



第8章 小波与小波变换

1. 小波简介
2. 哈尔函数
3. 一维哈尔小波变换
4. 二维哈尔小波变换



小波分析

- 近十几年才发展起来的一种数学工具
- 继100多年前的傅立叶(**Fourier**)分析之后的一个重大突破。
- 迅速应用到图像处理和语音分析等众多领域。
- 深入理解小波理论需要用到比较多的数学知识。
- 本章主要从工程应用的角度出发，用比较直观的方法来介绍小波变换及其应用。



8.1 小波介绍

- 信号分析一般是为了获得时间和频率域之间的相互关系。
- 傅立叶理论：一个信号可表示成一系列正弦和余弦函数的和，称为傅立叶展开式。
- 可以确定信号中包含的所有频率，提供了有关频率域的信息
- 但不能确定具有这些频率的信号出现在什么时间，时间方面的局部化信息基本丢失。




8.1.1 小波简史


- 哈尔(Haar) 1909年在函数空间中寻找一个与傅立叶类似的基，被命名为**哈尔小波(Haar wavelets)**。
- 20世纪70年代，在法国石油公司工作的年轻的地球物理学家Jean Morlet提出了**小波变换(wavelet transform, WT)**的概念。




小波简史

- 法国的科学家Y.Meyer开始研究系统的小波分析方法，于1986年创造性地构造出具有一定衰减性的光滑函数，用缩放(dilations)与平移(translations)均为 2^j ($j \geq 0$ 的整数)的倍数构造了空间的规范正交基，使小波得到真正的发展。

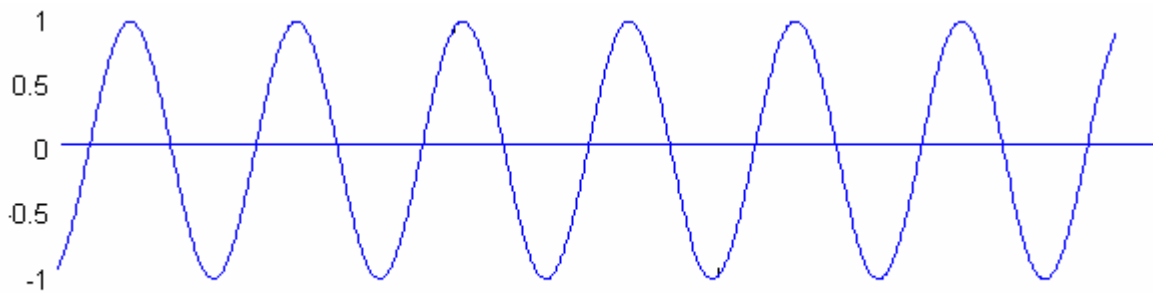
- 
- 1988年，法国的科学家Stephane Mallat在构造正交小波基时提出了多分辨率的概念，从空间上形象地说明了小波的多分辨率的特性，提出了正交小波的构造方法和快速算法，叫做**Mallat算法**。该算法统一了在此之前构造正交小波基的所有方法，
 - 它的地位相当于快速傅立叶变换在经典傅立叶分析中的地位。

- 
- Inrid Daubechies, Ronald Coifman和Victor Wickerhauser等著名科学家把这个小波理论引入到工程应用方面做出了极其重要的贡献。
 - Inrid Daubechies于1988年最先揭示了小波变换和滤波器组(filter banks)之间的内在关系,使离散小波分析变成为现实。
 - 小波在信号(如声音信号, 图像信号等)处理中得到极其广泛的应用。

- 
-
- 经过十几年的努力，这门学科的理论基础已经基本建立，成为应用数学的一个新领域。
 - 这门新兴学科的出现引起了许多数学家和工程技术人员的极大关注，是国际科技界和学术团体高度关注的前沿领域。

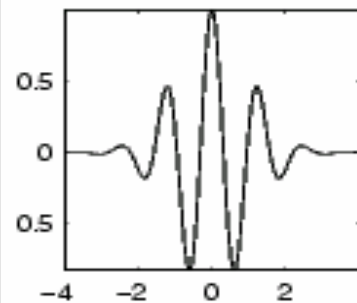
8.1.2 小波概念

- 小波是定义在有限间隔而且其平均值为零的一种函数。

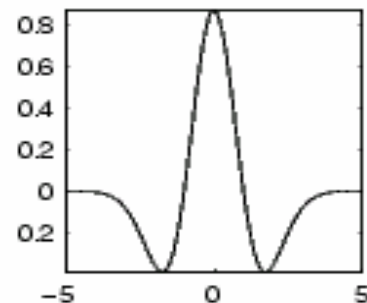


(a) 正弦波

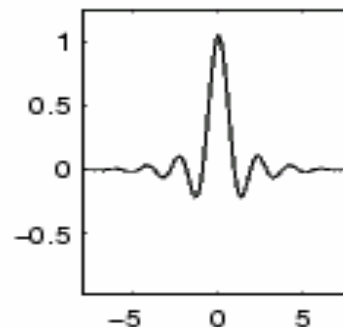
Moret小波函数



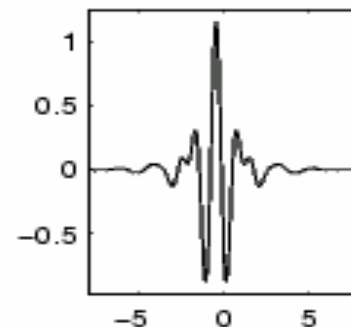
Mexican Hat小波函数



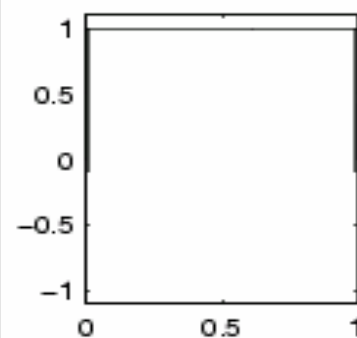
Meyer缩放函数



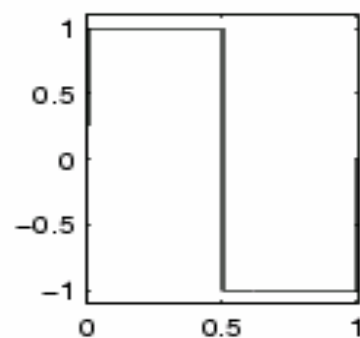
Meyer小波函数



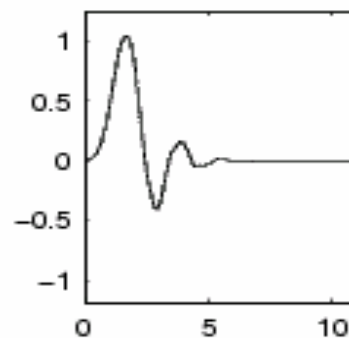
Haar缩放函数



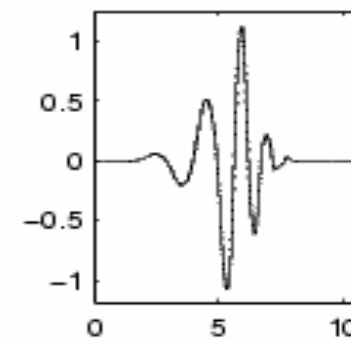
Haar小波函数



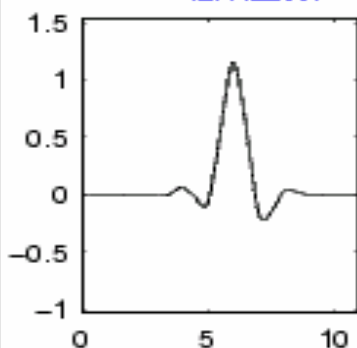
db6 缩放函数



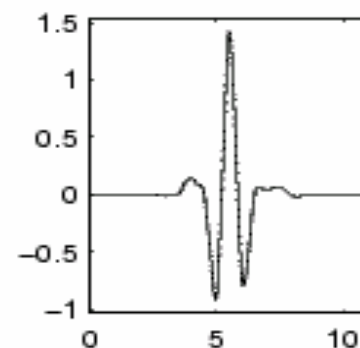
db6小波函数



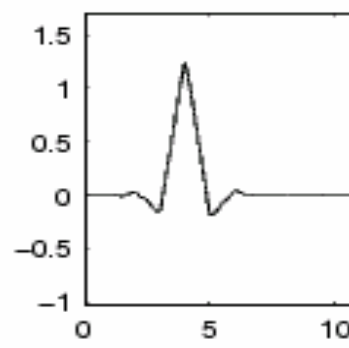
sym6 缩放函数



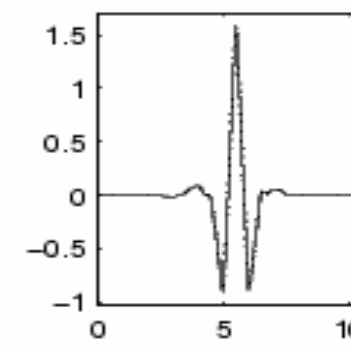
sym6小波函数



coif2 缩放函数



coif2小波函数





名称

- 缩放函数和小波函数的名称大多数是以开发者的名字命名的。
 - Moret小波函数是Grossmann和Morlet在1984年开发的
 - db6缩放函数和小波函数是Daubechies开发的几种小波之一
 - Meyer缩放函数和小波函数是Meyer开发的。
- 也有不少例外。
 - Sym6缩放函数和小波函数是symlets的简写，是Daubechies提议开发的几种对称小波之一；
 - coif2缩放函数和coif2小波函数是Daubechies应R. Coifman的请求而开发的几种小波之一。



比较

- 小波具有**有限**的持续时间和突变的频率和振幅，波形可以是不规则的，也可以是不对称的，在整个时间范围里的幅度平均值为零。
- 而正弦波和余弦波具有无限的持续时间，可从负无穷扩展到正无穷，波形是平滑的，振幅和频率也是恒定的。



选择

- 在众多的小波中，选择什么样的小波对信号进行分析是一个至关重要的问题。使用的小波不同，分析得到数据也不同，这是关系到能否达到使用小波分析的目的。
- 如果没有现成的小波可用，还需要自己开发合适的小波。



消失矩(vanishing moments)

