Производная. Вычисление производных

In [4]:
```
from sympy import *
from scipy.optimize import minimize
```

Пример 1. Производная функции $y = x\cos x$:

$$y' = (x\cos x)' = \cos x - x\sin x.$$

In [9]:
```
x = symbols('x') #Объявление символьной переменной
```

In [10]:
```
y = x*cos(x) #Функция y(x)
```

In [13]:
```
diff(x*cos(x), x) #Вычисление производно
```

Out[13]: $-x\sin(x) + \cos(x)$

Пример 2. Производная 3–го порядка функции $y = \ln x$.

$$(\ln x)^{(3)} = \frac{2}{x^3}.$$

In [14]:
```
diff(log(x), x, 3)
```

Out[14]: $\frac{2}{x^3}$

In [17]:
```
diff(log(x), x, x, x)
```

Out[17]: $\frac{2}{x^3}$

Пример 3. Найти значение $y''(10)$ для функции $y = \lg^3(x^3)$.

In [18]:
```
y = log(x**3,10)**3
diff(y,x,2).subs(x,10)
```

Out[18]: $-\frac{9(-6+\log(1000))\log(1000)}{100\log(10)^3}$

In [19]:
```
y = log(x**3,10)**3
diff(y,x,2).subs(x,10).simplify()
```

Out[19]: $\frac{81\cdot(2-\log(10))}{100\log(10)^2}$

Пример 4. Решить уравнение $y' = 0$, где $y(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$.

In [20]:
```
# Производная
y = (x**2+x-6)/(x**2-10*x+25)
z = diff(y,x)
z
```

Out[20]: $\frac{(10-2x)(x^2+x-6)}{(x^2-10x+25)^2} + \frac{2x+1}{x^2-10x+25}$

In [21]:
```
#Решение уравнения
solve(z, x)
```

Out[21]: [7/11]

Производная неявной функции

Пример 5. Найти первую производную $\frac{dy}{dx}$ и вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно в виде уравнения: $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Имеем: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4$; $y' = \frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.

In [22]:
```
x = symbols('x')
y = symbols('y')
f = x**2 + y**2 - 4
idiff(f, y, x)
```

Out[22]: $-\frac{x}{y}$

In [23]:
```
f = x**2 + y**2 - 4
idiff(f, y, x, 2)
```

Out[23]: $-\frac{\frac{x^2}{y^2} + 1}{y}$

In [24]:
```
idiff(f, y, x, 2).simplify()
```

Out[24]: $\frac{-x^2 - y^2}{y^3}$

Производная функции, заданной в параметрической форме

Пример 6. Найти y'_x и y''_{xx} для функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

In [26]:
```
t = symbols('t')
x = t - sin(t)
y = 1 - cos(t)
y_diff = diff(y,t)/diff(x,t)
y_diff
```

Out[26]:
$$\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$$

In [27]:
```
y_2diff = diff(y_diff,t)/diff(x,t)
y_2diff.simplify()
```

Out[27]:
$$-\frac{1}{(\cos(t) - 1)^2}$$

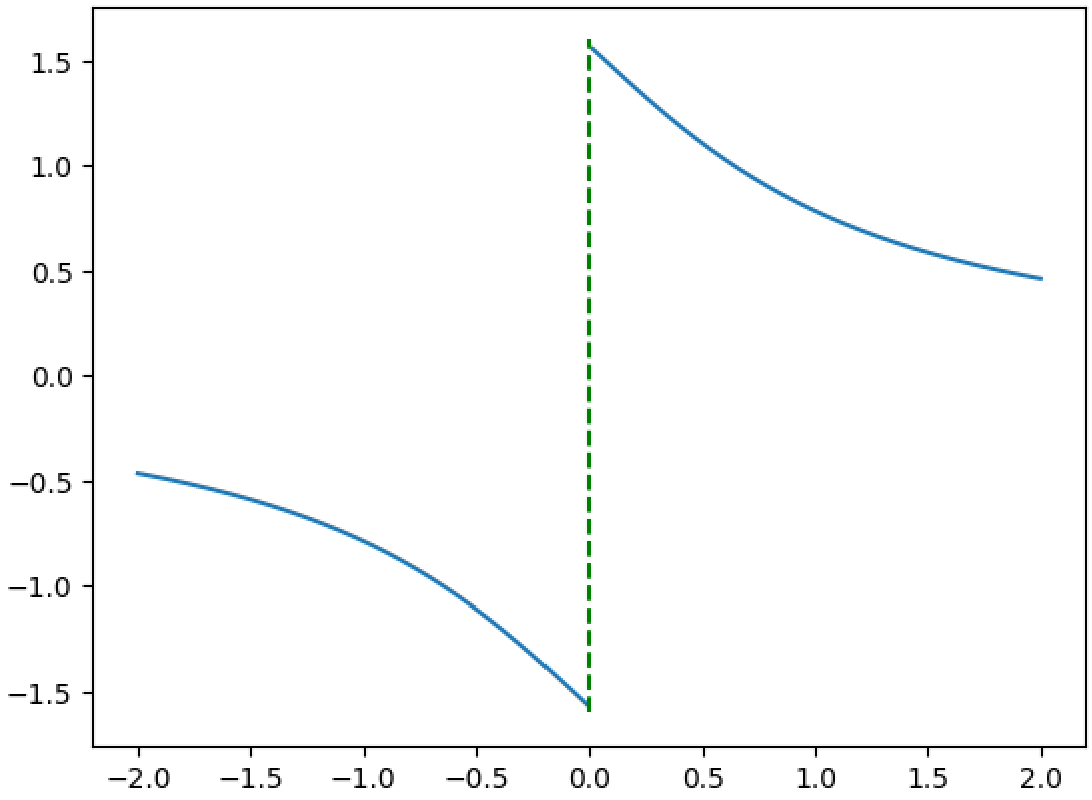
Односторонняя производная

Пример 7. Найти левую и правую производные функции $f(x)$ в точке ее разрыва, если

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

In [29]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

```python
x = np.linspace(-2, 2, 500)

x[(x>-0.01)&(x < 0.01)] = np.nan
y = np.arctan(1/x)
plt.plot(x, y)
plt.vlines(0, -1.6, 1.6, color='g', linestyles='dashed')
plt.show()
```



In [30]:

```python
x = symbols('x')
y = atan(1/x)
z = diff(y,x)
limit(z, x, 0, dir='+')
```

