大于員醯―1一4).这样，存在正常数C, 使得点(0,0)£「-和点F-W,m)的距离大于2以苏\_1一玲).

因此.

/ ><7(慕\_1 一理)，

或

沁)-事-y 沁)-由-i(思t \_球)»~1

=cH沁l \*o)〈T〉Q+志叮t

这里广隹)=次0)(1-新1+志)/&(£).注意到

r(0)=万(0)-力 < 1,

故(3. 40)成立.引理证毕.|

由引理3. 9,当射d在集合殄(\_14上存在马蹄・ 国而集合珥(0 =,&出(珥U丄)是一个马蹄,氏在仏(e)上有 稠密轨道.由区间S\_i的定义可知，当\*S\_i，奇点的不稳定流 形7。(启)当+8时离开A的邻域，因而是游荡的.另一方面，不 难看出A附近除了奇点以外的所有非游器轨必定与*S*相交 于码(e)中菓一点.因此，集合"(Xe lu)是％(e)加上一个具有稠 密轨道的双曲不变集.这意味着*U„\_!* U V", ”》1.令

国=U *u”,*

«3>1

则

C7? U *VH.* (3. 41)

最后我们来证明极限

lirn^y- m（ {0 < £ < r |e $ U?}） = 0. （3. 42）

"+范

令 A =（彳+1，彳）» 碍 h» 磴=（6球）*，*则

m ㈤）*=3n-* £+i =万（0）-"抖，

由（3.39）,

m㈤）=O⑴元（O）T1+抄，

故

£ m（殆 U 风）=。（1帀（0）-«+”七

*n—k*

另一方面

8

ZmUQ =《=（1+。（1））元（0）-\*,

*n=i*

因而

8

»（足u用）

lim 弓 =0. （3, 43）

i8（、mGQ）】+藐

*n=k*

由《3. 43）不难导出（3.42）.定理证毕.|

推论3.10设向量场族Xe满足定理3. 5的条件，并且奇点队 的鞍点量为负，则使系统*Xe*具有稳定周期轨的参数值集是一个 边界包含原点的开集.

证明 对每一个由定理L1可知，存在4的一个单侧 邻域U（£o），使得对eet7（€）\{€0},x（有一个稳定周期轨,另一方 面,由引理*3.7,Bh*中的点是可以逼近e=o,故推论成立.I

在一般高维情况下，本章的京理L 1、定理2.1和定理2. 2的结 论也成立，读者可参见［Sil2,3］和DLJ.

第六章实二次单峰映射族的吸引子

从60年代兴起的动力系统的现代研究,其中心课题之一是双 曲理论.一个系统（流，微分同胚,映射）是双曲的,如果它的极限 彙是双曲的，即极限集中所有轨道的Liapunov指数一致非0（在讨 论流的双曲性时，不考虑沿流方向的Liapunov指数，它为0）,从那 时起，以Peixoto,Smale和我国的宴山涛教授等人为代表对双曲系 统做了大量深人的研究，人们对它已逐斯有了比较完整的理解. 另外,当时人们曾相信动力系统基本上是由双曲系统构成的.这一 看法的根本转变是由于在70年代受到物理、天文学等领域的一些 重要动力系统模型的影响.Feigenbaum, Ruelle, H&on和 L（gnz（他们的工作在70年代开始才受到数学家的重视）等人对 这些模型的大量计算工作表明，这些模型具有极其复杂的动力学 行为,它们似乎不具有双曲结构，相反它们应当属于非双曲翦畴.

对非双曲系统的研究，理抡方面的第F次实质勇破是 JakobsonE在80年代初取得的，他证明了对实二次映射族的一个 正Lebesgue测度的参数集合，相应系统具有关于Lebesgue测度绝 对连续的不变概率测度.这表明,在测度意义下,具有复杂的动力 学行为的非双曲系统并不太少.Benedicks和Carleson^1-1^完善了 Jakobson的结果和方法，并在此基础上,讨论了 H&ion映射在具有 非退化同宿相切的参数值附近的动力学性质.继而Mora和 VianaWl将此结果推广到对某参数值具有非退化同宿相切的曲 而微分同胚族.与已取得的结果相呼应,PalisE］猜测具有同宿相 切（在高维情况，同宿分支）的系统应该在全体非双曲系统中稠 密.Yoecoz^认为当前讨论此类问题的有效方法应该是，首先要 对某个系统有很好的了解（例如,Logistic映射族在a = 2时,Hfeon

映射在« = 2,6 = 0时）,然后考虑对此（全局）分支值的开折.我 国学者在此领域也有一些值得提到的工作，例如[Cyl,2],[Wl], [Z],[EZ].在本章中，我们只介绍[BC1]关于二次映射族的结果 和证明方法.应当指出，这里介绍的证明思想在当前这一方向的研 究中是十分重要的.

**§1**关于单峰映射稳定周期点的存在性

本节我们要讨论单峰映射Z.Z-I,其中7 = [— 1,1 ],的稳定 周期点的存在性问题.

定义Li称一个映射rjf,是单峰的，如果它满足下列三 个条件'

（UDf是连续的；

（6）/（0） = 1（

<u3）/在[0,口严格下降，而在[一 1,0]严格上升.

称f是C1单峰映射,如果*f*满足上面三个条件外,并有 （u4）/是C1的，且尸（z）尹0,当C尹0时.

令f是C1单峰的，并令F是f的周期为会的轨道.我们称F是 稳定周期轨，如果z £ P,|DP （x） | 称F是超稳定的，如果0

*€ P.*由稳定性定义，如果F是f的一条稳定周期轨,那么对x € ■P，有一个邻域U,使得对一切*yeu,*有lim *f醇*除了可 «~\* + 8

能的=1外）.

现在我们要讨论的问题:一个单峰映射可以有多少条稳定的 周期轨道？ 1918年Julia证明了某类单峰映射至多有一条稳定的 周期轨道.1978年Singe网做了实质性推进，下面我们介绍他的一 些工作.

设f是映射J的Schwartz导数Sf（x）定义为 5窗-龄「・

定义1.2 称f是S单峰映射,如果

(&)/是仃单峰映射！

(&)f是U映射；

(S3) 5/(x) < 0,x G 7,并允许 S/Xz) =—o0(

(s)f映j(y)= 3⑴，口到自身？

<s5)尸(0) VO.

定理1.3如果f满足(&),(&)和(&),那么每条稳定周期 轨至少吸引工=一1,0和1中的一点.

证明由简单计算和归纳法，下面前两个性质是容易得到 的，此处不再賛述.

1. 如果/,g € C3,那么• g)S) = (Sn(g3))g，Gr)z + *Sg(.x).*
2. 如M/e C5 且S/(x) <O,VxG L那么 s(产)(z) < 0, m
3. *\f*丨在(一 1,1)中没有正的局部最小.

如若不然，设1尸|在，£ (-1,1)中有正极小.不妨设尸⑶) > 0,那么舟C)= 0.注意到f是C3的，以及Sf(3-)<0,r(3->必 与户(少反号,这与尸3)为极小值相矛盾,特别,上述事实也说 明，如果|尸。)| = 1,那么至少在y的一边，|尸| < 1.如果 贝尹士 D是f的不动点并且I户。)I = 1,那么这个不动点至少 在一边是稳定的.

1. 如果f有有限多个临界点3称为*f*的临界点,如果产愆) =0),那么对每个整数*n^l,f*的周期为n的点是有限个.更明确 地讲,对每个"> 1,/■的周期为«的点是可分隔的.

如若不然，令g =产并设有无穷多x G /,满足g(x)=工.由 中值公式，便有无穷多x €，，使营愆)=1.由性质2和*3,\g'* |没 有正的局部最小.因此有无穷多*x,g'* (x) = 0.这与f (因此与*g)* 有有限多个临界点相矛盾.

1. 如果*a<k<c*是& =产的相邻不动点，并且在区间[a,c]

中不含g的临界点，那么寸。)>1.

事实上，由中值公式，存在*u,v,a<u<:b<v<c,*使得g，GO =g'(v) = 1.因为 g 在［a,c］没有临界点,g，Gr) > 0,x G ［a,cl 于是由性质3,g'(i)>l.

6.如果xe是g的稳定不动点且|g's)i vi,那么 定理结论成立.

因为H是g的稳定不动点，所以它的吸引域中包含勿的连通分 支具有形式［-侦)或者O,口(［— 1,口是平凡情况).首 先我们考虑5,s)情况.*g*将此连通分支映到自身,但小不在工的 稳定流形内，于是3不会映入工的连通分支内.因此，只有以下三 种情况之一出现.

1. g(r) = g(s)(= *r* 或 s);
2. g(r)=r 并且 g(s) = s；
3. g(r) =s 并且 g(s) =r.

如果情况(D出现,那么由Ro%定理,g在中有一个临界 点声，它被吸引到h.但是g =产,那么存在使得f将/■映到 f的临界点.从而定理得证.

对情况(ii)(或(由)),类似于⑴，我们不妨设在(r,s)中无临界 点.那么由性质5,这两种情况都可排除(在情况(iii)时，考虑g2).

现在我们考虑连通分支为［-1,5)的情形.此时一 1被吸引到 石类似的结论对□也成立.于是，对|/U)|<l,xe(-l,l) 时，定理得证.如果x=±l,定理的结论显然.

.7.如果gS) = *x,* I = 1,那么定理的结论成立.

不失一般性,我伯设g，(x) = 1.如果工=士 1,•那么无需证明. 如果女£ (-1,1), Ek性质4,有一个z的邻域(r,s)不包含g的其 它不动点.于是 g(y) > *y,y £ (r,x)*或 g(3F)< *y,y* G (x,s).否 则，在H两边有点丿,使得营。)>1,因此营有一个正的极小点.为 了确定，假设gQ) *>y^y* G (r,x).令4是*y<x*中包含5,女)的 使得£(少> 3-的最大连通分支的最小值.那么g(d) = /(或者*d* =—1并由此c吸引一1）.显然扌以）21,由此有一个点se （d, 工），使得营（矶=1.如果有;y e （d,矿，使得b。）= 0,则利用性 质6,否则由情况（iii）,我们完成了性质7的证明，并因此证明了定 理.I

定理L 3有以下几个推论.

推论L4如果/■是S单峰映射,那么它至多有一个稳定的周 期点，加上在区间［一 1 ,/（!）］中的一个可能的稳定不动点.

证明 因为/（0）=1,点和1被吸引到同一条稳定周 期轨.由于JCf）是关于■/■不变的，如果一条周期執道有一个点属 于 3,那么这条轨道便落入/</）.如果这条同期轨是一个稳定 不动点H并且0,由情形3, *\f'\M* W 1或者|尸|母,汀< *1.* 如果是第一种情况，工吸引Lo.xj并因此吸引0点,如果是第二种 情况,r吸引|>,口并因此吸引1和0=广】（1）.对mvo可类似地 论证.

如果有一个周期*P* > 2的稳定周期轨，那么用完全类似的讨 论可以说明，户的最右边的不动点或者吸引尹的临界点，由此吸 引0点或者它吸引L于是，我们证明了 f在JCf）中至多有一条稳 定周期凱另外，从上面的证明我们也可以看到，在JO）中没有稳 定周期轨，它仅仅吸引一1.

现在我们考虑*f*的稳定周期轨，它不吸引0或1-由定理1. 3, 它一定吸引一 1,并由此至多有一条这样的稳定周期轨・

下面我们证明，这样的稳定周期轨是JCA）丄=（一 1,/■⑴）中 的一个稳定不动点.如同我们已经看到的，如果这条轨道有一个点 在JCf）中，那么整条轨道在JV）中并吸引。和L因此，这样的轨 道必在JCfj丄中.由性质3J在JU）丄中至多有两个不动点，因为 ■/在［一 1,0］中至多有两个不动点.如果在中没有不动 点，那么*f（.yy>y,y&J（.f^.*因此J在J（/）丄中没有不动点也 没有周期点?如果/在JUV中只有一个不动点，当/U）>1时, 我们有r=—1,因为/W Vy,当了<z.由此J在JCO丄中没 有其它的稳定周期轨.当0 Vr‘(z) W 1时，由定理1.3/吸引 一1,因此丄中没有其它的稳定周期轨.最后，假设\_/■在J(£>丄 中有两个不动点，那么有一个不动点工使得0</^)<1.由定理 1-3,/吸引一1点且在丿侦)丄中,/■无其它稳定周期点.I

摧论L 5设f是S单峰映射.如果fD > 1,则在J CO丄 中没有稳定周期点.

证明 如果那么由 3,/(x)>^,x€ (-1,0). 因此，在丿(f)丄中没有稳定周期轨.I

推论L 5可以看成是推论1. 4的部分证明过程，用它可以断 定*JUA*中不含稳定周期点.

推论L6存在没有稳定周期轨的S单峰映射.

证明 一个经典的例子J3) = 1 - 2x2.它是Ulam和V. Neumann在1947年给出的.容易验证，质是S单峰映射.经0点的 轨道为0,1, — 1,-由定理1. 3它至多有一条稳定周期轨,并且吸 引三点一 1,0,1之一.但是/(一 1) =一 1是不动点并且吸引这三 个点.因此，它们不能被其它周期轨道吸引.但是，由于 4>1它不是稳定不动点，所以須没有稳定周期轨.|

附注1.7在本节我们讨论了 S单峰映射的稳定周期轨的存 在性问题.把定理1. 3和它的推论应用到映射族FGr,a) = /0(x) = 上时我们看到，如果a靠近2,那么判定*fa*是否有稳定

周期轨的问题转化为讨论临界点轨道的性质(在§ 3定理3,1的 证明中，要用到这一性质).我们将看到，映射族*侦如a* e [处, 2],向靠近2,在参数区间中有一个开稠的参数集，相应的映射有 稳定周期執.这意味着其动力学行为是简单的,不仅如此,更有意 义的是，在该参数区间中也存在一个正Lebesgue测度的参数集, 相应的映射没有稳定周期轨，并且其动力学行为是复杂的.由此结 果，我们讨论清楚了分支值a = 2附近的部分情况.

**§2 F（x,o） = 1 - ax2**的基本桂质

我们将讨论A（a）=硏（0』）返回到一个固定的小区间尸= （一 *S,s）*的方式，其中*a* = exp（— C）.特别要讨论它们是怎样 靠近原点的，以及靠近原点的速度.而F3,4）的迭代的一些基本 性质对于理解这些问题起着重要作用.应当指出，尽管我们只对这 一特殊映射展开讨论，但是这种以Jakobson开始,Benedicks和 Carleson发展的理论是解决一系列此类问题的关键所在.

首先我们将广分成一列不相交的小区间的并= U *I"*

1^|>° 其中七==exp（— 0,而当戸 V 0 时,

—（—- C-J.-1L并记为 *Ip =—*

引理2.1对充分小*8>0,*存在国<2,使得对ae ［何,2丄 如果％ € ［- 1.1］和&满足

函（勿,a）| 2\* 丿=0,1,2,“麟一 1,

并且

I砂皿<-?,

那么

2（1.9）匕 （2.1）

证明 令*\* = 眄=*sin*淡*在此变换下,F（h,4）可以表示 为

— —arcsin（l — a sin2 扌。）.

Tt Z

*9*

cos *—n*

诜（饥<0 =— -/2a sgn（5） ~~,三 一 .~~

Jcos或+国京"―刍 令 ％ = Fu（%,a）,Qu = au（Q"）,其中。。=广（%）.假设 I初 >

1一2乩，= S1,…,j-l,但是区| W1 — 2战 记砰=會萨一如t • F，・那么我们有

fr-i j >-1

*aF* = p'(n)］Ja『(句,a)反代'(为)!!(- *2am.* (2. 2)

*v—j* w=0

假设％充分靠近2,用归纳法容易证明|狷W1 —揷,，= £••，， 疋因此cos*湛*M 0.于是1*8趴3* I >1.9.另外,我们有*平'*(向) = 二说，血 IWS 以及 £广(为)=I -r■- - ■当 a£

J1 一务 S,2］时，立得

宜(E)IKL9 光 1

引02.2存在常数，>0和*k(S)>0,*当角充分靠近2时， 对所有a£ ［%,2］和所有|x|法％\_1，存在使得 下面的不等式成立.

1. |歹Cr,a) | 贏 =、・.. J 一，
2. log|aTF(x,a)|>rZ.

证明记％ =烈").注意到如果而且 f =-1 + e,那么 f < F(&a) <- 1 + 4& 设 瓦［> ca\_v 如果

I 如 ■，那么 |。顼(％,(0| = |2a70| 如果 2-'+'N 知 22-',

ZN2,那么

IM(%,a)| > |2晩•前丨…|2a%\_J

N %2-‘ ♦ 2a(l - 2 • 2」"+2) ••• 2<z(l - 4’“ . 2 • 2\_w+z)

=(2a)'2-'(l — 2 • 2~w+2)(l -4\*2- 2~2,+2) ••• (1 - 2~!) .=泌(1 \_号)(1 \_$) ... (/烏).