- 小波函数在时域和频域中都应该具有某种程度的平滑度(smoothness)和集中性(concentration)
- 可以使用消失矩(vanishing moments)来描述，用 N 表示小波的消失矩的数目。

例如，Daubechies小波简写成db N ， db1, db2,, db9，从Daubechies小波波形来看， N 数目的大小反映了Daubechies小波的平滑度和集中性。



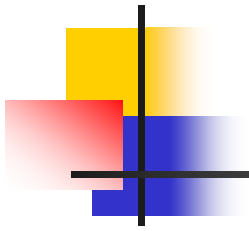
8.1.1 小波分析

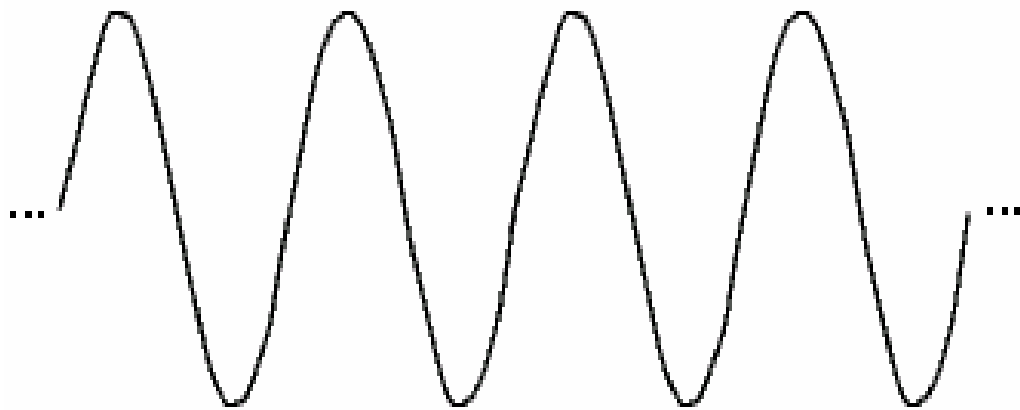
- 小波变换通过平移母小波(mother wavelet)可获得信号的**时间信息**
- 通过缩放小波的宽度(尺度scale)可获得信号的**频率特性**。
- 对母小波的缩放和平移是为了计算小波的系数，这些**系数代表了小波和信号之间的相互关系**。



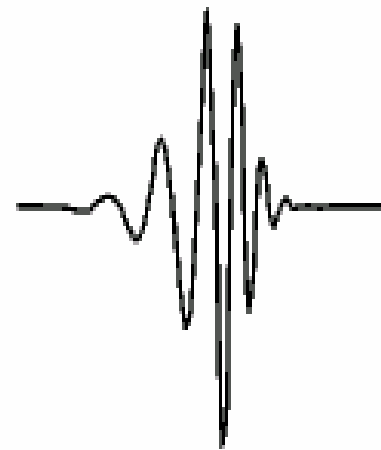
连续小波变换

- 傅立叶分析是把一个信号分解成各种不同频率的正弦波，因此正弦波是傅立叶变换的基函数。
- 小波分析是把一个信号分解成将母小波经过平移和缩放之后的一系列小波，因此小波同样可以用作表示一些函数的基函数。
- 凡是能够用傅立叶分析的函数都可以用小波分析。

- 
- 用不规则的小波分析变化激烈的信号比用平滑的正弦波更有效，即对信号的基本特性描述得更好。



(a) 正弦波



(b) 小波 (db10)



傅立叶变换

- 傅立叶变换是信号 $f(t)$ 与复数指数之积在信号存在的整个期间里求和。
- 傅立叶变换的结果是傅立叶系数，是频率的函数。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

连续小波变换

- continuous wavelet transform, CWT
- 小波变换是信号 $f(t)$ 与被缩放和平移的小波函数之积在信号存在的整个期间里求和。
- CWT变换的结果是小波系数 C ，这些系数是缩放因子(scale)和位置(position)的函数。

$$C(scale, position) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(scale, position, t) dt$$



缩放因子

- 如果用字母 a 表示缩放因子
- 正弦函数 $f(t)=\sin(t)$ ，缩放因子 $a=1$
- 正弦函数 $f(t)=\sin(t/2)$ ，缩放因子 $a=2$
- 正弦函数 $f(t)=\sin(t/4)$ ，缩放因子 $a=4$



CWT的变换过程

- Step1:

把小波 $w(t)$ 和原始信号 $f(t)$ 的开始部分进行比较，计算系数 C 。

系数 C 表示该部分信号与小波的近似程度 C ， C 的值越高表示信号与小波越相似。

- Step 2:

把小波向右移，距离为 k ，得到小波函数 $w(t-k)$ ，重复步骤1。

再把小波向右移，得到小波 $w(t-2k)$ ，重复步骤1。

按上述步骤一直进行下去，直到信号 $f(t)$ 结束。



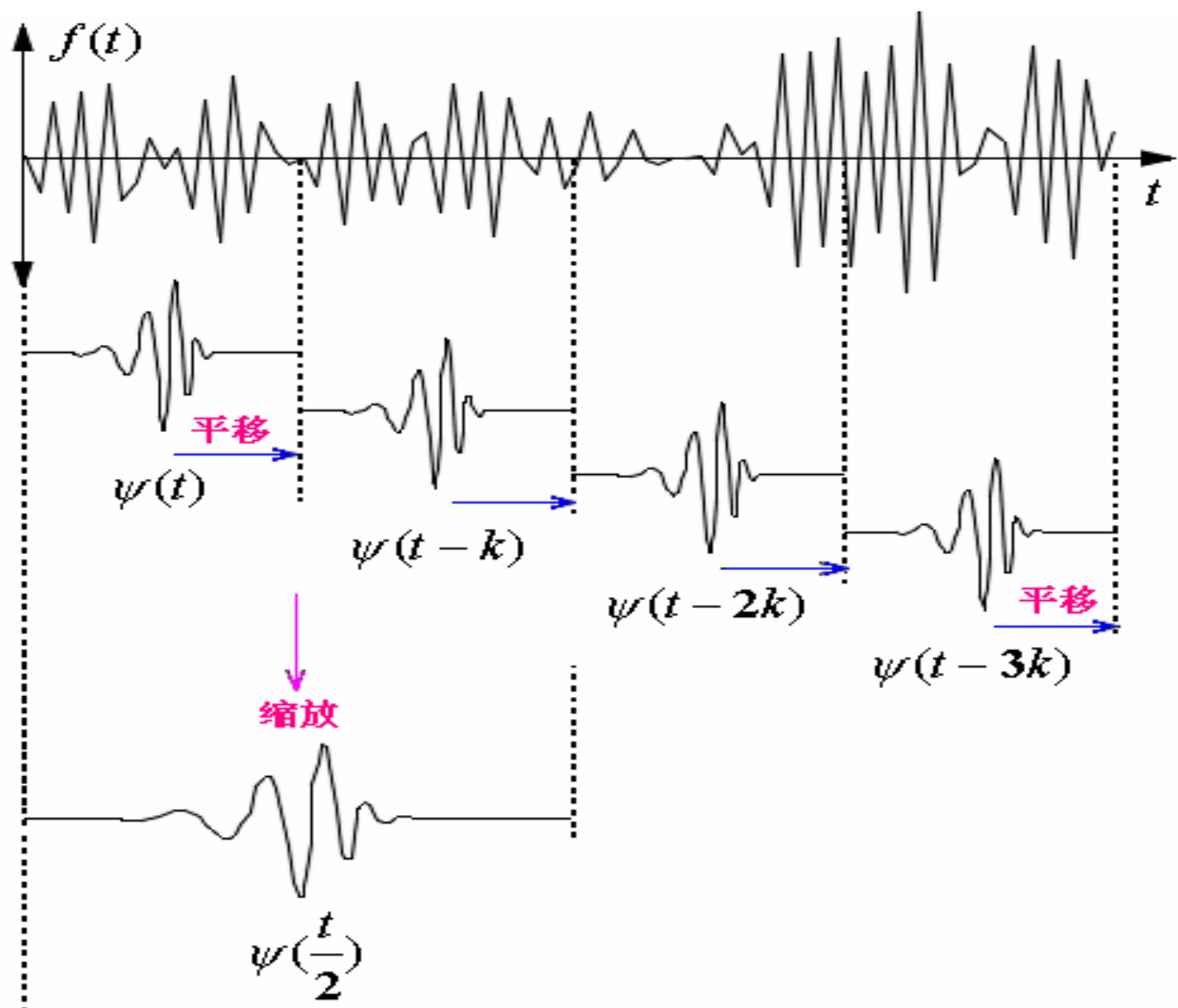
CWT的变换过程

- Step 3:

扩展小波 $w(t)$ ，例如扩展一倍，得到的小波函数 $w(t/2)$ ，重复步骤1~2。

- Step 4:

重复步骤1~3

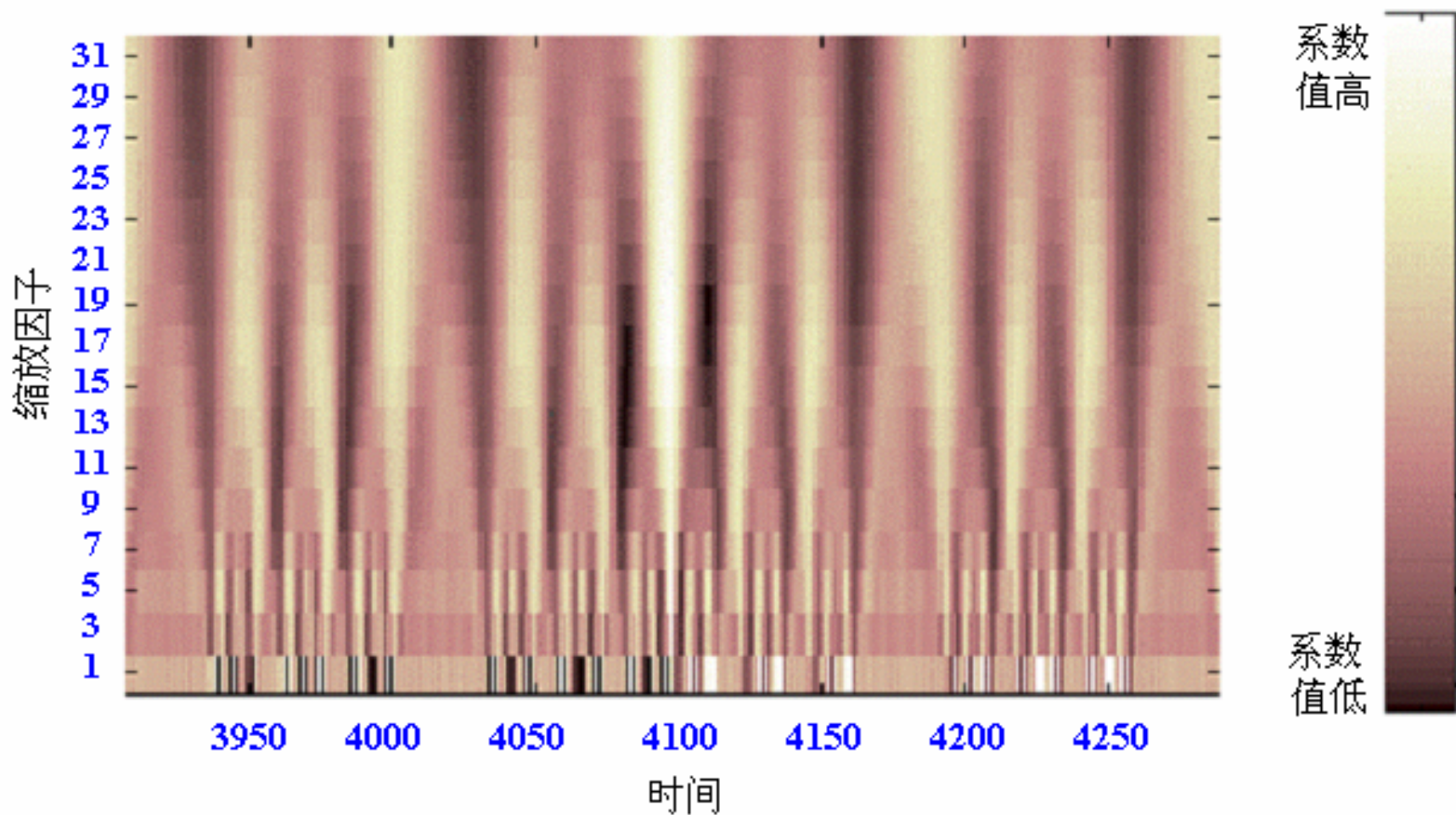




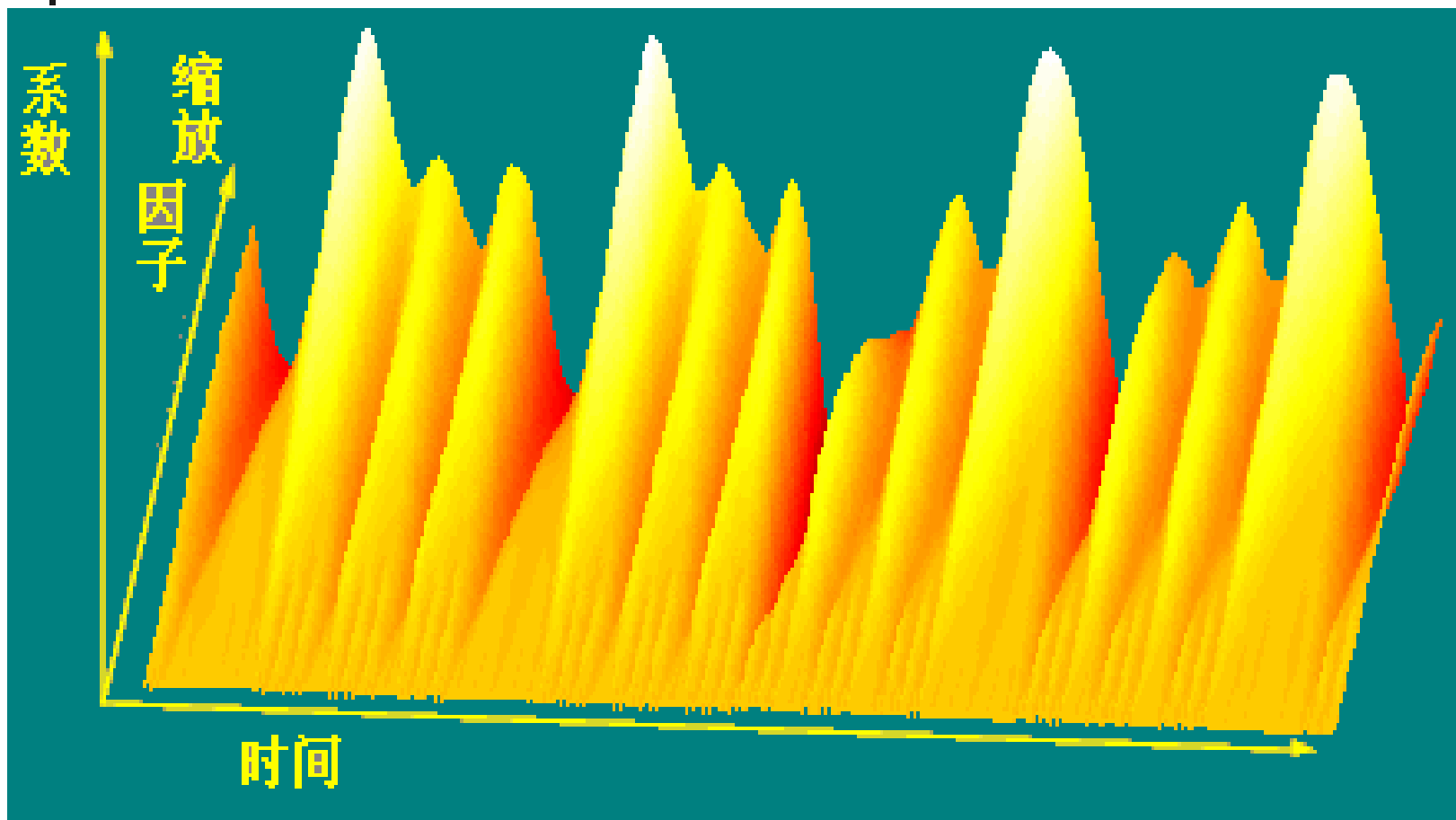
小波系数

- 小波变换完成之后得到的系数是在不同的缩放因子下由信号的不同部分产生的。
- 小波的缩放因子与信号频率之间的关系
缩放因子小，表示小波比较窄，度量的是信号细节，表示频率比较高；
缩放因子大，表示小波比较宽，度量的是信号的粗糙程度，表示频率比较低

