



程序设计与算法(二)

算法基础

郭 炜

微信公众号



微博: <http://weibo.com/guoweiofpku>

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
<http://openjudge.cn>
“百练”组进行搜索即可提交





北京大学
PEKING UNIVERSITY

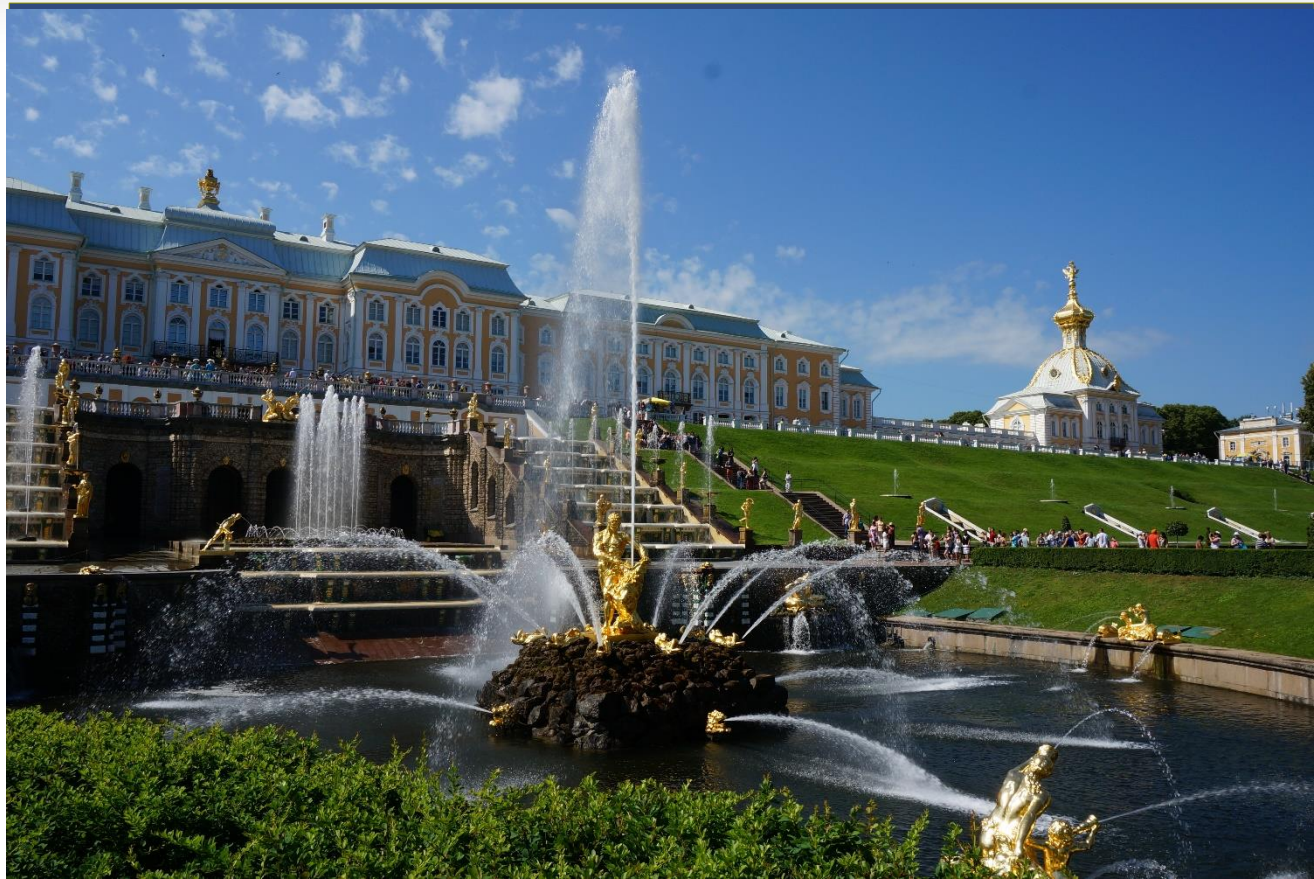
动态规划(二)