因为％充分靠近2,取，=\*ln2,那么蜘庖即如从上 面的证明过程可知，对：=1,…,Z - 1,函(知a)丨2 1 — $ > 5- 最后，取\*3) = (log2)T"log -1,得I 下面的引理2. 3要证明，当<5非常小并且吗充分大时,在参数 区间(缶,2)中存在一个小区间d,使得映射Sm/Af厂是一一对 成的,并且保持指数扩张"

引理2.3对任意充分小*S>0,*任意正整数N和任意向V 2, 存在*m法N*和一个参数小区间A> U(00,2),使得

1. 对任意 d，&(a)W— - 1;
2. 是&到广的一一映射且是映上的；
3. |&FJ(l,a)| > (1.9)'一1万=1,2,…，叫-1. 证明因为

(1 + 勾+1) — (1 + &)=勾+1 — &

=2 — Q + <2(1 + &) (1 如)*t*

当—身时,我们有1 + M+1 > |(1 +专).

即1+6是指数增长的.另外，如果那么从 不等式

警=\_号\_2妙爲〈-争

可归纳地证明af釦心)是单调下降的.由这些事实，结论(1)稲 (2)得证.这是因为对上述的*B*和N,我们选出包含2的小参数区 间21(0C= [00,21由于1 + &是按指数增长，只要充分小，总有 *m、*> N，使得 4(a) M —扌,2 W v W 屿 一 1 ,q € 但是氧(赁) > <5,其中爲是的左端点.注意到&,(a) ,a €占。是单调下降 的，所以存在A二得当时,&,A,f广是一一映射.最 后我们证明指数扩张性.因为'

J

|为应(1,<2)| = U(- 2a&),

y=l

其中& = 1并且一1 M & M ~^\*v = 2,…W吗—1.从而 结论（3）得证.]

下面的引理2.4说明互卧和&F"是可以比较的.更确切地 讲，M 和為F，的增长速度是相同的,我们已轻知道，

为卧+1 =-- 2『为殆，*axFa* = 1

和

平+1 =-- 2『"-（尸尸，*3aFa* = 0.

因此

V—1

M = U（-25）, v = 1,2，… （2. 3）

:=0

并归纳地得到

3瑚，=为时多专（1 + 涂）/ = 2,3,… （2.4） 显然有

*daF* 一 xa.

引理2.4 存在充分小的^>0和㈤V2,%靠近2,如果 ⑴ 1 一 2N\*

1. % W a V 2;
2. |为玲-'(%,a) | 2exp\_f'3,j = 8,9,,“", 那么

1 |%Fl(%,a)|

<16.

16、|3顼1(知<2)|

证站 由连续性，如果d充分小，角靠近2,那么对任意％和 a满足条件（1）和（2）,容易证明

五弁11 ）>丄

2。吕「 |2aVSa）"" 8



II I声际a)|

<2. 6)

另外，也不难得到

业-\*品

(2.7)

+

<2.

1

下面我们证明，当||^-|<16时，

客6

(2.9)

1 V 5")1

16、

< 16.

(2.8)

8

我们仅证第一个不等号，并只就*声*> °，茶〉0情况给以证明, 其它情况可类似证明.

屏2 0,裟 > 0.如果*3aFi* > 0,那么法序2 0.所以1十 *pi o*

旎戸21—云瀚5・如果％戸<0,那么勺声<0.而0/'12

expWJ 于是因为 因

此

1 + \_^\_>!\_\_8\_  
十海尸身1 exp"，

最后，我们来归纳地证明引理结论.*3* = 7时无需证明，设

j时，有

因为

"许队 I 尸 I

頭吋的\_有丛I「+2辺同

fi + 一*沙履\_\_* ] |许| h +屏E

I十2崩小(E)丿|丛|丨十料旳")

因此由(2. 5) — (2. 9)可证

1 ’ "+W，a)丨 /“ .

行W "珂和7 $ 1

附注2. 5 我们简要地说明一下引理2.1 —引理2. 4的意 义.在§3主要结果的证明中我们可以看到，執道媚(。)条1将会 反复地进入临界点的小邻域广中.粗略地说，引理2.1和引理2. 2 根据兀的迭代的这种特性，分别讨论了当参数靠近2时，兀进入 *r*前和走出厂后,在广外的扩张性质.引理z.3将作为我们归纳 地得到正Lebesgue参数集丄的基础.我们将F3,a)看成二元函 数，引理2.4说明*F(.x,a)*的迭代对工和a是等度增长的.这一结果 的好处在于对参数或对变量的估算可以相互转化.在§ 3定理3.1 的证明中，我们将看到这些性质所起的重要作用.这些看似简单的 引理的意义还不仅仅如此•对于一般的映射族FGc,a)，我们可以 提出与上面基本性质类似的假设.如果FCz,a)满足这些假设，那 么F(h,<0也具有类似于1 -損的重要结果，细节将在本章的小 结中阐述.

§3 F(x,a)不存在稳定周期轨问塩

在本节里，我们要证明下面的定理：

定理3.1 存在具有正Lebesgue测度的集合 厶C (0,2),使 得对所有a £丄，映射F( , 屹1 一妃岸色J没有稳定的 題熱凱.

显然,F3,a),a £ (0,2),是S单峰映射.特别，由Singer理 论，当a 6 3,2)血靠近2时,F(z,a)在*J(F)丄*中无稳定不动点 而在中至多有一条稳定周期轨;并且假如x = 0没有 被吸引到一条周期轨，那么F<x,a)没有稳定周期轨•于是，定理 3.1可以从下面的定理3. 2得到.

定理3.2 存在ZUU(0,2),丄具有正Lebesgue測度，以及 一个正整数蜘，使得对所有Q £丄，

|为硏(1,。)| 2exp(\*3), v>yo,

证明这个定理的证明比较长.因此，我们将它分成下面三 个部分.

A我们根据>(0,«)不断返回到/•的特点，讨论返回的形式. 与此同时用自由返回概念，归纳地将参数区间4分类.

由引理2. 3,存在一个最小整数观J〉*N)*，使得

/1! *a*

是4,到厂上的1 一 1映射.称旳是映射的首次自由返回的指标， 相应的参数首次分类为

厶1 = (o+l) U /'「'(Ach).

在下一步的讨论中，参数集合耳=4,/4不再考虑，从4中排除 呂是基于如下事实'因为F"，(o,A)=尸，因此存在参数角G 4,, 使得0点是FU.oo)的周期为屿的超稳定周期点.为了保证定理 结论成立，将向连同發的一个邻域&排除掉.请注意，实际上在参 数区间A中，我们全部排除了使兀可能有小于等于观I的稳定周 期轨的参数.

设B是第艮次分类的任意一个构成区间#21.下面我们定义 第龙+1次自由返回以及相应的分类.

设=7”《•=［如切，|“| > 0.我们要讨论3在*F* 下的进一步划分,定义非负整数*P* =少(3),它是使 聞S 一 *Fg©* | C鸟辭

成立的最大值.更确切地讲，对所有a £ ®和所有? G (0,c”>),

有伝)一\*3，a)| M 饗，顶=1,2,・“，夕. (3.1)

但是存在a£s和〃£ (O,c“t),

屁+危)—"+】(")|> ~~J 篇界，.~~ <3. 2)

应当注意,对某些*P,^i+j*怎)可能返回到厂，我们将它 们记为皿｝如,并被称为有界返回.

令，'是最小整数*i>p+l,*使得尸"\*+'(0,3)PI广=丄\*0. 下面要做的工作是，在任基础上，迸一步从d中排除一些参数集 合，使得在任的剩余集中,不含使*fa*有小于等于^i+1的稳定周期 轨的参数.不仅如此，相应于剩余集中的参数映射*fa*至少在峋 时是指数扩张的.

令*Si*是小区间*ly*的指标集，满足(i)石U聂和(ii) |y| M。+ *k.*但是我们在s中排除掉满足条件&,+：伝)£小，卩| *>a + k +* 1的所有参数(记作瓦,y).

1. 如果& = 0,那么我们不做分类而是继续迭代下去.用 爆1 =讯\* + *i*表示第一次非本质自由返回的指标，在独1之后，重复 上述过程，令A表示可能的有界返回指标,小是最小的正整数使 得它重新返回到*I'*.此时伝)可能再一次出现.此时用*nki = % + Px* + ?i表示第二次非本质自由返回的时刻，并继续这一过程.由 后面证明中可以得到的映射的指数扩张性，这一过程将在有限步 后停止(也参见[TTY]).在根.与昭之间的所有非本质自由返 回我们用伝\*｝：=表示.
2. 若§•尹。，令 f 表示3中映到*17*上的子区间*,7* 6 5,- 那么R|>«.此时,F"\*+''(O,s)未必可以严格地表为区间&的并. 令

K = F性+'(0,s)\(( U 功 U (― c°+砰],d+“])).

K可能由0,1或2个区间构成.

1. 如果对某些由于每个刀毗邻于一个已选定 的4,此时我们只要稍稍扩展相应的参数区间纳■，使得^\*+，'(0, *吋)*= ZrU K.这样的构造意味着对恰当的了和符号士有

GUF"\*(O,M,7)U0U&±1・ (3.3)

由此，我们可以定义第^ + 1次自由返回.

1. 如果K中含有区间J,满足七,UJ,M| =a,记F^+，(0, ")=U糾并考虑它的进一步迭代直至与厂相交.在此基础 上重复上面的构造.用此方法我们得到由U A\*的一不分类已(％ 啲)=(«»：■,>}■记线=U a(i,y 并定义为+1 为

血+1 = U 练+1O).

a»W勺

附注3.3在构造分类R的过程中，每个参数的小区间

R,都与!'中的一个区间关联.这样的区间分成两类，一类区间是 丄，而另一类区间除包含形如七的区间外,它的端点落入丄毗邻 的区间内(见公式(3. 3)).为了避免引入复杂的记号，在下面的讨 论中，我们只就第一类区间展开讨论,而不考虑第二类区间存在的 可能性.读者可以仿照证明思想，对第二类区间得到同样的结论.

B我们用归纳方法证明，对第&次自由返回和所有aU瓦，下 面的事实成立.

1. 如果㈣=吗念)是第*k*次返回的指标成> 1,那么

|3IFn,4-I(l,a)| 2exp(2miP)；

1. 如果1 MiM皿(a),那么

5(1,a) I 2expi"3；

(hi) >exp(— *•/~j* ), 1< j C m\*.

我们注意到对& = 1,由引理2. 3和叫的定义，显然上面的 ⑴，(ii)和(iii)都成立.

下面我们对应+ 1证明(i), (ii)和顷)成立.令3是瓦中一个 小参数区间，并令力=*P3* 网和“如A中所定义.我们也假定旬 中的小区间“映到区间孔，以| V产时,归纳步骤成立.下面我们首 先估计P的上界.由中值公式

弓(“)-”(%<!)— FPT(l,q) - "一1(1 - *af,d)* =4矿&砂一1(1一对2,<1), (3.4)

其中 0 <7,<7<cp\_1,由(2. 3)和(3.1)对 我

们有

庖糜1 一时,a)| 行 成(1 一妙,4)|

|a『(l,a)| ~丛 |H(l,a)| VW2,(3.5)

其中c = exp(^£日.同理可证

IM(1 —硏。)丨卜丄  
l"(S “ "2,

(3.6)

容易看到，(3. 5)和(3. 6)对0〈矿〈〃也成立.因此，由(3. 1),(3. 4)和(3.6)我们得到

M亲旧怎)一州(孔©| £ 謗V *玄*烏exp(2 E W exp(2 g 只要j —iWm”那么由(ii),exp(2 /?)Nexp(严)•但是由引理 2. 3和不等式(3.1),当S充分小和向充分靠近2时,我们有

' W 2#(a + j»+V2¥(ai + 房)

W 157(靛1 + 犊Q W 15-牝 <". (3.7)

此式也说明,当j增加时不等式*j* M 2故十在*j = mk*之前就破坏掉 了 .因此

PW2M\*. (3.8)

令a = *(a,bf.*我们讨论*n =* 的长度的下界.

邛可以表为

I糾=|E»+P+l(0,4)— I .

*=[FX1(釦 s),a)—砂+1 苦％ ⑶，占汁 (3.9)*

因为

I&\*Q) 一扌叫0)| = |。一石||%广\*(0,廿)丨  
N g —们•佥expm¥$, *a<a' <t>,*并注意到M对纟和a的导数是同阶的,而从上式可见*\a-b\*与  
I&Q) — &冲)|比较是微不足道的(也可参考[TTY]).因此

|糾濠■1^031 |&0) - 轧3)| |为”0 |

貝扣, l/&F",a)|, (3.10)

其中1 一播

由(3. 2)和(3.4),存在 7，r,0<r <7<^-1> 使得

"|小％1 - 寸@) | > 备讐暖， (3.11) 利用一致估计(3. 5)和(3. 6)我们有

|西"(夕@)| >-^19^(1

将(3.11)和上式代入(3.10)

ici > 1 *Cfi \1 \* 丨&+i(Q)丨 g ”、

冋法説右仔』3+安 ③⑵

我们要进一步证明|fi|>exp(-2z(s/8).事实上，由假设(iii), 底+13)1 2 exP(— *-/pTi).*利用(3. 8)并注意到 \*Na = logJ[|],那么当$充分小，

&| =exp(—*』p*。)一 exp(— /V)— ,

I钉+l（a）| >exp[-（ ] + 2抒）可，  
~~d =竺p~~ -厂^^）,.

ca—1 exp ' 2 *J卩 \_ ]）*

*\0\ >—* Q + 2+】）・2expG（QN 厂弟，（3.13） 60 V>

下面我们对& + I证明⑴ 成立,首先证明对V a E血， la^i+^d.a）! Nexp（2S\* + Q\* + 会#\*） • （3.14）

由微分链式法则

=否"厂1(1,侄)(一 *2a(m (a)) •*

i

为FP黄叫+1@),a) |2a氧(e)为网(紐+心),a) |

> 2aexp(— 序)• &xp(2 *JL* 1) • 彳备沖(-少+ 2 QT)•帰帯.

因*为”》為埒、*并且|弓+1愆)| >exp(— 上式可表为

|球《5（京+心）優）丨鴻温可•

exp（2 — 1 — //r — *Jp* + 1）》exp（+/>\*）.

（3.15）

由（3. 7）,砰》15出从而对所有a £ 3,  
庖 E+P（l/）| > exp[ *2mf + 十声\*）*濠 exp（2O\*+ 见专 +

这是因为（戒？ +会A （wi\* + ",

由分类定义，设对f = h.^+^CO.a）与/•相交.那么

|招冲+3+：L（l,a） | >exp（2（m\* *+ p +* h）b.  
事实上，由于 <#,并且 |F《％,a）| *R,j =*

一 2,其中 ％ = F^+%1,@）,所以由引理 2.1  
|粕-1（從）| 2（L9）L.

于是

|为砂,+Z>K\_l（l,a）| > （1.9/Texp（2S\* + \*）\* + 备疗） N exp（2（m\* + 力 + 标）4）.

如果是自由返回，那么记m\*+i = mt + /> + ；i, 并且对*k* + 1,我们证明了（i）,如果是非本质自由返回，由（3.13）, 时,+#+七（0仲）与九，|叫〈产相交.重复前面的讨论，并在下一次 返回时，我们有

'IV"L（l,a）| 2exp（2”£）.

如此继续下去直至到吗时，返回是自由的时侯为止.自由返回在 有限次非本质自由返回后必会出现，这是因为s的象的长度，如同 我们在A中看到的一样，在返回时是非常快地增长的.我们完成了 «）'的证明.

当\* + 1时关于W）的证明，我们只对给出证明. 而对时间段*叫〈V 吼* 的证明是类似的.

J j+l

如果i 一皿V内V皿，其中*p = pk*如（3.1）和（3. 2）定义, 那么我们有

=区评-f （最+l（O,a） ,

》exp（2m；〃）・2kP（- 77）1 勿戸T-叫（氧+i（a）,a）|.

由一致估计(3. 5)和(3.6),归纳假设(ii)和m\* >产，

Nexp(2m? — ■/}? + (1 — 1 — m\*)#) 2 exp#.

