机器学习-高等数学回顾

黄海广 副教授

2021年07月

高等数学

1.导数定义：

导数和微分的概念

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

或者：$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

2.左右导数导数的几何意义和物理意义

函数$f(x)$在x_0处的左、右导数分别定义为：

左导数：$f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$

右导数：$f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3.函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数$f(x)$在x_0处可微$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处可导。

Th2:若函数在点x_0处可导，则$y=f(x)$在点x_0处连续，反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3:$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

4.平面曲线的切线和法线

切线方程：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程：$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$

5.四则运算法则

设函数$u=u(x)$，$v=v(x)$在点x可导，则：

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(2) $(uv)'=uv'+vu'$ $d(uv)=udv+vdu$

(3) $(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$ $d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

6.基本导数与微分表

(1) $y=c$（常数）　则：$y'=0$　$dy=0$

(2) $y=x^{\alpha}$(α为实数)　则：$y'=\alpha x^{\alpha-1}$　$dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$

(3) $y=a^{x}$　则：$y'=a^{x}\ln a$　$dy=a^{x}\ln a dx$　特例: $(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$　$d(\mathrm{e}^{x})=\mathrm{e}^{x}dx$

(4) $y=\log_{a}x$ 则：

$y'=\frac{1}{x\ln a}$　$dy=\frac{1}{x\ln a}dx$　特例:$y=\ln x$　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$　$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

(5) $y = \sin x$　则：$y' = \cos x$　$d(\sin x) = \cos x dx$

(6) $y = \cos x$　则：$y' = -\sin x$　$d(\cos x) = -\sin x dx$

(7) $y = \tan x$ 则：$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$　$d(\tan x) = \sec^2 x dx$

(8) $y = \cot x$ 则：$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$　$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

(9) $y = \sec x$ 则：$y' = \sec x \tan x$　$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

(10) $y = \csc x$　则：$y' = -\csc x \cot x$　$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

(11) $y=\arcsin x$ 则：$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(12) $y=\arccos x$ 则：$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $y=\arctan x$ 则：$y'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

(14) $y=\operatorname{arccot} x$ 则：$y'=-\frac{1}{1+x^2}$ $\quad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

(15) $y=shx$ 则：$y'=chx$ $\quad d(shx)=chxdx$

(16) $y=chx$ 则：$y'=shx$ $\quad d(chx)=shxdx$

7.复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则: 设$y=f(x)$在点x的某邻域内单调连续，在点x处可导且$f'(x)\neq 0$，则

其反函数在点x所对应的y处可导，并且有$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则:若$\mu=\varphi(x)$在点x可导,而$y=f(\mu)$在对应点$\mu(\mu=\varphi(x))$可导,则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x可导,且$y'=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)$

(3) 隐函数导数$\frac{dy}{dx}$的求法一般有三种方法：

1)方程两边对x求导，要记住y是x的函数，则y的函数是x的复合函数.例如$\frac{1}{y}$，y^2，lny，e^y等均是x的复合函数. 对x求导应按复合函数连锁法则做。

2)公式法.由$F(x,y)=0$知 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,其中，$F'_x(x,y)$， $F'_y(x,y)$分别表示$F(x,y)$对x和y的偏导数。

3)利用微分形式不变性

8.常用高阶导数公式

（1）$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

（2）$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

（3）$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

（4）$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

（5）$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}$

（6）莱布尼兹公式：若$u(x)$，$v(x)$均n阶可导，则：

$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$，其中$u^{(0)} = u$，$v^{(0)} = v$

9.微分中值定理，泰勒公式

Th1:(费马定理)

若函数$f(x)$满足条件:

(1)函数$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x) \le f(x_0)$或$f(x) \ge f(x_0)$,

(2) $f(x)$在x_0处可导,则有 $f'(x_0) = 0$

Th3：（拉格朗日中值定理）

设函数$f(x)$满足条件：

（1）在$[a,b]$上连续；（2）在(a,b)内可导；

则在(a,b)内存在一个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数$f(x)$，$g(x)$满足条件：

