

# 小波阈值去噪算法的新改进

叶重元, 黄永东

YE Chongyuan, HUANG Yongdong

北方民族大学 信息与系统科学研究所, 银川 750021

Institute of Information and System Science, North University for Nationalities, Yinchuan 750021, China

YE Chongyuan, HUANG Yongdong. New improvement of wavelet threshold denoising algorithm. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(12): 141-145.

**Abstract:** A new threshold function is put forward, which is based on the multiresolution analysis wavelet threshold denoising method introduced by D.L. Donoho and I.M. Johnstone. The new threshold function is not only easy to compute but also has perfect mathematical properties by contrast to the classical hard, soft, semisoft threshold function and several existing improved threshold functions. The simulation experiments for Heavisine and Droppler signals show that the new threshold function can suppress the white noise effectively, it is better than above mentioned denoising methods in the visual effect and Signal Noise Ratio (SNR) and Mean Square Error (MSE). Thus, it has high practical value.

**Key words:** wavelet transform; denoising; threshold function

**摘 要:** 在 D.L. Donoho 和 I.M. Johnstone 提出的多分辨率分析小波阈值去噪方法的基础上, 提出了一种新的阈值函数。与传统的硬阈值、软阈值、半软阈值以及已有的改进阈值函数相比, 该函数不仅易于计算, 而且具有优越的数学特性。通过 Heavisine 和 Droppler 信号的仿真实验表明, 新的阈值函数可以有效地去除白噪声干扰, 无论在视觉效果上还是在信噪比和均方误差定量指标上, 均优于上述几种去噪方法, 具有较高的实用价值。

**关键词:** 小波变换; 去噪; 阈值函数

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2011.12.040

文章编号: 1002-8331(2011)12-0141-05

文献标识码: A

中图分类号: TP911.7

## 1 引言

由于现实生活中, 信号在获取和传输过程中, 不可避免地会引入噪声, 并对后续的信号处理产生不利的影响, 为了后续更高层次的处理, 有必要对信号进行去噪处理。1994 年, D.L. Donoho 和 I.M. Johnstone<sup>[1]</sup>在小波变换的基础上提出了阈值去噪的概念后, 该方法在去噪方面得到了广泛应用<sup>[1-9]</sup>。阈值函数关系着重构信号的连续性和精度, 对小波去噪的效果有很大的影响。目前, 阈值的处理分硬阈值、软阈值和半软阈值<sup>[4-5, 9]</sup>三种处理方式。其中硬阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 小于阈值的点变为零, 其他保持不变; 软阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 当数据的绝对值小于阈值时, 令其为零, 大于或等于阈值的数据点则向零收缩, 变为该点值与阈值之差; 半软阈值处理提出了上阈值和下阈值, 将信号的绝对值与上、下阈值进行比较, 小于或等于下阈值的点变为零, 大于上阈值的点保持不变, 而对于信号的绝对值介于下阈值和上阈值之间的点作收缩处理。硬阈值函数的不连续性使得去噪后的信号较之原信号偏差较大且仍然含有明显的噪声; 采用软阈值方法虽然连续性好, 但估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定的偏差, 使得去噪后的信号方差过大, 当噪声信号很不规

则时显得过于光滑; 半软阈值函数是硬阈值函数和软阈值函数的一种折衷形式, 保留了较大的系数而且具有连续性, 但是半软阈值函数需要确定两个阈值, 增加了算法的复杂程度, 且上、下阈值的选取影响着重构信号的精度。此外, 文献[6]中给出的阈值函数虽然解决了估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定偏差的问题, 但是其连续性差; 文献[7]中提出的阈值函数虽然其连续性好, 但是估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定偏差的问题仍然没有解决。为了克服上述去噪方法存在的缺点, 本文提出了一种新的阈值函数, 其连续性好且便于调节, 能够解决估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定偏差的问题, 具有较高的实用价值。

## 2 小波阈值去噪原理

假设一个叠加了高斯白噪声的信号为:

$$f(t) = s(t) + n(t)$$

其中  $s(t)$  为原始信号,  $n(t)$  为方差  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 服从  $N(0, \sigma^2)$ 。