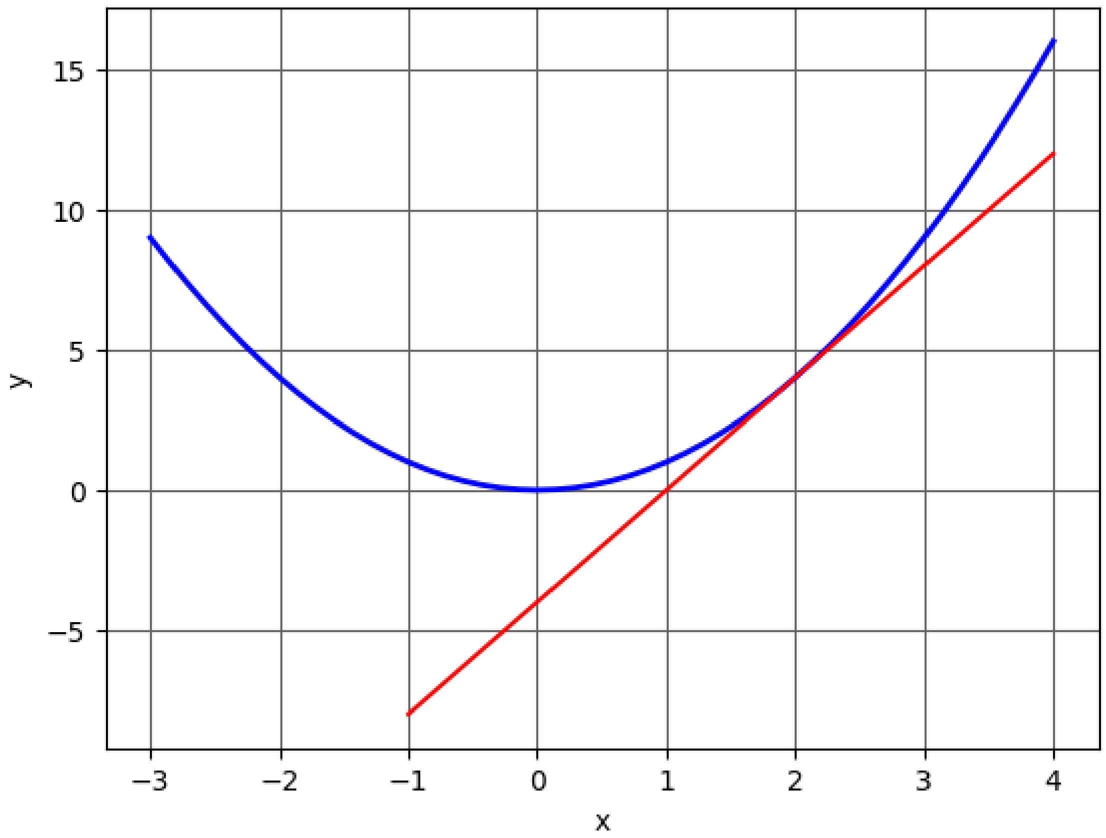
Out[30]: -1

In [31]:
```
limit(z, x, 0, dir='-')
```
Out[31]: -1

Применение производной при исследовании функции. Уравнение касательной.

Пример 8. Провести касательную к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

In [32]:
```
x = np.linspace(-3,4,50)
y1 = x**2
plt.plot(x,y1,lw=2,c='b')
x = np.linspace(-1,4,50)
y2 = 4*x - 4
plt.plot(x,y2,c='r')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

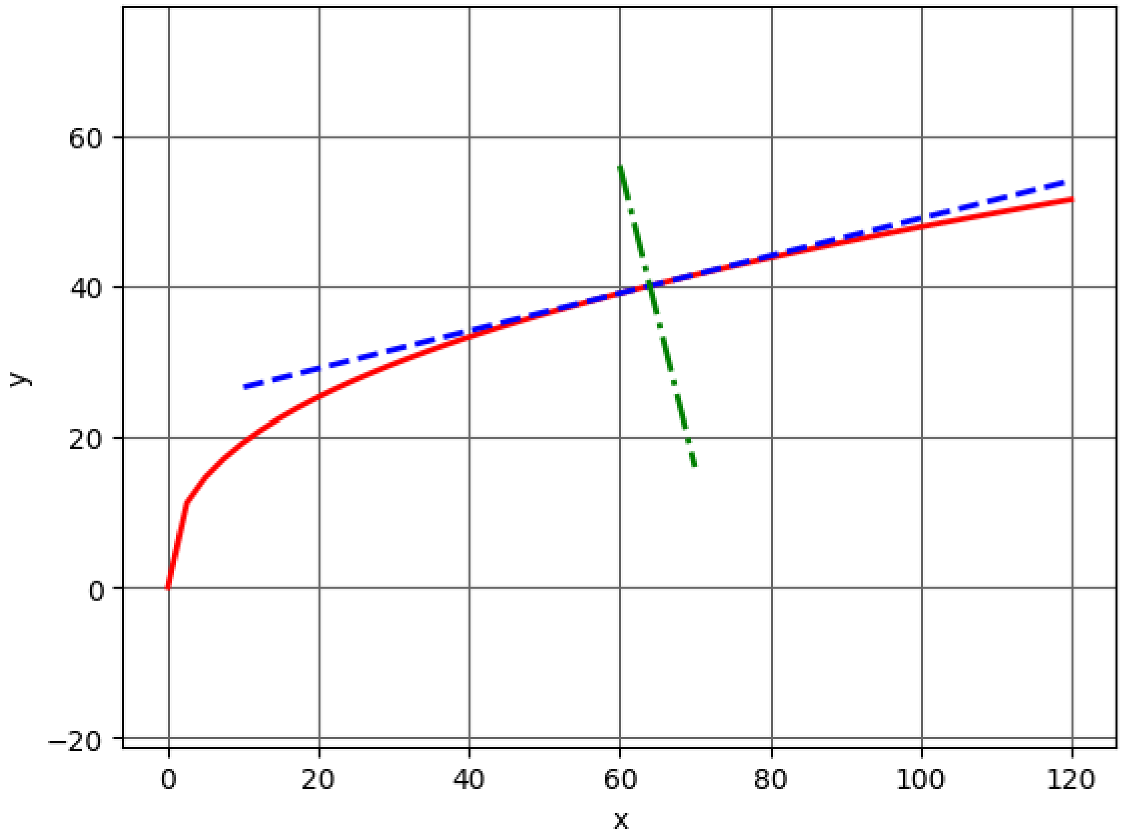


Пример 9. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 6\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 64$.

In [33]:

```
x = np.linspace(0,120,50)
y1 = 6*x**(1/3) + 2*x**(1/2)
plt.plot(x,y1,lw=2,c='r')
x = np.linspace(10,120,50)
y2 = x/4 + 24
plt.plot(x,y2,'--',lw=2,c='b')
x = np.linspace(60,70,50)
y3 = 296 - 4*x
plt.plot(x,y3,'-.',lw=2,c='g')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
```