如果 *i>pk + mk,*由(3.14)

|杏尸」1(1")|

=|%E‘+A(l,a) •布尸-%—》厂1(8叫+a+[(a),a))|

2 exp(2g + 力)\* + 佥讨)l/FF-l(机+A+1MB 卜. 由引理23,我们得到

低不一叫"L(氧+p,+i(e),a)丨 > 5exp(r(t 一唯一勿一])). 注意到

2 12 1 *2*

*2(mt + fit)3 + —/>3 + 7(I — 1 — pk — mQ* — log y > 技. 从而(ii)得显.

(iii)的证明.要证当 *mt < j K* mi+1 时> exp(— /7).由引理2. 3,只要a。充分靠近2,总可适当选取 使得阳> *2d*注意到*屿*1,我们有

况\* 2 *~2^mt +* 2 & + 1 + a.

因此，当时

|烏 | 2 exp(— Ja + 点 + 1) > exp (— *Vmk)* > exp(— *R).* C最后我们来估计，在构造血+1时，从旬中排除的参数集的 测度.更确切地讲，我们要证明

|g| 2 |血丨(1 一9, (3.16)

8

其中0Way 1且U(l-4)>0.如果(3.16)得以证明,那么由

\*=1

归纳过程我们有

n—1

14.1 > |1 一 J I U I》…> U(1 — G 心 |.

注意到4+1 U&,我们有

Al = I n4t|>0.

\*=1

并完成了定理3. 2的证明.在证明（3.16）之前，我们暂时假设对所 有％,個G 3UJ、存在与互无关的常数c,使得

V |\*中（0,代）| 〜

(3.17)

c ； |"E（O，s）| f C'

令q = u F"妇（0,3）可以表示为

|P«E（O\*）| = |砂5（0^） — 砂+（0』）|

=叫FT（氧+p+i（a）Q -

与推导（3.10）相似，我们得到

|尸％1 （0仲）|

>号旧『中-叫一1（"） | |命+小8）-上++（方）I , 其中H在％+a+i（a）和氧+\*10）之间.因此得

（1） |F'（8,<z） | N 凯丿=0,1,2,•••,/»\*+! *- mk- p- 2t*

*（2） C3.*

利用引理2、1

|砂中（0,也）丨

> y（l. 9）FF-"%叫+\*（a）-氧+宀0） h

9 j.

=号（1. 9）叫+厂叫一》一1|糾>exp（- 2舟）. 我们也有

|E+i（0,a）| = |%FF（0,次）1 I叫， 其中W £a,于是，我们得到了 a长度的一个下界

即*参*.燮- 2満)

1 ' - .

另一方面，令刃表示a中可以包含于A+i的小区间全体.根 据四+1定义，记鼠+1 = w\a/，则

l^™i+1(O,wt+1)J <exp(— /a + A +1).

而

|E+i(O,祐i)| = I弟+11,

其中术£添+1，因此

exp(— /a + H)  
一| 讣f(O,a〃)| '

利用(3.17),我们可以估计从&中排除的参数集的测度

|  |  |
| --- | --- |
| 丨如一|«/ |  1刎 '  因此，有 |  |

I血I - I4t+il ’ ...\_exp(— -/a+T+T)

nr] W const r- = «i

141 exp(-2“E)

和

|四+11 (1 — a\*) |<i\*

因为I闵<a +如所以四£戲,其中

*队*—const exp(2(a + 幻M — ■/« -pA + 1).

8 8

容易验证IT (I f &) > 0,因此U (1 - M > 0.

XI *k — \*

附注3.4读者可以看到，在证明(3.16)时，我们仅考虑了从 ，次自由返回到*k +* 1次自由返回的过程中，没有非本质自由返 回.更明确地说，我们仅■考虑了"=吨+1情况，对于一般情况，读 者可仿照上述过程证明间样的结果.

下面证明(3、17)成立.我们将给出一个形式上更一般的结

论.

.引3 3.5设砂，(0,3)那么有常数q和&，使

得对任意*a,b£3*和丿 < 所》+1,下列不等式成立

5(1,糾匕

|gl,a)| X

(3.18)

(3.19)

证明 显然,我们只需证明(3.18)成立.(3,19)式的结果可 从(3.18)和引理2. 4推得.(3.18)式等价于

崗0)|

l^)T ^C,

由归纳的结论⑴,得

22 |ET(/)| =

因此，利用引理2. 4,得

|如 Wdexp(— 2邳).

因为m》l,

囹'w (1 + 备卩 M (1 + "exp(\_ »d))y 2,  
于是(W)'在对参数的一致性估计中是不重要的因素.为了证明  
(3.18),我们只要估计］1 譲勢\*因为

吝 |£0)| ' 丄修川)一&sin

口吋1 =咬 gln|1+ |^)| ))

b 踞旧。)一&(4)|

W exp応一偽(a) I .

所以我们只要估计

„ I演）一"）丨

3 -

令佑｝蔼为自由返回或非本质自由返回的指标，并且专V知 如果f<j,那么S可分段表示为

簽芙“W）一膈）1簽V

5 = 2j 2j —旧商 =匕为.

>-1 v=（. |C-WI 斤1

由有的定义,q e加，并且书=（句伝）,句8））u%.我们将，分 成两部分 ' '

„ I&3） —句。）| 弓\*‘ |5怎）一&。）|

月=\* "）1 +『謂 険）1 '

首先估计第一个和式，当卩= <> 时，~~吃:二;件~~~~1~~ M 导；当勺

*+ pj* 时，记 *S = V —*如显然/ = 1,2, —,/>>,此时

厲（仅）一 "3）丨=|玲（匕 S）M）— F；（& 9）,为）|

*i I*

勺 |囱|.

同时

.|&(a)|=|F，怎怎)g)|

*i*

> |F，(O,q)| — |F，(q(Q),a) - FM0,4)L 记&\*)= 〃，则 .因此由(3.1)式，

0a) I > |?,(«) I —法I |.

我们得到

成 0）1

*q* I 蜘）1

3。囱I § I勺巾卩M"'服）l

TWT

(3. 20) 我们把不等式右边的和式分成两部分

*% f； f,*

月=力十*i -*

5=1 1=1 $—时+1

其中*pi* = I Vw.第一部分我们用基本估计

IMI",

*.\W \* >e-

第二部分我们利用(3.1),(3. 4)和(3. 5)推导出

|割1(1," £ 詞&(a) —F，(")| M 亦志 lg)|, 其中咋 g,糾\_|).于是

%|丄」旧此一1(1,0)| |加丨

V戸.

I 如 a)|

因此

2 =象+套日4也mi吳"十华!]

$=1 sT g + 1 I s=l *气* 〃 + 1 ”

注意到*Pi'* = j Vw和土丨*Ui W\** 我们有 安'l%(a) —4(6)1 V “顽 Wl

因为当勺+ *Pi <v< tj+1*时，句(a) n /■ = 0以及

庵詩)一 *&揷)*I 2号杞此f-"‘a) I I物)一晶(6) I, 其中0在5(4)与之间，我们有

|&（龄-£0）| / 3 *t* lOl^-1\* 驼+«）- *&揷）*I 一而可一0万|的J 1句+,怎）1

事实上，旧怎）| > |弓+［伝）|,并由引理2.1

|古尸；+厂"Sa）| > （1.9）'，+「"，

于是

|腿）一伊）I W专鼎“定詩）一鈴件）I. 因此,第二部分可以估计如下：

W 13） — 60）1

*<1* 卩O^+L I句+&）\_ 句+Q）I

£如思+J司 呢孩）1

<Ay（io1j 庇+S —与璀I

毛万4【1时 呢，（心

竄3-队仞1  
I氣s -

W const

'/+L

上述的估计表明，第二部分和可以被吸收到£ 中，所以

匕+1

*s* < const 2 -7=学V

i V^> p'

为完成（3.18）的估计，我们只要估计上面不等式右边和式的 界.完全类似于（3.13）的估计，我们有

|川+1（%,次）|》exp（\_ 2游）， （3.21）

其中囱£農,切，％ =下面我们要证明陶+1! > 5囱I.为此，先证明在有限的时间段 *KKP,*中，~~鴛:⑶糾~~ *la/s 血）［*的一致有界性，其中气，工合£七"3如6欢

1—1

|%刑（工1,绮）| =（" 巨成 愆"，

*V=O*

*I ai\'*」頌 |Fu（Zi，ai）—狄（丑,企）11

w M丿 expl *：*—g&i r

由（3.1）,当vW物时

|F\*"（H,a）—知（<z） I M ~~":V 丨~~,z £ 弓，a 任 *a>,*

我们得到

I硏（跖，角）一卧（务血）|

M IA（ai）I + |&伝2）+ |^（«1） — ^（此）I,

和

|殆（处,％）1 > y|^（0,a2）|.

于是

|F"（；C1,勿）一户"（以，%）丨

|尸6血）［\_

丨&（角；一為（勿）丨

M 8叫粉2 +腐％遠絆）+

由归纳的结论（ii），引理2. 4,（3. 5）和（3. 6）

|"-1（瑚）| Vxp（2 4），

IM广（l，a）l N«tP（2罗）.

因此

|&（角）—fM（a2） | — const|&F\*-l（lM） | |向一此|

W const |9XF\*-1（1 | |角—*at |*

C const exp(2 a/^) |鬲 一％ |,

以及

|勺愆）一亀（6）丨

论 一 K ~~15-1（丄）| -~~淄眦 exp（\_ 2痒.  
注意到|嬴饥）|濠exp（— O 和立得  
頌 屮（时。1）—欢《气血）1 ,

2j 77J7 Ti W const,

£ |殆（以,角）|

因为囹'是一个有界数，所以

广二 r V const f

|%尸（工2& I

其中册 e *Ip.,* a\* a>.

由引理2.1和上述估计，我们得到

|bj+"= |P>+i（0»a） — Pj+i（0,Z\*）1

=I尸心M,+3+l）（q+3+i（a），a）- F«,zM,+D+I）（q+p,+10）0）|

Nconst呢+3+i（a） - q+D+i（6） I r I"叫叫,

2 const jjT 1。打

>const 0|exp（\/Z）exp（~ 2才）. （3.22）

因为$很小，所以（3. 22）意味着|b,+“N5］巩.最后，我们估计 和式

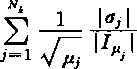
要注意，某些円可能同时位于某个区间L中.当此情况发生时，由 于血+1N 5囱|，我们有血I < I”⑴I, J（s）表示这些*。代L*的

最大下标,由此有

kW% 匕 v

l<V(s) I

"KT

于是

-s s

(3.24)

/ VI 1 |bj（$）丨

不等式（3. 24）表明和式亩的*杓*不妨是不同的•将和式

V' 1 丨勺丨  
叨

分成两部分，令儿是使得

方冊5

的指标集，而儿是剩余指标集.那么

. QO

S 、後 M const,

即上式左端是一致有界的.如果ye则

由(3,22),如果 *k>j*

|ct\*| > const |q|exp(y^J) exp( — )

* const *插*加 |exp（V^i exp（ 一 2,）
* exp（ — 3力）.

但唳U/七由加的定义立得件C 9#.此不等式说明｛的｝心,有

限.因此

2声件、声  
*jWJ\** V *fij %* 丿€七 V 巧

是一致有界的.于是，我们证明了引理3. 5,从而定理3.2证毕.|

**§ 4**分布问题

我们仍用*如*表示点*工*=0的V次迭代，并且令

岡=4立如 (4.1)

在本节中，我们讨论四的渐近性质.更确切地讲，我们将证明下面 的基本定理.

*定*理4.1 对于前面定义的丄中几乎所有的参数，序列 仏广的"、极限产是鲍对连续的:毎=Mr,其中〃，对所 有*P<2*成立.

附注4.2这个定理表明，测度产不是很特殊的，并且临界点 的轨道关于测度“遍历,为证明这一定理,我们将依照§ 3中所得 到的基本性质分步进行讨论.我们首先讨论在广上的分 布，然后讨论在［—*i,U\r*上的分布，由后面的讨论我们知道， e-i,uy 上的分布不难从广上的分布得到.因此，讨论清楚 厂上的性质是重要的.

我们已皎知道，&8), 丄以三种形式返回到厂，自由返 回，非本质自由返回和有界返回.我们首先证明在r上自由返回 xB( = 的分布具有有界密度.其次，用类似的方法可以证明非 本质返回"｛£»,｝的分布具有有界密度.我们最后证明有界返回｛少丿 的分布具有密度g £ *Lf,p<2.*

定理4,1的证明

1.自由返回的分布问题的讨论.

记4 = 4,不妨设*A*的Lebesgue测度为1,即臨=1.这样, 我们可以把它看成概率测度.在此基础上，我们可以引入期望E和 条件概率等概念.

取定1 MM ••• M V，和間必m,定义

==化 w e *I %、j* 一 1,2,—,z},

或者财=a由前面的讨•论我们知道，这种形式的参数集合可以分 成一列子集# 3),其中每个x (0相应于一条不同的“路径”i,该 路径在第％次自由返回时，通过区间*1%*我们定义

4, = {a £ # *\ x„(a)* 6 *h),*

= {a & " I 弓(a) £ *Iu,* x„+1(a) £ 丄，路径 i},  
心=1)収&\*).

对每个路径*i,*由(3.13)*丄* 可扩增为l个区间4,(0,其中

lAXi) I =乙(用)2 弦卩)=exp(—2k\*). (4.2)

由分类的意义，我们知道珏(D可以分成一些区间孔的并，由前面 的引理3. 5,我们得到

. IZ I

m%(D M const (4.3)

为完成情形1的证明，我们首先给出两个事实,并把它们归纳 为下面两个引理.

引理4. 3给定# = 或U 4•有一个与"无关的

常数Q,使得如果对某常数*Q >* c°,下式

mA\* M 2Q | A, | *mA*

对所有的v成立,那么，对所有“我们有

瑚'户 MQIWmA

证明由(4. 3)我们有

mA“ —必)、*raAllfl(i') +*

*v,i* KlMYz)

曰41 S~~况n~~〉mW).

心>g) 、' ' *k*

因为

亞烏沒心)3山零,

并注意到、心|/殓0 V+ 8,所以适当选择g,我们有 S制§m处⑺M糸m# .

对*，*< g，存在一个常数氏，使得*L(.V,i)*法*Lo.*于是

N 瑚\*) 加 8瑚祯)具争財m# ,

认Yq> S 3佑 *乙*

其中％ 2 (2c/Z0).于是

(号+号|成冋#京心|m#. |

附注4.4引理4.3给岀从V到“的“转移概率”的一个估计. 引理4. 3的一种特殊情况为

引9 4.5假如

An = {a w AJzrGi) e *I„},n* = 1,2,—

那么对所有的如，

mA«Wco|A，|.

证明我们用归纳法来证明这个引理.当n=l时，由引理 *2.3*可得

M %!匕 I，  
如果上述不等式对«时成立,下面证明  
mA"x+l 具帛//.

事实上，如果我们记x = U/网,那么

A» n+l =

由归纳法假设，

mAnMcolAJ <Qc0|Z,,|m^ ,

其中Q= (m")T.于是，由引理4. 3,我们立得

mAn+1 =庭七 W ■j'QcolAJniNMcolAJ. | 下面我们开始估计｛%｝的分布函数.令不含0)是长度为 ©的任意固定区间，取#=4,并考虑

E(X»(^m)) =— [ XsStGz)) da,

J人

其中担,是示性函数,A可以依照不同的路径分解为4, =对每个£,由引理3. 5,為(a)在九中的分布有一致有界 密度.因此

(4.4)

£(X»(Zh))C const *mAy* • jj-j- V const £,

其中第二个不等式由引理4. 5得到.因此，如果定义

那么

E(Fn) W const £.

(4.5)

(4.6)

下面我们任意取定一个充分大的正整数五，并考虑

*Eg) =* S N-叶 Xa(气)••％(勺)da.

弗“\*N 八

我们要证明

*E<F£)* < (const 6)h + Owb.

E(F幻可依下标数组(力，…，水)分成两部分.因为

CardfOt, —,jh) I min|jft — j£| < -/N｝ 并注意到 ’

丄為，(叼卩…么愆“)da W 1,

因此，在(4. 6)中相应的这些项全体为。3遴).E(H)中剩余的 项可做如下估计.取A < *k <*…V水W N,满足力+1 -

/N, \*=1,・・・,力一1.并考虑一个区间3UA 假设与s&omW ，，那么我们在引理4.3中选择龙=力以及*i={ae* &吃 e L，sW2}.对这样的取法，引理4. 3中的假设条件显然成立.此 时，我们在该引理中取2Q= IAJt,令

4片,={a & 兩 |zj,+\*(a) £ 丄}.

由引理4. 3,我们有

*< Qm^i \1^\.*

归纳地应用引理4： 3,在*k = jl+l - h*次迭代后，只要*N*充分大,使 得|侦>qT2-E,我们推得

mA件 < *2~^] • Q •* •JIM Co|/^|hi-^,.

