程序设计与算法(二)
算法基础

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

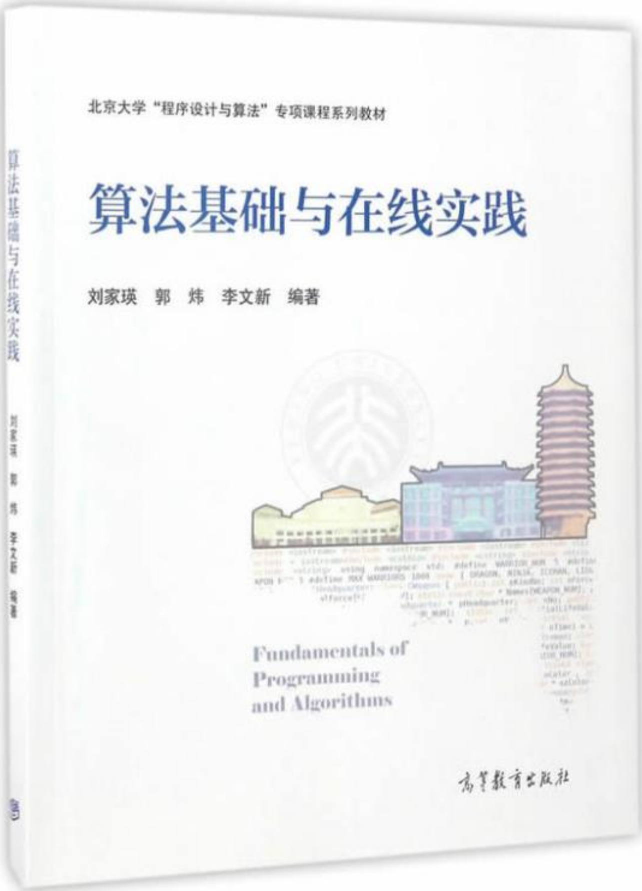
配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
http://openjudge.cn
“百练”组进行搜索即可提交



分治算法

分治的基本概念

贵州黄果树瀑布

分治的基本概念

- 把一个任务，分成形式和原任务相同，但规模更小的几个部分任务（通常是两个部分），分别完成，或只需要选一部完成。然后再处理完成后的这一个或几个部分的结果，实现整个任务的完成。

分治的生活实例 --称假币

- 16硬币，有可能有1枚假币，假币比真币轻。有一架天平，用最少称量次数确定有没有假币，若有的话，假币是哪一枚。

分治的生活实例 – 称假币

- 8 – 8 一称，发现无假币，或假币所在的那8枚
- 4 – 4 一称
- 2 – 2 一称
- 1 – 1 一称

归并排序

分治的典型应用：归并排序

- 数组排序任务可以如下完成：

  1） 把前一半排序

  2）把后一半排序

  3）把两半归并到一个新的有序数组，然后再拷贝回原数组，排序完成。

分治的典型应用：归并排序

```
#include <iostream>
using namespace std;
void Merge(int a[],int s,int m, int e,int tmp[])
{//将数组a的局部a[s,m]和a[m+1,e]合并到tmp,并保证tmp有序，然后再拷贝回a[s,m]
 //归并操作时间复杂度：O（e-m+1),即O（n)
   int pb = 0;
   int p1 = s,p2 = m+1;
   while( p1 <= m && p2 <= e) {
        if( a[p1] < a[p2])
                tmp[pb++] = a[p1++];
        else
                tmp[pb++] = a[p2++];
   }
```

```
    while( p1 <= m)
        tmp[pb++] = a[p1++];
    while( p2 <= e)
        tmp[pb++] = a[p2++];
    for(int i = 0;i < e-s+1; ++i)
        a[s+i] = tmp[i];
}
void MergeSort(int a[],int s,int e,int  tmp[])
{
    if( s < e) {
        int m = s + (e-s)/2;
        MergeSort(a,s,m,tmp);
        MergeSort(a,m+1,e,tmp);
        Merge(a,s,m,e,tmp);
    }
}
```

```
int a[10] = { 13,27,19,2,8,12,2,8,30,89};
int b[10];
int main()
{
   int size = sizeof(a)/sizeof(int);
   MergeSort(a,0,size-1,b);
   for(int i = 0;i < size; ++i)
        cout << a[i] << ",";
   cout << endl;
   return 0;
}
```