```
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

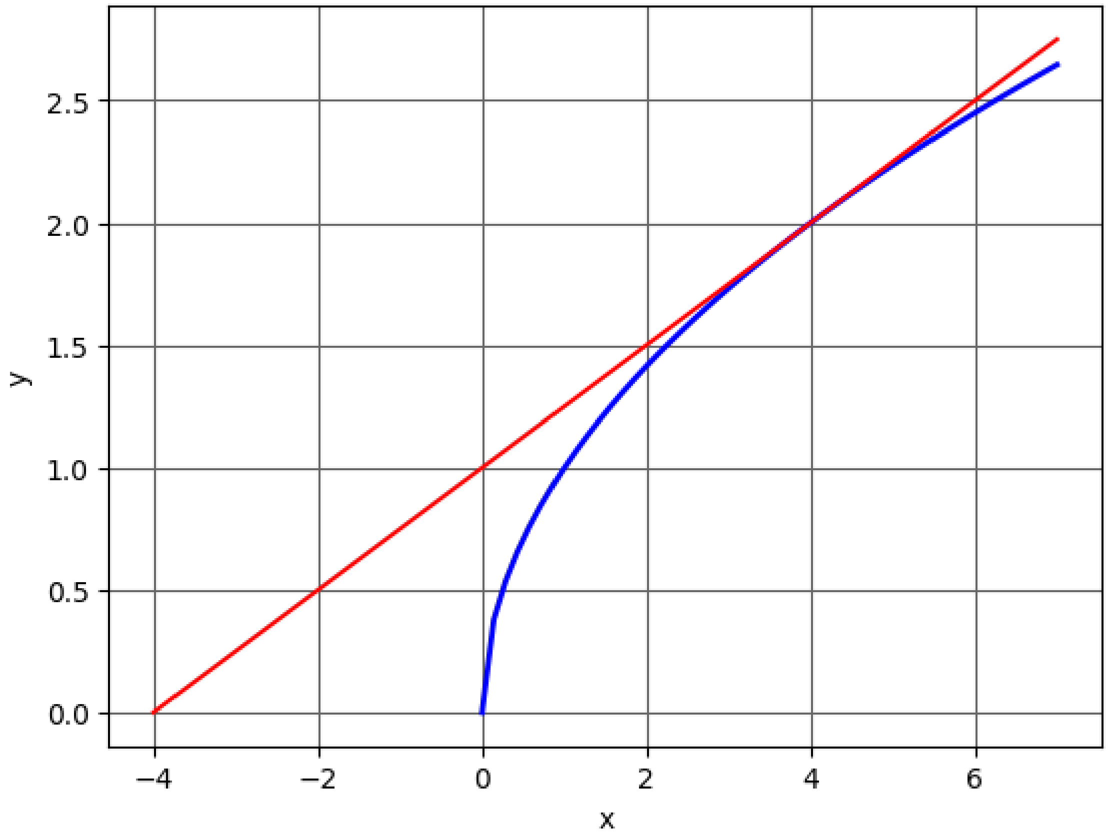


Пример 10. Из точки $A(-4;0)$ провести касательную к кривой $y=\sqrt{x}$.

In [34]:

```
x = np.linspace(0,7,50)
y1 = np.sqrt(x)
plt.plot(x,y1,lw=2,c='b')
x = np.linspace(-4,7,50)
y2 = x/4 + 1
plt.plot(x,y2,c='r')
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('y')
plt.grid (True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

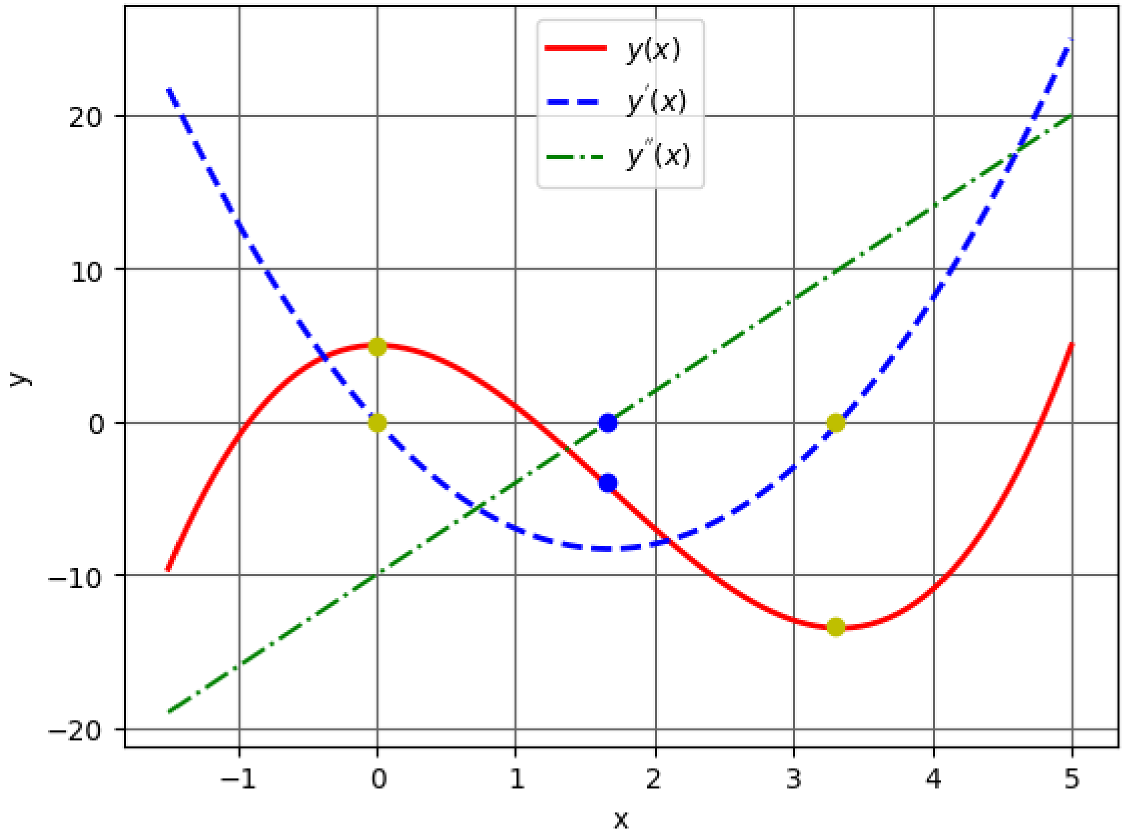


Исследование функции

In [35]:

```
t = np.linspace(-1.5, 5, 100)
f = t**3 - 5*t**2 + 5
fd = 3*t**2 - 10*t
fdd = 6*t - 10
plt.plot(t,f,lw=2,color='red',label = "$y(x)$")
plt.plot(t,fd,'--',lw=2,color='b',label = "$y^{'}(x)$")
plt.plot(t,fdd, '-.', color='g',label = "$y^{''}(x)$")
plt.plot([0], [0], 'o', color='y')
```

```
plt.plot([0], [5], 'o', color='y')
plt.plot([3.3], [0], 'o', color='y')
plt.plot([3.3], [-13.4], 'o', color='y')
plt.plot([1.65], [0], 'o', color='b')
plt.plot([1.65], [-4], 'o', color='b')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```



Пример 11. Решить неравенство $x^2 < 3$.

In [36]:

```
x, y = symbols('x y')
solve(x**2 < 3)
```

Out[36]: $-\sqrt{3} < x \wedge x < \sqrt{3}$

Пример 12. Решить уравнение $x^2 - y^2 = 0$ относительно переменной x.

In [38]:

```
solve(x**2 - y**2, x)
```

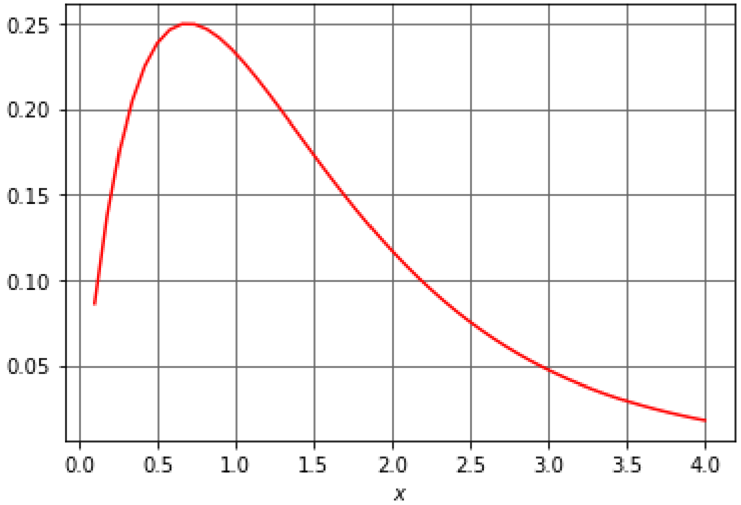
Out[38]: [-y, y]

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3$.