因此

于是

*m=h* < (c°|L|)k

如果我们进一步要求，对每个项“z厶£ = 1,・・・,九,那么由

*fti h*

引理3.5,上述测度的下降比例为M无(参考(4.4)).因此，当 N充分大时，

E(理)M(\*)"+O(NT).

于是，对几乎所有4\_

|| limF/le M 勺 e. (4.7)

N-\*8

(4. 7)式意味着自由返回的极限分布在x = 0外有有界密度(界为 c°).由于在x#：O处密度一致有界，以及对所有的”，为尹0,所以 x = 0处的情况可以不必考虑.

利用非本质返回的定义和性质，类似地可以证明，非本质返回 的极限分布具有有界密度.

2.有界返回的分布问题的讨论.

我们要讨论有界返回⑶？，« *= l,2,-,N,j* = 1,2,-的分 布问题.这个问题的讨论可廿分成二步进行，我们首先讨论对 *J(J*固定)的分布，然后对所有*j>J*迸行分析.

对 令％•表示X-0点第j次返回的时刻，并且记旳(4)

=称此返回是奇(偶)的，如果相应的揉序列(Kneading sequence)是奇(偶)的.任给定Q和，> 0,并令©(a)是区间，定义 为

a(a)\_ J(M> *— p~l,uj —* p), 奇返回，

*+ P、\** + p + 2),偶返回. 我们考虑

*破 =HN(,a)*=布力九3)(外\*)).

*n=\*

令U是W中的一个参数区间.假设巧S)是0点 的0次迭代，对a € U,我们考虑马伝)=理,3,a),其中b = (0, ±Ft)二>八.由中值定理和(3. 5)式,我们有

*\ffj\* const |tf(a) |2 exp *qj* > const |ff(a) |2 expji, (4.8) 这里我们要特别指出，如果｛%｝徂i是一个奇(偶)揉序列，那么 的右(左)端点为f,如图6-1所示.

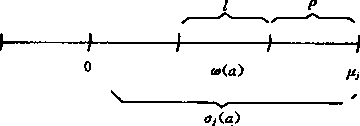


图6-1

因此，一个点石6孔的第丿次有界返回属于3(a)的“条件概 率”，由引理3.5,满足下面的不等式，

点尸編可'BA'

b, I < p.

于是，由(4.8)式以及xB e *1„,*立得

fiCZoifa) (jnXti)) < const *I e~J'3*

MM *CP* 其中

"=(g I c； N const *p* eT\*5"} •

显然復| I" >同UM.因此

\_1 \_ i\_ 4

&%也3)(为,(a)) W const p 刃.

从而得

E(H£(a)) W const *p~^l* e"-捉.

我们考虑*(HE\**的期望E((H女a))”).它可以表为下面和的 形式

*N\_h* S E(為sg(a))・“gg(a)))・

如同对自由返回情况的分析，我们将上述和式依照min|ns+1-ni|

*S*

< /N和 厲+1—标 > 加分成两部分.由一个类似的讨论得 到，对充分大的h,我们有

J J. I J

E((H&(a))A) W (const "〜以‘厂，)\* + *0<N-*芝).(4. 9) 由(4. 9)式我们得到，相应于少j,极限分布对几乎所有的a E A有 密度幻，它满足 '

[ g/(a) ds M const Z 厂 M ”厂(4.10)

Jfv(a)

对J > J,我们要证明相应*j> J*的全体有界返回的数目(分 布)是小的，记

n —1

*8*

其中织=2气，而气(a)定义为

丿7+1

\_ J1. 了勻(a)存在，

饥8)=［皿 火,&)不存在.

如果外6 *WA、*由(3. 8)中有关步的估计推得

*8*

号 gl^w g|「

J=1

因此仞M l“l.由上式还可以得到，只有I川*>J+*1时，们才可能 不为0,从而立得

< const 2

点 hJ+1

因此E(TQ W eT C 与前面对自由返回情况的讨论相同，我们 考虑ECTQ时分两种情况:minlsi-啪W 加和1%+1-色|

*S*

*> m* 并由此容易证明，对几乎所有的

尽7\(a) VeTQ

N-\*w

总结上述的结论，我们可以将；•上的分布情况写成下面的定理.

定理4.6对几乎所有的*aEA,*自由返回和非本质自由返回 的极限分布具有一致有界的密度，而有界返回极限分布具有密度 gU). 2满足不等式

gGr) Wcon就［习厂第侦旳—工)+习e「第\*甄工—*uj)J,*%odd 勺even

(4.11)

其中

*8,*

x>Ot

X = Ot

•z V0.

3.在厂外的分布问题的讨论.

到目前为止，我们仅在r内讨论了分布问题.令｛岡愆))丄】 表示轨道｛5(a)｝：=i回到广的点.那么(4.1)的冶,可以表示为

1 a 1 M n d , "

*上*=4力％时=时%)=吏沼),  
v=l *v=\* 卜 1 *u* i=0

(4.12)

其中求和号Z'表示,如果F’Jq *& r,j= l,2,-,k,*那么

V

^(Uv)属于该和式・

令产表示(他住】的“•-极限.我们已经证明 皿聞=川厂£ ”, P V 2.

，—\*8 J

下面我们讨论｛成＞｝丄1.由于风W ",卩=1,…,AC所以  
supp /4° U [1 —泌2,]丄

给定小区间3U 口一渺S1],那么F-4由广中两个对称小区间 。和一0组成.由(4.12)我们有

&3)=必＞3)=*成3* U (-。)).

因此

*ju(co)* ＜ f A(x) di,

8 expl — •|\_搭)

其中ft(x) = const 2 .做变量替换y = FS),那么

**I & —z|E**

上式的右端具形式

**, (.2**

Hz) dx = 2＞(F尸Cr))(F「＞ dz ,

JnU(-fl) J® ；±7

其中｛FQ捻是FT的两个分支，我们证明

2

J>（F尸（z））（F湼），（Z）£ 〃，/> V 2.

事实上

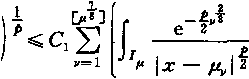
IL\* "一3)的F-3I风= j：|y |，云帀血  
const |o | A (x) | \*• *Ax* < const > £. &

< const 2 C

*j* g(z)|»dz.

(4.13)

因为

L *P*

（£仿（功仏

& + G 、， 卩=［击+1 其中E和G为常数.记上式右端的两项为£和S”为证明（4.13） 的收敛性，我们只要估计&和£的阶.利用|旳| 2e~",我们 有|x-MJ >齢財,Y W］口 E丄.因此得S的估计式

7

S］ W const］号七一伊'|心1\*2丄和祯W const e（邱T"）・

*y=\*

用积分估计式，我们容易证明

Sgf const 、厂亍  
T/勺+1 V

7 1丄

V const （1 +戸來）厂野七

由上述对&和另的估计立得（4.13）的收敛性.因此,V *P<2.*

闵（1-折，1） £ （4.14）

现在令a是(一 1,1 - 中的一个区间，那么

*n*

为(a) =亀〉3)・ (4.15)

\*=2

我们已经知道对于z£ (1 —抻,D,如果FXQ冬广“ =1,2, *-,k-l,*那么存在A> 1,使得

|3hF\*(z)| >A\*. (4.16)

用此事实以及完全类似前面的方法，我们有下面的估计

W j g\*(z)dx, *h =* 2,3,—

其中kill? < const A~\ 2,由此推得

L

8

ZJgAO)&，

*k=2*

8 ， '

其中习由此我们证明了定理4.1. |

\*=2

小話4.7以上我们已经详细地讨论了 F(z,a) = 1 —心2在 *a =* 2附近的动力学行为.证明过程也说明，［Yo］中阐述的关于当 前如何研究非双曲系统的看法的实用性.下面我们简单地介绍，关 于一般单峰睞射族兀S)的新结果，以此作为对上面特例的总结.

定义4.8设#是一个参数空间*.Y艾 口*，设兀(工)是区 间1= ［一 1,口上的映射.称｛兀｝住"是正则映射族，如果

(i) 是关于Gc,a)的 C，映射；

(ii) c0 = 0是九的唯一临界点，兀在［一 1,0)单调上升而在 (0,口单调下降*，A(oxo<fa(o),fl(o)KJl(o),*并且对所有 X 6 (— 1,0)匕(z) > X| •"

(iii)存在正数4： ,A； ,C\*和r^2,使得对所有a任#和所 有愆,少G *I*

A； |硏7三庖兀愆)丨|x|r-i,

以及

I *aja*S) I v ｛ p. *X* 11 \  
TV^)TCexplc 7~1I)-

附注4. 9请读者分析F(H,a)是否是正则映射族.

记｛c„(a)l-=1表示临界点c° = 0的轨道.下面我们凫义可扰 动参数的概念•

定义4.10设｛兀｝抵“是正则映射族.一个参数a .称为可扰 动參數，如果它满足如下条件：

<M)存在L >Q,y 并且兀.没有稳定

周期轨；

(CE。)存在l >0,使得对每个de(0,l)和”2、如果 *H £1* 满足 n.(釦 $ 并且尺 \*3) e *(-S,3),i = 0,l,*

•••,\* — 1,那么 (X)| > e"(

M (qd))

(T)战叫(")) =Q'^°-

附注4.11 (M)条件即通常所说的Misiurewicz条件,它要求 临界点勺=0是非回复的;面九.没有稳定周期轨可以保证在临界 点的任意邻域外的任何足够长南轨道段的指数增长.(CEQ条件 是证明过程中技术上的要求，它保证轨道的增长指数(比方说A) 与临界点邻域的选取无关.(T)条件是橫截条件,它保证九橫截 地穿过0 .对兀愆)=1 一技回言,丄=2是可扰的.可以证明 对此映射

定义4.12 参数队称为一个Borel集JJ £或的Lebesgue正 91点，如果

，-|。D(4. — e,a\* + e) |  
T I# n (a. — e>a. + e) |

>0,

其中 冋表示集合。的"besgue測度.特别，如果该极限值为1, 则称a•,为Lebesgue全？I点.

附注4.13显然全稠性意味着正稠性.在对兀=1 一山的 讨论中,我们仅证明了。. = 2是正稠点■-实际上将证明稲加改动， 可以证明。.=2是全稠点.

对一般的具可扰参数山的正则族｛兀槌A我们有

定理4.14令｛兀｝亦/是正则族.对每一个可扰参数a\* E 行，存在正常数a和用使得％是满足以下诸条件的参数a构 成的集合"的全稠点.

(NS)兀无稳定周期轨；

(ER) V « > 1. |/S(0) | > e exp(— na)f

(CE1) V ”20,|勺務(兀(0))| > A exp («A)；

(CE2)对V«>1,如果x6 ［-1.1］满足充愆)尹0对于 *k* == 0,1,— ,n — 1 成立，并且務(£)= 0,那么 | >

*k* exp(n人).

由于对每个a E *D,fa*满足条件(NS),(CE1)和(CE2),利用 CNS］的结果，立得对*fa*存在一个关于Lebesgue测度绝对连续的 不变概率测度产.

近年来，在非双曲系统研究中不断有较深刻的结果出现.我们 在本章中不准备介绍了.但有一点要指出，我们在这里介绍的 Benedic屁和Carleson的证明思想(简称BC方法)，近几年来在这个 方向的研究中起着十分关键的作用.事实上,无论是对一般区间映 射族还是对平面间宿相切(例如Henon映射)，鞍结分岔甚至高维 的同宿分岔现象所得到的主要结果的证明方法，基本上是BC方 法,或者是从这一方法中派生出来的.

即使我们只考虑R"上的向量场.在讨论分岔的余维数时，也 需要在全体光滑向量场所成的（无穷维）空间中考虑某些子流形的 余维数，以及光滑映射与这个子流形的横截相交性等.为此，我们 在附录A-C中介绍一些有关微分流形与微分拓扑的概念、名词 和重要结果，以便使读者减少査找参考书的麻烦.对这些结果本 身感兴趣的读者,可以参考有关的文献，例如

[Al],和[Zg]等.

附录**A Banach**流形和流形间的映射

微分流形是欧氏空间中光滑曲面概念的抽象和推广.它的基 本思想是,先在这个对象的局部通过与Banach空间的一个开集建 立微分同胚而引进相应的代数和拓扑结构，然后再把这些局部结 构光滑地粘接起来.因此，我们可以把Banach空间中的运算推广 到微分流形上.

微分流形的定义

定义A. 1 设M是一个连通的Hausdorff空间,B是一个 Banach空间.假设U是M的开子集怦是从U到8中开子集*构）* 的同胚映射，则祢（U瘁）是*M*的一个坐标卡.

*M*的两个坐标卡（U，时，*（V,^*祢为是*C*相容的，如果当*u* n V尹。时，映射

，。广 1叫而，p（C7 fl V） - *<P（JJ* f| V）

是8上的仃微分同胚,

*M*的坐标卡集*必*={（亿洪）|a£ A} *（A*是一个指标集）称 为一个L坐标系,如果

（1） *{Ua\aeA}*是M的一个开覆盖；

（2） *庭*中的任意两个坐标卡都是r相容的.

*M*的两个*C*坐标系#冃庭勢为等价的，如果也U M还是 M的（7坐标系.M上（7坐标系的一个等价类£称作M的一个仃 微分结构. 2内所有坐标系的并集#=U {方1^65}称作M 的一个极大仃坐标系,而（V,时6丿称作一个容许坐标卡.

如果在M上给定了一个＜7■微分结构&删称S= （M,£）是一 个仃微分流形.一般常把M与f等同，简称M为微分流形,为了标 明卡映射*甲*的取值空间B,可称M为装备在*B*上的Banach流孵 （注意,由*M*的连通性和坐标卡的相容性易知*,B*与坐标卡的选取 无关）.特别,当B为Hilbert空间时，称M为Hilbert流形湎当B 为有限维空间（例如R"）时■，称M为3维）微分流形.

附注A.2应该指出，一旦给定了診的一个坐标系行，就可 以把与M等价的全部坐标系合起来而得到一个极大坐标系，从而 生成*M*上的一个微分结构.因此，只须给定*M*上一个特定的坐标 系,就可以决定这个微分流形.

附注A.3如果把定义A.1中的仃全部换成C",则我们相 应地得到b微分流形.C"微分流形也称为光滑流形.

例A.4 （1）设B是一个Banach空间，则可取坐标卡（B,id）, （id是B的恒同映射）,这个坐标卡显然就构成B上的一个b坐标 系.因此，任何Banach空间都是装备在它自身上的一个光滑 Banach 流形.

⑵S" = {工£ R"+11 U|| = 1）是一个m维流形.事实上，记 *N =* {1,O,-,O},S= {-1,0,•••,（）}分别是S”的北极与南极，取 坐标卡（S"\{N}, " （S»\{S}, ft）,其中

"S"\{N}fRK,啊=（~~］三僅~~， 卻 Sn\{S} — R",你如,…，命+1）=（~~］.务~~， 容易得出

%+1  
l+^i.

^?T，! Rn\{0} ->R"\{0},件矿伝）=赤 是C~微分同胚.

流形间的映射

定义A.5设M,N分别是装备在Banach空间A,B±的役' 流形.*ftM^N*称为是（/映射，如果VhEM,及N上任一容许 坐标卡<V,Q J3）6 V, 3必中的容许坐标卡（U,机工G *U, f（U） U* V,使得映射（叫作*f*的局部表示）

*f^ = <!>a f -f'\** 中（U） U A — *<p（V）* U B 是仃的.

容易证明下面的两个定理.

定理A.6设*f\*MfN*是流形间的连续映射，则/■是顷的， 当且仅当对M与N上任意取定的坐标系而言，相关的局部表示都 是仃的.|

定理A.7设*M,N,P*都是仃流形都 是尸映射，则复合映射也是（7的.|

定义A.8设是<7■微分流形，称須，MfN为仃微分 同胚，如果它是一一的仃映射,并且其逆映射M也是C5 的.如果两个流形间存在一个r微分同胚，则称这两个流形C微 分同胚.

子流形与积流形

类似于向量空间的子空间与乘积空间,微分流形也存在子流

形与积流形.

设N是微分流形M的一个开子集,则把M上的微分结构限 制到N上，就自然得到*N*上的一个微分结构,从而使*N*成为一个 与M同维数的流珍这时，称N是M的一个开子流形.俱是M前 亠个闭子集，例为R”+i中的闭子集3"也可以成为一个流形（见例 A.4）.注鬻，此时程R"+i中存在坐标卡〔U,乎），使祁J （AS”）成为 R"的子集.这引出如下的一般定义

定义A.9设M是裝备在Banach流形理上的微分流形.M的 一个子集*N称为M*的子流形.如果*戏 £N,3M*的容许坐标卡 （。疗）,和*B*的宜和分解B = 8】击0,使得戸£ U,并且

卩《7|"|村）=中《7） 0（4 X ｛0｝）. （A.1）

可对这个定义给出直观的几何解释*N NC* 容许坐标

卡（U,时,使邻域U fl N经甲作用展平在*B*的子空间*Bt*上.