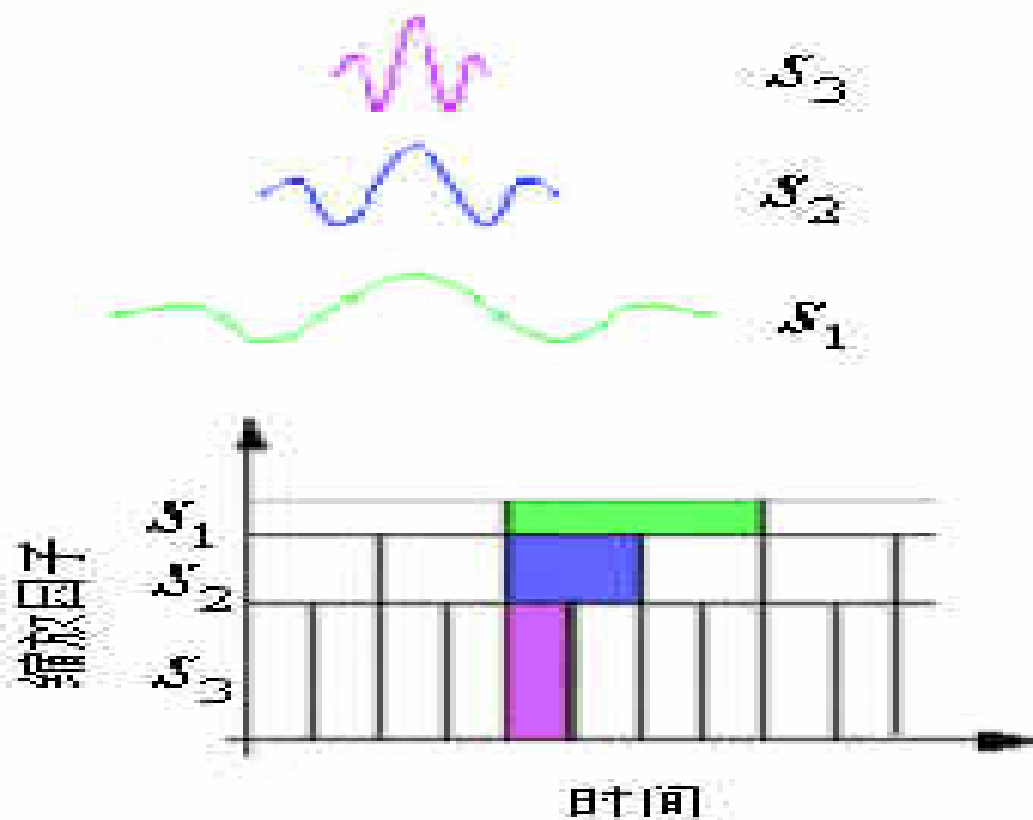
2D图像表示的小波变换分析图



3D图像表示的小波变换分析图



使用Morlet开发的小波变换



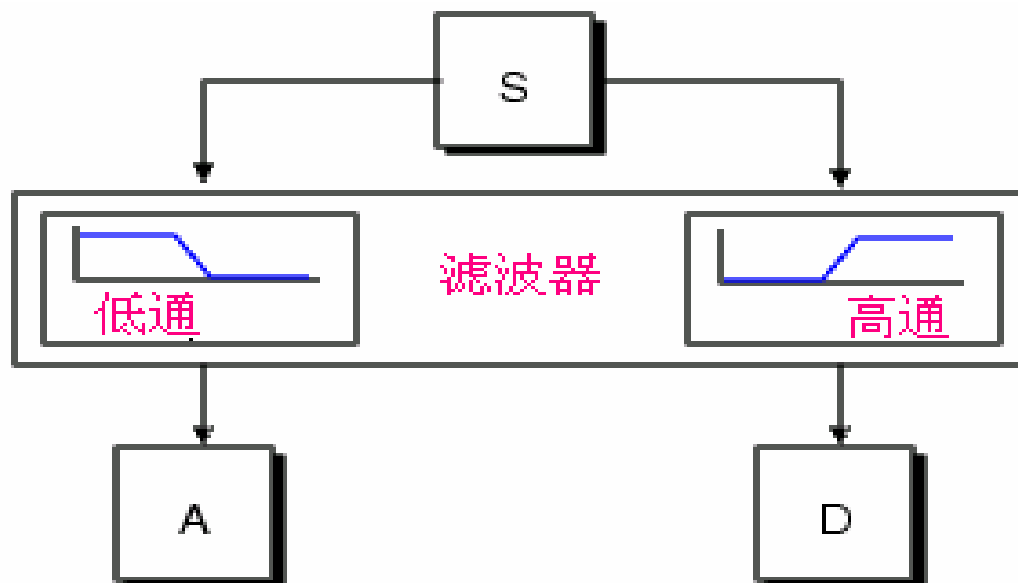


离散小波变换

- 双尺度小波变换(**dyadic wavelet transform**)
为了解决计算量的问题，缩放因子和平移参数都选择 2^j ($j > 0$ 的整数) 的倍数
- 执行离散小波变换的有效方法是使用滤波器。
该方法是Mallat在1988年开发的，叫做Mallat算法。
- 这种方法实际上是一种信号的分解方法，在数字信号处理中称为双通道子带编码。

双通道滤波过程

- A表示信号的近似值(approximations), 是大的缩放因子产生的系数, 表示信号的低频分量。
- D表示信号的细节值(detail), 是小的缩放因子产生的系数, 表示信号的高频分量。



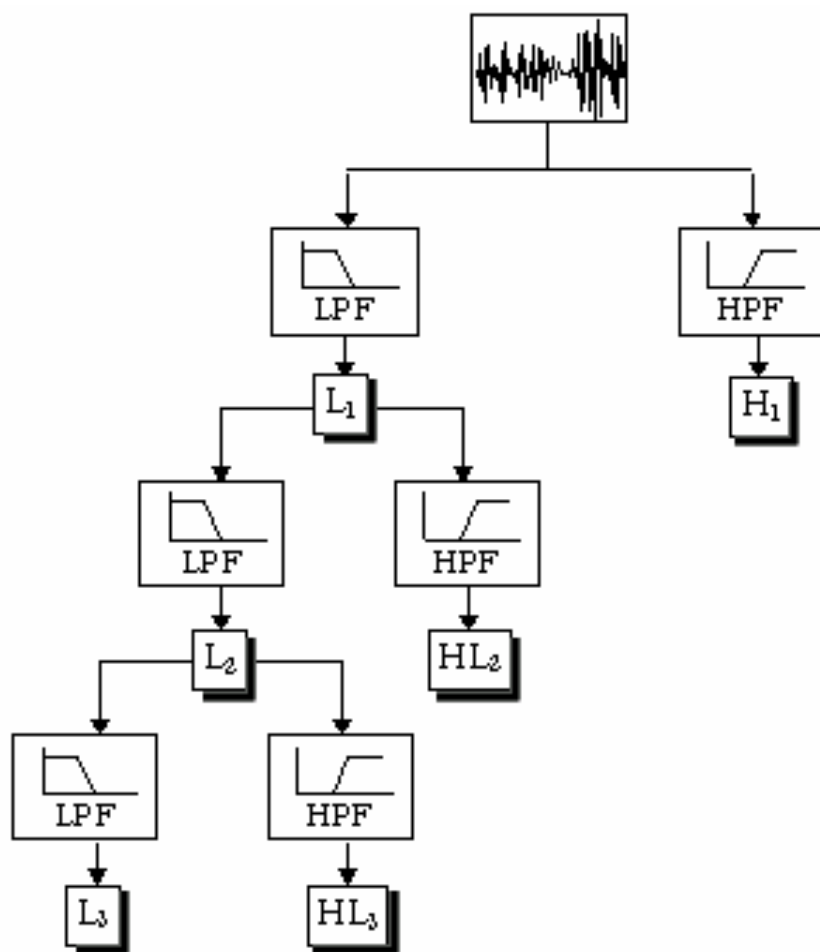


小波分解树

- wavelet decomposition tree

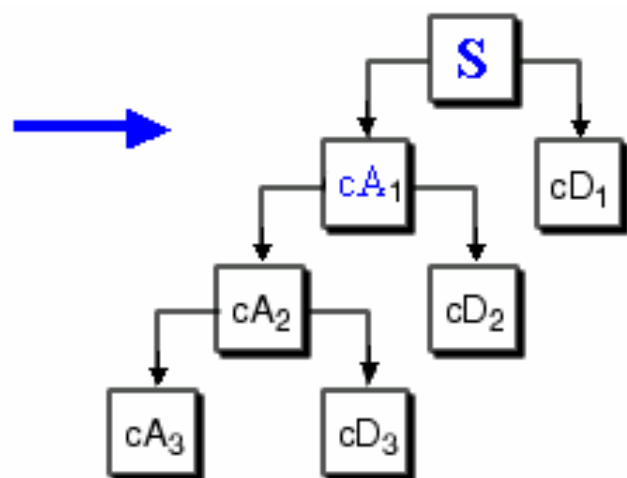
离散小波变换可以被表示成由低通滤波器和高通滤波器组成的一棵树。

- 原始信号通过这样的一对滤波器进行的分解叫做一级分解。
- 信号的分解过程可以进行多级分解, 分解级数的多少取决于要被分析的数据和用户的需要。
- 小波分解树表示只对信号的低频分量进行连续分解。

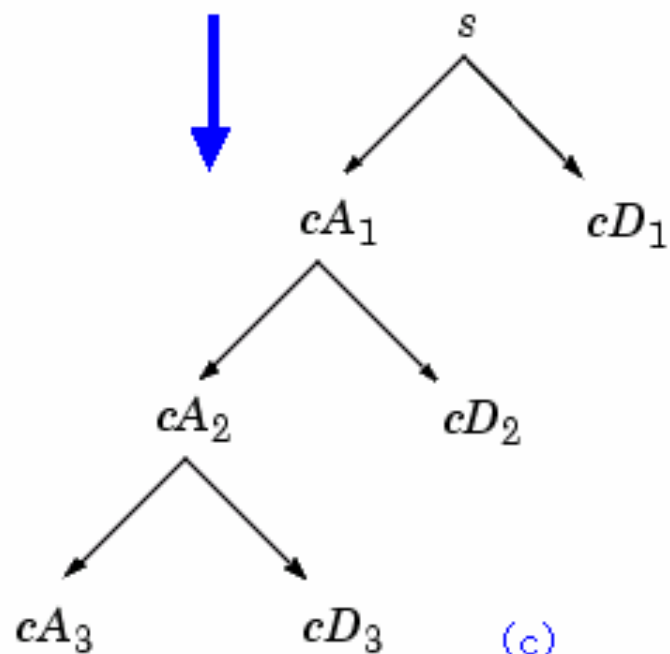


LDF: low pass filter
HDF: high pass filter

(a)



(b)



(c)