In [23]:

```
f = lambda x: np.exp(-x) - np.exp(-2*x)
x = np.linspace(0.1,4,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('$x$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



In [75]:

```
x = symbols('x')
y = x**3
x0 = solve(diff(y,x))[0]
print(f'x0: {x0} y(x0): {y.subs(x, x0)}')
```

```
x0: 0 y(x0): 0
```

In [55]:

```
diff(y,x,2).subs(x,x0)
```

Out[55]: 0

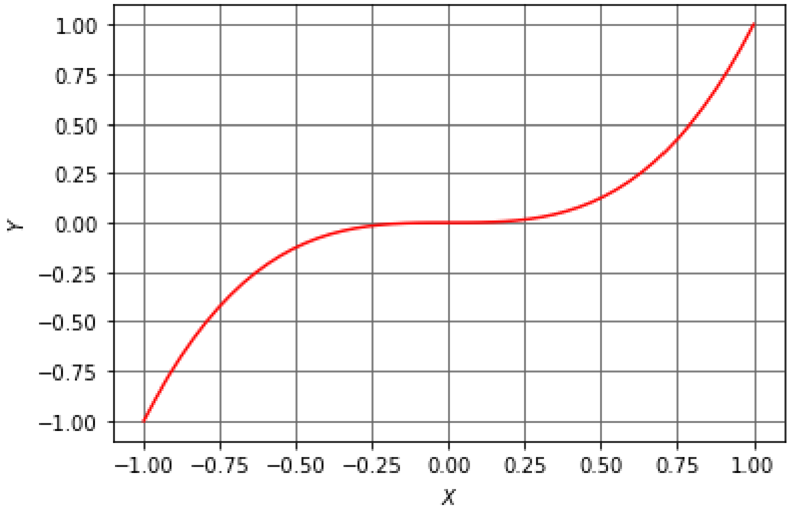
In [57]:

```
diff(y,x,3).subs(x,x0)
```

Out[57]: $\frac{246}{3125}$

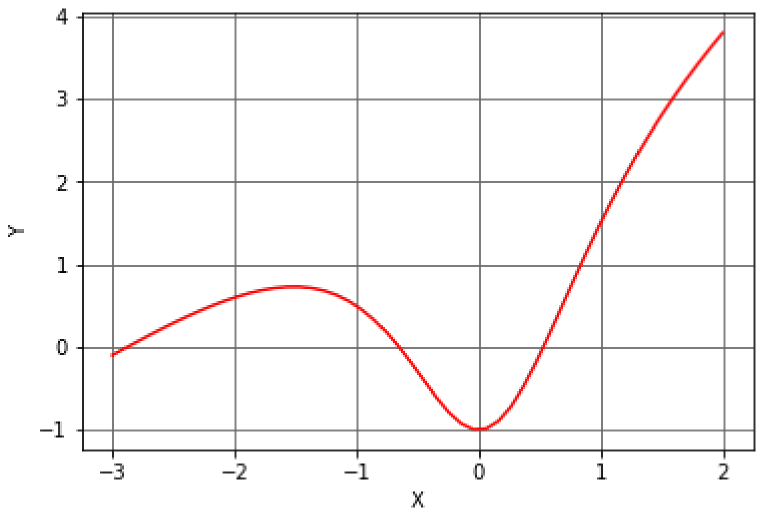
In [16]:

```
x = np.linspace(-1,1,50)
plt.plot(x, x**3, 'r')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Пример 15. Найти экстремум функции $y = \frac{x^3+3x^2-1}{x^2+1}$.

In [26]:
```
f = lambda x: (x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
x = np.linspace(-3,2,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



In [27]:

```
res = minimize(f, 1)
print('x_min: %.3f fmin: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_min: 0.000 fmin: -1.000
```

In [28]:

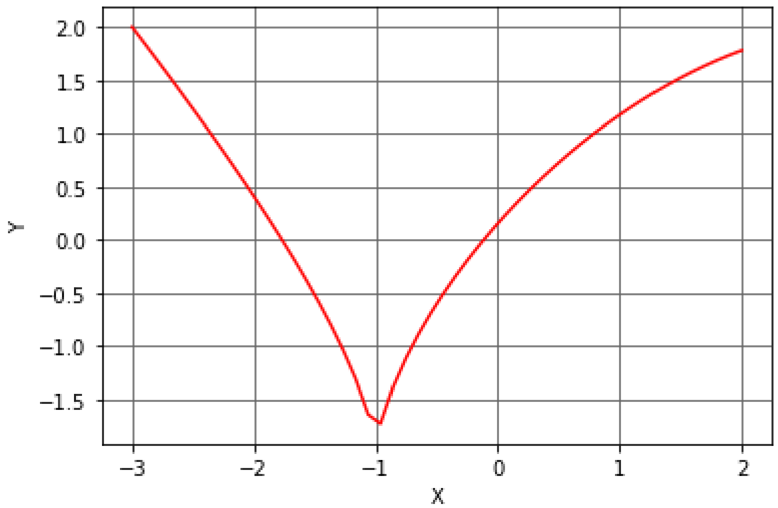
```
f_max = lambda x: -(x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
res = minimize(f_max, -2)
print('x_max: %.3f f max: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_max: -1.513 f max: 0.731
```

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке:

In [29]:

```
fun = lambda x: np.cbrt(2*(x+1)**2*(5-x)) - 2
x = np.linspace(-3, 3, 100)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.plot(x, fun(x), 'r')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



In [30]:
```
res = minimize(fun, -1.5)
print('x_min: %.3f' % res.x)
```

```
x_min: -0.490
```

In [33]:
```
res = minimize(fun, -1.001)
print(f'x_min: {res.x[0]:.3f}')
```

```
x_min: -1.001
```

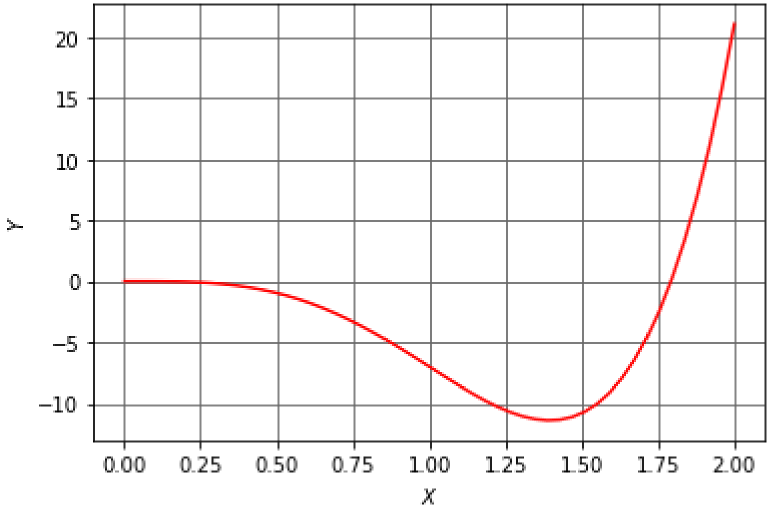
In [34]:
```
print(f'y(-3): {fun(-3):.3f} y(3): {fun(-3):.3f}')
```

```
y(-3): 2.000 y(3): 2.000
```

Пример 17. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y = x^4(12\ln x - 7)$.