定理A.UJ设N是微分流形M的子流形，则N自身也是一 个微分流形，并且它的微分结构可由下面的坐标系生成：

｛（C/r|N, pBnM）：（U,P）是M的容许坐标卡，

它满足条件（A.1）｝. |

在附录B中,我们将介绍通过浸入或浸盖来构造（或鉴别）子 流形的方法.

定义A.11设是微分流形，它们分别有坐标系｛（。心 "|a£4｝和｛V"侏B｝,删集*合MXN*在由坐标卡｛（亿 X皿，饱X sMu°x\*）|a £ A,尸务B ｝生成的微分结构下作成微 分流形，称它为肱与N的积流形,仍记为*MXN.*

附录B切丛与切映射，向量场及其流，漫入与浸盖

向量丛是积流形的推广，而流形上的向量场，则是作为一个特 殊的向量丛（即切丛的截面）而定义的.利用切映射，我们可以把

Banach空间中的隐函数（反函数）定理以及局部浸入和浸盖定理 推广到流形上，从而得到判断（构造）子流形的有效手段.下面先 定义向量丛.

向■丛

定义B.1设M是仃微分流形,B是&皿ch空间*tUCM*是 开集，称17X3为局部向量丛,并称U为底空间,它可以等同于（7 X {0}，后者称为同部向量丛的#截面.V«6 u,称3} X B为过 «的鉀维，它可以众*B*获取Banach结构.*Y u£U,bW B,*由R（“， 方）="所定义的映射*^UXB^U*称为投影..

注意，过“的纤维就是而U X召为积流形*MXB*的 一个开子流形.

定义B. 2设*UXB*和5 X B都是局部向量丛.如果映射 *"U 7*和％：E7f ）都是（7的，则由

*强u,b）=*（阳（“），¥%（“）• 6）

所定义的映射*fUXB-^U'* x *B'*称为r局部向量丛映射.如果 这个映射还是一一的,则称它为仃局部向量丛同构.

注意,一个局部向量丛映射把纤维S} X五线性地映到纤维 （«（»）} XB\*. 一个局部的向量丛映射是局部向量丛同构，当且仅 当VuGU, %（«）是Banach空间器与否之间的同构映射.

类似于微分流形的定义，我们可以把局部向量丛粘接起来，得 出整体的向量丛结构.

定义B.3设S是集合.称（W,时是S的一个局都向量丛卡， 如果IV U S,甲是从W到一个＜7局部向量丛*UXB*的一一映射 （U,B可能与p有关）.称这样的卡集留={（W^,%）|a£7i}是S 的b向■丛坐标系，如果

（1） *{Wa\aeA）*覆盖 S;

（2） 若（"》,代），（w“啊）e第，吼,n巧声尹。,则％（叽n 巫#）是局部向量丛，且阳°缶'^（WOAW,|））是b局部向量丛同构. 称S的两个向量丛坐标系幽1与绥将价,如果躋1U漆必是 一个向量丛坐标系.向量丛坐标系的一个等价类称为S上的一个 C°■向量丛结构.称*Ef* ）是一个b向暈丛，这里S是一个集 合，戸是S上的一个r向量丛结构.与微分流形类似，通常也把E 与S等同，并把源中的任意局部向量丛卡称为一个容许向■丛卡. 向量丛有如下性质'

（1） 仃向量丛*E*是一个侦微分流形.

（2） 对向量丛E,定义其專截面（或称为E的底空间）

*M {p e E\ 3* 容许向量丛卡使 p = 它是E的子流形.

⑶ 设怦）是一个容许向量丛卡*，弈WfU X* 设pF

W，满足*甲*（/＞） = 3,0）,令集合

*Eg* = ?"'（{“} X BQ,

它可以通过中从B诱导Banach结构，并以*p*为零元素.如果（Wi, ft）和（巫“啊）是两个容许向量丛卡,P G W^i Cl W2,则*Eg* 与 E’,％线性拓扑同构（作为线性空网是同构的，作为拓扑空间\*同 胚的）.在这个意义下，可以认为Eg与甲无关,可记为*EP.*

（4）v«eE,3唯一的*p*e m（底空间），使得ee*ep.*由此， 可定义投彩

*E f M, = p,*

它是仃的满映射，并且旷 W）=耳称为过*peM*的纤维，它具 有的Banach结构称为纤维型.在有些书上，把上面的性质作为向 量丛的定义.我们有时也把向量丛记为或wEf M,以 标明投影映射m和底空间Af.

从几何上粗略地说，以流形M为底空间的向量丛,就是在*M* 上的每一点“附着”一个以该点为零元素的Banach空间，而不同点 上附着的Banach空间是彼此同构的.例如，在S?上，我们可以用下

列两种方式构造出不同的向量丛:V，€ S2,取过力的法线为纤维 E,；或取过*p*的切平面为*Ep.*前者的纤维型是畔，而后者是*Rs.*

切空间与切丛

我们可以通过坐标卡把Banach空间中曲线相切的概念诱导 到流形上，从而建立切空间与切丛.

定义B.4设M是仃微分流形设$>0,开区间Z =（一畧3）.称。映射cJf M为M上的一条曲线「如果”0）= P，则称曲线以*P*为基点.设上,电是以*P*为基点的两条曲线，并且 （U怦）是一容许坐标卡*，p* e *U.*如果

D（p。C］）（0） — D（p。@）（0）

（即Banach空间中的曲线处q与中。勺在。点相切），则称M上的 曲线勺与6在p点相切，

注意，利用流形M上坐标卡的相容性,％与位在声点的相切性 与容许坐标卡的选取无关,事实上，设0,對），（叫决）是两个坐 标卡,/> 6 n *u2.*设 D3。2（0） = D（p。C2）（O）.由于•

矽。G = （©。p\_1）-（中。c；）, i = 1,2,

所以

D（© ° <：i）（0） = D（0 » 亍'）（卩3）） • D（p- cD（0）

=D@ -伊f）（p （/>）） - D（p» cz）（0） = D（。。C2）（0）.

这样，我们在同基点的曲线之间规定了一个等价关系m〜◎ Qq与§在\*点相切.记c在戸的等价类为称它为流形M在 P点的一个切向■

定义B.5设M是U微分流形（r>l）,/>eAf.在》点的全 体切向量之集合

T»W） = 是M上以？为基点的曲线｝ 称为流形M在p点的切空间.并称*M*上全体切空间的集合

为M的切丛.

定SB.6切空间是一个Banach空间,而切丛TM在 投影

*jrtTMM (jr^cjp — p)*

之下作成一个向量丛

证明先证明*T?(M)*是一个Banach空间.取包含7■点的一 个坐标卡■(!/,甲),则以/■为基点的曲线c有局部表示D3u)(0)W 0 (R,Span?07)).记旦=(7?,Spanp({7)),它是一个 Banach 空间•这样.v Edf er?(A/),有” = d(>c)(o)与之对应. 反之，Vp € 耳，令 c«)=广(敏”)+ 拔)，则 po c(r)=*秩i>) + vt,* 从而D("Q(O)=a,从c可得于是，得到TpW)到品的一 一对应.这样，就可把*Br*的Banach空间结构通过局部表示 D0>。c)(0)而迁移到*T政M)*上.

再来证明是向量丛，其中投影*mTM f M*通过 巩［員捞=/•规定.取仃微分流形M的一个坐标系==*{(Ua,* 物)|a£A},则由下文的定理B.10可知*,^={(TUa,T<pa)\aeA\* 就构成了 TM上一个(7-1向量丛坐标系，其中7Va = *U^Tp(M),*而丁削丁(我UQ)是如下定义的切映射.

切映射

设是微分流形J：A/f N是仃映射5法1).设q宀是 财上在"点相切的两条曲线，则/。勺和 E 是N上在/(/.)点 相切的曲线.事实上，设(U,时，(V)Si)分别是*M.N*上的容许坐标 卡*,p € u,fip')e* v,y(u)uv,则 d(少勺“。)=D(wy)(o). 注意

*<l>° f ° c,—* 3。y。p-') ° (p ° C,), *i* — 1,2, 则由Banach空间中导算子的链式法则可得

D(0 ° *f* - c,)(0) = D(° " *f*。广)(中(0)) - D(中■> c；)(0),

(B. 1)

从而

D@ *\* f。*勺)(0) = D((J。*f* ° cz)(0).

由此，我们给出如下定义

定义臥7如果是流形间的C1映射,则称映射 T/： *TM -> TN,* 7y([c3 = [/。理3

*为f*的切映射.有时也把7Y记为d/或兀.

如果(U建)，(y,Q是上而所说的坐标卡，则由(B.1)式可知， 序有如下表示式

*Tfi* 3,a) 1 (須(/>), D3 - *f*。广)(?</>)) • 0),

(B.2) 其中p表示D(p。c) (0).由此，可从Banach空间中导算子的性质, 得出切映射的如下性质，

(1)若*f：MfN*是仃的，则*TfWN*是(7T的.

⑵ T"M) - Tp(N)是线性的.

1. 若*AMf,* K是流形间的仃映射，则

*T(g，f)=TgF*

是*TM^TK*的(7T映射.

1. 若五:是恒同映射，则*Th：TMfTM*也是恒同映 射.
2. 若BMf N是微分同胚，则*Tf’TMfTN*是单、满映 射，且

引理B.8 设W是Banach空间B的开子集(从而是 b Banach流形B的开子流形)，则7W同构于局部向量丛W X *尊*(因此，我们在下文中把加与"X B等同).

证明设c是W上以在为基点的曲线，则存在唯一的i&B, 使得由

*Cp,b(.t) — p 1b* 所定义的曲线在*P*点与*c*褂切.事实上，以(0)是名*(R,B)*中唯一 的线性映射,使得与曲线，在在点相切的另一曲线具有形 式

*g(t) = p +* Dc(0) • *t.*

令g = Cm，则*b* = DC(0) - 1是唯一存在的.定义映射

A' IV X B-► *TW, h{p,b} — [Cp,b}P,*

则上而的结论表明*h*是一一的.我们可以在*TW*上建立局部向量 丛结构.例如，取*K{p}XB)*为过*pEW*的纤维，则儿恰是7W与 *WXB*的局部向量丛同构映射.|

引理B.9设W和W7分别是Banach空间B和3的开子集, *f，W^W'*是仃微分同胚，则*TfiWxB^W' XB'*是局部向量 丛同构映射.

证明因为

773,8)=(須(力)，D\_f。)E)

(见(B. 2)式，取务少为恒同映射)，所以*Ff是 L 局部*向量丛映 射(见定义B. 2).又因为『是仃微分同胚，因此*(T\* = TH* 也是一个＜7一'局部向量丛映射，从而"是一向量丛同构映射.| 现在可以证明

定理B.10设财是＜/微分流形&梁1),#={(儿用)楂£ A}是M的一个仃坐标系，则*T庭*=((T(Ua) ,T皿))S £⑴是 切丛*TM*的C-1向量丛坐标系，从而TM是(7T向量丛.'此外，如 果M是"维流形，则*TM*是*2n*维流形.

证明 (U T«ja) |« e A} Z) 7W. T«JO) n

A.则由引理B.8,

t物 cr(s)n t(uq)=t(pn T(a(s))

是局部向量丛，并且

*T%* ° (Tfj,)-11码(7\%)(1崇“)=T(師。缶')

(见定义.B. 7下的性质(3)和(5)).注意驿。传'是%(C/Q)所在的

Banach空间E中的开子集你T（S） f| *TW）*到自身的CT映射. 由引理B. 9立得，（T"。（亍铅厂是C-1向量丛同构映射.因此， 帛曳口.9申的柔侔U）和⑵坞成立.有关维数的论断，是引理B.8 的自然推论（注意做S）是它所在Banach空间的开子集）.|

附注B. 11前面已经提到，流形间的切映射是Banach空间 中导算子的推广•因此，有时把它称为导映射•设M和N是充分光 滑的微分流形，则定理B. 10说明,TM和TN是向量丛，从而是微 分流形（见向量丛的性质⑴），并且 TM因此,可以继

续求二阶导映射*T（Tf） =Tzf>T（TM）^T（TN）,*并可递推地定 义高阶导映射.

向量场及其流

定义B.12 设（E,心M）是一个向量丛.如果映射

满足?rM = idM,则称它为向量丛的一■个截面M称为是（7连续的， 如果它作为Banach流形间的映射Af-£是（7的・

定义B. 13设M是一个C5微分流形,其切丛上 的一个C7rMsW8）截面*XiM^TM,*称为M上的一个仃向 量场.*M*上一切（7向量场的集合记为缶飞M）.

附注B.M设*X'M^TM*为一向量场,按定义QX = idM, 即V *P &M,*有X3）€ *TpM.*换句话说,M上的向量场就是把M 上的每一点赋予一个（在该点切空间内的）切向量，从而形成一个 M上的切向量场.

现在设（―】，1）~M是M上的一条§曲线（sWr）, 我们要规定曲线上每一点的切向量•注蠢由映射*f M*可得切 映射

*Tai* 77 = / X R— *TM.*

取切丛77的一个截面A-/-TI, A（t）-a,D,Vt&7,则复合映 射

*Ta -* A> 7->TAf 是上的一条C1"1曲线.记廿=• Ta。人，称*QTM^M* 上的曲线a在p点的切向董.如果取/上的坐标卡(W,id)和M上 的坐标卡(。并)(£ E *W,a(t) EU),*则由公式(B. 2)可知，映射/ 有局部表示

\*(f) = Ta(t,l) = (a(t), D(0。a)(r)). (B. 3)

注意,上面的1是R'中的单位映射.

定义B.1S 设f £亥'(M)JURi是开区间,0 e *I.*称a：/ f M是S的过A6M的积分曲线或流，如果*Yt&r,*

J </(f) =£(a«)),

1 a(0) *= p„.*

称上述流是极大的，如果£过A,的任一流俄J U Ri f M (J是包 含0的开区间)，都有*JUI,*且a|j = &

取M上的坐标卡*(U,^,fioeU,*设向量场TM有局部 表示其中*sU—B* (Banach空间).与上面/(c)的局部 表示相对照,就得到Banach空间中关于3。a)的微分方程初值问 题

*j* D(p ° a) «) — *v(a(t)*)=为。少-i ((中。a) (f)),

I(0。a)(0) — *<p 3°).*

利用坐标卡的c1■相容性，此方程与坐标卡的选取无关.就是说，如 果取另一坐标卡*(V仲HpM* V，则只须把上面微分方程和初值条 件中的*<P°* a换成0。a即可.

利用Banach空间中微分方程初值问题解的存在和唯一性定 理，可以得到

定理B. 16 设?€ l.jgjf过力的极大流

是存在且唯一的. I

由附注B. 14可知，求? & 过户的流,就是在M 上找一条过\*的曲线，使它在每一点的切向量刚好与S在该点给 出的切向量相吻合，这与欧氏空间中向量场的流的概念相一致.

附注B. 17 如果Af = U是Banach空间B的一个开子集，则

u上的向量场就是一个映射x：i/f a x 8,它具有如下形式

X(H)=(工 VGc)).

我们称V是X的主部(principal part).显然,我们可以把X与V等 同，简单地认为向量场X就是映射们*U^B.*此时,如果曲线吋) 满足微分方程

Da(f) =U(g),

则它就是*X*的流(在定义B. 15中仲=id).

如果M是一个U微分流形，(U,p)是它的「个坐标卡，*啊U* fiy’UB,厕M上的向量场X诱导出8上的一个向量场.

云=7V・X(?ri(z)),

它称为X的局部表示.

设是一曲线,。是亲的主部，如果

D5(r) =V(«(0),

其中*三=罕5、*则a就是M上的积分曲线.

特别地，当B = R”时,京的主部0具有形式(叭。),…， 吃(“))，z£R".设曲线a(£)的局部表示为(勺《),…,a”Q)),则 它成为积分曲线的条件是

因此可以说，对于«维流形上的向量场而言,其积分曲线的局部表 示满足R"中的微分方程组.