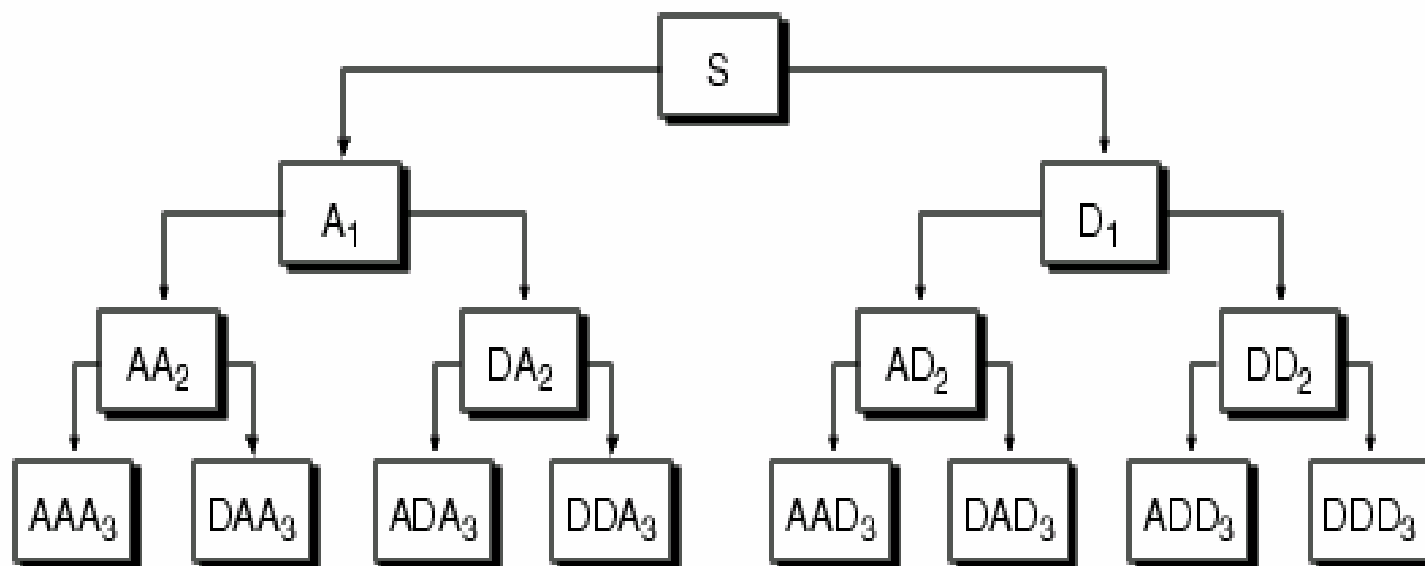


小波包分解树

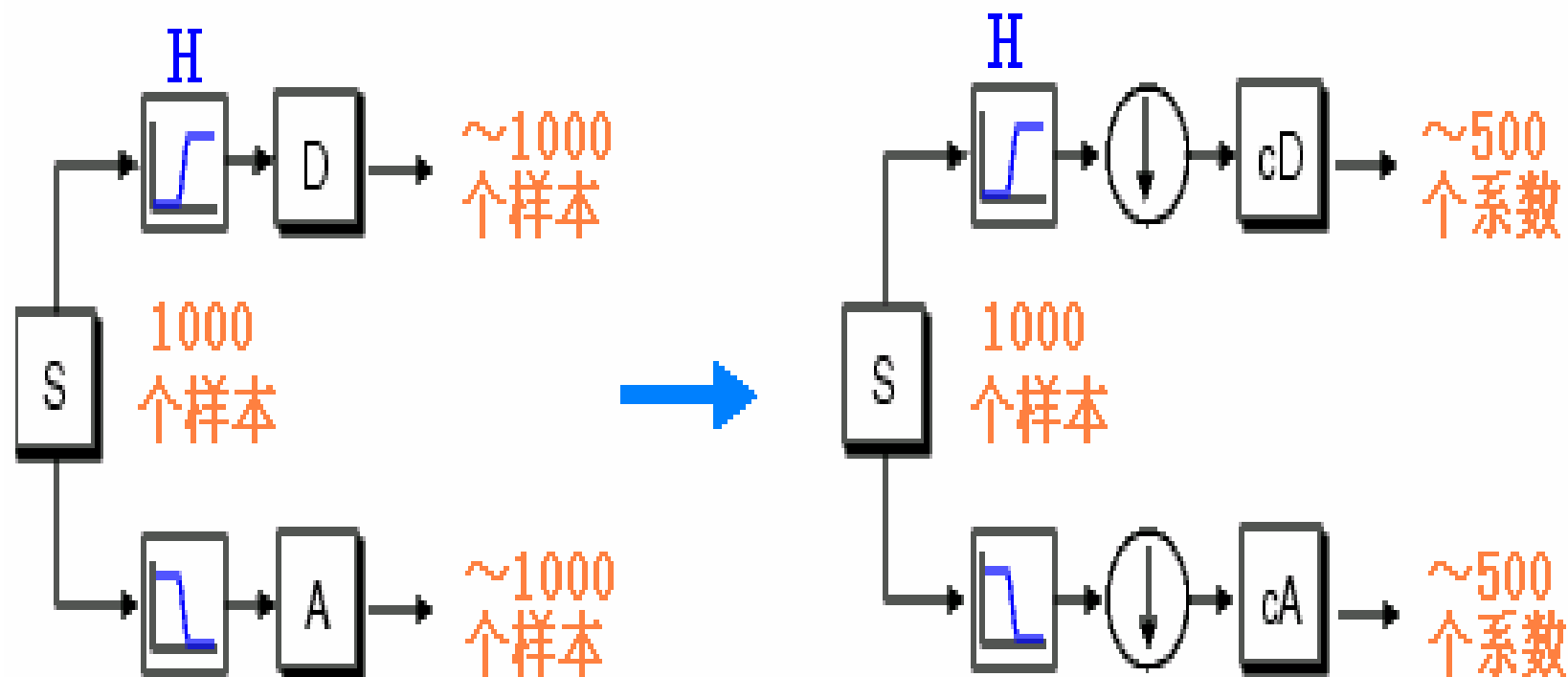
- wavelet packet decomposition tree
- 不仅对信号的低频分量连续进行分解，而且对高频分量也进行连续分解
- 得到许多分辨率较低的低频分量，而且得到许多分辨率较低的高频分量。
- 这种树是一个完整的二叉树。
- 小波包分解方法是小波分解的一般化，可为信号分析提供更丰富和更详细的信息。

三级小波包分解树

■ $S = A_1 + AAD_3 + DAD_3 + DD_2$



降采样



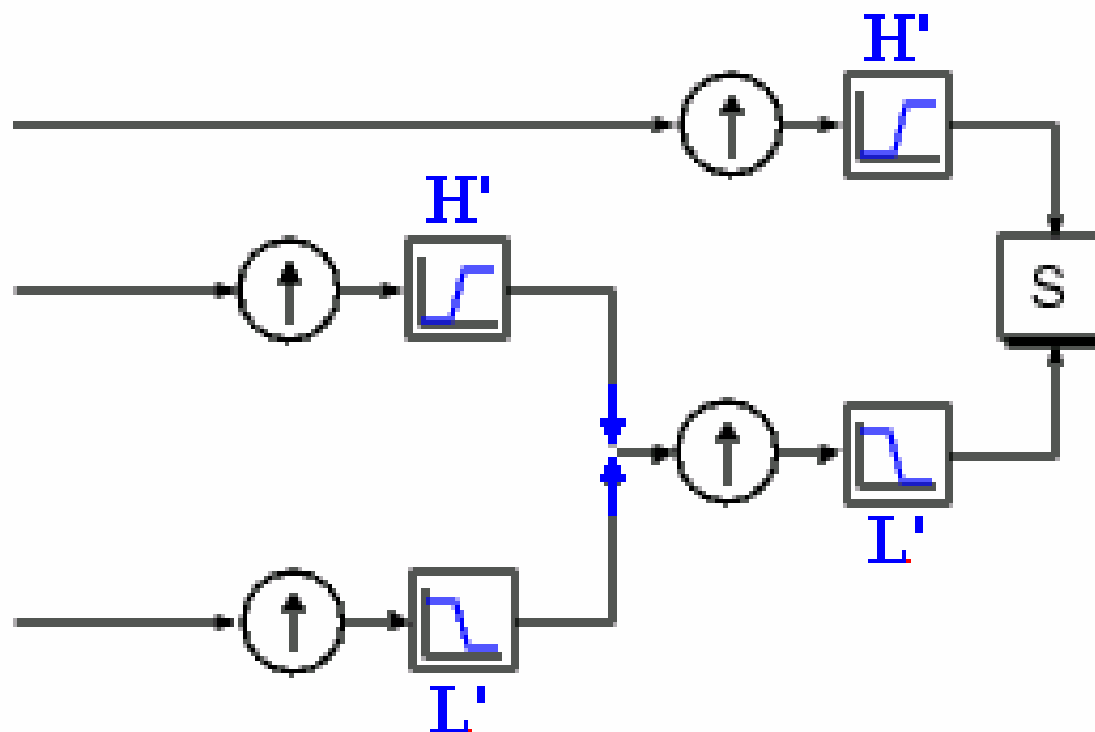
H: 高通滤波器 L: 低通滤波器



小波重构

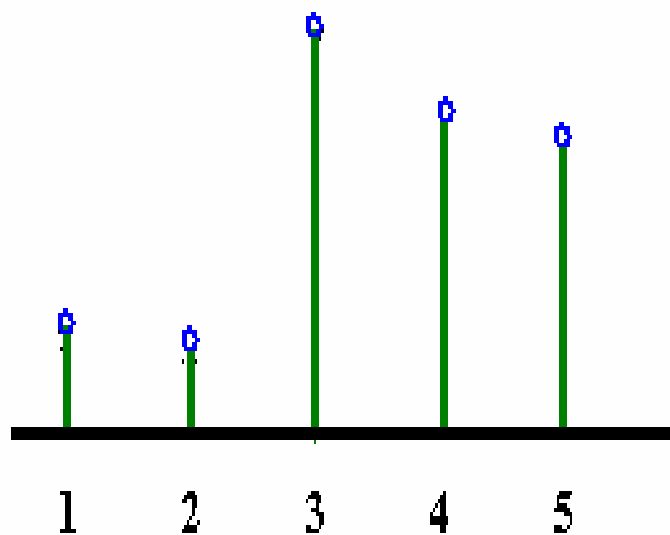
- 离散小波变换可以用来分析（分解）信号，这个过程叫做分析（分解）。
- 把分解的系数还原成原始信号的过程叫做小波重构(wavelet reconstruction)或者叫做合成(synthesis)，数学上叫做逆离散小波变换(inverse discrete wavelet transform, IDWT)。

小波重构

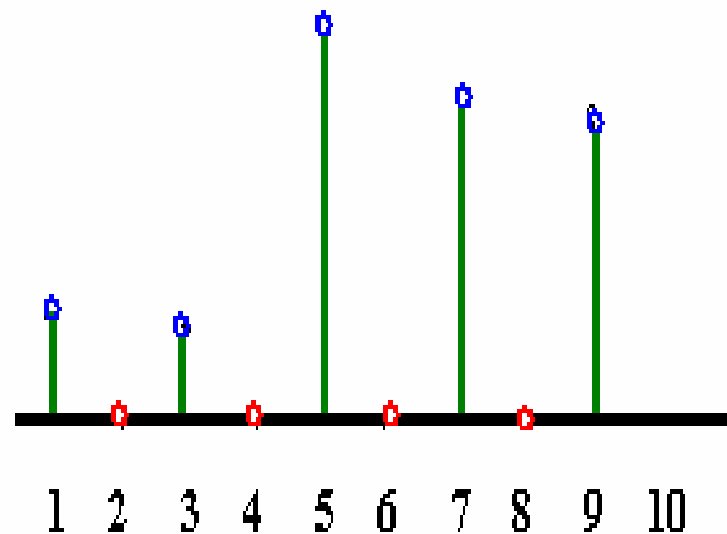


H' : 高通滤波器 L' : 低通滤波器

升采样



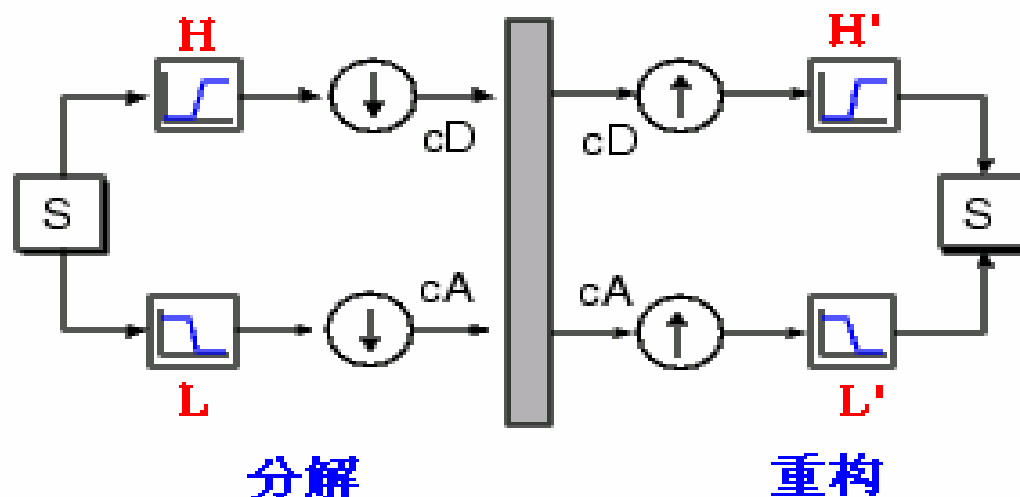
(a) 降采样信号



(b) 升采样信号

正交镜像滤波器

- 低通分解滤波器(L)和高通分解滤波器(H)以及低通重构滤波器(L')和高通重构滤波器(H')构成一个系统，这个系统叫做正交镜像滤波器(quadrature mirror filters, QMF)系统。