In [35]:
```
f = lambda x: x**4 * (12*np.log(x) - 7)
x = np.linspace(0.001,2,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
```

```
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



In [36]:

```
x = symbols('x')
y = x**4 * (12*log(x) - 7)
y_2deriv = diff(y,x,2)
y_2deriv
```

Out[36]: $144x^2 \log{(x)}$

In [37]:

```
x_inflex = solve(y_2deriv, x)
x_inflex
```

Out[37]: [0, 1]

In [38]:

```
diff(y,x,3).subs(x, 1)
```

Out[38]: 144

In [39]:

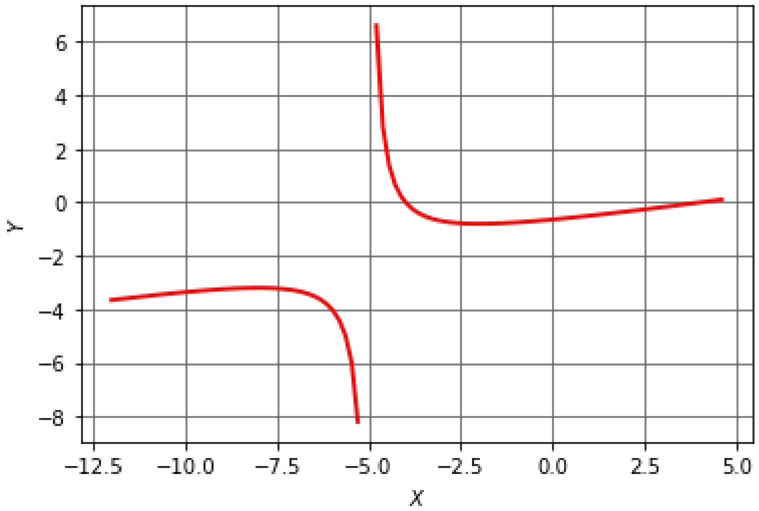
```
print(f'Слева: {y_2deriv.subs(x,0.9):.3f} Справа: {y_2deriv.subs(x,1.1):.3f}')
```

```
Слева: -12.289 Справа: 16.607
```

Пример 18. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2-16}{5(x+5)}$.

In [40]:

```python
x = symbols('x')
y = (x**2-16)/(5*(x+5))
f = lambda x: (x**2-16)/(5*(x+5))
x = np.linspace(-12,4.6,100)
x[(x>-5.2) & (x < -4.8)] = np.nan
y = f(x)
plt.plot(x,y,lw=2,color='red')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



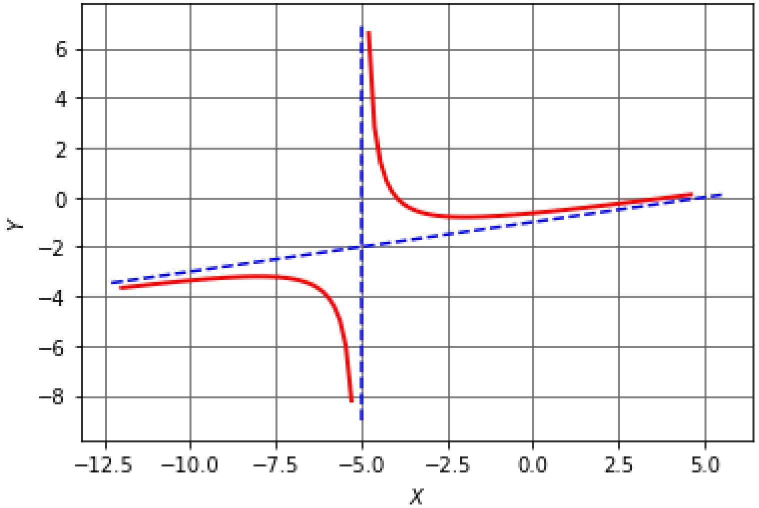
In [41]:

```python
k = limit(y/x, x, oo)
k
```

Out[41]: [.304761904761905 0.306779839677906 0.308883012171189 0.311077290143904 0.313369118850322 0.315765596024034 0.31827

In [42]:

```
f = lambda x: (x**2-16)/(5*(x+5))
x = np.linspace(-12,4.6,100)
x[(x>-5.2) & (x < -4.8)] = np.nan
y = f(x)
plt.plot(x,y,lw=2,color='red')
x = np.linspace(-12.3,5.5,100)
y = x/5 - 1
plt.plot(x,y,'--',color='b')
plt.plot([-5,-5],[-9,7],'--',color='b')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

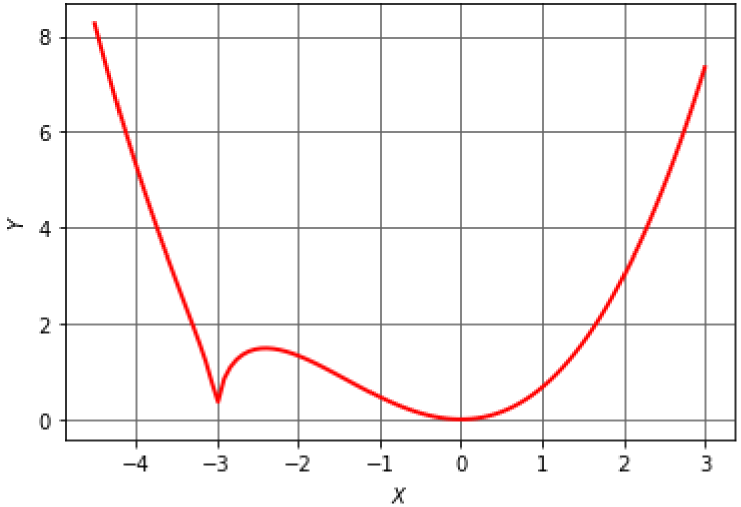


Пример 19. Провести полное исследование функции $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{|x+3|}$.

In [43]:

```
x = symbols('x')
y = x**2*sqrt(abs(x+3))/3
f = lambda x: x**2*np.sqrt(abs(x+3))/3
x = np.linspace(-4.5,3,100)
f_x = f(x)
plt.plot(x,f_x,lw=2,color='red')
```

```python
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



In [44]:

```python
y.subs(x,0)
```

Out[44]:

$$\frac{x^2\sqrt{|x+3|}}{3}$$

In [45]:

```python
limit(y, x, oo)
```

Out[45]:

$$\frac{x^2\sqrt{|x+3|}}{3}$$

In [46]:

```python
k = limit(y/x, x, oo)
k
```

Out[46]:

$$\left[0.0740740740740741x^2\sqrt{|x+3|} \quad -0.0753424657534247x^2\sqrt{|x+3|} \quad -0.0766550522648084x^2\sqrt{|x+3|} \quad -0.0780141843971631x^2\sqrt{|x+3\right.$$

In [47]:
```
x = symbols('x')
y1 = x**2*sqrt(-x-3)/3
y1_ = diff(y1,x). simplify()
y1_
```