沒入与浸盖

隐函数定理是微分学中最重要的定理之一•设f R”是 a’的.当*m = n*并且导算于D/(xd)是单、满映射时J给出x0的邻 域到K（女）的某邻域之间的微分同胚.,如果D/（x0）仅是单射（设 *m ＜*沥,则存在R”中/（x0）附近的局部微分同胚幻使得在％点 附近有

*g ° f:*（命,...,办）H\* （气,…,％,。,•••,（））,

这在微分几何中称为1局部）正则浸入.另一方面，若W（他）仅是 一个满射（设*m＞n）,*则存在R"中归点附近的局部微分同胚矿使 在玄点附近有

*f°h-*（气，…,弓，％+1，.“,工京 i （而,…,不）， 这称为（局部）正则浸盖（投影）.

容易把隐函数定理推广到Banach空间.现在我们把上面有关 技入和複盖的结果就Banach空间的一般情形给岀证明，然后再通 过坐标卡推广到微分流形上，并由此得到构造（或判断）子流形的 方法.对于无穷维的Banach空间，仅有D/（x）的单射（或满射）＞ ' 件是不够的，要附加适当的可裂性条件.首先给出下面的..代"「

定义B. 18设E是Banach空间，田是E的闭子空间.妬棄容 在*E*的团子空间码，使E = g £爲,则称瓦是可裂的（split）.

附注B.19如果E是有限维的,则它的任何子空间都是闭且 可裂的；如果日是Hilbert空间,G匚E是闭子空间，则E = G® G丄，因此Hilbert空间的闭子空间都是可裂的.但存在无限维 Banach空间，它有不可裂的闭子空间.一般而言,E的闭子空间*F* 可裂的充要条件是；寻*P3* （E,E）,使= 且「=脸£ *E\Pe=^e}.*

定理B.20 （局部浸入:定理） 设E,F是Banach空间*，八UU EfF*是仃映射*,r^l,uaEU.*设”g），Ef F是单射，并且 D/（«o）的值域码=烫是闭且可裂的.从而存在闭子空 间 *F1 U F,F* =呂 £ Fr.（当 E = R”,F = R"时，只须设 rank（D/■（阳））=m.）则存在开集 VCF （/（«„） € V）和 归 UE W码,以及仃微分同胚？＞ V-＞ W,使得（卩。*f）（e）* = （e,0）,Y e

£ V (1 (E X {0}) UE.

证明 由条件可知，线性映射D/(«o )是£到码= 阕(”(％)) UF的代数与拓扑同构.令

g： U X 码 U E X 卩2 f F = F1 ㊉码，g(”,t>) = /(a) + v, 其中*ueu,ve Fs.*注意

D/(u0) 0 '

DggO) = „ ,

(J

是*U XF2^Ft®Ft^F*的U微分同胚’由隐函数定理,存在开 集卩,归,使(#。，0)e 及仃微分

同胚 *f>：V* f W，P\_, = *g\w.*因此，v (e,0) e v, (p • y)(e)= 3。g)(e,O) — (e,0). I

定理B.21 (局部浸盖定理)设E,F为Banach空间*,f>U(Z* Ef F为(7映射,r>l,«0 e tA设D/(m0)是满射，并且战= ker(D/(Ko))是可裂的,E = & $ Ez(当 E = R-,F = R"时，只须 设rank(D/m))=如)，则存在开子集U和V,% £17, UC7,VU F£E，以及(7微分同胚*岫 f邛*使得(«, u) e V.

证明定义映射

g： t7 C £j ® E2 -\* F® E2, g(“i,“z)— (/(al,tta),wz). 因此

(Dj/Cwo) D2/(a0)'

Dg(uo,O)= ,

。 j£2

故Dg(Mo,0)eGX(£,K®Ea),由隐函数定理，存在开集V,

成UC7,VUF㊉旦，以及仃微分同胚SV-\*U，，使得<!>-' *—g\v-*因此

a,勿=(g。,)(心力=(/w«tv),^3(w,v)),

其中。■山X处，即间(心a) = 5 *e Q* 0)(14加)=\*・I

现在把上面的结果推广到微分流形之间的映射*f'M f N.* 注意及*Tm(N)*都是Banach空间，因此下面的可裂性条 件是合理的.

定义B.22设M和N是Banach流形*J、MfN*是C7映射. 称/■在*PEM^C-*局部浸入，如果Tp/■是单射，而且它的象集在 *T}WN*中是闭的可裂集.称；'在*P&M*是b局部浸盖，如果 是满射，而且ker(Tyf)作为丁双 的闭子空间是可裂的.在流形 *M*上每一点都是C局部浸入(局部浸盖)的映射称为*C*浸入(浸 盖).

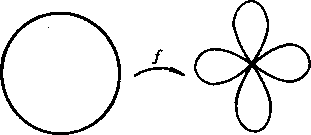
定理B.23设是Banach流形,*f：M^N*是仃映射(r > 1),则下列三种陈述是等价的：

1. /在，EM是局部浸入；
2. 存在坐标卡*(U，G兩，P £ U ,fUV冷U fU、 5Vfir* x u',且K3)=0,使得 o。須。0T：。'—成 x V’ 是 包含映射Pi 3,。)；

⑶ 存在少的邻域U,使得是N中的子流形，且flu是 U到/W)的微分同胚.

证明(1)与(2)的等价性可由定理B.20得到.(2)与(3)的 等价性可由子流形定义A.9得到，注意V是N中的开集.|

附注B.24定理B.23说明，若在力是局部浸入,则存在/> 的邻域U,使*f(U)*是*N*中的子流形.要特别注意这个结论的局部 性.卽使須在M的每一点都是局部接入,也不能断言/'(M)是N 的子流形.事实上，浸入的局部单射性不能保证整体的单射性. 例如，由平面极坐标方程r = COS2W定义的映射f IT是一个 浸入，但不是单射，且/(51)不是W的子流形(见图1).即使浸入 *『MfN*在整体上是单射，仍不足以保证須(M)是N的子流形. 一个反例是由极坐标方程*r* = sin田定义的映射/■ (0,2^) U R f R2(见图2).上面两例中的问题都出在W原点附近的邻域内、



图L 图2

利用須从M诱导的拓扑与7XM)作为晔的子集而获得的拓 扑是不同的.在前一种拓扑下,/"(M)作成一微分流形，因而有时 称单射溪入的象集\_f€M)是一个漫入子流形;但是在后一种拓扑 下，它可能不是*N*的子流形.此时M与*HMK*作为*N*的子空间) 不同胚.这就引出了下面的

定义B.25设*北M-N*是寝入，并且是M到/'(M)(在N的 相关拓扑下)的同胚，则称它是一个嵌入.此时，称是N的 嵌入子流孵.

容易证明下面的

定SB. 26 设*戶MfN*是单值的浸入，若它是*M*到*f(M)* 开映射(或闭映射)，则■/是一个嵌入.I

定理B. 27 设是微分流形*,f^M -> N*是仃映射*,q € N,S* =广W).若■/■在S上每一点都是局部浸盖，则S是M中的 一个仃子流形.

证明 由定理B.21及子流形的定义即得.**I**

附注B.28 设是仃映射.点*qgN*称为f的正则 值，如果*Y作广5项*是满射且其核在与M中是可裂的.记 为■为•/的一切正则值的集合,则定理B. 27有如下等价的陈述：

"定理B.29 若则广】(q)是M中的子流形.|

在讨论一个映射的水平集时，这种说法是方便的.

附录**C Thom**横截定理

在寻找结构不稳定向量场的普适开折时，有时要确定开折中 的通有族（generic family）,或称为一般族，非退化族.为此，需要利 用Thom横截定理（它是从著名的Sard定理导出的）,事实上，为了 把无穷维问题简化到有穷维，我们需要的是jet形式的Thom横截 定理.因此，我们先建立映射空间中的拓扑,再引进成流形，最后 介绍Thom橫截定理.

映射空间的拓扑 '

记（7（M,N）为*C*微分流形M与N之间的（7映射所成的集 合.我们在*C\M,N）*中引迸拓扑,使它成为拓扑空间.

定义C.1 （弱拓扑，即compact-open拓扑） 设/' £ C*（.M, N）,* （t/瘁）和（丫仲）分别是M和N的容许坐标卡;令*KUU*是紧 集，使*f（K） U* 丫;令e为正实数.定义弱子基邻域

彳（m7,9>）,W，0）,K,e） = {g £ （7（5/0） |g（K） U U,

sup ||。（。° *f*。pT）（z） —。（4&。*g °* < e}.

C7M,N）中的U弱拓扑就是由这种形式的集合所生成的.任何 包含有限个这种集合交集的集合都是*f*的一个邻城.所得的拓扑 空间记为

定义C.2 （强拓扑，或fine拓扑,WHiney拓扑）. 令\* = {（亿,铀）|a任4}是M的一个局部有限坐标系，即*M*的每一点都 有一个邻域,它只与有限个相交;记火=A},K.U 亿是M上的紧集;图={（皿\*）愣£ B}是N的坐标系.对任一 正数集合£ = （&a|a£ A},定义

，（儿岳,Q - {g£（T（Af,N）|g（KQU\*（小

sup ID0S）° *f* 0 妃）（Z）

*—成由3 ° g "* Q（Z）II <£a. V a e *A}, cxm,n）*上的r强拓扑就是以上面类型的集合为拓扑基（开集） 所生成的.记所得的拓扑空间为*CslM'N）.*

附注C3上面我们假设r<8.为了定义C$（Af,N）（或 C；W,N））,只须把包含映射 *c8（m,ns（m,n）（*或 *N机*诱导的拓扑对所有有限的r合起来即得.

附注C.4 q（Af,N）有很好的性质.例如，它可以赋予完备 的度量，并有可数基’当*M*为紧流形时*与皿M,N）* 一致,它们是Banach空间.当肱不紧时，弱拓扑不能很好地控制 U映射在“无穷远”的性质，强拓扑就成为需要的了’注意，在M 非紧时，强拓扑在任一点都没有可数基，因而它不可度量化.但 是，在强拓扑下応（M,N）的任一弱闭子空间都是Baim空间（剩余 集在其中稠密）.这对研究通有性质是很重要的.如无特别声明， 下文中都取强拓扑,并把応（M,N）简记为C7M,N）.

下面几个定理反映了 *CXM’N）*中函数类的性质.

定3 C.5 设为U微分流形，1 M s M+ 8, ICrCs.dimM <+oo.则 G\M,N ）在 ）中稠密,其中

*U CXM,N）*表示如下任何一个映射类：

微分同胚、嵌入、闭嵌入、浸入、浸盖、真映射（即紧集的原象是 紧集）. I

定理C.6 G）设则任何U镰分流形U微分同 胚于一个C"■微分流形’

（2）设lWrVsW+8,若两个C•微分流形（7微分同胚，则 它们C1微分同胚.|

定理C.7 （Whitney定理）设lW『W+8,则任何n维的C 微分流形都仃微分同胚于RE'的一个闭子流形.I

附注G8 从定理C6可知，如果把所论流形的光滑性提高 到C",并不是一个很严重的事情.今后我们将经常作这样的假定. 虽然》维微分流形是我维欧氏空间非常一般的推广,但定理C 7说 明,它反过来又可作为嵌入子流形放到R2"+1维欧氏空间中.

射式W）流形

设是U微分流形.我们把三元组*愆,了,U）*的等价类母， *f,U\*称为从肱到*N*的一个r-jet,其中。U *M*是开集,h 6 *U ,f* 6 *C\U、N机*等价关系*（.x,f,U\*〜S' *,f ,U'\*是指注=/ ,并 存在M与N中的容许坐标卡（W,仞和*（V,<!>-）,*使WUU （~1 t? UM,并且局部表示

*>p - £ \* p'* 与。。尹。广：Wf /（iy）n *f*（W） 在z的前r阶（包括0阶）导数均相同.

显然，上面的定义与坐标卡的选取无关，从而也与。的选取无 关.因此记

称*徵*为映射r*在工*点的r\*，并称Z为起点，■/■»）为终点.

记*尸（M,N）*为全体从肱到*N*的r-jet之集合’我们把*Jr（M,* N）中起点在x的子集记为终点在y的子集记为 *J試M,N）\**而把再）与*J^M,N*）的交集记为

现在考虑一个特殊情形,M = Rm（N = R".此时简记

J（Rm,Rn） =

设uuRm是开集，/er（u,RB）,则f在点的广阶丁卽辰多项 式就给出/■在#点的。jet 一种自然的表示.这个从R"劉R"的多 项式映射可由『在纟点直到r阶（包括。阶）导算子所唯一决定.这 些导算子合起来,属于向量空间

FGng） = Rn X %R七R\*），

\*=1

其中Sf \*（Rra,R"）表示从R™到RK的龙重对称线性映射所成的向 量空间.这说明，对PGmm）中的每一个元素，都有且仅有一个 中的元素与之对应，从而有下面的等同关系，

— P'S,”），

= R™ X PXwig）.

因此，当r有限时，尸（成是有限维的向量空间’如果UUR七V U R"都是开集，则尸（U,V）是按S,”）的开子集.

现.在设*M, N*分别是皿维和”维流形.若（U ,會），（V, °）分别是 上的容许坐标卡，则

E &/■ h\* 疗Cr）（少。/"。广）

就给出了尸（U,V） f尸（戦。）,択丫））的单、满映射,从上面的讨 论中得知是jr（m,”）中的开集，而jr（m两 与欧 氏空间同构’所以（8,尸（U,矿））就是尸3f,N）的一个坐标卡’这 样，就可以从的tT坐枚系导出*Jr（.M,N）*的C。坐标系’当

是*C+i*流形时，尸（M,M）是一个*甘*微分流形,称为从*M*到 N的射式（jet）流形.

Thom横截定理

定义C9线性空间Z的两个线性子空间X与Y称为是横栽 的，如果它们之和是整个空间*,L = X + Y.*

由于微分流形的切空间是线性空间，而切映射是切空间之间 的映射，所以可以定义两个子流形的横截性和流形间的映射与象 空间中某子流形的横截性.

定义C. 10 设*A,B*是光滑Banach流形*M*的两个光滑子流 形.称于流形A与8横截，如果A PI B = 0,或者V *pEAdB, TPA*与*TpB*在*TpM*中（在定义C. 9的意义下）横截.

定义C.11设M,N是光滑的Banach流形M是N的光滑子 流形.称C"(r>l)映射*f：MfN在*点p £ M与A横截，如果 *面 & A,*或者/(/>) 6 A,并且满足下面的条件

• (1) *(Tpf'XTpM) + TfwA = Tfs>N,而*且

(2) *TfwA* 的原象*.(Tf^A)*在 *TPM* 中可裂. 在每一点都与A横截的映射f,称为与子流彩A■檎截.

注意，当M是Hilbert流形(特别地，是有限维流形)时，可裂 性条件(2)是自然成立的(见附注B. 20).

例C.12 (1)如果定JtC.il中子流形4上的每一点都是y 的正则值(见附注B. 28)，则*f与A*横截.

(2)如果 Af,N 是有穷维的，且 dim(M) 4-dini(^)<dimN, 则；■与A横截意味着*f(.M) CIA = 0.*例如，把R1嵌入R5的映 射与R中的曲线*7*横截K嵌入曲线与7在It，中无公共点’

由于横截相交性与坐标卡的选取无关,所以当*M与N*都为有 穷维流形时，下面的结果显然成立.

定理C. 13设M和N分别为林维和孙维的C"微分流形， *f N*是可微映射，A是N的余维为5的*C~*子流形.设*M*在 血点附近有局部坐标扌，…，漬，*N在fg* 点附近有局部坐标 护,…，俨.如果在『3。)的某邻域U内，点集A Ci U有表达式尸 =…=尸=0,则映射『与子流形A横截的充分必要条件是 (尊| 在⑶点的秩为s. I

下面设M和N是有限维光滑微分流形，且是第二可数的，人 是N的光滑子流形，记

= j/er(A/,N)|r>l,/ 与 A 横截｝,

虫Sard定理和附注C, 4,可以推出下面的结果.

定理C. 14 (Thom横截定理)*W(M,N；A*)是*C^M’N*)中 的剩余集(即可数个开調集的交集),从而在*UVM'N)*中稠密.如

果厶是闭子流形，则它还是开的.I

证明可参考［Hir,pp74 - 77丄这个定理说明，若厶是M的闭 子流形，则中与*A*不横截的映射可以在任意小扰动下 成为横截，而原来横截的映射仍可保持横截,因此，利用橫截性可 以得出CTW'N）中的通有族，又称为一般族.

Thom横截定理可以推广到jet形式.这样就可把无限维空间 中的通有性问题，转化到有限维空间*mM,N）*中的横 截问题.