真实信号通常为低频或比较平稳的信号, 而噪声则表现为高频信号。小波变换的稀疏性及去相关性保证了真实信号

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10961001); 教育部科学技术研究重点项目(No.209152); 宁夏自然科学基金(No.NZ0846)。

**作者简介:** 叶重元(1985—), 男, 硕士研究生, 研究方向为小波分析与信息处理; 黄永东(1974—), 男, 博士, 教授。E-mail: yechongyuan521@126.com

**收稿日期:** 2009-10-20; **修回日期:** 2009-12-08

小波变换的能量集中在有限的小波系数上,由信号产生的小波系数幅值较大,但其数目较小;而高斯噪声的小波变换仍呈高斯分布,噪声的能量比较均匀地分布在所有的小波系数上,其对应的小波系数幅值较小。因此通过在不同尺度上选取合适的阈值,并对小波系数进行阈值量化处理,从而使噪声得到有效的抑制,最后进行小波逆变换,得到去噪后的重构信号。

小波阈值去噪的过程可以分为如下三个步骤:

(1)对含噪信号作小波分解。选择合适的小波并确定分解层次,然后进行分解计算,得到一组小波系数  $w_{j,k}$ 。

(2)对小波分解后的高频系数作阈值量化处理。对各个分解尺度下的高频系数选择一个阈值进行阈值量化处理,得到估计小波系数  $\hat{w}_{j,k}$ 。

(3)小波逆变换对信号重构得到去噪信号。根据小波分解的最底层低频系数和各层阈值量化后的高频系数进行小波重构,得到估计信号  $\hat{f}(t)$ ,即为去噪后的信号。

小波阈值去噪原理如图1所示。

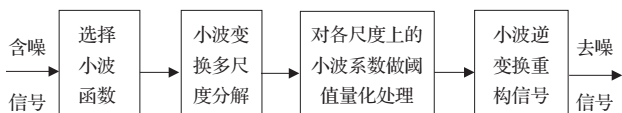


图1 小波阈值去噪流程图

### 3 阈值的选取及其量化

如何选取阈值和阈值函数是实现小波去噪算法中最关键的两个问题,它关系到信号去噪的质量。经典的阈值函数主要有以下三种:

(1)硬阈值函数

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (1)$$

(2)软阈值函数

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(w_{j,k}) (|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

(3)半软阈值函数

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} 0, & |w_{j,k}| \leq \lambda_1 \\ \text{sign}(w_{j,k}) \frac{\lambda_2 (|w_{j,k}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 < |w_{j,k}| \leq \lambda_2 \\ w_{j,k}, & |w_{j,k}| > \lambda_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\lambda_2$  为上阈值,  $\lambda_1$  为下阈值。

对于阈值函数而言,如果阈值取得过大,在滤掉噪声的同时,也可能将信号的细节信息滤掉,导致信号过度平滑;而阈值过小又会保留噪声,达不到去噪的目的。目前常用的阈值选择方法有:

(1)固定阈值

$$T_1 = \sigma \sqrt{2 \log N} \quad (4)$$

它是根据D.L.Donoho和I.M.Johnstone给出的关于阈值估计风险定理确定的阈值。

(2)Stein 无偏似然估计阈值

在不同的尺度上选择不同的阈值并收缩此尺度的小波系数。设  $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ , 并且  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ ,  $P$  的元素为小波系数的平方按由小到大的顺序排列。定义风险向量  $R$ , 其元素为  $r_i = [N - 2i - (n - i)p_i + \sum_{k=1}^i p_k] / N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 。以

$R$  中元素的最小值  $r_\alpha$  作为风险值,由  $r_\alpha$  的下标  $\alpha$  求出对应的阈值:

$$T_2 = \sigma \sqrt{p_\alpha} \quad (5)$$

(3)启发式阈值

启发式阈值是前两种阈值的综合,所选择的是最优预测变量阈值。如果信噪比很小时,按式(4)选取阈值,如果信噪比很大时,按式(5)选取阈值。设  $sum$  为  $N$  个小波系数的平方和,令  $\mu = (sum - N) / N$ ,  $v = (\ln N)^{3/2} \times N^{1/2}$ , 则

$$T_3 = \begin{cases} T_1, & \mu < v \\ \min(T_1, T_2), & \mu > v \end{cases} \quad (6)$$