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

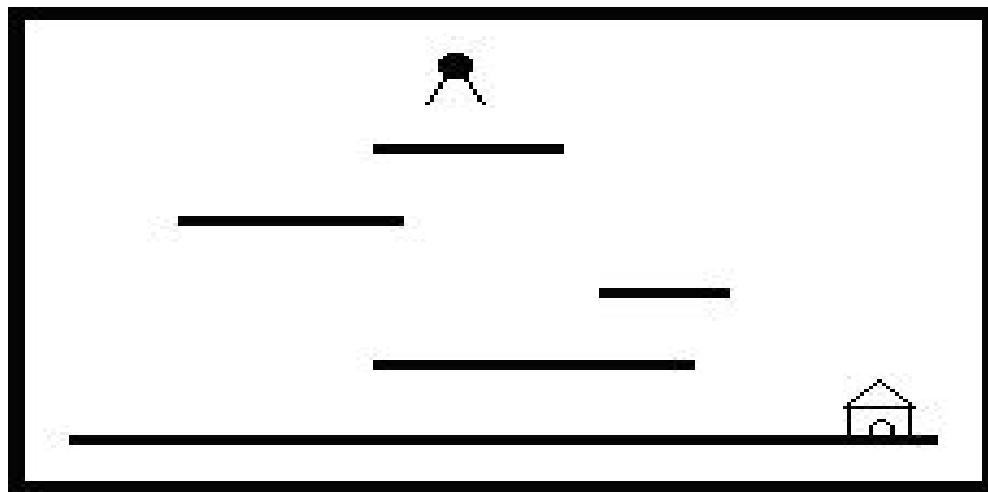
例题 Help Jimmy



圣彼得堡彼得霍夫宫

Help Jimmy(POJ1661)

"Help Jimmy" 是在下图所示的场景上完成的游戏：



Help Jimmy(POJ1661)

场景中包括多个长度和高度各不相同的平台。

地面是最低的平台，高度为零，长度无限。

Jimmy老鼠在时刻0从高于所有平台的某处开始下落，它的下落速度始终为1米/秒。当Jimmy落到某个平台上时，游戏者选择让它向左还是向右跑，它跑动的速度也是1米/秒。当Jimmy跑到平台的边缘时，开始继续下落。Jimmy每次下落的高度不能超过MAX米，不然就会摔死，游戏也会结束。

设计一个程序，计算Jimmy到地面时可能的最早时间。

Help Jimmy(POJ1661)

输入数据

第一行是测试数据的组数 t ($0 \leq t \leq 20$)。每组测试数据的第一行是四个整数 N , X , Y , MAX , 用空格分隔。 N 是平台的数目 (不包括地面), X 和 Y 是Jimmy开始下落的位置的横竖坐标, MAX 是一次下落的最大高度。接下来的 N 行每行描述一个平台, 包括三个整数, $X1[i]$, $X2[i]$ 和 $H[i]$ 。 $H[i]$ 表示平台的高度, $X1[i]$ 和 $X2[i]$ 表示平台左右端点的横坐标。 $1 \leq N \leq 1000$, $-20000 \leq X, X1[i], X2[i] \leq 20000$, $0 < H[i] < Y \leq 20000$ ($i = 1..N$)。所有坐标的单位都是米。

Jimmy的大小和平台的厚度均忽略不计。如果Jimmy恰好落在某个平台的边缘, 被视为落在平台上。所有的平台均不重叠或相连。测试数据保Jimmy一定能安全到达地面。

Help Jimmy(POJ1661)