定理C. 15 （Thom横截定理的jet形式） 设*M,N是无*边界 的有限维光滑流形,A是的L子流形,1Mr Vs W 8. 则映射集合

*事=*{/eCCA/.JOI//与 A 横截}

在C\M,N）中是剩余集，从而是稠密集.如果4是团的，则質在 中还是开的.|

证明可见［Hir,PP80 一 811下面的定理对于确定子流形的余 维数是重要的.

定理C.16设*f'MfN*是5映射,A是N的子流形.如果 f与A横截，则尸'（4）是M的子流形.如果A在N中有有限余 维，则

codim（yTG4）） = codim（A）. |

特别地，当是浸盖时,条件勺'与4横截”总是溝足 的;而投影是特殊的浸盖.

参考文献

[Al] Arnold V I. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1983

[A2] Arnold V L Ten problems. Adv. in Sov. Math. 1990(1): 1—8\* 数学 译林，1993(4):257-261

CAAIS]Afraimovich V *S,* Arnold V I, H如shenko Yu Sf Sil^iikov L P・ Bi­furcation Theoryj Dynamical Systems V . New York： Springer-Ver­lag, 1988

[ALGM] Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I It Maier A G. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane- New York( Israel Program for Sci. Transl. , Wiley« 1973

[AMR] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. London Amsterdam — Tokyo； Addison-Wesley Publishing Company, Inc. , 1983

[Ba] Bautin N N. On the number of limit cycles which appear with variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type. Math. Sb. 1952, 30： 181 — 196 (in Russian)i AMS Trans. Series 1962, 5： 396-413 (in English)

[BC1] Benedicks M, Carleson L. On iteration of 1 — « x2 on ( — 1,1). Ann. Math. 1985, 122： 1-25

[BC2] . The dynamics of the Hfenon map. Ann Math. 1991» 133： 73 —

169

[Be] EeJIHHUKHft r P・ HopMaJILHHe gpMbh I HBapMaHMH H jTOWIbHblC OTOGpaJKOHMfi- Khcbi Haykosa AyMKa, 1979

[BL] Bonin G, Legault J. Comparision de la methode des eonstantes de Lia­punov et la bifurcation de Hopf. Canad. Math. Bulk 1988, 31(2)： 200 -209

[Bol] Budanov R T. Versal deformations of a singular point of a vector field

on the plane in the case of zero eigenvalues. Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2： 37—65 (in Russian) *i* Sei. Math. Sov. 1981, 1*1* 389—421 (in English)

[Bo2] ・ Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields.

Trudy Sem. Petrovsk. 1976, 2； 23 — 35 Gn Russain)i Sei. Math. Sov. 1981, *lt* 373-387 (in English)

1. 陈翔炎.含参数微分方程的周期僻与极限环.教学学报，1963, 13(4)： 607 — 609

[Cyl]曹永罗.关于非双曲奇异吸引子.北京大学博士论文，1994

[Cy2] Cao Yongluo. Strange attractor of H^non map and its basin. Scientia Sinica (Series A), 1995, 3839-35

[CH] Chow Shui-Nee, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory. New York： Springer-Verlag, 1982

[CLW] Chow Shui-Nee< Li Chengzhi, Wang Duo. Normal Forms and Bifur­cation of Planar Vector Fields. New Yorkt Cambridge University Press, 1994

[CM]蔡燧林,马晖.广义Lizard方程的奇点的中心焦点判定问题.浙江大 学学报.1991, 25(4)： 562-589

[Cs]蔡燧林.二次系统研究近况.数学遂展，1989, 18(1)： 5-21

[CS] Cushman R, Sanders J. A codimension two bifurcation with a third or­der Picard-Fuchs equation. J・Diff・Eq. 1985, 59： 243 — 256

[CW]陈兰嬴，王明二次彼分系统极限芥的相对位置和数目.败学学 报，1979, 22(6)： 751-758

[CY]陈兰莉，叶奮谦.方程组等=-¥ + &r + ZH，+ zy + p：,$=z的 极限环的唯一性.数学学报，1975, 18. 219-222

ECZ]蔡燧林，张平光.二次系统极限环的唯一性.高校应用敛学学报， 1991, 6(3)： 450-461

1. Dulac H・ Sur ks cycles limites. Bull. Soc・ Math. Fr. 1923 ・ 511 45 — 188

[DER] Dumortier F • El Morsalani M, Rousseau C. Hilbert% 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics, to appear in

Nonlinearity

[DGZ] Drachman Bt van Gils S A, Zhang Zhi-Fen. Abelian integrals for quadratic vector fields. J. Reine Angew. Math. 1987, 3821 165—180

EDL] 丁同仁，李承治.常微分方程教程.北京：高等教育出版社，1991

[DLZ] Dumortier F, Li Chengzhi• Zhang Zhi-Fen. Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded hetroclinic loops. Preprint f 1996

[DRR1] Dumortier Ff Roussarie R, Rousseau C. Hilbert% 16th problem for quadratic vector fields, J. Diff・ Eq・ 1994, 1101 86—133

[DRR2] ・ Elementary graphics of cyclicity one and two. Nonlinearity,

1994, *h* 86-133

[DRS1] Dumortier Ff Roussarie R, Sotomayor J. Generic 3-parameter family of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. Ergodic Theory and Dy­namical Systems 1987, 7: 375—413

[DRS2] ・ Generic 3-parameter family o£ planar vector fields T unfolding of

saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts. Lec­ture Notes in Math. 1991\* 1480： 1—164

[DZ]杜乃林，曾宪穢・计算焦点畳的一类通推公式.科学通报，1994, 39 (19)： 1742-1744

[E ] Ecalle E J・ Finitude des cycles limites et acc616ro-sommation de ^application de re tour. Lecture Notes in Math. 1990・ 14551 74 — 159

[EZ] Edmunds D E t Zheng Z. On the stable periodic orbits of regular maps on a completely ordered invariant set. Preprint

[F]泻贝叶.临界情况下奇环的稿定性.数学学报，1990, 33(1)： 113-134 [FLLL] Farr W W, Li Chengzhi9 Labouriau I St Langford W F. Degenerete

Hopf bifurcation formulas and Hilbert七 16th problem. SIAM Math. Anal. 1989, 20： 13-30

[GH] Guckenheimer J•, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York： Springer-Verlag v 1983

[GaHo] Gavrilov L« Horoaov E・ Limit cycles and zero of Abelian integrals satisfying third order Picard-Fuchs equations. Lecture Notes in

Math. 1990, 1455： 160-196

[Go] Pomosob E IL 9KBMBaJieHTHocTE ceMeAcTB 4n44»eoMOp^x\*MOB KaHeMHoro K/iacca rjtaflKocTw- BecTH. XapbKOB. yw-Ta- Cep. Max. -MaT, 1976, 134(41)、95— 104

[Gw]高维新.僻析理论讲义(北京大学数学系用).

1. Hilbert H D. M&thmatische Probleme (lecture). The second Internation­al Congress of Mathematicians, Paris 1900» Gottinger Nachrichtenj 1900： 253-297

[Ha] Hayashi S. On the solution of Cl stability conjecture for flows. Preprint. [HI] Horozov E, Uiev I D. On saddle-loop bifurcations of limit cycles in per­turbations o£ quadratic Hamiltonian systems. J. Diff・ Eq. 1994, 113 (1)： 84-105

[Hir] Hirsch M W. Differential Topology. New York Heidelberg Berlin： Springer-V^rlag, 1976

[HLZ]韩茂安，罗定军，朱幫明.奇闭轨分支出极限环的唯一性(I *)、5).* 数学学报，1992, 35(4)： 541-548、35(5), 673-684

[Hm]韩茂安.周期扰动系统的不变环面与亚调和解的分支.中国科学(A 辑)，1994(11), 1152-1160

[Ho] Horozov E. Versal deformations of equivariant vector fields in the case of symmetry of order 2 and 3. Trans, of Petrov ski Seminar 1979, 5*1* 163 \_192 (in Russian)

[Hw] Huang Wenzao. The bifurcation theory for nonlinear equations\* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. VoL 109♦ New York, Marcel Dekber. INC, 1987, 249—260.

[HWW] Huang Qichangt Wei Junjie. Wu Ji&ngbong. Hopf bifurcations oi some second-order FDEs with infinite delay and their applications. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(4)：

[Hu] Hu Sen. A. proof of the C stability conjecture for 3-dimensional flows. Trans. AMS. 1994.

[HZ]韩茂安.朱德明.微分方程分支理论.北京:煤炭工业出版社，1994

1. Il\eshenko Yu S. Finiteness theorems for limit cycles. Russian Math. Surveys 1990, 401 143-200

[IL] UVashenko Yu S, Li Weigu. Nolocal Bifurcationf to be published by AMS

[IY] UVashenko Yu S, Yakovenko S. Finitely smooth normal forms of local families diffeomorphisms and vector fields. Russian Math. Surveys 1991, 46： 1-43

[Jajjakobson M V. Absolutely continuous invariant measure for one-parame­ter family of one-dimensional map- Comm. Math. Phys. 1981\* 81: 39 — *88*

[Jo] Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual generalized hoinuclinic bifurcation. SIAM J. Math. 1988. 48： 481—496

[K] Khovansky A G・ Real analytic manifolds with finiteness properties and complex Abelian integrals. Funct. Anal. Appl. 1984, 18： 119—128

[LI]廖山涛.微分动力系统的建性理论.北京，科学出版社，1992

[L2] Liao Shantao. Obstruction sets, Minimal rambling sets and their applica­tions. In： Oiinese Mathematics into 21st Century. Peking University Press, 1992.

[Lc]李承治.关于平面二次系统的两个向風 中国科学(A1»)・1982Q2), 1087-1096

[LbZ] Li Bao-Yi・ Zhang Zhi-Fen. A note on a result of G・ S・ Petrov about the weakened 16th Hilbert problem. JMAA 1995, 190： 489^516

[LH]李继彬，黄其明.平面三次微分系统的极限环复眼分支.数学年刊(B 辑)，1987, 8； 391-403

[LHZ]罗定军，韩茂安.朱德明.奇闭轨分支出极限环的唯一性(I ).数学 学报，1992, *35(3); 407-417*

[LR1] Li Chengzhi, Rousseau C. A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation t the cusp of order 4. J. Diff. Eq. 1989, 79： 132-167

[LR2] ・ Codimension *2* symmetric homoclinic bifurcation. Cam J.

Math. 1990, 42： 191 一212

[Lw] Li Weigu. The bifurcation of "eight figure" of separatrix of saddle with zero saddle value in the plane» Preprint of Peking University f Research Report f No 46, 1995

[Lz]梁肇军.多项式律分系统全简分析导引.武汉，华中师范大学出版社. 1989

[LZ] Li Chengzhi, Zhang Zhi-Fen. A criterion for determing the monotonici­ty of the ratio of two Abelian integrals. J. Diff. Eq・,1996, 124$ 407— 424

[M] MaM R・ A proof of the C1 stability conjecture. Inst. Hautes. Sci・ Publ. Math. 1987- 66, 161-210

[Maj Mardesic P. The Number of limit cycles of polynomial deformations of a Hamiltonian vector field. Ergod. Th・ & Dynam. Sys. , 1990, 10； 523 \_529

[Mo] Mourtada A. Degenerate and non-trivial hyperbolic polycycles with two vertices. J・ Diff. Eq. , 1994, 113： 68—83

[MV] Mora L, Viana L・ Abundance of strange attractor. Acta. Math. 1993, 170, 1-63

[Ma]马知恩.种群生态学的数学建模与研究.合肥，安律教育出版社，1996 [NS] Nowicki T, Strien V S. Absolutely continuous invariant measures forC\* unimodal maps satisfying the Collet-Eckmann condition- Inv・ Math. 1988, 93： 619—635

[Pl] Petrov G S・ Number of zeros of complete elliptic integrah. Funct. Anal. AppL 1988. 18, 148—149

[P2] ・ The Chebyshev property of elliptic integrals. Funct. Anah AppL

1988. 22： 72-73

[Pa] Palis J, A proof of the *Q-* stability conjecture. Inst, Hautes. Sci. Pubh Math. 1987, 66, 211-218

[Pon] nOHTTJITHH JI Q O flMHlMHTeCKHX CHCTeMaX, GjIMSKIDC K EMHJTVTOHODbJM. ^ypHUi SKcnepHMeHTLrrbHoA h TeopeTHwecKofi <t）HamcK, 1934\* 4： 883 — 885

[PT] Palis J, Taken，F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at ho­moclinic bifurcations. Cambridge University Press« 1992

[Q]秦元«h律分方程所定义的积分曲线，上、下册,北京\*科学出版社, 1956C959

[QL]秦元勛，刘尊全.律分方程公式的机器推导（■）・科学通报，1981,7： 388-391

[Rl] Roussarie R. Weak and continuous equivahnces for families of line dif- feomorphisms. In ^Dynamical Systems and Bifurcation Theory\*, Cama­cho, Pacifico ed.*，*Longman, Scientific and Technical, Pitman Research Notes in Math. Series 160, 1987\* 377-385

[R2] ■ On the number of limit cycles which appear by perturbation of

separatrix loop of phnar vector fields, BoL Soc・ Bras. Mat. 1986, 17: 67-101

[Rc] Rousseau C- Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field with 7-jet C™- equivalent to + (± J：3 ± *冨・* Lecture Notes in Math. 1989, 1455$ 334—354

[RS] Rousseau C； Schlotniuk D. Generalized Hopf bifurcations and applica­tions to planar quadratic systems. Ann. Polon・ Math. 1988, 49\* 1 — 16

[RT] Ruelle D, Tokens F. On the nature of turbulence. Common. Math. Phys. 1971. 20： 167-192

[S] Singer D・ Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. SIAM Ap- pL Math. 1978, 35： 260-267

[Sh] Shoshitaishvili A N・ Bifurcation of topok^ical type of singular points of parameterized vector fields. Funct. Anal. AppL 1972(2): 169 — 170

[Si] Sibirskii K S. On the number of limit cycles in a neighborhood of singular points. Diff. Eq. 1965, 11 36—47 (in Russian)

[Sij] Sijbrand J. Properties of center manifold亀 Trans. AMS 1985, 289； 431 -469

[Sill] Sil^iikov L P. On a Poincart-Birkhoff problem. Math USSR Sb. 3 i 353-371 .

[Sil2] . On the generation of a periodic motion from a trajectory doubly

asymptotic to an eqilibrium state of saddle type. Math USSR Sb 1968, 6： 428-438

[Sil 3]— ・ A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddh-focus type. Math USSR Sb 1970. 10, 91-102

[SJ] Shen Jaqi, Jing Zujun. A new detecting method of conditions for the ex-

istence of Hopf bifurcation. In "Dynamical Systems\* Nankai Series in Pure, Apl. Math, and Theor・ Phy. , Vol 4, eds. S\*T Liao,T-R Ding and Y-Q Ye, World Scientific Publishing, Singapore» 1993$ 188—203 [Sm] Smale S. Dynamics retrospective, great problems, attempts that failed.

Nonlinear Science, The Next Decade.见"数学译林”，动力系统学的回 顾；宣大问题■失败的尝试.1993(4),262-269”

[%]史松龄.平面二次系统存在四个极限环的具体例子.中国科学，1979

(11), 1051-1056

[T] Takens F. Forced oscillations and bifurcations: Applications of global analysis I . In Commun. Math. Vol 3 Inst. Rtjksuniv. Utrecht. , 1974 [TTY] Thieullen P, Tresser C, Young L-S・ Positive Liapunov exponent for gereric one-parameter families of unimodal maps. Preprint

1. Vanderbauwhede A. Center manifold私 normal forms and elementary bi­furcations. Tn Dynamics Reported, Vol 2, ed& U. Kirchgraber and O・ Walther, New York. Wiley, 1989, 89-169

[V&] Varchenko A N. Estimate of the number of zeros of an Abelian integral depending on a parameter and limt cycles. Funct. AnaL AppL 1984, 18: 98-108

[W] Wen Lan, On the C stability conjecture for flows. ]. Diff. Eq- 1996, 129(2)： 334—357

[Wd] Wang Duo- An introduction to the normal form theory of odinary dif­ferential equations. Advances in Math. 1990, 19(1)$ 38 — 71

[Wil] Wiggins S・ Introduction to Applied Nonlinear Dynamic成 Systems and Chaos. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag,1990

[Wi2] , Global Bifurcations and Chaos T Analytical Methods. New York

Berlin Heidelberg ■ Springer-Verlag»198 8

[Wl]王兰宇.多峰映射的动力学.北京大学博士论文.1996

1. 肖冬梅.一类余维3鞍点型平面向員场的分支，中国科学(A辑).1993

(3)； 252——262

LY1]叶彦谦等.极限环论■第二版.上海:上海科学技术出版社，1984 [Y2]叶彦3L多项式微分系统定性理论.上海，上梅科学技术出版社，1995 [Yq] Yoccoz J C. Recent developments in dynamics. Plenary Address of the

TCM 勺4

[YY]杨信安，叶彦谦.方程糸=-】 + &■ + #+玲+陌，咨=工的 极限环的唯一性.福州大学学报，1978(2)： 122-127

[Z] Zheng Zhiming. On the abundance of chaotic behavior for generic one-pa­rameter families of maps. Acta Math- Sinica, 1996(12)； 398—412

[Zdl] Zhu Deming, Melnikov vector and heteroclinic manifolds. Science tn China, Ser.A, 1994. 37(6), 673-682.