Out[47]:

$$-\frac{x\left(5x+12\right)}{6\sqrt{-x-3}}$$

In [48]:
```
y2 = x**2*sqrt(x+3)/3
y12_ = diff(y1,x,2).simplify()
y12_
```

Out[48]:

$$\frac{\sqrt{-x-3}\left(5x^2+24x+24\right)}{4\left(x^2+6x+9\right)}$$

In [49]:
```
y22_ = diff(y2,x,2).simplify()
y22_
```

Out[49]:

$$\frac{5x^2+24x+24}{4\left(x+3\right)^{\frac{3}{2}}}$$

In [50]:
```
xp1 = solve(y12_)
xp1
```

Out[50]:
```
[-12/5 - 2*sqrt(6)/5, -12/5 + 2*sqrt(6)/5]
```

In [51]:
```
diff(y1, x, 3).subs(x,xp1[0]).evalf(5)
```

Out[51]: -10.465

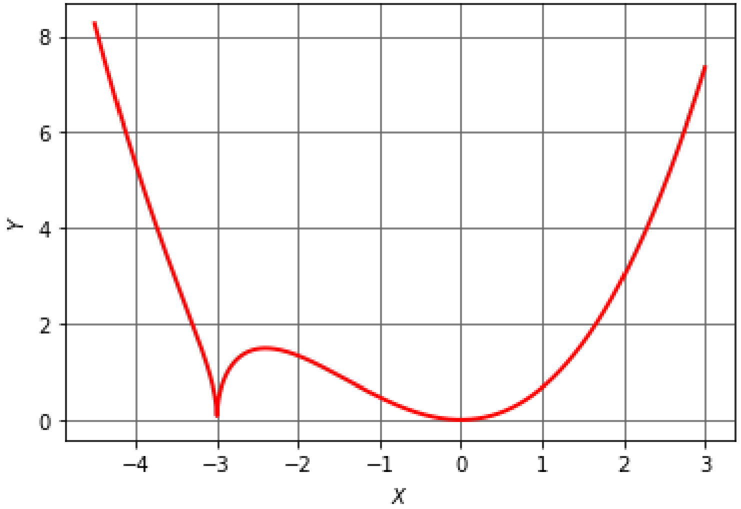
In [52]:

```
diff(y1, x, 3).subs(x,xp1[1]).evalf(4)
```

Out[52]: $1.234i$

In [53]:

```
f = lambda x: x**2*np.sqrt(abs(x+3))/3
x = np.linspace(-4.5,3,2000)
f_x = f(x)
plt.plot(x,f_x,lw=2,color='red')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Пример 20. Вычислить частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = xy^2 + e^{-x}$.

In [54]:
```
x, y = symbols("x y")
z = x*y**2 + exp(-x)
```

In [55]:
```
diff(z, x, 2)
```

Out[55]: e^{-x}

In [56]:
```
diff(z, y, 2)
```

Out[56]: $2x$

Пример 21. Вычислить частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ функции $z = \sin x \cdot \cos y$.

In [57]:
```
x, y = symbols('x y')
z = sin(x)*cos(y)
diff(z, x, 2, y)
```

Out[57]: $\sin(y)\sin(x)$

Пример 22. Вычислить градиент функции

$$z = 5\ln(x^2 + y^2)$$

в точке $M(1;2)$.

In [58]:
```
x,y = symbols('x y')
z = 5*log(x**2 + y**2)
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:2})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:2})
grad_f = (z_x, z_y)
grad_f
```

Out[58]: (2, 4)

Пример 23. Определить направление $\boldsymbol{l}$ быстрейшего возрастания функции

$$z = x^2 + xy + 7$$

In [59]:

```
x,x = symbols('x y')
z = x**2 + x*y +7
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:-1})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:-1})
grad_f = (z_x, z_y)
grad_f
```

Out[59]: (1, 1)

Пример 24. Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

In [60]:

```
l = Point(3,4)
l_n = l.distance(Point(0,0))
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
x,y = symbols('x y')
z = x**2 + y**2
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:1})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:1})
z_l = z_x*cos_a + z_y*cos_b
z_l
```

Out[60]: $\frac{14}{5}$

Пример 25. Провести касательную плоскость и нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $M(1;1;1)$.

In [61]:
```python
def tangent_plane(F,M):
    F_diff_x = diff(F,x).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})
    F_diff_y = diff(F,y).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})
    F_diff_z = diff(F,z).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})

    n = Point(F_diff_x, F_diff_y, F_diff_z)

    p = Plane(M, normal_vector=n).equation()

    K = Point(M.x+n.x, M.y+n.y, M.z+n.z)
    l_n = Line(M, K).arbitrary_point()
    return p, In
```

In [62]:
```python
x, y, z = symbols('x y z')
F = x**2 + y**2 + z**2 - 9
M = Point(1,1,1)
p, l_n = tangent_plane(F,M)
```

In [63]:
```python
p
```

Out[63]: $2x + 2y + 2z - 6$

Пример 26. В качестве первого примера возьмем функцию с очевидным ответом.

Найти минимум функции двух переменных

$z = (x-1)^2 + (y-3)^4$.

In [64]:
```python
z = lambda w: (w[0]-1)**2 + (w[1]-3)**4
res = minimize(z, (0, 0))
res.x
```

Out[64]:
```
array([0.99999999, 2.98725136])
```

In [65]:
```python
z((1,3)) < z((0.999,3.001))
```

Out[65]: True

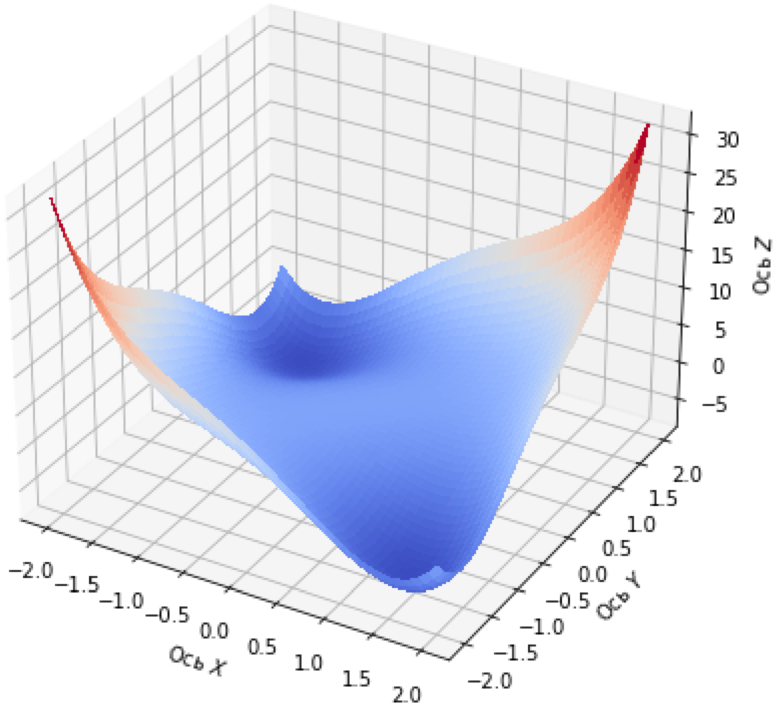
In [66]:
```
z((1,3))
```

Out[66]: 0

Пример 27. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

In [67]:
```
z = lambda w: w[0]**4 + w[1]**4 - 2*w[0]**2 +4*w[0]*w[1] - 2*w[1]**2

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
axes = fig.gca(projection='3d')
y = x = np.linspace(-2, 2, 50)
x, y = np.meshgrid(x, y)
Z = z((x,y))
surf = axes.plot_surface(x, y, Z, cmap='coolwarm',linewidth=0, antialiased=False)

axes.set_xlabel('Ось $X$')
axes.set_ylabel('Ось $Y$')
axes.set_zlabel('Ось $Z$')
plt.show()
```



In [68]:
```
res = minimize(z, (1, -1))
res.x
```

Out[68]: array([1.41421356, -1.41421356])

In [69]:
```
z(res.x)
```

Out[69]: -8.0

In [70]:
```
res = minimize(z, (-1, 1))
res.x
```

Out[70]: array([-1.41421356, 1.41421356])

In [71]:

```
z(res.x)
```

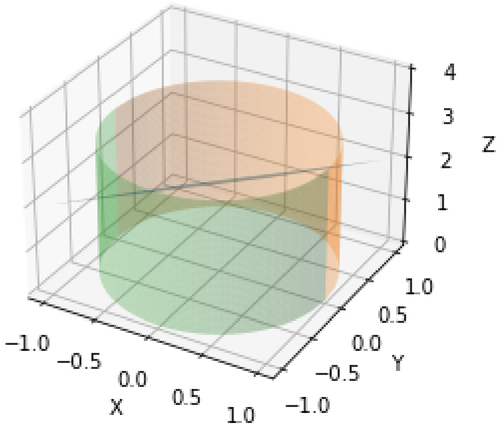
Out[71]:

```
-8.0
```

Пример 28. Найти экстремумы функции $z = x - y + 2$ при ограничении: $x^2 + y^2 = 1$.

In [72]:

```
f = lambda w: w[0] - w[1] + 2
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(-1, 1, 50)
y = np.linspace(-1, 1, 50)

x, y = np.meshgrid(x, y)
z1 = f((x,y))
ax.plot_surface(x, y, z1, alpha=0.4)

x = np.linspace(-1, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
xc, zc = np.meshgrid(x, z)
yc = np.sqrt(1-xc**2)
ax.plot_surface(xc, yc, zc, alpha=0.3)
ax.plot_surface(xc, -yc, zc, alpha=0.3)
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



In [73]:
```
cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda w: w[0]**2 + w[1]**2 - 1})

bnds = ((None, None), (None, None))

res = minimize(f, (-0.5, 0.5), bounds=bnds, constraints=cons)

res.x
```

Out[73]:
```
array([-0.70710679,  0.70710677])
```

In [74]:
```
f_max = lambda w: -(1.5*w[0] - w[1] + 1)
cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda w: w[0]**2 + w[1]**2 - 1})
bnds = ((None, None), (None, None))
res = minimize(f_max, (0.5, -0.5), bounds=bnds,constraints=cons)

res.x
```

Out[74]:
```
array([ 0.83205051, -0.55469991])
```

Пример 29. Определить коэффициенты эластичности производственной функции Кобба–Дугласа $z = 4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}$.

In [75]:
```
x,y = symbols('x y')
z = 4.5*x**(0.33) * y**(0.66)
z_x = diff(z, x)
z_y = diff(z, y)

E_x = (x/z)*z_x
E_y = (y/z)*z_y
print(f'E_x: {E_x:.3f} E_y: {E_y:.3f}')
```

```
E_x: 0.330 E_y: 0.660
```

Пример 30. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln(5 + K^2)$. Найти интервал изменения K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

Решение. Найдем точку перегиба функции $V(K)$. Достаточный признак точки перегиба: вторая производная функции в этой точке обращается в ноль, а третья производная отлична от нуля.

In [76]:
```
K,V0 = symbols('K V0')
V = V0*log(5+K**2)

Vprim2 = diff(V,K,2)

Vprim3 = diff(V,K,3)

s = solve(Vprim2,K)
s
```

Out[76]: [-sqrt(5), sqrt(5)]

In [78]:
```
Vprim3.subs(K,s[1])
```

Out[78]: $-\frac{\sqrt{5}V_0}{25}$

Примеры решения задач

Вычислить y' для функции $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$.

In [88]:
```
x = symbols('x')
y = x*(cos(log(x))+sin(log(x)))
diff(y,x)
```

Out[88]:
$$x\left(-\frac{\sin(\log(x))}{x} + \frac{\cos(\log(x))}{x}\right) + \sin(\log(x)) + \cos(\log(x))$$

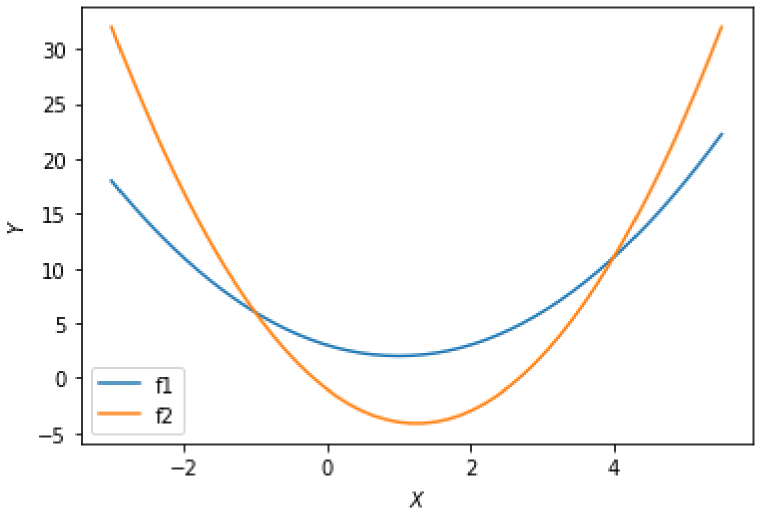
In [89]:
```
diff(y,x).simplify()
```

Out[89]: $2\cos(\log(x))$

$$y(x) = \max\{x^2 - 2x + 3;\ 2x^2 - 5x - 1\}.$$

Решение. Для определения, на каких участках, одна из функций больше другой, используем график.

In [105…
```
f1 = lambda x: x**2-2*x+3
f2 = lambda x: 2*x**2-5*x-1
x = np.linspace(-3, 5.5, 50)
y1 = f1(x)
plt.plot(x,y1, label = "f1")
y2 = f2(x)
plt.plot(x,y2, label = "f2")
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.legend()
plt.show()
```



In [107…
```
f1(-1) == f2(-1)
```

Out[107… True

In [108…
```
f1(4) == f2(4)
```

Out[108… True

In [109…
```
x = symbols('x')
f1 = x**2-2*x+3
f2 = 2*x**2-5*x-1

y_diff1 = diff(f2,x)
y_diff1
```

Out[109… $4x - 5$

In [110…
```
y_diff2 = diff(f1,x)
y_diff2
```

Out[110… $2x - 2$

Найти значение шестой производной $y^{(6)}(2)$ от функции

$$y = \ln\left(\frac{x^2 - x}{x + x^2}\right) \text{ в точке } x = 2.$$

In [92]:
```
y = log((x**2-x)/(x**2+x))
diff(y, x, 6).subs(x,2)
```

Out[92]: $-\frac{29120}{243}$

Показать, что функция $y = x \cdot \sin x$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{y'}{\cos x} - x = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Найдем выражение для функции, стоящей в левой части уравнения:

In [114…
```
x, y = symbols('x y')
y = x*sin(x)
yprim = diff(y, x)
f = yprim/cos(x) - x
f.simplify()
```

Out[114… $\tan(x)$

При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

Решение. В точке касания двух кривых совпадают как значения этих функций, так и их производных.

Используем этот факт для определения параметра a. Обозначим через x_0 абсциссу точки касания. Составим систему из двух уравнений относительно переменных x_0 и a. Первое уравнение системы: равенство функций, второе – равенство их производных.