输出要求

对输入的每组测试数据，输出一个整数，Jimmy到地面时可能的最早时间。

输入样例

```
1
3 8 17 20
0 10 8
0 10 13
4 14 3
```

输出样例

```
23
```


解题思路

Jimmy跳到一块板上后，可以有两种选择，向左走，或向右走。走到左端和走到右端所需的时间，是很容易算的。如果我们能知道，以左端为起点到达地面的最短时间，和以右端为起点到达地面的最短时间，那么向左走还是向右走，就很容易选择了。因此，整个问题就被分解成两个子问题，即Jimmy所在位置下方第一块板左端为起点到地面的最短时间，和右端为起点到地面的最短时间。这两个子问题在形式上和原问题是完全一致的。将板子从上到下从1开始进行无重复的编号(越高的板子编号越小，高度相同的几块板子，哪块编号在前无所谓)，那么，和上面两个子问题相关的变量就只有板子的编号。

不妨认为Jimmy开始的位置是一个编号为0，长度为0的板子，假设 $\text{LeftMinTime}(k)$ 表示从k号板子左端到地面的最短时间， $\text{RightMinTime}(k)$ 表示从k号板子右端到地面的最短时间，那么，求板子k左端点到地面的最短时间的方法如下：

```
if ( 板子k左端正下方没有别的板子) {  
    if( 板子k的高度  $h(k)$  大于Max)  
        LeftMinTime(k) =  $\infty$ ;  
    else  
        LeftMinTime(k) =  $h(k)$ ;  
}  
else if( 板子k左端正下方的板子编号是m )  
    LeftMinTime(k) =  $h(k) - h(m) +$   
    Min( LeftMinTime(m) +  $Lx(k) - Lx(m)$ ,  
        RightMinTime(m) +  $Rx(m) - Lx(k)$ );  
}
```

上面， $h(i)$ 就代表 i 号板子的高度， $Lx(i)$ 就代表 i 号板子左端点的横坐标， $Rx(i)$ 就代表 i 号板子右端点的横坐标。那么 $h(k)-h(m)$ 当然就是从 k 号板子跳到 m 号板子所需要的时间， $Lx(k)-Lx(m)$ 就是从 m 号板子的落脚点走到 m 号板子左端点的时间， $Rx(m)-Lx(k)$ 就是从 m 号板子的落脚点走到右端点所需的时间。

求 $\text{RightMinTime}(k)$ 的过程类似。

不妨认为Jimmy开始的位置是一个编号为0，长度为0的板子，那么整个问题就是要求 $\text{LeftMinTime}(0)$ 。

输入数据中，板子并没有按高度排序，所以程序中一定要首先将板子排序。

时间复杂度:

一共 n 个板子, 每个左右两端的最小时间各算一次 $O(n)$

找出板子一段到地面之间有那块板子, 需要遍历板子 $O(n)$

总的时间复杂度 $O(n^2)$



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题 神奇的口袋



圣彼得堡阿芙乐尔号巡洋舰

例五、神奇的口袋(百练2755)

- 有一个神奇的口袋，总的容积是40，用这个口袋可以变出一些物品，这些物品的总体积必须是40。
- John现在有 n ($1 \leq n \leq 20$) 个想要得到的物品，每个物品的体积分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 。John可以从这些物品中选择一些，如果选出的物体的总体积是40，那么利用这个神奇的口袋，John就可以得到这些物品。现在的问题是，John有多少种不同的选择物品的方式。

- **输入**

输入的第一行是正整数 n ($1 \leq n \leq 20$), 表示不同的物品的数目。接下来的 n 行, 每行有一个1到40之间的正整数, 分别给出 a_1, a_2, \dots, a_n 的值。

- **输出**

输出不同的选择物品的方式的数目。

- **输入样例**

3

20

20

20

- **输出样例**

3

枚举的解法：

枚举每个物品是选还是不选，共 2^{20} 种情况

递归解法

```
#include <iostream>
using namespace std;
int a[30];  int N;
int Ways(int w ,int k )  { // 从前k种物品中选择一些, 凑成体积w的做法
数目
    if( w == 0 )    return 1;
    if( k <= 0 )    return 0;
    return Ways(w, k -1 ) + Ways(w - a[k], k -1 );
}
int main()    {
    cin >> N;
    for( int i = 1; i <= N; ++ i )
        cin >> a[i];
    cout << Ways(40,N);
    return 0;
}
```