1	4	9	12

2	5	8	13

归并排序的时间复杂度

对n个元素进行排序的时间：

```
T(n)   = 2*T(n/2) + a*n
       = 2*(2*T(n/4)+a*n/2)+a*n
       = 4*T(n/4)+2a*n
       = 4*(2*T(n/8)+a*n/4)+2*a*n
       = 8*T(n/8)+3*a*n
       ...
       = 2^k *T(n/2^k)+k*a*n
```

(a是常数，具体多少不重要)

一直做到 $n/2^k = 1$ (**此时** $k = \log_2 n$),

$T(n) = 2^k * T(1) + k*a*n = 2^k * T(1) + k*a*n = 2^k + k*a*n$

$= n + a*(\log_2 n)*n$

复杂度O(nlogn)

快速排序

分治的典型应用：快速排序

- 数组排序任务可以如下完成：

  1）设k=a[0], 将k挪到适当位置，使得比k小的元素都在k左边,比k大的元素都在k右边，和k相等的，不关心在k左右出现均可 （O（n)时间完成)

  2）把k左边的部分快速排序

  3） 把k右边的部分快速排序

K = 7

i							j
7	1	3	8	12	11	2	9

K = 7

i						j	
7	1	3	8	12	11	2	9

K = 7

i						j	
2	1	3	8	12	11	7	9

K = 7

	i					j	
2	1	3	8	12	11	7	9

K = 7

		i				j	
2	1	3	8	12	11	7	9

K = 7

			i			j	
2	1	3	8	12	11	7	9

K = 7

			i			j	
2	1	3	7	12	11	8	9

K = 7

			i		j		
2	1	3	7	12	11	8	9

K = 7

			i j				
2	1	3	7	12	11	8	9

分治的典型应用：快速排序

```
#include <iostream>
using namespace std;
void swap(int & a,int & b) //交换变量a,b值
{
    int tmp = a;
    a = b;
    b = tmp;
}
```

```
void QuickSort(int a[],int s,int e)
{
    if( s >= e)
        return;
    int k = a[s];
    int i = s,j = e;
    while( i != j ) {
        while( j > i &&  a[j] >= k )
            --j;
        swap(a[i],a[j]);
        while( i < j && a[i] <= k )
            ++i;
        swap(a[i],a[j]);
    } //处理完后，a[i] = k
    QuickSort(a,s,i-1);
    QuickSort(a,i+1,e);
}
```

```
int a[] = { 93,27,30,2,8,12,2,8,30,89};
int main()
{
   int size = sizeof(a)/sizeof(int);
   QuickSort(a,0,size-1);
   for(int i = 0;i < size; ++i)
        cout << a[i] << ",";
   cout << endl;
   return 0;
}
```

例题
输出前m大的数

例题：输出前m大的数

描述

给定一个数组包含n个元素，统计前m大的数并且把这m个数从大到小输出。

输入

第一行包含一个整数n，表示数组的大小。n < 100000。
第二行包含n个整数，表示数组的元素，整数之间以一个空格分开。每个整数的绝对值不超过100000000。
第三行包含一个整数m。m < n。

输出

从大到小输出前m大的数，每个数一行。

例题：输出前m大的数

排序后再输出，复杂度 O(nlogn)

用分治处理：复杂度 O(n+mlogm)