(4)最小最大准则阈值

最小最大准则阈值也是一种固定的阈值选择形式,它所产生的是一个最小均方差的极值,而不是无误差。

$$T_4 = \begin{cases} \sigma(0.393\ 6 + 0.182\ 9) \ln N, & N < 32 \\ 0, & N > 32 \end{cases} \quad (7)$$

其中  $N$  为信号采样长度,  $\sigma$  为噪声方差。

### 4 一类新的阈值函数的构建

硬、软阈值和半软阈值方法虽然在实际中得到了广泛的应用,也取得了较好的效果,但这些算法本身存在着一些缺陷。在硬阈值方法中,处理过的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  在  $|w_{j,k}| = \lambda$  处是不连续的,在信号重构时容易产生 Pseudo-Gibbs 现象;而经过软阈值方法处理过的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  虽然整体连续性好,但  $\hat{w}_{j,k}$  与  $w_{j,k}$  之间总是存在着恒定的偏差,使得去噪后的信号方差过大,当噪声信号很不规则时显得过于光滑,这将直接影响重构信号和原始信号的逼近程度,给重构信号带来不可避免的误差;半软阈值函数是硬阈值函数和软阈值函数的一种折衷形式,保留了较大的系数而且具有连续性,但是半软阈值函数需要确定两个阈值,增加了算法的复杂程度,且上、下阈值的选取影响着重构信号的精度。

为了克服硬、软阈值和半软阈值方法的缺点,文献[6-7]提出了两种改进的阈值函数,分别如下所示:

(1)函数1<sup>[6]</sup>

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(w_{j,k}) (|w_{j,k}| - \frac{\beta \lambda}{\beta + |w_{j,k}| - \lambda}), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\beta$  为调节因子,且  $\beta$  为正数。

(2)函数2<sup>[7]</sup>

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} u w_{j,k} + (1 - u) \text{sign}(w_{j,k}) (|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (9)$$

其中  $u = 1 - e^{-\alpha(|w_{j,k}| - \lambda)^2}$ , 且  $\alpha$  为正数。

阈值函数1虽然解决了估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定偏差的问题,但是其连续性差;阈值函数2虽然其连续性好,但是估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定偏差的问题仍然没有解决。为了克服上述缺点,在这里提出了一种新的阈值函数:

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} u w_{j,k} + (1 - u) \text{sign}(w_{j,k}) (|w_{j,k}| - \frac{\beta \lambda}{\beta + |w_{j,k}| - \lambda}), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)知,新阈值函数继承了函数1和函数2的优点。

首先, 新阈值函数具有连续性, 当  $|w_{j,k}| = \lambda$ ,  $\hat{w}_{j,k} = 0$ , 当  $\hat{w}_{j,k} \rightarrow \lambda$  时,  $\hat{w}_{j,k} \rightarrow 0$ , 即  $w_{j,k}$  在  $|w_{j,k}| = \lambda$  处是连续的, 且当  $|w_{j,k}| \geq \lambda$ , 其高阶可导, 便于进行各种数学处理。其次, 当  $|w_{j,k}| \rightarrow \infty$  时,  $\hat{w}_{j,k} \rightarrow w_{j,k}$ , 因此新阈值函数以直线  $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k}$  为渐近线, 随着  $w_{j,k}$  的增加  $\hat{w}_{j,k}$  逐渐接近  $w_{j,k}$ , 克服了软阈值函数中  $\hat{w}_{j,k}$  与  $w_{j,k}$  之间总是存在着恒定的偏差的缺点。

当  $\alpha = 0$  时, 新阈值函数就为函数 1, 即当  $\beta \rightarrow 0$  时, 新阈值函数为硬阈值函数, 当  $\beta \rightarrow \infty$  时, 新阈值函数为软阈值函数; 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时新阈值函数就变为硬阈值函数。因此与函数 1 和函数 2 相比, 新阈值函数不仅具有整体连续性的优点, 而且调