动 规 解 法

```
#include <iostream>
using namespace std;
int a[30];   int N;
int Ways[50][40]; //Ways[i][j]表示从前j种物品里凑出体积i的方法数
int main()   {
    cin >> N;
    memset(Ways,0,sizeof(Ways));
    for( int i = 1;i <= N; ++ i ) {
        cin >> a[i];   Ways[0][i] = 1;
    }
    Ways[0][0] = 1;
    for( int w = 1 ; w <= 40; ++ w ) {
        for( int k = 1; k <= N; ++ k ) {
            Ways[w][k] = Ways[w][k-1];
            if( w-a[k] >= 0)
                Ways[w][k] += Ways[w-a[k]][k-1];
        }
    }
    cout << Ways[40][N];
    return 0;
}
```



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题

Charm Bracelet



美国圣地亚哥中途岛号航母

例六、 Charm Bracelet 0-1背包问题(POJ3624)

有N件物品和一个容积为M的背包。第i件物品的体积 $w[i]$ ，价值是 $d[i]$ 。求解将哪些物品装入背包可使价值总和最大。每种物品只有一件，可以选择放或者不放 ($N \leq 3500, M \leq 13000$)。

0-1背包问题(POJ3624)

用 $F[i][j]$ 表示取前 i 种物品，使它们总体积不超过 j 的最优取法取得的价值总和。要求 $F[N][M]$

边界：if ($w[1] \leq j$)
 $F[1][j] = d[1];$
 else
 $F[1][j] = 0;$

0-1背包问题(POJ3624)

用 $F[i][j]$ 表示取前 i 种物品，使它们总体积不超过 j 的最优取法取得的价值总和

递推： $F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i-1][j-w[i]] + d[i])$

取或不取第 i 种物品，两者选优
($j-w[i] \geq 0$ 才有第二项)

0-1背包问题(POJ3624)

$$F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i-1][j-w[i]] + d[i])$$

本题如用记忆型递归，需要一个很大的二维数组，会超内存。注意到这个二维数组的下一行的值，只用到了上一行的正上方及左边的值，因此可用滚动数组的思想，只要一行即可。即可以用一维数组，用“人人为我”递推型动归实现。



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题:滑雪



圣彼得堡炮兵博物馆

例七、滑雪(百练1088)

Michael喜欢滑雪百这并不奇怪， 因为滑雪的确很刺激。

可是为了获得速度，滑的区域必须向下倾斜，而且当你滑到坡底，你不得不再次走上坡或者等待升降机来载你。

Michael想知道载一个区域中最长的滑坡。区域由一个二维数组给出。数组的每个数字代表点的高度。下面是一个例子

```
1 2 3 4 5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

一个人可以从某个点滑向上下左右相邻四个点之一，当且仅当高度减小。在上面的例子中，一条可滑行的滑坡为24-17-16-1。当然25-24-23-...-3-2-1更长。事实上，这是最长的一条。输入输入的第一行表示区域的行数R和列数C($1 \leq R, C \leq 100$)。下面是R行，每行有C个整数，代表高度h， $0 \leq h \leq 10000$ 。输出输出最长区域的长度。

输入

输入的第一行表示区域的行数R和列数C
($1 \leq R, C \leq 100$)。下面是R行，每行有C个整数，
代表高度h, $0 \leq h \leq 10000$ 。

输出

输出最长区域的长度。

样例输入