[Zd2] ・ Melnikov-type vectors and principal normals. Science in China,

Se“A, 1994, 37(7)； 814-822.

[Zd3] . Transversal hetroclinic orbits in general degenerate cases. Science

in China, Sen A, 1996, 39(2)： U2-12L

EZDHD]张芷芬.丁同仁,黄文灶.董镇喜.微分方程定性理论.北京：科学 出版社.1985

:Zg]张恭庆.临界点理论及其应用.上海，上海科学技术出版社.1986

[Zj]张嫦炎.常微分方程几何理论与分支问庖(修订本).北京，北京大学出 版社，1987

[ZJ] Zeng Xianwu, Jing Zujun, Monotonicity and critical points of period.

Prepress in Natural Science, 1996, 6(4) t 401 — 407

[ZQ]张锦炎，钱敏.微分动力系统导引.北京，北京大学出版社.1991

[Zol] Zoladek H・ On the versality of certain family o£ vector fields on the plane. Math. USSR Sb. 1984, 48： 463-492

[Zo2] ・ Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to

axes. J. Diff, Eq. 1987 ・ 671 1 — 55

[N]涅梅斯基B B.四十年来的苏联数学(1917-1957),常做分方程部分. 饶生忠译.北京:科学出版社，I960

[Zzfl] Zhang Zhi-fen・ On the uniqueness of the limit cycles of some nonlinear oscillation equations. Doki. Acad. Nauk SSSR» 1958, 119$ 659 — 662 (in Russian )

[Zzf2] . Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized

Li&nard equations. Applicable Analysis, 1986, 23$ 63—67.

囱晩]张筑生.微分动力系统原理.北京，科学出版社,1987

中文词条按首字的笔画排列,西文开头的词条按字母顺序排列.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| — | 画 | 五 |  |
| 子流形 | 7,46-50,286 | 正规形 | 34,40 |
| 马蹄映射 | 170 | 正则奇点 | 117,118 |
| 马蹄存在定理 | 173 | 正则映射族 | 281 |
| 四 | 19 | 对参数一致的Hopf分岔定理 82 | |
| 双曲奇点 | 4 | 可扰动参数 | 282 |
| 双曲闭轨 | 4 | 可裂 | 297 |
| 双曲不动点定理 | 160 | 边界的水平部分 | 159,198,200 |
| 分岔 | 9 | 边界的垂直部分 | 159,198,200 |
| 分岔集 | 9 | 边界条件 | 160 |
| 分宿值 | 9 | 主稳定方向 | 191 |
| 分岔图 | 19,47 | 六 | 19 |
| 分岔曲线 | 19 | 轨道 | 2,3.168 |
| 分宿方程 | 62,63 | 同宿轨 | 10 |
| 分岔函数 | 60,63 | 同宿点 | 168 |
| 分岔的余维 | 46 | 同宿分岔 | 15,85 |
| 无穷阶非共振 | 41 | 异宿轨 | 10,23,114 |
| 无限C水平曲线 | 159 | 异宿点 | 168 |
| 无限C垂直曲线 | 159 | 异宿分念 | 146 |
| 开折 | 44 | 共振 | 35.40 |
| 不徳定流形 | 7 | 共振多项式 | 36,40 |
| 切向童 | 290 | 闭轨分岔 | 64 |
| 切空间 | 290 | 曲线坐标 | 66 |
| 切丛 | 290 | 多重极限辞 | 68 |
| 切映射 | 291,292 | 后继函数 | 67,76,95 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 自由返回 | 254 | 典型族 | 228 |
| 有界返回 | . 255 | 九画 |  |
| 全局中心藏形 | 24 | 结构稳定 | 6,8 |
| 全局中心流形定理 | 23 | 矩阵表示法 | 38 |
| 全局分岔 | 10 | 相交条件 | 160 |
| 向量丛 | 288,289 | 复合映射的双曲性 | 178 |
| 纤维型 | 289 | 十画 |  |
| 七百 |  | 弱Hilbert第16问题 | 98—100,109 |
| 局部分岔 | 10 | 弱等价 | 45 |
| 局部中心流形 | 25 | 通有族 | *47* |
| 局部中心流形定理 | 25 | 倍周期分岔 | 16 |
| 局部族 | 44 | 高阶Melnikov函数 | *97* |
| 局部表示 | 286 | 积检形 | *287* |
| 更簪法 | 60 | 浸入 | 7.297 |
| 投影 | 288,289 | 浸盖 | 49,297 |
| 极限环 | 13,67 | +\_画 |  |
| 芽 | *44* |  |  |
|  |  | 移位映射 | 167 |
| 坐标卡 | 284 |  |  |
| 八画 |  | 符号动力系统 | 165 |
|  |  | +二画 |  |
| 周期点 | 4,168 |  |  |
| 周期執 | 168 | 普适开折 | 19.45 |
| 拓扑執道等价 | 5 | 焦点量 | 78 |
| 环 | 216 | 游荡环 | 217.227 |
| 非游荡集 | 4 | 超稳定周期轨道 | 243 |
| 非游荡环 | 217 | 遍历 | 271 |
| 非共振 | 41 | 揉序列 | 276 |
| 非本质自由返回 | 255 | 嵌入 | 300 |
| 单重极限环 | 68 | +三画 |  |
| 单峰映射 | 243 | 临界元 | 4 |
| 奇点分岔 | 58.64 | 强等价 | 45 |
| 细焦点 | *73* | 稠密轨道 | 169 |
| 细鞍点 | *93* | 辐角原理 | 124 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 微分流形 | 285 | ，次正规形 | 34 |
| 微分结构 | 285 | *i-jet* | 49 |
| 微分同胚 | 286 | *i*阶非共振 | 41 |
| 零截面 | 288,289 | 为参数开折 | 44 |
| 十四画 |  | 人阶Hopf分岔 | 73 |
| 稳定流形 | 7 | &阶细焦点 | 73 |
| 稳定周期轨道 | 243 | Lebesgue 测度 | *242* |
| 端点 | 158 | Lebesgue正桐点 | 282 |
| 十五画 |  | Lebesgue全稠点 | 282 |
| 鞍结点分岔 | 11 | Liapunov系数法 | 78.79 |
| 鞍点量 | 190,200 | Liapunov-Schmidt 方法 | 60.62,63 |
| 鞍焦点 | 43 | Maigrartge 定理 | 18 |
| 鞍焦环 | 216 | Melnikov 函数 | 90,97,109 |
| 横截 | 46,304 | Misiurewicz 条件 | 282 |
|  |  | Morse-Smale 向■场 | 8 |
| Abel 积分 99,101,106-109 | | Pichfork 分岔 | 11 |
| Banach流形 | 284 | Picard-Fuchs 方程 | 111 |
| Bogdanov-Takens *系统* | 47,109.130 | Pioneer^ 映射 | *5* |
| Birkhoff-Smale 定理 | 184 | Pioncare 分岔 | 94 |
| C水平曲线 | 158 | Hiss约化原理 | 27 |
| C垂直曲线 | 158 | 序单峰映射 | 244 |
| C水平带域 | 159 | Smale马歸 | 170 |
| C垂直帯城 | 159 | Schwartz 导数 | 243 |
| 6线性化 | 41,43 | Thom横检定理 | 305,306 |
| germ | 44 | （/%，㈤）矩形 | 159 |
| Fuchs 31 方程 | 118 | （相■四）矩形的高 | 162,163 |
| Hartman-Grobman 定理 | 6 | *g心*矩形的宽 | 162,163 |
| Hilbert第16问题 | 99 | （如代）锥形条件 | 159 |
| Hilbert-Arnold 问题 | 98 | 。爆炸 | 228 |
| Hopf分岔 | 13 |  |  |

责任编辑杨芝馨 封面设计季思九 责任绘囲都林

版式设计李承治

责任校对郑志明

李伟固

责任印制王彦

（京**）112**号

全书分为六章，各章内容分别是:基本槪念和准备知识，常见的局部与菲局都分 岔,几类余维2的平面同曩场分岔，双曲不动点及马蹄存在定理,空间中双曲戦点的同 宿分岔，实二次单峰映射族的吸引子.在訶三章的每章之后,部配备了一定致量的习 题.

本书可作为高等学校數学专业高年级本科生的选修课敎材，或相关专业研究生的 基BB课教材;也可供希望了解分岔理佬这门学科的学生、教师或科技人员作为参考书.

图书在版编目**（CIP）**数据

向量场的分岔理论基础/张芷芬等编.-北京:高等教

育出版社,1997

ISBN 7-04-006216-X

I.向… 口.张…皿.矢量场 0413.3

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第22634号

高等教育出版社出版  
北京沙摊后街55号  
邮政编码：100009 传真:64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷广印刷

\*■

开 ^ 850X 1168 1/32 印张 10.375 字敷 250 000

.1997年10月第I版 1997年10月第I次印刷

印数 0 001-1 715  
定价10.20元

凡购买高等敎育出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页等  
质量问题者，请与当地图书箫售部门联系调换

版权所有.不得間印



word版下载：[http://www.ixueshu.com](https://www.ixueshu.com/api/search/info/a3581eaaa81c186f5dde17aced68889d318947a18e7f9386.html?from=pdf&ck=PTW)

**阅读此文的还阅读了：**

[成人教育基础理论》](https://www.ixueshu.com/api/search/info/e4859208ffe87b819e1ea67c33098024318947a18e7f9386.html?from=pdf)

1. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f4038a7b5481c9869a2e9318947a18e7f9386.html?from=pdf)
2. [基于分岔理论的ERP系统实施研究](https://www.ixueshu.com/api/search/info/b182fab31af30eb17f8df8c9bbd94686318947a18e7f9386.html?from=pdf)
3. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/4e0dce557d53fd6c62e6d7200d0a1b1b318947a18e7f9386.html?from=pdf)
4. [论档案利用的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/9e34d7aacc0ae6f1bdcd58f11f2323ed318947a18e7f9386.html?from=pdf)
5. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/4e0dce557d53fd6c92ad11030a046b8e318947a18e7f9386.html?from=pdf)
6. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c52eb7b044f9bfffebc5f9849106cd8c318947a18e7f9386.html?from=pdf)
7. [一类平面五次向量场的奇点分岔](https://www.ixueshu.com/api/search/info/cbdda1caac6215c2ac042a3a6ba190b8318947a18e7f9386.html?from=pdf)
8. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f403810e5176e67e23e41318947a18e7f9386.html?from=pdf)
9. [太极拳的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/3310b82f4f180d58a9f4f7a2f01bcb7a318947a18e7f9386.html?from=pdf)
10. [论无因管理的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/850e6dc2463dc579569d00af3647e668318947a18e7f9386.html?from=pdf)
11. [浅论PBL的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/886e55bb4cce3afe356fb1aa078fbb30318947a18e7f9386.html?from=pdf)

[13.2 .基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/e27ba01d21ad780feb915770f9e138c2318947a18e7f9386.html?from=pdf)

1. [大跨分岔隧道分岔段施工方法研究](https://www.ixueshu.com/api/search/info/586c8b8cb957527f4217ce50d230be75318947a18e7f9386.html?from=pdf)
2. [色彩基础理论研究](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c52eb7b044f9bfffd7431665a395e8fe318947a18e7f9386.html?from=pdf)
3. [造林的理论基础探究](https://www.ixueshu.com/api/search/info/f21b7d05519c591128263b67cacd362b318947a18e7f9386.html?from=pdf)
4. [具有二重零特征根的平面向量场分岔分析](https://www.ixueshu.com/api/search/info/f4c5973e4e895581689cb14f1ffbe82d318947a18e7f9386.html?from=pdf)
5. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f4038470ba2d9bf5ba883318947a18e7f9386.html?from=pdf)
6. [论审计的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/707a828b3050b9d8fd0046410e8122da318947a18e7f9386.html?from=pdf)
7. [医事刑法的基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/93bfd537f66e154e277926f0b671e673318947a18e7f9386.html?from=pdf)
8. [论目录基础理论（下）](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c672b6fc6944f3b6cde7b4de16698ffa318947a18e7f9386.html?from=pdf)
9. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c52eb7b044f9bfffbc2f70f14dcf0071318947a18e7f9386.html?from=pdf)
10. [时间永远分岔通向无数的将来一一《小径分岔的花园》导读](https://www.ixueshu.com/api/search/info/af5a20653d8fe20f07f5b7915c1420f8318947a18e7f9386.html?from=pdf)
11. [法学基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/9ccb7b1c7a71e8ffdab3cbaa5a2b8ddc318947a18e7f9386.html?from=pdf)
12. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/a0d7bb67273064f3c86d800301c2d25b318947a18e7f9386.html?from=pdf)
13. [治脾法的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/f21b7d05519c5911fe94471af2c9af50318947a18e7f9386.html?from=pdf)
14. [单一税的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/e9d0c5b740fa83064c3efcd3a0e64b76318947a18e7f9386.html?from=pdf)
15. [浅析法治的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/6880d4cbb106d1b5118132ff7262483a318947a18e7f9386.html?from=pdf)
16. [推进实践基础上的理论创新](https://www.ixueshu.com/api/search/info/be6c862ae782c14116db0ecbc89e9363318947a18e7f9386.html?from=pdf)
17. [论刑罚的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/9ccb7b1c7a71e8ff196b6afc955132aa318947a18e7f9386.html?from=pdf)
18. [林业碳汇基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/466acba9d1aca3e9dbfaafda5ab043e5318947a18e7f9386.html?from=pdf)
19. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f40389de819c7de14e6c1318947a18e7f9386.html?from=pdf)
20. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f4038dea0003605e9c285318947a18e7f9386.html?from=pdf)
21. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f4038de5b09912d765bc6318947a18e7f9386.html?from=pdf)
22. [五说中医基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/a1a89c49bc6bff80c053408afcfe304f318947a18e7f9386.html?from=pdf)
23. [基于分岔理论的大型并网光伏模型探究](https://www.ixueshu.com/api/search/info/f21b7d05519c5911d4ede80fbfca742f318947a18e7f9386.html?from=pdf)
24. [时间:分岔与循环一一读《小径分岔的花园》](https://www.ixueshu.com/api/search/info/0d3f00e8fa9f0eac475c5786c9cc24cc318947a18e7f9386.html?from=pdf)
25. [司法审查的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/07ab6bb454441f20625d627589b464f8318947a18e7f9386.html?from=pdf)
26. [股权激励的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/6f6ebb7bc153a6a8fbff1aa1b4487f78318947a18e7f9386.html?from=pdf)
27. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c52eb7b044f9bfff47a4173522984669318947a18e7f9386.html?from=pdf)
28. [压合基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/a0d7bb67273064f3c9b51cf1a4080b65318947a18e7f9386.html?from=pdf)
29. [论审判监督的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/c2ce2a60dbe1de5d7506eab85b64a851318947a18e7f9386.html?from=pdf)
30. [计税基础的理论分析](https://www.ixueshu.com/api/search/info/214c9856c46110074aa829a3e2793c5b318947a18e7f9386.html?from=pdf)
31. [2.基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f40380dca8f358f391cf7318947a18e7f9386.html?from=pdf)
32. [现场管理的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/6880d4cbb106d1b5f8886f61ce516b76318947a18e7f9386.html?from=pdf)
33. [论快易网球的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/2748d45327f762db44a3b899707ad492318947a18e7f9386.html?from=pdf)
34. [分层教学的理论基础](https://www.ixueshu.com/api/search/info/16c147a8ae4f4038987f902320cbe9d6318947a18e7f9386.html?from=pdf)
35. [一维向量场含时变参数的非完全分岔](https://www.ixueshu.com/api/search/info/df79d37cc467dbb9e85944743c450306318947a18e7f9386.html?from=pdf)
36. [具有二重零特征根的平面向量场的分岔分析](https://www.ixueshu.com/api/search/info/1b154ecb637fc9ea14bfe24b4944e15a318947a18e7f9386.html?from=pdf)
37. [电子证据的基础理论](https://www.ixueshu.com/api/search/info/99b122264be0bceee2cabdce0bd5f19d318947a18e7f9386.html?from=pdf)