(1) 在$[a,b]$上连续；(2) 在(a,b)内可导且$f'(x)$，$g'(x)$均存在，且$g'(x) \neq 0$

则在(a,b)内存在一个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10.洛必达法则

法则 I ($\frac{0}{0}$型不定式极限)

设函数$f(x), g(x)$满足条件: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0;\ f(x), g(x)$在$x_0$的邻域内可导

(在x_0处可除外)且$g'(x) \neq 0;$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$存在(或$\infty$)。

则: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

法则I′ ($\frac{0}{0}$型不定式极限)

设函数$f(x), g(x)$满足条件： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;存在一个$X > 0$,当$|x| > X$时,$f(x), g(x)$可导,且$g'(x) \neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$存在(或∞)。

则： $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}.$

法则Ⅱ($\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限)

设函数$f(x), g(x)$满足条件:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$; $f(x), g(x)$在x_0 的邻域内可导(在x_0处可除外)

且$g'(x)\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)。

则: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

同理法则II'($\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限)仿法则I'可写出

11.泰勒公式

设函数$f(x)$在点x_0处的某邻域内具有$n+1$阶导数，则对该邻域内异于x_0的任意点x，在x_0与x之间至少存在一个ξ，使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为$f(x)$在点$x_0$处的$n$阶泰勒余项。

令$x_0=0$，则n阶泰勒公式： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$……

其中(1) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ，ξ在0与x之间。(1)式称为麦克劳林公式

高等数学

常用五种函数在$x_0=0$处的泰勒公式：

1) $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$

或$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)$

或$=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$

高等数学

3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$

或 $= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + o(x^n)$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$

或 $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$

或 $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

12.函数单调性的判断

Th1: 设函数$f(x)$在(a,b)区间内可导，如果对$\forall x\in(a,b)$，都有$f'(x)>0$（或$f'(x)<0$），则函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的（或单调减少）。

Th2: （取极值的必要条件）设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取极值，则$f'(x_0)=0$.

Th3: （取极值的第一充分条件）设函数$f(x)$在x_0的某一邻域内可微，且$f'(x_0)=0$（或$f(x)$在x_0处连续，但$f'(x_0)$不存在.）。

(1)若当x经过x_0时，$f'(x)$由“+”变“-”，则$f(x_0)$为极大值;

(2)若当x经过x_0时，$f'(x)$由“-”变“+”，则$f(x_0)$为极小值;

(3)若$f'(x)$经过$x=x_0$的两侧不变号，则$f(x_0)$不是极值。

Th4: (取极值的第二充分条件)设$f(x)$在点x_0处有$f''(x)\neq 0$，且$f'(x_0)=0$，则：

当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值； 当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$为极小值. 注：如果$f''(x_0)0$，此方法失效。

13.渐近线的求法

(1)水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则$y=b$ 称为函数$y=f(x)$的水平渐近线。

(2)铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则$x=x_0$ 称为$y=f(x)$的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$称为$y=f(x)$的斜渐近线。

14.函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理）若在I上$f''(x) < 0$（或$f''(x) > 0$），则$f(x)$在I上是凸的（或凹的）。

Th2: (拐点的判别定理1)若在x_0处$f''(x) = 0$，（或$f''(x)$不存在），当x变动经过x_0时，$f''(x)$变号，则$(x_0, f(x_0))$为拐点。

Th3: (拐点的判别定理2)设$f(x)$在x_0点的某邻域内有三阶导数，且$f''(x) = 0$，$f'''(x) \neq 0$，则$(x_0, f(x_0))$为拐点。

15.弧微分

$$dS = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

16.曲率

曲线$y = f(x)$在点(x, y)处的曲率$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

对于参数方程：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$

17.曲率半径

曲线在点M处的曲率$k(k \neq 0)$与曲线在点M处的曲率半径ρ有如下关系：$\rho = \frac{1}{k}$

参考文献

1. https://github.com/fengdu78/WZU-machine-learning-course

   《高等数学》（上、下），同济大学

谢 谢！