节更加灵活, 通过调节  $\alpha$ 、 $\beta$  来得到实用的阈值函数。

## 5 仿真实验与分析

(1) 为了检验新阈值函数的去噪效果, 说明新阈值函数在去噪算法中的有效性, 使用 Matlab 软件对含噪的 Heavisine 和 Droptler 信号, 分别用传统的硬、软阈值函数、半软阈值函数以及文献[6-7]中的阈值函数与新阈值函数进行仿真实验。在进行小波分解时, 选取小波基为 dB4, 分解层数取为 4, 阈值  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log N}$ 。

Heavisine 信号去噪后的效果如图 2 所示。Droptler 信号去噪后的效果如图 3 所示。

(2) 信号去噪效果可以用信噪比 (SNR) 和均方误差

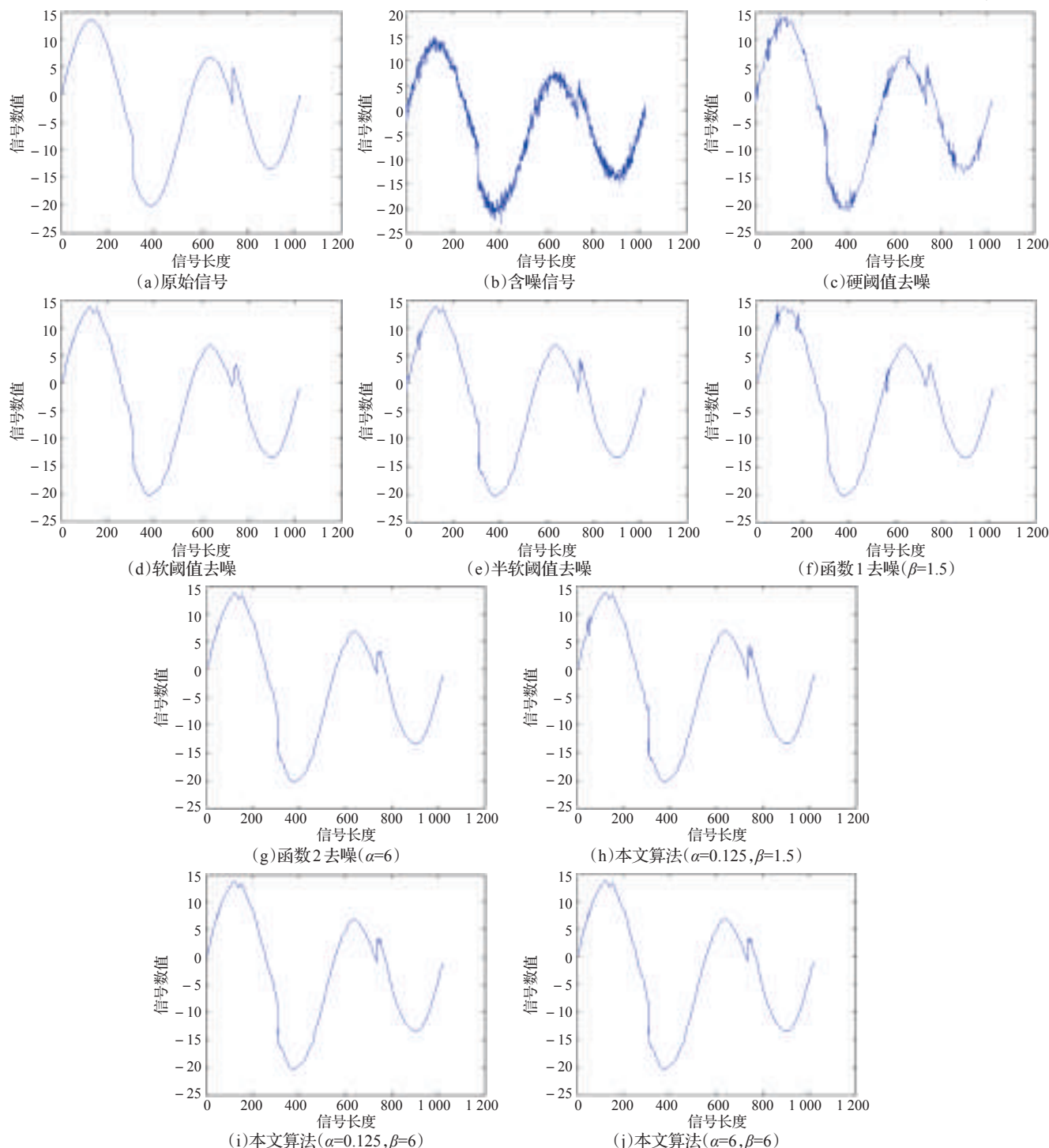


图2 各阈值函数对 Heavisine 信号去噪效果图

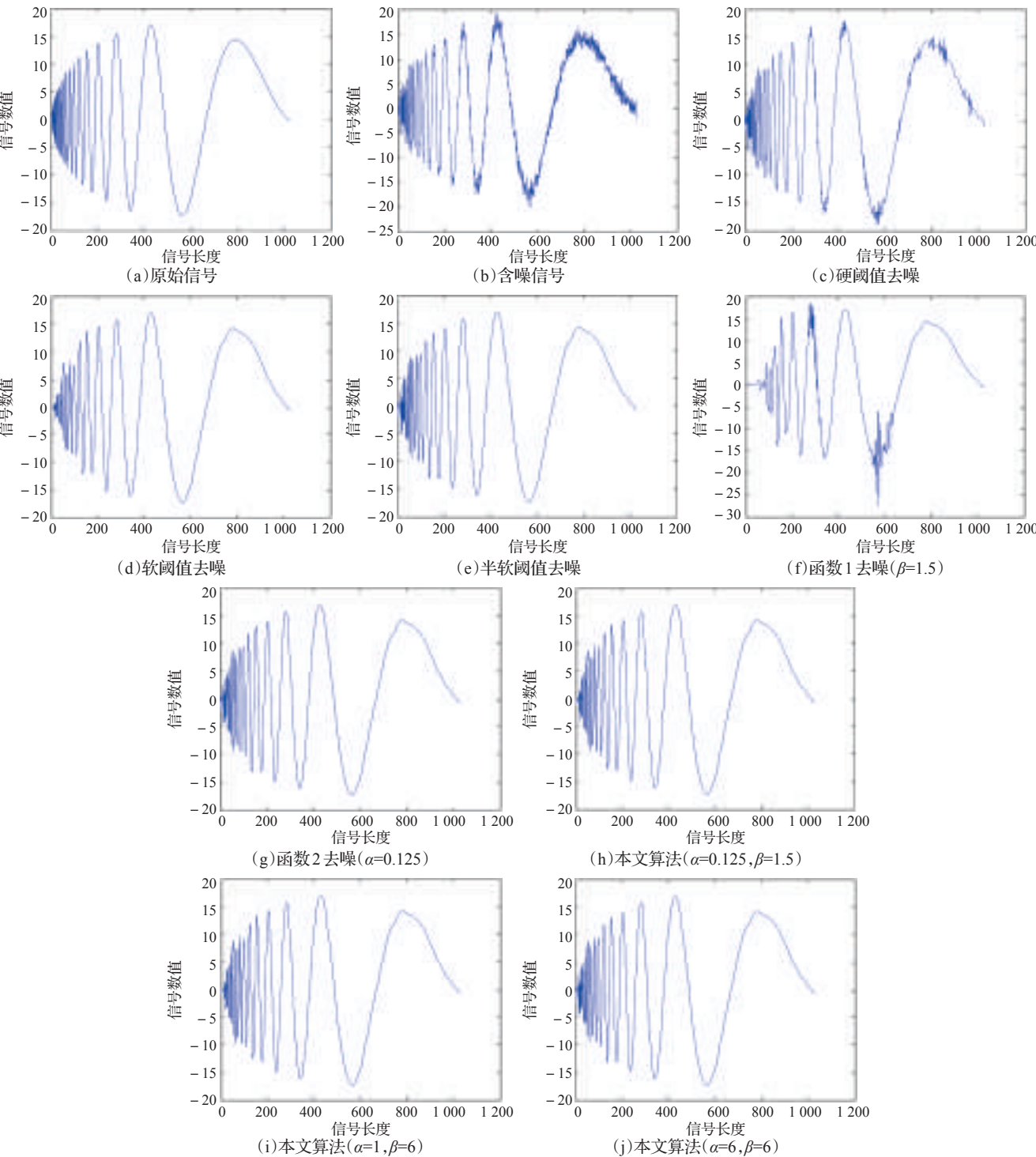


图3 各阈值函数对Dropler信号去噪效果图

(MSE)来描述。SNR的定义为：

其中  $f(t)$  为原始信号， $\hat{f}(t)$  为去噪信号， $N$  为信号的长度。

MSE的定义为：

各种阈值函数对 Heavisine 信号和 Dropler 信号去噪后的信噪比和均方误差，分别如表 1 和表 2 所示。

表 1 各阈值函数对 Heavisine 信号去噪后的信噪比和均方误差比较

| 阈值函数                                  | SNR/dB   | MSE     |
|---------------------------------------|----------|---------|
| 含噪信号                                  | 20.495 4 | 0.962 6 |