1.4 小波定义

- 小波可由一个定义在有限区间的函数来构造
- 母小波（基本小波） $\psi(x)$
- 一组小波基函数可通过缩放和平移基本小波来生成

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

- 
- a为缩放参数，反映特定基函数的宽度(或者叫做尺度);
 - b为平移参数，指定沿x轴平移的位置。
 - 当 $a=2^j$ 和 $b=ia$ 的情况下，一维小波基函数序列定义为

$$\psi_{i,j}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - i) \quad \text{或} \quad \psi_i^j(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - i)$$

其中，i为平移参数，j为缩放因子。



连续小波变换

- 连续小波变换

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

- 连续小波的逆变换

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x) a^{-2} da db$$

- 母小波的允许条件

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$



8.2 哈尔函数

- 哈尔基函数
- 哈尔小波函数
- 函数的规范化
- 哈尔基的构造



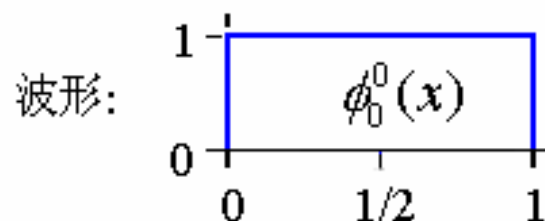
2.1 哈尔基函数

- 最简单的基函数是哈尔基函数(Haar basis function) (1909年)
- 一组分段常值函数(piecewise-constant function)组成的函数集合
- 这个函数集定义在半开区间 $[0,1)$ 上，每一个分段常值函数的数值在一个小范围里是“1”，其他地方为“0”。

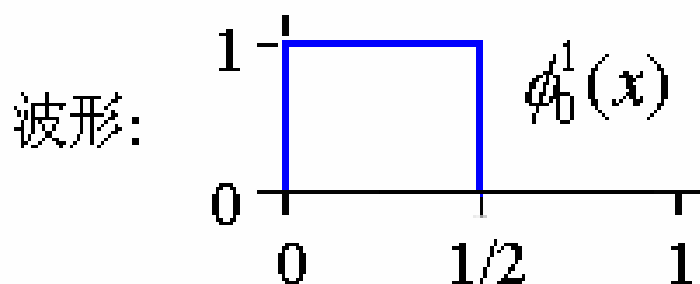
矢量空间 V^0 和 V^1

■ 框函数(box function)

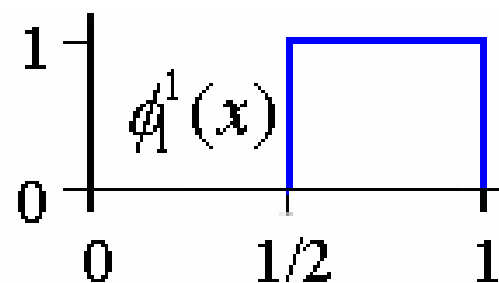
$$\phi_0^0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\phi_0^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\phi_1^1(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



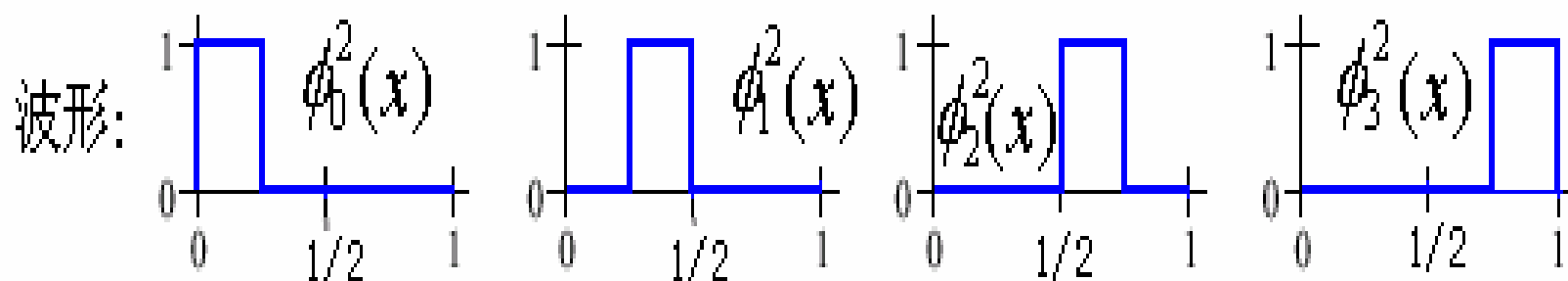
矢量空间 V^2


$$\phi_0^2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_1^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_2^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_3^2(x) = \begin{cases} 1, & 3/4 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



- 
- 可以按照这种方法继续定义基函数和由它生成的矢量空间
 - 为生成矢量空间 V^j 而定义的基函数也叫尺度函数(scaling function)
 - j 为尺度因子, 改变 j 使函数图形缩小或者放大; i 为平移参数, 改变 i 使函数沿 x 轴方向平移。

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \phi_i^j(x) = \phi(2^j x - i), \quad i = 0, 1, \dots, (2^j - 1)$$



向量空间的嵌套

- 在向量空间 V^j 中的每一个向量也被包含在向量空间 V^{j+1} 中。

$$V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^j \subset V^{j+1}$$

$$V^j \subseteq V^{j+1}$$



2.2 哈尔小波函数

- 基本哈尔小波函数(Haar wavelet functions)

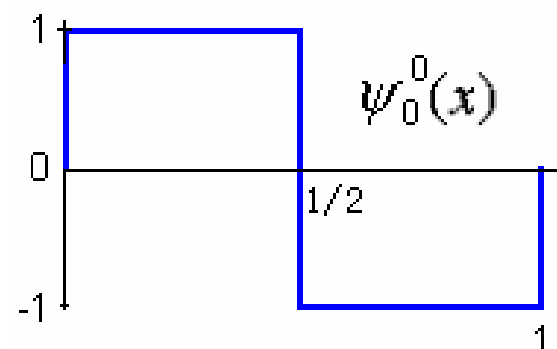
- 哈尔小波尺度函数
$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{当 } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\psi_i^j(x) = \psi(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, (2^j - 1)$$

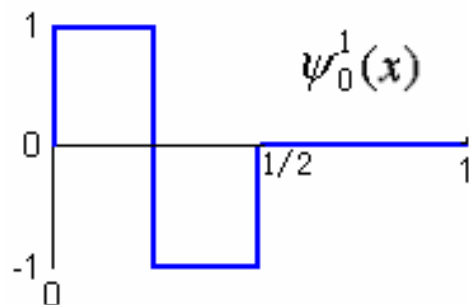
- j 为尺度因子，改变 j 使函数图形缩小或者放大； i 为平移参数，改变 i 使函数沿 x 轴方向平移。

矢量空间 W^0 和 W^1

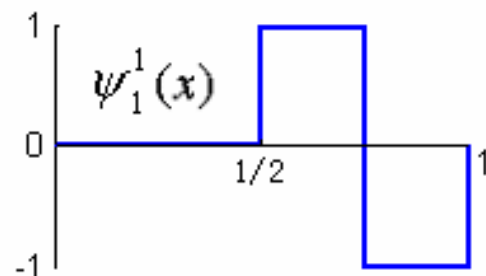
$$\psi_n^0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\psi_0^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/4 \\ -1 & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

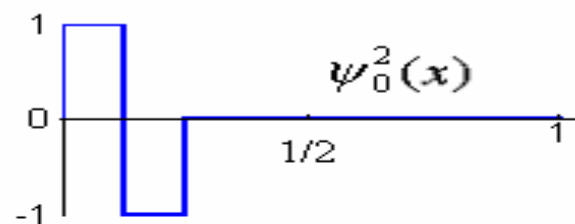


$$\psi_1^1(x) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq x < 3/4 \\ -1 & 3/4 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

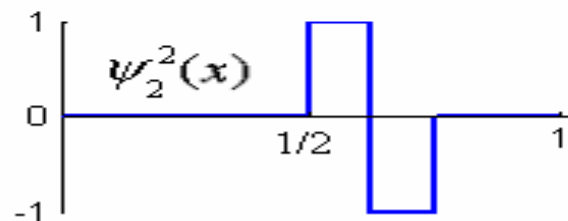


矢量空间 W^2

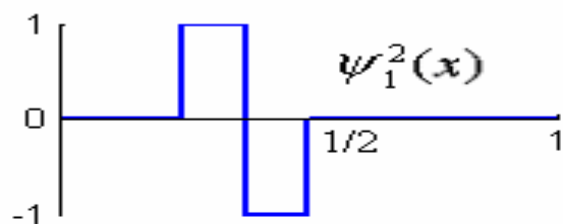
$$\psi_0^2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/8 \\ -1 & 1/8 \leq x < 2/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



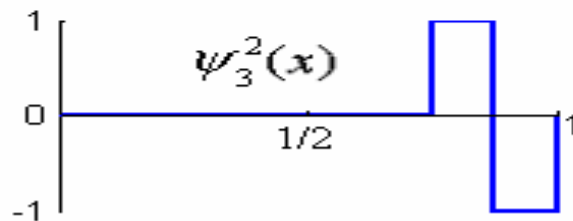
$$\psi_2^2(x) = \begin{cases} 1 & 4/8 \leq x < 5/8 \\ -1 & 5/8 \leq x < 6/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\psi_1^2(x) = \begin{cases} 1 & 2/8 \leq x < 3/8 \\ -1 & 3/8 \leq x < 4/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\psi_3^2(x) = \begin{cases} 1 & 6/8 \leq x < 7/8 \\ -1 & 7/8 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$





矢量空间的嵌套

- 在矢量空间 W^j 中的每一个矢量也被包含在矢量空间 W^{j+1} 中。



2.3 函数的规范化

- 在半开区间 $[0,1)$ 中, 规范化的函数

$$\langle \phi_i^j(x), \phi_i^j(x) \rangle = \int_0^1 \phi_i^j(x)^2 dx = 1$$

$$\langle \psi_i^j(x), \psi_i^j(x) \rangle = \int_0^1 \psi_i^j(x)^2 dx = 1$$

- 哈尔基和哈尔小波的规范化

$$\phi_i^j(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - i) \quad \psi_i^j(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - i)$$

- 如果小波函数的定义不是在 $[0,1)$ 区间中, 常数因子将改变
- 正交性(?)