```
5 5
1 2 3 4 5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

样例输出

```
25
```

解题思路

$L(i,j)$ 表示从点 (i,j) 出发的最长滑行长度。

一个点 (i,j) , 如果周围没有比它低的点, $L(i,j) = 1$

否则

递推公式: $L(i,j)$ 等于 (i,j) 周围四个点中,比 (i,j) 低, 且 L 值最大的那个点的 L 值, 再加1

复杂度: $O(n^2)$

解题思路

解法1) “人人为我” 式递推

$L(i,j)$ 表示从点 (i,j) 出发的最长滑行长度。

一个点 (i,j) , 如果周围没有比它低的点, $L(i,j) = 1$

将所有点按高度从小到大排序。每个点的 L 值都初始化为1

从小到大遍历所有的点。经过一个点 (i,j) 时, 用递推公式求 $L(i,j)$

解题思路

解法2) “我为人人” 式递推

$L(i,j)$ 表示从点 (i,j) 出发的最长滑行长度。

一个点 (i,j) , 如果周围没有比它低的点, $L(i,j) = 1$

将所有点按高度从小到大排序。每个点的 L 值都初始化为1

从小到大遍历所有的点。经过一个点 (i,j) 时, 要更新他周围的, 比它高的点的 L 值。例如:

if $H(i+1,j) > H(i,j)$ // H 代表高度

$L(i+1,j) = \max(L(i+1,j), L(i,j)+1)$



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

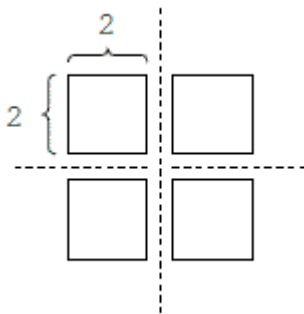
例题:分蛋糕



瑞典斯德哥尔摩

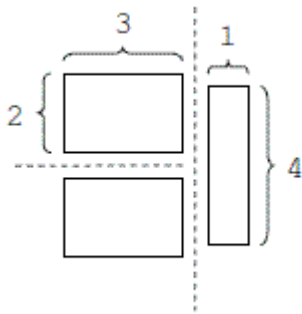
例八、分蛋糕

- 问题描述
- 有一块矩形大蛋糕，宽和高分别是整数 w 、 h 。现要将其切成 m 块小蛋糕，每个小蛋糕都必须是矩形、且宽和高均为整数。切蛋糕时，每次切一块蛋糕，将其分成两个矩形蛋糕。请计算：最后得到的 m 块小蛋糕中，最大的那块蛋糕的面积下限。
- 假设 $w=4$, $h=4$, $m=4$ ，则下面的切法可使得其中最大蛋糕块的面积最小。



例八、分蛋糕

- 假设 $w = 4, h = 4, m = 3$, 则下面的切法可使得其中最大蛋糕块的面积最小。



例八、分蛋糕

- 输入

共有多行，每行表示一个测试案例。每行是三个用空格分开的整数 W, H, M ，其中 $1 \leq W, H, M \leq 20$ ， $M \leq WH$ 。当 $W = H = M = 0$ 时不需要处理，表示输入结束。

- 输出

每个测试案例的结果占一行，输出一个整数，表示最大蛋糕块的面积下限。

- 样例输入

4 4 4

4 4 3

0 0 0

- 样例输出

4

6

例八、分蛋糕

- 解题思路
- 设 $\text{ways}(w, h, m)$ 表示宽为 w , 高为 h 的蛋糕, 被切 m 刀后, 最大的那块蛋糕的面积最小值
- 题目就是要求 $\text{ways}(W, H, M-1)$

边界条件:

$$w * h < m + 1 \quad \text{INF}$$

$$m == 0 \quad w * h$$

例八、分蛋糕

递推式:

SV为第一刀竖着切时能得到的最好结果, SH为第一刀横着切时能得到的最好结果, 则 $ways(w,h,m) = \min(SV,SH)$

$$SV = \min\{ S_i, i = 1 \dots w-1 \},$$

其中: S_i = 为第一刀左边宽为*i*的情况下的最好结果

例八、分蛋糕

递推式:

SV为第一刀竖着切时能得到的最好结果, SH为第一刀横着切时能得到的最好结果, 则 $\text{ways}(w,h,m) = \min(\text{SV}, \text{SH})$

$$\text{SV} = \min\{ S_i, i = 1 \dots w-1 \},$$

其中: $S_i =$ 为第一刀左边宽为*i*的情况下的最好结果

$$S_i = \min\{ \max(\text{ways}(i,h,k), \text{ways}(w-i,h,m-1-k)), k = 0 \dots m-1 \}$$