In [121…

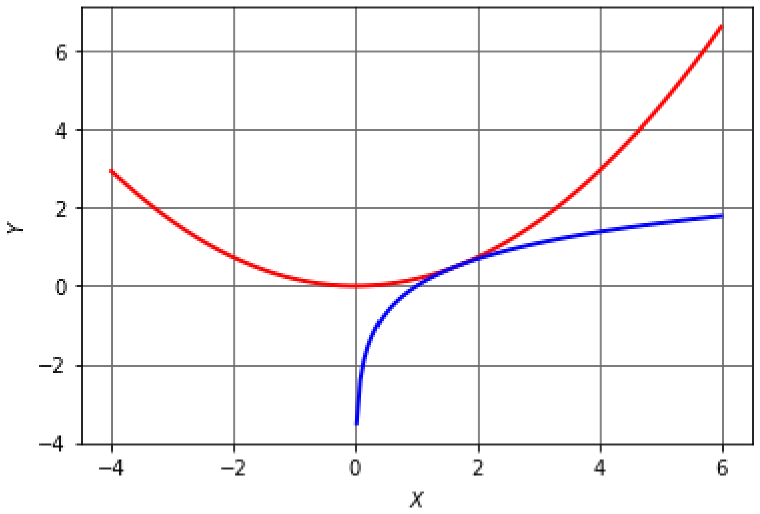
```
x, a, x0 = symbols('x a x0')

y1 = a*x**2
y2 = log(x)

y1_diff = diff(y1,x).subs(x,x0)
y2_diff = diff(y2,x).subs(x,x0)

y1_0 = y1.subs(x,x0)
y2_0 = y2.subs(x,x0)

solve([y1_0-y2_0, y1_diff-y2_diff], [x0, a])
```

Out[121…

```
[(exp(1/2), exp(-1)/2)]
```

In [122…

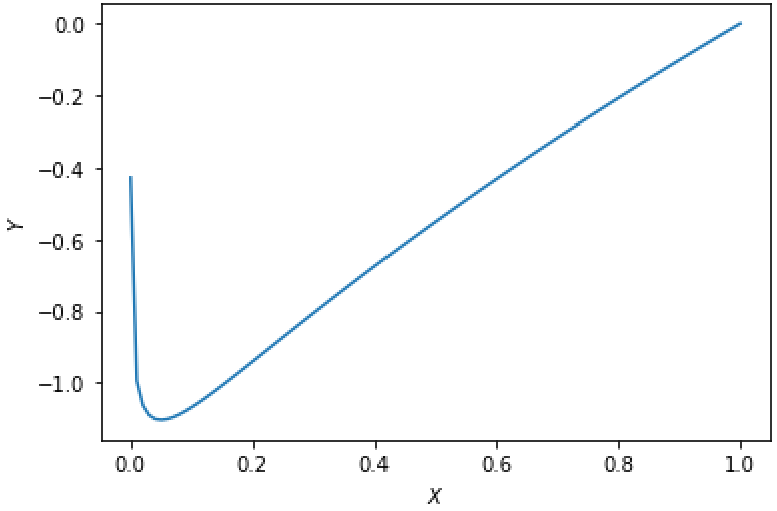
```
x = np.linspace(-4, 6, 500)
y = x**2/(2*np.exp(1))
plt.plot(x, y, lw=2, c='r')
x = np.linspace(0.03, 6, 100)
y = np.log(x)
plt.plot(x, y, lw=2, c='b')
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$.

In [123…

```
f = lambda x: (x**(1/3))*np.log(x)

x = np.linspace(0.0001,1,100)
y = f(x)
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('$X$')
plt.ylabel('$Y$')
plt.show()
```



In [124…

```
res = minimize(f, 0.01)
print(f'xmin: {res.x[0]:.4f} y(x_min): {f(res.x)[0]:.4f}')
```

```
xmin: 0.0498 y(x_min): -1.1036
```

In [125…

```
x = symbols('x')
y = x**(1/3) * log(x)
x_min = solve(diff(y,x))[0]
print(f'x_min: {x_min:.4f} y(x_min): {y.subs(x, x_min):.3f}')
```

```
x_min: 0.0498 y(x_min): -1.104
```

Найти производную функции $w = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} - z^2$ в точке $A(1;2)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

Решение. Радиус-вектор точки – это вектор, координаты которого совпадают с координатами точки.

In [126…

```
l = Point(2,3,1)

l_n = l.distance(Point(0,0,0))
```

```python
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
cos_c = l.z/l_n
```

In [127…

```python
x,y,z = symbols('x y z')
w = x**2/2 + y**2/9 - z**2

w_x = diff(w,x).subs({x:2, y:3, z:1})
w_y = diff(w,y).subs({x:2, y:3, z:1})
w_z = diff(w,z).subs({x:2, y:3, z:1})
```

In [128…

```python
w_x = diff(w,x).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])
w_y = diff(w,y).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])
w_z = diff(w,z).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])

w_l = w_x*cos_a + w_y*cos_b + w_z*cos_c
w_l
```

Out[128…

$$\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

Найти экстремумы функции $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 8x$.

In [129…

```python
def critical_points(z):

    z_x = diff(z,x)
    z_y = diff(z,y)

    cr_point = solve([z_x, z_y], [x, y], dict=True)

    A = diff(z,x,2)
    B = diff(z,x,y)
    C = diff(z,y,2)

    D = A*C - B**2
    return cr_point, A, D
```

In [130…
```python
def suff_indic(A, D, cr_point):
    A0 = A.subs(cr_point)
    D0 = D.subs(cr_point)
    return D0, A0
```

In [131…
```python
x, y = symbols('x y')
z = x**2 - 4*x*y - 2*y**2 + 8*x
cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

Out[131… [{x: -4/3, y: 4/3}]

In [132…
```python
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[0])
D0, A0
```

Out[132… (-24, 2)

Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства Q выражается формулой $C(Q) = 80 - 0{,}38Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции $Q = 20$ ден. ед.

In [133…
```python
Q = symbols('Q')
c = 80 - 0.38*Q
Dprim = diff(c,Q)
E = (Q*Dprim/c).subs(Q,20)
S(E).n(3)
```

Out[133… -0.105

Функция спроса D и предложения S от цены p имеют вид: $D(p) = 40 - 1{,}3p$, $S(p) = 20 + 1{,}2p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

Решение. Находим равновесную цену из условия $D = S$:

In [134…

```
p = symbols('p')
D = 40 - 1.3*p
S = 20 + 1.2*p
p0 = solve(D-S,p)
p0[0].n(2)
```

Out[134… 8.0

In [135…

```
Dprim = diff(D,p)
E = (p*Dprim/D).subs(p,p0[0])
E.n(3)
```

Out[135… -0.351

Индивидуальное задание

Паритет опционов пут и колл

$$PV(Call) - PV(Put) = S_0 - PV(K)$$

С денежными потоками в конце срока погашения T:

$CF(T, Call) = max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$

$CF(T, Put) = max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$

$CF(T, Fwd) = S_T - K$

Например, если цена опциона колл завышена по сравнению с его реплицирующимся портфелем, т.е. Fwd + Put, продайте колл и купите репликацию. Результирующий сдвиг в спросе и предложении должен привести к корректировке цен.

In [140…

```python
"""Соотношение спотовой цены и денежного потока (соотношение "пут-колл")"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

S_T = np.linspace(0,100)
K = 50

# портфолио
CF_T = np.maximum(S_T - K, 0)
CF2_T = S_T - K

# остальное - заговор
plt.figure('PCP', figsize=(9,4))
plt.plot(S_T, CF_T)
plt.plot(S_T, CF2_T)
plt.axhline(y=0, linewidth=1, color="black")
plt.xlabel("Спотовая цена")
plt.ylabel("Денежный поток")
plt.annotate("K", (K,-5))
plt.show()
```