2.4 哈尔基的结构

- 使用哈尔基函数和哈尔小波函数生成的矢量空间 V^j 和 W^j 具有下面的性质 $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$
- 在矢量空间 V^{j+1} 中，根据所选择的内积，生成矢量空间 V^j 的所有函数与生成矢量空间 W^j 的所有函数都是正交的，即子空间 V^j 是子空间 W^j 的正交补(orthogonal complement)。
- 在矢量空间 V^{j+1} 中，矢量空间 W^j 中的小波可用来表示一个函数在矢量空间 V^j 中不能表示的部分。



基函数的重要性质

- 生成矢量空间 W_j 的基函数与生成矢量空间 V_j 的基函数构成矢量空间 V_{j+1} 的一组基。
- 生成矢量空间 W_j 的每一个基函数与生成矢量空间 V_j 的每一个基函数正交。
- 正交规范基函数
- 小波变换的基本思想是用一组小波函数和基函数表示一个函数或者信号

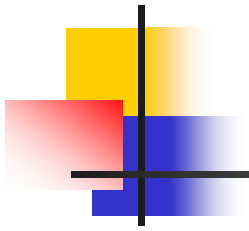


8.3 1D哈尔小波变换

- 求有限信号的均值和差值

[例8. 1] 把由4个像素组成的一幅图像用1个平均像素值和3个细节系数表示

分辨率	平均值	细节系数
4	[9 7 3 5]	
2	[8 4]	[1 -1]
1	[6]	[2]

- 
- 变换过程中没有丢失信息，因为能够从所记录的数据中重构出原始图像。
 - 对这个给定的变换，可以从所记录的数据中重构出各种分辨率的图像。例如，在分辨率为1的图像基础上重构出分辨率为2的图像，在分辨率为2的图像基础上重构出分辨率为4的图像。
 - 通过变换之后产生的细节系数的幅度值比较小，这就为图像压缩提供了一种途径，例如去掉一些微不足道的细节系数并不影响对重构图像的理解。

1D哈尔小波变换---V2

$$I(x) = c_0^2 \phi_0^2(x) + c_1^2 \phi_1^2(x) + c_2^2 \phi_2^2(x) + c_3^2 \phi_3^2(x)$$

$$I(x) = 9\phi_0^2(x) + 7\phi_1^2(x) + 3\phi_2^2(x) + 5\phi_3^2(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 9 \times \begin{array}{c} \text{[Step function: 1 on } [0, 1], 0 \text{ elsewhere]} \end{array} \phi_0^2(x) \\ & + 7 \times \begin{array}{c} \text{[Step function: 1 on } [1, 2], 0 \text{ elsewhere]} \end{array} \phi_1^2(x) \\ & + 3 \times \begin{array}{c} \text{[Step function: 1 on } [2, 3], 0 \text{ elsewhere]} \end{array} \phi_2^2(x) \\ & + 5 \times \begin{array}{c} \text{[Step function: 1 on } [3, 4], 0 \text{ elsewhere]} \end{array} \phi_3^2(x) \end{aligned}$$



$$V^2 = V^1 \oplus W^1$$

$$I(x) = c_0^1 \phi_0^1(x) + c_1^1 \phi_1^1(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$I(x) = 8 \times \phi_0^1(x) + 4 \times \phi_1^1(x) + 1 \times \psi_0^1(x) + -1 \times \psi_1^1(x)$$

用 V^0 , W^0 和 W^1 中的基表示

$$V^2 = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1$$

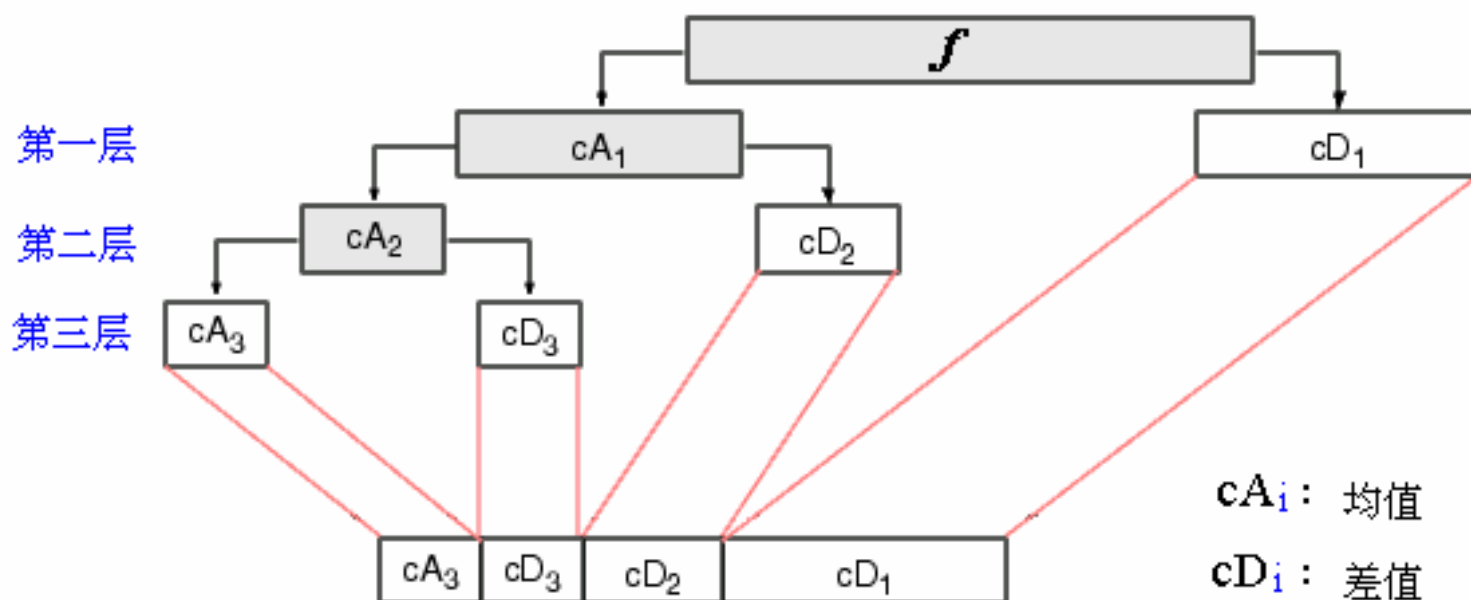
$$I(x) = c_0^0 \phi_0^0(x) + d_0^0 \psi_0^0(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$\begin{aligned}
 I(x) = & 6 \times \text{[rectangle]} \quad \phi_0^0(x) \\
 & + 2 \times \text{[step up]} \quad \psi_0^0(x) \\
 & + 1 \times \text{[step down]} \quad \psi_0^1(x) \\
 & + -1 \times \text{[step up]} \quad \psi_1^1(x)
 \end{aligned}$$

规范化算法

- [例8.2] 对函数作哈尔小波变换

$$f(x) = [2, 5, 8, 9, 7, 4, -1, 1]$$





规范化的哈尔小波变换算法

proc *DecomposeArray*(*C* : *array* [0..*k* - 1] of *color*):

while *k* > 1 **do**:

k ← *k* / 2

for *i* ← 0 to *k* - 1 **do**:

$C'[i] \leftarrow (C[2i] + C[2i + 1]) / \sqrt{2}$

$C'[k + i] \leftarrow (C[2i] - C[2i + 1]) / \sqrt{2}$

end for

C ← *C'*

end while

end proc

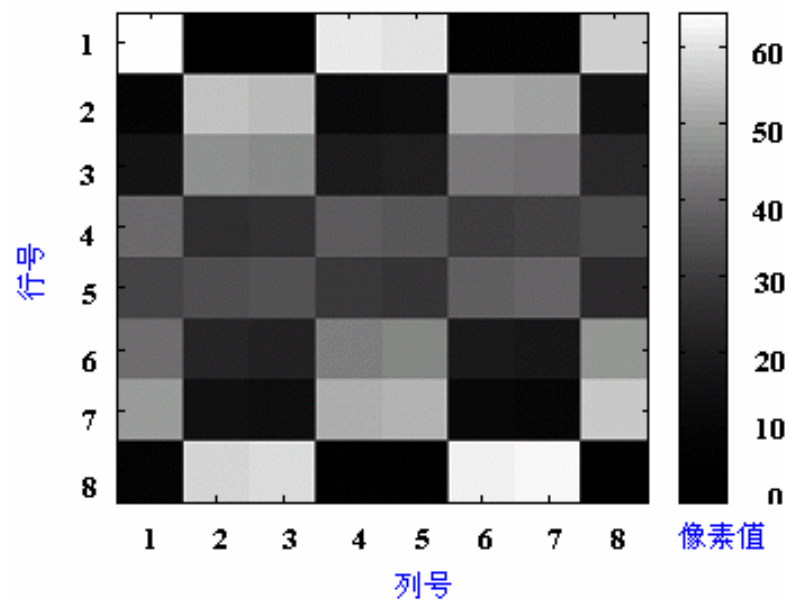



8.4 二维哈尔小波变换

- 以离散余弦变换(DCT)为基础的JPEG标准算法，把输入图像分块处理，会产生“块效应”
- 在小波变换中，由于小波变换中使用的基函数的长度是可变的，因此无须把输入图像进行分块，避免了“块效应”

