**九轴ESKF**

变量

方程：

 (1)

 (2)

目标：

， (3)



增量变量

如果不同的观测方程有不同的噪声，则，其中R是观测方程的协方差矩阵，是先验知识，则可以给不同的观测方程设置不同的权重，观测噪声越大，方程的权重越小，也就是把是先验知识R给利用了。这一步一定要好好理解，为什么要把观测方程的协方差矩阵考虑进来，如果我们的变量个数和方程个数相等，那么考不考虑R求出来的结果都是一样的，之所以考虑R是因为我们的方程个数大于变量个数，方程是冗余的，如果使用最小二乘去求解方程，方程权重变小表明该方程对变量的影响变小，会让权重大的方程来“多”影响变量的取值，因为方程误差系数是我们事先知道的，所以，理所当然，误差越大，那么方程对变量的影响应该越小。

则方程变为：

 (4)

因为我们的方程个数为6，变量个数为12，方程个数小于变量个数，所以是无法求的。

假设我们有先验变量方程：



先验变量方程的协方差矩阵为，这里先不介绍是如何来的，留到后面介绍(等式9)。

重新整理等式3的目标函数变为：

，为单位矩阵。

则等式4对应的可以变为：

 (5)

因为此时方程个数为6+12，变量个数为12，方程个数大于变量个数，则等式5有解。解为：

 (6)

方程4有另一个名字叫做高斯牛顿解法，

方程5有另一个名字叫做列文伯格-马夸尔特解法，

方程5的解法也是扩展卡尔曼滤波的解法

现在考虑的协方差矩阵：

因为

因为是对称矩阵，所以

 (7)

也就是说

得到的分布后，将归到变量中，并将原来的分布变为0均值，则有：

 (8)

是对变量的更新符号，对于加速度偏置，陀螺仪偏置，该运算是普通的加法运算，对于姿态，该运算是李代数运算，对于地磁偏置，是将偏置归到地磁向量的世界坐标系中，这里不再继续展开它的实际运算。

当下一个时刻k+1时刻，我们使用k时刻的变量来预测k+1时刻的变量时，则有：

 (9)

其中为更新矩阵，为更新的协方差矩阵，为变量预测方程，这里先不介绍，，是如何来的，留到后面介绍（公式推导）。

然后又回到等式5进行运算，这里也介绍了是如何得来的，是由上一个时刻的经过更新后得来的，而是方程的观测噪声流向变量噪声后得来的。这里面的噪声流向一定要把握清楚，我们使用方程来求解变量，那么方程的噪声就会流向变量的噪声，我们使用上一个时刻估计的变量来预测当前时刻的变量，那么上一个时刻估计的变量的噪声就会流向当前时刻的变量，噪声的流向在卡尔曼滤波里面是非常重要的，误差卡尔曼滤波与高斯牛顿的区别，就在于误差卡尔曼滤波将上一个时刻估计的变量的噪声也考虑进来了。

以上的过程就是ESKF误差卡尔曼滤波的过程，总结如下：

预测：

 (10)

 (11)

更新：

 (12)

 (13)

 (14)

一般别人写卡尔曼滤波的形式是：

预测：

 (15)

 (16)

更新：

 (17)

 (18)

 (19)

区别在于引入了中间变量K。两个的结果都是一样的，而且当观测方程个数小于变量个数时，引入K会使得计算量变小，所以很多时候都会引入K，但是引入K后，笔者不能很直观地去理解卡尔曼滤波，所以在这里介绍了笔者自己对卡尔曼滤波的理解。

其实如果抛开预测的话，卡尔曼滤波就是列文伯格求解。所以我觉得有必要稍稍微地展开一点点列文伯格算法，列文伯格算法的目的是给添加一个信赖区域，不能让太大，使得对高斯牛顿法的泰勒展开不准确，而卡尔曼滤波的做法是，我根据上一个时刻已经得到了为0，如果没有噪声的话，更新之后的值也是0，但是因为有噪声的存在，所以我会在圈定一个信赖区域，这个信赖区域多大，什么形状，由变量的协方差矩阵决定，如果噪声越大，信赖区域越大，远离0的可能性越大。

**公式推导**

下面推导方程协方差矩阵，雅克比矩阵,预测方程，增量更新矩阵,增量更新协方差矩阵，方程残差

**1、方程协方差矩阵：**

 (20)

为加速度计的噪声方差

为磁力计的噪声方差

这两个可以通过查手册的方式得到，或者静止一段时间，然后求方差，这个可以不需要使用allan方差求，因为大部分的噪声能量都是白噪声，实际上磁力计也没法使用allan方差来统计特性。

**2、变量预测方程：**

 (21)

 (22)

 (23)

 (24)

**3、方程残差：**

 (25)

 (26)

**4、雅克比矩阵**

增量方程的表达式：



等式20



等式20

下面求

 (27)

 (28)

 (29)

等式20

 (30)

会在后面证明(式39)

同样地

 (31)

**5、增量更新矩阵,增量更新协方差矩阵：**

从前面式(8)知道在k-1时刻，IMU的系统状态为：

在经过预测步骤后，IMU状态变为

前面的预测方程仅仅更新了(nominal state)，没有更新(error state),没有更新，意味着没有更新噪声。所以我们的目标是推导出的更新表达式。

首先是加速度偏置的推导，偏置的模型定义为维纳过程，在加一个decay---，这个是从NXP的代码中学来的，可以减弱晃动带来的影响。

 (32)

注意的噪声系数不是固定的，如果IMU晃动比较厉害的话，加速度的噪声系数会比较大，如果晃动不厉害的时候加速度的噪声系数会比较小。我采取的步骤是加了一个窗，如果角速度的值小于一定值，那么为allan方差里的角速率随机游走。

另外，在我做估计的allan方差估计中只有两个分量，一个是角度随机游走，一个是角速率随机游走。

将等式32的full state完全展开：

 (33)

从预测方程可以看到我们对的处理为，将其带入后可以得到:

 (34)

对于陀螺仪，磁力计的偏置的error-state推导，与上面的类似，不再继续推导。

 (35)

 (36)

接下来推导的表达式：

在预测姿态的时候，IMU的姿态状态有：

 (37)

这里使用四元数的方式进行推导，对应的四元数为。

在《Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter》文中将表示为true state，本人更喜欢将其表示为full state，表示对系统的完整状态感觉更形象，因为与的区别在于考虑了噪声，将噪声的分布用error state表示

前面的预测方程有，其实对应的四元数就是

 (38)

可以看到，前面的预测方程是不考虑噪声的。

将等式37的full state完全展开：



将等式38代入进来

约掉得到：



接下来只要展开然后去掉就可以得到下面的结果，这个结果与《Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter》推导的结果一样。区别在于文献中的推导是基于的，而我的推导是基于的，所以在符号上面会有一点区别。



接下来我自己添加的是将展开：



得：

 (39)

从这里也可以看到

其结果总结起来就是：

 (40)

 (41)

 (42)

 (43)

可以写成

 (44)

所以就有

 (45)