| 硬阈值函数去噪                               | 24.866 1 | 0.351 9 |
| 软阈值函数去噪                               | 30.167 6 | 0.103 8 |
| 半软阈值函数去噪                              | 30.140 3 | 0.104 5 |
| 函数 1 去噪( $\alpha=1.5$ )               | 27.549 4 | 0.189 7 |
| 函数 2 去噪( $\alpha=6$ )                 | 30.576 2 | 0.094 5 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=6$ $\beta=6$ )       | 30.810 2 | 0.089 5 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=0.125$ $\beta=6$ )   | 30.848 4 | 0.088 7 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=0.125$ $\beta=1.5$ ) | 30.903 0 | 0.087 6 |



表2 各阈值函数对Dropler信号去噪后的信噪比和均方误差比较

| 阈值函数                                  | SNR/dB   | MSE     |
|---------------------------------------|----------|---------|
| 含噪信号                                  | 20.239 5 | 0.971 9 |
| 硬阈值函数去噪                               | 24.221 9 | 0.388 5 |
| 软阈值函数去噪                               | 22.928 5 | 0.523 3 |
| 半软阈值函数去噪                              | 26.617 5 | 0.223 8 |
| 函数2去噪( $\alpha=0.125$ )               | 25.354 2 | 0.299 3 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=6$ $\beta=6$ )       | 26.434 4 | 0.233 4 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=1$ $\beta=6$ )       | 26.141 3 | 0.249 7 |
| 新阈值函数去噪( $\alpha=0.125$ $\beta=1.5$ ) | 26.042 2 | 0.255 5 |

对Heavisine信号去噪后,从图2和表1中可以看出:硬阈值函数去噪后波形存在较多的振荡点;软阈值函数去噪后波形虽然光滑,但信号重构的精度较差;半软阈值函数去噪后虽然信噪比有所增加,但是波形仍存在着一部分振荡点;函数1由于对小波系数的处理仍然是不连续的,去噪后波形仍存在一些振荡点,并且信噪比提高也不大;函数2虽然解决了连续性的问题,但是没有解决与小波系数存在恒定偏差的缺陷,去噪效果波形虽然光滑但是信号重构的精度仍然较差。与以上方法相比较,基于新阈值函数的小波阈值去噪方法得到的信号波形较为光滑,提高了信噪比,得到较小的均方误差,去噪效果最好且便于调节,具有较高的实用价值。

对Dropler信号去噪后,从图3和表2中可以看出:硬、软阈值函数去噪后波形仍然存在振荡点,且信噪比提高幅度不大;函数2虽然解决了连续性的问题,但是没有解决与小波系数存在恒定偏差的缺陷,去噪效果波形虽然光滑但是信号重构的精度仍然较差。新阈值函数得到的信号波形较为光滑,提高了信噪比,得到了较小的均方误差。

## 6 结论

针对传统的硬、软阈值函数和半软阈值函数以及文献[6-7]