4.1 二维小波变换举例

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$





对矩阵的每一行、列计算

$$\begin{bmatrix} 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 31 & -29 & 27 & -25 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & -23 & 21 & -19 & 17 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & -15 & 13 & -11 & 9 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 7 & -5 & 3 & -1 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -1 & 3 & -5 & 7 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 9 & -11 & 13 & -15 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 17 & -19 & 21 & -23 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -25 & 27 & -29 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 27 & -25 & 23 & -21 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -11 & 9 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -5 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 21 & -23 & 25 & -27 \end{bmatrix}$$



分析

- 左上角的元素表示整个图像块的像素值的平均值，其余是该图像块的细节系数。
- 如果从矩阵中去掉表示图像的某些细节系数，而且重构的图像质量仍然可以接受，则可以实现压缩。具体做法是设置一个阈值 δ ，例如细节系数 $< \delta$ ，就当作“0”看待。

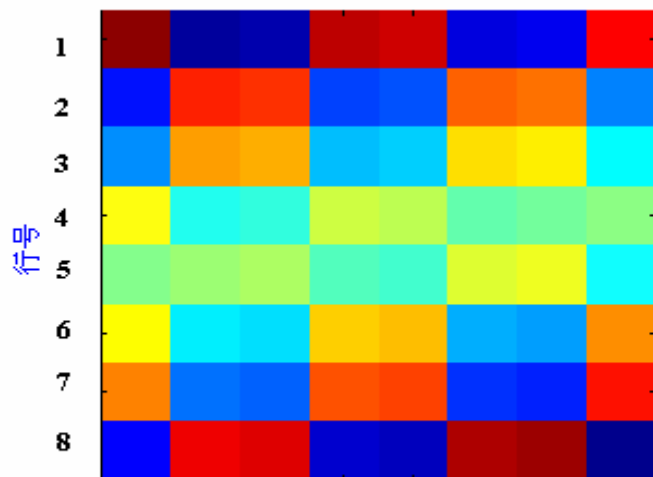

$$\delta = 5$$

$$\begin{bmatrix} 32.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & -25 & 23 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & -23 & 25 & -27 \end{bmatrix}$$

原图与重构图像的比较

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$

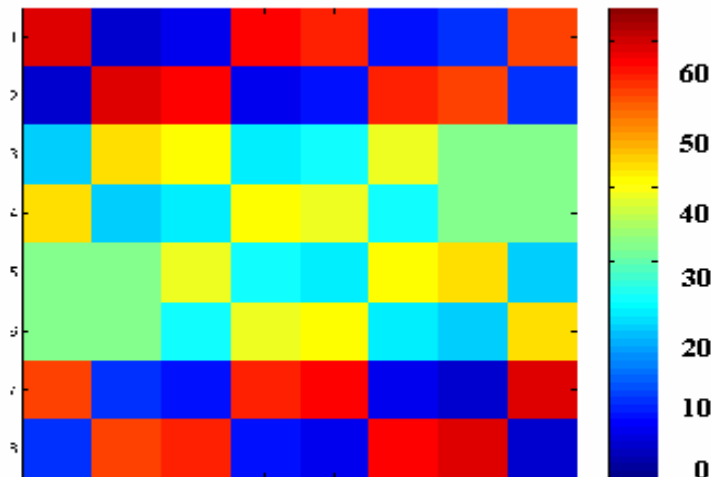
原始图像



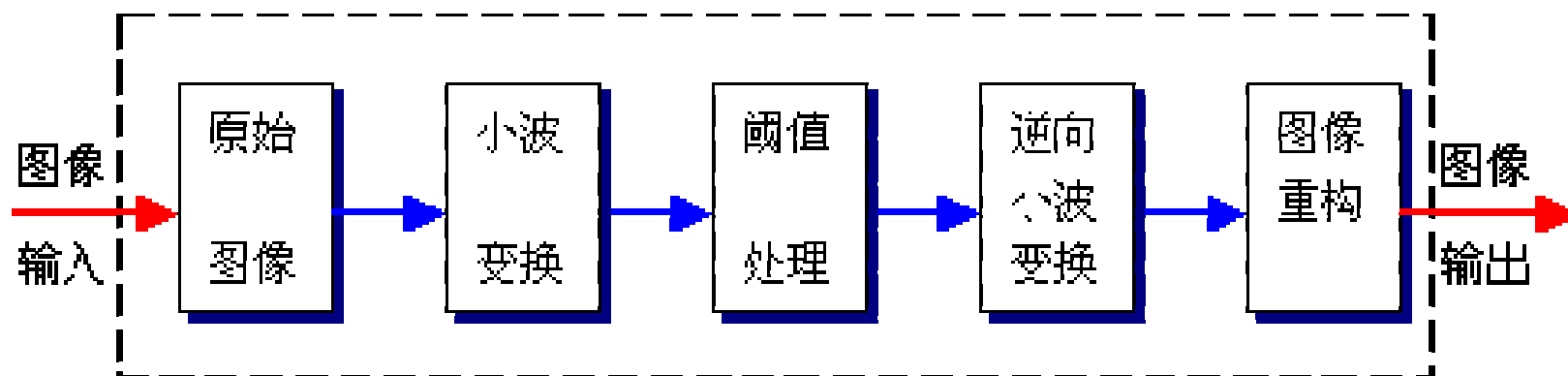
$$\begin{bmatrix} 59.5 & 5.5 & 7.5 & 57.5 & 55.5 & 9.5 & 11.5 & 53.5 \\ 5.5 & 59.5 & 57.5 & 7.5 & 9.5 & 55.5 & 53.5 & 11.5 \\ 21.5 & 43.5 & 41.5 & 23.5 & 25.5 & 39.5 & 32.5 & 32.5 \\ 43.5 & 21.5 & 23.5 & 41.5 & 39.5 & 25.5 & 32.5 & 32.5 \\ 32.5 & 32.5 & 39.5 & 25.5 & 23.5 & 41.5 & 43.5 & 21.5 \\ 32.5 & 32.5 & 25.5 & 39.5 & 41.5 & 23.5 & 21.5 & 43.5 \\ 53.5 & 11.5 & 9.5 & 55.5 & 57.5 & 7.5 & 5.5 & 59.5 \\ 11.5 & 53.5 & 55.5 & 9.5 & 7.5 & 57.5 & 59.5 & 5.5 \end{bmatrix}$$

重构图像

像素值



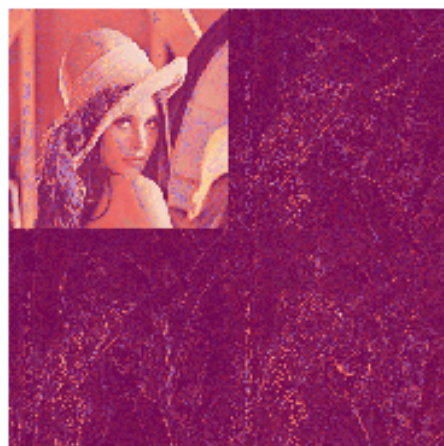
小波图像分解与重构



小波分解产生多种分辨率图像



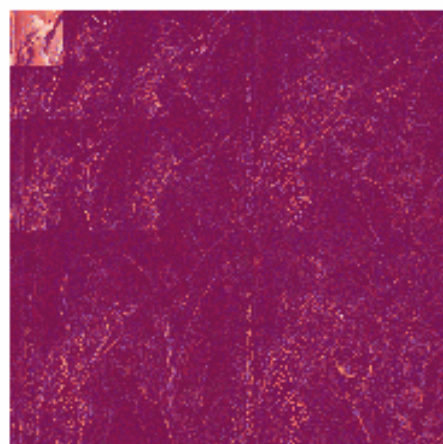
(a) 原始图像



(b) 1/4分辨率图像



(c) 1/8分辨率图像



(d) 1/16分辨率图像

不同阈值的重构图像

原始图像



$\delta = 5$

$\delta = 10$



$\delta = 20$

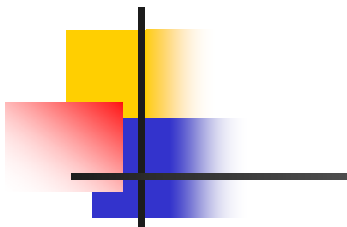


二维小波变换标准分解方法

*****>

```
procedure StandardDecomposition(C: array [1...h, 1...w] of reals)  
    for row 1 to h do  
        Decomposition(C [row, 1...w])  
    end for  
    for col 1 to w do  
        Decomposition(C [1...h, col])  
    end for  
end procedure
```

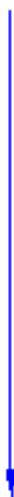
*****>



行变换



列变换





二维小波变换非标准分解方法

procedure NonstandardDecomposition(C : array [1... h , 1... h] of reals)

$C \leftarrow C/h$ (normalize input coefficients)

while $h > 1$ **do**

for row 1 to h **do**

DecompositionStep(C [row, 1... h])

end for

for col 1 to h **do**

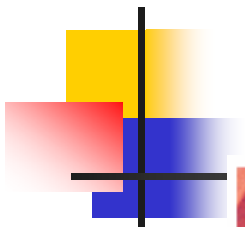
DecompositionStep(C [1... h , col])

end for

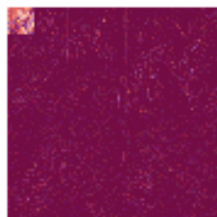
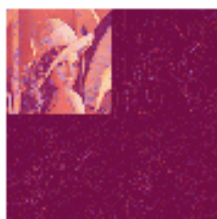
$h \leftarrow h/2$

end while

end procedure

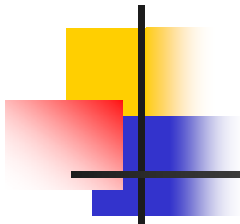


行变换



列变换



- 
-
- 标准分解方法和非标准分解相比，得到的变换结果是完全相同的
 - 非标准算法的计算量少一些。



练习

- 写出矢量空间 W^3 的哈尔小波，并画出它的波形
- 使用规范化的小波变换算法，用MATLAB编写一个M文件，计算 $f(x)=[2,5,8,9,7,4,-1,-1]$ 的哈尔小波变换