思路：把前m大的都弄到数组最右边，然后对这最右边m个元素排序，再输出

关键 ：O(n)时间内实现把前m大的都弄到数组最右边

例题：输出前m大的数

引入操作 `arrangeRight(k)`： 把数组（或数组的一部分）前k大的都弄到最右边

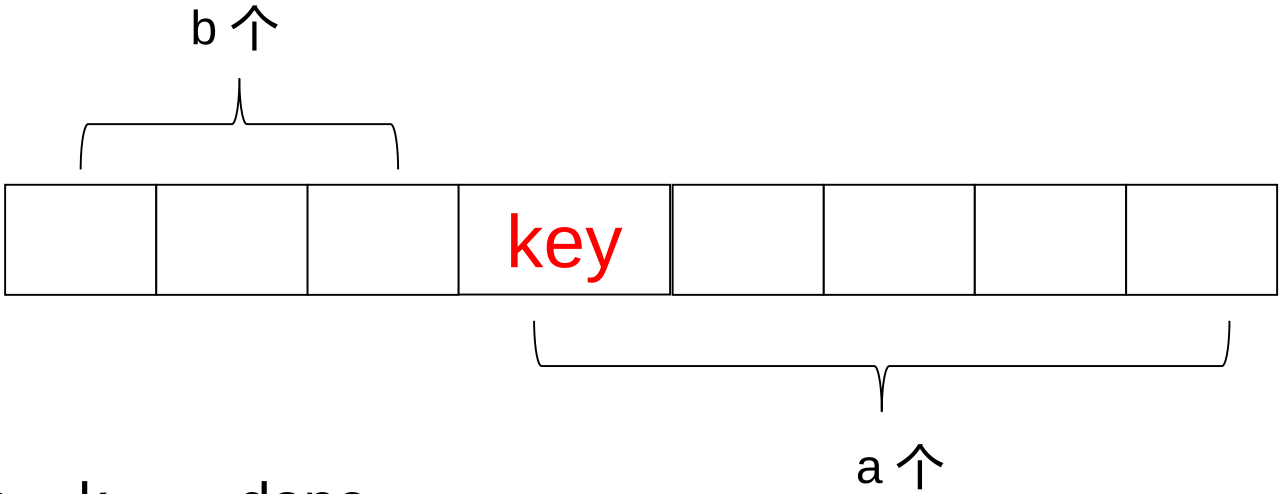
如何将前k大的都弄到最右边

1）设key=a[0], 将key挪到适当位置，使得比key小的元素都在key左边，比key大的元素都在key右边（线性时间完成）

2) 选择数组的前部或后部再进行 arrangeRight操作

例题：输出前m大的数

2) 选择数组的前部或后部再进行 arrangeRight操作



a = k	done
a > k	对最右边a-1个元素再进行arrangeRigth(k)
a < k	对左边b个元素再进行arrangeRight(k-a)

例题：输出前m大的数

将前m大的都弄到数组最右边的时间：

```
T(n) = T(n/2) + a*n
     = T(n/4) + a*n/2 + a*n
     = T(n/8) + a*n/4 + a*n/2 + a*n
     = ...
     = T(1) + ... + a*n/8 + a*n/4 + a*n/2 + a*n
      <  2*a*n

      即 O(n)
```

例题
求排列的逆序数

冰岛维克镇黑沙滩

例题：求排列的逆序数

考虑1,2,…,n (n <= 100000)的排列i_1，i_2，…，i_n，如果其中存在j,k，满足 j < k 且 $i_j > i_k$， 那么就称(i_j,i_k)是这个排列的一个逆序。

一个排列含有逆序的个数称为这个排列的逆序数。例如排列 263451 含有8个逆序(2,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,1),(3,1),(4,1),(5,1)，因此该排列的逆序数就是8。

现给定1,2,…,n的一个排列，求它的逆序数。

例题：求排列的逆序数

笨办法：$O(n^2)$

分治O(nlogn)：

1） 将数组分成两半，分别求出左半边的逆序数和右半边的逆序数

2） 再算有多少逆序是由左半边取一个数和右半边取一个数构成(要求O(n)实现)

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

i				j			
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

i					j		
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

i						j	
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

	i					j	
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

		i				j	
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

			i			j	
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

2) 的关键：左半边和右半边都是排好序的。比如，都是从大到小排序的。这样，左右半边只需要从头到尾各扫一遍，就可以找出由两边各取一个数构成的逆序个数

			i				j
10	8	7	3	12	11	5	2

例题：求排列的逆序数

总结：

由归并排序改进得到，加上计算逆序的步骤

MergeSortAndCount: 归并排序并计算逆序数

快速幂

快速幂

```
int Pow(int a,int b)
{ //快速求a^b ，复杂度 log(b)
        if(b == 0)
                return 1;
        if(b & 1) { //b是奇数
                return a * Pow(a,b-1);
        }
        else {
                int t = Pow(a,b/2);
                return t * t;
        }
}
```

快速幂

```
int Pow(int a,int b)
{       //快速求a^b ，复杂度 log(b)
        int result = 1;
        int base = a;
        while(b) {
                if( b & 1)
                        result *= base;
                base *= base;
                b >>= 1;
        }
        return result;
}
```