中间值函数去噪的缺点,提出了一种新的阈值函数。对Heavisine和Dropler信号的仿真实验表明,新阈值函数连续性好且便于调节,能进一步提高信噪比,获得更好的去噪效果,充分发挥了小波阈值去噪方法的优越性,具有较高的应用价值。基于新阈值函数,探求每一尺度上的最佳阈值自适应去噪方法,以及具体的待去噪信号与新阈值函数的调节因子 $\alpha$ 、 $\beta$ 之间的数量关系,将是研究的下一个目标。

## 参考文献:

- [1] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425-455.
- [2] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90(12): 1200-1224.
- [4] Gao Hongye, Bruce A G. Wave shrink and semisoft shrinkage, StaSci Research Report NO.39[R]. 1995.
- [5] Bruce A G, Gao Hongye. Wave shrink with firm shrinkage[J]. Statistica Sinica, 1997, 7(4): 855-874.
- [6] 薛伟, 关福宏, 陈良章, 等. 基于一种新的小波阈值函数的雷达信号去噪[J]. 计算机仿真, 2008, 25(8): 319-322.
- [7] 张莲, 秦华锋, 余成波. 基于小波阈值算法的研究[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(9): 172-173.
- [8] 关山, 王龙山. 小波阈值去噪技术研究及其在信号处理中的应用[J]. 计算机工程与设计, 2008, 29(22): 5857-5859.
- [9] 潘泉, 张磊, 孟晋丽, 等. 小波滤波方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [10] 葛哲学, 沙威. 小波分析理论与MATLAB R2007实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007.

(上接74页)

来的工作中,将结合普适环境下设备间断连接与轻量计算的特征,把文中的算法应用在普适环境下,同时提供一种普适环境下面向服务的架构。

## 参考文献:

- [1] 李景山. 普及计算环境中的动态服务关键技术的研究[D]. 北京: 中国科学院计算技术研究所, 2004.
- [2] 李景山, 廖华明, 侯紫峰, 等. 普及计算中基于接口语义描述的动态服务组合方法[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(7): 1124-1134.
- [3] 张抗抗, 李庆忠. 普适计算环境下一种目标驱动的服务组合方法[J]. 软件学报, 2006, 17: 211-218.
- [4] 唐磊, 廖渊, 李明树, 等. 面向普适计算的服务构件的动态部署问题及算法[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(5): 815-822.
- [5] Fujii K, Suda T. Semantics-based dynamic Web service composition[J]. the International Journal of Cooperative Information Systems(IJCIS), 2006, 15(3): 293-324.
- [6] Kalasapur S, Kumar M, Shirazi B A. Dynamic service composition in pervasive computing[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2007, 18(7): 907-918.
- [7] Kalasapur S. Evaluating Service Oriented Architectures(SOA) in pervasive computing[C]//Proceedings of the 4th Annual IEEE

International Conference on Pervasive Computing and Communications, 2006: 276-285.

- [8] Funk C, Ehm C. Support of stateful services in pervasive environments[C]//Proceedings of the 5th Annual IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications Workshops, 2007: 483-488.
- [9] Garcia D Z G, Toledo M B F. A fault tolerant Web service architecture[J]. 5th Latin American Web Congress, 2007: 42-49.
- [10] 邓水光. Web服务自动组合与形式化验证的研究[D]. 杭州: 浙江大学计算机科学与技术学院, 2007.
- [11] Cardoso J, Sheth A, Miller J, et al. Quality of service for workflows and Web service processes[J]. Journal of Web Semantics, 2004, 13: 281-308.
- [12] Zeng L, Benatallah B. QoS-aware middleware for Web services composition[J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2004, 30(5): 311-327.
- [13] Hwang San-Yih, Lim Ee-Peng. On composing a reliable composite Web service: A study of dynamic Web service selection[C]//2007 IEEE International Conference on Web Services(ICWS 2007), 2007: 184-191.
- [14] Hwang S Y. A probabilistic approach to modeling and estimating the QoS of web-services-based workflows[J]. Journal of Information Sciences, 2007, 117: 5484-5503.